

Capítulo 9

Representações de Sistemas Não-Lineares

9.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos relevantes ao assunto de representações matemáticas para sistemas não-lineares. Serão descritas em mais detalhes a representação polinomial e a racional NARMAX.

9.2 Representações Não-Lineares

9.2.1 A série de Volterra

A saída $y(t)$ de um sistema não-linear com entrada $u(t)$ pode ser representada pela chamada série de Volterra definida como

$$y(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_j(\tau_1, \dots, \tau_j) \prod_{i=1}^j u(t - \tau_i) d\tau_i,$$

sendo que as funções h_j são denominadas *kernels* e claramente são generalizações não-lineares da resposta ao impulso $h_1(t)$.

9.2.2 Modelos de Hammerstein e de Wiener

São uma composição de um modelo dinâmico linear $H(s)$ em cascata com uma função estática não-linear $f(\cdot)$. No caso do modelo de Hammerstein, a não-linearidade estática precede o modelo dinâmico linear, ou seja,

$$U^*(s) = f(U(s)); \text{ e } Y(s) = H(s)U^*(s).$$

No caso do modelo de Wiener, o modelo dinâmico linear precede a não-linearidade estática, isto é,

$$Y^*(s) = H(s)U(s); \text{ e } Y(s) = f(Y^*(s)).$$

9.2.3 Algumas representações NARX

Um modelo NARMAX (do inglês *nonlinear autoregressive moving average model with exogenous variables*) é normalmente representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y(k) = & F[y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-\tau_d), \dots \\ & \dots u(k-n_u), e(k), e(k-1), \dots, e(k-n_e)]. \end{aligned}$$

Duas representações NARMAX comumente usadas para F são a polinomial e a racional.

$$y(k) = \sum_i c_i \prod_{j=1}^{n_y} y(k-j) \prod_{r=1}^{n_u} u(k-r) \prod_{q=0}^{n_e} e(k-q).$$

Modelos racionais são formados pela razão entre dois polinômios, ou seja

$$y(k) = \frac{\sum_i c_i \prod_{j=1}^{n_y} y(k-j) \prod_{r=1}^{n_u} u(k-r) \prod_{q=1}^{n_e} e(k-q)}{\sum_i d_i \prod_{j=1}^{d_y} y(k-j) \prod_{r=1}^{d_u} u(k-r) \prod_{q=1}^{d_e} e(k-q)} + e(k).$$

9.2.4 Modelos polinomiais contínuos

Um modelo polinomial para este sinal pode ser formado utilizando-se o sinal e suas derivadas como base, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \dot{y}(t) \\ \dot{Y} &= \ddot{y}(t) \\ \dot{Z} &= \sum_{l=1}^{n_\theta} \theta_l \psi^l, \end{aligned}$$

sendo $\psi^l = X^i Y^j Z^k$ e $i, j, k \in \mathbb{N}$.

9.2.5 Funções de base radial

As funções de base radial (RBF do inglês *radial basis functions*) são mapeamentos do tipo

$$f(\mathbf{y}) = \omega_0 + \sum_i \omega_i \phi(\|\mathbf{y} - \mathbf{c}_i\|),$$

sendo que $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d_e}$, $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana, $\omega_i \in \mathbb{R}$ são pesos, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{d_e}$ são os centros e $\phi(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, normalmente escolhida a priori, como, por exemplo:

$$\phi(\|\mathbf{y} - \mathbf{c}_i\|) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{c}_i\|^2}{\sigma_i^2}\right),$$

sendo σ_i constante e $\|\mathbf{y} - \mathbf{c}_i\|^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{c}_i)^T(\mathbf{y} - \mathbf{c}_i)$. A função de base (9.1) é chamada de gaussiana. Outras funções de base usadas são:

Multiquadrática inversa : $\phi(r) = (r^2 + \sigma^2)^{-0,5}$

Linear : $\phi(r) = r$

Cúbica : $\phi(r) = r^3$

Multiquadrática : $\phi(r) = \sqrt{r^2 + \sigma^2}$

Thin – plate spline : $\phi(r) = r^2 \log[r]$,

sendo que $r = \|\mathbf{y} - \mathbf{c}_i\|$ e σ define a largura do “chapéu”, no caso das funções gaussiana e das multiquadráticas.

No contexto de identificação de sistemas, é comum acrescentar termos auto-regressivos lineares, bem como termos de entrada, resultando em

$$y(k) = \omega_0 + \sum_i \omega_i \phi(\| \mathbf{y}(k-1) - \mathbf{c}_i \|) + \\ + \sum_{i=1}^{n_y} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_u} a_i u(k-i) + e(k),$$

sendo $\mathbf{y}(k-1) = [y(k-1) \dots y(k-n_y) \ u(k-1) \dots u(k-n_u)]^T$, e $e(k)$ é o erro.

