פתרון תרגיל מספר 2 ־ אלגוריתמים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639, **שם:** גיא לוי, **ת.ז:** 211744636

9 בנובמבר 2019

1. **צ"ל:** האלגוריתם מחזיר עץ פורש
הוכחה:
נסמן את הגרף המוחזר על ידי האלגוריתם ב$G' = \langle V, E' \rangle$, ונסמן $E' = (e_1', \dots, e_k')$ כאשר זהו גם סדר ההכנסה של הצלעות לE' לפי האלגוריתם.
בשביל להראות שG' הוא עץ פורש, נראה שהוא קשיר וחסר מעגלים

- נניח בשלילה שG' מכיל מעגל. נסמן את צלעות המעגל $\left(e_{i_1}', e_{i_2}', \dots e_{i_n}'\right)$ כאשר מתקיים $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_n \le k$.
לכן לפי פעולת האלגוריתם, האלגוריתם לא היה מכניס את e_{i_n}' לE' כי היא יוצרת מעגל בגרף, בסתירה לכך ש$e_{i_n}' \in E'$.
ולכן G' הוא גרף חסר מעגלים.
- נניח בשלילה שG' לא קשיר, לכן קיימים $\emptyset \ne V_1, V_2 \in V$ רכיבי קשירות שונים. מהיות G קשיר, קיימת צלע $e \in E$ המחברת בין V_1, V_2. נשים לב ש$E' \cup \{e\}$ לא סוגרת מעגל כי היא מחברת בין רכיבי קשירות שונים. לכן בריצת האלגוריתם יתקיים כי $e \in E'$ כי היא לא סוגרת מעגל, בסתירה לכך שV_1, V_2 הם רכיבי קשירות שונים (כי הם מחוברים על ידי e). כלומר G' קשיר

מסקנה: G' הוא עץ פורש

מ.ש.ל.☺

2. **צ"ל:** אלגוריתם חמדן לשאלה ונכונותו
הוכחה:
נציע את האלגוריתם הבא:

(א) נגדיר $A = \{x_1\}$

(ב) נעבור על כל הנקודות (לפי הסדר) ועבור כל תחנה i, נכניס את x_i לA אם $a_j + 1 < x_i$ (כאשר a_j הוא האיבר האחרון שהוספנו לA)
כלומר, כל פעם נוסיף קטע לA אם הקטע הקודם לא ארוך מספיק להגיע אליו, ונמשיך כך עד שנגיע אל הסוף

טענה (חוקיות): האלגוריתם מחזיר פלט חוקי
<u>הוכחה:</u>
נסמן את הפלט ב$A = (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = (y_1, \dots, y_m)$ כאשר $1 \le i_1 < i_2 < i_k \le n$.
יהי $1 \le i \le n$ ונראה שהדרישה מתקיימת עבור x_i.
נשים לב ש$\exists j \le m \le 1$ כך ש$y_j = x_{i_j} \le x_i \le x_{i_{j+1}} = y_{j+1}$.
אם $x_i \le y_j + 1$, סיימנו בגלל ש$x_i \in [y_j, y_j + 1]$, כלומר $\exists j \le m \le 1$ כך ש$x_i \in [y_j, y_j + 1]$
אחרת $x_i > y_j + 1$, ולכן לפי האלגוריתם x_i מוסף לA בדיוק לאחר $x_{i_j} = y_j$, כלומר $x_i = x_{i_{j+1}} = y_{j+1}$,
כלומר $\exists j \le m \le 1$ כך ש$x_i \in [y_j, y_j + 1]$.
לכן $\forall i \le n \le 1$, $\exists j \le m \le 1$ כך ש$x_i \in [y_j, y_j + 1]$, ולכן A הוא פתרון חוקי

טענה (למת החלפה): לכל $0 \le k \le m$ קיים פתרון אופטימלי מהצורה $C = (y_1, \dots, y_k, c_{k+1}, \dots, c_{m'})$
<u>הוכחה:</u>
נסמן את התוצאה של האלגוריתם החמדני ב$(y_1, \dots, y_m)$
בסיס: $k = 0$, נשים לב שהטענה נכונה בצורה ריקה

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $k-1$ ונוכיח עבור k, מהנחת האינדוקציה קיים פתרון אופטימלי מהצורה $C=(y_1,\dots,y_{k-1},c_k,\dots,c_{m'})$.
נגדיר $C'=(y_1,\dots,y_{k-1},y_k,c_{k+1},\dots,c_{m'})$, נראה שזהו פתרון חוקי וגם אופטימלי.
יהי $1\le i\le n$, לכן מהיות C פתרון אופטימלי, $\exists j\le m'$ $1\le$ כך ש$x_i\in[c_j,c_j+1]$.

