

Contrôle optimal pour le recalage d'organe en chirurgie augmentée

Guillaume Mestdagh

13 décembre 2022

Direction : Stéphane Cotin & Yannick Privat

Chirurgie augmentée

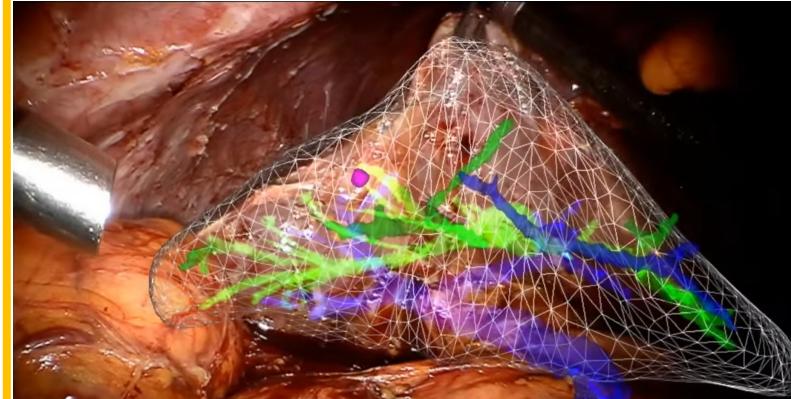
Chirurgie faiblement invasive



(Samuel Bendet, US Air Force)

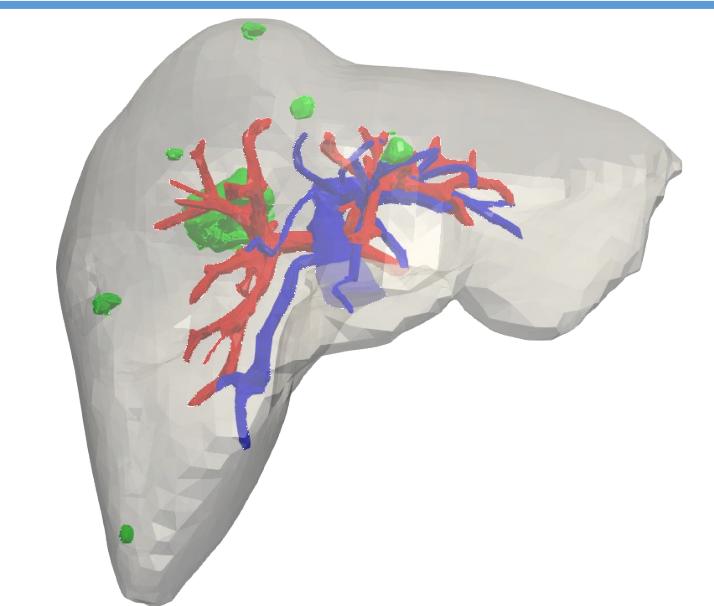
- Interaction indirecte avec l'organe
- Retour vidéo sur un écran
- Champ de vision limité, structures internes cachées
- Scène en mouvement

Chirurgie augmentée Réalité augmentée



Objectif
Réalité augmentée
pendant la chirurgie

Inria, 2018



Données préopératoires
Modèle 3D du foie extrait
d'images tomographiques



Données peropératoires
Position de la surface du
foie déformée

Problème : Mettre à jour la déformation du foie pendant l'opération

Chirurgie augmentée

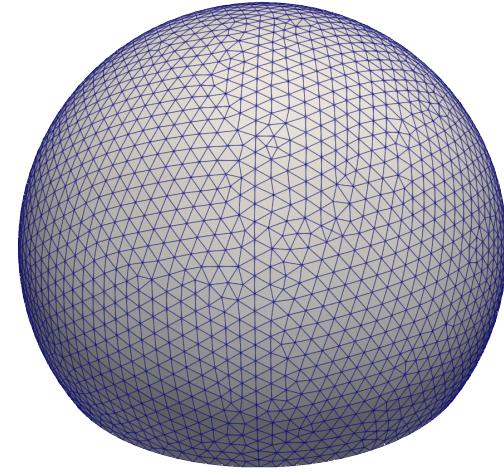
Recalage élastique

Objectif

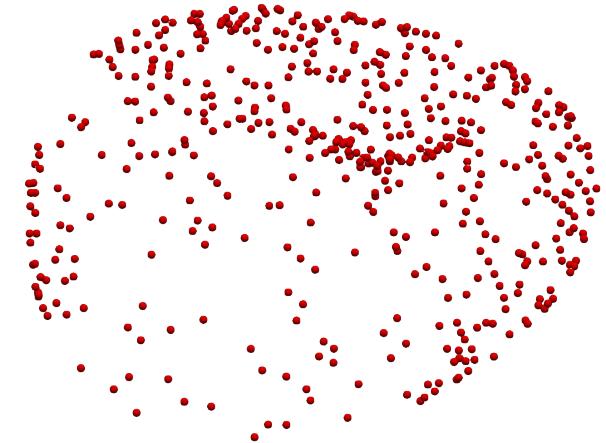
Calculer une déformation élastique à partir de données de surface

Données disponibles

- Maillage représentant le solide dans sa configuration de référence
- Modèle élastique
- Nuage de points représentant la surface déformée



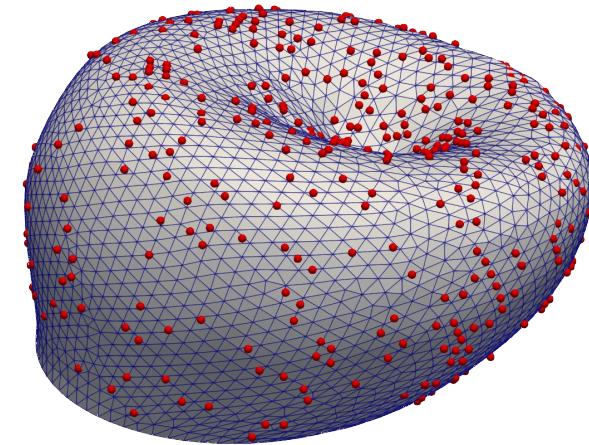
Maillage initial



Nuage de points



Calcul d'une déformation



Maillage déformé

Encore une méthode de recalage ?

Déjà beaucoup de méthodes proposées pour le recalage du foie

Enjeux de modélisation

- Poser le problème dans un cadre mathématique rigoureux
- Propriétés du problème continu
- Respecter la physique du problème

Enjeux numériques

- Situer les méthodes existantes dans un cadre générique
- Appliquer des nouvelles classes de méthodes au problème

Plan de l'exposé

- 1. État de l'art**
- 2. Existence de solutions en dimension 2**
- 3. Conditions d'optimalité et méthode d'adjoint**
- 4. Application en chirurgie augmentée**

1 État de l'art

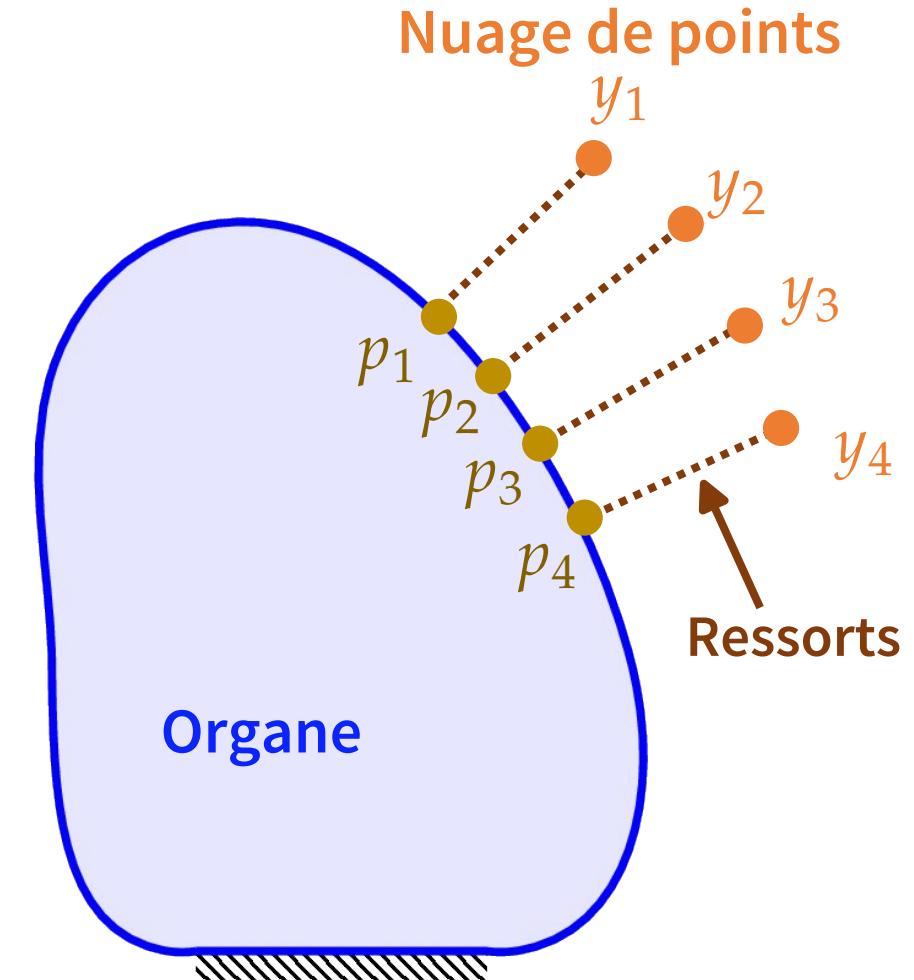
Iterative closest point et variantes

Ajout de forces fictives dans le modèle direct

- Forces attractives (ressorts) entre les p_j et les y_j
- Le modèle élastique régularise le déplacement

Limites de cette approche

- Les forces ne s'appliquent que là où il y a des données
- Pas de lien avec les causes réelles du déplacement



1 État de l'art

Approches par problème inverse

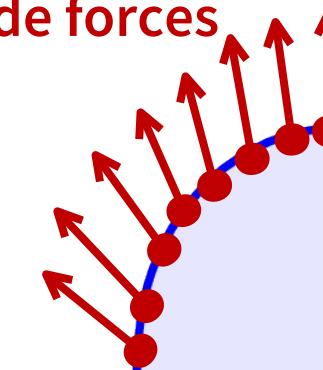
Prise en compte des causes du déplacement

- Hypothèses physiques sur les forces à l'origine du déplacement
- Minimisation d'une fonction de coût

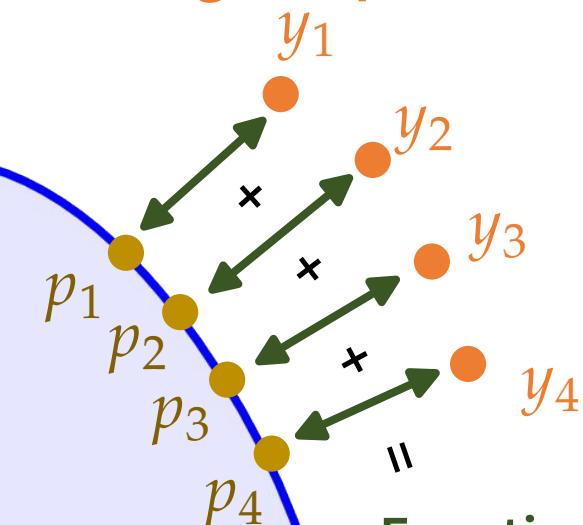
Limites de ces approches

- Méthodes très spécifiques à un scénario donné
- Limité à l'élasticité linéaire

Distribution de forces



NUAGE DE POINTS



Fonction de coût

1 État de l'art

Notre approche

- Formalisme du contrôle optimal
- Problème continu indépendant du maillage
- Accès aux outils classiques de l'optimisation
- Compatible avec l'élasticité non-linéaire

