פתרון תרגיל מספר 1 - חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

28 במרץ 2020

שאלה 3:

סעיף 1:

צ"ל: $\emptyset$ זאת שפה רגולרית

הוכחה:

נגדיר $Q=\{q_0\}, F=\emptyset$ ונגדיר $\delta(q,\sigma)=q_0$ לכל $q\in Q, \sigma\in\Sigma$

נגדיר $A=\langle Q,\Sigma,q_0,\delta,F\rangle$, נרצה להראות כי $L(A)=\emptyset$

תהי $w\in\Sigma^*$ מילה.

נשים לב כי

$$\delta^*(q_0,w)=\begin{cases}q_0 & w=\varepsilon\\ \delta(\delta^*(q_0,u),\sigma) & else\ w=u\cdot\sigma\end{cases}=\begin{cases}q_0 & w=\varepsilon\\ q_0 & else\ w=u\cdot\sigma\end{cases}=q_0$$

לכן לכל מילה $w\in\Sigma^*$, מתקיים $\delta^*(q_0,w)=q_0\notin F$ ולכן A לא מקבלת את w, כלומר $w\notin L(A)$,
כלומר A לא מקבלת אף מילה, כלומר $L(A)\subseteq\emptyset$, ותמיד מתקיים $\emptyset\subseteq L(A)$, ולכן $L(A)=\emptyset$
כלומר, מצאנו אוטומט A כך ש- $L(A)=\emptyset$, כלומר $\emptyset$ שפה רגולרית

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2:

צ"ל: $w\in\Sigma^*$, הקבוצה $\{w\}$ היא שפה רגולרית

הוכחה:

תהי $w\in\Sigma^*$, נסמן $|w|=n$, כאשר $w=\sigma_1\ldots\sigma_n$ כאשר $\sigma_i\in\Sigma$ לכל $i\in[n]$,

נגדיר $Q=\{q_0,\ldots,q_n,q_{reject}\}$, $F=\{q_n\}$, יהיו $q\in Q,\sigma\in\Sigma$ ונגדיר

$$\delta(q,\sigma)=\begin{cases}q_{i+1} & \exists i\in[n-1]\ \text{s.t}\ q_i=q\wedge\sigma=\sigma_{i+1}\\ q_{reject} & else\end{cases}$$

נגדיר $A=\langle Q,\Sigma,q_0,\delta,F\rangle$, תחילה נראה כי $w\in L(A)$

נראה באינדוקציה ש- $\delta^*(q_0,\sigma_1\ldots\sigma_i)=q_i$

<u>בסיס:</u> $i=0,1$, נשים לב כי

$$\delta^*(q_0,\sigma_1)\overset{\text{def}}{=}\delta(\delta^*(q_0,\varepsilon),\sigma_1)=\delta(q_0,\sigma_1)=q_1$$
$$\delta^*(q_0,\varepsilon)\overset{\text{def}}{=}q_0$$

כנדרש

<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל- $i-1$ ונראה שהטענה נכונה ל- i

$$\delta^*(q_0,\sigma_1\ldots\sigma_i)\overset{\text{def}}{=}\delta(\delta^*(q_0,\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}),\sigma_i)\overset{\text{induction}}{=}\delta(q_{i-1},\sigma_i)=q_i$$

לכן מהאינדוקציה נסיק כי $\delta^*(q_0,w)=\delta^*(q_0,\sigma_1\ldots\sigma_n)=q_n\in F$, כלומר A מקבלת את w, כלומר $w\in L(A)$
עתה תהי $w'=\sigma_1'\ldots\sigma_m'$ מילה כאשר $\sigma_i\in\Sigma$ לכל $i\in[m]$ וגם $w\neq w'$
נסמן ב־ k את האינדקס המינימלי בו מתקיים $\sigma_i\neq\sigma_i'$ (הערה: אם אחת מהאותיות לא מוגדרת מבחינת אינדקס, נגיד שהאותיות לא שוות באינדקס הנ"ל)
הערה: אינקס מתחיל מ־1 להמשך ההוכחה לנוחות
עתה נחלק ל2 מקרים:

