פתרון תרגיל מספר 10 ־ כלים מתמטיים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

3 בינואר 2021

1. **צ"ל:** $C_n = \mathbf{conv}\left(\{0,1\}^n\right)$
הוכחה:
יהי $x \in C_n$, יהיו $i_1, \dots, i_n$ כך שיתקיים $x_{i_1} \le x_{i_2} \le \dots \le x_{i_n}$ ולכן מתקיים $0 \le x_{i_1} \le x_{i_2} \le \dots \le x_{i_n} \le 1$.
נגדיר $A_i = \{j \mid x_j \ge x_i\}$,
נסתכל על

$$y = x_{i_1} \cdot 1_{A_{i_1}} + \sum_{j=2}^{n} \left(x_{i_j} - x_{i_{j-1}}\right) \cdot 1_{A_{i_j}} + (1 - x_{i_n}) \cdot 0_n$$

תחילה נשים לב כי $0 \le x_{i_1} \le 1$ וגם $0 \le 1 - x_{i_n} \le 1$ וגם $0 \le x_{i_j} - x_{i_{j-1}} \le 1$ בגלל שאנחנו מסתכלים עליהם ממוינים.
וגם נשים לב ש־ $1_{A_{i_j}}, 0_n$ הם וקטורים ב־ $\{0,1\}^n$ וכל אחד מופיע בביטוי פעם אחת, נראה שסכום המקדמים הוא 1 ונסיק כי $y \in \text{conv}\left(\{0,1\}^n\right)$,
נשים לב שסכום המקדמים הוא בדיוק

$$x_{i_1} + \sum_{j=2}^{n} \left(x_{i_j} - x_{i_{j-1}}\right) + (1 - x_{i_n}) = x_{i_1} + (x_{i_n} - x_{i_1}) + (1 - x_{i_n}) = (x_{i_n} - x_{i_1}) + (1 - x_{i_n}) = 1$$

ולכן $y \in \text{conv}\left(\{0,1\}^n\right)$,
יהי $1 \le k \le n$: נסתכל על 2 המקרים הבאים:

(א) אם $k = 1$ אז נשים לב כי

$$\begin{aligned}
y_{i_k} = y_{i_1} &= \left[x_{i_1} \cdot 1_{A_{i_1}} + \sum_{j=2}^{n} \left(x_{i_j} - x_{i_{j-1}}\right) \cdot 1_{A_{i_j}} + (1 - x_{i_n}) \cdot 0_n\right]_{i_1} \\
&= x_{i_1} \cdot \left[1_{A_{i_1}}\right]_{i_1} + \sum_{j=2}^{n} \left(x_{i_j} - x_{i_{j-1}}\right) \cdot \left[1_{A_{i_j}}\right]_{i_1} + (1 - x_{i_n}) \cdot [0_n]_{i_1} \\
&= x_{i_1} \cdot 1 + \sum_{j=2}^{n} \left(x_{i_j} - x_{i_{j-1}}\right) \cdot 1_{i_1 \in A_{i_j}} + (1 - x_{i_n}) \cdot 0 \\
&\overset{\star}{=} x_{i_1} \cdot 1 + \sum_{j=2}^{n} \left(x_{i_j} - x_{i_{j-1}}\right) \cdot 0 + (1 - x_{i_n}) \cdot 0 = x_{i_1} = x_{i_k}
\end{aligned}$$

אבחנה $\star$: אם $i_1 \in A_{i_j}$ אז $x_{i_j} - x_{i_1} = 0$ ולכן גם $x_{i_j} - x_{i_{j-1}} = 0$ ממונוטוניות ולכן הביטוי עדיין יוצא 0 בסיגמה.

