פתרון תרגיל מספר 1 ־ תורת המשחקים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

2 באפריל 2021

1. **צ"ל:** בדיוק אחד מהמצבים מתקיים
הוכחה:
תחילה נגדיר ניצחון של אליס, של בוב ותיקו.
אליס תנצח אם המצב הסופי הוא בקבוצה $\{(t,-t) : t>0\}$,
בוב ינצח אם המצב הסופי הוא בקבוצה $\{(t,-t) : t<0\}$,
יהיה תיקו אם המצב הסופי הוא בקבוצה $\{(0,0)\}$.
נשים לב שהחיתוך בין המצבים ריק, עתה נתחיל את ההוכחה באינדוקציה.
נוכיח באינדוקציה שלכל i מהלכים ממצב סופי יש אסטרטגיה שבדיוק אחד מהמצבים של ניצחון הפסד או תיקו מתקיימים.
<u>בסיס:</u> $i=0$, אנחנו במצב סופי .
נשים לב שאנחנו יודעים בדיוק מי ניצח או אם היה תיקו ואחד מהם מתקיים מכך שאיחוד הקבוצות שהגדרנו מלעיל הוא כל האפשרויות והחיתוך הוא ריק בגלל שכל מצב סופי הוא מהצורה $(t,-t)$.
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה לכל $j<i$ ונוכיח ל־ i
נחלק למקרים:

   (א) אם קיימת פעולה B_i כך שמובילה למצב N_{i+1} שמוביל לניצחון של השחקן בזמן i (מרחק ממצב סופי הוא לכל היותר $i-1$ ולכן באינדוקציה ידוע האם למי יש אסטרטגיה מנצחת ממצב זה), אז השחקן בזמן ה־ i תמיד יעשה את B_i ותמיד ינצח (ולא יהיה תיקו או הפסד)

   (ב) אחרת, קיימת פעולה B_i כך שמובילה למצב N_{i+1} שמוביל לתיקו, אז השחקן בזמן ה־ i תמיד יעשה את B_i ותמיד יגרום לתיקו (ולא יהיה ניצחון של אחד השחקנים) i (מרחק ממצב סופי הוא לכל היותר $i-1$ ולכן באינדוקציה ידוע האם למי יש אסטרטגיה מנצחת ממצב זה). **הערה:** הסיבה שיעדיף מהלך זה היא כי הוא לא יכול לנצח, אז הוא יעדיף תיקו על פני הפסד.

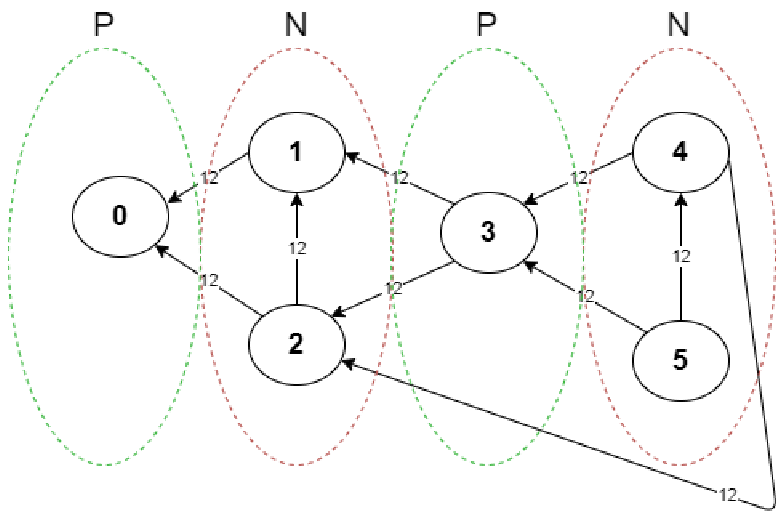
   (ג) אחרת, כל פעולה B_i מובילה למצב N_{i+1} שמוביל להפסד של השחקן ה־ i, ולכן לא משנה איזו פעולה יעשה הוא יפסיד (ולא יהיה תיקו או ניצחון שלו). (מרחק ממצב סופי הוא לכל היותר $i-1$ ולכן באינדוקציה ידוע האם למי יש אסטרטגיה מנצחת ממצב זה).

