פתרון תרגיל מספר 11־ אינפי 2

שם: מיכאל גרינבאום, ת.ז: 211747639

2019 בינואר 6

ו. פתרון:

 $[0,\infty)$ וב ([0,b] ב"ש ב"ש בקת התכנסות במ"ש ב[0,b] וב (א) הנכחה:

f תחילה נחשב את

$$f\left(x\right) = \lim_{n \to \infty} f_n\left(x\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{n} = 0$$

לכן $\forall x \in \mathbb{R}$, f(x) = 0 לכן עתה נחשב בקטעים:

, arepsilon > 0 יהי , [0,b] .i

$$(\exists N (\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) \left(N < n \to \frac{b}{n} < \varepsilon \right)$$

יהי $N < n \in \mathbb{N}$ ו $x \in [0,b]$ יהי

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{x}{n} \le \frac{b}{n} < \varepsilon$$

כלומר

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N (\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall x \in [0, b]) (\forall n \in \mathbb{N}) (N < n \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

כלומר [0,b] מההגדרה במידה במידה רציפה רציפה רציפה ל

לכן , $n\in[0,\infty)$, אזי נשים לב כי ($0,\infty$), לכן .ii

$$\sup \left\{ \left| f_n(x) - f(x) \right| \mid x \in [0, \infty) \right\} \ge \sup \left\{ \left| f_n(n) - f(n) \right| \right\}$$
$$= \sup \left\{ \frac{n}{n} - 0 \mid x \in [0, \infty) \right\} = 1$$

, $\sup\{|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)|\ |\ x\in[0,\infty)\}
eq 0$ כלומר געון, $\sup\{|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)|\ |\ x\in[0,\infty)\}$ לכן לכן $\sup\{|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)|\ |\ x\in[0,\infty)\}$ לא מתכנסת במידה שווה ב $\inf\{|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)|\ |\ x\in[0,\infty)\}$

מעלא 🛈

$$[a,\infty)$$
נב) א"ל: $f_n=rac{n^2x^2}{e^{n^2x^2}}$, בדיקת התכנסות במ"ש ב $f_n=rac{n^2x^2}{e^{n^2x^2}}$ וב

f תחילה נחשב את

$$f\left(x\right) = \lim_{n \to \infty} f_n\left(x\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 x^2}{e^{n^2 x^2}} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t} \stackrel{L \xrightarrow{\infty}}{=} \lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

לכן $\frac{1}{n}\in(-\infty,\infty)$, אזי נשים לב כי , אזי $(-\infty,\infty)$.i

$$\sup \left\{ \left| f_n \left(x \right) - f \left(x \right) \right| \mid x \in (-\infty, \infty) \right\} \ge \sup \left\{ \left| f_n \left(\frac{1}{n} \right) - f \left(\frac{1}{n} \right) \right| \mid x \in (-\infty, \infty) \right\}$$

$$= \sup \left\{ \frac{n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^2}{e^{n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^2}} - 0 \mid x \in (-\infty, \infty) \right\}$$

$$= \sup \left\{ \frac{1}{e^1} - 0 \mid x \in (-\infty, \infty) \right\} = \frac{1}{e}$$

, $\sup\{|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)|\mid x\in(-\infty,\infty)\}
eq 0$ כלומר הערט, $\sup\{|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)|\mid x\in(-\infty,\infty)\}$ לכך $(-\infty,\infty)$ להגדרת התכנסות במידה שווה, נסיק כי $f_n\to f$ לא מתכנסת במידה שווה ב

יהי לב כי , $\varepsilon>0$ יהי , $[a,\infty)$.ii

$$f'_{n}(x) = \left(\frac{n^{2}x^{2}}{e^{n^{2}x^{2}}}\right)' = \frac{2n^{2}x \cdot e^{n^{2}x^{2}} - 2n^{2}x \cdot n^{2}x^{2}e^{n^{2}x^{2}}}{\left(e^{n^{2}x^{2}}\right)^{2}} = \frac{2n^{2}x \cdot e^{n^{2}x^{2}}\left(1 - n^{2}x^{2}\right)}{\left(e^{n^{2}x^{2}}\right)^{2}} = \frac{2n^{2}x\left(1 - n^{2}x^{2}\right)}{e^{n^{2}x^{2}}}$$

