פתרון תרגיל מספר 8 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

4 ביוני 2020

שאלה 5

סעיף 2

צ"ל: $L = \{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid \text{exists exactly one tiling}\} \in \overline{\text{RE} \cup \text{coRE}}$

הוכחה:

נבנה רדוקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ באופן הבא:

$$f\left(\langle T,H,V,t_0\rangle\right) = \left\langle T \cup \{A\}, H \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, V \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, t_0 \right\rangle$$

כאשר A הוא טייל שלא קיים ב־ T.
נשים לב ש־ f חשיבה כי היא רק מוסיפה מספר איברים סופי ל־ H,V,T.
נשם לב כי:

1. אם $\langle T,H,V,t_0\rangle \in \{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid \text{exists tiling}\}$, אז $\left\langle T \cup \{A\}, H \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, V \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, t_0 \right\rangle$ מכיל את הריצוף שקיים ב־ $\langle T,H,V,t_0\rangle$ וגם הריצוף $\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A & A & A & \cdots \\ A & A & A & \cdots \\ t_0 & A & A & \cdots \end{array}$,
ולכן ל־ $\left\langle T \cup \{A\}, H \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, V \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, t_0 \right\rangle$ יש לפחות 2 ריצופים ולכן
$$\left\langle T \cup \{A\}, H \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, V \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, t_0 \right\rangle \notin \{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid \text{exists exactly one tiling}\}$$

2. אם $\langle T,H,V,t_0\rangle \notin \{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid \text{exists tiling}\}$, אז אין אף ריצוף מ־ $\langle T,H,V,t_0\rangle$.
אז $\left\langle T \cup \{A\}, H \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, V \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, t_0 \right\rangle$ מכיל רק את הריצוף $\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A & A & A & \cdots \\ A & A & A & \cdots \\ t_0 & A & A & \cdots \end{array}$,
אם קיים עוד ריצוף או שהוא מכיל את A או שהוא לא, אם הוא מכיל את A אז הוא בדיוק הריצוף שהגדרנו קודם (מתנאי השכנות על A), אחרת נקבל ריצוף חוקי ל־ $\langle T,H,V,t_0\rangle$ בסתירה לכך שלא קיים.
ולכן ל־ $\left\langle T \cup \{A\}, H \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, V \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, t_0 \right\rangle$ יש בדיוק ריצוף אחד ולכן
$$\left\langle T \cup \{A\}, H \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, V \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, t_0 \right\rangle \in \{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid \text{exists exactly one tiling}\}$$

כלומר קיבלנו כי

$$\begin{aligned} & \langle T,H,V,t_0\rangle \in \{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid \text{exists tiling}\} \\ \iff\ & \left\langle T \cup \{A\}, H \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, V \cup \{(t_0,A),(A,A)\}, t_0 \right\rangle \notin \{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid \text{exists exactly one tiling}\} \\ \iff\ & f\left(\langle T,H,V,t_0\rangle\right) \notin \{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid \text{exists exactly one tiling}\} \end{aligned}$$

כלומר הראנו שקיימת $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ רדוקציה חשיבה כך ש־

$$\langle T,H,V,t_0\rangle\in\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists tiling}\}\iff f\left(\langle T,H,V,t_0\rangle\right)\notin\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists exactly one tiling}\}$$

לכן $\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists tiling}\}\leq_m\overline{\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists exactly one tiling}\}}$
הוכחנו בהרצאה כי $\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists tiling}\}\notin\text{RE}$ ולכן $\overline{\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists exactly one tiling}\}}\notin\text{RE}$,
ולכן $\boxed{\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists exactly one tiling}\}\notin\text{coRE}}$

ראינו בהרצאה רדוקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ מ־ $\overline{HALT_\varepsilon}$ ל־ $\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists tiling}\}$ כאשר השורה ה־ i בריצוף היא בדיוק מכילה את קונפיגורצית הסרט לאחר i שלבים בריצה על ε. (ניתן להוכחה באינגוקציה על השורה ה־i עם חלוקה למקרי בסיס $i=0,1$)

1. $\langle M\rangle\notin\overline{HALT_\varepsilon}$ אז $f\left(\langle M\rangle\right)=\langle T,H,V,t_0\rangle\notin\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists tiling}\}$, ולכן לא קיים ריצוף ל־ $f\left(\langle M\rangle\right)$ ולכן $f\left(\langle M\rangle\right)\notin\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists exactly one tiling}\}$
2. $\langle M\rangle\in\overline{HALT_\varepsilon}$ אז $f\left(\langle M\rangle\right)=\langle T,H,V,t_0\rangle\in\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists tiling}\}$, נשים לב שבבנייה של הרדוקציה, השורה ה־ i בריצוף בדיוק מכילה את קונפיגורצית הסרט לאחר i שלבים בריצה על ε ומהיות M היא מ"ט דטרמניסטית, אז השורה ה־ i בריצוף יכולה להיות מרוצפת רק באופן יחיד כדי להכיל את קונפיגורצית הסרט לאחר i שלבים.
כלומר לכל $i\in\mathbb{N}$ השורה ה־ i בריצוף יכולה להיות מרוצפת אך ורק באופן יחיד, ולכן הריצוף הוא יחיד ולכן $f\left(\langle M\rangle\right)\in\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists exactly one tiling}\}$

כלומר הראנו שקיימת $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ רדוקציה חשיבה כך ש־

$$\langle T,H,V,t_0\rangle\in\overline{HALT_\varepsilon}\iff f\left(\langle M\rangle\right)\in\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists exactly one tiling}\}$$

