



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

Lab 3

反幂法求按模最小特征值及特征向量

姓名: 高茂航

学号: PB22061161

日期: 2024.3.28

Lab 3

1 Problem Descriptions

实现带规范方法的反幂法,求得给定矩阵按模最小特征值以及相应的特征向量。

2 Analysis and Algorithms

2.1 LU-Doolittle 分解

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

其中 \mathbf{L} 为单位下三角阵, \mathbf{U} 为上三角阵. 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 可化为

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

只需解方程组

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

2.2 规范化反幂法

$$\begin{cases} \mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{X}^{(k)} / \|\mathbf{X}^{(k)}\|_{\infty}, \\ \mathbf{AX}^{(k+1)} = \mathbf{Y}^{(k)}, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots$$

$\|\mathbf{X}^{(k+1)}\| - \|\mathbf{X}^{(k)}\|_{\infty} \leq 10^{-5}$ 时停止迭代, 则 \mathbf{A} 的按模最小特征值 $\lambda = 1/\|\mathbf{X}^{(k+1)}\|$, λ 对应的特征向量为 $\mathbf{Y}^{(k)}$.

Lab 3

3 Results

```
X(0):1 1 1 1
1
X(1):630 -1120 630 -120 5
1120
Y(1):0.5625 -1 0.5625 -0.107143 0.00446429
X(2):146253 -297849 196175 -45114.4 2377.25
297849
Y(2):0.49103 -1 0.658639 -0.151467 0.00798141
X(3):149113 -304047 200595 -46244.7 2446.56
304047
Y(3):0.490426 -1 0.65975 -0.152097 0.00804664
X(4):149157 -304142 200661 -46261.1 2447.54
304142
Y(4):0.49042 -1 0.659762 -0.152104 0.00804735
X(5):149158 -304143 200662 -46261.3 2447.55
304143
Y(5):0.49042 -1 0.659762 -0.152104 0.00804736
X(6):149158 -304143 200662 -46261.3 2447.55
304143
Y(6):0.49042 -1 0.659762 -0.152104 0.00804736
X(7):149158 -304143 200662 -46261.3 2447.55
304143
Y(7):0.49042 -1 0.659762 -0.152104 0.00804736
X(8):149158 -304143 200662 -46261.3 2447.55
304143
lambda=3.28793e-06
特征向量为: 0.49042 -1 0.659762 -0.152104 0.00804736
迭代次数为: 8
```

图 1: A1 的结果

```
X(0):1 1 1 1
1
X(1):2.71051e-20 2 1.00676e-19 1
2
Y(1):1.35525e-20 1 5.0338e-20 0.5
X(2):-0.625 5.625 -2.375 3.5
5.625
Y(2):-0.111111 1 -0.422222 0.622222
X(3):-0.933333 8.07778 -3.43333 5.04444
8.07778
Y(3):-0.115543 1 -0.425034 0.624484
X(4):-0.93621 8.08992 -3.44378 5.05433
8.08992
Y(4):-0.115725 1 -0.425687 0.624769
X(5):-0.936712 8.09382 -3.44549 5.05681
8.09382
Y(5):-0.115732 1 -0.425694 0.624774
X(6):-0.936719 8.09386 -3.44551 5.05684
8.09386
Y(6):-0.115732 1 -0.425695 0.624775
X(7):-0.93672 8.09386 -3.44552 5.05684
8.09386
lambda=0.12355
特征向量为: -0.115732 1 -0.425695 0.624775
迭代次数为: 7
```

图 2: A2 的结果

Lab 3

4 Conclusion

(a) 本实验中按模最小特征值越接近于 0 的矩阵, 收敛更慢, 因此无法直接根据按模最小特征值的大小比较收敛速度, 可能也和初始向量、最小两个特征值的比值等因素有关。

(b) 由于本题矩阵阶数较小, 且采用了 long double 类型, 估计每次迭代的特征值这一过程没有遇到明显的问题。