 $\frac{1}{n} < x$ לכן הפונקציה יורדת עבור

$$(\exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) \left(N_1 < n \to \frac{1}{n} < a\right)$$

, $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 x^2}{e^{n^2 x^2}} = 0$ מהיות

$$(\exists N_2 (\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) \left(N_2 < n \to \frac{n^2 a^2}{e^{n^2 a^2}} < \varepsilon\right)$$

נגדיר $N < n \in \mathbb{N}$ ו $x \in [a, \infty)$ יהי $N = \max\{N_1, N_2\}$ אזי

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(a) - 0| = \left| \frac{n^2 a^2}{e^{n^2 a^2}} \right| < \varepsilon$$

כלומר

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N (\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall x \in [a, \infty)) (\forall n \in \mathbb{N}) (N < n \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

כלומר $[a,\infty)$ מההגדרה במידה במידה רציפה רציפה לומר ל

מ.ש.ל.ב.☺

2. **צ"ל:** תסתרו את Dini

הוכחה

$$f_{n}\left(x
ight)=x^{n},D=\left[0,1
ight],f\left(x
ight)=\left\{egin{matrix}0&0\leq x<1\\1&x=1\end{matrix}
ight.$$
 (א)

נשים לב כי $f_n o f$ לא במידה שווה וכן נקודתית רציפה אבל ראינו בהרצאה לה קטע סגור ו f_n קטע סגור ו

$$f_n(x) = x^n, D = [0, 1), f(x) = 0$$
 (2)

נשים לב כי f_n מונוטונית, f רציפה (כי קבועה f_n) ו f_n רציפה,

אבל הקודם שווה וכן מעלה לא לא ראינו כי ל $f_n \to f$ יכו (שאלה 4ב) שווה וכן בתרגיל בתרגיל אבל

,
$$f_{n}\left(x
ight)=x^{n}-x^{2n},D=\left[0,1\right],f\left(x
ight)=0$$
 גע) אם

נשים לב כי f רציפה (כי קבועה f_n) וf רציפה וגם f קטע סגור

$$f_{n}\left(x
ight)=egin{cases} 0 & x\in\mathbb{Q} \\ x^{n} & x
otin\mathbb{Q} \end{cases},D=\left[0,1\right],f\left(x
ight)=0$$
 אם (ד)

$$0 = f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ x^n & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = 0$$

נשים לב כי f רציפה (כי קבועה D) וגם (סי קבועה לב כי f רציפה לב כי לב מונטונית לא במידה שווה, לא במידה שווה,

$$\sup \left\{ \left| f_n(x) - f(x) \right| \mid x \in [0, 1] \right\} \ge \sup \left\{ \left| f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) - f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) \right| \right\}$$

$$= \sup \left\{ \left| \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^n - 0 \right| \right\} = \frac{1}{2}$$

, $\sup\{|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)|\mid x\in[0,1]\}
eq 0$ כלומר העכנסות, $\sup\{|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)|\mid x\in[0,1]\}$ לכן מגרסת העכנסת במידה שווה, נסיק כי $f_n\to f$ לא מתכנסת במידה שווה ב

מ.ש.ל.☺

 $(-\infty,a]$ בקטע $f_n o f$ באם 3.3

הוכחה:

 $\varepsilon > 0$ כן! יהי

$$(\exists c \in \mathbb{R}) (\forall d \in \mathbb{R}) \left(d \le c \to e^d < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

[a,b] לכל ק[a,b] במידה שווה ב[a,b] לכל לכי ראינו בתרגול כי

מתקיים $N< orall n\in \mathbb{N}, orall x\in [c,a]$ כך ש $\exists N\left(arepsilon
ight)\in \mathbb{N}$ מתקיים לכן במידה שווה ב $f_n o f$

$$\left| f_n\left(x \right) - f\left(x \right) \right| < \varepsilon$$

עתה נשים לב כי

$$\left(\forall x \in \left(-\infty, c\right]\right)\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \left(\left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| = \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} - e^x\right| < \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}\right| + \left|e^x\right| \le 2e^x < \varepsilon\right)$$

