中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

# Lab 2

## 线性方程组求解


姓名：高茂航

学号：PB22061161


日期：2024.3.28

# Lab 2

## 1 Algorithm Description

已知 $y_0=0, y_{100}=1$,解线性方程组 $\mathbf{Ay}=\mathbf{b}$,其中

$$\mathbf{A_{99\times 99}}=\begin{bmatrix}-(2\epsilon+h) & \epsilon+h & 0 & \cdots & 0\\ \epsilon & -(2\epsilon+h) & \epsilon+h & \cdots & 0\\ 0 & \epsilon & -(2\epsilon+h) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon & -(2\epsilon+h)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_{99}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}ah^2\\ ah^2\\ \vdots\\ ah^2\\ ah^2-\epsilon-h\end{bmatrix}$$

设相对误差 $\mathrm{err}=\frac{1}{99}\sum_{i=1}^{99}|y_i-\mathrm{Precise}_i|$。

### 1.1 列主元消元法

记录当前所处的位置 A[col][col], 在第 col 行到最后一行中找到绝对值最大的元素,将该元素所在的行与第 col 行交换,然后将第 col 行下的所有行的第 col 列元素变为 0。重复这个过程,直到 col=n-1,将矩阵化为上三角矩阵,再通过回代求解线性方程组。

### 1.2 Gauss-Seidel 迭代法

$$\mathbf{X^{(k+1)}}=-(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{X^{(k)}}+(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

令

$$\begin{aligned}\mathbf{S}&=-(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\\ &=\begin{bmatrix}0 & \frac{\epsilon+h}{2\epsilon+h} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{\epsilon(\epsilon+h)}{(2\epsilon+h)^2} & \frac{\epsilon+h}{2\epsilon+h} & \cdots & 0\\ 0 & \frac{\epsilon^2(\epsilon+h)}{(2\epsilon+h)^3} & \frac{\epsilon(\epsilon+h)}{(2\epsilon+h)^2} & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \frac{\epsilon^{n-1}(\epsilon+h)}{(2\epsilon+h)^n} & 0 & \cdots & \frac{\epsilon(\epsilon+h)}{(2\epsilon+h)^2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Inv}&=(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\\ &=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2\epsilon+h} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -\frac{\epsilon}{(2\epsilon+h)^2} & -\frac{1}{2\epsilon+h} & 0 & \cdots & 0\\ -\frac{\epsilon^2}{(2\epsilon+h)^3} & -\frac{\epsilon}{(2\epsilon+h)^2} & -\frac{1}{2\epsilon+h} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\frac{\epsilon^{n-1}}{(2\epsilon+h)^n} & -\frac{\epsilon^{n-2}}{(2\epsilon+h)^{n-1}} & \cdots & -\frac{\epsilon}{(2\epsilon+h)^2} & -\frac{1}{2\epsilon+h}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

在 $\|\mathbf{X}^{(\mathbf{k+1})} - \mathbf{X}^{(\mathbf{k})}\|_\infty \le 10^{-6}$ 时结束迭代。

