

הסתברות - תרגיל 9

1. ממספר בני אדם הנכנסים לחנות מתפלג פואסונית עם פרמטר λ . אדם הנכנס לחנות הוא אישה בהסתברות p וגבר בהסתברות $(1-p)$, ואין תלות בין המגדרים של הנכנסים לחנות. חשבו את התפלגות מספר הנשים הנכנסות לחנות.

2. יהיו $X \sim Geo(p), Y \sim Geo(q)$ מ"מים ב"ת. .

(א) הוכיחו: $\min\{X, Y\} \sim Geo(1 - (1-p)(1-q))$.

(ב) חשבו את התפלגות $X + Y$.

3. חשבו את הפונקציה יוצרת המומנטים של המ"מ הבאים:

$$X \sim \text{poi}(\lambda) \quad (\text{א})$$

$$X \sim U(\{1, \dots, N\}) \quad (\text{ב})$$

(ג) מטילים מטבע עם הסתברות $0 < q < 1$ ל- H עד שיוצא n פעמים H . יהי X מס' ההטלות הנ"ל. חשבו את הפונקציה יוצרת המומנטים של X .

4. מטילים מטבע הוגן n פעמים. יהי X מספר הפעמים שיצאו שני עצים ברצף (HH).

(א) השתמשו באי שיוויון צ'בישב לחסום מלמעלה את הסיכוי $P(X \leq \frac{n}{8})$.

(ב) השתמשו באי שיוויון הופדינג כדי לקבל חסם טוב יותר. למען פשטות, נניח כי n אי-זוגי
הדרכה: אם Y_i הוא האינדיקטור של המאורע "ההטלה ה- i וגם ההטלה ה- $i+1$ יצאו עץ", אז $X = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$. לא ניתן ליישם את א"ש הופדינג על X (מדוע?), אבל אפשר על $\sum_{i=1}^{(n-1)/2} Y_{2i}$ ועל $\sum_{i=1}^{(n-1)/2} Y_{2i-1}$ בנפרד.

5. שיכור עומד על ציר המספרים השלמים. הוא מטיל מטבע שנופל על ראש בהסתברות q . אם יצא לו ראש הוא הולך **שני** צעדים ימינה, ואם יצא לו פלי הוא הולך צעד אחד שמאלה. הוא מבצע n הטלות מטבע כנ"ל באופן בלתי תלוי. יהא X_n מיקומו אחרי n הצעדים הנ"ל. עבור אילו ערכים של q ניתן לחסום את $P(X_n = 0)$ בעזרת א"ש הופדינג? חשבו את החסם המתקבל, והשוו לחסם המתקבל משימוש באי שיוויון צ'בישב.

הערה: ב"השוו לחסם..." הכוונה היא להסביר למה (אם בכלל) אחד טוב מהשני. אין צורך לחשב במדויק מי גדול ממי עבור איזה n וכיו"ב.