(ב) אם $2 \le k \le n$ נשים לב כי

$$\begin{aligned}
y_{i_k} &= \left[x_{i_1} \cdot 1_{A_{i_1}} + \sum_{j=2}^{n} \left(x_{i_j} - x_{i_{j-1}}\right) \cdot 1_{A_{i_j}} + (1 - x_{i_n}) \cdot 0_n\right]_{i_k} \\
&= x_{i_1} \cdot \left[1_{A_{i_1}}\right]_{i_k} + \sum_{j=2}^{n} \left(x_{i_j} - x_{i_{j-1}}\right) \cdot \left[1_{A_{i_j}}\right]_{i_k} + (1 - x_{i_n}) \cdot [0_n]_{i_k} \\
&= x_{i_1} \cdot \left[1_{A_{i_1}}\right]_{i_k} + \sum_{j=2}^{k} \left(x_{i_j} - x_{i_{j-1}}\right) \cdot \left[1_{A_{i_j}}\right]_{i_k} + \sum_{j=k+1}^{n} \left(x_{i_j} - x_{i_{j-1}}\right) \cdot \left[1_{A_{i_j}}\right]_{i_k} + (1 - x_{i_n}) \cdot [0_n]_{i_k} \\
&= x_{i_1} \cdot 1 + \sum_{j=2}^{k} \left(x_{i_j} - x_{i_{j-1}}\right) \cdot 1_{i_k \in A_{i_j}} + \sum_{j=k+1}^{n} \left(x_{i_j} - x_{i_{j-1}}\right) \cdot 1_{i_k \in A_{i_j}} + (1 - x_{i_n}) \cdot 0 \\
&\overset{\star}{=} x_{i_1} \cdot 1 + \sum_{j=2}^{k} \left(x_{i_j} - x_{i_{j-1}}\right) \cdot 1 + \sum_{j=k+1}^{n} \left(x_{i_j} - x_{i_{j-1}}\right) \cdot 0 + (1 - x_{i_n}) \cdot 0 \\
&= x_{i_1} + \sum_{j=2}^{k} \left(x_{i_j} - x_{i_{j-1}}\right) = x_{i_k}
\end{aligned}$$

אבחנה $\star$: אם $i_k \in A_{i_j}$ אז $x_{i_j} - x_{i_k} = 0$ ולכן גם $x_{i_j} - x_{i_{j-1}} = 0$ ממונוטוניות ולכן הביטוי עדיין יוצא 0 בסיגמה השנייה.

כלומר הראנו כי $y_{i_k} = x_{i_k}$ לכל $1 \le k \le n$ ומהיות i_k הוא רק מיפוי של אינדקסים, נסיק כי $y_k = x_k$ לכל $1 \le k \le n$.
ולכן $x = y$, וראינו כי $x = y \in \operatorname{conv}\left(\{0,1\}^n\right)$,
הראנו שלכל $x \in C_n$ מתקיים $x \in \operatorname{conv}\left(\{0,1\}^n\right)$ ולכן $\boxed{C_n \subseteq \operatorname{conv}\left(\{0,1\}^n\right)}$,
עתה יהי $x \in \operatorname{conv}\left(\{0,1\}^n\right)$, אזי $x = \sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i \cdot e_i$ עבור בסיס e_i הוא סידור של $\{0,1\}^n$ וגם $\sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i = 1$,
יהי $1 \le j \le n$, נשים לב כי $x_j = \left[\sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i \cdot e_i\right]_j \le \sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i \cdot 1 = 1$ וגם $x_j = \left[\sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i \cdot e_i\right]_j \ge \sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i \cdot 0 = 0$,
ולכן $0 \le x_j \le 1$ לכל $1 \le j \le n$ ולכן $x \in C_n$,
ולכן הראנו שלכל $x \in \operatorname{conv}\left(\{0,1\}^n\right)$ מתקיים $x \in C_n$ ולכן $\boxed{\operatorname{conv}\left(\{0,1\}^n\right) \subseteq C_n}$,
ולכן $\boxed{\operatorname{conv}\left(\{0,1\}^n\right) = C_n}$, כנדרש

מ.ש.ל.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** B_n הוא פוליטופ
הוכחה:
נסתכל על $\{-1,1\}^n = \{v_1, \ldots, v_{2^n}\}$,
נשים לב ש־ $\|x\|_1 \le 1$ אם"ם
$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \le 1$ אם"ם
$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(x_i) \cdot x_i \le 1$ אם"ם
$\sum_{i=1}^{n} [v_j]_i \cdot x_i \le 1$ לכל $1 \le j \le 2^n$ (הסיבה לנכונות המעבר היא ש $[v_j]_i \cdot x_i \le \operatorname{sign}(x_i) \cdot x_i$ לכל j ויש וקטור המקיים שהוא בדיוק $\operatorname{sign}(x)$ אם"ם
$\langle v_j, x \rangle \le 1$ לכל $1 \le j \le n$
כלומר הראנו כי $B_n = \{x \mid \|x\|_1 \le 1\} = \{x \mid 1 \le \forall j \le n \to \langle v_j, x \rangle \le 1\}$,
כלומר B_n הוא אוסף של אי שוויונות לינארים ולכן הוא פוליהדרון.
נשים לב כי B_n הוא גם חסום לפי ההגדרה הראשונה ולכן הוא פוליטופ.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $B_n = \mathbf{conv}\left(\pm e_1, \cdots \pm e_n\right)$

הוכחה:

יהי $x \in B_n$, אזי ניתן לייצגו כ־ $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i$ כאשר $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = \|x\|_1 \le 1$.