- אם $j\neq k$ כך ש$x_i\in[c_j,c_j+1]$, אז הטענה מתקיימת גם עבור C',
- אחרת $j=k$, מתקיים כי $x_i\in[c_k,c_k+1]$, כלומר $c_k\le x_i\le c_k+1$
  בחרנו את y_k להיות האיבר הראשון שלא נכנס לקטעים $y_1,\dots,y_{k-1}$,
  לכן $\exists i'\le n$ $1\le$ כך ש $y_k=x_{i'}$. מהיות C אופטימלי, $\exists j'\le m'$ $1\le$ כך ש$y_k=x_{i'}\in[c_{j'},c_{j'}+1]$,
  מהגדרת y_k, מתקיים כי $j'\neq 1,\dots,k-1$, כלומר $j'\ge k$, ולכן מתקיים

  $$c_k\le c_{j'}\le y_k$$

  מאיך שבחרנו את $y_1,\dots,y_{k-1}$, מתקיים כי x_i לא שייך לקטעים שלהם אם"ם $i'\le i$, לכן

  $$y_k=x_{i'}\le x_i\le c_k+1\le y_k+1\Rightarrow\boxed{x_{i'}\in[y_k,y_k+1]}$$

  לכן הטענה מתקיימת גם עבור C'

לכן $\forall i\le n$ $1\le$, $\exists j\le m'$ $1\le$ כך ש$x_i\in\left[c'_j,c'_j+1\right]$, ולכן C' הוא פתרון חוקי ומהיות $|C|=|C'|$ אז C' הוא גם אופטימלי.
מסקנה מהטענה (אופטימליות): הפתרון $A=(y_1,\dots,y_m)$ אופטימלי.
הוכחת המסקנה:
מלמת ההחלפה נובע כי קיים פתרון אופטימלי המתחיל ב$y_1,\dots,y_m$. עם זאת, הפתרון הזה לא יכול להכיל יותר איברים כיוון ש$y_1,\dots,y_m$ הוא בעצמו פתרון חוקי ולכן אם יהיו עוד איברים, נקבל סתירה למינימליות הפתרון. ולכן $A=(y_1,\dots,y_m)$ הוא אופטימלי

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** אלגוריתם חמדן לשאלה ונכונותו
הוכחה:
נציע את האלגוריתם הבא:

(א) נגדיר $A=\emptyset$

(ב) נעבור על כל הנקודות (לפי הסדר) ועבור כל תחנה i, נכניס את a_i-a_{i-1} לA (מהתחנה השנייה)
כלומר, כל פעם נוסיף לA את כמות הדלק שצריך כדי להגיע לתחנה מהתחנה הקודמת לנוכחית

(ג) נוסיף 0 דלק לתחנה הn ($l_n=0$)

טענה (חוקיות): האלגוריתם מחזיר פלט חוקי
<u>הוכחה:</u>
נסמן את פלט האלגוריתם ב$A=(l_1,\dots,l_n)$.
יהי $1\le i\le n-1$, נשים לב כי x_i זה כמות הליטרים שצריכים לתדלק בתחנה הi. הדרישה על l_i היא $0\le l_i\le N$
נשים לב כי $l_i=a_{i+1}-a_i\le N$ (נתון) וגם $x_i=a_{i+1}-a_i\ge 0$ (נתון) ולכן l_i עומד בדרישות.
אם $i=n$, אז $0=l_i\le N$ עומד בדרישות,
לכן A הוא פתרון חוקי כי הוא עומד בדרישות בכל תחנת דלק.

טענה (למת החלפה): לכל $0\le k\le n-1$ קיים פתרון אופטימלי מהצורה $C=(l_1,\dots,l_k,c_{k+1},\dots,c_n)$
<u>הוכחה:</u>
נסמן את התוצאה של האלגוריתם החמדני ב$(l_1,\dots,l_n)$
בסיס: $k=0$, נשים לב שהטענה נכונה בצורה ריקה
צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $k-1$ ונוכיח עבור k, מהנחת האינדוקציה קיים פתרון אופטימלי מהצורה $C=(l_1,\dots,l_{k-1},c_k,\dots,c_n)$.
נגדיר $C'=(l_1,\dots,l_{k-1},l_k,c_{k+1}+(c_k-x_k),\dots,c_n)$, נראה שזהו פתרון חוקי וגם אופטימלי.
יהי $1\le i\le n-1$, נראה שכמות הדלק שתודלקה חוקית

