פתרון תרגיל מספר 11 ־ אלגוריתמים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639, **שם:** גיא לוי, **ת.ז:** 211744636

17 בינואר 2020

1. פתרון:

(א) **צ"ל:** תיאור הבעיות כתכנון לינארי
הוכחה:
תחילה נתאר את בעיית כיסוי הקודקודים:

i. תחילה נתאר את בעיית כיסוי הקודקודים:
נגדיר $x \in \mathbb{R}^{|V|}$ (משתנה לכל קודקוד), נרצה לבחור כמה שפחות קודקודים ולכן נרצה למזער את $\sum_{i=1}^{|V|} x_i = \sum_{i=1}^{|V|} 1 \cdot x_i = \left(\underbrace{1,\dots,1}_{|V| \text{ times}}\right) \cdot x$, לכן נגדיר $c^T = \left(\underbrace{1,\dots,1}_{|V| \text{ times}}\right)$.
האילוצים שלנו הם שלכל צלע $(v_i, v_j) \in E$ יתקיים שלפחות אחד הקודקודים נבחר, כלומר $x_i + x_j \geq 1$,
נגדיר את מטריצת האילוצים בתור $A \in \mathbb{R}^{|E|\times|V|}$,

$$A_{e,v} = \begin{cases} 1 & v \text{ is an vertex of the edge } e \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

יהי $(v_i, v_j) = e \in E$, נשים לב כי $(A\cdot x)_e = x_i + x_j$, נרצה כי $(A\cdot x)_e \geq 1$, ולכן נקבל כי עבור $b \in \mathbb{R}^{|E|}$ כך ש־ $b^T = \left(\underbrace{1,\dots,1}_{|E| \text{ times}}\right)$, נקבלאת האילוצים שאנחנו רוצים $A\cdot x \geq b$,
כלומר הגענו לבעית התכנון הלינארית בשלמים הבאה:

$$\begin{aligned} \min c^T \cdot x \\ s.t\ A\cdot x \geq b \\ x \geq 0 \\ x \in \{0,1\} \end{aligned}$$

ii. תחילה נתאר את בעיית הזיווג המושלם:
נגדיר $y \in \mathbb{R}^{|E|}$ (משתנה לכל צלע), נרצה לבחור כמה שיותר צלעות ולכן נרצה למקסם את $\sum_{i=1}^{|E|} y_i = \sum_{i=1}^{|E|} 1\cdot y_i = \left(\underbrace{1,\dots,1}_{|E| \text{ times}}\right) \cdot y$, לכן נגדיר $b^T = \left(\underbrace{1,\dots,1}_{|E| \text{ times}}\right)$.
האילוצים שלנו הם שלכל קודקוד יש לכל היותר צלע אחת, לכן נגדיר את מטריצת האילוצים בתור $A \in \mathbb{R}^{|E|\times|V|}$,

$$A^T_{e,v} = \begin{cases} 1 & v \text{ is an vertex of the edge } e \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

יהי $v\in V$, נשים לב כי

$$\left(A^{T}\cdot y\right)_{e}=\sum_{e\in E}\begin{cases}1 & v\text{ is an vertex of the edge }e\\ 0 & \text{else}\end{cases}=\text{the amount of edges v appears in}$$

לכן נרצה כי $\left(A^{T}\cdot y\right)_{e}\leq1$, ולכן נקבל כי עבור $c\in\mathbb{R}^{|E|}$ כך ש־ $c^{T}=\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{|V|\text{ times}}\right)$, נקבלאת האילוצים שאנחנו רוצים $A^{T}\cdot y\leq c$,
כלומר הגענו לבעית התכנון הלינארית בשלמים הבאה:

$$\begin{aligned}\max b^{T}\cdot y\\ s.t\ A^{T}\cdot y\leq c\\ y\geq0\\ y\in\{0,1\}\end{aligned}$$

מ.ש.ל.א.☺

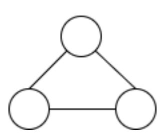
(ב) **צ"ל:** הבעיות הן דואליות
הוכחה:
נשים לב שמבחירת השמות שלנו ומכך שהגדרנו את המשתנים באותו האופן, קיבלנו שהבעיות הן אכן דואליות!

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** חסם לזיווג
הוכחה:
נשים לב שממשפט הדואליות החלשה בגלל שהראנו שהבעיות הן אכן דואליות, מתקיים הגודל של כל כיסוי קדקודי ב־ G חוסם מלמעלה גודל של כל זיווג ב־ G.

