פתרון תרגיל מספר 7 - לינארית 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

4 במאי 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $P(\lambda)$ הוא ערך עצמי של $P(T)$

הוכחה:

מהיות λ ערך עצמי של T קיים וקטור עצמי של λ שנסמנו ב$0 \neq v \in V$,

נסמן $\deg P = n$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ אזי

$$P(T)(v) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot T^k\right)(v) \overset{\text{linear}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \left(T^k(v)\right) \overset{\star}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \lambda^k \cdot v = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \lambda^k\right) \cdot v = P(\lambda) \cdot v$$

נשים לב כי $\star$ מתקיים כי באינדוקציה ניתן להוכיח ש$T^k(v) = \lambda^k \cdot v$ (וגם $T^0(v) = v = 1 \cdot v = \lambda^0 \cdot v$),

כלומר הראנו כי $\exists v \in V \neq 0$ כך ש$P(T)(v) = P(\lambda) \cdot v$, כלומר $P(\lambda)$ הוא ערך עצמי של $P(T)$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $m_T(\lambda) = 0$

הוכחה:

אנחנו יודעים כי λ ערך עצמי של T, לכן לפי סעיף א' מתקיים $P(\lambda)$ הוא ערך עצמי של $P(T)$,

לכן $m_T(\lambda)$ הוא ערך עצמי של $m_T(T) = 0$, הערך העצמי היחיד של פולינום ה0 הוא $\xi = 0$,

כלומר $\boxed{m_T(\lambda) = \xi = 0}$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** λ לא בהכרח ערך עצמי של T

הוכחה:

הטענה לא נכונה! נבחר $\mathbb{F} = \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$,

נשים לב כי $T(e_1) = -e_1$, $T(e_2) = -e_2$, לכן $\boxed{V_{-1} = \mathbb{R}^2} \Leftarrow \mathrm{span}\{e_1, e_2\} = \mathbb{R}^2 \subseteq V_{-1} \subseteq \mathbb{R}^2$,

כלומר יש ערך עצמי 1 והוא -1. נבחר $P(x) = x^2 + x$, נשים לב כי

$$P(T)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \left(T^2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \cdot (0+1) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P(0) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

כלומר $P(0)$ הוא ערך עצמי של $P(T)$, אך 0 לא ערך עצמי של T, כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

2. **צ"ל:** $m_C(X) = (X - \lambda_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_r)^{s_r}$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי ממשפט שהוכח בהרצאה מתקיים

$$\chi_C = \det(C - I_{n+q}) = \det(A - I_n) \cdot \det(B - I_q) = \chi_A \cdot \chi_B$$

עתה נראה כי

$$m_C(C) = (C-\lambda_1)^{s_1}\cdot ...\cdot (C-\lambda_r)^{s_r} = \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} - \lambda_1\cdot I_{n+q}\right)^{s_1}\cdot ...\cdot \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} - \lambda_r\cdot I_{n+q}\right)^{s_r} =$$
$$= \left(\begin{bmatrix} A-\lambda_1\cdot I_n & 0 \\ 0 & B-\lambda_1\cdot I_q \end{bmatrix}\right)^{s_1}\cdot ...\cdot \left(\begin{bmatrix} A-\lambda_r\cdot I_n & 0 \\ 0 & B-\lambda_r\cdot I_q \end{bmatrix}\right)^{s_r}$$
$$= \begin{bmatrix} ((A-\lambda_1)^{s_1}\cdot ...\cdot (A-\lambda_r)^{s_r}) & 0 \\ 0 & ((B-\lambda_1)^{s_1}\cdot ...\cdot (B-\lambda_r)^{s_r}) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \left(\chi_A(A)(A-\lambda_1)^{s_1-k_1}\cdot ...\cdot (A-\lambda_r)^{s_r-k_r}\right) & 0 \\ 0 & \left(\chi_B(B)(B-\lambda_1)^{s_1-l_1}\cdot ...\cdot (B-\lambda_r)^{s_r-l_r}\right) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

