פתרון תרגיל מספר 5 ־ אינפי 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

28 בנובמבר 2018

1. **צ"ל:** קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים

(א) **צ"ל:** $\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$

הוכחה:

מתכנס!

נסמן $f(x)=\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$, נשים לב כי $f(x)=\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ וגם

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2=1^2=1$$

נגדיר $g(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ f(x) & x\neq 0\end{cases}$, נשים לב כי g רציפה ב$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ בגלל ארתמטיקה של רציפות וגם

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1=g(0)$$

ולכן g רציפה ב$\mathbb{R}$, ולכן g רציפה ב$[0,1]$,

ומהמשפט שכל פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אינטגרבילית בו מתקיים כי $\int_0^1 g(x)\,dx$ מתכנס,

נשים לב שמשאלה 4 בתרגיל 4 מתקיים כי

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 g(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^1\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx\overset{\text{def}}{=}\int_0^1\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$$

כלומר $\int_0^1\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$ מתכנס!

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\int_1^2\frac{1}{\ln(x)}dx$

הוכחה:

לא מתכנס!

נשים לב כי

$$\int_1^2\frac{1}{\ln(x)}dx=\int_{0+1}^{1+1}\frac{1}{\ln(x)}dx=\int_0^1\frac{1}{\ln(x+1)}dx$$

נשים לב כי $\frac{1}{\ln(x+1)},\frac{1}{x}\geq 0$, $\forall x>0$ וגם

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\ln(x+1)}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln(x+1)}\overset{L\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{1}{x+1}}=\frac{1}{\frac{1}{1+0}}=1$$

ולכן

$$\frac{1}{\ln(x+1)} \sim \frac{1}{x}; x \to 0^+$$

ראינו בכיתה כי $\int_0^1 \frac{1}{x} \cdot dx$לא מתכנס,
ולכן ממשפט 11.3 מתקיים כי $\int_0^1 \frac{1}{\ln(x+1)} dx = \int_1^2 \frac{1}{\ln(x)} dx$ לא מתכנס

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\int_1^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$
הוכחה:
מתכנס!
נשים לב כי

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}} \overset{t=\sqrt{x}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{t^4}{e^t} \overset{L\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{4\cdot t^3}{e^t} \overset{L\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{4\cdot 3\cdot t^2}{e^t}$$
$$\overset{L\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot t}{e^t} \overset{L\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{e^t} = 0$$

לכן $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq x_0$ מתקיים כי

$$e^{\sqrt{x}} \geq x^2 \Rightarrow e^{-\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2}$$

ולכן מתקיים $0 \leq e^{-\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2}$, $\forall x \in [x_0, \infty)$ וגם $\int_{x_0}^\infty \frac{1}{x^2} dx$ מתכנס,
לכן ממשפט ההשוואה מתקיים $\int_{x_0}^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$ מתכנס ונסמן $\int_{x_0}^\infty e^{-\sqrt{x}} dx = c_0 \in \mathbb{R}$,
נשים לב כי $e^{-\sqrt{x}}$ רציפה ב$[1, x_0]$ ולכן $\int_1^{x_0} e^{-\sqrt{x}} dx$ מתכנס ונסמן $\int_1^{x_0} e^{-\sqrt{x}} dx = c_1 \in \mathbb{R}$,
לכן

$$\int_1^\infty e^{-\sqrt{x}} dx = \int_1^{x_0} e^{-\sqrt{x}} dx + \int_{x_0}^\infty e^{-\sqrt{x}} dx = c_0 + c_1 \in \mathbb{R}$$

כלומר $\int_1^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$ מתכנס, כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\int_{e^2}^\infty \frac{\sin(x)}{\ln(\ln(x))} dx$
הוכחה:
מתכנס!
נסמן $f(x) = \sin(x)$,
נשים לב כי $F(t) = \int_a^t \sin(t)\, dt = -\cos(x) \mid_a^t = \cos(a) - \cos(t)$, לכן $-2 \leq F(t) \leq 2$, $\forall t \in \mathbb{R}$,
כלומר $F(t)$ חסומה,
נסמן ב $g(x) = \frac{1}{\ln(\ln(x))}$, נשים לב כי

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(\ln(x))} \overset{\frac{1}{\infty}}{=} 0$$