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** דוגמא ונימוק
הוכחה:
נשים לב כי דואליות חזקה לא מתקיימת בשלמים, בדוגמא הבאה הכיסוי הקודקודים המינימלי הוא 2 קודקודים (כי צריך לכסות כל צלע), והזיווג הוא 1, כלומר קיבלנו חסם גדול ממש במקרה הזה.



מ.ש.ל.ד.☺

2. **צ"ל:**
הוכחה:

מ.ש.ל.☺

3. פתרון:

(א) **צ"ל:** השמה מספקת
הוכחה:
יהי S,T חתך ב־ N, נגדיר $z_{i}=\begin{cases}0 & v_{i}\notin S\\ 1 & v_{i}\in S\end{cases}$, $y_{i,j}=\begin{cases}0 & (v_{i},v_{j})\text{ not in the cut}\\ 1 & (v_{i},v_{j})\text{ in the cut}\end{cases}$,
נראה ש־ y,z הנ"ל מקיימים את כל הנדרש:

i. יהי $1 \le i \le |V|$ כך ש־ $(s,v_i) \in E$, נשים לב כי

$$z_i + y_{s,i} = \begin{cases} 0 & v_i \notin S \\ 1 & v_i \in S \end{cases} + \begin{cases} 0 & (s,v_i) \text{ not in the cut} \\ 1 & (s,v_i) \text{ in the cut} \end{cases} = \begin{cases} 0 & v_i \notin S \\ 1 & v_i \in S \end{cases} + \begin{cases} 0 & (s,v_i)\, v_i \in S \\ 1 & (s,v_i)\, v_i \notin S \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 & v_i \notin S \\ 1 & v_i \in S \end{cases} = 1 \ge 1$$

כלומר התנאי הראשון מתקיים

ii. יהיו $v_i, v_j \ne s,t$ כך ש־ $(v_j,v_i) \in E$, נשים לב כי

$$z_i - z_j + y_{j,i} = \begin{cases} 0 & v_i \notin S \\ 1 & v_i \in S \end{cases} - \begin{cases} 0 & v_j \notin S \\ 1 & v_j \in S \end{cases} + \begin{cases} 0 & (v_j,v_i) \text{ not in the cut} \\ 1 & (v_j,v_i) \text{ in the cut} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & v_i \notin S \\ 1 & v_i \in S \end{cases} - \begin{cases} 0 & v_j \notin S \\ 1 & v_j \in S \end{cases} + \begin{cases} 0 & v_j \in S \wedge v_i \in S \\ 0 & v_j \in T \wedge v_i \in T \\ 1 & v_j \in S \wedge v_i \in T \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1-1 & v_j \in S \wedge v_i \in S \\ 0-0 & v_j \in T \wedge v_i \in T \\ -1+1 & v_j \in S \wedge v_i \in T \end{cases} = 0 \ge 0$$

כלומר התנאי השני מתקיים

iii. יהי $1 \le i \le |V|$ כך ש־ $(v_i,t) \in E$, נשים לב כי

$$-z_i + y_{i,t} = -\begin{cases} 0 & v_i \notin S \\ 1 & v_i \in S \end{cases} + \begin{cases} 0 & (v_i,t) \text{ not in the cut} \\ 1 & (v_i,t) \text{ in the cut} \end{cases} = -\begin{cases} 0 & v_i \notin S \\ 1 & v_i \in S \end{cases} + \begin{cases} 0 & (s,v_i)\, v_i \in T \\ 1 & (s,v_i)\, v_i \notin T \end{cases}$$
$$= -\begin{cases} 0 & v_i \notin S \\ 1 & v_i \in S \end{cases} + \begin{cases} 0 & (s,v_i)\, v_i \notin S \\ 1 & (s,v_i)\, v_i \in S \end{cases} = \begin{cases} 0 & v_i \notin S \\ 0 & v_i \in S \end{cases} = 0 \ge 0$$

כלומר התנאי השלישי מתקיים

iv. יהי $1 \le i \le |V|$, נשים לב כי $z_i \ge 0$ מההגדרה

v. יהיו $1 \le i,j \le |V|$, נשים לב כי $y_{i,j} \ge 0$ מההגדרה

נשים לב כי

$$\sum_{(v_i,v_j)\in E} c_{i,j} \cdot y_{i,j} = \sum_{(v_i,v_j)\in E} c_{i,j} \cdot \begin{cases} 0 & (v_i,v_j) \text{ not in the cut} \\ 1 & (v_i,v_j) \text{ in the cut} \end{cases}$$
$$= \sum_{(v_i,v_j) \text{ in the cut}} c_{i,j} = \sum_{v_i \in S \wedge v_j \in T} c_{i,j} = C(S,T)$$

כלומר ה־ y,z היא השמה חוקית כך שמתקיים $C(S,T) = \sum_{(v_i,v_j)\in E} c_{i,j} \cdot y_{i,j}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** S,T כך ש־ $\sum_{(v_i,v_j)\in E} c_{i,j} \cdot y_{i,j} \ge C(S,T)$

הוכחה:

נגדיר $S = \{v_i \mid z_i = 1\}$, $T = V \setminus S$.

