פתרון תרגיל מספר 5 ־ תורת המשחקים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

15 במאי 2021

1. **צ"ל:** $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ קמור
הוכחה:
יהיו $x,y\in\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$, יהי $0\le\lambda\le 1$,
יהי $\alpha\in I$, נשים לב כי $x,y\in A_\alpha$ ולכן $\lambda\cdot x+(1-\lambda)\cdot y\in A_\alpha$ (כי A_α קמור).
כלומר לכל $\alpha\in I$ מתקיים $\lambda\cdot x+(1-\lambda)\cdot y\in A_\alpha$, לכן $\lambda\cdot x+(1-\lambda)\cdot y\in\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$.
כלומר הראנו כי

$$\forall x,y\in\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\to\left(\forall 0\le\lambda\le 1\to\lambda\cdot x+(1-\lambda)\cdot y\in\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$$

ולכן $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ קמור מההגדרה.

מ.ש.ל.☺

2. **צ"ל:** צירוף קמור של $x_1,\dots,x_m$
הוכחה:
נוכיח את הטענה באינדוקציה על מספר הנקודות בצירוף.
בסיס: $m=1$, נשים לב כי $x=x_1\in A$ מההגדרה.
צעד: נניח שהטענה נכונה ל־ $m-1$ ונוכיח ל־ m.
נכתוב את x כ־ $x=\lambda_1\cdot x_1+\cdots+\lambda_m\cdot x_m$. נבחין ש־ $\lambda_1\neq 1$ כי יש לפחות 2 איברים בצירוף.
נגדיר $x'=\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}\cdot x_2+\cdots+\frac{\lambda_m}{1-\lambda_1}\cdot x_m$. נשים לב שהמקדמים נסכמים ל־

$$\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}+\cdots+\frac{\lambda_m}{1-\lambda_1}=\frac{\sum_{i=2}^m\lambda_i}{1-\lambda_1}=\frac{\sum_{i=1}^m\lambda_i-\lambda_1}{1-\lambda_1}=\frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_1}=1$$

ולכן x' הוא צירוף קמור של $x_2,\dots,x_m$. מהנחת האינדוקציה $x'\in A$ כי הוא צירוף של $m-1$ נקודות.
ונשים לב כי

$$\begin{aligned}x&=\lambda_1\cdot x_1+\cdots+\lambda_m\cdot x_m=\lambda_1\cdot x_1+(1-\lambda_1)\cdot\left(\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}\cdot x_2+\cdots+\frac{\lambda_m}{1-\lambda_1}\cdot x_m\right)\\&=\lambda_1\cdot x_1+(1-\lambda_1)\cdot x'\end{aligned}$$

נשים לב כי $x_1,x'\in A$ ולכן מהיות A קמור, נקבל כי $x\in A$, כנדרש.

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** ההגדרות זהות
הוכחה:
תחילה נשים לב כי $\mathrm{conv}_2(A)$ היא קבוצה קמורה שמכילה את A ולכן

$$\mathrm{conv}_1(A)=\bigcap_{A\subseteq B,B\text{ convex}}B\subseteq\mathrm{conv}_2(A)$$

יהי $x \in \operatorname{conv}_2(A)$ אזי $\exists x_1, x_2 \in A$ כך ש־ $x = \lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2$.
נשים לב כי

$$x \in \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot x_i \mid m \in \mathbb{N}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, x_i \in A \right\} = \operatorname{conv}_3(A)$$

ולכן קיבלנו כי $\operatorname{conv}_2(A) \subseteq \operatorname{conv}_3(A)$.
יהי $x \in \operatorname{conv}_3(A)$, נשים לב כי $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists x_1, \ldots, x_m \in A$ ו־ $\exists \lambda_1 \ldots, \lambda_m \geq 0$ כך ש־

$$\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot x_i$$

יהי $A \subseteq B$ קמור. נשים לב כי $x_1, \ldots, x_m \in A \subseteq B$ ולכן לפי השאלה הקודמת מתקיים כי $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot x_i \in B$ (צירוף קמור של נקודות בקבוצה קמורה).
לכן קיבלנו כי $x \in B$ לכל $A \subseteq B$ קמור. ולכן $x \in \bigcap_{A \subseteq B, B \text{ convex}} = \operatorname{conv}_1(A)$.
לכן $\operatorname{conv}_3(A) \subseteq \operatorname{conv}_1(A)$,
נסכם הכל וקיבלנו כי

$$\operatorname{conv}_1(A) \subseteq \operatorname{conv}_2(A) \subseteq \operatorname{conv}_3(A) \subseteq \operatorname{conv}_1(A)$$

ולכן קיבלנו כי $\operatorname{conv}_1(A) = \operatorname{conv}_2(A) = \operatorname{conv}_3(A)$, כנדרש

מ.ש.ל.☺

4. **צ"ל:** Δ_n קומפקטי
הוכחה:
תחילה יהי $x \in \Delta_n$, נשים לב כי $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$ כאשר $\lambda_i \geq 0$ ו־ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.
נשים לב כי

$$\|x\|_2^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i \cdot e_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \|e_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

