Capítulo 10

Identificação de Sistemas Não-Lineares: Algoritmos

10.1 Introdução

No presente capítulo serão apresentados algoritmos para estimação de parâmetros de representações que são lineares em tais parâmetros. Será suposto que os modelos são não-lineares, o que necessariamente implicará o problema de ter que escolher a sua estrutura dentre uma ampla gama de possibilidades.

10.2 Algoritmos MQ Ortogonais

O ponto de partida é a equação matricial

$$\mathbf{y} = \Psi\hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\xi},$$

sendo

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}; \;\Psi = [\boldsymbol{\psi}_1 \ldots \boldsymbol{\psi}_{n_\theta}];\; \hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{n_\theta} \end{bmatrix};\; \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi(1) \\ \xi(2) \\ \vdots \\ \xi(N) \end{bmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{\psi}_i = \begin{bmatrix} \psi_i(1) \\ \psi_i(2) \\ \vdots \\ \psi_i(N) \end{bmatrix},\; i = 1, 2, \ldots n_\theta.$$

Exemplo 10.2.1. *Matriz de regressores de um modelo NARX*

Considere o seguinte vetor de regressores:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}(k-1) \;=\; & \big[y(k-1)\; y(k-2)\; u(k-1)\; y(k-1)^2\; y(k-1)y(k-2) \\ & y(k-2)^2\; u(k-1)^2\; y(k-1)u(k-1)\; y(k-2)u(k-1)\big]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

As primeiras 4 linhas da matriz de regressores são

$$\Psi = \begin{bmatrix} y(0) & y(-1) & u(0) & \ldots & y(0)u(0) & y(-1)u(0) \\ y(1) & y(0) & u(1) & \ldots & y(1)u(1) & y(0)u(1) \\ y(2) & y(1) & u(2) & \ldots & y(2)u(2) & y(1)u(2) \\ y(3) & y(2) & u(3) & \ldots & y(3)u(3) & y(2)u(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Além disso, tem-se

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix};\; \boldsymbol{\psi}_2 = \begin{bmatrix} y(-1) \\ y(0) \\ \vdots \\ y(N-2) \end{bmatrix};\; \boldsymbol{\psi}_9 = \begin{bmatrix} y(-1)u(0) \\ y(0)u(1) \\ \vdots \\ y(N-2)u(N-1) \end{bmatrix}$$

e assim sucessivamente. □

10.2.1 O método clássico de Gram-Schmidt (CGS)

O objetivo neste método é fatorar a matriz de regressores Ψ, que é de posto pleno, da seguinte forma $\Psi = QA$, sendo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \dots & \alpha_{1,n_\theta} \\ 0 & 1 & \alpha_{2,3} & \dots & \alpha_{2,n_\theta} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_{n_\theta-1,n_\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

é uma matriz triangular superior de dimensão $n_\theta \times n_\theta$, e Q é uma matriz de dimensão $N \times n_\theta$ com colunas ortogonais tal que $Q^{\mathrm{T}}Q = D$, sendo D uma matriz diagonal, definida positiva.

Portanto, a partir da equação normal, tem-se

$$\begin{aligned} \Psi^{\mathrm{T}}\Psi\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \Psi^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\ A^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}QA\hat{\boldsymbol{\theta}} &= A^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\ A^{\mathrm{T}}DA\hat{\boldsymbol{\theta}} &= A^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\ DA\hat{\boldsymbol{\theta}} &= Q^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\ A\hat{\boldsymbol{\theta}} &= D^{-1}Q^{\mathrm{T}}\mathbf{y}, \end{aligned}$$

sendo que a última equação fornece os parâmetros $\hat{\mathbf{g}} = A\hat{\boldsymbol{\theta}}$ do modelo no espaço ortogonal. Portanto, tais parâmetros podem ser determinados usando-se a última equação ou

$$\hat{g}_i = \frac{\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i \rangle}, \;\; i = 1, 2, \ldots, n_\theta.$$

Finalmente, os parâmetros do modelo original (representado no espaço de regressores não ortogonais) podem ser determinados como $\hat{\boldsymbol{\theta}} = A^{-1}\hat{\mathbf{g}}$.

