פתרון תרגיל מספר 11 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

19 ביוני 2020

שאלה 4

סעיף 1

צ"ל: $1-COLOR\in P, 2-COLOR\in P$

הוכחה:

תחילה נשים לב שגרף G הוא $1-COLOR$ רק אם אין צלעות, כלומר מספיק ליצור מכונה שבודקת האם קבוצת הצלעות ריקה וזה ניתן לעשות ב־ $O(1)$ לאחר שנזיז את ראש המכונה למקום של הצלעות, כלומר בזמן לינארי בקלט.

ולכן $1-COLOR\in P$.

עתה נשים לב שגרף G הוא $2-COLOR$, נראה שקיימת מכונה M שמכריעה את $2-COLOR$ בזמן פולינומי

1. נסמן את הקלט ב־ $G=\langle V,E\rangle$, נסמן $V=\{v_0,\dots,v_n\}$
2. כל עוד לא ביקרנו בכל הקודקודים של V:
   (א) נבחר את הקודקוד הראשון שלא ביקרנו בו, נצבע אותו בצבע 1,
   (ב) נריץ ממנו DFS שכל פעם צובעים את הבנים של קודקוד בצבע ההפוך מהאבא, ואם הבן כבר צבוע בצבע של האבא, נדחה
3. נקבל

תחילה נשים לב ששלב 1 לוקח $O(1)$, שלב 2 לוקח $O(|V|\cdot(1+\text{DFS time}))$ וראינו בדאסט ש־ DFS הוא פולינומי בקלט ולכן M רצה בזמן פולינומי בקלטה.

1. עתה נשים לב כי $G\in L(M)$ רק אם הצלחנו לצבוע את כל הגרף ב2 צבעים ולא הייתה צלע שהופרה, כלומר הצביעה שלנו היא צביעה מספקת של G ולכן $G\in 2-COLOR$.
2. עתה אם $G\in 2-COLOR$, אז G הוא דו צדדי (הצביעה משרה את החלוקה של הגרף), לכן G לא מכיל מעגלים באורך אי זוגי (G הוא דו צדדי אם"ם כל מעגל הוא באורך זוגי).
   נניח בשלילה ש־ $G\notin L(M)$ אזי יש קודקוד $v\in V$ שבגללו אנחנו דוחים בסעיף $2b$ במכונה, שמקבל צביעה מ־ $u_1\neq u_2\in V$ שצבעם שונים לפי האלגוריתם וגם $\{u_1,v\},\{u_2,v\}\in E$.
   נשים לב ש־ u_1,v,u_2 באותו רכיב קשירות ולכן קיים מסלול $u_1,v_1,\dots,v_k,u_2,v$
   נניח בלי הגבלת הכלליות ש־ u_1 נצבע לפני u_2, מהיות שצבעם שונה קיים מסלול מאורך אי זוגי בינהם (כל אחד שני באותו הצבע)
   כלומר המעגל $v,u_1,v_1,\dots,v_k,u_2,v$ שאורכו $k+4$ הוא באורך אי זוגי כי k אי זוגי, כלומר בגרף G מעגל באורך אי זוגי בסתירה למה שאמרנו מלעיל.
   כלומר $G\in L(M)$

כלומר נקבל כי $L(M)=2-COLOR$,

כלומר הראנו שקיימת מכונה שמכריעה את $2-COLOR$ בזמן פולינומי ולכן $2-COLOR\in P$

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2

צ"ל: $3-COLOR \in \text{NP-COMPLETE}$

הוכחה:

בסעיף הבא אנחנו מוכיחים ש־ $(k+1)-COLOR \in \text{NP}$ ולכן עבור $k=2$, נקבל כמקרה פרטי ש־ $3-COLOR \in \text{NP}$.