1. אם $k=m+1$: כלומר המילה היא מהצורה $w'=\sigma_1'\ldots\sigma_m'=\sigma_1\ldots\sigma_m$,
נשים לב כי $k\leq\min(m,n)+1$, אם $m=n$ אז נקבל כי $w'=w$ בסתירה להנחה, ולכן $m<n$
ולכן מטענת העזר מתקיים

$$\delta^*(q_0,w')=\delta^*(q_0,\sigma_1\ldots\sigma_m)=q_m\neq q_n$$

ולכן $\delta^*(q_0,w')=q_m\notin F$, כלומר $w'\notin L(A)$

2. אם $k<m+1$: נשים לב כי $\sigma_i=\sigma_i'$ לכל $i\in[k-1]$ ולכן מהמשפט עזר שהוכח קודם מתקיים

$$\begin{aligned}\delta^*(q_0,\sigma_1'\ldots\sigma_k')&=\delta\left(\delta^*\left(q_0,\sigma_1'\ldots\sigma_{k-1}'\right),\sigma_k'\right)=\delta\left(\delta^*(q_0,\sigma_1\ldots\sigma_{k-1}),\sigma_k'\right)\\&=\delta(q_{k-1},\sigma_k')\stackrel{\star}{=}q_{reject}\end{aligned}$$

נשים לב כי $\star$ מתקיים כי $\sigma_k'\neq\sigma_k$ והפונקציה הוגדרה להעביר ל־ q_{reject} במצב הנ"ל,
עתה נוכיח באינדוקציה כי $\delta^*\left(q_0,\sigma_1'\ldots\sigma_k'\ldots\sigma_{k+i}'\right)=q_{reject}$ לפי אורך המילה
<u>בסיס:</u> אם $i=0$: ראינו כי $\delta^*(q_0,\sigma_1'\ldots\sigma_k')=\delta^*\left(q_0,\sigma_1'\ldots\sigma_{k+0}'\right)=q_{reject}$ כנדרש
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל־ $i-1$ ונראה שהיא נכונה ל־ i

$$\delta^*\left(q_0,\sigma_1'\ldots\sigma_k'\ldots\sigma_{k+i}'\right)\stackrel{\text{def}}{=}\delta\left(\delta^*\left(q_0,\sigma_1'\ldots\sigma_k'\ldots\sigma_{k+i-1}'\right)\sigma_{k+i}'\right)\stackrel{\text{induction}}{=}\delta\left(q_{reject},\sigma_{k+i}'\right)=q_{reject}$$

לכן נקבל כי $\delta^*(q_0,w')=\delta^*(q_0,\sigma_1'\ldots\sigma_m')=\delta^*\left(q_0,\sigma_1'\ldots\sigma_k'\ldots\sigma_{k+(m-k)}'\right)=q_{reject}\notin F$
לכן A לא מקבלת את w', ולכן $w'\notin L(A)$

מסקנה: $w\in L(A)$, לכן $\{w\}\subseteq L(A)$ ולכל מילה $w'\neq w$ מתקיים $w'\notin L(A)$ ולכן $L(A)\subseteq\Sigma^*\backslash\{w'\in\Sigma^*\mid w'\neq w\}=\{w\}$, כלומר $L(A)=\{w\}$ מההגדרה
כלומר מצאנו אוטומט A כך ש $L(A)=\{w\}$, כלומר $\{w\}$ שפה רגולרית

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3:
צ"ל: L שפה סופית אזי L רגולרית
הוכחה:
<u>בסיס:</u> $n=0$, כלומר $L=\emptyset$, הראנו בסעיף 1 ש־ $L=\emptyset$ שפה רגולרית
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה לכל קבוצה שמכילה n מילים ונוכיח לכל קבוצה שמכילה $n+1$ מילים
נסמן $L=\{w_1,\ldots,w_{n+1}\}$
נגדיר $L_n=\{w_1,\ldots,w_n\}$, זאת שפה שמכילה n מילים, ולכן מהנחת האינדוקציה זאת שפה רגולרית.
נגדיר $L_{n+1}=\{w_{n+1}\}$, נשים לב כי זאת שפה רגולרית לפי שאלה 3 סעיף 2
ולכן לפי סגירות שפות רגולריות לאיחוד (הוכח בהרצאה) מתקיים כי $L_n\cup L_{n+1}=L$ זאת שפה רגולרית,
כלומר L שפה רגולרית, כנדרש
הערה: נשים לב כי עשינו איחוד מספר סופי של פעמים באינדוקציה (מההנחה שהקבוצה היא סופית) ולכן האוטומט המתקבל לאחר האינדוקציה הוא בגודל סופי ולכן ניתן לומר שהוא אכן אוטומט לשפה.

מ.ש.ל.ג.☺