כלומר

$$\left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists N\left(\varepsilon\right) \in \mathbb{N}\right)\left(\forall x \in \left(-\infty, c\right]\right)\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\left(N < n \to \left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| < \varepsilon\right)$$

כלומר $f_n o f$ רציפה במידה שווה ב $f_n o f$ מההגדרה

מ.ש.ל.ⓒ

.4 אים $f \to f$ במידה שווה אז f רציפה במידה שווה א פורה. במידה אווה א הורחבי

מתקיים $\forall N\leq n\in\mathbb{N}, \forall x\in I$ כך כך ש $\exists N\left(\varepsilon\right)\in\mathbb{N}$ במידה שווה במידה $f_{n}\to f$ מהיות הכיי

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

מתקיים $|x-y|<\delta$ מתקיימים $\forall x,y\in I$ כך כך ש $\exists \delta\left(arepsilon
ight)$ מתקיים

$$|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

נשים לב כי $|x-y| < \delta$ המקיימים $\forall x,y \in I$ מתקיים

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\leq\left|f\left(x\right)-f_{N}\left(x\right)\right|+\left|f_{N}\left(x\right)-f_{N}\left(y\right)\right|+\left|f_{N}\left(y\right)-f\left(y\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

כלומר

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta(\varepsilon)) (\forall x, y \in I) (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

כלומר f רציפה במידה שוווה מההגדרה

מ.ש.ל.☺

5. פתרון:

(א) צ"ל: $f_n o f$ במ"ש ו $g\circ f_n$ לא במ"ש הוכחה: נבחר $g(x)=x^2$, $f_n(x)=x+rac{1}{n}$ נבחר וגם

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \left[x + \frac{1}{n} \right] = x$$

כלומר לכך נשים לכך, א $x \in \mathbb{R}$, א $f\left(x
ight) = x$ כלומר לכך נשים לב כי

$$\sup\left\{\left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\mid x\in\mathbb{R}\right\}=\sup\left\{\left|x+\frac{1}{n}-x\right|\mid x\in\mathbb{R}\right\}=\sup\left\{\frac{1}{n}\right\}=\frac{1}{n}\to0$$

, \mathbb{R} במ"ש ב $f_n o f$ כי מתקיים מתקיים לפי שווה במידה לכן במ"ש במ"ש עתה נשים לב כי

$$g \circ f_n = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$
$$h(x) = \lim_{n \to \infty} g \circ f_n = \lim_{n \to \infty} \left[x^2 + 2x \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right] = x^2$$

כלומר $y\circ f_n o h$, בנוסף לכך נשים לב כי אוים לקודתית כאשר פוסף לכך כלומר ל $g\circ f_n o h$

$$\sup \left\{ \left| f_n(x) - f(x) \right| \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \sup \left\{ \left| x^2 + 2x \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - x^2 \right| \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \sup \left\{ \left| 2x \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right| \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\geq \sup \left\{ \left| 2n \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right| \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \sup \left\{ \left| 2 + \frac{1}{n^2} \right| \mid x \in \mathbb{R} \right\} \geq 2 \not\to 0$$

מתקיים היה אחרת במ"ש במ"ש במ"ש מתקיים כי (sup לפי במידה שווה במידה התכנסות מתקיים לכן מהגדרת מתקיים לפי

$$\sup \left\{ \left| f_n \left(x \right) - f \left(x \right) \right| \mid x \in \mathbb{R} \right\} \to 0$$

 $\sup\{|f_n(x)-f(x)|\mid x\in\mathbb{R}\}>2$ אבל ראינו כי

מ.ש.ל.א.☺

במ"ש $g\circ f_n$ אזי שווה אזי g במ"ש במ"ד במ"ד במ"ל: במ"ל במ"ש במ"ש

הוכחה:

יים אווה, $|x-y|<\delta$ המקיימים ל $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש $\exists \delta\left(arepsilon
ight)$ מתקיים במידה מהיות רציפה במידה שווה, פ