נניח בשלילה כי m_T אינו הפולינום המינימלי של C, קיים פולינום מינימלי שנסמנו ב

$$G_C(X) = (X-\lambda_1)^{g_1}\cdot ...\cdot (X-\lambda_r)^{g_r}$$

כך ש$g_i \le s_i$, $1\le \forall i \le r$, ו$1 \le \exists j \le r$ כך ש$g_j < s_j$, (**הערה:** G מהצורה שצוינה לעיל כמסקנה משאלה 1 סעיף ב')

$$0 = G_C(C) = (C-\lambda_1)^{g_1}\cdot ...\cdot (C-\lambda_r)^{g_r} = \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} - \lambda_1\cdot I_{n+q}\right)^{g_1}\cdot ...\cdot \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} - \lambda_r\cdot I_{n+q}\right)^{g_r} =$$
$$= \left(\begin{bmatrix} A-\lambda_1\cdot I_n & 0 \\ 0 & B-\lambda_1\cdot I_q \end{bmatrix}\right)^{g_1}\cdot ...\cdot \left(\begin{bmatrix} A-\lambda_r\cdot I_n & 0 \\ 0 & B-\lambda_r\cdot I_q \end{bmatrix}\right)^{g_r}$$
$$= \begin{bmatrix} ((A-\lambda_1)^{g_1}\cdot ...\cdot (A-\lambda_r)^{g_r}) & 0 \\ 0 & ((B-\lambda_1)^{g_1}\cdot ...\cdot (B-\lambda_r)^{g_r}) \end{bmatrix}$$

כלוק קיבלנו כי $(A-\lambda_1)^{g_1}\cdot ...\cdot (A-\lambda_r)^{g_r} = 0 = (B-\lambda_1)^{g_1}\cdot ...\cdot (B-\lambda_r)^{g_r}$,
נניח בלי הגבלת הכלליות כי $s_j = k_j$, נגדיר $P(x) = (x-\lambda_1)^{g_1}\cdot ...\cdot (x-\lambda_r)^{g_r}$,
אנחנו ראינו כי $P(A) = 0$, לכן $m_A \mid P$,
אבל בm_A יש את הגורם $(x-\lambda_j)^{k_j}$ שאינו מופיע במכפלה של P מספיק פעמים כדאי להתחלק בו (כי בP הוא מופיע $g_j < s_j = k_j$) בסתירה להנחה שm_T אינו הפולינום המינימלי.
לכן m_C הוא הפולינום המינימלי של C כי הוא פולינום מדרגה מינימלית המקיים $P(C) = 0$ (וברור שהוא מתוקן מפתיחת סוגריים)

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** $\ker(P(T))$ ו$\mathrm{Im}(P(T))$ הם T־אינווריאנטים
הוכחה:
נסמן $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\cdot x^i, \deg(P) = n$,
תחילה נראה כי $\ker(P(T))$ הוא T־אינווריאנטי

$$v\in \ker(P(T)) \Rightarrow 0 = P(T)(v) = \sum_{i=0}^{n} a_i\cdot T^i(v)$$
$$\Rightarrow 0 = T(0) = T\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot T^i(v)\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i\cdot T^{i+1}(v) = \sum_{i=0}^{n} a_i\cdot T^i(T(v))$$
$$\Rightarrow T(v)\in \ker(P(T))$$

כלומר הראנו כי $\forall v \in \ker(P(T))$ מתקיים כי $T(v) \in \ker(P(T))$, כלומר $\ker(P(T))$ הוא T-אינווריאנטי.
עתה נראה כי $\operatorname{Im}(P(T))$ הוא T-אינווריאנטי

$$v \in \operatorname{Im}(P(T)) \Rightarrow (\exists u \in V)(P(T)(u) = v) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot T^i(u) = v$$
$$\Rightarrow T(v) = T\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot T^i(u)\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot T^{i+1}(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot T^i(T(u)) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot T^i(T(v)) = P(T)(v)$$
$$\Rightarrow T(v) \in \operatorname{Im}(P(T))$$

כלומר הראנו כי $\forall v \in \operatorname{Im}(P(T))$ מתקיים כי $T(v) \in \operatorname{Im}(P(T))$, כלומר $\operatorname{Im}(P(T))$ הוא T-אינווריאנטי.