נסמן ב־ $\beta = 1 - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \ge 0$,

נשים לב כי

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \left(\mathrm{sign}\left(\alpha_i\right) \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \left(\mathrm{sign}\left(\alpha_i\right) \cdot e_i\right) + \frac{\beta}{2} \cdot e_1 + \frac{\beta}{2} \cdot \left(-e_1\right)$$

ולכן מתקיים כי הוא צירוף של $\{\mathrm{sign}\left(\alpha_i\right) \cdot e_i \mid 1 \le i \le n\} \cup \{\pm e_1\} \subseteq \{\pm e_1, \cdots \pm e_n\}$,

נשים לב כי המקדמים נסכמים ל־

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| + \beta = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| + 1 - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 1$$

וגם אי שליליים מהיות בערך מוחלט ו־ β אי שלילי.

ולכן $x \in \mathrm{conv}\left(\pm e_1, \cdots \pm e_n\right)$,

הראנו שלכל $x \in B_n$ מתקיים $x \in \mathrm{conv}\left(\pm e_1, \cdots \pm e_n\right)$ ולכן $\boxed{B_n \subseteq \mathrm{conv}\left(\pm e_1, \cdots \pm e_n\right)}$,

יהי $x \in \mathrm{conv}\left(\pm e_1, \cdots \pm e_n\right)$, לכן ניתן לייצגו כ־ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot e_i$ כאשר $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$ וגם $\alpha_i, \beta_i \ge 0$ לכל $1 \le i \le n$.

נשים לב כי

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i| \le \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| + |\beta_i| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$$

ולכן $x \in B_n$,

ולכן הראנו שלכל $x \in \mathrm{conv}\left(\pm e_1, \cdots \pm e_n\right)$ מתקיים $x \in B_n$ ולכן $\boxed{\mathrm{conv}\left(\pm e_1, \cdots \pm e_n\right) \subseteq B_n}$,

ולכן $\boxed{\mathrm{conv}\left(\pm e_1, \cdots \pm e_n\right) = B_n}$, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\mathbf{vertices}\left(B_n\right) = \{\pm e_1, \cdots \pm e_n\}$

הוכחה:

תחילה לפי שאלה 4 סעיף ב' מתקיים כי $\boxed{\mathrm{vertices}\left(B_n\right) \subseteq \{\pm e_1, \cdots \pm e_n\}}$,

יהי $1 \le j \le n$, נסתכל על $c = e_j$, נשים לב כי לכל $x \in B_n$ מתקיים $x_j \le 1$ ולכן

$$c^T \cdot x = c_j \cdot x_j \overset{\text{equality iff } x_j = 1}{\le} c_j = 1$$

נשים לב שאם $x_j = 1$ אז $x = e_j$ (בגלל ש־ $\|x\|_1 = 1$) ולכן הראנו שהמקסימום היחיד ל־ $c = e_j$ הוא e_j והוא גם ב־ B_n.

ולכן e_j קודקוד של B_n לכל $1 \le j \le n$.

יהי $1 \le j \le n$, נסתכל על $c = -e_j$, נשים לב כי לכל $x \in B_n$ מתקיים $x_j \ge -1$ ולכן

$$c^T \cdot x = c_j \cdot x_j \overset{\text{equality iff } x_j = -1}{\le} -c_j = 1$$

נשים לב שאם $x_j = -1$ אז $x = -e_j$ (בגלל ש־ $\|x\|_1 = 1$) ולכן הראנו שהמקסימום היחיד ל־ $c = -e_j$ הוא $-e_j$ והוא גם ב־ B_n.

ולכן $-e_j$ קודקוד של B_n לכל $1 \le j \le n$.

כלומר הראנו כי $\boxed{\{\pm e_1, \cdots \pm e_n\} \subseteq \mathrm{vertices}\left(B_n\right)}$ ולכן $\boxed{\{\pm e_1, \cdots \pm e_n\} = \mathrm{vertices}\left(B_n\right)}$, כנדרש.

