אלגברה לינארית (2) תשע"ט 2018-2019 - סמסטר ב׳ - תרגיל 12

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז. יש לציין כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל. סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 12.6.19 בשעה 21:00.

1. נתבונן ב- $M_2(\mathbb{R})$ עם מכפלה פנימית $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ המוגדרת ע"י $\langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr}(A^t B)$.
חשבו את ההטלה האורתוגונלית של $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ על $\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ ביחס ל- $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

2. יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{F}$. תהי $T : V \to V$ איזומטריה, כלומר: לכל $u, v \in V$ מתקיים $\langle T(v) \mid T(u) \rangle = \langle v \mid u \rangle$.
בהרצאה הראיתם ש-T בהכרח הומוגנית (כלומר שלכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$ מתקיים $T(\alpha v) = \alpha T(v)$).
הראו כי T גם אדיטיבית (כלומר, שלכל $u, v \in V$ מתקיים: $T(u+v) = T(u) + T(v)$).

3. תהי $T : U \to V$ איזומטריה . הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
(א) T חח"ע.
(ב) אם $\dim U < \infty$ אזי T הפיכה.
(ג) אם $\dim V < \infty$ אזי T הפיכה.
(ד) אם $\dim U = \dim V < \infty$ אז T הפיכה.

4. יהי V ממ"פ ו- U, W תת-מרחבים של V ממימד סופי כך ש- W מוכל ב- $U^\perp$.
יהי $v \in V$ ו- u ו- w ההטלות האורתוגונליות של v על U ועל W בהתאמה. הוכיחו כי $||v||^2 \geqslant ||u||^2 + ||w||^2$.

5. יהי V ממ"פ ממימד סופי ו- U תת-מרחב של V .
נגדיר את $R_U\colon V \to V$ באופן הבא: $R_U(v) = u - w$ כאשר u ו- w ההטלות האורתוגונליות של v על U ועל $U^\perp$ בהתאמה.
(א) הוכיחו כי R_U הוא $r_{U,U^\perp}$, כלומר השיקוף דרך U במקביל ל- $U^\perp$ (תרגיל 1, שאלה 7).
(ב) הוכיחו כי $||R_U(v)|| = ||v||$ לכל $v \in V$.
(ג) הוכיחו כי $\langle R_U(v_1) \mid R_U(v_2) \rangle = \langle v_1 \mid v_2 \rangle$ לכל $v_1, v_2 \in V$.

6. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ ו- $S\colon V \to V$, $T\colon V \to V$ אופרטורים אורתוגונליים.
אלו מהטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
(א) האופרטור $-T$ הנו אורתוגונלי.
(ב) לכל $0 \neq c \in \mathbb{R}$, האופרטור cT הנו אורתוגונלי.
(ג) האופרטור $S + T$ הנו אורתוגונלי.
(ד) האופרטור $S \circ T$ הנו אורתוגונלי.

7. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ בסיס אורתונורמלי של V ו- $T\colon V \to V$ אופרטור לינארי.
אלו מהטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
(א) אם $||T(b_i)|| = 1$ לכל $1 \leqslant i \leqslant n$, אז T הנו אורתוגונלי.
(ב) אם לכל $v_1, v_2 \in V$ כך ש- $\langle v_1 \mid v_2 \rangle = 0$, מתקיים כי $\langle T(v_1) \mid T(v_2) \rangle = 0$, אז T הנו אורתוגונלי.
(ג) אם לכל $v_1, v_2 \in V$ כך ש- $\langle v_1 \mid v_2 \rangle = 0$, מתקיים כי $\langle T(v_1) \mid T(v_2) \rangle = 0$ וגם $||T(b_1)|| = 1$, אז T הנו אורתוגונלי.

8. לכל $\theta \in \mathbb{R}$ נסמן - $A_1(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ו- $A_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.
מצאו $i \in \{1,2\}$ ו- $\theta \in \mathbb{R}$ תלויים ב- $\alpha \in \mathbb{R}$ ו- $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים
(א) $A_i(\theta) = A_1(\alpha)^n$
(ב) $A_i(\theta) = A_2(\alpha)^n$
(ג) $A_i(\theta) = A_1(\alpha)A_2(\alpha)$
(ד) $A_i(\theta) = A_2(\alpha)A_1(\alpha)$
(ה) $A_i(\theta) = A_2(\alpha)A_1(\alpha)A_2(\alpha)^{-1}$
(ו) $A_i(\theta) = A_1(\alpha)A_2(\alpha)A_1(\alpha)^{-1}$

9. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ כך ש- $\dim V = 3$, $T\colon V \to V$ אופרטור אורתוגונלי כך ש- $\det(T) = -1$.
הוכיחו כי -1 הוא ערך עצמי של T .