Lab 7

姓名：高茂航

学号：PB22061161

日期：2024.6.10

Lab 7

1 Problem Descriptions

2 Analysis and Algorithms

现在要用数值方法求 $\int_a^b f(x)\,dx$，设 $h=\frac{b-a}{n}$，已知：
复化梯形积分 $T_n(f)=h\left[\frac{1}{2}f(a)+\sum_{i=1}^{n-1}f(a+ih)+\frac{1}{2}f(b)\right]$、
复化 Simpson 积分 $S_n(f)=\frac{h}{3}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{m-1}f(x_{2i+1})+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_{2i})+f(b)\right]$.
将 $(T_n(f)-T_{2n}(f))$ 作为 $T_{2n}(f)$ 的修正值补充到 $I(f)$，即

$$I(f)\approx T_{2n}(f)+\frac{1}{3}\left(T_{2n}(f)-T_n(f)\right)=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n=S_n$$

其结果是将复化梯形求积公式组合成复化 Simpson 求积公式，截断误差由 $O(h^2)$ 提高到 $O(h^4)$. 这种手段称为外推算法，该算法在不增加计算量的前提下提高了误差的精度. 不妨对 $S_{2n}(f),S_n(f)$ 再作一次线性组合：

$$I(f)-S_n(f)=-\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}h^4(b-a)\approx dh^4$$

$$I(f)-S_{2n}(f)=-\frac{f^{(4)}(\eta)}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4(b-a)\approx d\left(\frac{h}{2}\right)^4$$

$$I(f)\approx S_{2n}(f)+\frac{1}{15}\left(S_{2n}(f)-S_n(f)\right)=C_n(f)$$

复化 Simpson 公式组成复化 Cotes 公式，其截断误差是 $O(h^6)$. 同理对 Cotes 公式进行线性组合：

$$I(f)-C_{2n}(f)=e\left(\frac{h}{2}\right)^6 I(f)-C_n(f)=eh^6$$

得到具有 7 次代数精度和截断误差是 $O(h^8)$ 的 Romberg 公式：

$$R_n(f)=C_{2n}(f)+\frac{1}{63}\left(C_{2n}(f)-C_n(f)\right)$$

为了便于在计算机上实现 Romberg 算法，将 $T_n,S_n,C_n,R_n,\cdots$ 统一用 $R_{k,j}$ 表示，列标 $j=1,2,3,4$ 分别表示梯形、Simpson、Cotes 、Romberg 积分，行标 k 表示步长 $h_k=\frac{h}{2^{k-1}}$，得到 Romberg 计算公式：

$$R_{k,j}=R_{k,j-1}+\frac{R_{k,j-1}-R_{k-1,j-1}}{4^{j-1}-1},k=2,3,\cdots$$

对每一个 k,j 从 2 做到 k, 一直做到 $|R_k,k-R_{k-1,k-1}|$ 小于给定控制精度时停止计算.

3 Results

4 Conclusion