מ.ש.ל.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\ker T^i \subseteq \ker T^{i+1}$
הוכחה:

$$v \in \ker T^i \Rightarrow T^i(v) = 0 \Rightarrow 0 = T(0) = T\left(T^i(v)\right) = T^{i+1}(v) \Rightarrow v \in \ker T^{i+1}$$

כלומר הראנו כי $\forall v \in \ker T^i$ מתקיים כי $v \in \ker T^{i+1}$, כלומר $\boxed{\ker T^i \subseteq \ker T^{i+1}}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\operatorname{Im}T^{i+1} \subseteq \operatorname{Im}T^i$
הוכחה:

$$v \in \operatorname{Im}T^{i+1} \Rightarrow (\exists u \in V)\left(T^{i+1}(u) = v\right) \Rightarrow v = T^{i+1}(u) = T^i(T(u)) \overset{T(u)\in V}{\Rightarrow} v \in \operatorname{Im}T^i$$

כלומר הראנו כי $\forall v \in \operatorname{Im}T^{i+1}$ מתקיים כי $v \in \operatorname{Im}T^i$, כלומר $\boxed{\operatorname{Im}T^{i+1} \subseteq \operatorname{Im}T^i}$

מ.ש.ל.ב.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\operatorname{Im}T^{i+1} = \operatorname{Im}T^i$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי V נוצר סופית (כי לא צוין אחרת),
עתה נשים לב משאלה 4 סעיף א' מתקיים $\ker T^i \subseteq \ker T^{i+1}$, לכן $0 \le \dim\ker T^n \le \dim\ker T^{n-1} \le \cdots \le \dim\ker T$, לכן $1 \le \exists i \le n$, כך ש$\dim\ker T^i = \dim\ker T^{i+1}$,
בלינארית 1 הוכחנו שאם $U \subseteq V$ וגם $\dim U = \dim V$ אזי $U = V$, לכן מתקיים כי $\boxed{\ker T^{i+1} = \ker T^i}$
עתה ממשפט המימדים מתקיים

$$\dim\left(\ker T^{i+1}\right) + \dim\left(\operatorname{Im}T^{i+1}\right) = \dim V = \dim\left(\ker T^i\right) + \dim\left(\operatorname{Im}T^i\right)$$
$$\Rightarrow \dim\left(\operatorname{Im}T^i\right) - \dim\left(\operatorname{Im}T^{i+1}\right) = \dim\left(\ker T^{i+1}\right) - \dim\left(\ker T^i\right) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\dim\left(\operatorname{Im}T^i\right) = \dim\left(\operatorname{Im}T^{i+1}\right)}$$

נשים לב שמשאלה 4 סעיף ב' אנחנו יודעים כי מתקיים $\boxed{\operatorname{Im}T^{i+1} \subseteq \operatorname{Im}T^i}$,
בלינארית 1 הוכחנו שאם $U \subseteq V$ וגם $\dim U = \dim V$ אזי $U = V$, לכן מתקיים כי $\boxed{\operatorname{Im}T^{i+1} = \operatorname{Im}T^i}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\ker T^{i+1}=\ker T^{i+2}$
הוכחה:
נשים לב כי משאלה 4 סעיף א' אנחנו יודעים כי $\ker T^{i+1}\subseteq\ker T^{i+2}$, עתה נראה כיוון הפוך:

$$v\in\ker T^{i+2}\Rightarrow 0=T^{i+2}(v)=T^{i+1}(T(v))\Rightarrow T(v)\in\ker T^{i+1}=\ker T^{i}$$
$$\Rightarrow T(v)\in\ker T^{i}\Rightarrow 0=T^{i}(T(v))=T^{i+1}(v)\Rightarrow v\in\ker T^{i+1}$$