   כלומר הוכחנו שלכל שלב במשחק, בדיוק אחד מהתנאים מתקיימים ולכן זה בפרט נכון עבור המצב ההתחלתי, כנדרש.

   מ.ש.ל.א.☺

2. **פתרון:**

   (א) **צ"ל:** ציור ואסטרטגיה מנצחת
   הוכחה:



לשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת שהיא לקחת את בהתחלה 2, שישאיר 3 מטבעות.
נסמן את מספר המטבעות שהשחקן השני ייבחר ב־ i, השחקן הראשון ייקח $3-i$ וינצח.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** P, N
הוכחה:
נוכיח באינדוקציה כי $P_i=\{i\cdot(d+1)\}\,, N_{i+1}=\{j \mid j\in(i\cdot(d+1)\,,(i+1)\cdot(d+1))\}$,
<u>בסיס:</u> $i=0$, נשים לב שמההגדרה $P_0=\{0\}=\{0\cdot(d+1)\}$, כנדרש,
נזכר כי

$$\begin{aligned}N_1&=\{j \mid \text{exists legal move from } j \text{ that ends in } P_0\}=\{j \mid \exists k\in[1,d] \ \text{ s.t. } \ j-k\in P_0\}\\&=\{j \mid \exists k\in[1,d] \ \text{ s.t. } \ j-k=0\cdot(d+1)\}=\{j \mid j\in(0,d+1)\}\\&=\{j \mid j\in(i\cdot(d+1)\,,(i+1)\cdot(d+1))\}\end{aligned}$$

כנדרש
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל־ i ונוכיח ל־ $i+1$, נשים לב כי

$$\begin{aligned}N_{i+1}&=\{j \mid \text{exists legal move from } j \text{ that ends in } P_i\}=\{j \mid \exists k\in[1,d] \ \text{ s.t. } \ j-k\in P_i\}\\&\overset{\text{induction that } P_i=\{i\cdot(d+1)\}}{=}\{j \mid \exists k\in[1,d] \ \text{ s.t. } \ j-k=i\cdot(d+1)\}\\&=\{j \mid j\in(i\cdot(d+1)\,,(i+1)\cdot(d+1))\}\end{aligned}$$

גם נשים לב כי

$$\begin{aligned}P_{i+1}&=\{j \mid \text{every legal move from } j \text{ that ends in } N_i\}=\{j \mid \forall k\in[1,d]\,,j-k\in N_i\}\\&\overset{\text{induction that } N_i=\{j|j\in(i\cdot(d+1),(i+1)\cdot(d+1))\}}{=}\{j \mid \forall k\in[1,d]\,,j-k\in\{j \mid j\in(i\cdot(d+1)\,,(i+1)\cdot(d+1))\}\}\\&=\{j \mid \forall k\in[1,d]\,,j-k=\{j \mid (i\cdot(d+1)<j<(i+1)\cdot(d+1))\}\}\end{aligned}$$

נשים לב שהמספר היחיד המקיים שחיסור של כל מספר בין 1 ל־ d נשאר בקטע $(i\cdot(d+1)\,,(i+1)\cdot(d+1))$ הוא $(i+1)\cdot(d+1)$.
ולכן נקבל כי

$$P_{i+1}=\{j \mid \forall k\in[1,d]\,,j-k=\{j \mid (i\cdot(d+1)<j<(i+1)\cdot(d+1))\}\}=\{(i+1)\cdot(d+1)\}$$

כנדרש.

עתה נשים לב כי לכל $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים $P_i \subseteq P$ ולכן

$$\{i \cdot (d+1) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \{i \cdot (d+1)\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i \subseteq P$$

עתה נשים לב כי לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $N_i \subseteq N$ ולכן

$$\mathbb{N} \setminus \{i \cdot (d+1) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \{j \mid j \in (i \cdot (d+1), (i+1) \cdot (d+1))\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \subseteq N$$