ולכן נקבל כי

$$\|x\|_2 = \sqrt{\|x\|_2^2} \leq \sqrt{1} = 1$$

כלומר הראנו שלכל $x \in \Delta_n$ מתקיים $\|x\|_2 \leq 1$ ולכן Δ_n חסומה.
תהי $x_1, \cdots \in \Delta_n$ סדרה מתכנסת ונסמן את גבולה ב־ x.
נשים לב ש־ $e_1, \ldots, e_n$ בסיס של $\mathbb{R}^n$ ולכן קיימים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ כך ש־ $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i$.
באופן דומה קיימים $\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,n} \in \mathbb{R}$ כך ש־ $x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{j,i} \cdot e_i$.
בתרגול נאמר שסדרה x_j מתכנסת ל־ x אם"ם x_j מתכנס ל־ x בכל קורדינאטה.
כלומר לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $\alpha_{j,i} \overset{j \to \infty}{\to} \alpha_i$.
נשים לב כי $0 \leq \alpha_{j,i}$ ולכן ממונוטוניות הגבול מתקיים כי $0 \leq \alpha_i$.
נשים לב שאם $x_j \to x$ אז $\|x_j\|_2 \to \|x\|_2$ ונשים לב כי $\|x_j\|_2 = 1$ (הראנו בהתחלה של השאלה).
ולכן $\|x\|_2 = 1$ (הגבול של סדרה קבועה הוא ערך האיברים).
ולכן נשים לב כי

$$1^2 = \|x\|_2^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i \cdot e_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \|e_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

ולכן הראנו כי $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ וגם $\alpha_i \geq 0$ ולכן $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i \in \Delta_n$.
כלומר הגבול של כל סדרה ב־ Δ_n נמצא ב־ Δ_n.
ולכן Δ_n סגורה.
ולכן Δ_n חסומה וסגורה ולכן קומפקטית מההגדרה.

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:** קמור של קבוצה סופית הוא קומפקטי

הוכחה:

תהי A קבוצה סופית. נסמן $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$

נגדיר $f : \Delta_m \to \mathbb{R}^n$ באופן הבא: בהינתן $x \in \operatorname{conv}(\{e_1, \ldots, e_m\})$ קיימים $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ כך ש־ $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot e_i$ וגם $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, נגדיר $f(x) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot \lambda_i$.

תחילה נשים לב כי עבור $x \in \Delta_m$, כאשר $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot e_i$ וגם $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ מתקיים

$$f(x) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot \lambda_i \in \operatorname{conv}(\{a_1, \ldots, a_m\}) = \operatorname{conv}(A)$$

ולכן $Im(f) \subseteq \operatorname{conv}(A)$.

עתה נשים לב כי עבור $y \in \operatorname{conv}(A)$, כאשר $\sum_{i=1}^m a_i \cdot \lambda_i = y$ ו־ $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ מתקיים כי עבור $x = \sum_{i=1}^m a_i \cdot e_i \in \Delta_m$ וגם $f(x) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot \lambda_i = y$.

לכן $y \in Im(f)$ וקיבלנו כי $\operatorname{conv}(A) \subseteq Im(f)$.

ולכן $\boxed{Im(f) = \operatorname{conv}(A)}$.

עתה נראה ש־ f רציפה. תהי $x \in \Delta_m$. תהי $x_1, \dots \in \Delta_m$ סדרה שמתכנסת ל־ x.

נשים לב ש־ $e_1, \ldots, e_m$ בסיס של $\mathbb{R}^n$ ולכן קיימים $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ כך ש־ $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot e_i$.

באופן דומה קיימים $\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,m} \in \mathbb{R}$ כך ש־ $x_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{j,i} \cdot e_i$.

בתרגול נאמר שסדרה x_j מתכנסת ל־ x אם"ם x_j מתכנס ל־ x בכל קורדינאטה.

כלומר לכל $1 \leq i \leq m$ מתקיים $\alpha_{j,i} \overset{j\to\infty}{\to} \alpha_i$ ולכן לכל $\varepsilon > 0$, ממקום מסוים לכל ה־ i מתקיים כי

$$|\alpha_{j,i} - \alpha_i| < \frac{\varepsilon}{m \cdot \max_{1\leq i\leq m}\{\|a_i\| + 1\}}$$

נשים לב כי ממקום זה מתקיים

$$\begin{aligned}
\|f(x_j) - f(x)\| &= \left\|\sum_{i=1}^m a_i \cdot (\alpha_{j,i} - \alpha_i)\right\| \leq \sum_{i=1}^m \|a_i \cdot (\alpha_{j,i} - \alpha_i)\| = \sum_{i=1}^m |\alpha_{j,i} - \alpha_i| \cdot \|a_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^m \max_{1\leq i\leq m}\{|\alpha_{j,i} - \alpha_i|\} \cdot \max_{1\leq i\leq m}\{\|a_i\|\} \\
&= m \cdot \max_{1\leq i\leq m}\{\|a_i\|\} \cdot \max_{1\leq i\leq m}\{|\alpha_{j,i} - \alpha_i|\} \\
&< \frac{m \cdot \max_{1\leq i\leq m}\{\|a_i\|\} \cdot \varepsilon}{m \cdot \max_{1\leq i\leq m}\{\|a_i\| + 1\}} < \varepsilon
\end{aligned}$$

כלומר הראנו שלכל סדרה שמתכנסת ל־ x ולכן $\varepsilon > 0$ ממקום מסוים מתקיים $\|f(x_j) - f(x)\| < \varepsilon$ ולכן מהיינה מתקיים ש־ f רציפה ב־ x.

נשים לב שהראנו שלכל $x \in \Delta_m$ מתקיים ש־ f רציפה ב־ x ולכן f רציפה ב־ Δ_m.

נשים לב ש־ Δ_m היא קבוצה קומפקטית ו־ f פונקציה רציפה ולכן $Im(f)$ היא גם קומפקטית (הוכח בתרגול).

וראינו כי $Im(f) = \operatorname{conv}(A)$ ולכן $\operatorname{conv}(A)$ קומפקטית, כנדרש.

מ.ש.ל.☺