כלומר הראנו כי $\forall v\in\ker T^{i+2}$ מתקיים כי $v\in\ker T^{i+1}$, כלומר $\ker T^{i+2}\subseteq\ker T^{i+1}$,
לכן $\ker T^{i+1}=\ker T^{i+2}$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\ker T^{i}=\ker T^{i+j}$
הוכחה:
נוכיח באינדוקציה את נכונות הטענה,
<u>בסיס:</u> עבור $j=1$, ראינו מסעיף א' כי מתקיים $\ker T^{i}=\ker T^{i+1}=\ker T^{i+j}$ כנדרש,
עבור $j=2$, מתקיים כי מסעיף ב' $\ker T^{i}=\ker T^{i+1}=\ker T^{i+2}$ כנדרש
<u>צעד:</u> נניח כי הטענה נכונה לכל $2<k<j$ ונראה שהיא נכונה לj,
נשים לב כי הטענה נכונה ל$j-1,j-2$ ולכן $\ker T^{i+j-1}=\ker T^{i}=\ker T^{i+j-2}$,
עתה נשים לב כי משאלה 4 סעיף א' אנחנו יודעים כי $\ker T^{i+j-1}\subseteq\ker T^{i+j}$, עתה נראה כיוון הפוך:

$$v\in\ker T^{i+j}\Rightarrow 0=T^{i+j}(v)=T^{i+j-1}(T(v))\Rightarrow T(v)\in\ker T^{i+j-1}=\ker T^{i+j-2}$$
$$\Rightarrow T(v)\in\ker T^{i+j-1}\Rightarrow 0=T^{i+j-2}(T(v))=T^{i+j-1}(v)\Rightarrow v\in\ker T^{i++j-1}$$

כלומר הראנו כי $\forall v\in\ker T^{i+j}$ מתקיים כי $v\in\ker T^{i+j-1}$, כלומר $\ker T^{i+j}\subseteq\ker T^{i+j-1}$,
לכן

$$\ker T^{i+j-1}=\ker T^{i+j}\Rightarrow\boxed{\ker T^{i}\overset{\text{induction}}{=}\ker T^{i+j-1}=\ker T^{i+j}}$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\mathrm{Im}T^{i}=\mathrm{Im}T^{i+j}$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי V נוצר סופית (כי לא צוין אחרת),
לכן מסעיף ג' מתקיים $\ker T^{i}=\ker T^{i+j}$,עתה ממשפט המימדים מתקיים

$$\dim\left(\ker T^{i+j}\right)+\dim\left(\mathrm{Im}T^{i+j}\right)=\dim V=\dim\left(\ker T^{i}\right)+\dim\left(\mathrm{Im}T^{i}\right)$$
$$\Rightarrow\dim\left(\mathrm{Im}T^{i}\right)-\dim\left(\mathrm{Im}T^{i+j}\right)=\dim\left(\ker T^{i+j}\right)-\dim\left(\ker T^{i}\right)=0$$
$$\Rightarrow\boxed{\dim\left(\mathrm{Im}T^{i}\right)=\dim\left(\mathrm{Im}T^{i+j}\right)}$$

נשים לב שמשאלה 4 סעיף ב' אנחנו יודעים כי מתקיים $\boxed{\mathrm{Im}T^{i+j}\subseteq\mathrm{Im}T^{i+j-1}\subseteq\cdots\subseteq\mathrm{Im}T^{i+1}\subseteq\mathrm{Im}T^{i}}$,
בלינארית 1 הוכחנו שאם $U\subseteq V$ וגם $\dim U=\dim V$ אזי $U=V$, לכן מתקיים כי $\boxed{\mathrm{Im}T^{i+1}=\mathrm{Im}T^{i}}$

מ.ש.ל.ד.☺

6. **צ"ל:** $\mathrm{Im}Q(T)=\ker R(T)$
הוכחה:
תחילה מהיות $\gcd(R,Q)=1$, קיימים S,M כך ש$SR+MQ=1$, לכן $\boxed{SR=1-MQ}$
עתה יהי $v\in\ker R(T)$, אזי $R(T)(v)=0$, לכן

$$0=R(T)(v)=(S\cdot R)(T)(v)=(1-M\cdot Q)(T)(v)=v-Q(M(T)(v))$$
$$\Rightarrow v=Q(M(T)(v))$$