מ.ש.ל.ג.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\textbf{vertices}\left(\Delta_n\right)=\left\{e_i \mid 1\leq i\leq n+1\right\}$

הוכחה:

יהי $1\leq j\leq n+1$, נסתכל על $c=e_j$,

יהי $x\in\Delta_n$ לכן נוכל לכתוב אותו כ־ $x=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\cdot e_i$ כאשר $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1$ ו־ $0\leq\alpha_i\leq 1$ לכל $1\leq i\leq n+1$.

נשים לב כי

$$x=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\cdot c_i=\alpha_j\cdot c_j=\alpha_j\overset{\text{equality iff }\alpha_j=1}{\leq}1$$

נשים לב שבשוויון $\alpha_j=1$ ואז מהדרישה $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ נסיק כי

$$\alpha_1=\cdots=\alpha_{j-1}=\alpha_{j+1}=\cdots=\alpha_{n+1}=0,\alpha_j=1$$

כלומר $x=e_j$, ולכן מקסימום יחיד עבור $c=e_j$ מתקבל כאשר $x=e_j$ ולכן קודקוד של Δ_n.

כלומר e_j הוא קודקוד של Δ_n לכל $1\leq j\leq n+1$.

כלומר הראנו כי $\boxed{\left\{e_i \mid 1\leq i\leq n+1\right\}\subseteq\text{vertices}\left(\Delta_n\right)}$

עתה נראה שאלו כל הקודקודים.

יהי $v\in\text{vertices}\left(\Delta_n\right)$ קודקוד, אזי קיים c כך ש־ c^Tx מקבל מקסימום יחיד ב־ v.

נכתוב $v=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\cdot e_i$ כאשר $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ ו־ $0\leq\alpha_i\leq 1$ לכל $1\leq i\leq n+1$.

נסמן $j=\text{argmax}_{1\leq i\leq n}c_i$, נשים לב כי

$$c^T\cdot v=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\cdot c_i\leq\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\cdot\max_{1\leq i\leq n}c_i=\max_{1\leq i\leq n}c_i\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=\max_{1\leq i\leq n}c_i=c_j=c_j\cdot 1=c^T\cdot e_j$$

ולכן קיבלנו $c^T\cdot v\leq c^T\cdot e_j$ אבל מיחידות המקסימום נסיק כי $v=e_j$,

כלומר הראנו כי $\boxed{\text{vertices}\left(\Delta_n\right)\subseteq\left\{e_i \mid 1\leq i\leq n+1\right\}}$,

ולכן $\boxed{\text{vertices}\left(\Delta_n\right)=\left\{e_i \mid 1\leq i\leq n\right\}}$, כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\Delta_n=\textbf{conv}\left(\left\{e_i \mid 1\leq i\leq n+1\right\}\right)$

הוכחה:

יהי $x\in\Delta_n$ אז נוכל לכתוב $x=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\cdot e_i$ כאשר $\sum_{i=1}^{n+1}x_i=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1$ ו־ $0\leq\alpha_i\leq 1$ לכל $1\leq i\leq n+1$.

נשים לב שלפי הגדרה מתקיים $x\in\text{conv}\left(\left\{e_i \mid 1\leq i\leq n+1\right\}\right)$ כי כל המקדמים הם בין 0 ל־ 1 ונסכמים ל־ 1 וגם משתמשים רק באיברי הקבוצה.

הראנו שלכל $x\in\Delta_n$ מתקיים $x\in\text{conv}\left(\left\{e_i \mid 1\leq i\leq n+1\right\}\right)$,

ולכן $\boxed{\Delta_n\subseteq\text{conv}\left(\left\{e_i \mid 1\leq i\leq n+1\right\}\right)}$,

יהי $x\in\text{conv}\left(\left\{e_i \mid 1\leq i\leq n+1\right\}\right)$, נוכל לכתוב $x=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\cdot e_i$ כאשר $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1$ וכל המקדמים בין 0 ל־ 1.

נשים לב כי $\sum_{i=1}^{n+1}x_i=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1$ וגם $0\leq x_i=\alpha_i\leq 1$ לכל $1\leq i\leq n$ ולכן $x\in\Delta_n$.

