פתרון תרגיל מספר 9 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

9 ביוני 2020

שאלה 5

סעיף 1

צ"ל: $SUBSET\text{-}SUM \in \text{NP}$

הוכחה:

נבנה N לא דטרמניסטית באופן הבא:

1. נקבל $\langle S, k\rangle$, נסמן $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$
2. ננחש קבוצה של אינדקסים $I \subseteq [m]$ ונסמנה $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$
3. נקבל אם $\sum_{l=1}^{n} s_{i_l} = k$
4. נדחה

נשים לב כי N מכריעה כי לכל קלט היא תסיים לאחר סכימה,
נשים לב שאנחנו מקבלים אם ורק אם קיימת ריצה מקבלת שקיימת אס"ם יש קבוצה של אינדקסים שסכומם הוא k ולכן

$$\langle S, k\rangle \in SUBSET\text{-}SUM \iff \exists I \subseteq [m] \text{ s.t. } \sum_{l=1}^{n} s_{i_l} = k$$
$$\iff \text{exists an accepting run of } N \text{ on } \langle S, k\rangle \iff \langle S, k\rangle \in L(N)$$

כלומר קיבלנו כי $SUBSET\text{-}SUM = L(N)$
עתה נשים לב כי שלב 1 לוקח $O(1)$, שלב 2 לוקח $O(|S|)$, שלב 3 לוקח לכל היותר $O(|S| \cdot \text{sum time}) + O([|S| + k] \cdot \text{check equality})$ ושלב 4 לוקח $O(1)$ ולכן זמן הריצה של N הוא

$$O(|S| \cdot \text{sum time}) + O([|S| + k] \cdot \text{check equality})$$

ראינו באלגו שבדיקת שוויון וסכום זה פולינומי בקלט ולכן N פולינומי בקלטו!
כלומר הראנו שקיימת N לא דטרמניסטית שמכריעה את $SUBSET\text{-}SUM$ ורצה בזמן פולינומי ולכן $SUBSET\text{-}SUM \in$ NP, כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2

צ"ל: $SUBSET\text{-}SUM \in \text{NP}$

הוכחה:

נגדיר $L' = \left\{\langle S, k\rangle \# I \mid \sum_{i \in I} s_i = k \wedge I \subseteq [n]\right\}$

נשים לב ש־

$$\langle S,k\rangle \in \{\langle S,k\rangle \mid \exists y \to \langle S,k\rangle\#y \in L'\} \iff \exists y \to \langle S,k\rangle\#y \in L'$$
$$\iff \exists y \to \langle S,k\rangle\#y \in \left\{\langle S,k\rangle\#I \mid \sum_{i\in I} s_i = k \wedge I \subseteq [n]\right\}$$
$$\iff \exists I \subseteq [n] \text{ s.t. } \sum_{i\in I} s_i = k \iff \langle S,k\rangle \in SUBSET{-}SUM$$

ולכן L' הינה מוודא של $SUBSET{-}SUM$!
נבנה M דטרמניסטית באופן הבא:

1. נקבל $\langle S,k\rangle\#I$, נסמן $S=\{s_1,\ldots,s_m\}, I=\{i_1,\ldots,i_n\}$
2. נעבור על האינדקסים ואם $i_j = i_l$ ל־ $j \neq l$ נדחה, ואם $i_l \notin [m]$ נדחה לכל $l \in [n]$
3. נקבל אם $\sum_{l=1}^{n} s_{i_l} = k$
4. נדחה

נשים לב כי M מכריעה כי לכל קלט היא תסיים לאחר סכימה, ומקבלת אם כל האינדקסים תקינים ולא מופיע אינדקס פעמיים והערכים נסכמים ל־ k ולכן

$$\langle S,k\rangle\#I \in L' \iff I \subseteq [|S|] \wedge \sum_{l=1}^{|I|} s_{i_l} = k$$
$$\stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall a \in I \to 1 \leq a \leq |S| \wedge \forall a \neq b \in I \Rightarrow a \neq b) \wedge \sum_{l=1}^{|I|} s_{i_l} = k$$
$$\iff M \text{ accepts } \langle S,k\rangle\#I \iff \langle S,k\rangle\#I \in L(M)$$