10.2.2 O método modificado de Gram-Schmidt (MGS)

O método modificado de Gram-Schmidt objetiva resolver problemas de sensibilidade a mal-condicionamento numérico observados no método clássico. A fim de atingir esse alvo, o método MGS determina a matriz A uma linha por vez e ortogonaliza Ψ de tal forma que na i-ésima iteração as colunas $i+1, \ldots, n_\theta$ são feitas ortogonais à i-ésima coluna.

10.2.3 O método de Golub-Householder (GH)

Pré-multiplicando o modelo por uma matriz $Q \in \mathrm{I\!R}^{n_\theta \times n_\theta}$, tem-se

$$\begin{aligned} Qy(k) &= Q\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}} + Q\xi(k) \\ y^*(k) &= \boldsymbol{\psi}^{*\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \xi^*(k). \end{aligned}$$

A função custo de mínimos quadrados neste caso torna-se

$$
\begin{aligned}
J^*_{\text{MQ}} &= \sum_{i=1}^{N} \xi(i)^{*2} = \boldsymbol{\xi}^{*\text{T}}\boldsymbol{\xi}^* \\
&= (\mathbf{y}^* - \Psi^*\hat{\boldsymbol{\theta}})^{\text{T}}(\mathbf{y}^* - \Psi^*\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
&= \mathbf{y}^{*\text{T}}\mathbf{y}^* - \mathbf{y}^{*\text{T}}\Psi^*\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{T}}\Psi^{*\text{T}}\mathbf{y}^* + \hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{T}}\Psi^{*\text{T}}\Psi^*\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&= \mathbf{y}^{\text{T}}Q^{\text{T}}Q\mathbf{y} - \mathbf{y}^{\text{T}}Q^{\text{T}}Q\Psi\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{T}}\Psi^{\text{T}}Q^{\text{T}}Q\mathbf{y} + \hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{T}}\Psi^{\text{T}}Q^{\text{T}}Q\Psi\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&= (\mathbf{y} - \Psi\hat{\boldsymbol{\theta}})^{\text{T}}Q^{\text{T}}Q(\mathbf{y} - \Psi\hat{\boldsymbol{\theta}}).
\end{aligned}
$$

Para que $J^*_{\text{MQ}} = J_{\text{MQ}} = (\mathbf{y} - \Psi\hat{\boldsymbol{\theta}})^{\text{T}}(\mathbf{y} - \Psi\hat{\boldsymbol{\theta}})$, necessariamente $Q^{\text{T}}Q = I$, que é a condição para que a matriz Q seja ortonormal. Além disso, impõe-se que

$$
\Psi^* = Q\Psi = \begin{bmatrix} V \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},
$$

sendo que V é triangular superior e $V \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$. Então,

$$
\begin{aligned}
\Psi^{*\text{T}}\Psi^* &= \begin{bmatrix} V^{\text{T}} & \mathbf{0}^{\text{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= V^{\text{T}}V \\
&= \Psi^{\text{T}}Q^{\text{T}}Q\Psi \\
&= \Psi^{\text{T}}\Psi.
\end{aligned}
$$

Reescrevendo J^*_{MQ}, tem-se

$$
\begin{aligned}
J^*_{\mathrm{MQ}} &= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^* \\ \mathbf{y}_2^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^* \\ \mathbf{y}_2^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^{*\mathrm{T}} & \mathbf{y}_2^{*\mathrm{T}} \end{bmatrix} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} V^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) \left(\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^* \\ \mathbf{y}_2^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \\
&= \mathbf{y}_1^{*\mathrm{T}}\mathbf{y}_1^* + \mathbf{y}_2^{*\mathrm{T}}\mathbf{y}_2^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} \mathbf{y}_1^* - \mathbf{y}_1^{*\mathrm{T}} V \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} V \hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&= (\mathbf{y}_1^* - V\hat{\boldsymbol{\theta}})^{\mathrm{T}}(\mathbf{y}_1^* - V\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{y}_2^{*\mathrm{T}}\mathbf{y}_2^*.
\end{aligned}
$$