וגם $g(x)$ מונוטונית יורדת (הרכבה של מונוטניות עולות במכנה) וגם $\forall x \in [e^2, \infty)$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{\ln(\ln(x))}\right)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \left(-\frac{1}{(\ln(\ln(x)))^2}\right)$$

לכן מתנאי דיריכלה להתכנסות אינטגרלים מתקיים כי $\int_{e^2}^\infty f(x) g(x)\, dx$ מתכנס

$$\int_{e^2}^\infty \frac{\sin(x)}{\ln(\ln(x))} dx = \int_{e^2}^\infty \sin(x) \cdot \frac{1}{\ln(\ln(x))} dx = \int_{e^2}^\infty f(x) g(x)\, dx$$

כלומר, $\int_{e^2}^\infty \frac{\sin(x)}{\ln(\ln(x))} dx$ מתכנס, כנדרש

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** $\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}}dx$
הוכחה:
מתכנס!
מאדיטיביות האינטגרל מתקיים כי $\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \int_0^1 \frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}}dx + \int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}}dx$,
נשים לב כי $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}} > 0$, $\forall x \in [1,\infty)$ וגם $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ מתכנס (ראינו בכיתה),
ולכן ממשפט ההשוואה, מתקיים ש$\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}}dx = c_0 \in \mathbb{R}$ מתכנס,
נשים לב כי $\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}} \geq 0$ וגם

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

לכן

$$\frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}; x \to 0^+$$

ראינו בתירגול כי $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתכנס,
ולכן ממשפט 11.3 מתקיים כי $\int_0^1 \frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ מתכנס ו$\int_0^1 \frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}}dx = c_1 \in \mathbb{R}$
לכן

$$\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \int_0^1 \frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}}dx + \int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}}dx = c_0 + c_1 \in \mathbb{R}$$

מ.ש.ל.ה.☺

2. **צ"ל:** מצאו מתי $\int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x^\alpha}dx$ מתכנס
הוכחה:
נחלק ל3 מקרים: $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $\alpha < 1$

(א) אם $\alpha > 1$, נשים לב כי $\frac{1}{x^\alpha} \geq \frac{\cos^2(x)}{x^\alpha} \geq 0$, $\forall x \in [1,\infty)$ וגם $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ מתכנס עבור $\alpha > 1$,
לכן ממשפט ההשוואה $\int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x^\alpha}dx$ מתכנס כנדרש

(ב) אם $\alpha = 1$, נשים לב כי $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \left[2\pi k, 2\pi k + \frac{\pi}{4}\right]$ מתקיים $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos^2(x) \geq \frac{1}{2}$,
ולכן $\frac{\cos^2(x)}{x} \geq \frac{1}{2\cdot x}$, לכן ממונוטוניות האינטגרל מתקיים כי

$$\int_{2\pi k}^{2\pi k + \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(x)}{x}dx \geq \frac{1}{2}\int_{2\pi k}^{2\pi k + \frac{\pi}{4}} \frac{1}{x}dx$$

וגם מתקיים כי $\frac{1}{x}$ פונקציה מונוטונית יורדת ולכן

$$\int_{2\pi k}^{2\pi k + \frac{\pi}{4}} \frac{1}{x}dx \geq \frac{1}{8}\int_{2\pi k}^{2\pi (k+1)} \frac{1}{x}dx$$

בנוסף לכך $\frac{\cos^2(x)}{x}$ אי שלילית ולכן

$$\int_{2\pi k}^{2\pi (k+1)} \frac{\cos^2(x)}{x}dx \geq \int_{2\pi k}^{2\pi k + \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(x)}{x}dx$$

ולכן

$$\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)}\frac{\cos^2(x)}{x}dx\geq\int_{2\pi k}^{2\pi k+\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2(x)}{x}dx\geq\frac{1}{2}\int_{2\pi k}^{2\pi k+\frac{\pi}{4}}\frac{1}{x}dx\geq\frac{1}{16}\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)}\frac{1}{x}dx$$

לכן מאדטיביות האינטגרל מתקיים כי $\forall k,m\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\int_{2\pi k}^{2\pi m}\frac{\cos^2(x)}{x}dx\geq\frac{1}{16}\int_{2\pi k}^{2\pi m}\frac{1}{x}dx$$