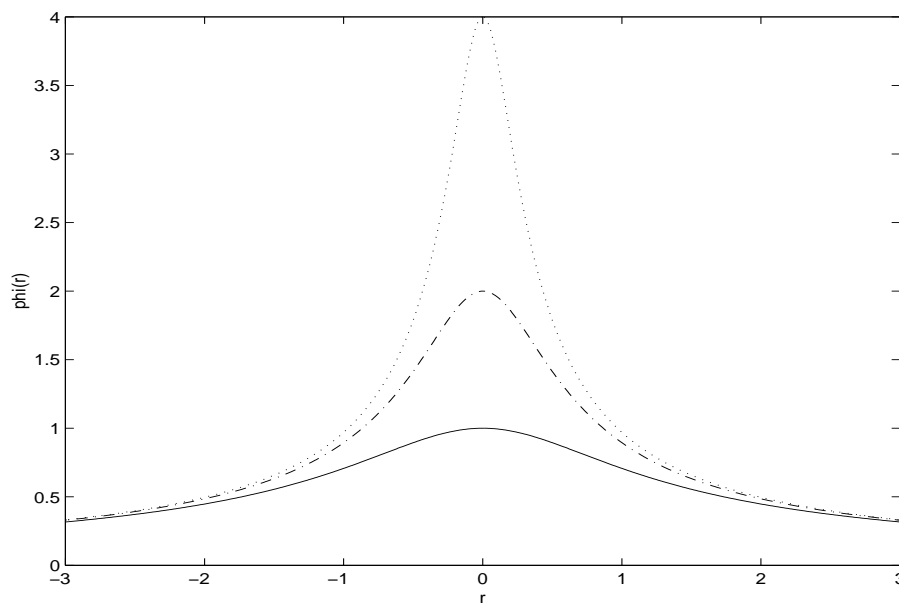


FIGURA 9.1: Função multiquadrática inversa para vários valores do parâmetro σ : (—) $\sigma = 1$, (---) $\sigma = 0,5$ e (\cdots) $\sigma = 0,25$.

9.2.6 Redes neurais artificiais

A saída de um único neurônio com n entradas é do tipo

$$x = f \left(\sum_{j=1}^n \omega_j x_j + b \right),$$

sendo que b (*bias*) e ω_j são constantes e f é chamada de função de ativação. Há vários tipos de função de ativação sendo que uma das mais comuns é a sigmóide

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}.$$

Normalmente a saída de um neurônio é conectada à entrada de um outro neurônio. Nesse caso, a saída de uma rede com um único nodo na camada de saída e uma camada oculta é uma função não-linear nos parâmetros do tipo

$$y(k) = f_s \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i f_i \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij} x_j + b_i \right) + b_s \right\}.$$

Em aplicações de identificação, é comum escolher $f_s(x) = x$ e $b_s = 0$; assim (9.1) fica

$$y(k) = \sum_{i=1}^m \omega_i f_i \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij} x_j + b_i \right),$$

que ainda é não-linear nos parâmetros.

9.3 O Modelo Polinomial NARMAX

Exemplo 9.3.1. *Modelo polinomial NARX*

Neste exemplo a função $F^\ell[\cdot]$ é expandida como um polinômio de grau dois, ou seja, $F^2[\cdot]$.

$$\begin{aligned}
 y(k) = & c_{0,0} + \sum_{n_1=1}^{n_y} c_{1,0}(n_1)y(k-n_1) + \sum_{n_1=1}^{n_u} c_{0,1}(n_1)u(k-n_1) \\
 & + \sum_{n_1=1}^{n_y} \sum_{n_2=1}^{n_y} c_{2,0}(n_1, n_2)y(k-n_1)y(k-n_2) \\
 & + \sum_{n_1=1}^{n_y} \sum_{n_2=1}^{n_u} c_{1,1}(n_1, n_2)y(k-n_1)u(k-n_2) \\
 & + \sum_{n_1=1}^{n_u} \sum_{n_2=1}^{n_u} c_{0,2}(n_1, n_2)u(k-n_1)u(k-n_2).
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 9.3.2. *Regressores de um modelo polinomial NARX*

Assumindo-se $n_y = 2$ e $n_u = 1$ para o modelo do exemplo anterior, tem-se o seguinte vetor de regressores:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\psi}(k-1) = & \begin{bmatrix} y(k-1) & y(k-2) & u(k-1) & y(k-1)^2 & y(k-1)y(k-2) \\ y(k-2)^2 & u(k-1)^2 & y(k-1)u(k-1) & y(k-2)u(k-1) \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned}$$