נסמן $A = \{i \cdot (d+1) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$,
יהי $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, נשים לב כי מתקיים ש־ $i \in A \subseteq P$ או ש־ $i \in \mathbb{N} \setminus A \subseteq N$.
לכן הקבוצות שמצאנו אומרות למי יש אסטרטגיה מנצחת לכל מצב התחלתי, ולכן הן בעצמן N, P ולא רק מוכלות בהן, כלומר

$$N = \mathbb{N} \setminus \{i \cdot (d+1) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, P = \{i \cdot (d+1) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** אסטרטגיה מנצחת

הוכחה:

תחילה נוכיח שאין אסטרטגיה מנצחת לאף שחקן מהמצבים $\{d+2, \dots, 2d+1\}$, נחלק למקרים:

i. נניח שלשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת עבור $i \in \{d+2, \dots, 2d+1\}$ והוא לוקח j מטבעות
   א'. אם $i - j \le d$ אז השחקן השני ינצח על ידי לקיחת $i - j$ מטבעות בסתירה לכך שיש אסטרטגיה מנצחת לשחקן הראשון.
   ב'. אחרת $i - j > d$, השחקן השני ייקח d מטבעות ואז השחקן השלישי ינצח על ידי לקיחת $i-j-d$ (מספר בין 1 ל־ d) בסתירה לכך שיש אסטרטגיה מנצחת לשחקן הראשון. בגלל ש־ $i-j-d \le i-1-d \le 2d+1-1-d = d$
ii. נניח שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת עבור $i \in \{d+2, \dots, 2d+1\}$. השחקן הראשון ייקח $i-d-1$ מטבעות. ואז השחקן השני לוקח j מטבעות. השחקן השלישי ייקח $i-(i-d-1)-j = d+1-j$ מטבעות ויינצח בסתירה לכך שיש אסטרטגיה מנצחת לשחקן השני.
iii. נניח שלשחקן השלישי יש אסטרטגיה מנצחת עבור $i \in \{d+2, \dots, 2d+1\}$. נחלק מקרים:
   א'. אם $i \neq d+2$ השחקן הראשון ייקח 1 מטבעות ואז השחקן השני לוקח 1 מטבעות. השחקן השלישי ייקח j מטבעות. עתה נשארו $0 \le i-j-2 \le 2d$ מטבעות שיובילו לנצחון של השחקן הראשון או השני (על ידי בחירה חמדנית) בסתירה לכך שיש אסטרטגיה מנצחת לשחקן השלישי.
   ב'. אם $i = d+2$ השחקן הראשון ייקח d מטבעות ואז השחקן השני לוקח 2 מטבעות ויינצח בסתירה לכך שיש אסטרטגיה מנצחת לשחקן השלישי.

כלומר הראנו שאין אסטרטגיה מנצחת עבור $i \in \{d+2, \dots, 2d+1\}$,
נוכיח באינדוקציה שאין אסטרטגיה מנצחת עבור הקבוצה $n \ge d+2$,
<u>בסיס:</u> $d+2 \le n \le 2d+1$ כבר הוכחנו
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל־ $n-d, \dots, n-1$.
נניח בשלילה שיש אסטרטגיה מנצחת עבור השחקן ה־ i מהמצב n.
השחקן הראשון יעשה צעד j ונגיע למצב $n-j$ והשחקן ה־ i הוא עכשיו השחקן ה־ $i+1 \mod 3$ עם אסטרטגיה מנצחת מהמצב $n-j$, בסתירה לכך שאין ממצב זה אסטרטגיה מנצחת.
כלומר הוכחנו שלכל $m \ge d+2$, לאף שחקן אין אסטרטגיה מנצחת.

נחלק למקרים סופיים:

i. עבור $m \le d$, נשים לב שהשחקן הראשון יכול לנצח על ידי לקיחת m מטבעות.
ii. עבור $m = d+1$, השחקן הראשון ייקח i מטבעות ואז השחקן השני יינצח על ידי לקיחת $m-i$ מטבעות.
iii. עבור $m \ge d+2$, הוכחנו שאין אסטרטגיה מנצחת לאף אחד מהשחקנים.

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** תמיד אפשר להגיע לתיקו

הוכחה:

אבחנה: מהיות ויש רק 3 תורות, השחקן השני אף פעם לא יוכל לנצח ולכן תמיד ינסה לגרום לתיקו.