לכן מהיות $M(T)(v)\in V$, נובע כי $v\in \mathrm{Im}Q(T)$,
כלומר הראנו כי $\forall v\in\ker R(T)$ מתקיים $v\in \mathrm{Im}Q(T)$, לכן $\boxed{\ker R(T)\subseteq \mathrm{Im}Q(T)}$
עתה יהי $v\in \mathrm{Im}Q(T)$, אזי

$$0=P(T)(v)=(R\cdot Q)(T)(v)=R(Q(T(v)))$$

לכן מהיות $Q(T(v))\in V$, נובע כי $v\in\ker R(T)$,
כלומר הראנו כי $\forall v\in \mathrm{Im}Q(T)$ מתקיים $v\in\ker R(T)$, לכן $\boxed{\mathrm{Im}Q(T)\subseteq \ker R(T)}$,
לכן

$$\boxed{\mathrm{Im}Q(T)=\ker R(T)}$$

מ.ש.ל.☺

7. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\gcd\left((x-\lambda)^{l},(x-\lambda')^{l'}\right)=1$
הוכחה:
נשים לב כי

$$1\overset{\lambda-\lambda'\neq0}{=}\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda'-\lambda}=\frac{x-\lambda-(x-\lambda')}{\lambda'-\lambda}=\frac{x-\lambda}{\lambda'-\lambda}-\frac{x-\lambda'}{\lambda'-\lambda}=\frac{x-\lambda}{\lambda'-\lambda}+\frac{x-\lambda'}{\lambda-\lambda'}$$

כלומר $\gcd(x-\lambda,x-\lambda')=1$, עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}1=1^{l+l'-1}&=\left(\frac{x-\lambda}{\lambda'-\lambda}+\frac{x-\lambda'}{\lambda-\lambda'}\right)^{l+l'-1}=\sum_{k=0}^{l+l'-1}\binom{l+l'-1}{k}\left(\frac{x-\lambda}{\lambda'-\lambda}\right)^{k}\cdot\left(\frac{x-\lambda'}{\lambda-\lambda'}\right)^{l+l'-1-k}\\&=\sum_{k=0}^{l-1}\binom{l+l'-1}{k}\left(\frac{x-\lambda}{\lambda'-\lambda}\right)^{k}\cdot\left(\frac{x-\lambda'}{\lambda-\lambda'}\right)^{l+l'-1-k}+\sum_{k=l}^{l+l'-1}\binom{l+l'-1}{k}\left(\frac{x-\lambda}{\lambda'-\lambda}\right)^{k}\cdot\left(\frac{x-\lambda'}{\lambda-\lambda'}\right)^{l+l'-1-k}\\&=(x-\lambda')^{l'}\cdot\left[\sum_{k=0}^{l-1}\binom{l+l'-1}{k}\left(\frac{x-\lambda}{\lambda'-\lambda}\right)^{k}\cdot\left(\frac{x-\lambda'}{\lambda-\lambda'}\right)^{l-1-k}\right]\\&+(x-\lambda)^{l}\cdot\left[\sum_{k=l}^{l+l'-1}\binom{l+l'-1}{k}\left(\frac{x-\lambda}{\lambda'-\lambda}\right)^{k-l}\cdot\left(\frac{x-\lambda'}{\lambda-\lambda'}\right)^{l+l'-1-k}\right]\end{aligned}$$

כלומר אם נסמן

$$\sum_{k=0}^{l-1}\binom{l+l'-1}{k}\left(\frac{x-\lambda}{\lambda'-\lambda}\right)^{k}\cdot\left(\frac{x-\lambda'}{\lambda-\lambda'}\right)^{l-1-k}=M(x)$$

$$\sum_{k=l}^{l+l'-1}\binom{l+l'-1}{k}\left(\frac{x-\lambda}{\lambda'-\lambda}\right)^{k-l}\cdot\left(\frac{x-\lambda'}{\lambda-\lambda'}\right)^{l+l'-1-k}=S(x)$$

נקבל כי

$$1=M(x)\cdot(x-\lambda)^{l}+S(x)\cdot(x-\lambda')^{l'}\Rightarrow\boxed{\gcd\left((x-\lambda)^{l},(x-\lambda')^{l'}\right)=1}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\ker\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{l'}=\operatorname{Im}\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l}$

הוכחה:

נסמן $Q=\left(x-\lambda\right)^{l}$, $R=\left(x-\lambda'\right)^{l'}$, מסעיף א' מתקיים $\gcd\left(R,Q\right)=1$ וגם $P=R\cdot Q$,
וגם $P\left(T\right)=0$, (ממשפט קיילי המילטון)
לכן משאלה 6 מתקיים $\ker\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{l'}=\ker\left(R\right)=\operatorname{Im}\left(Q\right)=\operatorname{Im}\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l}$, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\ker\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l}=\ker\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l+1}$