□

9.4 O Modelo Racional NARMAX

Um modelo racional NARMAX tem a seguinte forma geral:

$$y(k) = \frac{a(y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-1), \dots, u(k-n_u), \dots, \frac{e(k-1), \dots, e(k-n_e))}{e(k-1), \dots, e(k-n_e))} + e(k).$$

É conveniente definir o numerador e denominador de (9.1) como sendo, respectivamente,

$$a(k-1) = \sum_{j=1}^{N_n} p_{nj} \theta_{nj} = \boldsymbol{\psi}_n^T(k-1) \boldsymbol{\theta}_n,$$

$$b(k-1) = \sum_{j=1}^{N_d} p_{dj} \theta_{dj} = \boldsymbol{\psi}_d^T(k-1) \boldsymbol{\theta}_d.$$

Manipulando-se os termos, chega-se a

$$\begin{aligned} y^*(k) &= a(k-1) - y(k) \sum_{j=2}^{N_d} p_{dj} \theta_{dj} + b(k-1)e(k) \\ &= \sum_{j=1}^{N_n} p_{nj} \theta_{nj} - y(k) \sum_{j=2}^{N_d} p_{dj} \theta_{dj} + \zeta(k) \\ &= \boldsymbol{\psi}_n^T(k-1) \boldsymbol{\theta}_n - y(k) \boldsymbol{\psi}_{d1}^T(k-1) \boldsymbol{\theta}_d + \zeta(k), \end{aligned}$$

sendo $\boldsymbol{\psi}_d^T(k-1) = [p_{d1} \ \boldsymbol{\psi}_{d1}^T(k-1)]$, $\theta_{d1} = 1$ e

$$y^*(k) = y(k)p_{d1} = \frac{a(k-1)}{b(k-1)}p_{d1} + p_{d1}e(k),$$

$$\zeta(k) = b(k-1)e(k) = \left(\sum_{j=1}^{N_d} p_{dj}\theta_{dj} \right) e(k),$$

sendo $e(k)$ branco. Como $e(k)$ é independente de $b(k-1)$ e tem média zero, tem-se $E[\zeta(k)] = E[b(k-1)]E[e(k)] = 0$.

Exemplo 9.4.1. *Um modelo racional NARX*

Um modelo racional é normalmente representado como a razão entre dois polinômios. Um exemplo de tal tipo de modelo é

$$y(k) = \frac{a_0 + a_1 y(k-1) + a_2 u(k-1) + a_3 y(k-1)u(k-1) + a_5 u(k-1)^2}{b_0 + b_2 u(k-1)},$$

sendo que apenas os regressores relacionados a $y(k)$ e $u(k)$ são mostrados. \square

9.5 Agrupamento de Termos

Um modelo para o qual $n_u = n_y$ abrange uma janela de dados de comprimento $(n_y - 1) \times T_s$. Se essa janela de dados for suficientemente suave, as seguintes aproximações podem ser escritas

$$\left. \begin{aligned} y(k-1) &\approx y(k-2) \approx \dots \approx y(k-n_y) \\ u(k-1) &\approx u(k-2) \approx \dots \approx u(k-n_u) \end{aligned} \right\},$$

então a equação um modelo polinomial NARX pode ser aproximado por

$$y(k) \approx \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_1, \dots, n_m) \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^m y(k-1)^p u(k-1)^{m-p}.$$

A equação (9.1) serve como motivação para a seguinte definição

Definição 9.5.1. *As constantes $\sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_1, \dots, n_m)$ são os coeficientes dos agrupamentos de termos $\Omega_{y^p u^{m-p}}$, que contêm termos da forma $y(k-i)^p u(k-j)^{m-p}$ para $m=0, \dots, \ell$ e $p=0, \dots, m$. Tais coeficientes são chamados de coeficientes de agrupamentos e são representados por $\Sigma_{y^p u^{m-p}}$.*