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

מתקיים $N \leq orall n \in \mathbb{N}, orall x \in I$ כך כך $\exists N \, (arepsilon) \in \mathbb{N}$ מתקיים במידה שווה $f_n o f$

$$\left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| < \delta$$

נשים לב כי $N < n \in \mathbb{N}, orall x \in I$ מתקיים

$$\left|g\left(f_{n}\left(x\right)\right)-g\left(f\left(x\right)\right)\right| \overset{\left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\delta}{<}\varepsilon$$

כלומר

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N (\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall x \in I) (\forall n \in \mathbb{N}) (N < n \rightarrow |g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon)$$

כלומר Iם מההגדרה במידה $g\circ f_n o g\circ f$

מ.ש.ל.ב.©

6. פתרון:

ע"במ"ש f_n+g_n במ"ש (א)

הוכחה:

יים כי מתקיים שווה, ממידה פווה, מתקיים כי $g_n o g$ ו ווה, מהיות arepsilon > 0

$$(\exists N_1 (\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall x \in I) (\forall n \in \mathbb{N}) \left(N_1 < n \to |f_n (x) - f (x)| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

$$(\exists N_2 (\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall x \in I) (\forall n \in \mathbb{N}) \left(N_2 < n \to |g_n (x) - g (x)| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

נבחר $X \in I$ ו $N < n \in \mathbb{N}$, יהי $N = \max \{N_1, N_2\}$, אזי מתקיים

$$\left|r_{n}\left(x\right)-r\left(x\right)\right|=\left|f_{n}\left(x\right)+g_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\leq\left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|+\left|g_{n}\left(x\right)-g\left(x\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon$$

כלומר

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N (\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall x \in I) (\forall n \in \mathbb{N}) (N < n \rightarrow |r_n(x) - r(x)| < \varepsilon)$$

כלומר $r_n
ightarrow r$ במידה שווה ב $r_n
ightarrow r$

מ.ש.ל.א.©

במ"ש (ב) במ"ל: $f_n\cdot g_n$ לאו דווקא במ"ש

הוכחה:

נבחר $x+\frac{1}{n}\to x$ כי כי $x+\frac{1}{n}\to x$, בשאלה לא בשאלה $f_n\left(x\right)=g_n\left(x\right)=x+\frac{1}{n}$ במידה שווה לכן $x\in\mathbb{R}$, $h\left(x\right)=x$ כאשר $x\in\mathbb{R}$, במידה שווה בx בנוסף לכך בשאלה לא ראינו כי $x+\frac{1}{n}$ לא במידה שווה ב $x+\frac{1}{n}$ לא במידה שווה ב $x+\frac{1}{n}$ לא במידה שווה ב $x+\frac{1}{n}$ נשים לב כי

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^{2} = \left(x + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{n}\right) = f_{n}\left(x\right) \cdot g_{n}\left(x\right)$$

 $orall x \in \mathbb{R}$, $k\left(x
ight) = x^2$ לכן האשר במידה שווה במידה לכן למידה לכן למידה במידה במידה לכן למידה לכן

מ.ש.ל.ב.☺

חסומות f,g במ"ש אם $f_n\cdot g_n$ (ג)

הוכחה:

 $\forall x\in I$, $|g\left(x
ight)|\leq M_2$, $|f\left(x
ight)|\leq M_1$ כך ש $\exists M_1,M_2\in\mathbb{R}$ חסומות f,g מהיות קיים כי במידה שווה, מתקיים כי $g_n o g$ ו במידה שווה, מתקיים כי

$$(\exists N_{1}\left(\varepsilon\right) \in \mathbb{N}) \left(\forall x \in I\right) \left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \left(N_{1} < n \to |f_{n}\left(x\right) - f\left(x\right)| < \frac{\varepsilon}{2\left(M_{2} + 1\right)}\right)$$

$$(\exists N_{2}\left(\varepsilon\right) \in \mathbb{N}) \left(\forall x \in I\right) \left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \left(N_{2} < n \to |g_{n}\left(x\right) - g\left(x\right)| < \frac{\varepsilon}{2\left(M_{1} + 1\right)}\right)$$

$$(\exists N_{3}\left(\varepsilon\right) \in \mathbb{N}) \left(\forall x \in I\right) \left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \left(N_{3} < n \to |f_{n}\left(x\right) - f\left(x\right)| < 1\right)$$