נשים לב שזהו חתך חוקי כי $S \cap T = \emptyset$, $S \cup T = V$.

נראה שאם $y_{i,j} = 0$ אזי (v_i,v_j) לא בחתך,

יהיו $1 \le i,j \le |V|$ כך ש־ $y_{i,j} = 0$:

i. אם $v_i = s$, אז נשים לב כי מתקיים $z_j = z_j + y_{s,j} \geq 1$, ולכן $z_j = 1$ כלומר $s, v_j \in S$, ולכן $(v_i, v_j) = (s, v_j)$ לא בחתך

ii. אם $v_j = t$, אז נשים לב כי מתקיים $-z_i = -z_i + y_{i,t} \geq 0$ ולכן $0 \leq z_i \leq 0$, כלומר $z_i = 0$, לכן $v_i, t \in T$, כלומר $(v_i, t) = (v_i, v_j)$ לא בחתך

iii. אחרת, נשים לב כי $z_j - z_i = z_j - z_i + y_{i,j} \geq 0$, כלומר $z_j \geq z_i$,

א'. לכן אם $z_i = 1$, נקבל כי $z_j = z_i = 1$, כלומר $v_i, v_j \in S$, ולכן (v_i, v_j) לא בחתך

ב'. אחרת אם $z_i = 0$, נקבל כי $v_i \in T$, ולכן (v_i, v_j) לא בחתך מההגדרה של החתך

עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}\sum_{(v_i,v_j)\in E} c_{i,j}\cdot y_{i,j} &= \sum_{(v_i,v_j)\in E, y_{i,j}=1} c_{i,j}\cdot y_{i,j} + \sum_{(v_i,v_j)\in E, y_{i,j}=0} c_{i,j}\cdot y_{i,j} \\ &= \sum_{(v_i,v_j)\in E, y_{i,j}=1} c_{i,j}\cdot y_{i,j} = \sum_{(v_i,v_j)\in E, y_{i,j}=1} c_{i,j}\end{aligned}$$

הראנו שכל הצלעות בחתך מקיימות $y_{i,j} = 1$ ולכן

$$C(S,T) \leq \sum_{(v_i,v_j)\in E, y_{i,j}=1} c_{i,j} = \sum_{(v_i,v_j)\in E} c_{i,j}\cdot y_{i,j}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** הבעיות שקולות

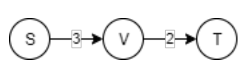
הוכחה:

בסעיף הראשון ראינו שאפשר לתרגם לכל חתך השמות חוקיות שיקיימו את הבעיה הדואלית.
בסעיף השני הראנו שניתן לחסום את הבעיה הדואלית על ידי חתך ברשת.
לכן, בשילוב 2 הסעיפים האלה, נקבל כי כל בעיה דואלית חסומה על ידי החתך המינימלי ברשת, ואם נפתור את הבעיה הדואלית, נמצא בדיוק את החתך המינימלי ברשת בגלל שהראנו שלכל חתך יש השמה חוקית.
כלומר פתרון הבעיה הדואלית יהווה גם פתרון של החתך המינימלי, הכיוון ההפוך הוא נכון בגלל שהחתך המינימלי הוא חסם תחתון על כל השמה חוקית ומסעיף א', אנחנו יכולים למצוא השמה חוקית שתגיע לחסם, ולכן השמה אופטימלית.
כלומר הראנו שהבעיות הנ"ל שקולות

מ.ש.ל.ג.☺

4. **צ"ל:** דוגמא נגדית לאי שוויון ההפוך

הוכחה:



נשים לב כי השטף הוא 3 ומקיים את הנדרש כי בכל נקודה החומר שנכנס גדול שווה ליוצא, כשהשטף של הרשת המקורית הוא 2, ולכן השטף לא נשמר.

