אינפי 2 - סמסטר א' תשע"ט
תרגיל בית 10

להגשה עד יום חמישי, 3 בינואר, בשעה 23:45, דרך תיבת ההגשה במודל

1. נגדיר פונקציות $f_n:[0,2]\to\mathbb{R}$ על־ידי $f_n(x)=\begin{cases} n^2\cdot x & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{n} \\ n^2\cdot(\frac{2}{n}-x) & \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant\frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n}\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$.
   (א) הוכיחו שכל f_n היא פונקציה רציפה (ולכן חסומה ואינטגרבילית), וסדרת הפונקציות $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לפונקציה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ שגם היא רציפה (ולכן חסומה ואינטגרבילית).
   (ב) הוכיחו ש - $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת במידה שווה בשתי דרכים: (i) ישירות לפי הגדרה (אפשר בגרסת ההגדרה עם "sup"), (ii) בעזרת תכונת שמירת ערך האינטגרל של התכנסות במידה שווה.
   (ג) נניח שסדרת פונקציות רציפות על קטע סגור I מתכנסת נקודתית לפונקציה רציפה ב - I. האם ההתכנסות היא בהכרח במ"ש?
2. יהי $x_0\in I\subseteq\mathbb{R}$, ותהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות שמתכנסת במ"ש ב־ I לפונקציה f. נניח ש־ f רציפה ב - x_0.
   (א) תהי (x_n) סדרת מספרים ב־ I המתכנסת ל - x_0. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$.
   (ב) תנו דוגמא נגדית לשיוויון האחרון במקרה בו $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל־ f אך לא במידה שווה.
3. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה במידה שווה. נגדיר $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על ידי $f_n(x)=f(x+\frac{1}{n})$. הוכיחו כי f_n מתכנסת במ"ש ל־ f.
4. (א) תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המתכנסת במ"ש בכל אחד מהתחומים $D_1,\ldots,D_m$ (מספר **סופי** של תחומים). הוכיחו ש - $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש גם ב - $\bigcup_{i=1}^{m}D_i$.
   (ב) הוכיחו בעזרת הסעיף הקודם, ובעזרת הידוע לכם לגבי סדרת הפונקציות $f_n(x)=x^n$ בקטע $[0,1]$, ש - $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת במ"ש ב - $[0,1)$.
5. בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצאו את תחום ההתכנסות הנקודתית $D\subset\mathbb{R}$ של $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ וחשבו את פונקציית הגבול הנקודתי ב־ D. בנוסף, בדקו האם ההתכנסות היא במ"ש בכל אחד מהתחומים המצוינים[1].
   (א) $f_n(x)=(\sin(x))^n$. תחומים לבדיקת התכנסות במ"ש: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$; $[0,b]$ עבור $0<b<\frac{\pi}{2}$; $[0,\frac{\pi}{2})$.
   (ב) $f_n(x)=x^n-x^{2n}$. תחומים לבדיקת התכנסות במ"ש: $[0,1]$; $[0,b]$ עבור $0<b<1$.
   (ג) $f_n(x)=\begin{cases}0 & n\text{ is odd}\\ x^n & n\text{ is even}\end{cases}$. תחומים לבדיקת התכנסות במ"ש: $(-1,1)$.
   (ד) $f_n(x)=\begin{cases}\frac{n}{x}\sin(x/n) & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$. תחומים לבדיקת התכנסות במ"ש: $[-1,1]$
6. לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על ידי $f_n(x)=\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$.
   (א) חשבו את פונקציית הגבול הנקודתי $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$.
   (ב) הוכיחו: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}f_n(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx$ (רמז: ראו תרגיל בית 3, שאלה 1ז).
   (ג) יהי $a>0$ ממשי נתון. האם מתקיים $f_n\to f$ במ"ש על הקרן $[a,\infty)$?
   (ד) האם $f_n\to f$ במ"ש ב־ $\mathbb{R}$?
7. תהי $\Phi(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ המקיימת $\Phi(1)=0$. נעיין בפונקציות $f_n(x)=\Phi(x)\cdot x^n$.
   (א) חשבו את הגבול הנקודתי $f(x)$ של $f_n(x)$ והוכיחו כי $f_n\to f$ במ"ש.
   (ב) אם לא ידוע ש - Φ רציפה, אלא רק ש־ $\Phi(1)=0$, האם עדיין בהכרח מתקיים ש - $f_n\to f$ במ"ש?
8. לכל $n\geq 0$ שלם, יהי T_nf פולינום טיילור מסדר n של $f(x)=\log(1+x)$ ב - $a=0$. יהי $0<r<1$. הוכיחו ש־ $T_nf\xrightarrow{n\to\infty}f$ במידה שווה בקטע $[-r,r]$ (היעזרו בתקציר התרגול).

[1] לפעמים שאלה 2א שימושית לשלילת התכנסות במ"ש.