## 2 Results

```
epsilon=1时, 列主元消元法的解为: 0.0128543 0.0256309 0.0383305 0.0509538 0.0635016 0.0759748 0.0883739 0.1007 0.112953 0.125135 0.137245 0.149285 0.161255 0.1731
57 0.18499 0.196755 0.208453 0.220085 0.231652 0.243153 0.25459 0.265963 0.277273 0.288521 0.299707 0.310831 0.321895 0.332899 0.343844 0.354729 0.365557 0.37632
6 0.387039 0.397695 0.408294 0.418839 0.429329 0.439764 0.450145 0.460473 0.470749 0.480972 0.491143 0.501264 0.511333 0.521352 0.531322 0.541243 0.551114 0.5609
38 0.570714 0.580442 0.590124 0.599759 0.609348 0.618892 0.628391 0.637846 0.647256 0.656623 0.665946 0.675227 0.684465 0.693661 0.702816 0.711929 0.721002 0.730
035 0.739027 0.74798 0.756894 0.765769 0.774606 0.783405 0.792166 0.80089 0.809577 0.818228 0.826842 0.835421 0.843964 0.852472 0.860946 0.869385 0.87779 0.88616
1 0.894499 0.902804 0.911076 0.919316 0.927523 0.935699 0.943844 0.951957 0.960039 0.968091 0.976113 0.984105 0.992067
epsilon=1时, Gauss_Seidel迭代法的解为: 0.0128144 0.0255514 0.038212 0.0507969 0.0633069 0.0757428 0.0881053 0.100395 0.112613 0.12476 0.136837 0.148844 0.160782
0.172652 0.184455 0.19619 0.20786 0.219464 0.231004 0.242479 0.253891 0.26524 0.276528 0.287753 0.298918 0.310023 0.321068 0.332054 0.342981 0.353851 0.364664 0.
37542 0.38612 0.396764 0.407354 0.417889 0.42837 0.438798 0.449173 0.459496 0.469767 0.479987 0.490157 0.500276 0.510346 0.520366 0.530338 0.540261 0.550137 0.55
9965 0.569747 0.579482 0.589171 0.598815 0.608413 0.617968 0.627478 0.636944 0.646367 0.655747 0.665084 0.67438 0.683633 0.692846 0.702017 0.711148 0.720239 0.72
9291 0.738302 0.747275 0.756209 0.765105 0.773963 0.782783 0.791567 0.800313 0.809023 0.817696 0.826334 0.834936 0.843503 0.852035 0.860533 0.868996 0.877425 0.8
85821 0.894184 0.902513 0.91081 0.919074 0.927307 0.935507 0.943676 0.951814 0.95992 0.967997 0.976042 0.984058 0.992044
epsilon=1时, 列主元消元法的相对误差为0.000199021, Gauss_Seidel迭代法的相对误差为0.00082895
```

```
epsilon=0.1时, 列主元消元法的解为: 0.0504578 0.0967832 0.139352 0.178505 0.214553 0.247779 0.278439 0.306766 0.332972 0.357251 0.379777 0.400709 0.420194 0.43836
1 0.455332 0.471214 0.486107 0.5001 0.513276 0.525709 0.537466 0.548609 0.559193 0.56927 0.578885 0.588081 0.596895 0.605362 0.613514 0.62138 0.628985 0.636353 0
.643506 0.650464 0.657243 0.663861 0.670331 0.676668 0.682883 0.688988 0.694992 0.700905 0.706736 0.71249 0.718176 0.7238 0.729367 0.734882 0.740351 0.745777 0.7
51164 0.756516 0.761836 0.767127 0.772391 0.777632 0.78285 0.788049 0.79323 0.798394 0.803543 0.808679 0.813802 0.818915 0.824017 0.829109 0.834194 0.83927 0.844
34 0.849403 0.854461 0.859513 0.864561 0.869604 0.874643 0.879679 0.884711 0.889741 0.894768 0.899792 0.904814 0.909835 0.914853 0.91987 0.924885 0.929898 0.9349
11 0.939922 0.944933 0.949942 0.954951 0.959959 0.964966 0.969972 0.974978 0.979983 0.984988 0.989992 0.994996
epsilon=0.1时, Gauss_Seidel迭代法的解为: 0.0504163 0.0967041 0.139239 0.178362 0.214383 0.247585 0.278224 0.306533 0.332723 0.356988 0.379503 0.400426 0.419903 0
.438064 0.45503 0.47091 0.485801 0.499794 0.51297 0.525404 0.537164 0.548309 0.558897 0.568978 0.578598 0.587799 0.596619 0.605093 0.613251 0.621124 0.628736 0.6
36111 0.643271 0.650236 0.657022 0.663647 0.670125 0.676469 0.682692 0.688804 0.694815 0.700736 0.706573 0.712334 0.718027 0.723657 0.72923 0.734752 0.740227 0.7