לכן $\overline{HALT_\varepsilon}\leq_m\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists exactly one tiling}\}$
הוכחנו בהרצאה כי $\overline{HALT_\varepsilon}\notin\text{RE}$ ולכן $\boxed{\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists exactly one tiling}\}\notin\text{RE}}$,
ולכן $\boxed{\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\text{exists exactly one tiling}\}\in\overline{\text{RE}\cup\text{coRE}}}$

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3
צ"ל: $L=\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\forall n\in\mathbb{N}\text{ exists tiling to }1\times n\}\in R$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי:

1. $\langle T,H,V,t_0\rangle\in\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid\forall n\in\mathbb{N}\text{ exists tiling to }1\times n\}$, נסמן ב־ $N=|T|$. נסתכל על הריצוף של $1\times(N+1)$ ונסמנו $t_0,t_1,t_2\dots,t_N$. נשים לב שמשובך היונים קיימים $i<j\in[N]$ כך ש־ $t_i=t_j$.
ולכן נקבל כי $t_i,t_{i+1},\dots,t_j=t_i$ הינו מעגל בגרף השכינויות של V שניתן להגעה מ־ t_0.
ולכן $\langle T,H,V,t_0\rangle\in\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid H\text{ contains a circle reachable from }t_0\}$
2. $\langle T,H,V,t_0\rangle\in\{\langle T,H,V,t_0\rangle\mid H\text{ contains a circle reachable from }t_0\}$, נסמן את המסלול למעגל ב־ $t_0,\dots,t_i$ ואת המעגל ב־ $t_i,t_{i+1},\dots,t_j$ ונראה שקיים ריצוף ל־ $1\times n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
נסתכל על $t_0,\dots t_i,\left(t_{i+1},\dots,t_j\right)^k$ לכל $k\in\mathbb{N}$ ונראה שזהו ריצוף חוקי.
נוכיח באינדוקציה על k:
<u>בסיס:</u> $k=0$
נשים לב שהריצוף $t_0,\dots,t_i$ הוא ריצוף תקין כי לכל $l\in[i]$ מתקיים כי $\left(t_{l-1},t_l\right)\in H$ (שכנים בגרף השכויוניות הנוצר מ־ H כי הם מסלול בו)
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל־ $k-1$ ונוכיח ל־ k
נשים לב ש־ $t_0,\dots t_i,\left(t_{i+1},\dots,t_j\right)^{k-1}$ ריצוף תקין מהנחת האינדוקציה וגם $t_{i+1},\dots,t_j$ הוא ריצוף תקין כי לכל $l\in[j-i]$ מתקיים כי $\left(t_{i+l-1},t_{i+l}\right)\in H$ (שכנים בגרף השכויוניות הנוצר מ־ V כי הם מעגל בו)

ולכן בשביל להראות ש־ $t_0,\dots t_i,(t_{i+1},\dots,t_j)^k = t_0,\dots t_i,(t_{i+1},\dots,t_j)^{k-1},(t_{i+1},\dots,t_j)^k$ מספיק להראות ש־ $(t_j,t_{i+1})\in H$ (כי הראנו שכל שאר תנאי הריצוף מתקיימים מהנחת האינדוקציה ובחירת המעגל)
נשים לב כי $H \ni (t_j,t_{i+1}) = (t_i,t_{i+1})$ בגלל ש־ לכל $l\in[j-i]$ מתקיים כי $H \ni (t_{i+l-1},t_{i+l})$ בפרט ל־ $l=1$.
כלומר הוכחנו ש־ $t_0,\dots t_i,(t_{i+1},\dots,t_j)^k$ ריצוף חוקי לכל $k\in\mathbb{N}$.
יהי $n\in\mathbb{N}$, נשים לב ש־ $t_0,\dots t_i,(t_{i+1},\dots,t_j)^n$ ריצוף חוקי ולכן גם כל תת ריצוף שלו מההתחלה הוא ריצוף חוקי, וגם אורך הריצוף הוא יותר מ־ n ולכן צמצום ריצוף זה הינו ריצוף חוקי ל־ $1\times n$.
כלומר הראנו שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים ריצוף חוקי ל־ $1\times n$ ולכן $\langle T,H,V,t_0\rangle\in\{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid \forall n\in\mathbb{N} \text{ exists tiling to } 1\times n\}$

כלומר הוכחנו כי

$$\begin{aligned}&\langle T,H,V,t_0\rangle\in\{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid \forall n\in\mathbb{N} \text{ exists tiling to } 1\times n\}\\ \iff& \langle T,H,V,t_0\rangle\in\{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid H \text{ contains a circle reachable from } t_0\}\end{aligned}$$

נשים לב שמציאת מעגל בגרף H זאת בעיה כריעה, וראינו לכך אלגוריתמים בדאסט ולכן

$$\{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid H \text{ contains a circle reachable from } t_0\}\in R$$

עתה נגדיר רדוקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ באופן הבא: $f(x)=x$ ונקבל כי

$$\begin{aligned}&\langle T,H,V,t_0\rangle\in\{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid \forall n\in\mathbb{N} \text{ exists tiling to } 1\times n\}\\ \iff& \langle T,H,V,t_0\rangle\in\{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid H \text{ contains a circle reachable from } t_0\}\\ \iff& f(\langle T,H,V,t_0\rangle)\in\{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid H \text{ contains a circle reachable from } t_0\}\end{aligned}$$

ובבירור f חשיבה, פשוט מקבלת בשלב ראשון.
ולכן קיבלנו כי

$$\{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid \forall n\in\mathbb{N} \text{ exists tiling to } 1\times n\}\le_m\{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid H \text{ contains a circle reachable from } t_0\}$$

וגם $\{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid H \text{ contains a circle reachable from } t_0\}\in R$
ולכן $\boxed{\{\langle T,H,V,t_0\rangle \mid \forall n\in\mathbb{N} \text{ exists tiling to } 1\times n\}\in R}$

מ.ש.ל.ג.☺