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:**

הוכחה:

מ.ש.ל.☺

6. **שאלה 6** פתרון:

(א) **צ"ל:** $\omega_{dn}^{dk}=\omega_n^k$
הוכחה:
יהיו $n,k\geq 0$ ו־ $d>0$, נשים לב כי

$$\omega_{dn}^{dk}\overset{\text{def}}{=}\left(e^{\frac{2\pi i}{dn}}\right)^{dk}=e^{\frac{2\pi i}{dn}\cdot dk}=e^{\frac{2\pi i}{n}\cdot k}=\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{k}\overset{\text{def}}{=}\omega_n^k$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\omega_n^{\frac{n}{2}}=\omega_2=-1$
הוכחה:
יהי n זוגי, נשים לב כי מסעיף א' מתקיים

$$\omega_n^{\frac{n}{2}}=\omega_{\frac{n}{2}\cdot 2}^{\frac{n}{2}\cdot 1}=w_2^1=w_2=e^{\frac{2\pi i}{2}}=e^{\pi i}=\cos\left(\pi\right)+i\cdot\sin\left(\pi\right)=-1+0\cdot i=-1$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** ריבועי שורשי n יחידה הם $\frac{n}{2}$ יחידה
הוכחה:
$\Leftarrow$: יהי w שורש יחידה n, אזי

$$\left(w^2\right)^{\frac{n}{2}}=w^n=1$$

לכן w^2 הוא שורש יחידה של $\frac{n}{2}$,
$\Rightarrow$: יהי w שורש יחידה $\frac{n}{2}$, אזי

$$\left(w^{0.5}\right)^{n}=w^{\frac{n}{2}}=1$$

לכן $w^{0.5}$ הוא שורש יחידה של n,
כלומר הראנו שהדברים הנ"ל הם שקולים

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\sum_{j=0}^{n-1}\left(\omega_n^k\right)^j=0$
הוכחה:
יהי k שאינו כפולה של n, אזי

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\omega_n^k\right)^j=\frac{1-\left(\omega_n^k\right)^n}{1-\omega_n^k}$$

עתה נשים לב כי $\left(\omega_n^k\right)^n=\left(\omega_n^n\right)^k=1^k=1$ וגם מתקיים כי $\omega_n^k\neq 1$ (בעזרת הסעיף הבא) בגלל שk אינו כפולה של n,
לכן המונה הוא 0, והמכנה הוא לא 0, כלומר מתקיים

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\omega_n^k\right)^j=\frac{1-\left(\omega_n^k\right)^n}{1-\omega_n^k}=0$$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** $\omega_n^r=1$ אם"ם $n\mid r$
הוכחה:
$\Leftarrow$: יהי r כך ש־ $\omega_n^r=1$, נסמן $r=a\cdot n+b$ כאשר $0\leq b<n$, אזי

$$1=\omega_n^r=\omega_n^{a\cdot n+b}=\omega_n^{a\cdot n}\cdot\omega_n^b=\left(\omega_n^n\right)^a\cdot\omega_n^b=1^a\cdot\omega_n^b=\omega_n^b=\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^b=e^{\frac{2\pi ib}{n}}$$

לכן

$$1 = e^{\frac{2\pi i b}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi b}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi b}{n}\right)$$

נשים לב שהדבר מתקיים אם"ם $\frac{b}{n} \in \mathbb{Z}$ אבל מתקיים כי $\frac{b}{n} \in \mathbb{Z}$ רק אם $b = 0$,
נציב חזרה ונקבל $r = a \cdot n$, לכן $n \mid r$
$\Leftarrow$: יהי $r \mid n$, לכן נסמן $r = a \cdot n$, אזי

$$1 = \omega_n^r = \omega_n^{a \cdot n} = \omega_n^{a \cdot n} = (\omega_n^n)^a = 1^a = 1$$

מ.ש.ל.ה.☺

(ו) **צ"ל:** סכום קודקודי משושה משוכלל שמרכזו בראשית הוא 0
הוכחה:
תחילה נראה עבור המשושה הסטנדרטי,
אחד מקודקודיו הוא $e_0 = (1, 0)$, הקודקוד השני הוא בסיבוב 60 מעלות על מעגל היחידה והוא $e_1 = \omega_6^1$,
לכן באופן דומה נמשיך ונקבל ששת קודקודי המשושה הנ"ל הם ω_6^k, לכל $0 \le k \le 5$,
נשים לב כי בסעיף ד' ראינו כי $\sum_{j=0}^{5} \left(\omega_6^1\right)^j = 0$,
ניתן לקבל כל משושה על ידי הזזה וסיבוב של המשושה הסטנדרטי, ניתן לקבל משושים אלה על ידי כפל בקבוע בכל אחת מהקורדינטות, נוכל להוציא קבועים אלה החוצה ונקבל מכפלה של 0 (כי זה המשושה הסטנדרטי) בקבועים ונקבל כי הסכום נשאר 0.

מ.ש.ל.ו.☺