45658 0.751051 0.756409 0.761734 0.767031 0.7723 0.777545 0.782769 0.787972 0.793157 0.798325 0.803479 0.808618 0.813745 0.818861 0.823966 0.829062 0.834149 0.83
9229 0.844301 0.849367 0.854427 0.859482 0.864532 0.869577 0.874619 0.879656 0.884691 0.889722 0.89475 0.899776 0.9048 0.909821 0.914841 0.919859 0.924875 0.9298
9 0.934903 0.939916 0.944927 0.949937 0.954946 0.959955 0.964962 0.969969 0.974976 0.979982 0.984987 0.989992 0.994996
epsilon=0.1时, 列主元消元法的相对误差为0.00246945, Gauss_Seidel迭代法的相对误差为0.00259949
```

```
epsilon=0.01时, 列主元消元法的解为: 0.255 0.385 0.4525 0.48875 0.509375 0.522187 0.531094 0.538047 0.544023 0.549512 0.554756 0.559878 0.564939 0.569969 0.574985
 0.579992 0.584996 0.589998 0.594999 0.6 0.605 0.61 0.615 0.62 0.625 0.63 0.635 0.64 0.645 0.65 0.655 0.66 0.665 0.67 0.675 0.68 0.685 0.69 0.695 0.7 0.705 0.71
0.715 0.72 0.725 0.73 0.735 0.74 0.745 0.75 0.755 0.76 0.765 0.77 0.775 0.78 0.785 0.79 0.795 0.8 0.805 0.81 0.815 0.82 0.825 0.83 0.835 0.84 0.845 0.85 0.855 0.
86 0.865 0.87 0.875 0.88 0.885 0.89 0.895 0.9 0.905 0.91 0.915 0.92 0.925 0.93 0.935 0.94 0.945 0.95 0.955 0.96 0.965 0.97 0.975 0.98 0.985 0.99 0.995
epsilon=0.01时, Gauss_Seidel迭代法的解为: 0.254993 0.38499 0.45249 0.488741 0.509367 0.522181 0.531088 0.538042 0.54402 0.549509 0.554754 0.559876 0.564937 0.569
968 0.574984 0.579992 0.584996 0.589998 0.594999 0.599999 0.605 0.61 0.615 0.62 0.625 0.63 0.635 0.64 0.645 0.65 0.655 0.66 0.665 0.67 0.675 0.68 0.685 0.69 0.69
5 0.7 0.705 0.71 0.715 0.72 0.725 0.73 0.735 0.74 0.745 0.75 0.755 0.76 0.765 0.77 0.775 0.78 0.785 0.79 0.795 0.8 0.805 0.81 0.815 0.82 0.825 0.83 0.835 0.84 0.
845 0.85 0.855 0.86 0.865 0.87 0.875 0.88 0.885 0.89 0.895 0.9 0.905 0.91 0.915 0.92 0.925 0.93 0.935 0.94 0.945 0.95 0.955 0.96 0.965 0.97 0.975 0.98 0.985 0.99
 0.995
epsilon=0.01时, 列主元消元法的相对误差为0.00211123, Gauss_Seidel迭代法的相对误差为0.00211202
```

```
epsilon=0.0001时, 列主元消元法的解为: 0.50005 0.509951 0.515 0.52 0.525 0.53 0.535 0.54 0.545 0.55 0.555 0.56 0.565 0.57 0.575 0.58 0.585 0.59 0.595 0.6 0.605 0.
61 0.615 0.62 0.625 0.63 0.635 0.64 0.645 0.65 0.655 0.66 0.665 0.67 0.675 0.68 0.685 0.69 0.695 0.7 0.705 0.71 0.715 0.72 0.725 0.73 0.735 0.74 0.745 0.75 0.755
 0.76 0.765 0.77 0.775 0.78 0.785 0.79 0.795 0.8 0.805 0.81 0.815 0.82 0.825 0.83 0.835 0.84 0.845 0.85 0.855 0.86 0.865 0.87 0.875 0.88 0.885 0.89 0.895 0.9 0.9
05 0.91 0.915 0.92 0.925 0.93 0.935 0.94 0.945 0.95 0.955 0.96 0.965 0.97 0.975 0.98 0.985 0.99 0.995
epsilon=0.0001时, Gauss_Seidel迭代法的解为: 0.500049 0.509951 0.515 0.52 0.525 0.53 0.535 0.54 0.545 0.55 0.555 0.56 0.565 0.57 0.575 0.58 0.585 0.59 0.595 0.6 0
.605 0.61 0.615 0.62 0.625 0.63 0.635 0.64 0.645 0.65 0.655 0.66 0.665 0.67 0.675 0.68 0.685 0.69 0.695 0.7 0.705 0.71 0.715 0.72 0.725 0.73 0.735 0.74 0.745 0.7
5 0.755 0.76 0.765 0.77 0.775 0.78 0.785 0.79 0.795 0.8 0.805 0.81 0.815 0.82 0.825 0.83 0.835 0.84 0.845 0.85 0.855 0.86 0.865 0.87 0.875 0.88 0.885 0.89 0.895
0.9 0.905 0.91 0.915 0.92 0.925 0.93 0.935 0.94 0.945 0.95 0.955 0.96 0.965 0.97 0.975 0.98 0.985 0.99 0.995
epsilon=0.0001时, 列主元消元法的相对误差为5.05051e-05, Gauss_Seidel迭代法的相对误差为5.05061e-05
```

## 3 Conclusion

从结果可看出，列主元消元法和 Gauss-Seidel 迭代法的结果基本一致，且相对误差均在 $10^{-4}$ 量级内，说明两种方法都能较好地解决线性方程组问题。但列主元消元法的精度相对更高，且耗时更短。

本实验提高精度的主要措施：

1. 使用 long double 类型；

2. 提前计算好 **S** 和 **Inv** 的形式，再代入数值，以避免用代码求逆矩阵和进行矩阵乘法时产生的误差。

但由于本题矩阵阶数较大，而且矩阵元素的分子分母次数较高，同时消元、迭代等运算需要大量进行，因此在计算过程中误差会逐渐积累，导致最终结果的精度难以把握，只能控制在一定范围内。