Exemplo 9.5.1. *Agrupamentos de termos de um modelo polinomial NARX*

Seja o modelo e seus parâmetros

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 1,4269 y(k-1) - 0,41549 y(k-3) + 0,012 y(k-2) \\
 & + 0,11736 u(k-3) - 0,04904 y(k-1)^3 + 1,2007 y(k-1)^2 u(k-3) \\
 & + 0,252 y(k-3)^2 u(k-2) - 0,078346 u(k-2) \\
 & - 0,47759 y(k-2) y(k-3) u(k-3) - 0,030695 y(k-3)^3 \\
 & + 0,05843 y(k-2)^3 - 0,39072 y(k-2)^2 u(k-3) \\
 & - 1,0272 y(k-1)^2 u(k-2) + 0,44085 y(k-2) y(k-3) u(k-1) \\
 & - 0,20771 \times 10^{-2} + 0,032643 y(k-1)^2 - 0,054208 y(k-2)^2 \\
 & + 0,023113 y(k-3)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{1,0}(1) &= 1,4269, & c_{1,0}(3) &= -0,41549, \\
 c_{1,0}(2) &= 0,012, & c_{0,1}(3) &= 0,11736, \\
 c_{3,0}(1,1,1) &= -0,04904, & c_{2,1}(1,1,3) &= 1,2007, \\
 c_{2,1}(3,3,2) &= 0,252, & c_{0,1}(2) &= -0,078346, \\
 c_{2,1}(2,3,3) &= -0,47759, & c_{3,0}(3,3,3) &= -0,030695, \\
 c_{3,0}(2,2,2) &= 0,05843, & c_{2,1}(2,2,3) &= -0,39072, \\
 c_{2,1}(1,1,2) &= -1,0272, & c_{2,1}(2,3,1) &= 0,44085, \\
 c_{0,0} &= -0,20771 \times 10^{-2}, & c_{1,1}(1,1) &= 0,032643, \\
 c_{1,1}(2,2) &= -0,054208, & c_{1,1}(3,3) &= 0,023113.
 \end{aligned}$$

No próximo exemplo tais parâmetros serão usados para determinar os coeficientes de agrupamentos. \square

Exemplo 9.5.2. *Coeficientes de agrupamentos de um modelo polinomial NARX*

Os coeficientes de agrupamentos do modelo (9.1) são

$$\begin{aligned}\Sigma_y &= c_{1,0}(1) + c_{1,0}(3) + c_{1,0}(2) = 1,0234, \\ \Sigma_{y^3} &= c_{3,0}(1, 1, 1) + c_{3,0}(3, 3, 3) + c_{3,0}(2, 2, 2) = -2,1305 \times 10^{-2}, \\ \Sigma_u &= c_{0,1}(3) + c_{0,1}(2) = 3,9019 \times 10^{-2}, \\ \Sigma_{y^2u} &= c_{2,1}(1, 1, 3) + c_{2,1}(3, 3, 2) + c_{2,1}(2, 3, 3) \\ &\quad + c_{2,1}(2, 2, 3) + c_{2,1}(1, 1, 2) + c_{2,1}(2, 3, 1) = -1,9184 \times 10^{-3}, \\ \Sigma_0 &= c_{0,0} = -2,0771 \times 10^{-3}, \\ \Sigma_{y^2} &= c_{2,0}(1, 1) + c_{2,0}(2, 2) + c_{2,0}(3, 3) = 1,54771 \times 10^{-3},\end{aligned}$$

que correspondem aos agrupamentos Ω_y , Ω_{y^3} , Ω_u , Ω_{y^2u} , Ω_0 e Ω_{y^2} , respectivamente. \square

Um agrupamento da forma $\Omega_{y^p u^{m-p}}$ é um conjunto de termos do tipo $y(k-i)^p u(k-j)^{m-p}$ para $m=0, \dots, \ell$ e $p=0, \dots, m$, e os respectivos coeficientes, $\Sigma_{y^p u^{m-p}}$, são o somatório dos coeficientes de todos os termos no modelo que pertencem ao referido agrupamento. No limite, tem-se

$$\begin{aligned}\lim_{T_s \rightarrow 0} \Sigma_y &= 1, \\ \lim_{T_s \rightarrow 0} \Sigma_{y^p u^{m-p}} &= 0, \quad \text{para todos os demais agrupamentos.}\end{aligned}$$

9.6 Pontos Fixos

9.6.1 Número de pontos fixos

Os pontos fixos ou pontos de equilíbrio de um modelo discreto autônomo são definidos como aqueles pontos para os quais $y(k) = y(k+i)$, $i \in \mathbb{Z}$. No caso de modelos não autônomos, os pontos fixos satisfazem $y(k) = y(k+i)$, $i \in \mathbb{Z}$ para um dado valor constante do sinal de entrada $\bar{u} = u(k) = u(k+i)$, $i \in \mathbb{Z}$.