Problème direct

$$F(u_g) = g$$

Modèle élastique

État
Forces de surface
Contrôle
Champ de déplacement

Problème d'optimisation

$$\min_{g} J(u_g)$$

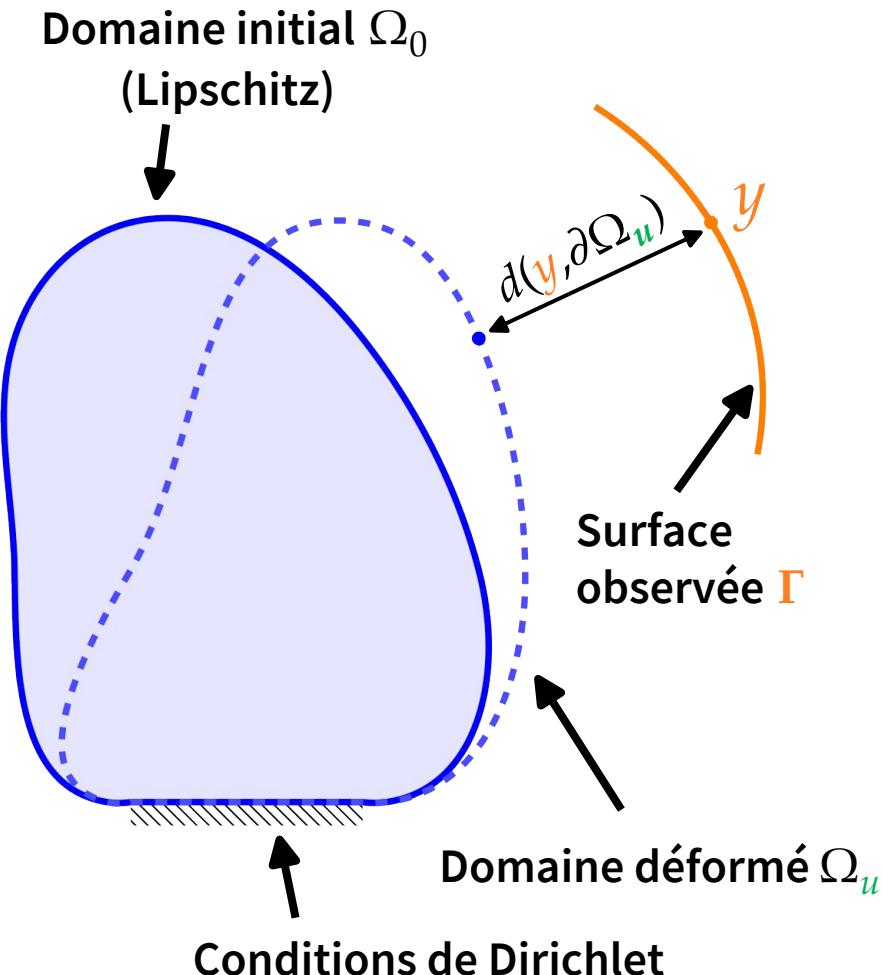
sous la contrainte

Fonction de coût

$$F(u_g) = g$$

2 Existence de solutions en dimension 2

Notations pour le problème continu



Fonction de coût

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} d^2(y, \partial\Omega_u) dy$$

Modèle élastique

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A\varepsilon(\mathbf{u})) = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_D \\ A\varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega_N \end{cases}$$

État : champ de déplacement

Contrôle : efforts de surface

Contrainte supplémentaire

$$\|\mathbf{g}\|_{L^\infty} \leq M$$

2 Existence de solutions en dimension 2

Résultat préliminaire

Hypothèses

- Domaine Ω_0 régulier au sens de Gröger

Frontière de classe $W^{1,\infty}$

Interface $W^{1,\infty}$ entre les conditions de Dirichlet et les conditions de Neumann

Résultat

Existence de $p > 2$ tel que $g \in L^\infty(\partial\Omega_N) \Rightarrow u_g \in W^{1,p}(\Omega_0)$

Utilité

Quand $p > \dim(\mathbf{R}^d)$: injection compacte $W^{1,p}(\Omega_0) \rightarrow C^0(\overline{\Omega}_0)$

- En dimension 2 : OK
- En dimension 3 : pas d'injection compacte

2 Existence de solutions en dimension 2

Schéma de la démonstration

Suite minimisante (g_i) et états associés (u_i): $J(u_i) \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{} \inf_g J(g)$

Convergence
 $(g_i) \rightarrow g_{\text{lim}}$?

Convergence
 $(u_i) \rightarrow u_{g_{\text{lim}}}$?

Convergence
uniforme
 $(u_i) \rightarrow u_{g_{\text{lim}}}$?

Conclusion ?

Convergence $u_i \rightarrow u_{g_{\text{lim}}}$ dans C^0

(Continuité de J)

$$J(u_{g_{\text{lim}}}) = \lim J(u_i) = \min J$$

g_{lim} solution du problème

Toutes les convergences ont lieu à une sous-suite près.

2 Existence de solutions en dimension 2

Schéma de la démonstration

Suite minimisante (g_i) et états associés (u_i): $J(u_i) \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{} \inf_g J(u_g)$

Convergence
 $(g_i) \rightarrow g_{\lim}$?

Convergence
 $(u_i) \rightarrow u_{g_{\lim}}$?

Convergence
uniforme
 $(u_i) \rightarrow u_{g_{\lim}}$?

Conclusion ?

Suite (g_i) bornée dans L^∞

Convergence ~~forte~~ dans L^∞ vers une limite g_{\lim}

Toutes les convergences ont lieu à une sous-suite près.

2 Existence de solutions en dimension 2

Schéma de la démonstration

Suite minimisante (g_i) et états associés (u_i): $J(u_i) \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{} \inf_g J(g)$

Convergence
 $(g_i) \rightarrow g_{\lim}$?

Convergence
 $(u_i) \rightarrow u_{g_{\lim}}$?

Convergence
uniforme
 $(u_i) \rightarrow u_{g_{\lim}}$?

Conclusion ?

Suite (g_i) bornée dans L^∞

(Banach-Alaoglu-Bourbaki)

Convergence faible-* dans L^∞ vers une limite g_{\lim}

$$\forall h \in L^1(\partial\Omega_N) \quad \int_{\partial\Omega_N} g_i \cdot h \, ds \rightarrow \int_{\partial\Omega_N} g_{\lim} \cdot h \, ds$$

Toutes les convergences ont lieu à une sous-suite près.

2 Existence de solutions en dimension 2

Schéma de la démonstration

Suite minimisante (g_i) et états associés (u_i): $J(u_i) \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{} \inf_g J(g)$

Convergence
 $(g_i) \rightarrow g_{\lim}$?

Convergence
 $(u_i) \rightarrow u_{g_{\lim}}$?

Convergence
uniforme
 $(u_i) \rightarrow u_{g_{\lim}}$?

Conclusion ?

$$\int_{\partial\Omega_N} g_i \cdot v \, ds = \int_{\Omega_0} A\varepsilon(u_i) : \varepsilon(v) \, dx$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\int_{\partial\Omega_N} g_{\lim} \cdot v \, ds = \int_{\Omega_0} A\varepsilon(u_{g_{\lim}}) : \varepsilon(v) \, dx$$

↓
(Inégalité de Korn)

$u_i \rightarrow u_{g_{\lim}}$ pour la topologie faible dans H^1

Toutes les convergences ont lieu à une sous-suite près.

2 Existence de solutions en dimension 2

Schéma de la démonstration

Suite minimisante (g_i) et états associés (u_i) : $J(u_i) \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{} \inf_g J(g)$

Convergence
 $(g_i) \rightarrow g_{\lim}$?

Convergence
 $(u_i) \rightarrow u_{g_{\lim}}$?

Convergence
uniforme
 $(u_i) \rightarrow u_{g_{\lim}}$?

Conclusion ?

Suite (g_i) bornée dans L^∞

(Résultat préliminaire)

Suite (u_i) bornée dans $W^{1,p}$

(Injection compacte)

Convergence $u_i \rightarrow u_{g_{\lim}}$ dans C^0

Toutes les convergences ont lieu à une sous-suite près.

2 Existence de solutions en dimension 2

Et en dimension 3 ?

Résultat sur un modèle physique plus simple

- Utilisation d'une équation scalaire de type

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A\nabla \textcolor{blue}{u}) = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \textcolor{blue}{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_D \\ A\varepsilon(\textcolor{blue}{u}) \cdot n = \textcolor{red}{g} & \text{sur } \partial\Omega_N \end{cases}$$

- Existence d'une solution au problème en toute dimension

Avec l'élasticité

- On peut conjecturer l'existence d'une solution

3 Conditions d'optimalité et méthode d'adjoint

Méthode d'adjoint

Problème à résoudre

$$\min_g \phi(\mathbf{g}) \quad \text{où} \quad \phi(\mathbf{g}) = J(\mathbf{u}_g)$$

↑
Fonction objectif

- Une seule variable d'optimisation : le contrôle
- Problème élastique caché dans la fonction objectif
- Utilisation des conditions d'optimalité pour mesurer la progression de la méthode d'optimisation

3 Conditions d'optimalité et méthode d'adjoint

Cas différentiable

Si g est un minimum local, alors ...

État adjoint

- Défini tel que $\forall \mathbf{h} \in L^\infty(\partial\Omega_N) \quad \langle d\phi(g), \mathbf{h} \rangle = \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{p} \cdot \mathbf{h} \, ds$
- Solution du problème adjoint

$$\forall \mathbf{w} \in C^0(\Omega_0) \quad \int_{\Omega_0} A\varepsilon(\mathbf{p}) : \varepsilon(\mathbf{w}) \, dx = \langle dJ(u_g), \mathbf{w} \rangle$$

État adjoint

Conditions d'optimalité sur le contrôle

$$\text{p.p.t. } x \in \partial\Omega_N \quad \mathbf{p}(x) + \lambda(x)g(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda(x) \geq 0 \\ \|g(x)\| \leq M \\ \lambda(x)(\|g(x)\| - M) = 0 \end{cases}$$

↑
Une fonction de $L^2(\partial\Omega_N)$

Gestion de la
contrainte L^∞ sur g

3 Conditions d'optimalité et méthode d'adjoint

$$j(\textcolor{green}{u}) = \frac{1}{2} d^2(\textcolor{brown}{y}, \partial\Omega_{\textcolor{green}{u}})$$