יהי $x \in I$ ו $N_3 < n \in \mathbb{N}$ יהי

$$|f_n(x) - f(x)| < 1 \Rightarrow |f_n(x)| < |f(x)| + 1 \le M_1 + 1$$

נבחר $x \in I$ ו $N < n \in \mathbb{N}$ יהי יותי $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ נבחר

$$|r_{n}(x) - r(x)| = |f_{n}(x) \cdot g_{n}(x) - f(x) \cdot g(x)|$$

$$= |f_{n}(x) \cdot g_{n}(x) + f_{n}(x) g(x) - f_{n}(x) g(x) - f(x) \cdot g(x)|$$

$$\leq |f_{n}(x) \cdot g_{n}(x) - f_{n}(x) g(x)| + |f_{n}(x) g(x) - f(x) \cdot g(x)|$$

$$= |f_{n}(x)| \cdot |g_{n}(x) - g(x)| + |g(x)| \cdot |f_{n}(x) - f(x)|$$

$$\leq (M_{1} + 1) \cdot |g_{n}(x) - g(x)| + M_{2} \cdot |f_{n}(x) - f(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(M_{1} + 1)} \cdot (M_{1} + 1) + \frac{\varepsilon}{2(M_{2} + 1)} \cdot (M_{2})$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כלומר

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N (\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall x \in I) (\forall n \in \mathbb{N}) (N < n \rightarrow |r_n(x) - r(x)| < \varepsilon)$$

כלומר Iב מההגדרה במידה במידה רn o r

מ.ש.ל.ג.☺

7. פתרון:

 $f_n o 0$ מתכנס נקודתית אזי אזי $\sum f_n$ (א)

הוכחה:

יהי $\sum f_n$ אזי מהיות מתכנס מתכנס מתכנס בי מתכנס, מתכנס מתכנס, ביהי $\sum f_n$ מתכנס מתכנס מתקיים כי אזי מהיות מתכנס מתכנס מתקיים כי $\sum f_n$ מתכנס מתכנס מתפיים כי מ.ש.ל.א. \subseteq

במ"ש אזי $f_n o 0$ במ"ש במ"ש במ"ב במ"ש במ"ב במ"ש במ"ה:

יהי התכנסות במידה שווה, לפי קריטריון האי מתכנס במידה מתכנס מתכנס במידה היות האי ההתכנסות מתכנס מתכנס מתכנס מחוה, לפי

$$(\exists N (\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall x \in I) (\forall n, m \in \mathbb{N}) \left(N < n, m \to \left| \sum_{k=n}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon \right)$$

יים מתקיים במ"ש מתקיים אזי מקריטריון אזי מקריטריון אזי אזי $N < n+1 \in \mathbb{N}$ יהי

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=n-1}^n f_k(x) \right| < \varepsilon$$

לכן

$$\sup \left\{ \left| f_n\left(x \right) - f\left(x \right) \right| \mid x \in I \right\} < \varepsilon$$

, א $\varepsilon>0$ תמיד, כמעט מתקיים $\sup\left\{ \left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\mid x\in I\right\} <\varepsilon$ לכן

$$\sup \left\{ \left| f_n \left(x \right) - f \left(x \right) \right| \mid x \in I \right\} \to 0$$

, Iב במ"ש כי מתקיים כי (sup לכן במידה שווה במידה במידה לכן מהגדרת מתכנסות במידה שווה (לפי מ.ש.ל.ב.©

יהי התכנסות במידה שווה, לפי קריטריון התכנסות מתכנס במידה שווה, לפי התכנסות במידה שווה, היי arepsilon>0 אזי מהיות במידה שווה, לפי החינה במידה שווה, לפי

$$(\exists N (\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall x \in I) (\forall n, m \in \mathbb{N}) \left(N < n, m \to \left| \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \right| < \varepsilon \right)$$