Os pontos fixos de um modelo polinomial NAR (autônomo) com grau de não-linearidade ℓ são as raízes do seguinte polinômio “agrupado”:

$$\begin{aligned} y(k) = & c_{0,0} + y(k) \sum_{n_1=1}^{n_y} c_{1,0}(n_1) + y(k)^2 \sum_{n_1, n_2}^{n_y, n_y} c_{2,0}(n_1, n_2) + \dots \\ & \dots + y(k)^\ell \sum_{n_1, n_\ell}^{n_y, n_y} c_{\ell,0}(n_1, \dots, n_\ell), \end{aligned}$$

ou

$$\Sigma_{y^\ell} y^\ell + \dots + \Sigma_{y^2} y^2 + (\Sigma_y - 1) y + \Sigma_0 = 0,$$

sendo $\Sigma_0 = c_{0,0}$ uma constante. Em muitos casos práticos $\Sigma_0 = c_{0,0} = 0$, e neste caso

$$[\Sigma_{y^\ell} y^{\ell-1} + \dots + \Sigma_{y^2} y + (\Sigma_y - 1)] y = 0.$$

9.6.2 Localização de pontos fixos

Os pontos fixos de um polinômio linear ($\ell=1$) são dados por

$$\bar{y} = \frac{\Sigma_0}{1 - \Sigma_y}.$$

Para polinômios quadráticos ($\ell=2$),

$$\begin{aligned}\bar{y}_{1,2} &= \frac{1 - \Sigma_y \pm \sqrt{\Delta}}{2\Sigma_{y^2}}, \\ \Delta &= (\Sigma_y - 1)^2 - 4\Sigma_{y^2}\Sigma_0.\end{aligned}$$

Os pontos fixos de um modelo polinomial cúbico ($\ell=3$) são

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= (\Delta_3 + \Delta_2) - \Sigma_{y^2}/(3\Sigma_{y^3}), \\ \bar{y}_{2,3} &= -0,5(\Delta_3 + \Delta_2) - \Sigma_{y^2}/(3\Sigma_{y^3}) \pm j \sqrt{3}(\Delta_3 - \Delta_2)/2,\end{aligned}$$

sendo $j = \sqrt{-1}$ e

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \sqrt{3} [4(\Sigma_y - 1)^3 \Sigma_{y^3} - (\Sigma_y - 1)^2 \Sigma_{y^2} - 18(\Sigma_y - 1)\Sigma_0 \Sigma_{y^2} \Sigma_{y^3} \\ &\quad + 27\Sigma_0^2 \Sigma_{y^3}^2 + 4\Sigma_0 \Sigma_{y^2}^3]^{0,5} / \Sigma_{y^3}^2, \\ \Delta_2 &= [\Sigma_{y^2}(\Sigma_y - 1)/6\Sigma_{y^3}^2 - \Sigma_0/2\Sigma_{y^3} - \Sigma_{y^2}^3/27\Sigma_{y^3}^3 - \Delta_1/18]^{1/3}, \\ \Delta_3 &= [\Sigma_{y^2}(\Sigma_y - 1)/6\Sigma_{y^3}^2 - \Sigma_0/2\Sigma_{y^3} - \Sigma_{y^2}^3/27\Sigma_{y^3}^3 + \Delta_1/18]^{1/3}.\end{aligned}$$

Exemplo 9.6.1. *Pontos fixos de um modelo polinomial NARX*

Substituindo os coeficientes de agrupamentos calculados no exemplo 9.5.2, os pontos fixos do modelo podem ser facilmente calculados como sendo (1,150; -1,155; 0,078). Pelo fato de o agrupamento Ω_{y3} ser o agrupamento do sinal de saída de mais alto grau, e porque $\Sigma_0 \neq 0$, a versão autônoma do modelo (9.1) tem três pontos fixos não triviais, como já era esperado. \square

9.6.3 Estabilidade de pontos fixos

Um modelo polinomial NAR de ordem n_y pode ser representado como um mapa $f : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{y}(k) = f(\mathbf{y}(k-1)),$$

sendo que $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de estado, ou

$$\begin{bmatrix} y(k-n_y+1) \\ y(k-n_y+2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{f_1}{y(k-n_y)} & \frac{f_2}{y(k-n_y+1)} & \cdots & \frac{f_{n_y}}{y(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k-n_y) \\ y(k-n_y+1) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix},$$

sendo $f_j/y(k-i)=0$ se $f_j(\cdot)$ não inclui $y(k-i)$ e a matriz não é única. Em outras palavras, há diversas funções $f_j(\cdot)$ tais que

$y(k) = f_1 + f_2 + \dots + f_{n_y}$. Por outro lado, a matriz jacobiana de f é

$$Df = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y(k-n_y)} & \frac{\partial f}{\partial y(k-n_y+1)} & \frac{\partial f}{\partial y(k-n_y+2)} & \dots & \frac{\partial f}{\partial y(k-1)} \end{bmatrix}$$

e é única.