Dérivée directionnelle

Dérivée directionnelle

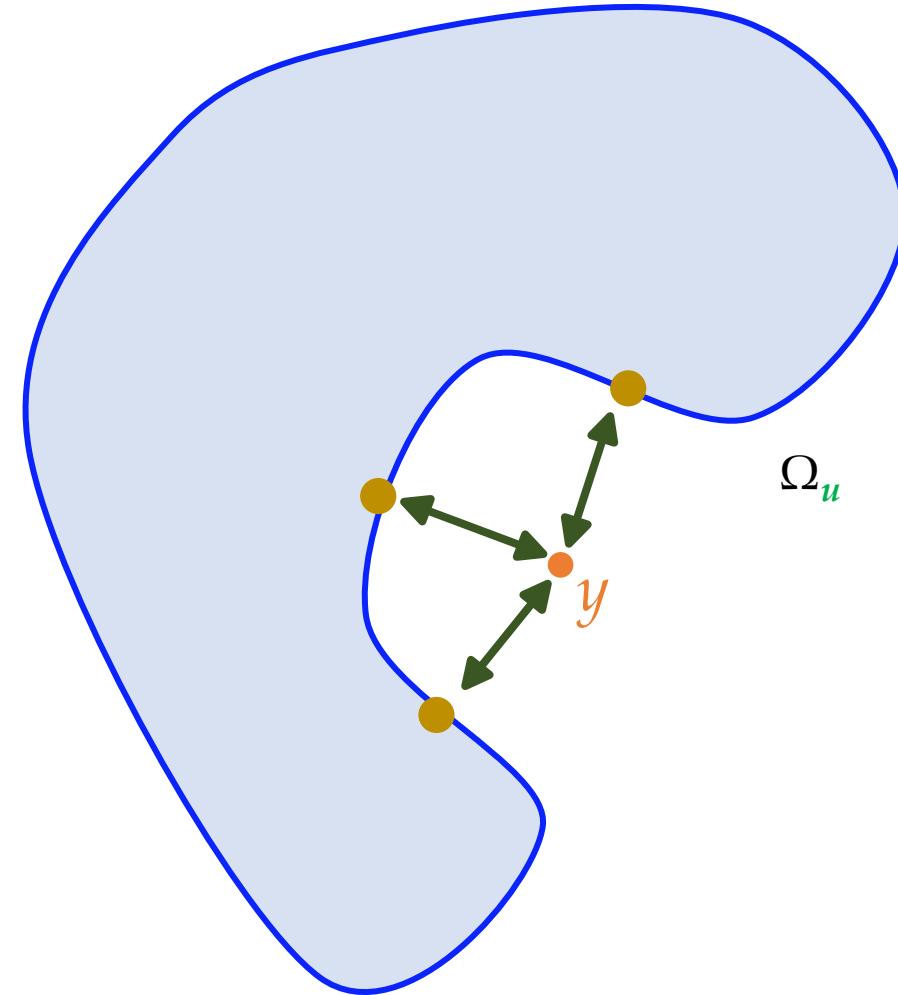
$$dJ(\textcolor{green}{u})(\textcolor{green}{w}) = \min_{f \in L(\textcolor{green}{u})} \langle f, \textcolor{green}{w} \rangle$$

Forme linéaire

avec f de la forme

$$\langle f, w \rangle = \int_{\Gamma} w(x_{\textcolor{brown}{y}}) \cdot [(\text{Id} + \textcolor{green}{u})(x_{\textcolor{brown}{y}}) - \textcolor{brown}{y}] \, dy$$

où $(\text{Id} + \textcolor{green}{u})(x_{\textcolor{brown}{y}}) \in \text{Proj}(\textcolor{brown}{y}, \partial\Omega_u)$



3 Conditions d'optimalité et méthode d'adjoint

$$j(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} d^2(\mathbf{y}, \partial\Omega_{\mathbf{u}})$$

Dérivée directionnelle

Dérivée directionnelle

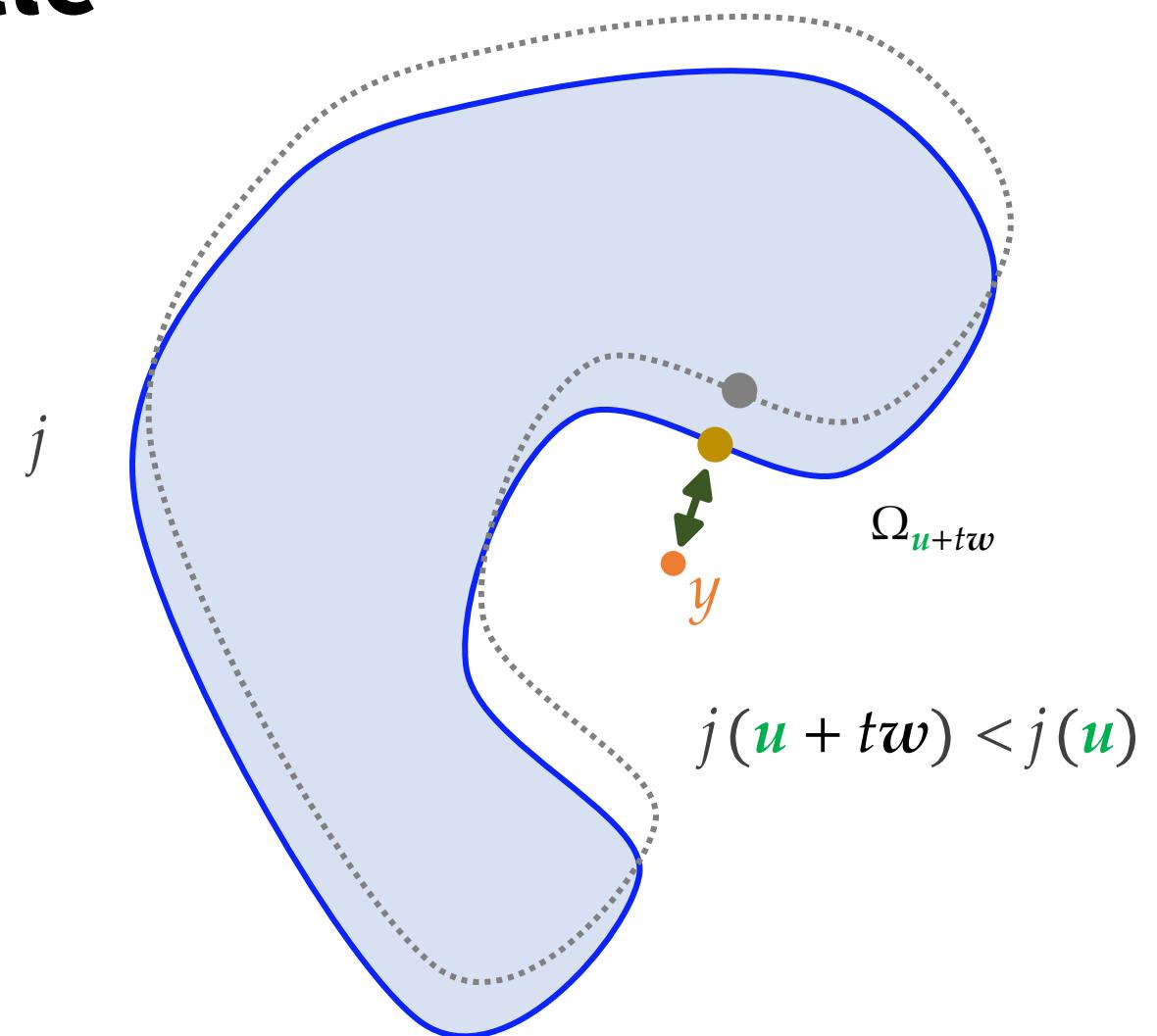
$$dJ(\mathbf{u})(\mathbf{w}) = \min_{f \in L(\mathbf{u})} \langle f, \mathbf{w} \rangle$$

Forme linéaire

avec f de la forme

$$\langle f, \mathbf{w} \rangle = \int_{\Gamma} \mathbf{w}(x_{\mathbf{y}}) \cdot [(\text{Id} + \mathbf{u})(x_{\mathbf{y}}) - \mathbf{y}] \, dy$$

où $(\text{Id} + \mathbf{u})(x_{\mathbf{y}}) \in \text{Proj}(\mathbf{y}, \partial\Omega_{\mathbf{u}})$



$$j(\mathbf{u} + t\mathbf{w}) < j(\mathbf{u})$$

3 Conditions d'optimalité et méthode d'adjoint

Dérivée directionnelle

Dérivée directionnelle

$$dJ(\mathbf{u})(\mathbf{w}) = \min_{f \in L(\mathbf{u})} \langle f, \mathbf{w} \rangle$$

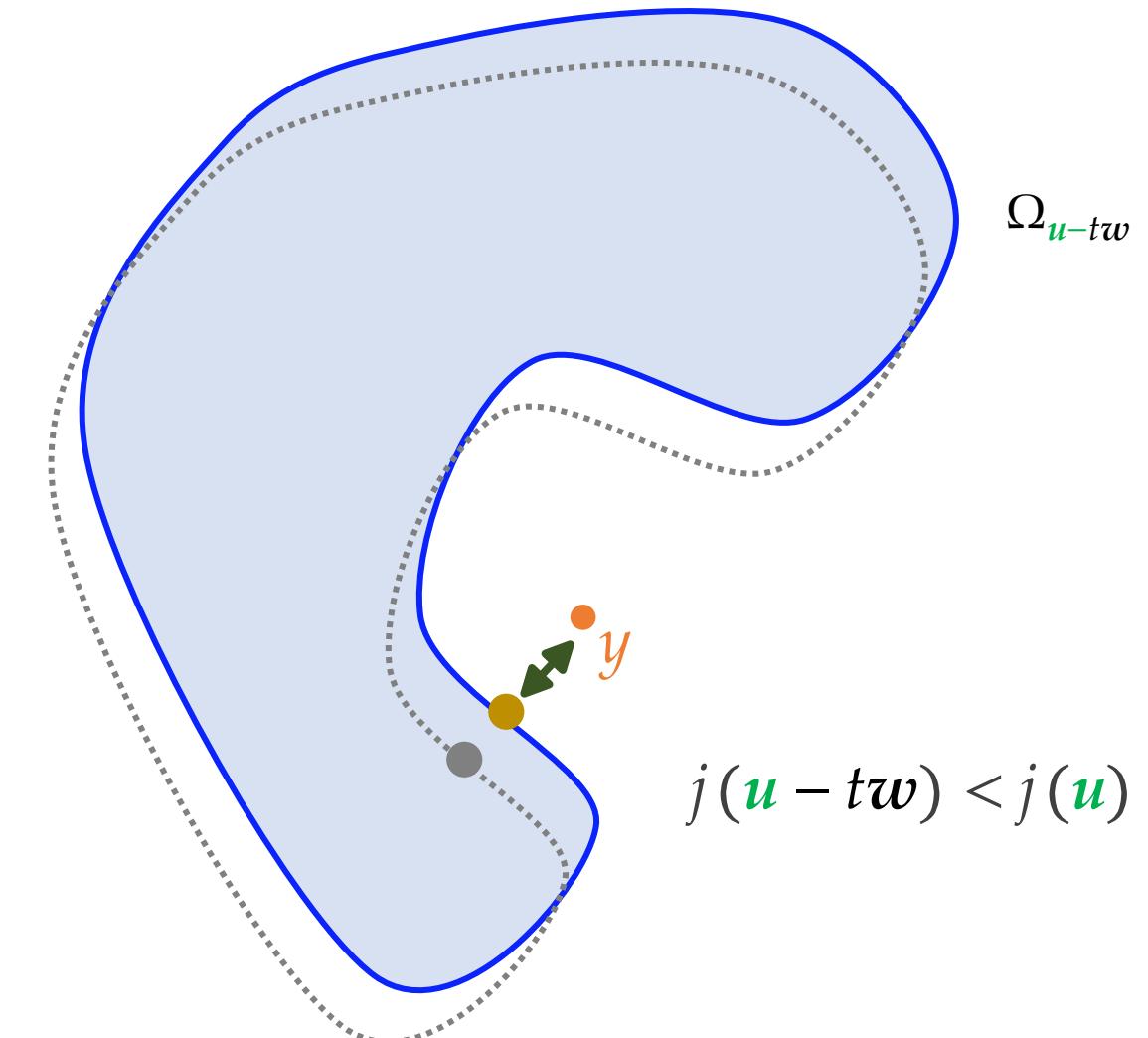
Forme linéaire

avec f de la forme

$$\langle f, \mathbf{w} \rangle = \int_{\Gamma} \mathbf{w}(x_{\mathbf{y}}) \cdot [(\text{Id} + \mathbf{u})(x_{\mathbf{y}}) - \mathbf{y}] \, dy$$

où $(\text{Id} + \mathbf{u})(x_{\mathbf{y}}) \in \text{Proj}(\mathbf{y}, \partial\Omega_{\mathbf{u}})$

$$j(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} d^2(\mathbf{y}, \partial\Omega_{\mathbf{u}})$$