בשביל שאחד השחקנים יוכל לנצח, השחקן הראשון צריך לעשות אחד מהמהלכים הבאים בתור הראשון: $\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & S \\ \hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|}\hline & O & \\ \hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|}\hline S & & \\ \hline\end{array}$

נחלק למקרים:

i. אם השחקן הראשון עשה $\begin{array}{|c|c|c|}\hline S & & \\ \hline\end{array}$, אז השחקן השני לא יכול לנצח, ולכן יעשה את המהלך $\begin{array}{|c|c|c|}\hline S & S & \\ \hline\end{array}$ שיימנע ניצחון מהשחקן הראשון והמשחק יסתיים בתיקו.

ii. אם השחקן הראשון עשה $\begin{array}{|c|c|c|}\hline & O & \\ \hline\end{array}$, אז השחקן השני לא יכול לנצח, ולכן יעשה את המהלך $\begin{array}{|c|c|c|}\hline & O & O \\ \hline\end{array}$ שיימנע ניצחון מהשחקן הראשון והמשחק יסתיים בתיקו.

iii. אם השחקן הראשון עשה $\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & S \\ \hline\end{array}$, אז השחקן השני לא יכול לנצח, ולכן יעשה את המהלך $\begin{array}{|c|c|c|}\hline & S & S \\ \hline\end{array}$ שיימנע ניצחון מהשחקן הראשון והמשחק יסתיים בתיקו.

כלומר הראנו שאם השחקן הראשון עושה מהלך שיכול להוביל לניצחון של אחד השחקנים, השחקן השני עדיין יכול תמיד לגרום לזה שיהיה תיקו.

מהאבחנה קודם, השחקן השני לא יכול לנצח ולכן תמיד יעדיף לעשות תיקו.

ולכן מהמשפט שבכל משחק קומבינטורי סופי, לאחד השחקנים יש אסטרטגיה מנצחת או תיקו, נסיק שיש אסטרטגיה לתיקו.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** יש ניצחון לשחקן הראשון

הוכחה:

האסטרטגיה של השחקן הראשון היא לעשות את המהלך $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & & & S \\ \hline\end{array}$,

נחלק למקרים את מהלכי השחקן השני:

i. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & S & & S \\ \hline\end{array}$, אז השחקן הראשון ינצח על ידי המהלך $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & S & O & S \\ \hline\end{array}$

ii. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & O & & S \\ \hline\end{array}$, אז השחקן הראשון ינצח על ידי המהלך $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & O & S & S \\ \hline\end{array}$

iii. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & & S & S \\ \hline\end{array}$, אז השחקן הראשון ינצח על ידי המהלך $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & O & S & S \\ \hline\end{array}$

iv. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & & O & S \\ \hline\end{array}$, אז השחקן הראשון ינצח על ידי המהלך $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & S & O & S \\ \hline\end{array}$

כלומר הראנו שלכל מהלך של השחקן השני, השחקן הראשון עדיין ינצח ולכן זאת אסטרטגיה מנצחת לשחקן הראשון.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** יש ניצחון לשחקן הראשון

הוכחה:

השחקן הראשון יעשה את המהלך $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & S & & & \\ \hline\end{array}$,

נבחין שניצחון במשחק ייקרה בחלון $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & & & \\ \hline\end{array}$ או בחלון $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & & & \\ \hline\end{array}$.

נחלק למקרים את מהלכי השחקן השני: (הערה: מסימטריה נסתכל רק על מהלכים של השחקן השני מצד ימין ובאופן שרול לצד שמאל)

i. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & S & O & & \\ \hline\end{array}$, אז השחקן הראשון ינצח על ידי המהלך $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & S & O & S & \\ \hline\end{array}$

ii. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & S & & S & \\ \hline\end{array}$, אז השחקן הראשון ינצח על ידי המהלך $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & S & O & S & \\ \hline\end{array}$

iii. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & S & S & & \\ \hline\end{array}$, אז השחקן הראשון ינצח על ידי המהלך $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & & \\ \hline\end{array}$,

נחלק למקרים להראות ניצחון זה:

א'. השחקן השני לא ישים ב־ $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & & & S \\ \hline\end{array}$ אחרת יפסיד כפי שראינו בסעיף הקודם

ב'. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & S & \\ \hline\end{array}$,

אז השחקן הראשון יעשה את המהלך על $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & S & S \\ \hline\end{array}$ וינצח בעקבות העובדה שראינו בסעיף הקודם על ניצחון של השחקן השני מהמצב $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & & & S \\ \hline\end{array}$.