Claramente, J^*_{MQ} é minimizado quando $\mathbf{y}_1^* = V\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Nesse caso, tem-se que $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MQ}} = V^{-1}\mathbf{y}_1^*$ e conseqüentemente $J^*_{\mathrm{MQ}} = \mathbf{y}_2^{*\mathrm{T}}\mathbf{y}_2^*$. Como V é triangular superior, a estimativa

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MQ}} = V^{-1}\mathbf{y}_1^*$$

pode ser calculada com relativa facilidade.

10.3 A Taxa de Redução de Erro

A fim de definir a taxa de redução de erro, será considerado o seguinte modelo NARMAX geral:

$$
\begin{aligned}
y(k) &= \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(k-1)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \xi(k) \\
&= \sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{\theta}_i \psi_i(k-1) + \xi(k)
\end{aligned}
$$

e o seguinte modelo auxiliar

$$
y(k) = \sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{g}_i w_i(k-1) + \xi(k),
$$

sendo que os regressores w_i são ortogonais sobre os dados, ou seja,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} w_i(k)w_{j+1}(k) &= 0, \\
\overline{w_i(k)w_{j+1}(k)} &= 0, \ \forall i \neq j,
\end{aligned}
$$

ou simplesmente $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = 0$, sendo que $\mathbf{w}_i = [w_i(1) \ldots w_i(N)]^{\mathrm{T}}$. A soma dos valores quadráticos de $y(k)$ é $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ ou $\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$. Portanto,

$$y(k)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{g}_i w_i(k-1) + \xi(k)\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{g}_j w_j(k-1) + \xi(k)\right).$$

Tomando-se o valor médio de sobre os dados, tem-se

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle &= \sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{g}_i^2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle + \sum_{i=1, j=1, \forall i \neq j}^{n_\theta} 2\hat{g}_i \hat{g}_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle + \\ &\quad +2 \sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{g}_i \langle \mathbf{w}_i, \boldsymbol{\xi} \rangle + \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{g}_i^2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle + \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle. \end{aligned}$$

Se o i-ésimo regressor for acrescentado ao modelo, a parcela de $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ que passa a explicar é $\hat{g}_i^2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle$. Portanto, a *taxa de redução de erro* devido à inclusão do i-ésimo regressor expressa como uma fração da soma dos valores quadráticos dos dados é

$$[ERR]_i = \frac{\hat{g}_i^2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle},$$

sendo que a sigla ERR vem do inglês *error reduction ratio*.

Exemplo 10.3.1. *Identificação da equação logística*

O presente exemplo considerará poucos (oito) valores gerados pela equação logística $y(k) = 3,9\,y(k-1) - 3,9\,y(k-1)^2$. Inicializando-se tal equação com valores entre 0 e 1, obtém-se uma seqüência de números que é caótica.

A fim de obter um modelo a partir dos dados, geram-se todos os possíveis regressores candidatos até segunda ordem com grau de não-linearidade até dois, ou seja, para $n_y = 2$ e $\ell = 2$. Usando-se o algoritmo GH (exlog @), chega-se à seguinte matriz

$$V = \begin{bmatrix} -2,8284 & -1,2701 & -1,7023 & -1,2874 & -1,7113 & -0,9264 \\ & 0,9446 & 0,8170 & -0,4957 & -0,2807 & 0,4001 \\ & & -0,1641 & 0,4364 & 0,3867 & -0,0263 \\ & & & -0,7097 & -0,6961 & -0,3622 \\ & & & & & -0,0383 \\ & & & & & -0,1232 \end{bmatrix}.$$