נסמן $\int_1^{2\pi}\frac{\cos^2(x)}{x}dx=c\in\mathbb{R}$ (כי $\frac{\cos^2(x)}{x}$ רציפה ב$[1,2\cdot\pi]$) ולכן

$$\lim_{m\to\infty}\int_{2\pi}^{2\pi m}\frac{\cos^2(x)}{x}dx\geq\lim_{m\to\infty}\frac{1}{16}\int_{2\pi}^{2\pi m}\frac{1}{x}dx=\infty$$

$$\int_1^{\infty}\frac{\cos^2(x)}{x}dx=\int_1^{2\pi}\frac{\cos^2(x)}{x}dx+\int_{2\pi}^{\infty}\frac{\cos^2(x)}{x}dx=c+\infty=\infty$$

ולכן $\int_1^{\infty}\frac{\cos^2(x)}{x}dx$ לא מתכנס

(ג) אם $\alpha<1$, נשים לב כי $\frac{\cos^2(x)}{x^\alpha}\geq\frac{\cos^2(x)}{x}$ וגם כי $\int_1^{\infty}\frac{\cos^2(x)}{x}dx$ לא מתכנס,
ולכן ממבחן ההשוואה $\int_1^{\infty}\frac{\cos^2(x)}{x^\alpha}dx$ לא מתכנס

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** הראו כי $\int_1^{\infty}x^\alpha\sin\left(x^\beta\right)dx$ מתכנס אם"ם $\alpha+1<\beta$
הוכחה:
תחילה נוכיח טענת עזר שמתקיים $\int_1^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^\lambda}dx$ מתכנס אם"ם $\lambda>0$
נחלק למקרים:

(א) אם $\lambda>0$, נשים לב כי $\frac{\sin(x)}{x^\lambda}\leq\frac{1}{x^\lambda}$,$0\leq$ $\forall x\in[1,\infty)$,
וגם $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^\lambda}dx$ מתכנס, לכן ממבחן ההשוואה מתקיים כי $\int_1^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^\lambda}dx$ מתכנס

(ב) אם $\lambda\leq0$, נניח בשלילה ש$\int_1^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^\lambda}dx$ מתכנס,
לכן מתנאי קושי $\exists x_0\in\mathbb{R}$ כך ש$\forall p,q\in\mathbb{R}$ $x_0\leq$ מתקיים

$$\left|\int_p^q\frac{\sin(x)}{x^\lambda}dx\right|<\frac{1}{2}$$

נשים לב כי $\exists k\in\mathbb{N}$ כך ש$x_0\leq2\pi k$ מתקיים כי $2\pi k,2\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)\geq x_0$, לכן עבור k כזה מתקיים:

$$\frac{1}{2}>\left|\int_{2\pi k}^{2\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)}\frac{\sin(x)}{x^\lambda}dx\right|\overset{\lambda\leq0}{\geq}\left|\int_{2\pi k}^{2\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)}\sin(x)\,dx\right|=\left|-\cos(x)\,|_{2\pi k}^{2\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)}\right|=1$$

קיבלנו כי $\frac{1}{2}>1$, סתירה ולכן ההנחה ש$\int_1^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^\lambda}dx$ מתכנס לא נכונה, כלומר $\int_1^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^\lambda}dx$ מתבדר

לכן מתקיים $\int_1^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^\lambda}dx$ מתכנס אם"ם $\lambda>0$
נשים לב כי

$$\int_1^{\infty}x^\alpha\sin\left(x^\beta\right)dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t x^\alpha\sin\left(x^\beta\right)dx\underset{du=\beta\cdot x^{\beta-1}dx}{\overset{u=x^\beta}{=}}\lim_{t\to\infty}\int_1^t x^\alpha\sin(u)\frac{du}{\beta\cdot x^{\beta-1}}$$
$$=\frac{1}{\beta}\lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{\alpha-\beta+1}\sin(u)\,du=\frac{1}{\beta}\lim_{t\to\infty}\int_1^t u^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}}\sin(u)\,du$$
$$=\frac{1}{\beta}\int_1^{\infty}u^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}}\sin(u)\,du=\frac{1}{\beta}\int_1^{\infty}\frac{\sin(u)}{u^{-\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}}}du$$

נשים לב שגילינו כי $\int_1^\infty \frac{\sin(u)}{u^{-\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}}}du$ מתכנס אם"ם $\int_1^\infty x^\alpha \sin\left(x^\beta\right)dx$ מתכנס,
מטענת העזר מתקיים כי $\int_1^\infty \frac{\sin(u)}{u^{-\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}}}du$ מתכנס אם"ם $-\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}>0$,
נשים לב כי

$$-\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}>0 \Leftrightarrow \alpha-\beta+1<0 \Rightarrow \alpha+1<\beta$$