עתה נסתכל על הרדוקציה שהוצעה ברמז בתרגיל $f(\phi)=G=\langle V,E\rangle$ כאשר יוצרים קודקודים U,T,F שמחוברים אחד לשני, לכל משתנה ב־ ϕ ניצור קודקודים $v_x, v_{\overline{x}}$ ונחבר אותם ל־ U ואחד לשני, לכל פסוקית C_i מהצורה $l_1^i \vee l_2^i \vee l_3^i$, ניצור $Or-gadget$ מתאים לה שהראש הוא o_i ומחובר כמו שמוצג בתרגיל.

נשים לב שכל פעולה נעשת ב־ $O(1)$ ועושים אותה מספר המשתנים ומספר הפסוקיות, ולכן יצירת G לוקח $O(|\phi|)$ לכל היותר ולכן f חשיבה בזמן פולינומי בקלטה.

הערה: עתה נשים לב שאם נעבור על כל האפשרויות ב־ $Or-gadget$ נקבל שקיימת צביעה ש־ o_j מקבל T אס"ם קיים ליטרל ב־ l_1^i, l_2^i, l_3^i ב־ $Or-gadget$ שגם הוא נצבע ב־ T.

1. תהי $\phi \in 3-SAT$ אזי קיימת השמה שמספקת את ϕ שנסמנה $s: X \to \{T,F\}$,
   נצבע את U,T,F ב־ U,T,F וזה חוקי כי אין אף צלע שמפרה את הצביעה בינתיים.
   נצבע קודקוד v_x ייצבע ב־ $s(x)$. תחילה נשים לב ש־ v_x מחובר ל־ $v_{\overline{x}}$ והם בצבעים שונים (כי ההשמה ל־ x ול־ $\overline{x}$ שונה) ולכן חוקי וגם מחובר ל־ U וצבעו לא U אלא T,F , ולכן חוקי.
   עתה נשים לב שכל פסוקית מתיישמת, כלומר לכל פסוקית C_i, קיים ליטרל l_j^i שמתיישם, ולכן הצביעה לפי מה שעשינו בשלב הקודם של l_j^i תהיה T, לכן לפי ההערה שראינו קודם יש צביעה חוקית של ה־ $Or-gadget$ שנקבל ש־ o_i ייצבע ב־ T. נשים לב ש־ o_i מחובר ל־ F,U ולכן אמור להיות צבוע ב־ T והוא אכן צבוע ב־ T.
   כלומר הראנו צביעה של כל הקודקודים בגרף שהוגדר עם 3 צבעים ולכן $f(\phi) \in 3-COLOR$

2. תהי $f(\phi) \in 3-COLOR$, אזי קיימת צביעה של הגרף שנסמנה $c: V \to \{T,F\}$,
   נשים לב ש־ v_x מחובר ל־ $v_{\overline{x}}$ וגם ל־ U ולכן הצביעה האפשרית ל־ $v_x, v_{\overline{x}}$ היא רק T,F או F,T.
   בעקבות האבחנה הזאת נגדיר השמה $s: X \to \{T,F\}$ באופן הבא $s(x)=v_x$ וזה אכן מוגדר היטב ולא ייתן אותו ערך על משתנה ושלילתו, עתה נראה שזאת השמה מספקת ל־ ϕ.
   תהי C_i פסוקית ב־ ϕ ונסמן את הליטרלים ב־ l_1^i, l_2^i, l_3^i, נשים לב שיש צביעה חוקית ל־ $Or-gadget$ של C_i, ונשים לב ש־ o_i מחובר ל־ U,F ולכן הצביעה של o_i תהיה T.
   לכן מההערה קודם, נקבל שאחד מ־ $v_{l_1^i}, v_{l_2^i}, v_{l_3^i}$ ייצבע ב־ T, ולכן מההגדרה של ההשמה יתקיים שאחד הליטרלים l_1^i, l_2^i, l_3^i יקבל T ולכן C_i תתיישם.
   כלומר כל פסוקית ב־ ϕ מתיישמת ולכן ϕ מתיישמת ולכן $\phi \in 3-SAT$

כלומר הראנו שקיימת f חשיבה בזמן פולינומי המקיימת

$$\phi \in 3-SAT \iff f(\phi) \in 3-COLOR$$

ולכן $3-SAT \leq_p 3-COLOR$, בהרצאה ראינו ש־ $3-SAT \in \text{NP-COMPLETE}$, נסיק כי $3-SAT \in \text{NP}-HARD$ ולכן מטרנזטיביות נובע כי $\boxed{3-COLOR \in \text{NP}-HARD}$.