Exemplo 9.6.2. *Auto-estrutura de um modelo polinomial NARX*

Avaliando a matriz jacobiana do modelo do exemplo 9.5.2 nos pontos fixos calculados no exemplo 9.6.1 percebe-se que tais pontos fixos são dois focos e uma sela, respectivamente. Mais especificamente, os autovalores da matriz jacobiana do modelo (9.1) são -0,601 e $0,942 \pm j0,185$ no ponto fixo 1,150 (foco instável); -0,602 e $0,942 \pm j0,188$ no ponto fixo -1,155 (foco instável) e -0,506, 0,824 e 1,079 no ponto fixo 0,078 (sela). \square

9.6.4 Simetria de pontos fixos

ℓ	número de pontos fixos triviais	agrupamentos de termos permitidos no modelo
1	1	Ω_y
2	0	Ω_{y^2}, Ω_0
3	1	Ω_{y^3}, Ω_y
4	0	$\Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}, \Omega_0$
4	2	$\Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}$
5	1	$\Omega_{y^5}, \Omega_{y^3}, \Omega_y$
5	3	$\Omega_{y^5}, \Omega_{y^3}$
6	0	$\Omega_{y^6}, \Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}, \Omega_0$
6	2	$\Omega_{y^6}, \Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}$
6	4	$\Omega_{y^6}, \Omega_{y^4}$

TABELA 9.1: Agrupamentos de termos necessários para simetria

Exemplo 9.6.3. *Simetria de pontos fixos*

Considere a equação logística $y(k) = \lambda y(k-1) - \lambda y(k-1)^2$ que não tem pontos fixos simétricos. O fato de não ter pontos fixos triviais pode ser constatado notando que polinômios quadráticos terão pontos fixos simétricos se $\Sigma_0 \neq 0$, $\Sigma_y = 0$ e $\Sigma_{y^2} \neq 0$. Para a equação logística é claro que $\Sigma_0 = 0$, $\Sigma_y = \lambda$ e $\Sigma_{y^2} = -\lambda$. Por outro lado, a equação logística ímpar $y(k) = \lambda y(k-1) - \lambda y(k-1)^3$ tem $\Sigma_0 = 0$, $\Sigma_y = \lambda$, $\Sigma_{y^2} = 0$ e $\Sigma_{y^3} = -\lambda$ e, de acordo com a terceira linha da Tabela 9.1, essa equação tem pontos fixos não triviais simétricos em torno de um ponto fixo trivial. \square

9.7 Complementos

Complemento 9.1. Modelos polinomiais NARMAX MIMO

$$\mathbf{y}(k) = F[\mathbf{y}(k-1), \dots, \mathbf{y}(k-n_y), \mathbf{u}(k-1), \dots, \mathbf{u}(k-n_u), \mathbf{e}(k-1), \dots, \mathbf{e}(k-n_e)] + \mathbf{e}(k),$$

sendo $F[\cdot]$ uma função vetorial qualquer e

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_m(k) \end{bmatrix}, \mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_r(k) \end{bmatrix}, \mathbf{e}(k) = \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \\ \vdots \\ e_m(k) \end{bmatrix}$$

que pode ser escrito como m equações escalares, uma para cada *subsistema*, como se segue:

$$\begin{aligned} y_i(k) = & F_i[y_1(k-1), \dots, y_1(k-n_{y1}^i), \dots, y_m(k-1), \dots, y_m(k-n_{ym}^i), \\ & u_1(k-1), \dots, u_1(k-n_{u1}^i), \dots, u_r(k-1), \dots, u_r(k-n_{ur}^i), \\ & e_1(k-1), \dots, e_1(k-n_{e1}^i), \dots, e_m(k-1), \dots, e_m(k-n_{em}^i)] + \\ & e_i(k), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

No caso de $F[\cdot]$ ser aproximado por uma função vetorial polinomial de grau ℓ tem-se para o i -ésimo subsistema

$$\begin{aligned}
y_i(k) = & \theta_0^i + \sum_{i_1=1}^{M_r} \theta_{i_1}^i x_{i_1}(k) + \sum_{i_1=1}^{M_r} \sum_{i_2=i_1}^{M_r} \theta_{i_1 i_2}^i x_{i_1}(k) x_{i_2}(k) + \cdots \\
& + \sum_{i_1=1}^{M_r} \cdots \sum_{i_\ell=i_{\ell-1}}^{M_r} \theta_{i_1 \dots i_\ell}^i x_{i_1}(k) \cdots x_{i_\ell}(k) + e_i(k), \quad i = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, m$, sendo que θ_i são os parâmetros a estimar, x_i os monômios que compõem os regressores, y_i a saída do i -ésimo subsistema e $e_i(k)$ é o erro da equação de regressão desse subsistema, e $M_r = m(n_y + n_e) + r \times n_u$.