ולכן קיבלנו כי $\int_1^\infty x^\alpha \sin\left(x^\beta\right)dx$ מתכנס אם"ם $\int_1^\infty \frac{\sin(u)}{u^{-\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}}}du$ מתכנס אם"ם $\alpha+1<\beta$

מ.ש.ל.☺

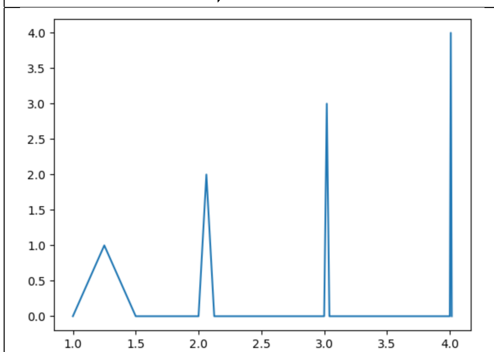
4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** האם $\int_1^\infty fdx$ מתכנס גורר f חסומה?

הוכחה:

לא נכון!

נגדיר $f(x)$ כך ש$\int_1^\infty fdx$ מתכנס וf לא חסומה,
נגדיר f באופן הבא (משולשים):

	הגדרה	**ציור הפונקציה**
1	אם $\exists n\in\mathbb{N}$ כך ש $x\in\left[n,n+\frac{1}{2\cdot 2^n\cdot n}\right]$, נגדיר את $f(x)$ להיות הנקודה המתאימה $(x,f(x))$ על הקו ישר הנוצר בין הנקודות $(n,0)$, $\left(n+\frac{1}{2\cdot 2^n\cdot n},n\right)$	
2	אם $\exists n\in\mathbb{N}$ כך ש $x\in\left[n+\frac{1}{2\cdot 2^n\cdot n},n+\frac{1}{2^n\cdot n}\right]$, נגדיר את $f(x)$ להיות הנקודה המתאימה $(x,f(x))$ על הקו ישר הנוצר בין הנקודות $\left(n+\frac{1}{2\cdot 2^n\cdot n},n\right)$, $\left(n+\frac{1}{2^n\cdot n},0\right)$	
3	אחרת נגדיר $f(x)=0$	

נשים לב שמההגדרה של f מתקיים כי $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[1,\infty)$,
נשים לב כי f רציפה ב$[1,\infty)$ מההגדרתה
נשים לב כי $f\left(\lceil M+1\rceil+\frac{1}{2\cdot 2^{\lceil M+1\rceil}\cdot\lceil M+1\rceil}\right)=M+1>M$, $\forall M\in\mathbb{R}$ כלומר f לא חסומה,
עתה נראה ש$\int_1^\infty fdx$ מתכנס ונסיים, נשים לב שהשטח מתחת לכל משולש הוא

$$n\cdot\left(n+\frac{1}{2^n\cdot n}-\left(n+\frac{1}{2\cdot 2^n\cdot n}\right)\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{4\cdot 2^n\cdot n}=\frac{1}{4\cdot 2^n}$$

ולכן השטח מתחת לפונקציה הוא סכום כל המשולשים, כלומר:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{t}\frac{1}{4\cdot 2^n}=\frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{t}\frac{1}{2^n}$$

ראינו כי $\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{t}\frac{1}{2^n}$ קיים במובן הצר (ראינו בכיתה שטור זה מתכנס כאשר $|q|\leq 1$ ובמקרה שלנו $q=\frac{1}{2}$)
ולכן $\int_1^\infty fdx$ מתכנס
כלומר התנאים מתקיימים אך f לא חסומה, כלומר הטענה לא נכונה

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם $\int_0^1 g(x)\,dx$ מתכנס גורר g חסומה?

הוכחה:

לא נכון!

