סיכום למבחן בהסתברות - סמסטר ב

שיר שבת

7 ביולי 2019

כל דבר שמסומן על ידי ** - לקוח מרשימת המשפטים להוכחה של יבגני

הרצאה 1-2

0.1 זהויות קומבינטוריות

הכוונה ב"חזרות" שנגיד באותו התא ניתן לשים בו מספר כדורים
"סדר" - אין חשיבות לסדר- כאשר הכדורים זהים. ויש חשיבות כאשר לא זהים

1. $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$
3. **הבינום של ניוטון-** $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

   מקרה פרטי- $(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
4. **תמורה-** $\frac{n!}{(n-k)!}$ בחירה של k איברים מתוך n כאשר יש חשיבות לסדר הבחירה, בחירה כל של האיברים - n!
5. בחירה של k איברים מתוך קבוצה כאשר יש חזרות יש חשיבות לסדר: n^k
6. בחירה של k איברים מתוך קבוצה כאשר אין חזרות יש חשיבות לסדר: $\frac{n!}{(n-k)!}$
7. בחירה של k איברים מתוך קבוצה כאשר אין חזרות אין חשיבות לסדר: $\binom{n}{k}$
8. בחירה של k איברים מתוך כאשר יש חזרות אין חשיבות לסדר: $\binom{n+k-1}{n-1}$
9. **מקדמים מולטינומים-** מספר האפשרויות לחלק n עצמים שונים ל- k קבוצות בגדלים - $n_1, n_2, ..., n_k$ כאשר - $\frac{n!}{n_1 \cdot n_2 \cdot .... \cdot n_k} = \binom{n}{n_1, n_2, ..., n_k}$
10. חלוקת n-1 מחיצות בין n כדורים וישנם r מחיצות עבור r תאים. צריך לבחור איפה לשים את המחיצות בין התאים במחיצות בין הכדורים. מספר האפשרויות: $\binom{n-1}{r-1}$.
11. מספר החריצים בין המחיצות הוא r-1 ומספר החריצים בין הכדורים n+r-1 ולכן קיימים - $\binom{n+r-1}{r-1}$ אפשרויות.

0.2 הדגשות מתרגולים

0.2.1 דוגמא:

בחבילת קלפים נתונה ישנם 52 קלפים, המחולקים ל־4 סריות, באופן סטנדרטי. מחלקים 13 קלפים מהחבילה באופן מקרי. יהי A_{i} המאורע קיבלנו 4 קלפים מסוג i.

<u>שאלה:</u> מה ההסתברות שקיבלנו רביעייה של אסים?

<u>פתרון:</u> תחילה ניצור את מרחב המדגם שלנו. $[\Omega] = \binom{52}{13}$. נניח כי הוצאנו כבר את ה־4 קלפים הללו, ועל כן נותר לנו לחלק את ה9 הנותרים:

$|A_i| = \binom{48}{9}$ והפתרון הינו: $P(A_i) = \frac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}}$

באותה הצורה היינו יכולים לשאול עבור כל רביעייה אחרת ולקבל את אותו התשובה.

נניח והיינו מגדירים B_1, המאורע האדם ה־1קיבל סרייה(כלומר קיבל 13 קלפים מאותו הסוג). כאן נצטרך לחשב את כל ארבעת המקרים:

או שקיבל תלתן או לב עלה או יהלום(נסמנם ב־j. ז"א: $P(B_1^j) = \frac{\binom{39}{13,13,13}}{\binom{52}{13,13,13,13}} = \frac{1}{\binom{52}{13}}$

ועל כן: $P(B_1) = P(\bigcup_{j=1}^4 B_1^j) = \frac{4}{\binom{52}{13}}$

ההבדל בין שתי השאלות נעוץ בעובדה שב־A_iהמאורע הוא על 4 קלפים מסוג i(לא אכפת לנו איזה סוג באמת)

ואילו ב־B_i המאורע הוא על האדם שנבחר(לא אכפת לנו באמת איזה אדם נבחר), אבל **כן** אכפת לנו מהאפשרויות שלו לניצחון.