ג'. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & O & \\ \hline\end{array}$,
אז השחקן הראשון יעשה את המהלך על $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & O & S \\ \hline\end{array}$ וינצח.

ד'. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & & S \\ \hline\end{array}$,
אז השחקן הראשון יעשה את המהלך על $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & O & S \\ \hline\end{array}$ וינצח.

ה'. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & & O \\ \hline\end{array}$,
אז השחקן הראשון יעשה את המהלך על $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & O & O \\ \hline\end{array}$ וינצח בעקבות העובדה שראינו בסעיף הקודם על ניצחון של השחקן השני מהמצב $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & & & S \\ \hline\end{array}$.

iv. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & S & & O & \\ \hline\end{array}$, אז השחקן הראשון ינצח על ידי המהלך $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & & O & \\ \hline\end{array}$,
נחלק למקרים להראות ניצחון זה:

א'. השחקן השני לא ישים ב־ $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & & & S \\ \hline\end{array}$ אחרת יפסיד כפי שראינו בסעיף הקודם

ב'. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & O & \\ \hline\end{array}$,
אז השחקן הראשון יעשה את המהלך על $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & O & S \\ \hline\end{array}$ וינצח.

ג'. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & O & O & \\ \hline\end{array}$,
אז השחקן הראשון יעשה את המהלך על $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & O & O & S \\ \hline\end{array}$ וינצח בעקבות העובדה שראינו בסעיף הקודם על ניצחון של השחקן השני מהמצב $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & & & S \\ \hline\end{array}$.

ד'. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & & O & S \\ \hline\end{array}$,
אז השחקן הראשון יעשה את המהלך על $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & O & S \\ \hline\end{array}$ וינצח.

ה'. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & & O & O \\ \hline\end{array}$,
אז השחקן הראשון יעשה את המהלך על $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & O & O \\ \hline\end{array}$ וינצח בעקבות העובדה שראינו בסעיף הקודם על ניצחון של השחקן השני מהמצב $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & & & S \\ \hline\end{array}$.

v. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & S & & & O \\ \hline\end{array}$, אז השחקן הראשון ינצח על ידי המהלך $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & & & O \\ \hline\end{array}$,
נחלק למקרים להראות ניצחון זה:

א'. השחקן השני לא ישים ב־ $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & & & S \\ \hline\end{array}$ אחרת יפסיד כפי שראינו בסעיף הקודם

ב'. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & & O \\ \hline\end{array}$,
אז השחקן הראשון יעשה את המהלך על $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & S & O \\ \hline\end{array}$ וינצח בעקבות העובדה שראינו בסעיף הקודם על ניצחון של השחקן השני מהמצב $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & & & S \\ \hline\end{array}$.

ג'. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & O & & O \\ \hline\end{array}$,
אז השחקן הראשון יעשה את המהלך על $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & O & S & O \\ \hline\end{array}$ וינצח.

ד'. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & & O & O \\ \hline\end{array}$,
אז השחקן הראשון יעשה את המהלך על $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & S & O & O \\ \hline\end{array}$ וינצח בעקבות העובדה שראינו בסעיף הקודם על ניצחון של השחקן השני מהמצב $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & & & S \\ \hline\end{array}$.

ה'. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & & S & O \\ \hline\end{array}$,
אז השחקן הראשון יעשה את המהלך על $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & O & S & O \\ \hline\end{array}$ וינצח.

vi. אם השחקן השני עשה $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & S & & & S \\ \hline\end{array}$,
אז השחקן הראשון ינצח על ידי המהלך $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline S & & & S & & & S \\ \hline\end{array}$, השחקן השני ישים במשבצת מהצורה $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline S & & & S \\ \hline\end{array}$ ויפסיד כפי שראינו בסעיף הקודם.

כלומר הראנו אסטרטגיה מנצחת עבור השחקן הראשון לכל מקרה, כנדרש.

מ.ש.ל.ג.☺