עתה, נשים לב שהראנו ש־ $3-COLOR \in \text{NP}$ וגם $3-COLOR \in \text{NP}-HARD$ ולכן מההגדרה $\boxed{3-COLOR \in \text{NP-COMPLETE}}$

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3

צ"ל: $(k+1)-COLOR \in \text{NP-COMPLETE}$

הוכחה:

תחילה נראה ש־ $(k+1)-COLOR \in \text{NP}$ בעזרת מוודא פולינומי כאשר העד הוא הצביעה של כל קודקוד, מה שנעשה זה נקבל $G\#x_1,x_2,\ldots,x_{|V|}$ ונבדוק האם $\forall\{u,v\}\in E$ הצבע של u,v שונה, ומספר הצבעים ב־ $x_1,\ldots,x_n$ הוא לכל היותר $k+1$ ונקבל אם 2 התנאים מתקיימים.

נשים לב שזה לוקח לכל היותר $O(|E|\cdot|V|)$ בשלב הראשון ו־ $O(k\cdot|V|)$ בשלב השני, נשים לב ש־ k קבוע ולכן זה לכל היותר $O(|E|\cdot|V|)$, וזה פולינומי ב־ G.

כלומר תיארנו מכונה דטרמניסטית שהיא מוודא פולינומי לשפה $(k+1)-COLOR$, ולכן $\boxed{(k+1)-COLOR \in \text{NP}}$.

עתה נשים לב כי $f(G=\langle V,E\rangle,s,t)=\langle G'=\langle V\cup\{v\},E\cup\{\{u,v\}\mid u\in V\}\rangle\rangle$ כאשר $v\notin V$ חשיב בזמן פולינומי, לוקח לכל היותר $O(|V|)$ למצוא קודקוד v ואז $O(|E|\cdot|V|)$ לכל היותר לייצר את G', כלומר f חשיבה בזמן פולינומי.

1. אם $G \in k-COLOR$ אז קיימת צביעה של G עם k צבעים. עתה נעשה את אותה הצביעה ונצבע את הקודקוד שהוספנו v בצבע חדש ונקבל צביעה חוקית לגרף G' עם $k+1$ צבעים ולכן $f(G) = G' \in (k+1)-COLOR$

2. אם $f(G) = G' \in (k+1)-COLOR$ אז קיימת צביעה של G' עם $k+1$ צבעים. נשים לב שהקודקוד שהוספנו v מחובר לכל צלע ולכן צבעו שונה מצבע של כל קודקוד אחר, ולכן ל־ $V = V' \setminus \{v\}$ נצבעו ב־ k צבעים, ולכן הצביעה של V עם k צבעים זאת צביעה של גרף G עם k צבעים ולכן $G \in k-COLOR$

כלומר הראנו שקיימת f חשיבה בזמן פולינומי המקיימת

$$G \in k-COLOR \iff f(G) \in (k+1)-COLOR$$

ולכן $k-COLOR \leq_p (k+1)-COLOR$, מההנחה ש־ $k-COLOR \in \text{NP-COMPLETE}$, נסיק כי $k-COLOR \in \text{NP}-HARD$ ולכן מטרנזטיביות נובע כי $\boxed{(k+1)-COLOR \in \text{NP}-HARD}$.

עתה, נשים לב שהראנו ש־ $(k+1)-COLOR \in \text{NP}$ וגם $(k+1)-COLOR \in \text{NP}-HARD$ ולכן מההגדרה $\boxed{(k+1)-COLOR \in \text{NP}-COMPLETE}$

מ.ש.ל.ג.☺