תרגיל 6 אלגברה לינארית 1

מיכאל גרינבאום

211747639

1א. **צ"ל:** האם $v \in span(S)$?

נתונים: $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ו $v = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $V = \mathbb{R}$

הוכחה:

לא נכון! נחפש פתרון למשוואה $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, נדרג

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

לכן אין $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ המקיים את הדרוש, כלומר $v \notin span(S)$

מ.ש.ל.א.☺

1ב. **צ"ל:** האם $v \in span(S)$?

נתונים: $S = \left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1+3i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3+i \end{bmatrix} \right\}$ ו $v = \begin{bmatrix} 3+2i \\ 3-2i \end{bmatrix}$, $V = \mathbb{C}$

הוכחה:

לא נכון! נחפש פתרון למשוואה $\begin{bmatrix} 3+2i \\ 3-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -3+i & 1+3i \end{bmatrix}$, נדרג

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 3+2i \\ -3+i & 1+3i & 3-2i \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_2 + (3-i)R_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 3+2i \\ 0 & 0 & 14+i \end{array}\right]$$

לכן אין $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ המקיים את הדרוש, כלומר $v \notin span(S)$

מ.ש.ל.ב.☺

1ג. **צ"ל:** האם $v \in span(S)$?

נתונים: $S = \left\{1, 1-x, 1-x-x^2\right\}$ ו$v = 3 + 4x + 5x^2$, $V = \mathbb{R}[x]$

הוכחה:

נכון! נשים לב כי $v = -5(-x^2 - x + 1) + (1-x) + 7 \cdot 1 \in Span(S)$

מ.ש.ל.ג.☺

2א. **צ"ל:** האם $Span(S_1 \cap S_2) = V$?

נתונים: $span(S_1) = V$, S_2 בת"ל

הוכחה:

לא נכון! נבחר $V = \mathbb{R}^2$, $S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

ראינו בכיתה כי $span(S_1) = \mathbb{R}^2$ וגם ברור כי S_2 בת"ל

נשים לב כי $S_1 \cap S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ ולכן $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin span(S_1 \cap S_2)$

וגם $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in V$ ולכן $V \neq span(S_1 \cap S_2)$

מ.ש.ל.א.☺

2ב. **צ"ל:** האם $S_1 \cap S_2$ בת"ל
נתונים: $span(S_1) = V$, S_2 בת"ל
הוכחה:
נכון! נסמן $S_2 = \{v_1, \dots, v_k\}$, ו$S_1 \cap S_2 = \{u_1, \dots, u_m\}$
יהיו $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ כך ש$a_1u_1 + \dots + a_mu_m = 0_V$
נשים לב כי $u_1, \dots, u_m \in S_2$
ולכן מכיוון שS_2 בת"ל מתקיים ש$a_1 = \dots = a_m = 0$
(אחרת נקבל קומבינציה לא טריוויאלית לאיברים מS_2 בסתירה שS_2 בת"ל)
ולכן $u_1, \dots, u_m$ בת"ל ולכן $S_1 \cap S_2$ בת"ל

מ.ש.ל.ב.☺

3א. **צ"ל:** האם S_2 בת"ל?
נתונים: $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$, $S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $S_2 = \{3v_1, v_3, v_1 - 2v_4\}$
וS_1 בת"ל
הוכחה:
נכון! יהיו $a_1, a_2, a_3 \in F$ כך ש$a_1(3v_1) + a_2(v_3) + a_3(v_1 - 2v_4) = 0_V$
ונראה ש$a_1 = a_2 = a_3 = 0$
נפתח ונקבל $a_2v_3 + v_1(3a_1 + a_3) - 2a_3v_4 = 0_v$
מהנתון v_1, v_3, v_4 בת"ל ולכן $a_2 = 0, -2a_3 = 0, 3a_1 + a_3 = 0$
ולכן $a_1 = a_2 = a_3 = 0$,
כלומר $S_2 = \{3v_1, v_3, v_1 - 2v_4\}$ בת"ל