הוכחה:

עתה אנחנו יודעים כי $0=p\left(T\right)=\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l}\cdot\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{l'}$,
וגם מתקיים מסעיף א' $\gcd\left(\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l},\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{l'}\right)=1$, לכן מטענה 3.12 בתרגול 6 מתקיים

$$V=\ker\left(\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l}\right)\oplus\ker\left(\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{l'}\right)$$

וגם מתקיים $0=p\left(T\right)\cdot\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)=\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l+1}\cdot\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{l'}$,
וגם מתקיים מסעיף א' $\gcd\left(\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l+1},\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{l'}\right)=1$, לכן מטענה 3.12 בתרגול 6 מתקיים

$$V=\ker\left(\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l+1}\right)\oplus\ker\left(\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{l'}\right)$$

כלומר מתקיים

$$v\in\ker\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l+1}\Leftrightarrow v\notin\ker\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{l'}\Leftrightarrow v\in\ker\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l}$$

לכן $\boxed{\ker\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l+1}=\ker\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l}}$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $g\left(T\right)=0$

הוכחה:

עתה אנחנו יודעים כי $0=p\left(T\right)=\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l}\cdot\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{l'}$,
וגם מתקיים מסעיף א' $\gcd\left(\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l},\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{l'}\right)=1$, לכן מטענה 3.12 בתרגול 6 מתקיים

$$V=\ker\left(\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{l}\right)\oplus\ker\left(\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{l'}\right)\overset{\text{def}}{=}\ker\left(\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{h}\right)\oplus\ker\left(\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{h'}\right)$$

עתה יהי $v\in V$, אזי:

- אם $v\in\ker\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{h}$ אזי

$$g\left(T\right)\left(v\right)=\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{h'}\left(\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{h}\left(v\right)\right)=\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{h'}\left(0\right)=0$$

- אחרת $v\in\ker\left(\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{h'}\right)$ אזי

$$g\left(T\right)\left(v\right)=\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{h}\left(\left(T-\lambda'\cdot Id_V\right)^{h'}\left(v\right)\right)=\left(T-\lambda\cdot Id_V\right)^{h}\left(0\right)=0$$

כלומר $g\left(T\right)\left(v\right)=0$, $\forall v\in V$, לכן $\boxed{g\left(T\right)=0}$

מ.ש.ל.ד.☺

8. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\ker T^k = \operatorname{span}\{e_{n-k+1},\dots,e_n\}$

הוכחה:

יהי $v \in \ker T^k$ אזי $\exists a_1,\dots,a_n \in \mathbb{F}$ כך ש$v = \sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i$,

נשים לב כי T^k עושה יוצר את השרשרת הבאה $0 \to e_1 \to e_2 \to e_3 \to \dots \to e_n$ לכן

$$0 = T^k(v) = T^k\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot T^k(e_i) = \sum_{i=1}^{n-k} a_i \cdot e_{i+k} + 0 = \sum_{i=1}^{n-k} a_i \cdot e_{i+k}$$

לכן מהיות $e_{k+1},\dots e_n$ בת"ל מתקיים כי $a_1 = \dots = a_{n-k} = 0$,

כלומר $v = \sum_{i=n-k+1}^n a_i \cdot e_i \in \operatorname{span}\{e_{n-k+1},\dots,e_n\}$, כלומר $\boxed{\ker T^k \subseteq \operatorname{span}\{e_{n-k+1},\dots,e_n\}}$

עתה יהי $v \in \operatorname{span}\{e_{n-k+1},\dots,e_n\}$, אזי $\exists a_{n-k+1},\dots,a_n \in \mathbb{F}$ כך ש$v = \sum_{i=n-k+1}^n a_i \cdot e_i$, לכן

$$T^k(v) = T^k\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot T^k(e_i) = 0 \Rightarrow v \in \ker T^k$$

