פתרון תרגיל מספר 9 - מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

24 במאי 2019

1. **צ"ל:** התפלגות X היא על בנות
הוכחה:
נשים לב כי $\text{Range}(X) = \mathbb{N} \cup \{0\}$, יהי $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, לכן

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X(k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k \mid \text{there are i people in the total}) \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = k \mid \text{there are i people in the total}) \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} \underbrace{p^k \cdot (1-p)^k}_{\text{there are k girls}} \cdot \underbrace{\frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}}_{\text{there are i people in the total}} \\
&= \frac{p^k}{(1-p)^k} \cdot \sum_{i=k}^{\infty} (1-p)^i \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \cdot \sum_{i=k}^{\infty} (1-p)^i \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

לכן ההתפלגות היא $\left(\left(\frac{p}{1-p}\right)^k \cdot \sum_{i=k}^{\infty} (1-p)^i \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}\right)_{k=0}^{\infty}$

מ.ש.ל.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\min\{X, Y\} \sim Geo(1 - (1-p) \cdot (1-q))$
הוכחה:
תחילה ראינו כי תכונת החוסר זיכרון שאומרת $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$ וכל דבר שמקיים תכונה זאת הוא $Geo(p)$,
עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\min\{X, Y\} > k) &= \mathbb{P}(X > k \cap Y > k) = \mathbb{P}(X > k) \cdot \mathbb{P}(Y > k) \\
&= (1-p)^k \cdot (1-q)^k = ((1-p) \cdot (1-q))^k
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\mathbb{P}(\min\{X, Y\} > k) = ((1-p) \cdot (1-q))^k = (1 - (1-p) \cdot (1-q))^k$,
לכן לפי מה שהוכחנו בתרגיל 5 מתקיים $\boxed{\min\{X, Y\} \sim Geo((1-p) \cdot (1-q))}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $X + Y$
הוכחה:
יהי $\text{Range}(X + Y) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, תחילה נשים לב כי

$$\mathbb{P}(X = n) = p \cdot (1-p)^{n-1}$$

לכן יהי $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ אזי

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{X+Y}(k) &= \sum_{n=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=n \cap Y=k-n) \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=n) \cdot \mathbb{P}(Y=k-n) \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} p \cdot (1-p)^{n-1} \cdot q \cdot (1-q)^{k-n-1} = p \cdot q \cdot \sum_{n=1}^{k-1} (1-p)^{n-1} \cdot (1-q)^{k-n-1} \\
&= \frac{pq}{(1-p)} \cdot (1-q)^{k-1} \cdot \sum_{n=1}^{k-1} (1-p)^{n} \cdot (1-q)^{-n} = \frac{pq}{(1-p)} \cdot (1-q)^{k-1} \cdot \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{n} \\
&= \frac{pq}{(1-p)} \cdot (1-q)^{k-1} \cdot \frac{1-p}{1-q} \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{k-1} - 1}{\left(\frac{1-p}{1-q}\right) - 1} \\
&= \frac{pq}{p-q} \cdot (1-q)^{k-1} \cdot \left[1 - \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{k-1}\right] = \frac{pq}{p-q} \cdot \left[(1-q)^{k-1} - (1-p)^{k-1}\right]
\end{aligned}$$

כלומר ההתפלגות היא $\left(\frac{pq}{p-q} \cdot \left[(1-q)^{k-1} - (1-p)^{k-1}\right]\right)_{k=2}^{\infty}$

מ.ש.ל.ב.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** פונקציה יוצרת מומנטים של $X \sim Poi(\lambda)$
הוכחה:
נחשב את $M_X(t)$,

$$\begin{aligned}
M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{t \cdot k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^{t \cdot k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \\
&\overset{\text{taylor series}}{=} e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot e^t} = e^{\lambda\left(1-e^t\right)}
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** פונקציה יוצרת מומנטים של $X \sim U\{1, \ldots, N\}$
הוכחה:
נחשב את $M_X(t)$,

$$\begin{aligned}
M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] &= \sum_{k=1}^{n} e^{t \cdot k} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} e^{t \cdot k} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(e^t\right)^k = \frac{1}{n} \cdot e^t \cdot \frac{e^{t \cdot n} - 1}{e^t - 1}
\end{aligned}$$