- אם $i \neq k, k+1$ אז c_i הוא חוקי מהיותו פתרון, ולכן c'_i הוא גם חוקי ולכן C' חוקי
- אם $i = k$, אז ראינו בחוקיות שl_k חוקי ולכן C' חוקי
- אם $i = k+1$:
תחילה נשים לב שאם $c_k < l_k$ אז למכונית אין מספיק דלק כדי להגיע לתחנה a_{k+1},
לכן $c_k - l_k \geq 0$, נראה שc'_{k+1} הוא מקיים את התנאים.
נשים לב כי

$$0 = c_{k+1} = c_{k+1} + 0 \leq c_{k+1} + (c_k - l_k) = c'_{k+1}$$

נשים לב שבפתרון C, המכונית מגיעה לתחנה c_{k+1} עם לפחות $c_k - l_k$ ליטר דלק (כמה שנשאר מהתדלוק האחרון), לכן $c_{k+1} \leq N - (c_k - l_k)$ כי מותר לתדלק לכל היותר N ליטר דלק בכל רגע נתון. לכן $c'_{k+1} = c_{k+1} + (c_k - l_k) \leq N$

לכן $1 \leq \forall i \leq n$ התנאים על c'_i מתקיימים, ולכן C' הוא פתרון חוקי וגם

$$sum\left(C\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{k-1} l_i + \sum_{i=k}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{k-1} l_i + \left(l_k + (c_k - l_k)\right) + \sum_{i=k+1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{k} l_i + c'_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{n} c'_i = sum\left(C'\right)$$

ולכן C' הוא גם פתרון אופטימלי

מסקנה מהטענה (אופטימליות): הפתרון $A = (l_1, \ldots, l_n)$ אופטימלי.

הוכחת המסקנה:

מלמת ההחלפה נובע כי קיים פתרון אופטימלי המתחיל ב$x_1, \ldots, l_{n-1}$. לכן הפתרון הוא מהצורה $(l_1, \ldots, l_{n-1}, c)$, נשים לב שאין דרישות על c חוץ מטווח ולכן מהיות הפתרון הוא אופטימלי מתקיים $c = 0$ (למזעור הסכום) ולכן $(l_1, \ldots, l_{n-1}, 0)$ הוא אופטימלי. נזכר שהגדרנו $l_n = 0$, ונקבל כי $A = (l_1, \ldots, l_n)$ אופטימלי.

מ.ש.ל.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** האם האלגוריתם הנתון אופטימלי

הוכחה:

עבור $n = 15$, מתקיים כי האלגוריתם יוציא $2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 1)) + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 15$ שזה 10 פעולות.
נשים לב כי

$$1 + 2 \cdot (1 + 2 \cdot (1 + 2 \cdot 1)) = 15$$

ומבצע 6 פעולות שזה פחות פעולות מהאלגוריתם הנתון, לכן האלגוריתם הנתון אינו אופטימלי

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** פתרון חמדן לשאלה ונכונותו

הוכחה:

נשים לב שבמקום לפתור את השאלה עם $ADD, DOUBLE$ והמטרה היא להגיע מ1 לn בכמה שפחות צעדים, נוכל לפתור את השאלה עבור $SUB, DIVIDE$ כשהמטרה היא להגיע מn ל1 בכמה שפחות צעדים, והפתרון לבעיה המקורית יהיה לעשות את הפעולות בסדר הפוך.
לכן, נפתור את השאלה ל$SUB, DIVIDE$ כי זה יותר אינטואיטבי.
נציע את האלגוריתם הבא:

i. נגדיר $result = \emptyset$
ii. כל עוד $n \neq 1$:
- אם n מתחלק ב2, נוסיף $DIVIDE$ ל$result$ ונחלק ב2 את n
- אחרת נחסר מn אחד ונוסיף ל$result$ את SUB

iii. נחזיר את $result$

טענה (חוקיות): האלגוריתם מחזיר פלט חוקי

<u>הוכחה:</u>

נשים לב כי כל מהלך שנעשה באלגוריתם הוא חוקי כי הוא SUB או $DIVIDE$.
יתרה מזעת עבור כל מהלך שהוסף ל$result$, אותה הפעולה בוצעה על n, והאלגוריתם הסתיים כש$n=1$, לכן גם הפעולות ב$result$ על n יביאו את n ל1, כנדרש מפתרון חוקי. לכן מהיות $result$ מביא את n ל1 בשימוש רק בפונקציות חוקיות, הינו פתרון חוקי.

נסמן את התוצאה של האלגוריתם החמדני ב$(x_1,\dots,x_n)$

טענה (למת החלפה): לכל $0\le k\le n$ קיים פתרון אופטימלי מהצורה $C=(x_1,\dots,x_k,c_{k+1},\dots,c_{m'})$

<u>הוכחה:</u>

בסיס: $k=0$, נשים לב שהטענה נכונה בצורה ריקה

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $k-1$ ונוכיח עבור k, מהנחת האינדוקציה קיים פתרון אופטימלי מהצורה $C=(x_1,\dots,x_{k-1},c_k,\dots,c_{m'})$.