Complemento 9.2. *Estimação de derivadas*

Seja um sinal amostrado $y(k)$. Primeiramente deve-se obter uma aproximação polinomial g_n do sinal de interesse numa (normalmente estreita) janela de tempo. Matematicamente, tem-se

$$y(k) \approx g_n, \quad k_i \leq k \leq k_f,$$

sendo o caso polinomial

$$g_n = \alpha_0 + \alpha_1 k + \dots + \alpha_{n-1} k^{n-1} + \alpha_n k^n.$$

A fim de estimar α_i pode ser usada a seguinte equação de regressão

$$y(k) = \alpha_0 + \alpha_1 k + \dots + \alpha_{n-1} k^{n-1} + \alpha_n k^n + e(k),$$

para $k_i \leq k \leq k_f$ e sendo $e(k)$ o erro de regressão. Portanto, tomando-se $k_f - k_i + 1$ restrições chega-se a:

$$\begin{bmatrix} y(k_i) \\ \vdots \\ y(k_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_i & \dots & k_i^{n-1} & k_i^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & k_f & \dots & k_f^{n-1} & k_f^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = X\boldsymbol{\theta},$$

e $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [X^T X]^{-1} X^T \mathbf{y}$.

Finalmente, as estimativas das derivadas de $y(k)$ podem ser obtidas derivando-se a aproximação polinomial analiticamente e avaliando as funções resultantes no ponto de interesse, k_0 , ou seja

$$\hat{y}(k_0) \approx \left. \frac{d g_n}{d k} \right|_{k=k_0} = \hat{\alpha}_1 + \dots + (n-1)\hat{\alpha}_{n-1}k_0^{n-2} + n\hat{\alpha}_n k_0^{n-1}$$

$$\hat{y}(k_0) \approx \left. \frac{d^2 g_n}{d k^2} \right|_{k=k_0} = \hat{\alpha}_2 + \dots + (n-2)(n-1)\hat{\alpha}_{n-1}k_0^{n-3} + (n-1)n\hat{\alpha}_n k_0^{n-2}$$

e assim por diante.

Complemento 9.3. *Estimação de pontos fixos a partir de dados*

Exemplo 9.7.1. *Pontos fixos estimados de dados reais*

O primeiro conjunto de dados considerado foi o atrator dupla-volta. A série temporal original tem $N = 5.000$ valores amostrados com $T_s = 2\mu\text{s}$. Nesse caso escolheu-se $L = 900$ e $\Delta = 5$. Os pontos fixos estimados com a matriz Ψ incluindo todos os agrupamentos foram: $\{-2, 25 \pm 0, 02; 0, 03 \pm 0, 13; 2, 15 \pm 0, 02\}$ V.

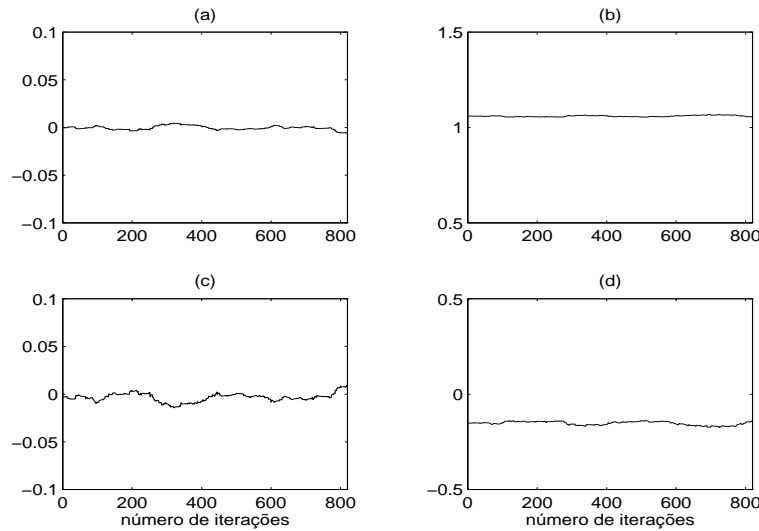


FIGURA 9.2: Coeficientes de agrupamentos estimados a partir de dados sobre o atrator dupla-volta dsvc1 @. (a) Σ_0 , (b) Σ_y , (c) Σ_{y^2} , (d) Σ_{y^3} .

A Figura 9.2 claramente revela que os agrupamentos Ω_0 e Ω_{y^2} são espúrios. Portanto, eliminando-se as colunas de Ψ correspondentes aos agrupamentos espúrios Ω_0 e Ω_{y^2} , os seguintes pontos fixos *simétricos* foram estimados: $\{\pm 2, 20 \pm 0, 01p; 0, 00\}$ V.