יהי לב כי $x \in I, N < n, m \in \mathbb{N}$ יהי

$$\left| \sum_{k=n}^{m} f_k(x) \right| < \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| = \left| \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \right| < \varepsilon$$

לכן מקריטריון קושי להתכנסות במידה שווה, נסיק כי במ"ש לכן מקריטריון אושי להתכנסות במידה במידה לכן במ

מ.ש.ל.ג.©

8. פתרון:

[a,b)נקודתית ב $f_n o f$ (א) צ"ל:

הוכחה:

ינסיים, $f\left(x\right)=\lim_{n\rightarrow\infty}f_{n}\left(x\right)$ כי נראה גי $x\in\left[a,b\right)$ יהי יהי

נשים לב כי $\exists c \in \mathbb{R}$ כך של $\exists c \in \mathbb{R}$ נשים לב כי לב כי לב כך של כך מתקיים כי לב מתקיים כי לב, מההנחה של לב מתקיים כי לב מתקיים כי לב מההנחה של לב מתקיים כי לב מההנחה של לב מתכנסת נקודתית לכל לב מההנחה של לב מתכנסת נקודתית לכל לב מההנחה של לב מהביח לב מהביח

 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ כיק כי f_n נסיק כי f_n נקודתית ב f_n , לכן מההנחה מתקיים כי f_n נקודתית ב f_n נקודתית ב f_n בלינה f_n בלינה ליינה ליי

[a,b)כלומר $f_n o f$ נקודתית ב $\forall x \in [a,b)$, $f_n\left(x
ight) o f\left(x
ight)$

@.ש.ל.א.©

(ב) פתרון:

מוגדרת $N_{\varepsilon}\left(b_{0}\right)$:i.

הוכחה:

 $, \varepsilon > 0$ יהי

נשים לב כי f מתכנסת במידה שווה ב (a,b_0) , לכן

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \ (\forall x \in [a, b_0)) \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ (N < n \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

,
$$A_{b_{0}}=\left\{ n\in\mathbb{N}\mid\left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon\right\}$$
 נגדיר

נשים לב כי טבעיים טבעיים וגם A_{b_0} קבוצה של מספרים טבעיים ולא ריקה, נשים לב כי $N\in A_{b_0}$ לא ריקה כי $\min A_{b_0}=N_\varepsilon\left(b_0\right)$ ומתקיים מינימום ב $A_{b_0}=N_\varepsilon\left(b_0\right)$ מוגדרת היטב מ.ש.ל.ב.

עולה $N_{arepsilon}\left(b_{0}
ight)$ ב"ל: .ii

הוכחה:

 $, \varepsilon > 0$ יהי

 $N_{\varepsilon}\left(c\right)\leq N_{\varepsilon}\left(d\right)$ כי הראות להראות, כ
 $c,d\in\mathbb{R}$ יהיו יהיו כך כך מתכנסת במידה שווה ב
 (a,dכן מתכנסת במידה שווה בלc

 $(\forall x \in [a, d)) (\forall n \in \mathbb{N}) (N_{\varepsilon} (d) < n \rightarrow |f_n (x) - f (x)| < \varepsilon)$

יים אזי מתקיים אזי אוי $N_{\varepsilon}\left(d\right) < n \in \mathbb{N}$ יהי א $x \in [a,d)$ לב כי געים אזי אזי יהי אזי גע

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

כלומר את המינימלי שמקיים את הנדרש (a,c), לכן מכך ש $N_{arepsilon}(d)$ הוא המינימלי שמקיים את מקיים את כלומר $N_{arepsilon}(b_0)$, כלומר $N_{arepsilon}(c) \leq N_{arepsilon}(d)$ מונוטונית עולה,

נשים לב כי $N_{arepsilon}\left(b_{0}
ight)$ מונוטונית עולה של מספרים טבעיים,

 $\left(N_{\varepsilon}\left(b\right)\right)$ חסומת $N_{\varepsilon}\left(b_{0}\right)$ כי כי מתקיים אז חסומה א $N_{\varepsilon}\left(b_{0}\right)$

 $\lim_{b_{0} o b^{-}}N_{arepsilon}\left(b_{0}
ight)=\infty$ אחרת אח לא חסומה לא $N_{arepsilon}\left(b_{0}
ight)$

@.2.ב.2.