נבחר $g\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, נשים לב כי g רציפה ואי שלילית וגם
ראינו בתירגול כי $\int_{0}^{1}g\left(x\right)dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתכנס,
וגם $\forall M\in\mathbb{R}>1$ מתקיים $\left|g\left(\frac{1}{(M+1)^{2}}\right)\right|=M+1>M$ וגם $\frac{1}{(M+1)^{2}}\in(0,1]$,
כלומר g לא חסומה ב$(0,1]$
כלומר התנאים מתקיימים אך g לא חסומה, כלומר הטענה לא נכונה

מ.ש.ל.ב.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** האם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n^{2}-51n}$ הוא טור מתכנס?
הוכחה:
זהו טור לא מתכנס!
נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{2n^{2}-51n}}{\frac{1}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{2}+4n}{2n^{2}-51n}=1$$

וגם $\frac{1}{2n}\geq0$ כמעט תמיד ולכן $\frac{n+2}{2n^{2}-51n}$ כמעט תמיד,
ולכן ממשפט התכנסות גבולי מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n^{2}-51n}$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ מתכנס
וגם $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ לא מתכנס (ראינו בתרגול)
ולכן מהיות הטורים דומים מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n^{2}-51n}$ אינו טור מתכנס!

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{2^{n}}$ הוא טור מתכנס?
הוכחה:
זהו טור מתכנס!
נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{2}}{2^{n}}}{\frac{1}{n^{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{4}}{2^{n}}\overset{\text{heine}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{4}}{2^{x}}\overset{L\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot x^{3}}{2^{x}\cdot\ln\left(2\right)}\overset{L\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot3\cdot x^{2}}{2^{x}\cdot\ln^{2}\left(2\right)}\overset{L\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot3\cdot2\cdot x}{2^{x}\cdot\ln^{3}\left(2\right)}\overset{L\frac{\infty}{\infty}}{=}$$
$$\overset{L\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2^{x}\cdot\ln^{4}\left(2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2^{n}\cdot\ln^{4}\left(2\right)}=0$$

לכן $\exists x_{0}\in\mathbb{R}$ כך ש$\forall n\geq x_{0}$ מתקיים

$$0\leq\frac{n^{4}}{2^{n}}\leq1\Rightarrow0\leq\frac{n^{2}}{2^{n}}\leq\frac{1}{n^{2}}$$

נבחר $f\left(x\right)=\frac{1}{x^{2}}$ פונקציה מונוטונית יורדת ו

$$\int_{1}^{\infty}f\left(x\right)dx=\lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t}\frac{1}{x^{2}}dx=\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{x}\mid_{1}^{t}=1$$

ולכן המשפט ש$\int_{1}^{\infty}f\left(x\right)dx$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)$ מתכנס, נובע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)$ מתכנס
ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{2^{n}}$ הוא טור מתכנס ממבחן ההשוואה כי $\left|\frac{n^{2}}{2^{n}}\right|\leq\frac{1}{n^{2}}$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ הוא טור מתכנס!

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** האם $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2+\frac{1}{n}}$ הוא טור מתכנס?
הוכחה:

זהו טור מתכנס!
נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-2+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^{2-\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}\cdot\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

וגם $\forall n\in\mathbb{N}$,$\frac{1}{n^2},n^{-2+\frac{1}{n}}\geq 0$
ולכן ממשפט התכנסות גבולי מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2+\frac{1}{n}}$ מתכנס
וגם $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$ מתכנס (ראינו בסעיף הקודם)
ולכן מהיות הטורים דומים מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2+\frac{1}{n}}$ טור מתכנס!

מ.ש.ל.ג.☺

6. **צ"ל:** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ מתכנס
הוכחה:
$\Leftarrow$: נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור מתכנס ונראה כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ מתכנס,
מהיות $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור מתכנס מתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

וגם

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{a_n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{1+0}=1$$

ולכן ממשפט התכנסות גבולי מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ מתכנס
וגם $\sum_{i=1}^{\infty}a_n$ מתכנס
ולכן מהיות הטורים דומים מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ טור מתכנס!
$\Rightarrow$: נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ טור מתכנס ונראה כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס,
מהיות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ טור מתכנס מתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n+1}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

הטענה מתקיימת כי לכל תת סדרה מתכנסת של a_n מתקיים כי $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=0$
כי אם הגבול סופי ונסמנו $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=L$ נקבל כי $\frac{L}{L+1}=0$ ולכן $L=0$
אחרת $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=\pm\infty$ ולכן $\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n_k}}{a_{n_k}+1}=1\neq 0$ סתירה
ולכן ממשפט הירושה נובע כי

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

וגם

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{a_n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{1+0}=1$$

ולכן ממשפט התכנסות גבולי מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ מתכנס
וגם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ מתכנס
ולכן מהיות הטורים דומים מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור מתכנס!

מ.ש.ל.☺