Pivotando-se a matriz de regressores originais chega-se aos termos: constante, $y(k-1)^2$, $y(k-1)$ e $y(k-2)^2$, com as respectivas taxas de redução de erro: 0,8302; 0,0524; 0,1175 e $6{,}74\times10^{-32} \approx 0$. Estimando-se os parâmetros dos três primeiros regressores obtém-se, respectivamente: $-1,15 \times 10^{-14}$, -3,9 e 3,9. O regressor constante é espúrio e pode ser omitido do modelo. □

Exemplo 10.3.2. *Escolha de agrupamento de termos para oscilador eletrônico*

Os dados utilizados neste exemplo foram coletados de um oscilador eletrônico não-linear (dsvc1 @). Foram tomados o termo constante e as combinações até terceiro grau dos monômios $y(k-1)$ e $y(k-2)$, ou seja, foi considerado $n_y = 2$ e $\ell = 3$, ao todo são dez regressores. O resultado foi o seguinte:

Regressor	$\hat{\theta}_i$	ERR
$y(k-1)$	$2,0318$	$9,8444 \times 10^{-1}$
$y(k-2)$	$-9,6099 \times 10^{-1}$	$1,3762 \times 10^{-2}$
$y(k-1)^2 y(k-2)$	$6,5580$	$9,6521 \times 10^{-4}$
$y(k-1)^2$	$2,5508 \times 10^{-2}$	$1,3457 \times 10^{-5}$
$y(k-1)^3$	$-2,5916$	$1,8259 \times 10^{-6}$
$y(k-1)y(k-2)^2$	$-5,6382$	$4,8803 \times 10^{-5}$
$y(k-2)^3$	$1,5341$	$2,3595 \times 10^{-6}$
$y(k-2)^2$	$3,3658 \times 10^{-2}$	$2,9550 \times 10^{-8}$
$y(k-1)y(k-2)$	$-6,4813 \times 10^{-2}$	$1,1252 \times 10^{-7}$
constante	$-1,6458 \times 10^{-4}$	$1,4065 \times 10^{-8}$

Os termos quadráticos e o constante são os últimos na lista. O termo $y(k-1)^2$ que aparece em quarto lugar na lista de prioridades do algoritmo. O coeficiente do agrupamento Ω_{y^2} que é $\Sigma_{y^2} = -5,6471 \times 10^{-3}$. Isso sugere um possível cancelamento, o que, normalmente, pode ser entendido como evidência de que Ω_{y^2} é um agrupamento espúrio. $\square$

Exemplo 10.3.3. *Identificação de modelo com termo exponencial*

Foram gerados dados usando-se o seguinte modelo com termo exponencial:

$$\begin{aligned} y(k) &= 0,4\,y(k-1) + 0,5\,y(k-2) + u(k-1) \\ &\quad -0,3\,y(k-1)\mathrm{exp}[-u(k-2)^2] + e(k), \end{aligned}$$

sendo que $u(k)$ e $e(k)$ foram escolhidos como variáveis aleatórias independentes, com distribuição gaussiana, média zero e variâncias $\sigma_u^2 = 0,9$ e $\sigma_e^2 = 0,0025$, respectivamente. Foram tomados 490 valores, gerados pelo modelo, e um conjunto de 21 regressores candidatos (extended **@**). Além de todos os multinômios de grau $\ell = 2$ e ordem dois $n_y = n_u = 2$, foram gerados regressores exponenciais da forma $y(k-j)\mathrm{exp}[-x(k-i)^2]$, com $i, j = 1, 2$ e $x(k) = u(k), y(k)$.