כלומר קיבלנו כי

$$L(M) = L'$$

עתה נשים לב כי שלב 1 לוקח $O(1)$, שלב 2 לוקח $O\left(|I|^2 \cdot \text{check equality}\right)$, שלב 3 לוקח לכל היותר $O(|I| \cdot \text{sum time}) +$ $O([|S|+k] \cdot \text{check equality})$ ושלב 6 לוקח $O(1)$ ולכן זמן הריצה של M הוא

$$O\left(\left[|I|^2 + |S| + k\right] \cdot \text{check equality}\right) + O(|S| \cdot \text{sum time})$$

נשים לב כי $|I| \leq |S|^2$ (אורך כל איבר היא לכל היותר $|S|$ ויש $|S|$ איברים) ולכן זמן הריצה חסום על ידי

$$O\left(\left[|S|^4 + |S| + k\right] \cdot \text{check equality}\right) + O(|S| \cdot \text{sum time})$$

ראינו באלגו שבדיקת שוויון וסכום זה פולינומי ב־ $\langle S,k\rangle$ ולכן M פולינומי ב־ $\langle S,k\rangle$!
כלומר הראנו ש־ L' מוודא של $SUBSET{-}SUM$ וגם הראנו שקיימת M דטרמניסטית שמכריעה את L' בזמן פולינומי ב־ $\langle S,k\rangle$ ולכן מוודא פולינומי של $SUBSET{-}SUM$ ולכן $SUBSET{-}SUM \in \text{NP}$

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3
צ"ל: $UNARY-SUM \in P$
הוכחה:
נבנה $\mathcal{M}$ דטרמניסטית באופן הבא: (רעיונית נשמור טבלה בוליאנית כך ש־ $a\left[i,j\right]$ אומר אם j ניתן להשה על ידי סכום של $s_1,\ldots,s_i$)

1. נקבל $\left\langle S,1^k\right\rangle$, נסמן $S=\{1^{s_1},\ldots,1^{s_m}\}$
2. ניצור טבלה ריקה A בגודל $(m+1)\times k$ ונאתחל אותה עם אפסים (נשים לב שהטבלה פולינומית בקלט רק לבסיס אונארי, בשאר הבסיסים זה יהיה אקפוננציאלי הקלט)
3. נאתחל את $A\left(0,0\right)=1$
4. לכל $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ נעשה:
   (א) לכל $k'\in[k]$:
      i. נעשה

$$A\left(i,k'\right)=\underbrace{A\left(i-1,k'\right)}_{\text{can k' be acheived by }s_1,\ldots,s_{i-1}}\vee\underbrace{A\left(i-1,k'-s_i\right)}_{\text{can }k-s_i\text{ be acheived by }s_1,\ldots,s_{i-1}}$$

אם $k'-s_i<0$ נגדיר את הערך אוטומטית ל־ 0.

5. נקבל אם"ם $A\left(n,k\right)=1$ אחרת נדחה

נוכיח טענת עזר באינדוקציה, באיטרציה ה־ i בשלב 4 מתקיים כי $A\left[i,k\right]=1$ אם"ם ניתן לקבל את 1^k כסכום של $1^{s_1},\ldots,1^{s_i}$

__בסיס:__ $i=0$, נשים לב שבשלב 3 אנחנו מאתחלים $A\left[0,0\right]=1$ והשאר הם 0, כלומר $A\left[0,s\right]=\begin{cases}1 & s=0\\0 & else\end{cases}$, נשים לב כי

$$\left\langle\emptyset,1^k\right\rangle\in UNARY-SUM\iff k=0\iff\left(A\left[0,k\right]==1\right)$$