ולכן הראנו שלכל $x\in\text{conv}\left(\left\{e_i \mid 1\leq i\leq n+1\right\}\right)$ מתקיים $x\in\Delta_n$,

ולכן $\boxed{\text{conv}\left(\left\{e_i \mid 1\leq i\leq n+1\right\}\right)\subseteq\Delta_n}$,

ולכן $\boxed{\text{conv}\left(\left\{e_i \mid 1\leq i\leq n+1\right\}\right)=\Delta_n}$, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\textbf{conv}\left(S\right)$ הוא $face$

הוכחה:

תהי $S\subseteq V$, נסתכל על הוקטור הבא $\left[1_S\right]_i=\begin{cases}1 & e_i\in S\\ 0 & e_i\notin S\end{cases}$,

נגדיר $H\left(1_S,1\right)=\left\{x \mid \left\langle 1_S,x\right\rangle=1\right\}$

יהי $x \in \Delta_n$ אז נוכל לכתוב $x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot e_i$ כאשר $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$ ו־ $0 \leq \alpha_i \leq 1$ לכל $1 \leq i \leq n+1$.
נשים לב כי

$$\langle 1_S, x \rangle = \left\langle 1_S, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot \langle 1_S, e_i \rangle = \sum_{e_i \in S} \alpha_i \cdot 1 + \sum_{i \notin S} \alpha_i \cdot 0 = \sum_{e_i \in S} \alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$$

ולכן אם נסתכל על $HS(1_S, 1) = \{x \mid \langle 1_S, x \rangle \leq 1\}$ נקבל כי $x \in HS(1_S, 1)$.
כלומר לכל $x \in \Delta_n$ מתקיים $x \in HS(1_S, 1)$ ולכן $\boxed{\Delta_n \subseteq HS(1_S, 1)}$,
ולכן $HS(1_S, 1)$ הוא מישור שכל הפוליטופ נמצא מצד אחד שלו,
וגם נשים לב כי $e_1 \in \Delta_n \subseteq HS(1_S, 1)$ ולכן $e_1 \in \Delta_n \cap HS(1_S, 1)$ ולכן $\Delta_n \cap HS(1_S, 1) \neq \emptyset$.
כלומר $H(1_S, 1)$ הוא supporting hyperplane, ולכן $\Delta_n \cap H(1_S, 1)$ הוא face.
יהי $x \in \text{conv}(S) \subseteq \text{conv}(\text{vertices}(\Delta_n))$, כלומר ניתן לייצג את $x = \sum_{e_i \in S} \alpha_i \cdot e_i$ כאשר $\sum_{e_i \in S} \alpha_i = 1$ וגם $0 \leq \alpha_i \leq 1$.
נשים לב כי

$$\langle 1_S, x \rangle = \left\langle 1_S, \sum_{e_i \in S} \alpha_i \cdot e_i \right\rangle = \sum_{e_i \in S} \alpha_i \cdot \langle 1_S, e_i \rangle = \sum_{e_i \in S} \alpha_i \cdot 1 = 1$$

ולכן $x \in H(1_S, 1)$, כלומר $x \in \Delta_n \cap H(1_S, 1)$, כלומר $\boxed{\text{conv}(S) \subseteq \Delta_n \cap H(1_S, 1)}$,
יהי $x \in \Delta_n \cap H(1_S, 1)$, מהיות $x \in \Delta_n$ ניתן לייצג את $x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot e_i$ כאשר $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$ וגם $0 \leq \alpha_i \leq 1$ לכל $1 \leq i \leq n+1$.
נשים לב כי מהיות $x \in H(1_S, 1)$ מתקיים $\langle 1_S, x \rangle = 1$ ולכן

$$1 = \langle 1_S, x \rangle = \left\langle 1_S, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot \langle 1_S, e_i \rangle = \sum_{e_i \in S} \alpha_i \cdot 1 + \sum_{i \notin S} \alpha_i \cdot 0 = \sum_{e_i \in S} \alpha_i$$

כלומר $\sum_{e_i \notin S} \alpha_i = 0$, ולכן הצירוף הוא רק של וקטורים e_i ב־ S כשכל המקדמים הם בין 0 ל־1 ונסכמים ל־ 1 ולכן $x \in \text{conv}(S)$, כלומר $\boxed{\Delta_n \cap H(1_S, 1) \subseteq \text{conv}(S)}$,
ולכן $\text{conv}(S) = \Delta_n \cap H(1_S, 1)$, כלומר הראנו שקיים $face$ שהוא $\Delta_n \cap H(1_S, 1)$ והוא בדיוק $\text{conv}(S)$, כנדרש.