נחלק למקרים:

- אם $x_k=SUB$: אז מהיות C פתרון חוקי, $c_k=SUB$ (אחרת מחלקים מספר לא שלם), ולכן $C'=(x_1,\dots,x_{k-1},x_k,\dots,c_{m'})=(x_1,\dots,x_{k-1},c_k,\dots,c_{m'})=C$ הוא פתרון חוקי ואופטימלי שמסכים עם הפתרון החמדן על הk הצעדים הראשונים
- אם $x_k=DIVIDE$: נסמן ב$2l$ (בגלל שx_k זוגי ניתן לכתוב $2l$) את הפעלת $k-1$ הצעדים הראשונים מC על n. מהיות C פתרון חוקי, $c_k=SUB$ או $c_k=DIVIDE$.
  - אם $c_k=DIVIDE$: אז $C'=(x_1,\dots,x_{k-1},x_k,\dots,c_{m'})=(x_1,\dots,x_{k-1},c_k,\dots,c_{m'})=C$ הוא פתרון חוקי ואופטימלי שמסכים עם הפתרון החמדן על הk הצעדים הראשונים.
  - אם $c_k=SUB$ וגם $l=2$: אז $C'=(x_1,\dots,x_{k-1},x_k)$ הוא פתרון חוקי כי $l\div 2=1$ וגם אופטימלי כי $|C'|=k\le|(x_1,\dots,x_{k-1},c_k,\dots,c_{m'})|=|C|$.
  - נשאר המקרה $c_k=SUB$, $l>2$: נסמן בm את המספר הראשון מהפעלות C על n שמתקיים $l<m$.
    - אם הגענו לm על ידי SUB, אז הגענו אליו מl, נסמן בj את האינדקס בו הגענו לl.
    עתה, מהיות $2l$ זוגי ו$c_k=SUB$, מתקיים כי $c_{k+1}=SUB$ מהיות C פתרון חוקי.
    עתה נשים לב שנוכל להחליף את כל הפעולות בין c_k עד c_j ב$x_k=DIVIDE$, נשאר עם פתרון חוקי שנסמנו $C'=(x_1,\dots,x_k,c_{j+1},\dots,c_{m'})$ וגם מתקיים $|C'|\le k+(m'-j)\le m'=|C|$
    כלומר C' הוא גם פתרון אופטימלי שמסכים עם הפתרון החמדן על הk הצעדים הראשונים (ואף אם להתקטנן, מביא סתירה למינימליות הפתרון של C)
    - אחרת הגענו לm על ידי $DIVIDE$, לכן $m<l\le 2m\le 2l-1$,
    נשים לב שC עשה $2l-1-2m$ קריאות לSUB ואז קריאה ל$DIVIDE$, כלומר הוא עשה $2l-2m-1+1=2(l-m)$ פעולות.
    עתה נשים לב כי אם נעשה $DIVIDE$ על $2l$ ולאחר מכן $m-l$ קריאות לSUB נקבל $m-l+1$ פעולות שגם מגיעות <u>לאותו</u> הm ,
    נגדיר

$$C'=\left(x_1,\dots,x_{k-1},DIVIDE,\underbrace{SUB,\dots,SUB}_{m-l\text{ times}},c_{k+m-l+1},\dots,c_{m'}\right)=\left(x_1,\dots,x_{k-1},x_k,\underbrace{SUB,\dots,SUB}_{m-l\text{ times}},c_{k+m-l+1},\dots,c_{m'}\right)$$

נשים לב כי C' מגיע לm בדיוק כמו C ואז ממשיך כמו C, ומבצע רק פעולות $SUB,DIVIDE$ ולכן חוקי וגם

$$|C'|-|C|=(m-l+1)-2(l-m)=m-l+1\le 0\Rightarrow \boxed{|C'|\le|C|}$$

כלומר C' הוא פתרון אופטימלי שמסכים עם הפתרון החמדן על הk הצעדים הראשונים

כלומר הראנו שלכל מקרה נוכל ליצור פתרון C' אופטימלי שמסכים עם הפתרון החמדן על הk הצעדים הראשונים

מסקנה מהטענה (אופטימליות): הפתרון $result=(x_1,\dots,x_n)$ אופטימלי.

הוכחת המסקנה:

מלמת ההחלפה נובע כי קיים פתרון אופטימלי המתחיל ב$x_1,\dots,x_n$. לכן הפתרון הוא מהצורה $C=(x_1,\dots,x_n,c_{n+1},\dots,c_{m'})$,
נשים לב שבx_n הגענו ל1, ולכן ממינימליות הפתרון האופטימלי מתקיים $n\le m'=|C|\le n$. לכן $n=m'$, כלומר $C=(x_1,\dots,x_n)$ פתרון אופטימלי לבעיה, כלומר $C=(x_1,\dots,x_n)=result$ הוא פתרון אופטימלי לבעיה.

מ.ש.ל.ב.☺