3 Conditions d'optimalité et méthode d'adjoint

Dérivée directionnelle

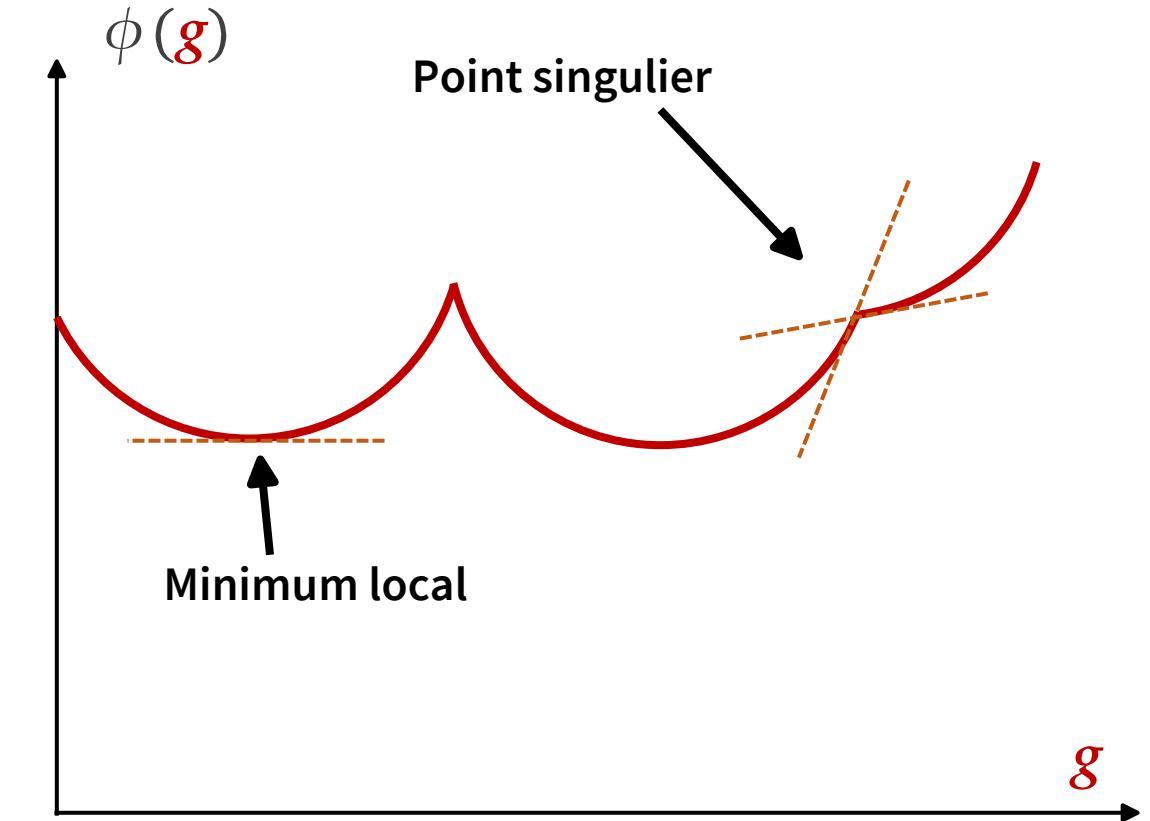
Famille d'états adjoints

$$d\phi(\mathbf{g})(\mathbf{h}) = \min_{f \in L(\mathbf{u}_g)} \int_{\partial\Omega_N} p_f \cdot \mathbf{h} \, ds$$

État adjoint associé à f

Avec p_f solution du problème adjoint

$$\forall \mathbf{w} \int_{\Omega_0} A\varepsilon(p_f) : \varepsilon(\mathbf{w}) \, dx = \langle f, \mathbf{w} \rangle$$



3 Conditions d'optimalité et méthode d'adjoint

Dérivée directionnelle

Famille d'états adjoints

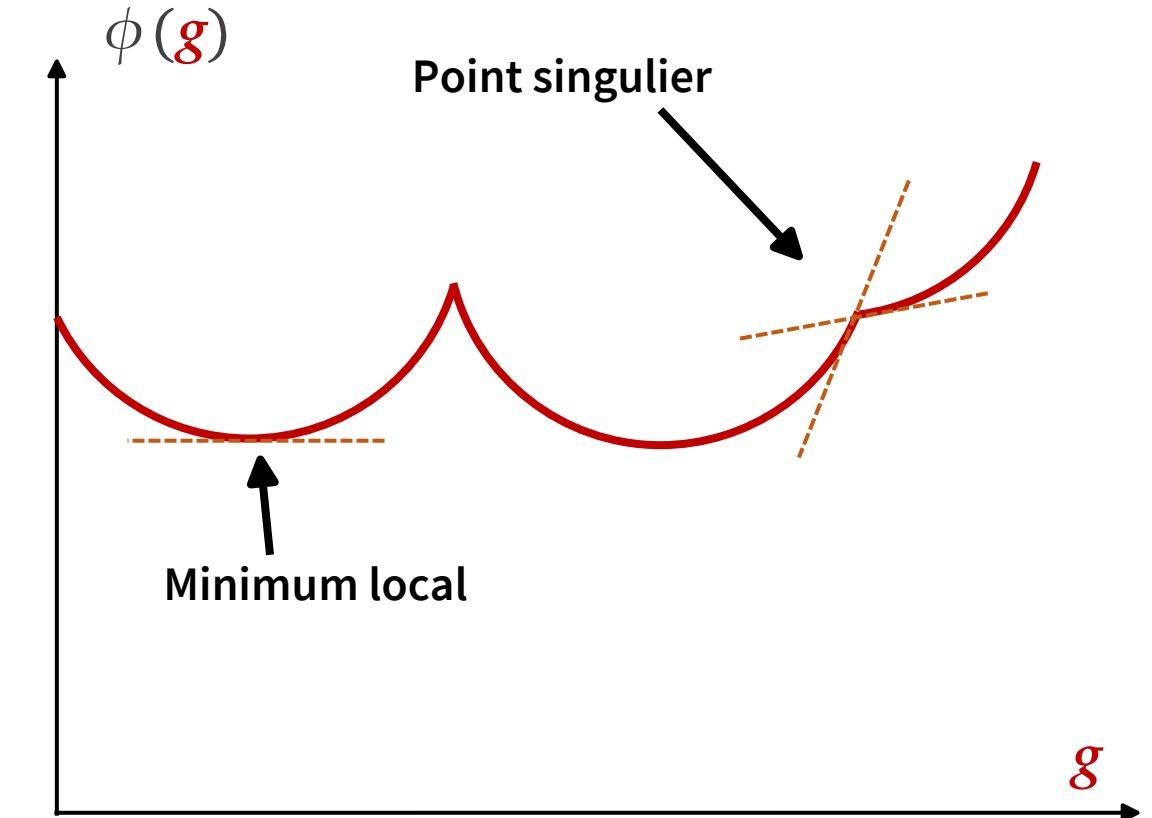
$$d\phi(\mathbf{g})(\mathbf{h}) = \min_{f \in L(\mathbf{u}_g)} \int_{\partial\Omega_N} p_f \cdot \mathbf{h} \, ds$$

État adjoint associé à f

Lemme

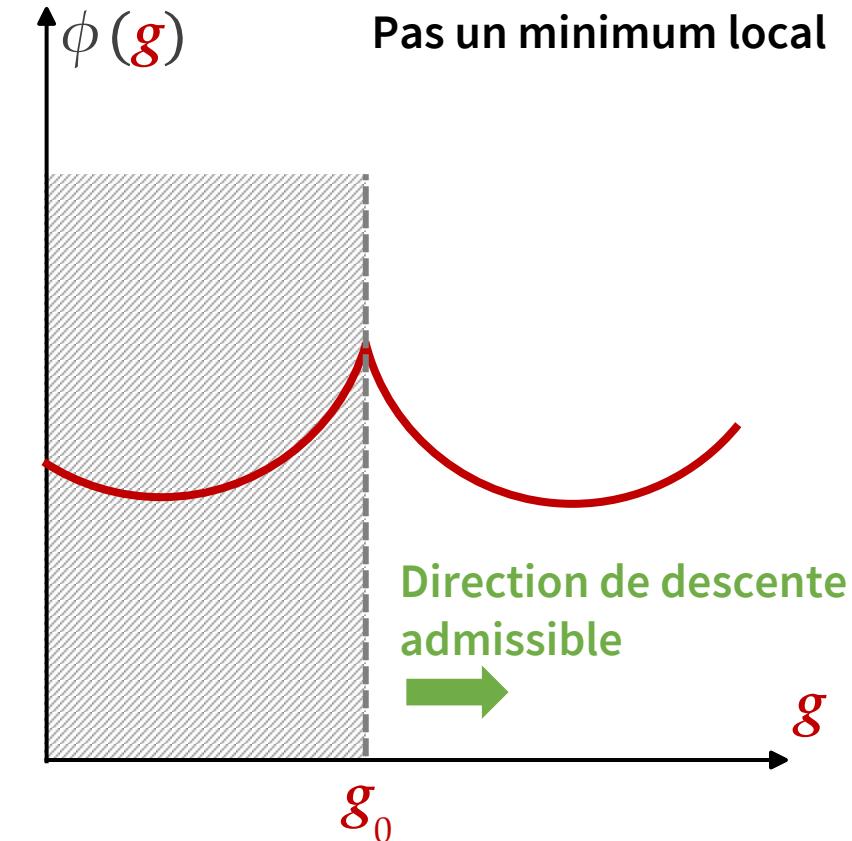
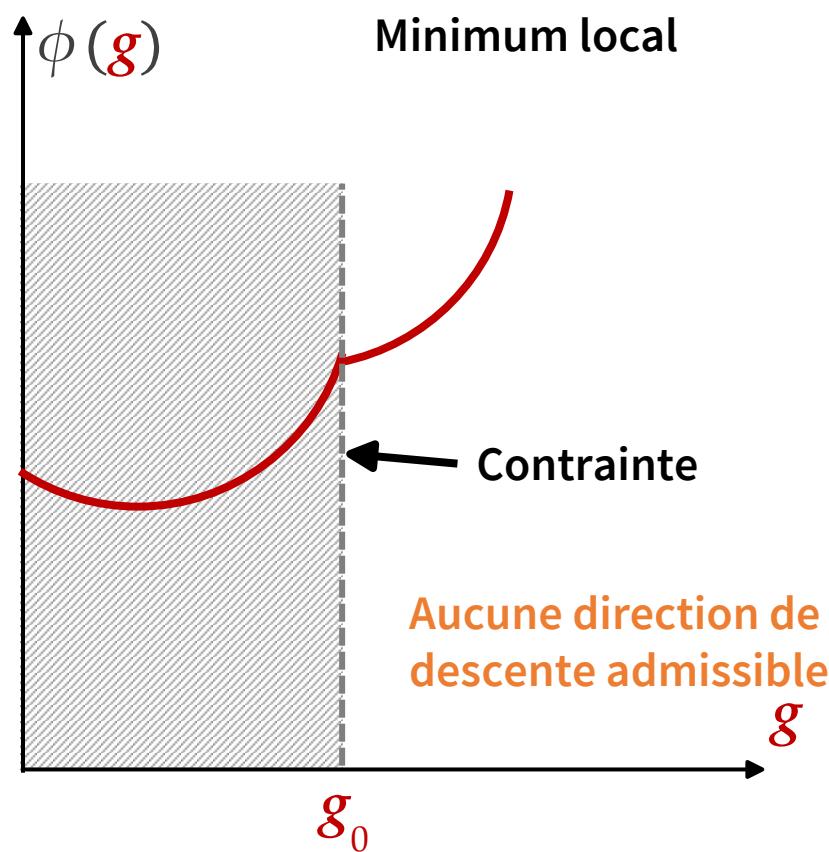
Un minimum local (sans contrainte) de ϕ ne peut pas être un point singulier.