כלומר $\boxed{\operatorname{span}\{e_{n-k+1},\dots,e_n\} \subseteq \ker T^k}$, לכן $\boxed{\ker T^k = \operatorname{span}\{e_{n-k+1},\dots,e_n\}}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** בסיס ל$\mathrm{Im}T^k$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי

$$\dim\left(\ker T^k\right) = \dim\left(\operatorname{span}\{e_{n-k+1},\dots,e_n\}\right) = k$$

עתה ממשפט המימדים מתקיים

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \dim\left(\mathrm{Im}T^k\right) + \dim\left(\ker T^k\right) = \dim\left(\mathrm{Im}T^k\right) + k$$
$$\Rightarrow \boxed{\dim\left(\mathrm{Im}T^k\right) = n-k}$$

עתה נשים לב כי $T(e_i) = e_{i+k}$, $1 \le \forall i \le n-k$, כלומר $e_{k+1},\dots,e_n \in \mathrm{Im}T^k$

בנוסף לכך, מתקיים כי $e_{k+1},\dots,e_n$ הם $n-k$ וקטורים בת"ל במרחב ממימד $n-k$,

לכן $e_{k+1},\dots,e_n$ הינו בסיס ל$\mathrm{Im}T^k$

מ.ש.ל.ב.☺

9. **צ"ל:** $T^n = 0$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי

$$T(e_i) = \sum_{j=i+1}^n a_{j,i} \cdot e_j$$

נוכיח באינדוקציה כי $\mathrm{Im}T^i \subseteq \operatorname{span}\{e_{i+1},\dots,e_n\}$

<u>בסיס:</u> $i=1$, יהי $v \in V$, אזי $\exists b_1,\dots,b_n \in \mathbb{F}$ כך ש$v = \sum_{i=1}^n b_i \cdot e_i$, ולכן

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^n b_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^n b_i \cdot T(e_i) = \sum_{i=1}^n b_i \cdot \left[\sum_{j=i+1}^n a_{j,i} \cdot e_j\right]$$
$$= \sum_{j=2}^n \left[\sum_{i=1}^{j-1} b_i \cdot a_{j,i}\right] \cdot e_j \in \operatorname{span}\{e_2,\dots,e_n\}$$

כלומר $\mathrm{Im}T^{1}\subseteq\operatorname{span}\left\{e_{1+1},\dots,e_{n}\right\}$, כלומר הטענה נכונה ל$i=1$
צעד: נניח שהטענה נכונה ל$i-1$ ונוכיח לi,
יהי $v\in V$, מהיות $\mathrm{Im}T^{i-1}\subseteq\operatorname{span}\left\{e_{i},\dots,e_{n}\right\}$, אזי $\exists b_{i},\dots,b_{n}\in\mathbb{F}$ כך ש$T^{i-1}\left(v\right)=\sum_{k=1}^{n}b_{k}\cdot e_{k}$, ולכן

$$\begin{aligned}T^{i}\left(v\right)=T\left(T^{i-1}\left(v\right)\right)=T\left(\sum_{k=1}^{n}b_{k}\cdot e_{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}b_{k}\cdot T\left(e_{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}b_{k}\cdot\left[\sum_{j=k+1}^{n}a_{j,k}\cdot e_{j}\right]\\=\sum_{j=i+1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{j-1}b_{k}\cdot a_{j,k}\right]\cdot e_{j}\in\operatorname{span}\left\{e_{i+1},\dots,e_{n}\right\}\end{aligned}$$

כלומר $\mathrm{Im}T^{i}\subseteq\operatorname{span}\left\{e_{1+1},\dots,e_{n}\right\}$, כלומר הטענה נכונה ל$i$,
לכן $T^{n-1}\subseteq\operatorname{span}\left\{e_{n}\right\}$,
יהי $v\in V$, מהיות $\mathrm{Im}T^{n-1}\subseteq\operatorname{span}\left\{e_{n}\right\}$, אזי $\exists b\in\mathbb{F}$ כך ש$T^{n-1}\left(v\right)=b\cdot e_{n}$, ולכן

$$T^{n}\left(v\right)=T\left(T^{n-1}\left(v\right)\right)=T\left(b\cdot e_{n}\right)=0$$

לכן $\forall v\in V$ מתקיים $T^{n}\left(v\right)=0$, כלומר $\boxed{T^{n}=0}$

מ.ש.ל.☺