O uso do algoritmo descrito resultou na escolha dos regressores $u(k-1)$, $y(k-2)$, $y(k-1)$ e $y(k-1)\mathrm{exp}[-u(k-2)^2]$ com os seguintes parâmetros, respectivamente: 1,0022; 0,5016; 0,3978 e -0,2928 com taxa de redução de erro de 0,54778; 0,37039; $7,1152 \times 10^{-2}$ e $9,1295 \times 10^{-3}$. □

10.4 Algoritmos para Modelos Racionais

Assume-se que um modelo racional do tipo

$$\begin{aligned} y(k) \;=\; & \frac{a(y(k-1),\ldots,y(k-n_y),u(k-1),\ldots,u(k-n_u))}{b(y(k-1),\ldots,y(k-n_y),u(k-1),\ldots,u(k-n_u))} \\ & +c\,(e(k-1),\ldots,e(k-n_e))+e(k), \end{aligned}$$

sendo que o ruído é modelado como sendo um polinômio, podendo ser linear ou não. Assim sendo, sugere-se o seguinte procedimento:

1. Faça $i=0$. Monte a matriz de regressores e estime os coeficientes usando MQ

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}^{i}_{\mathrm{n}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}^{i}_{\mathrm{d1}} \end{bmatrix} = [\Psi^{\mathrm{T}}\Psi]^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}\mathbf{y}^{*},$$

   sendo que o índice i indica a interação. Além disso,

$$\Psi = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(k-1) & \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{d1}}^{\mathrm{T}}(k-1) \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(k+N-2) & \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{d1}}^{\mathrm{T}}(k+N-2) \end{bmatrix}.$$

   Analogamente, o vetor $\mathbf{y}^{*} \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ é formado tomando $y^{*}(k)$ sobre os dados, ou seja,

$$\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = [y^*(k)\ y^*(k+1)\ \ \ldots\ \ y^*(k+N-1)]\,.$$

2. Faça $i = i + 1$. Determine os resíduos e a sua variância, respectivamente, como:

$$\xi^i(k) = y(k) - \frac{\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(k-1)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{n}}^{i}}{\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}(k-1)\begin{bmatrix} 1 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{d}}^{i} \end{bmatrix}}$$

$$(\sigma_\xi^2)^i = \frac{1}{N - m_{\mathrm{d}}} \sum_{i=m_{\mathrm{d}}+1}^{N} \big(\xi^i(k)\big)^2\,,$$

sendo que N é o tamanho dos dados e $m_{\mathrm{d}} = \max(n_y, n_u, n_e)$.

3. Usando-se os resíduos determinados no passo 2, atualize $\Psi^{\mathrm{T}}\Psi$ e $\Psi^{\mathrm{T}}\mathbf{y}^*$ usando (10.1), a seguir. Além disso, atualize (no caso de $i = 1$, essa matriz deverá ser formada) a seguinte matriz:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(k-1) & y(k)\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{d1}}^{\mathrm{T}}(k-1) & \boldsymbol{\psi}_{\xi}^{\mathrm{T}}(k-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(k+N-2) & y(k)\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{d1}}^{\mathrm{T}}(k+N-2) & \boldsymbol{\psi}_{\xi}^{\mathrm{T}}(k+N-2) \end{bmatrix},$$

sendo que $\boldsymbol{\psi}_\xi$ é o vetor de regressores do modelo de ruído.

4. Determine:

$$\Phi = \left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & y(k)\sum_{k=1}^{N} p_{\mathrm{d}2}^2 & \ldots & y(k)\sum_{k=1}^{N} p_{\mathrm{d}2}p_{\mathrm{d}N_\mathrm{d}} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & y(k)\sum_{k=1}^{N} p_{\mathrm{d}N_\mathrm{d}}p_{\mathrm{d}2} & \ldots & y(k)\sum_{k=1}^{N} p_{\mathrm{d}N_\mathrm{d}}^2 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right]$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -y(k)\sum_{k=1}^{N} p_{\mathrm{d}2}p_{\mathrm{d}1} \\ -y(k)\sum_{k=1}^{N} p_{\mathrm{d}N_\mathrm{d}}p_{\mathrm{d}1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

e estime novamente os parâmetros usando

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{n}}^{i} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{d}1}^{i} \end{bmatrix} = [\Psi^{\mathrm{T}}\Psi - (\xi_{\xi}^{2})^{i}\Phi]^{-1}[\Psi^{\mathrm{T}}\mathbf{y}^{*} - (\xi_{\xi}^{2})^{i}\phi].$$

