אינפי 2 - סמסטר א' תשע"ט
תרגיל בית 7

להגשה עד יום חמישי, 13 בדצמבר, בשעה 23:45, דרך תיבת ההגשה במודל

1. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה עבור טורים כלליים. אם לא, קבעו האם היא נכונה עבור טורים חיוביים (כלומר, טורים $\sum a_n$ עבורם $a_n \geq 0$).
   (א) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.
   (ב) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו - $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.
   (ג) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
   (ד) אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
   (ה) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ מתכנס.
   (ו) אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ מתכנס.
   (ז) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ ו - $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ מתכנסים, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

2. לכל אחד מהטורים הבאים, קבעו האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או לא מתכנס:

   (A) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \tan\left(\frac{\pi}{6^n}\right)$ (B) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2 n}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n\cdot\sqrt[3]{n+1}}$
   (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}}{\sqrt{n}}$ (E) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln n}$ (F) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2 n}$
   (G) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ (H) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$

   בסעיף (D), m הוא קבוע חיובי שלם. בסעיף (H) הטור מתקבל מהטור ההרמוני על־ידי שינוי הסימנים ל - "פלוס, פלוס, מינוס, מינוס" באופן מחזורי (ראינו שהוא מתכנס, אבל עכשיו אתם יכולים לתת הוכחה קלה יותר).

3. יהי $n \in \mathbb{N}$.
   (א) הוכיחו, בעזרת אינטגרלים, שמתקיים $n\log(n) - n + 1 \leq \log(n!) \leq (n+1)\log(n+1) - n$.
   הדרכה: $\log(n!) = \log(1) + \log(2) + \dots + \log(n)$.
   (ב) הוכיחו: $e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$.

4. בשאלה זו נראה שמבחן ההשוואה הגבולי לא נכון עבור טורים כלליים: מצאו סדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו - $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיימים כל התנאים הבאים יחד:
   (א) $a_n \neq 0$ לכל n, והטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
   (ב) $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$.
   (ג) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ לא מתכנס.

   הדרכה: עבור $\sum a_n$, קחו טור שמתכנס לפי לייבניץ. הגדירו את b_n על־ידי "עיוות של a_n". העיוות צריך להיות מספיק קטן ביחס ל - a_n כדי שיתקיים תנאי ב', אבל מספיק גדול כדאי שיתקיים תנאי ג'.

5. **(בונוס 5 נק')** הוכיחו שהטור $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$ מתכנס (בטור זה, כל רצף מחוברים שווי סימן מורכב ממחובר אחד יותר מאשר הרצף הקודם לו).