כלומר הטענה נכונה, כנדרש
__צעד:__ נניח שהטענה נכונה ל־ $i-1$ ונוכיח שהיא נכונה ל־ i

$$\left\langle\left\{1^{s_1},\ldots,1^{s_i}\right\},1^k\right\rangle\in UNARY-SUM\iff\exists B\subseteq\{s_1,\ldots,s_i\}\text{ s.t. }\sum_{s\in B}s=k$$

$$\iff\left(\exists B\subseteq\{s_1,\ldots,s_i\}\text{ s.t. }\sum_{s\in B}s=k\wedge s_i\notin B\right)\vee\left(\exists B\subseteq\{s_1,\ldots,s_i\}\text{ s.t. }\sum_{s\in B}s=k\wedge s_i\in B\right)$$

$$\iff\left(\exists B\subseteq\{s_1,\ldots,s_{i-1}\}\text{ s.t. }\sum_{s\in B}s=k\right)\vee\left(\exists B\subseteq\{s_1,\ldots,s_i\}\text{ s.t. }\sum_{s\in B}s=k\wedge s_i\in B\right)$$

$$\overset{\text{induction assumption}}{\iff}A\left[i-1,k\right]\vee\left(\exists B\subseteq\{s_1,\ldots,s_i\}\text{ s.t. }\sum_{s\in B}s=k\wedge s_i\in B\right)$$

$$\iff\left(A\left[i-1,k\right]==1\right)\vee\left(\exists B\subseteq\{s_1,\ldots,s_i\}\text{ s.t. }\sum_{s\in B\setminus\{s_i\}}s+s_i=k\wedge s_i\in B\right)$$

$$\iff\left(A\left[i-1,k\right]==1\right)\vee\left(\exists B\subseteq\{s_1,\ldots,s_i\}\text{ s.t. }\sum_{s\in B\setminus\{s_i\}}s+s_i=k\wedge s_i\in B\right)$$

$$\iff\left(A\left[i-1,k\right]==1\right)\vee\left(\exists B\subseteq\{s_1,\ldots,s_{i-1}\}\text{ s.t. }\sum_{s\in B}s=k-s_i\right)$$

$$\overset{\text{induction assumption}}{\iff}\left(A\left[i-1,k\right]==1\right)\vee\left(A\left[i-1,k-s_i\right]==1\right)=\left(A\left[i,k\right]==1\right)$$

כלומר קיבלנו כי $A\left[i,k\right]==1\iff\left\langle\left\{1^{s_1},\ldots,1^{s_i}\right\},1^k\right\rangle\in UNARY-SUM$
לכן נקבל כי

$$\left\langle\left\{1^{s_1},\ldots,1^{s_i}\right\},1^k\right\rangle\in UNARY-SUM\iff\left(A\left[n,k\right]==1\right)\iff\left\langle\left\{1^{s_1},\ldots,1^{s_i}\right\},1^k\right\rangle\in L\left(\mathcal{M}\right)$$

כלומר קיבלנו כי $L\left(\mathcal{M}\right)=UNARY-SUM$.
עתה נשים לב ששלב 1 לוקח $O\left(1\right)$, שלב 2 לוקח $O\left(\left|S\right|\cdot k\right)$, שלב 3 לוקח $O\left(1\right)$, שלב 4 לוקח $O\left(\left|S\right|\cdot k\cdot\text{time to calculate substraction}\right)$
ושלב 5 לוקח $O\left(1\right)$ ולכן זמן הריצה הכולל של $\mathcal{M}$ הוא $O\left(\left|S\right|\cdot k\cdot\text{time to calculate substraction}\right)$
ראינו שחיסור זה פולינומי בקלטו באלגו ולכן $\mathcal{M}$ הוא אכן פולינומי בקלטו (מכפלת פולינומים היא פולינומית)
כלומר קיבלנו כי $\mathcal{M}$ פולינומי בקלטו!
כלומר הראנו שקיימת מכונה $\mathcal{M}$ דטרמינסטית שמכריעה את $UNARY-SUM$ וגם $\mathcal{M}$ רק בזמן פולינומי ולכן $UNARY-SUM\in P$

מ.ש.ל.ג.☺