Justification : $d\phi(\mathbf{g})(\mathbf{h}) \leq -d\phi(\mathbf{g})(\mathbf{h})$



3 Conditions d'optimalité et méthode d'adjoint

Minimum local et contrainte active



Tous les p_f doivent vérifier les conditions d'optimalité à un minimum local

3 Conditions d'optimalité et méthode d'adjoint

Conditions d'optimalité adaptées

Conditions d'optimalité sur le contrôle

Si g est un minimum local de ϕ , il existe une famille de multiplicateurs (λ_f) tel que

$$\forall f \in L(\textcolor{red}{u}_g) \quad \text{p.p.t. } x \in \partial\Omega_N \quad \textcolor{blue}{p}_f(x) + \lambda_f(x) g(x) = 0 \quad \text{avec} \begin{cases} \lambda_f(x) \geq 0 \\ \|g(x)\| \leq M \\ \lambda_f(x)(\|g(x)\| - M) = 0 \end{cases}$$

3 Conditions d'optimalité et méthode d'adjoint

Implémentation de la méthode d'adjoint

- Difficile de gérer un nombre variable de projections en pratique
- Fonctionnelle J différentiable presque partout
- Résultats déjà satisfaisants sans la contrainte L^∞ sur g
- Cas non-différentiable négligé dans le cas discret

3 Conditions d'optimalité et méthode d'adjoint

Implémentation de la méthode d'adjoint

Solveur d'optimisation

Engendre des itérés

Nouvel itéré \mathbf{g}

Gradient dans l'espace des \mathbf{g}

$$\phi(\mathbf{g}) = J(\mathbf{u}_g)$$

$$\nabla \phi(\mathbf{g}) = \mathbf{p}$$

Méthode d'éléments finis

Gère le problème élastique

Calcul de l'état associé

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_g) = \mathbf{g}$$

Calcul de l'état adjoint

$$[\nabla \mathbf{F}(\mathbf{u}_g)]^T \mathbf{p} = \nabla J(\mathbf{u}_g)$$

↑
Matrice tangente ↑
Etat adjoint

Fonction de coût

Mesure l'attache aux données

Évaluation de la fonction de coût

$$J(\mathbf{u}_g) \quad \nabla J(\mathbf{u}_g)$$

3 Conditions d'optimalité et méthode d'adjoint

Implémentation de la méthode d'adjoint

Solveur d'optimisation

Engendre des itérés

Solveurs Scipy

- Cas sans contrainte : quasi-Newton (L-BFGS)
- Cas avec contrainte : primal-dual (SQP)

Méthode d'éléments finis

Gère le problème élastique

SOFA ou Fenics

- Cas linéaire : assemblage de la matrice de raideur
- Cas non-linéaire : méthode de Newton

Fonction de coût

Mesure l'attache aux données

Package Trimesh

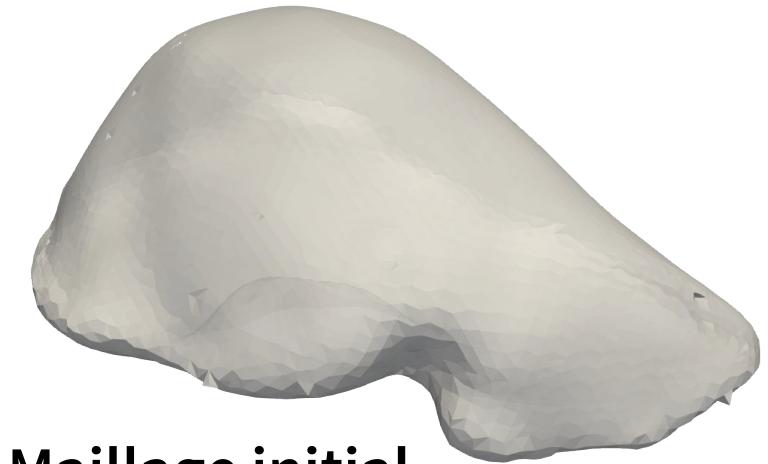
- Projections sur le maillage déformé
- Utilisation d'une structure d'arbre (R-tree)

4 Application en chirurgie augmentée

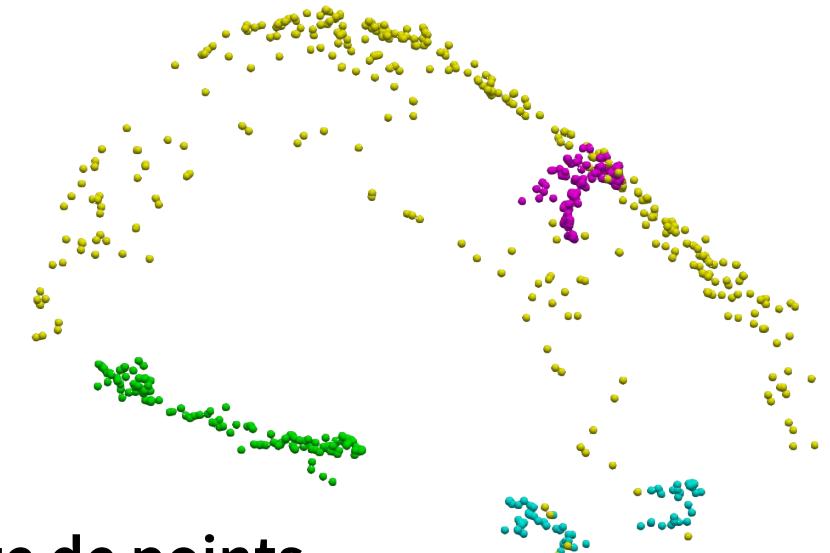
Sparse Data Challenge

Données disponibles

- 1 maillage, 112 nuages de points acquis avec un foie factice en silicone
(sparsedatachallenge.org)
- Observation de la face antérieure
- Forces appliquées sur la face postérieure



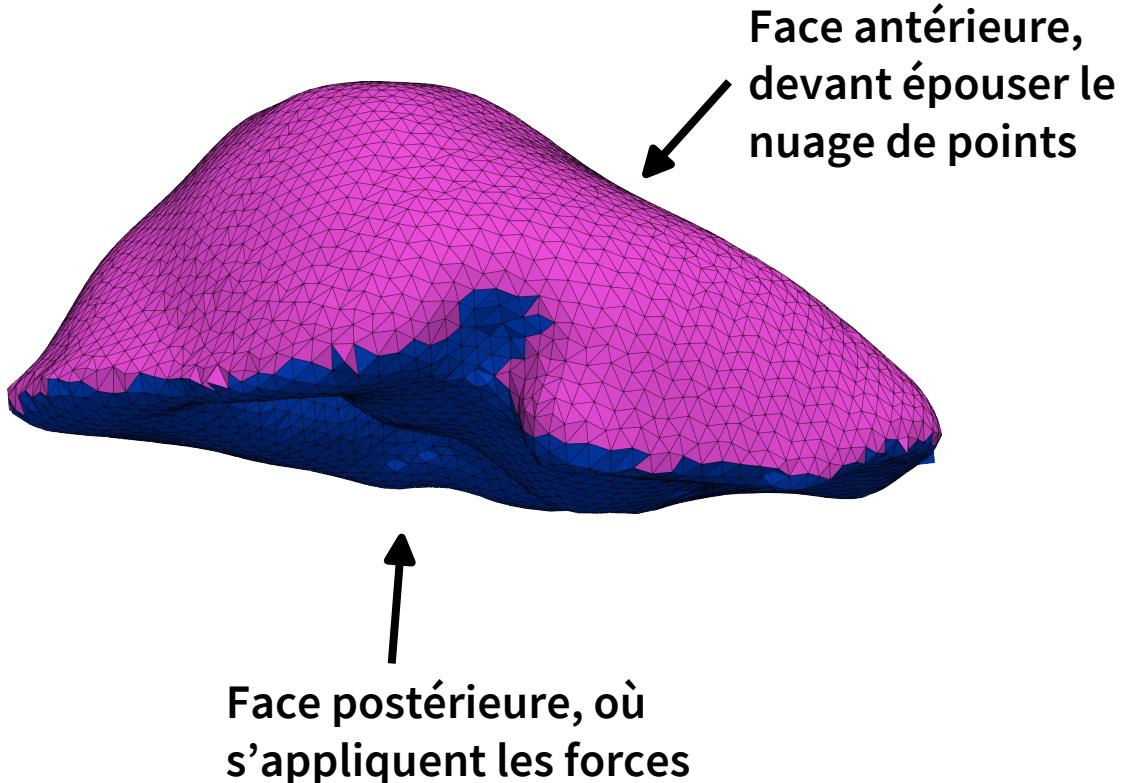
Maillage initial



NUAGE DE POINTS

4 Application en chirurgie augmentée

Sparse Data Challenge



Méthode de recalage

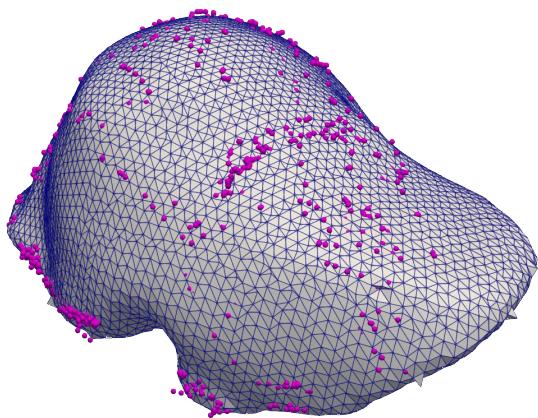
- Recalage rigide initial
- Condition de Dirichlet définie sur une partie de la face arrière
- Optimisation par une méthode de quasi-Newton (L-BFGS-B)
 - 200 itérations
 - 80 s