מ.ש.ל.ג.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** לפחות אחד מ־ $x_1, \ldots, x_m$ ב־ face
הוכחה:
יהי L $face$, אזי קיימים a, b כך ש־ $H(a, b)$ הוא supporting hyperplane וגם $L = \mathcal{P} \cap H(a, b)$.
יהי $x \in L$, מהיות $x \in \mathcal{P}$ אז ניתן לכתוב $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot x_i$ כאשר $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ וגם $0 \leq \alpha_i \leq 1$ לכל $1 \leq i \leq n+1$.
נסמן $j = \text{argmax}_{1 \leq i \leq n} a^T \cdot x_i$,
נשים לב שמהיות $x \in L$ (לא ריקה) מתקיים $x \in H(a, b)$ ולכן

$$\begin{aligned} b = a^T \cdot x = a^T \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot x_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot a^T \cdot x_i \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \max_{1 \leq i \leq n} a^T \cdot x_i = \max_{1 \leq i \leq n} a^T \cdot x_i \cdot \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \\ = \max_{1 \leq i \leq n} a^T \cdot x_i = a^T \cdot x_j \end{aligned}$$

ולכן $a^T \cdot x_j \geq b$,
נשים לב כי מהיות $H(a, b)$ הוא supporting hyperplane ולכן לכל $x \in \mathcal{P}$ מתקיים $a^T \cdot x \leq b$,
נשים לב כי $x_j \in \mathcal{P}$ ולכן $a^T \cdot x_j \leq b$,
ולכן קיבלנו כי $a^T \cdot x_j = b$, ולכן $x_j \in H(a, b)$ ולכן $x_j \in \mathcal{P} \cap H(a, b) = L$.
כלומר הראנו שלפחות אחד מ־ $x_1, \ldots, x_m$ נמצא ב־ L.
כלומר הראנו שלכל L $face$ מתקיים שלפחות אחד מ־ $x_1, \ldots, x_m$ נמצא ב־ L.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\textbf{vertices}\left(\mathcal{P}\right)\subseteq\left\{ x_{1},\ldots,x_{m}\right\}$

הוכחה:

יהי $v\in\text{vertices}\left(\mathcal{P}\right)$, אזי $\left\{ v\right\}$ הוא $face$ לפי ההגדרה של קודקוד.

מהסעיף הקודם מתקיים כי לפחות אחד מ- $x_{1},\ldots,x_{m}$ נמצאים ב- $\left\{ v\right\}$.

נניח בלי הגבלת הכלליות כי $x_{i}\in\left\{ v\right\}$.

מהיות $\left\{ v\right\}$ זאת קבוצה עם איבר אחד, מתקיים כי $x_{i}=v$, ולכן $v\in\left\{ x_{1},\ldots,x_{m}\right\}$,

ולכן $\boxed{\text{vertices}\left(\mathcal{P}\right)\subseteq\left\{ x_{1},\ldots,x_{m}\right\}}$, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $H\left(a_{m},b_{m}\right)$ הוא supporting hyperplane

הוכחה:

נראה את 2 התנאים בשביל ש- $H\left(a_{m},b_{m}\right)$ יהיה supporting hyperplane:

i. תחילה נשים לב כי $\mathcal{P}=\bigcap_{i=1}^{m}H\left(a_{i},b_{i}\right)$ ולכן $\mathcal{P}=\bigcap_{i=1}^{m}HS\left(a_{i},b_{i}\right)\subseteq HS\left(a_{m},b_{m}\right)$, כנדרש

ii. נסמן $\bigcap_{i=1}^{m-1}HS\left(a_{i},b_{i}\right)=\mathcal{P}'$, נראה כי $\mathcal{P}\cap H\left(a_{m},b_{m}\right)\neq\emptyset$,

מהנתון ש- $\mathcal{P}\neq\mathcal{P}'$, נסיק כי $\exists x\in\mathcal{P}'\setminus\mathcal{P}$ בגלל ש- $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{P}'$ (קל לראות ש- $\mathcal{P}$ מוכלת ב- $\mathcal{P}'$).

מהיות $x\in\mathcal{P}'\setminus\mathcal{P}$, מתקיים כי $x\notin HS\left(a_{m},b_{m}\right)$ ולכן $a_{m}^{T}\cdot x>b_{m}$

מהיות $\mathcal{P}\neq\emptyset$, $\exists y\in\mathcal{P}$.