הערה: $t \neq \ln(1) = 0$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** פונקציה יוצרת מומנטים של X
הוכחה:
נגדיר X_i להיות מספר ההטלות מH בפעם ה$i-1$ לH בפעם הi,
נשים לב כי $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ וגם $X_i\sim Geo\left(q\right)$,לכן

$$M_X\left(t\right)=M_{\sum_{i=1}^{n}X_i}\left(t\right)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}\left(t\right)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}\left(t\right)=\left(\frac{q\cdot e^t}{q\cdot e^t-e^t+1}\right)^n$$

הערה: $t\neq\ln\left(\frac{1}{1-q}\right)$

מ.ש.ל.ג.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** חסם להסתברות
הוכחה:
תחילה נגדיר $X_i\sim Ber\left(\frac{1}{4}\right)$ שאומר האם הרצף $i,i+1$ הוא HH.
נשים לב כי $X=\sum_{i=1}^{n-1}X_i$, נשים לב כי X_i,X_j בלתי תלויים כאשר $|i-j|>1$, עתה נשים לב כי

$$Cov\left(X_i,X_{i+1}\right)=\mathbb{E}\left[X_i\cdot X_{i+1}\right]-\mathbb{E}\left[X_i\right]\cdot\mathbb{E}\left[X_{i+1}\right]=\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$$

לכן

$$\begin{aligned}\text{Var}\left[X\right]=\text{Var}\left[\sum_{i=1}^{n-1}X_i\right]&=\sum_{i=1}^{n-1}\text{Var}\left[X_i\right]+2\sum_{i<j}Cov\left(X_i,X_j\right)\\&=\left(n-1\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)+2\cdot\left(n-2\right)\cdot\frac{1}{16}=\frac{5n-7}{16}\end{aligned}$$

וגם מתקיים

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n-1}X_i\right]&=\left(n-1\right)\cdot\frac{1}{4}=\frac{n-1}{4}\\\frac{n-1}{4}-\frac{n}{8}&=\frac{n-2}{8}\end{aligned}$$

לכן

$$\mathbb{P}\left(X\geq\frac{n}{8}\right)\leq\mathbb{P}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq\frac{n-2}{8}\right)\leq\frac{\text{Var}\left[X\right]}{\left(\frac{n-2}{8}\right)^2}=\frac{\frac{5n-7}{16}}{\left(\frac{n-2}{8}\right)^2}=\frac{20n-28}{\left(n-2\right)^2}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** חסם להסתברות
הוכחה:
תחילה נגדיר $X_i\sim Ber\left(\frac{1}{4}\right)$ שאומר האם הרצף $i,i+1$ הוא HH.
נשים לב כי $X=\sum_{i=1}^{n-1}X_i$, נשים לב מהערה בסעיף הקודם ש$X_1,X_3,\ldots,X_{2i+1}$ בלתי תלויים וגם $X_2,X_4,\ldots,X_{2i}$ בלתי תלויים.
לכן נגדיר $Y_i=\frac{1}{4}-X_i$, אזי $Y_1,Y_3,\ldots,Y_{2i-1}$ בלתי תלויים וגם $Y_2,Y_4,\ldots,Y_{2i}$ בלתי תלויים וגם מתקיים

$$\mathbb{E}\left[Y_i\right]=\frac{1}{4}-\mathbb{E}\left[X_i\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

עתה נגדיר

$$S_1 = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} Y_{2i}$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} Y_{2i+1}$$

לכן

$$S = S_1 + S_2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i = (n-1)\cdot\frac{1}{4} - X$$

$$X \geq \frac{n}{8} \Leftrightarrow S \geq (n-1)\cdot\frac{1}{4} - \frac{n}{8} = \frac{n-2}{8}$$