4 Application en chirurgie augmentée

Sparse Data Challenge

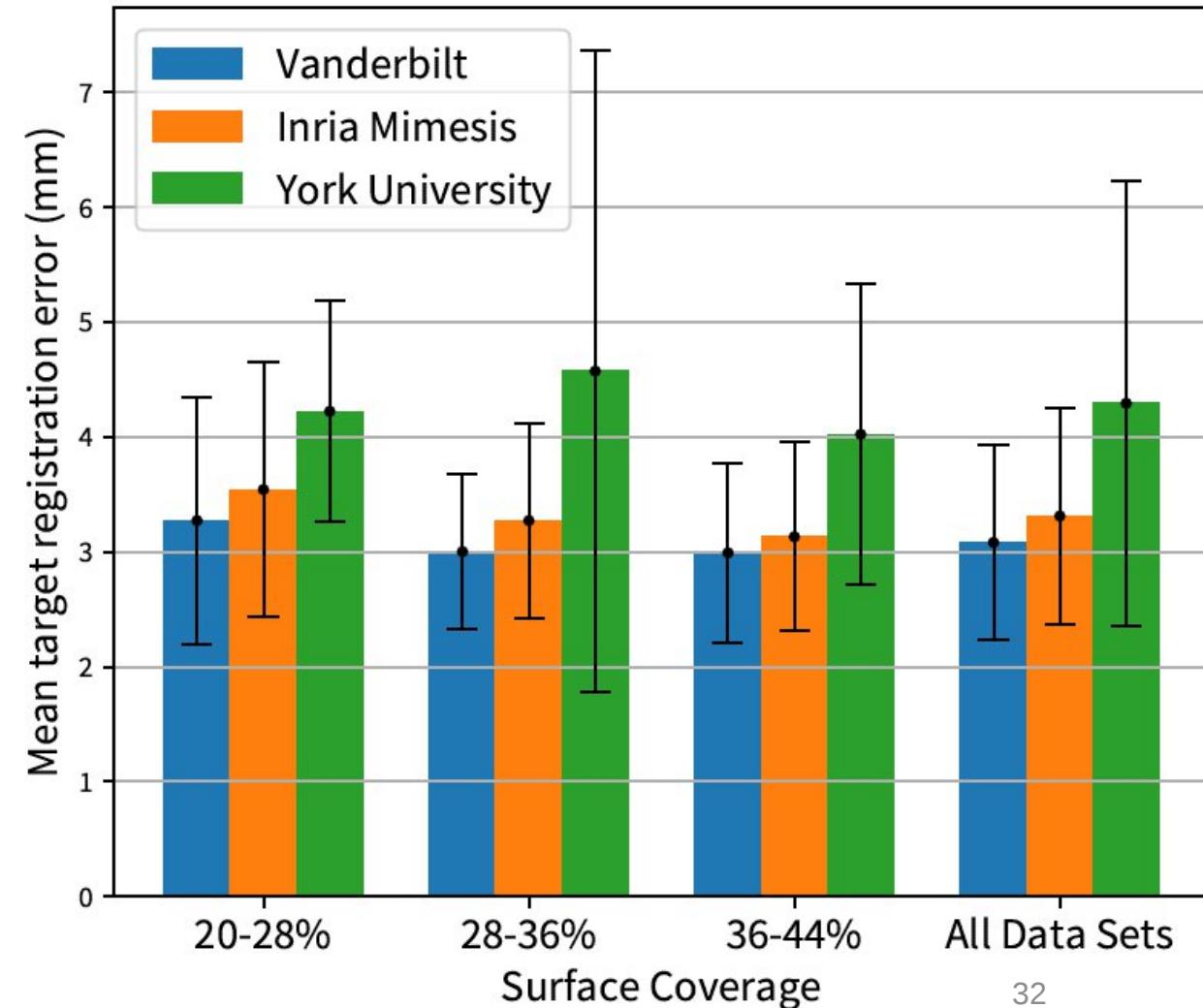
Résultats

- Erreur de recalage mesurée par le site du concours
- 159 marqueurs dispersés à l'intérieur du foie factice



Maillage après le
recalage

Erreurs de recalage pour tous les participants

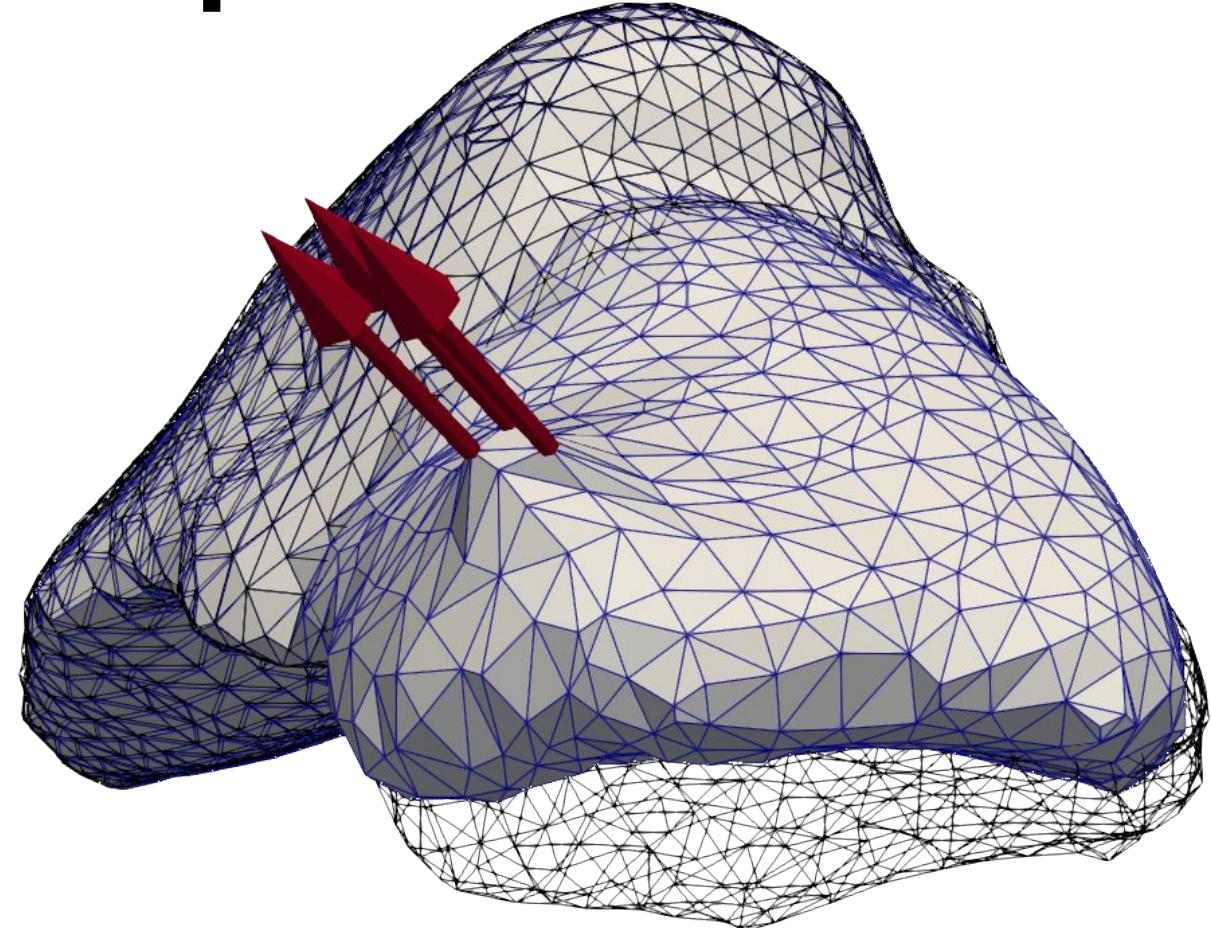


4 Application en chirurgie augmentée

Estimation d'une force ponctuelle

Génération de données

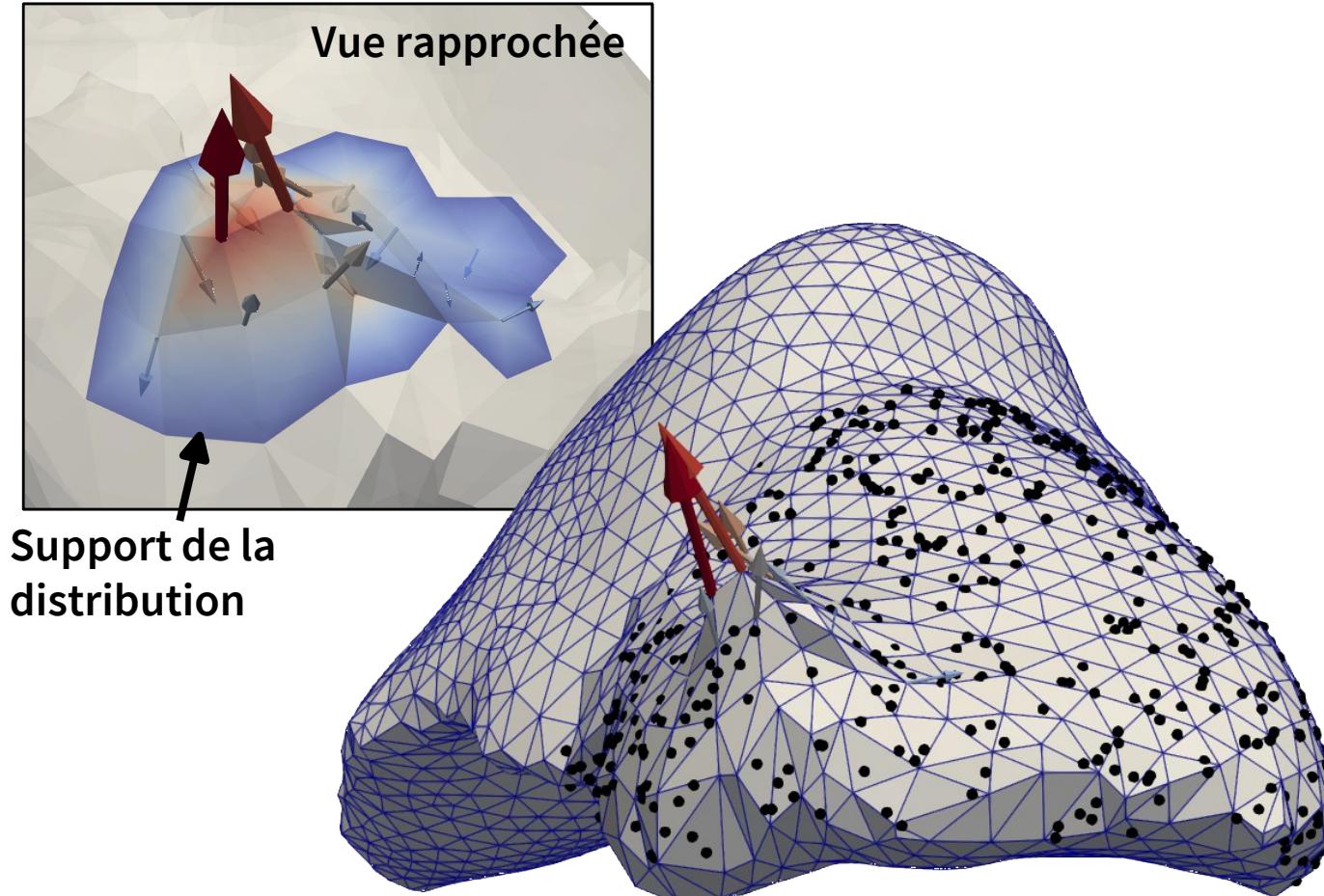
- On applique une force locale sur le maillage
- On échantillonne la surface déformée pour créer un nuage de points
- 5 séries de 50 observations, avec un petit déplacement entre observations successives