מ.ש.ל.א.☺

3ב. **צ"ל:** האם S_2 ת"ל?
נתונים: $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$, $S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $S_2 = \{3v_1, v_3, v_1 - 2v_4\}$
וS_1 ת"ל
הוכחה:
לא נכון! נבחר $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = e_1, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = e_2, v_4 = e_3$
נשים לב כי $v_2 = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4$ ולכן S_1 ת"ל
נשים לב כי $S_2 = \{3e_1, e_2, e_1 - 2e_3\}$
יהיו $a_1, a_2, a_3 \in F$ כך ש$a_1(3e_1) + a_2(e_2) + a_3(e_1 - 2e_3) = 0_V$
ונראה ש$a_1 = a_2 = a_3 = 0$
נפתח ונקבל $a_2e_2 + e_1(3a_1 + a_3) - 2a_3e_3 = 0_v$
ראינו בכיתה כי e_1, e_2, e_3 בת"ל ולכן $a_2 = 0, -2a_3 = 0, 3a_1 + a_3 = 0$
ולכן $a_1 = a_2 = a_3 = 0$,
כלומר $S_2 = \{3e_1, e_3, e_1 - 2e_4\}$ בת"ל בסתירה לטענה

מ.ש.ל.ב.☺

4א. **צ"ל:** האם S_2 בת"ל?
נתונים: $v_1, v_2, v_3 \in V$, $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $S_2 = \{v_1 + 2v_2, v_2 + 2v_3, v_1 + 2v_3\}$
וS_1 בת"ל
הוכחה:
לא נכון! נבחר $V = \mathbb{F}_3^3, F = \mathbb{F}_3$, $v_1 = e_1, v_2 = e_2, v_3 = e_3$
נשים לב ש$2(v_1 + 2v_2) + 2(v_2 + 2v_3) + (v_1 + 2v_3) = 3v_1 + 6v_2 + 6v_3 = 0_V$
ולכן $S_2 = \{v_1 + 2v_2, v_2 + 2v_3, v_1 + 2v_3\}$ ת"ל כי יש פתרון לא טריוויאלי

מ.ש.ל.א.☺

4ב. **צ"ל:** האם S_2 ת"ל?
נתונים: $v_1, v_2, v_3 \in V$, $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $S_2 = \{v_1 + 2v_2, v_2 + 2v_3, v_1 + 2v_3\}$
וS_1 ת"ל
הוכחה:
נכון! היות S_1 ת"ל קיימים $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}$ כך ש$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$
וגם $1 \leq \exists i \in \mathbb{N} \leq 3$ כך ש$a_i \neq 0$

נניח בשלילה כי S_2 בת"ל
יהיו $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{F}$
ולכן הפתרון היחיד למשוואה $b_1(v_1+2v_2)+b_2(v_2+2v_3)+b_3(v_1+2v_3)=0_V$
רק כש $b_1=b_2=b_3=0_F$
נשים לב כי $v_1(b_1+b_3)+v_2(b_2+2b_1)+v_3(2b_2+2b_3)=0_V$
נשים לב ש$a_1=b_1+b_3, a_2=b_2+2b_1, a_3=2b_2+2b_3$ פתרון
נציב $b_1=b_2=b_3=0_F$ ונקבל $a_1=a_2=a_3=0_F$
בסתירה לכך ש $1 \leq \exists i \in \mathbb{N} \leq 3$ כך ש$a_i \neq 0$
ולכן S_2 ת"ל

מ.ש.ל.ב.☺

5. **צ"ל:** האם $v_3 \in span(v_1, v_2, v_4)$
נתונים: $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$, $S=\{v_1+v_2, v_1+v_2+v_3, v_1+v_2+v_3+v_4\}$ ת"ל
ו$\{v_1, v_2, v_4\}$ בת"ל
הוכחה:
נכון! יהיו $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{F}$
כך ש$a_1(v_1+v_2)+a_2(v_1+v_2+v_3)+a_3(v_1+v_2+v_3+v_4)=0_V$
וגם $1 \leq \exists i \in \mathbb{N} \leq 3$ שעבורו מתקיים $a_i \neq 0$
ולכן $v_1(a_1+a_2+a_3)+v_2(a_1+a_2+a_3)+v_3(a_2+a_3)+a_3v_4=0_V$
אם $a_2+a_3=0$,
נקבל ש$v_1(a_1+a_2+a_3)+v_2(a_1+a_2+a_3)+a_3v_4=0_V$ אינו פתרון טריוויאלי למשוואה
ולכן $\{v_1, v_2, v_4\}$ בת"ל ולכן $a_3=0, a_1+a_2+a_3=0$
נשים לב שהנחנו $a_2=a_2+a_3=0$ ולכן נקבל $a_1=a_2=a_3=0$
בסתירה ש$1 \leq \exists i \in \mathbb{N} \leq 3$ שעבורו מתקיים $a_i \neq 0$
לכן $a_2+a_3 \neq 0$, לכן $v_1(a_1+a_2+a_3)+v_2(a_1+a_2+a_3)+a_3v_4=-v_3(a_2+a_3)$
וקיים הופכי ל$-a_2+a_3$, כי $a_2+a_3 \neq 0$
ולכן $(a_1 \cdot (-a_2+a_3)^{-1})v_1+(a_2 \cdot (-a_2+a_3)^{-1})v_2+(a_4 \cdot (-a_2+a_3)^{-1})v_4=v_3$
כלומר $v_3 \in span(v_1, v_2, v_4)$