A seguir, 3.000 observações foram tomadas do atrator espiral do mesmo oscilador eletrônico (spivc1 @). Os seguintes valores foram usados $T_s = 20\mu s$, $L = 900$ e $\Delta = 5$.

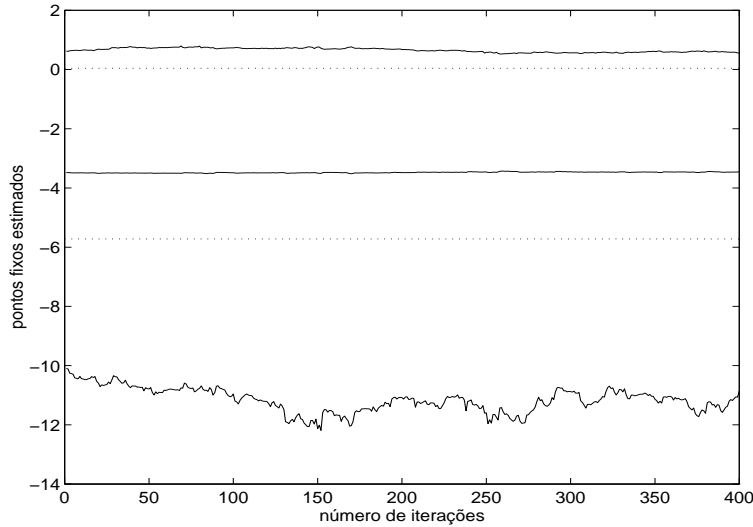


FIGURA 9.3: Pontos fixos estimados a partir de dados do atrator espiral. As linhas tracejadas indicam a faixa em que se encontram os dados medidos.

A variância de um ponto fixo é muito maior do que a dos demais, além de os valores estimados estarem fora dos limites dos dados (aproximadamente -6 e 0). Pode-se concluir que o algoritmo pode estimar corretamente apenas dois pontos fixos e, portanto, as colunas de Ψ que correspondem a Ω_{y3} devem ser removidas. Fazendo-se isso, os seguintes pontos fixos foram finalmente estimados: $\{-3,65 \pm 0,02; 0,00\} V$. \square

Exemplo 9.7.2. Características estáticas de modelos *ARX* e *NARX*

Considere os seguintes modelos obtidos de (mydin2 @)

$$y(k) = 1,3817 y(k-1) + 0,0411 u(k-1) - 0,4296 y(k-2) - 0,0077 u(k-2) + \xi(k),$$

$$y(k) = 1,3920 y(k-1) + 0,0454 u(k-1)^2 - 0,4235 y(k-2) - 0,4388 y(k-1)u(k-2) + 0,3756 y(k-2)u(k-2) + 0,0218 u(k-2)^2 + 0,0097 u(k-1)u(k-2) + \xi(k).$$

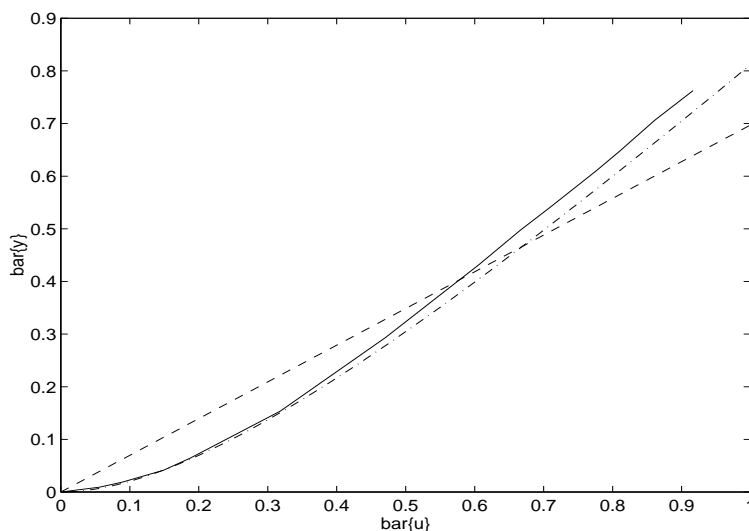


FIGURA 9.4: Características estáticas de um pequeno aquecedor elétrico. \bar{u} é o valor em volts em estado estacionário da tensão elétrica da entrada e \bar{y} é o valor em p.u. correspondente à temperatura atingida em estado estacionário. Característica estática (—) medida em teste estático, (- -) do modelo linear e (- · -) do modelo não-linear.