Déformation synthétique

4 Application en chirurgie augmentée

Estimation d'une force ponctuelle



Distribution de force reconstruite

Estimation de la force

- Distribution de force restreinte à un voisinage du point d'application
- Mise à jour de l'estimation entre deux observations
- Résultante obtenue en sommant les forces à chaque nœud du maillage

4 Application en chirurgie augmentée

Estimation d'une force ponctuelle

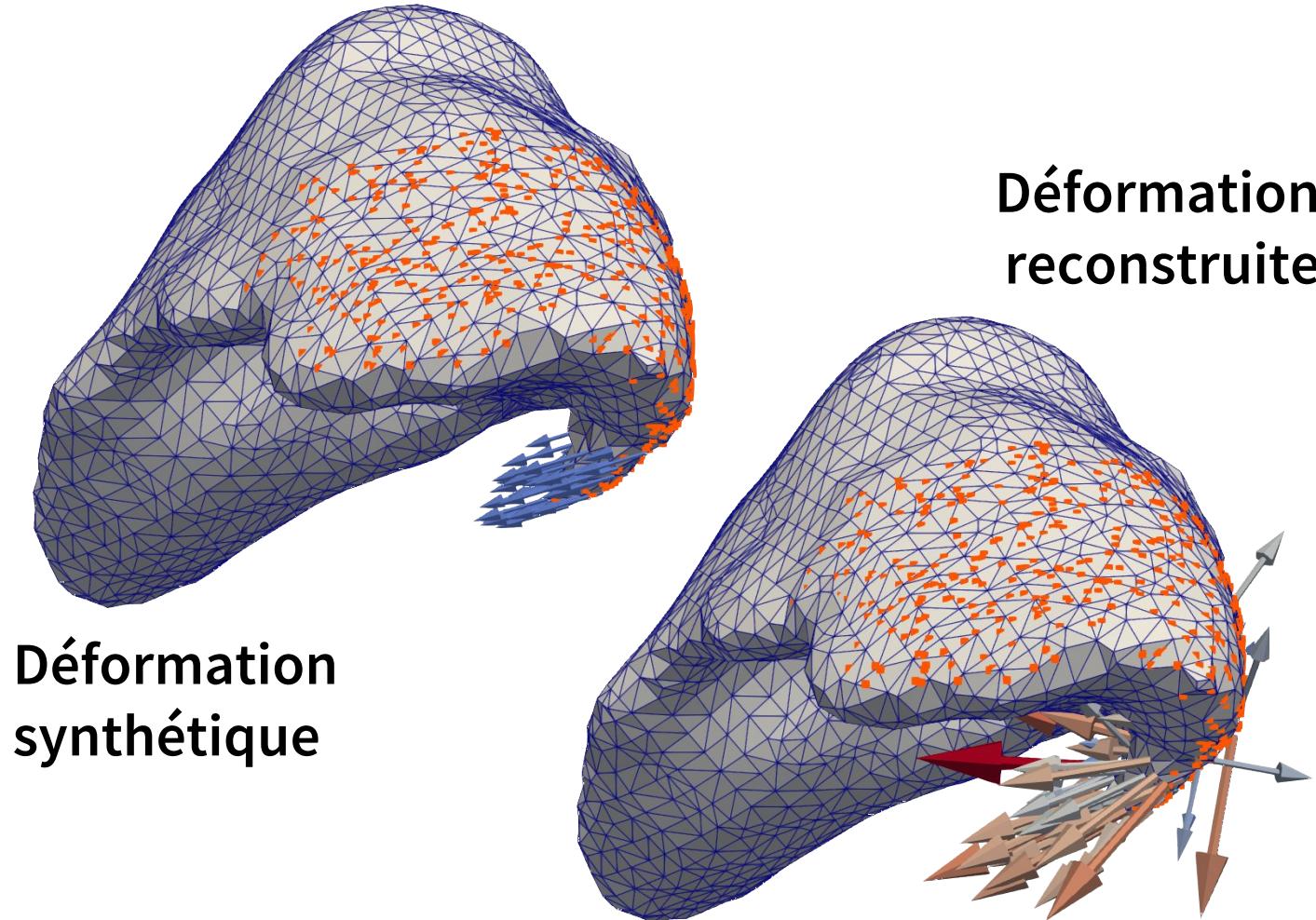
Erreur d'estimation

Valeurs moyennes pour chaque série

Cas test	Éval. objectif	Tps de mise à jour	Erreur d'estimation
Cas 1	9,2	1,42 s	8,9 %
Cas 2	5,6	0,85 s	16,2 %
Cas 3	5,5	0,84 s	5,7 %
Cas 4	5,4	0,82 s	4,4 %
Cas 5	6,2	0,96 s	15,0 %
Moyenne	6,4	0,98 s	10,0 %

4 Application en chirurgie augmentée

Estimation non-linéaire



Problème non-linéaire

- Néo-Hookeen
- Résolu itérativement par méthode de Newton
- L'optimisation termine quand le solveur direct n'est plus assez précis

4 Application en chirurgie augmentée

Estimation non-linéaire

Erreur d'estimation

Valeurs moyennes pour chaque série

Cas test	Éval. objectif	Tps de mise à jour	Erreur d'estimation
Cas 1	29,3	18min 25s	7,9 %
Cas 2	4,9	10min 32s	6,5 %
Cas 3	6,3	10min 39s	2,8 %
Cas 4	21,7	18min 11s	6,5 %
Cas 5	7,6	12min 41s	19,9 %
Moyenne	14,0	14min 6s	8,7 %

Conclusion

- Contrôle optimal : le modèle physique devient une règle du jeu
- Résultats théoriques sur le problème continu
- Résultats numériques avec des modèles linéaires et non-linéaires

Perspectives

- Modélisation : enlever les conditions de Dirichlet
- Autres méthodes d'optimisation numérique

Travail en cours : un réseau de neurones pour recalier plus vite

Un réseau de neurones pour recalculer plus vite

Méthode d'adjoint classique

Solveur d'optimisation

Engendre des itérés

Nouvel itéré \mathbf{g}

Gradient dans l'espace des \mathbf{g}

$$\phi(\mathbf{g}) = J(\mathbf{u}_g)$$

$$\nabla \phi(\mathbf{g}) = \mathbf{p}$$

Méthode d'éléments finis

Gère le problème élastique

Calcul de l'état associé

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_g) = \mathbf{g}$$

Calcul de l'état adjoint

$$[\nabla \mathbf{F}(\mathbf{u}_g)]^T \mathbf{p} = \nabla J(\mathbf{u}_g)$$

Matrice tangente État adjoint

- Long
- Peut ne pas converger
- Fonction objectif évaluée à une certaine tolérance près

Fonction objectif

Mesure l'attache aux données

Évaluation de la fonction objectif

$$J(\mathbf{u}_g) \quad \nabla J(\mathbf{u}_g)$$

Un réseau de neurones pour recalculer plus vite

Méthode d'adjoint classique

Solveur d'optimisation

Engendre des itérés

Nouvel itéré \mathbf{g}

Gradient dans l'espace des \mathbf{g}

$$\phi(\mathbf{g}) = J(\mathbf{u}_g)$$

$$\nabla\phi(\mathbf{g}) = \mathbf{p}$$

Méthode d'éléments finis

Gère le problème élastique

Calcul de l'état associé

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_g) = \mathbf{g}$$

Calcul de l'état adjoint

$$[\nabla\mathbf{F}(\mathbf{u}_g)]^T \mathbf{p} = \nabla J(\mathbf{u}_g)$$

Matrice tangente État adjoint

- Long
- Peut ne pas converger
- Fonction objectif évaluée à une certaine tolérance près

Fonction objectif

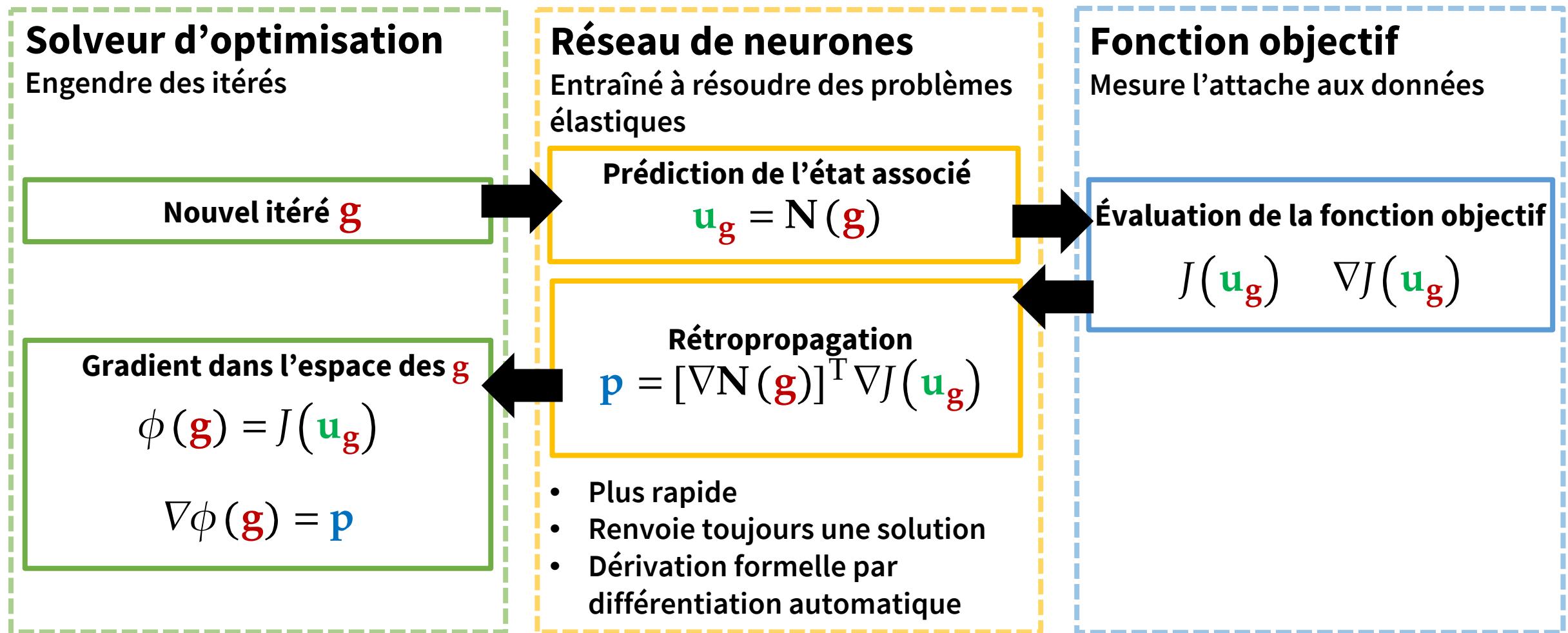
Mesure l'attache aux données

Évaluation de la fonction objectif

$$J(\mathbf{u}_g) \quad \nabla J(\mathbf{u}_g)$$

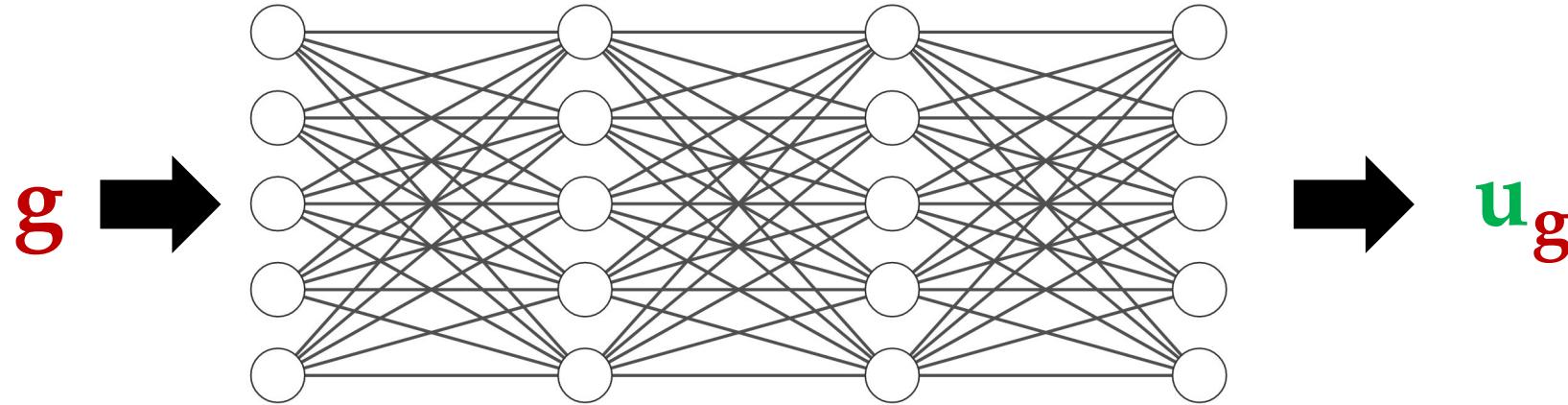
Un réseau de neurones pour recalculer plus vite