נסתכל על $z=\alpha\cdot y+\left(1-\alpha\right)\cdot x$, נרצה ש-

$$\begin{aligned}
b_{m} & =a_{m}^{T}\cdot z=\alpha\cdot a_{m}^{T}\cdot y+\left(1-\alpha\right)\cdot a_{m}^{T}\cdot x\\
b_{m}-a_{m}^{T}\cdot x & =\alpha\cdot\left(a_{m}^{T}\cdot y-a_{m}^{T}\cdot x\right)\\
\alpha & =\frac{a_{m}^{T}\cdot x-b_{m}}{a_{m}^{T}\cdot x-a_{m}^{T}\cdot y}
\end{aligned}$$

נבחין ש- $a_{m}^{T}\cdot y\leq b_{m}<a_{m}^{T}\cdot x$ ולכן $0\leq\alpha\leq1$,

מהיות $x,y\in\mathcal{P}'$ אז גם $z=\alpha\cdot y+\left(1-\alpha\right)\cdot x\in\mathcal{P}'$ (ראינו בהרצאה)

והראנו כי $a_{m}^{T}\cdot z=b_{m}$ ולכן $z\in H\left(a_{m},b_{m}\right)\subseteq HS\left(a_{m},b_{m}\right)$, ולכן

$$z\in\mathcal{P}'\cap HS\left(a_{m},b_{m}\right)=\mathcal{P}$$

כלומר הראנו כי $z\in\mathcal{P}\cap H\left(a_{m},b_{m}\right)$ ולכן $\boxed{H\left(a_{m},b_{m}\right)\cap\mathcal{P}\neq\emptyset}$, כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $H\left(a_{m},b_{m}\right)$ הוא supporting hyperplane

הוכחה:

נראה את 2 התנאים בשביל ש- $H\left(a_{m},b_{m}\right)$ יהיה supporting hyperplane:

i. תחילה נשים לב כי $\mathcal{P}=\bigcap_{i=1}^{m}H\left(a_{i},b_{i}\right)$ ולכן $\mathcal{P}=\bigcap_{i=1}^{m}HS\left(a_{i},b_{i}\right)\subseteq HS\left(a_{m},b_{m}\right)$, כנדרש

ii. נסמן $\bigcap_{i=1}^{m-1}HS\left(a_{i},b_{i}\right)=\mathcal{P}'$, נראה כי $\mathcal{P}\cap H\left(a_{m},b_{m}\right)\neq\emptyset$,

מהיות $a_{m}\notin\text{span}\left\{ a_{1},\ldots,a_{m-1}\right\}$ קיים v כך ש- $\left\langle v,a_{i}\right\rangle =0$ לכל $1\leq i\leq m-1$ וגם $\left\langle a_{m},v\right\rangle =1$ (קושי שוורץ)

מהיות $\mathcal{P}\neq\emptyset$, קיים $x\in\mathcal{P}$, נסתכל על $y=x+\left(b_{m}-a_{m}^{T}\cdot x\right)\cdot v$,

נשים לב כי

$$a_{m}^{T}\cdot y=a_{m}^{T}\cdot x+\left\langle a_{m},\left(b_{m}-a_{m}^{T}\cdot x\right)\cdot v\right\rangle =a_{m}^{T}\cdot x+\left(b_{m}-a_{m}^{T}\cdot x\right)=b_{m}$$

ולכן $y\in H\left(a_{m},b_{m}\right)\subseteq HS\left(a_{m},b_{m}\right)$,

וגם נשים לב כי לכל $1\leq i\leq m-1$ מתקיים

$$a_{i}^{T}\cdot y=a_{i}^{T}\cdot\left(x+\left(b_{m}-a_{m}^{T}\cdot x\right)\cdot v\right)=a_{i}^{T}\cdot x+\left\langle a_{i},\left(b_{m}-a_{m}^{T}\cdot x\right)\cdot v\right\rangle =a_{i}^{T}\cdot x+0\overset{x\in HS\left(a_{i},b_{i}\right)}{\leq}b_{i}$$

ולכן $y \in HS\left(a_i, b_i\right)$ לכל $1 \leq i \leq m-1$ ולכן $y \in \mathcal{P}'$.
כלומר $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cap HS\left(a_m, b_m\right) \ni y$ ולכן $y \in \mathcal{P} \cap H\left(a_m, b_m\right)$ ולכן $\boxed{\mathcal{P} \cap H\left(a_m, b_m\right) \neq \emptyset}$, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