מ.ש.ל.☺

6. **צ"ל:** האם $\{v_1-v_4, v_2-v_4, v_3-v_4\}$ בת"ל?
נתונים: $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$, $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_1, v_3, v_4\}$, $\{v_2, v_3, v_4\}$ בת"ל
הוכחה:
לא נכון! נבחר $V=\mathbb{R}^3$, $v_1=e_1, v_2=e_2, v_3=e_3, v_4=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$
ברור כי $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_1, v_3, v_4\}$, $\{v_2, v_3, v_4\}$ בת"ל
נשים לב כי $v_1-v_4=\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$, $v_2-v_4=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $v_3-v_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$
נשים לב ש$v_1-v_4=(v_3-v_4)+(v_2-v_4)$

מ.ש.ל.☺

7א. **צ"ל:** האם $span\{(v_1, v_2, v_3)\}=span\{(v_1, v_2, v_4)\}$?
נתונים: $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$, $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_1, v_3, v_4\}$, $\{v_2, v_3, v_4\}$ בת"ל
הוכחה:
לא נכון! נבחר $V=\mathbb{R}^4$, $v_1=e_1, v_2=e_2, v_3=e_3=v_4=e_4$
נשים לב כי $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_1, v_3, v_4\}$, $\{v_2, v_3, v_4\}$ בת"ל
נשים לב $e_4 \in span(v_1, v_2, v_4)$ וגם $e_4 \notin span(v_1, v_2, v_3)$
ולכן $span\{(v_1, v_2, v_3)\} \neq span\{(v_1, v_2, v_4)\}$

מ.ש.ל.א.☺

7ב. **צ"ל:** האם $span(v_2, v_3) \neq span(v_2, v_4)$?
נתונים: $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$, $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_1, v_3, v_4\}$, $\{v_2, v_3, v_4\}$ בת"ל
הוכחה:
נכון! נניח בשלילה ש $span(v_2, v_3) = span(v_2, v_4)$
ולכן $v_4 \in span(v_2, v_4) = span(v_2, v_3)$
ולכן $\exists a, b \in \mathbb{F}$ שעבורם מתקיים $av_2 + bv_3 = v_4$
ולכן $av_2 + bv_3 - v_4 = 0_V$ פתרון לא טריוויאלי
ולכן $\{v_2, v_3, v_4\}$ ת"ל בסתירה להנחה

מ.ש.ל.ב.☺

8א. **צ"ל:** האם $\{v_1, v_2 + v_1, \dots, v_k + v_1\}$ בת"ל?
נתונים: $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$, $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$בת"ל
הוכחה:
נכון! יהיו $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים $a_1v_1 + a_2(v_1 + v_2) + \dots + a_k(v_k + v_1) = 0_V$
כלומר $v_1(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + a_2v_2 + \dots + a_kv_k = 0_V$
מהיות $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$בת"ל מתקיים $a_i = 0$, $2 \leq \forall i \in \mathbb{N} \leq k$
וגם $a_1 + a_2 + \dots a_k = 0$, נציב ונקבל $a_1 + 0 + \dots 0 = 0$
ולכן $a_1 = 0$ ולכן $a_i = 0$, $1 \leq \forall i \in \mathbb{N} \leq k$
ולכן $\{v_1, v_2 + v_1, \dots, v_k + v_1\}$ בת"ל

מ.ש.ל.א.☺

8ב. **צ"ל:** האם $\{v_1, v_2 + v_1, \dots, v_k + v_1\}$ ת"ל?
נתונים: $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$, $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ת"ל
הוכחה:
נכון! יהיו $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{F}$ כך ש$a_1v_1 + \dots + a_kv_k = 0_V$ וגם $a_i \neq 0$, $1 \leq \exists i \in \mathbb{N} \leq k$

$$(a_1 - a_2 - \dots a_k)v_1 + a_2(v_1 + v_2) + \dots + a_k(v_k + v_1) = a_1v_1 + \dots + a_kv_k = 0_V$$

