SOMATÓRIOS

1. O que é?

O somatório é um operador, representado pela letra grega $\sum$ (sigma maiúsculo).

2. Para que serve?

Considere X uma variável, representada pelo conjunto abaixo, com n observações:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

O somatório serve para representar a soma de elementos de um conjunto. Assim:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

3. Como se lê?

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ somatório de x_i, i variando de 1 até n.

Exemplos:

Seja X uma variável que representa a nota de 6 alunos no exercício, apresentada no conjunto

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\} = \{3,5,6,7,7,10\}$

Calcule:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 3 + 5 + 6 = 14$$

$$\sum_{i=4}^{6} x_i = x_4 + x_5 + x_6 = 7 + 7 + 10 = 24$$

$$\sum_{i=2}^{5} x_i = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 + 6 + 7 + 7 = 25$$

4. Exemplos de Operações utilizando o somatório

a) Seja X a variável que representa a nota da prova de 3 alunos: X={1,3,4}.

$$\sum_{i=1}^{3} 2.x_i = 2.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 = 2.1 + 2.3 + 2.4 = 2 + 6 + 8 = 16$$

$$\sum_{i=1}^{3} (x_i - 1) = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) = (1 - 1) + (3 - 1) + (4 - 1) = 0 + 2 + 3$$
$$= 5$$

$$\sum_{i=1}^{3} (x_i)^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 9 + 16 = 26$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = (1 + 3 + 4)^2 = 8^2 = 64$$

b) Seja X a variável idade, representada agrupada em frequências absolutas simples (n_i).

i	xi	ni	xi.ni	xi²
1	18	13	234	324
2	19	15	285	361
3	20	10	200	400
4	25	7	175	625
Total	82	45	894	1710

Calcule:

$$\sum_{i=1}^{4} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 13 + 15 + 10 + 7 = 45$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot n_i = x_1 \cdot n_1 + \cdots + x_4 \cdot n_4 = 18 \cdot 13 + \cdots + 25 \cdot 7 = 234 + \cdots + 175 = 894$$

5. Propriedades dos somatórios

Sejam a uma constante, X um conjunto com n observações e Y outro conjunto com n observações.

$$\sum_{i=1}^{n} a \cdot x_i = a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a + x_i) = a \cdot n + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i) \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

No exemplo b), observe que:

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 1710 \neq 82 \cdot 82 = 6724$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot n_i) = 894 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} n_i\right) = 82 \cdot 45 = 3690$$

Exemplo c) Demonstrações de propriedades

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2 \cdot x_i \cdot a + a^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot a^2$$

Suponha que **a** seja igual a média de X:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{n}{n} + n \cdot a^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot n + n \cdot a^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot a^2$$

6. Somatórios Múltiplos

Suponha que os 45 alunos da turma sejam representados, além da idade (X), mas também pela variável sexo (Y), onde Y=1 representa o sexo masculino e Y=2 o feminino.

Os dados estão representados na tabela de contingência ou de dupla entrada abaixo:

		Y		
		Y_1=Masc	Y_2=Fem	**Total**
X	X_1=18	10	3	**13**
	X_2=19	10	5	**15**
	X_3=20	5	5	**10**
	X_4=25	5	2	**7**
	Total	**30**	**15**	**45**

Note que podemos escrever:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{18,19,20,25\}$$

$$Y = \{y_1, y_2\} = \{1,2\}$$

$$Matriz\ N = Freq.Abs.Simples = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \\ n_{31} & n_{32} \\ n_{41} & n_{42} \end{bmatrix} = [n_{ij}]$$

i=linhas=1,2,3,4 e j=colunas=1,2

O número total de alunos, n , pode ser representado por um somatório duplo:

$$n = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2} n_{ij}$$

Abrindo os somatórios teremos:

$$n = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} n_{ij} = n_{11} + n_{12} + n_{21} + n_{22} + n_{31} + n_{32} + n_{41} + n_{42} =$$

$$n = 10 + 3 + 10 + 5 + 5 + 5 + 5 + 2 = 45$$

Os somatórios parciais, considerando somente a variável idade, teremos:

$$n_{1\blacksquare} = \sum_{j=1}^{2} n_{1j} = n_{11} + n_{12} = 10 + 3 = 13$$

$$n_{2\blacksquare} = \sum_{j=1}^{2} n_{2j} = n_{21} + n_{22} = 10 + 5 = 15$$

$$n_{3\blacksquare} = \sum_{j=1}^{2} n_{3j} = n_{31} + n_{32} = 5 + 5 = 10$$

$$n_{4\blacksquare} = \sum_{j=1}^{2} n_{4j} = n_{41} + n_{42} = 5 + 2 = 7$$

Os somatórios parciais, considerando somente a variável sexo, teremos

$$n_{\blacksquare 1} = \sum_{i=1}^{4} n_{i1} = n_{11} + n_{21} + n_{31} + n_{41} = 10 + 10 + 5 + 5 = 30$$

$$n_{\blacksquare 2} = \sum_{i=1}^{4} n_{i2} = n_{12} + n_{22} + n_{32} + n_{42} = 3 + 5 + 5 + 2 = 15$$

EXERCÍCIOS [Toledo, pág.48]

1. Calcular os seguintes somatórios, utilizando as propriedades, para X={2,3,4,5}:

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i + 2)$$

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i + 2)^2$$

2. Seja X uma variável com n observações e $\bar{X}$ a média da variável X, calculada por $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Utilizando as propriedades e supondo que n_i é a frequência absoluta simples, mostre que:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X}) \cdot n_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2 \cdot n_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}$$

3. Seja X uma variável representada pelo conjunto X={17,18,19,20,21,22,23}, n=7. Calcule:

$\bar{X}$

$\bar{Y}$ onde $y_i = x_i + 2$

$\bar{Z}$ onde $z_i = x_i - 16$

Var_X onde $Var_x = \frac{1}{7} \cdot \sum_{i=1}^{7}(x_i - \bar{X})^2$

Var_y onde $Var_y = \frac{1}{7} \cdot \sum_{i=1}^{7}(y_i - \bar{Y})^2$

Var_z onde $Var_z = \frac{1}{7} \cdot [\sum_{i=1}^{7} z_i^2 - 7.\bar{Z}^2]$