Report 1

圆形镜面成像问题

姓名：高茂航

学号：PB22061161

日期：2024.3.8

Report 1

1 Algorithm Description

设 $T(cos\theta, sin\theta)$, 则有

$$PT + QT = \sqrt{(P_x - cos\theta)^2 + sin^2\theta} + \sqrt{(Q_x - cos\theta)^2 + (Q_y - sin\theta)^2}$$

$$PT + QT = \sqrt{P_x^2 - 2P_x cos\theta + 1} + \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + 1 - 2Q_x cos\theta - 2Q_y sin\theta}$$

由费马原理,光线沿 $PT + QT$ 最短的路径传播,因此只需对上式求导求极小值点。关于 θ 求导得

$$\frac{P_x sin\theta}{\sqrt{P_x^2 - 2P_x cos\theta + 1}} + \frac{Q_x sin\theta - Q_y cos\theta}{\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + 1 - 2Q_x cos\theta - 2Q_y sin\theta}}$$

故只需用二分法解非线性方程

$$P_x sin\theta\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + 1 - 2Q_x cos\theta - 2Q_y sin\theta} + (Q_x sin\theta - Q_y cos\theta)\sqrt{P_x^2 - 2P_x cos\theta + 1} = 0$$

$$T_x = cos\theta$$

$$T_y = sin\theta$$

由对称性易知

$$Rx = \frac{2Q_y - Qxtan\theta - kQ_x + k(2Tx - Qx) - 2Ty}{k - tan\theta}$$

$$Ry = Qy - (Qx - Rx)\theta$$

2 Results

$$P = (-2, 0), Q = (-1, 1) : T = (-0.885670, 0.464316), R = (-0.380057, 0.674993)$$

$$P = (-10, 0), Q = (-2, 1) : T = (-0.959312, 0.282350), R = (0.304214, 0.321811)$$

$$P = (-1.000001, 0), Q = (-2, 2) : T = (-1.000000, 0.000002), R = (0.000007, 1.999996)$$

$$P = (-2, 0), Q = (-1, 0.000001) : T = (-1.000000, 0.000001), R = (-1.000000, 0.000001)$$

$$P = (-2.33, 0), Q = (-3, 1) : T = (-0.989279, 0.146038), R = (1.182424, 0.382590)$$

$$P = (-3, 0), Q = (-1, 0.5) : T = (-0.922615, 0.385721), R = (-0.786920, 0.410917)$$

$$P = (-3, 0), Q = (-2, 10) : T = (-0.827028, 0.562160), R = (8.380296, 2.944148)$$

$$P=(-3,0),Q=(-3,1):T=(-0.987408,0.158192),R=(1.187435,0.329136)$$

$$P=(-10,0),Q=(-2,1):T=(-0.959312,0.282350),R=(0.304214,0.321811)$$

$$P=(-1024,0),Q=(-8,4):T=(-0.970066,0.242842),R=(7.000894,0.244735)$$

3 Conclusion

本实验提高精度的主要措施：

1. 使用 long double 类型；

2. 用较多位数来表示 π；

3. 将含有除法的方程交叉相乘，通过乘法代替除法，以减少在求商时的误差；

4. 在用二分法解非线性方程时，限制条件是结果的绝对值 $\leq 10^{-7}$。

但由于本实验的方程较为复杂，含有三角函数、根式、平方等易造成误差放大的因素，暂时还未找到其他较好的减少误差的办法，但还尝试了另一种思路，叙述如下：

设 OT 的延长线交 PQ 于 R，则由角平分线定理，有

$$\frac{QT}{PT}=\frac{QR}{RP}=\frac{Q_y}{R_y}-1$$

设 $T(x,y),k=\frac{Qy}{Qx-Px}$，带入上述方程化简得：

$$\frac{Q_y^2(kx-y)^2+k^2P_x^2y^2-2kQ_yPxy(kx-y)}{k^2Px^2y^2}=\frac{Q_y^2+Q_x^2+1-2yQ_y-2xQ_x}{1+P_x^2-2xP_x}$$

故只需用 for 循环遍历或二分法解非线性方程

$$(Q_y^2(kx-y)^2+k^2P_x^2y^2-2kQ_yPxy(kx-y))(1+P_x^2-2xP_x)-(k^2Px^2y^2)(Q_y^2+Q_x^2+1-2yQ_y-2xQ_x)=0$$

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

由对称性易知

$$Rx=\frac{\frac{QxTy}{Tx}+\frac{Tx(2Tx-Qx)}{Ty}+2Ty-2Qy}{\frac{Tx}{Ty}+\frac{Ty}{Tx}}$$

$$Ry=Qy-\frac{Ty}{Tx(Qx-Rx)}$$

但验证结果时发现，上述方法在遇到一些极端情况如 $P=(-1.000001,0),Q=(-2,2)$ 时，中间的运算过程会出现极小的浮点数导致无法继续运算，所以这种思路在细节上仍有待改进。