נשים לב שאם $a_i \neq 0$, $2 \leq \exists i \in \mathbb{N} \leq k$ אז זהו פתרון לא טריוויאלי
ולכן $\{v_1, v_2 + v_1, \dots, v_k + v_1\}$ ת"ל
אחרת $a_i = 0$, $2 \leq \forall i \in \mathbb{N} \leq k$ ולכן $a_1 - a_2 - \dots - a_k = a_1 - 0 \dots - 0 = 0$
ולכן $a_1 = 0$, בסתירה להנחה ש $1 \leq \exists i \in \mathbb{N} \leq k$ שעבורו $a_i \neq 0$
ולכן $\{v_1, v_2 + v_1, \dots, v_k + v_1\}$ ת"ל

מ.ש.ל.ב.☺

8ג. **צ"ל:** האם $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$או $\{v_{k+1}, \dots, v_l\}$ ת"ל?
נתונים: $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_l \in V$, $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_l\}$ ת"ל
הוכחה:
לא נכון! נבחר $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = e_1, v_2 = e_2, v_3 = e_1$
נבחר $k = 1, l = 3$
נשים לב כי $\{v_1, v_2, v_3\}$ ת"ל כי $v_1 = v_3$
נשים לב כי $\{v_2, v_3\}$ בת"ל (ראינו בכיתה שe_1, e_2 בת"ל)
ברור כי $\{v_1\}$ בת"ל

מ.ש.ל.ג.☺

8ד. **צ"ל:** האם $\{v_1 - v_{k+1}, v_2 - v_{k+1}, \dots, v_k - v_{k+1}\}$ בת"ל?
נתונים: $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1} \in V$, $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ בת"ל ו$v_{k+1} \notin span\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$
הוכחה:
נכון! יהיו $a_1, \dots a_{k+1} \in \mathbb{F}$ כך ש$a_1v_1 + \dots + a_kv_k + a_{k+1}v_{k+1} = 0_V$
נעביר אגף ונקבל $a_1v_1 + \dots + a_kv_k = -a_{k+1}v_{k+1}$
אם $a_{k+1} = 0$, נקבל ש$a_1v_1 + \dots + a_kv_k = 0_V$
היות ו$v_1, \dots, v_k$ בת"ל מתקיים ש$a_1 = \dots = a_k = 0$
ולכן $\{v_1 - v_{k+1}, v_2 - v_{k+1}, \dots, v_k - v_{k+1}\}$ בת"ל
אחרת $a_{k+1} \neq 0$ ולכן קיים הופכי ונסמנו ב$b \in \mathbb{F}$
נקבל $ba_1v_1 + \dots + ba_kv_k = v_{k+1}$,
כלומר $v_{k+1} \in span\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ בסתירה להנחה

מ.ש.ל.ד.☺

9א. **צ"ל:** האם $\{v_1 v_2\}$ בת"ל?

נתונים: $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $v_1=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$

הוכחה:

נכון! יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש $av_1+bv_2=0_{\mathbb{R}^3}$

כלומר $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\3b\\2b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2a\\2a\\a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+b\\2a+3b\\a+2b\end{bmatrix}$

נשים לב כי $a=-2b$ מהמשוואה האחרונה,

נציה ונקבל $2a+3b=b=0$, נציב חזרה לـa ונקבל $a=0$

ולכן $a=b=0$, כלומר $\{v_1 v_2\}$ בת"ל

מ.ש.ל.א.☺

9ב. **צ"ל:** האם $\{v_1 v_2\}$ בת"ל?

נתונים: $\mathbb{F}=\mathbb{F}_5$, $v_1=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

הוכחה:

לא נכון! נשים לב ש $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix}=2\cdot v_2+1\cdot v_1$

כלומר קיים פתרון לא טריוויאלי ולכן $\{v_1,v_2\}$ ת"ל

מ.ש.ל.ב.☺

9ג. **צ"ל:** האם $\{v_1 v_2\}$ בת"ל?

נתונים: $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, $v_1=\begin{bmatrix}-1+i\\0\\1+2i\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}2+2i\\0\\4-2i\end{bmatrix}$

הוכחה:

לא נכון!

נשים לב ש $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+i\\0\\1+2i\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1+i\\0\\1+2i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+i\\0\\1+2i\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2+2i\\0\\4-2i\end{bmatrix}\cdot\frac{i}{2}=\frac{i}{2}v_2-v_1$

כלומר קיים פתרון לא טריוויאלי ולכן $\{v_1,v_2\}$ ת"ל

מ.ש.ל.ג.☺