נשים לב כי $\left(S_2 \geq \frac{n-2}{16}\right) \cup \left(S_1 \geq \frac{n-2}{16}\right) \supseteq S \geq \frac{n-2}{8}$, לכן

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{n}{8}\right) = \mathbb{P}\left(S \geq \frac{n-2}{8}\right) \leq \mathbb{P}\left(\left(S_1 \geq \frac{n-2}{16}\right) \cup \left(S_2 \geq \frac{n-2}{16}\right)\right)$$
$$\leq \mathbb{P}\left(S_1 \geq \frac{n-2}{16}\right) + \mathbb{P}\left(S_2 \geq \frac{n-2}{16}\right) \leq 2\cdot e^{-\frac{\left(\frac{n-2}{16}\right)^2}{n-1}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

5. **צ"ל:** חסם להסתברות

הוכחה:

תחילה נגדיר X_n להיות המיקום של האדם לאחר n הטלות. נגדיר $Y_i = 2$ להיות אם בהטלה הi יצא ראש, אחרת -1.
אזי $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, וגם מתקיים

$$\mathbb{E}\left[Y_i\right] = 2\cdot q - (1-q) = 3q - 1$$

נגדיר

$$Z_i = \frac{3q - 1 - Y_i}{1 + (3q-1)}$$

נשים לב כי

$$\mathbb{E}\left[Z_i\right] = 0$$

עתה נסתכל על

$$S = \sum_{i=1}^{n} Z_i = \frac{1}{1+(3q-1)}\cdot\left(n\cdot(3q-1) - X_n\right)$$

תנאי לשימוש באי שוויון הופינג: $q \geq \frac{1}{3}$, בשביל לקבל את האי שוויון $S \geq \text{something}$

$$X_n \leq 0 \Rightarrow S \geq \frac{n\cdot(3q-1)}{3q}$$

לכן

$$\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) \leq \mathbb{P}\left(X_n \leq 0\right) \leq \mathbb{P}\left(S \geq \frac{n\cdot(3q-1)}{1+(3q-1)}\right) \leq e^{-\frac{\left(\frac{n\cdot(3q-1)}{3q}\right)^2}{2n}} = e^{-\left(\frac{3q-1}{3q}\right)^2\cdot\frac{n}{2}}$$

כלומר מצאנו חסם $\boxed{\mathbb{P}\left(X_n=0\right)\leq e^{-\left(\frac{3q-1}{3q}\right)^2\cdot\frac{n}{2}}}$,

עתה ננסה לחסום עם צ'כישב, נשים לב כי $\mathbb{E}\left[X_n\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[Y_i\right]=n\cdot\left(3q-1\right)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[Y_i\right]&=\mathbb{E}\left[Y_i^2\right]-\left(3q-1\right)^2=\Big(4\cdot q+\left(-1\right)^2\cdot\left(1-q\right)\Big)-\left(3q-1\right)^2\\&=9q\left(1-q\right)\end{aligned}$$

לכן מהיות $Y_1,\ldots,Y_n$ ב"ת מתקיים כי

$$\mathrm{Var}\left[X\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\left[Y_i\right]=n\cdot9q\left(1-q\right)$$

לכן

$$X_n=0\Rightarrow\left|X_n-\mathbb{E}\left[X_n\right]\right|\leq\mathbb{E}\left[X_n\right]$$

החסם של צ'בישב הוא

$$\mathbb{P}\left(X_n=0\right)\leq\mathbb{P}\left(\left|X_n-\mathbb{E}\left[X_n\right]\right|\leq\mathbb{E}\left[X_n\right]\right)\leq\frac{\mathrm{Var}\left[X_n\right]}{\mathbb{E}^2\left[X_n\right]}=\frac{n\cdot9q\left(1-q\right)}{\left(n\cdot\left(3q-1\right)\right)^2}=\frac{9q\left(1-q\right)}{\left(3q-1\right)^2\cdot n}$$

כלומר קיבלנו משהו שדועך לינארית לעומת משהו שדועך אקספוננציאלית

מ.ש.ל.☺