5. Volte ao passo 2 até atingir convergência (de parâmetros ou de variância de resíduos).

Exemplo 10.4.1. *Mapa de conversor CC-CC buck*

Este exemplo considera um modelo racional estimado a partir de dados gerados por um modelo de um conversor CC-CC do tipo buck. O mapa obtido a partir das equações do circuito tem a seguinte forma:

$$y(k) = \alpha y(k-1) + \frac{h(d_n)^2 \beta E[E - y(k-1)]}{y(k-1)},$$

sendo $\alpha = 0{,}8872$, $\beta = 1,2$ e $E = 33$. d_n é um sinal de tensão que implementa a ação de controle e a saturação $h(d_n)$ é dada por

$$h(d_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } d_n < 0, \\ 1 & \text{se } d_n > 1, \\ d_n & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Modelos polinomiais não resultam em bons modelos para a dinâmica do mapa. Um modelo com estrutura ad hoc é:

$$y(k) = 46,429 \exp[22 - y(k-1)] + \frac{a\,y(k-1)^2 - b\,y(k-1) + c}{y(k-1)},$$

sendo $a = 2,6204$, $b = 99,875$ e $c = 1,4171 \times 10^3$.

Por outro lado, o seguinte modelo racional

$$\begin{aligned} y(k) \ = \ & \tfrac{1}{D}\times\{8,658 + 0,1223\times 10^{-2}\, y(k-1)^3 \\ & -0,441\times 10^{-1}\, y(k-1)^2\}, \end{aligned}$$

com

$$D \ = \ 1 - 0,8381\times 10^{-1}\, y(k-1) + 0,1766\times 10^{-2}\, y(k-1)^2,$$

aproxima bem a dinâmica em questão.

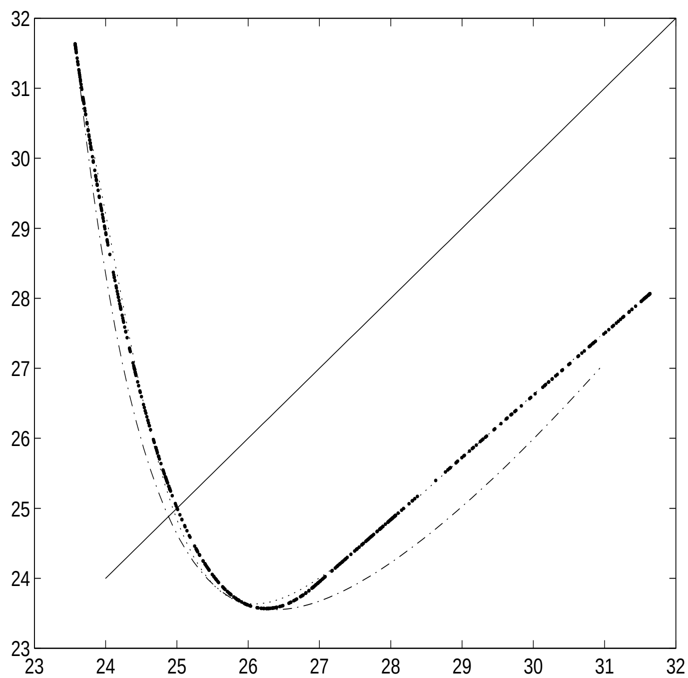

FIGURA 10.1: Eixo x é $y(k)$ e eixo y é $y(k+1)$, ambos em volts. Mapas de primeiro retorno do mapa original: pontilhado denso; do modelo racional: pontilhado leve; do modelo ad-hoc: traço-ponto.

□