Méthode d'adjoint avec le réseau



Un réseau de neurones pour recaler plus vite

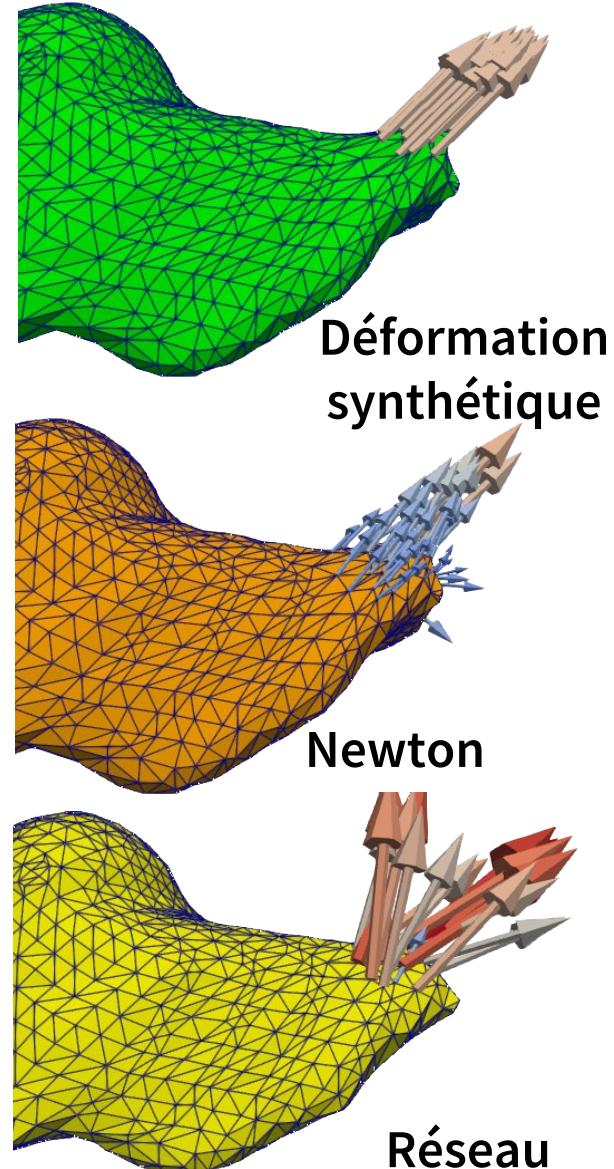
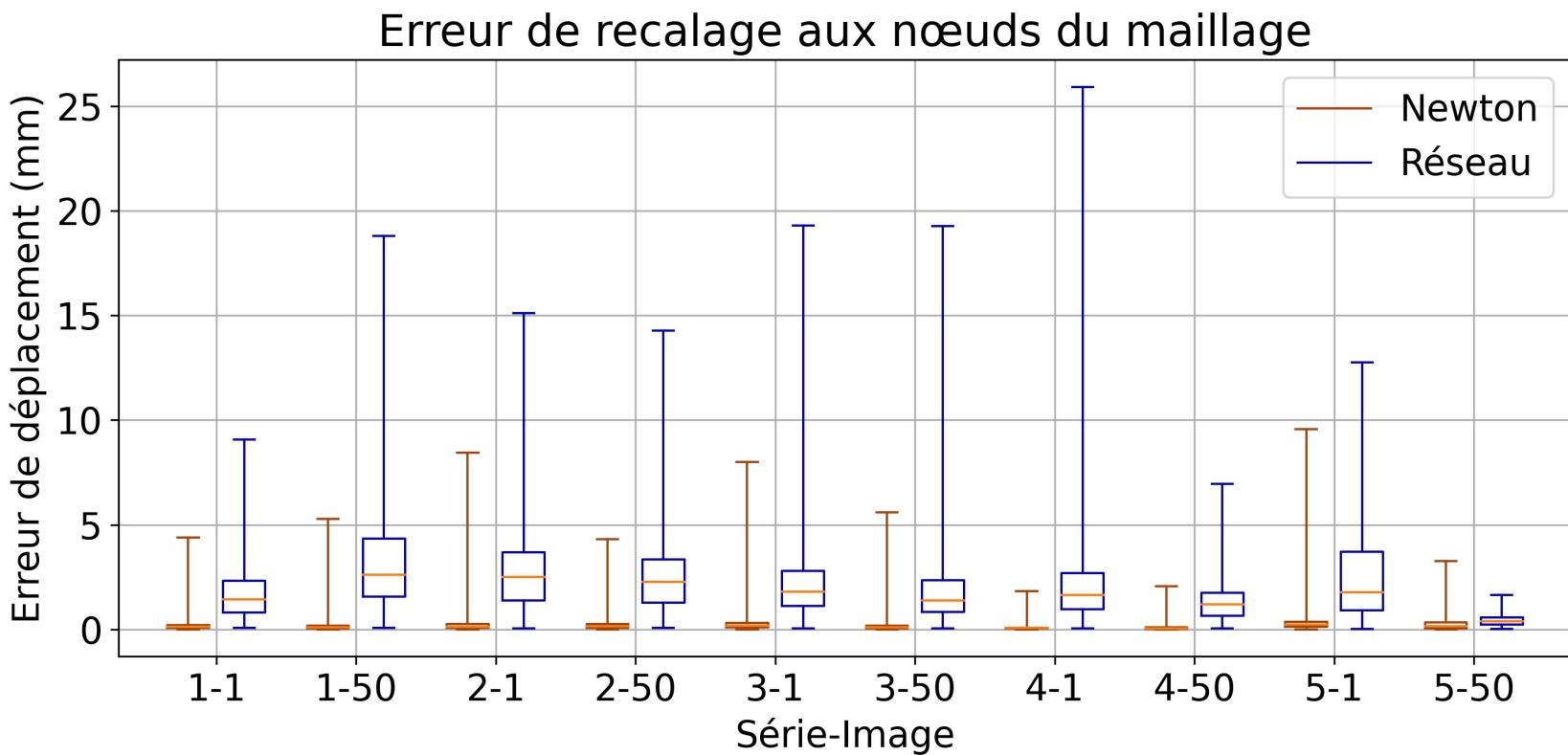
Réseau de neurones



- *Fully-connected*, quatre couches
- Uniquement des opérations matrice-vecteur directes
- Entraîné sur des simulations de déformation non-linéaire

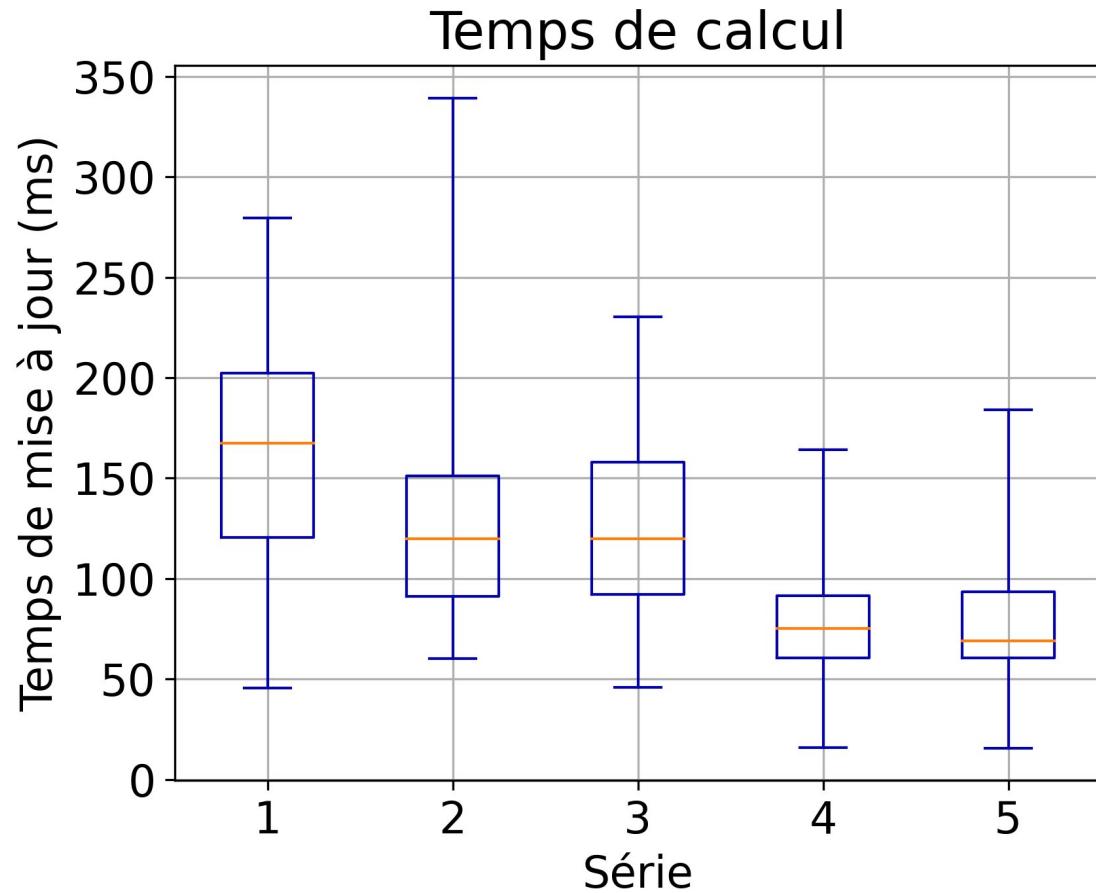
Un réseau de neurones pour recaler plus vite
Recalage avec le réseau

Essai sur les 5 séries de déformations



Un réseau de neurones pour recalculer plus vite

Recalage avec le réseau



Temps de mise à jour
~ 150 ms

Accélération permise par le réseau
x6000

Conclusion

- Encore quelques réglages à faire pour améliorer la précision du recalage
- Contrôle optimal avec le réseau : combine la vitesse de calcul du réseau et la flexibilité d'une méthode d'adjoint classique
- Une piste intéressante pour une application en chirurgie

Merci pour votre attention !