 $\lim_{b_0 o b^-} N_{arepsilon}(b_0)
eq \infty$ אם ורק אם [a,b) במידה שווה במידה במידה ([a,b) במידה הוכחה:

 $, \varepsilon > 0$ יהי

 $\lim_{b_0 o b^-}N_arepsilon\left(b_0
ight)
eq\infty$ כי ונראה ב[a,b) ונראה במידה שווה ב $f_n o f$ במידה שווה ב $f_n o f$ במידה שווה ב

$$(\forall x \in [a, b)) (\forall n \in \mathbb{N}) (N_{\varepsilon}(b) < n \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

 $\ ,N_{\varepsilon }\left(b_{0}\right) \leq N_{\varepsilon }\left(b\right)$ מתקיים ל $\forall b_{0}< b$ עולה ולכן כי ראינו כי הקודם ראינו כי $\lim_{b_{0}\to b^{-}}N_{\varepsilon }\left(b_{0}\right) \neq \infty \text{ поומה }N_{\varepsilon }$ כלומר $N_{\varepsilon }$

, [a,b)עתה נניח כי $f_n o f$ במידה ונראה וווה בוווה בוווה ב $\lim_{b_0 o b^-} N_{arepsilon}(b_0)
eq \infty$ במידה שווה ב $\lim_{b_0 o b^-} N_{arepsilon}(b_0)
eq \infty$ במידה מהיות

מהסעיף הקודם אנחנו יודעים כי $\lim_{b_0 o b^-} N_{arepsilon}\left(b_0
ight)$ כיים ונסמן

$$\lim_{b_0 \to b^-} N_{\varepsilon} \left(b_0 \right) = L$$

נבחר L+1 בי שמתקיים $\exists b_0 \in [a,b)$, נשים לב כי $N\left(arepsilon
ight) < n \in \mathbb{N}$ נבחר $N\left(arepsilon
ight) = L+1$, יהי

$$a < x < b_0 < b$$

נשים לב כי

$$N_{\varepsilon}\left(b_{0}\right) \leq N_{\varepsilon}\left(b\right) \leq L < L+1 = N\left(\varepsilon\right)$$
$$\left(\forall x \in \left[a, b_{0}\right)\right)\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\left(N_{\varepsilon}\left(b_{0}\right) < n \to \left|f_{n}\left(x\right) - f\left(x\right)\right| < \varepsilon\right)$$

לכן

$$|f_n(x) - f(x)| \stackrel{N_{\varepsilon}(b_0) < N(\varepsilon) < n}{<} \varepsilon$$

כלומר ראינו כי

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N (\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall x \in I) (\forall n \in \mathbb{N}) (N < n \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

[a,b)כלומר $f_n o f$ במידה שווה ב

מ.ש.ל.ב.3.©

```
a < b_0 < b לכל [a,b_0) לכל במידה שווה לf_n 	o f אבל במידה שווה במידה שווה לנג"ל: iv
```

,
$$I=\left[a,b\right) =\left[0,1\right)$$
ו $f_{n}\left(x
ight) =x^{n},f\left(x
ight) =0$ נבחר

,[0,1) אווה בקטע שאלה $f_n o f$ כי (שאלה 14) הקודם ראינו בתרגיל

 $, a < b_0 < b$ לכל [a, b_0] עתה נראה כי $f_n \to f$ במידה שווה לי, $a < b_0 < b$ יהי

$$\sup \{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [0, b_0)\} = \sup \{|x^n - 0| \mid x \in [0, b_0)\} = b_0^n \stackrel{n \to \infty}{\to} 0$$

[0,b)במ"ש במ"ם כי מתקיים מתקיים לכן במידה שווה לכן במידה במידה לכן לכן במידה אווה לכן במידה לכן מ.ש.ל.ב.4.©