0.2.2 הערה:

אם $X \sim Geo(p)$ אזי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{\infty}(1-p)^{i-1} \cdot p = (1-p)^k \sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i p =^1 (1-p)^k$$

0.2.3 הוכחת התוחלת של משתנה מקרי גיאומטרי

ניתן למצוא בתרגול 6

0.3 מרחב מדגם

מרחב מדגם הגדרה־ $\Omega \stackrel{def}{=} \{\omega_1, ...\omega_N\}$

לדוגמא, ניסוי הטלת מטבע n פעמים.$\Omega = \{(a_1, ...a_n)|a_i = HorT\}$ --‑> $|\Omega| = 2^n$

בסיכום של יבגני (הרצאה מספר 1, ישנה טענה המוכיחה עבור־$|\Omega| = \binom{n+k-1}{n-1}$ לא ציינתי כאן)

[1] סכום סדרה הנדסית אינסופית

0.4 משפט(מהרצאה 2)־

יהי Ω מרחב מדגם $\Omega \overset{def}{=} \{\omega_1, ...\omega_N\}$. f ־ מייצגת את קבוצת כל המאורעות.

0.4.1 טענה ־ $|f| = 2^n$

הוכחה־ קיימות $\binom{N}{k}$ אפשרויות לבחור k מאורעות אלמנטריים מתוך $\{\omega_1, \omega_2, ...\omega_N\}$ כך ש־ $|f| = \sum_{k=0}^{n} \binom{N}{k} \overset{\text{binom}}{=} (1+1)^N = 2^N$

0.4.2 הגדרה־ $\{\omega_1, ...\omega_N\} \overset{def}{=} \Omega$ מרחב מדגם, $p\colon \Omega \to [0,1]$ כך ש־ $\sum_{i=1}^{N} p(\omega_i) = 1$ פונקציה כזו נקראת פונקציית <u>הסתברות נקודתית.</u>

0.4.3 דוגמאות מהרצאה 2:

<u>The coincidence problem:</u>

1. ישנם m כדורים שונים זה מיזה בכד. שולפים ומחזירים בזה אחר זה n כדורים, ורושמים את התוצאה (יש חשיבות לסדר ברשימה). מה ההסתברות שכל n הכדורים שונים זה מיזה?

   <u>פתרון־</u>

$$\Omega = \{(a_1, ...a_n) | a_i = 1, ..., m\}$$

$$|\Omega| = m^n$$

$$A = \{(a_1, ...a_n) | a_i = 1, ...m, a_k \neq a_l\}; |A| = m \cdot (m-1) \cdot .... \cdot (m-n+1)$$

והוא מייצג את המאורע של הכדורים שנשלפו שונים זה מיזה ולכן הפתרון:

$$\boxed{\mathrm{P}\{\mathrm{A}\} = \frac{m(m-1) \cdot .... \cdot (m-n+1)}{m^n}}$$

2. **מה ההסתברות שבין n אנשים ישנם שניים לפחות שנולדו באותו התאריך?**

פתרון מלא אצל יבגני בסיכום של הרצאה מספר 2. אבל החשיבה היא להסתכל על **המאורע המשלים** זאת אומרת שאין שניים שנולדו באותו התאריך.

כך שזה זהה לדוגמא 1, רק שעל מנת לקבל את המאורע המשלים, נבצע $P(A^c) = 1 - P(A)$ ונקבל את הדרוש: $P(A^c) = 1 - \frac{(365)\cdot(365-1)\cdot\ldots\cdot(365-n+1)}{(365)^n}$

הרצאה 3-4

0.4.4

מטבע הוטל n פעמים. ניתן להגדיר את המרחב עבור ניסוי זה על ידי: $\Omega = \{\omega = (a_1, ...a_n)|a_i = 1\, or\, o\}$ בהינתן ש- $a_i = 1$ מקבלים עץ, אחרת פלי.

נגדיר את פונקציית ההסתברות הנקודתית על ידי: $p(\omega) \overset{def}{=} p^{\sum_{i=1}^{n} a_i} \cdot q^{n-\sum_{i=1}^{n} a_i}; p+q = 1; p, q \geq 0$

0.4.5 **טענה-** $\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$

הוכחה: נשים לב כי מתקיים: $|\{(a_1, ...a_n)|a_i = 1\, or\, o;\ \sum_{i=1}^{n} a_i = k\}| = \binom{n}{k}$

היות וזה שווה למספר האפשרויות לבחור k תאים מתוך n תאים.

ולכן מתקיים: $\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = \underbrace{(p+q)^n}_{1, binom} = 1$

0.5 התפלגות בינומית

0.5.1 הסבר כללי:

ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות - הצלחה(1) או כישלון (0) נקרא "ניסוי בינומי"

ההסתברות להצלחה בכל ניסוי הינה p , והניסויים הם בלתי תלויים. X הינו מ"מ הסופר את מספר ההצלחות ב-n ניסויים.

והסימון הינו: $X \sim Bin(n, p)$

$$\boxed{P(X=k)= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}; \quad k\in \{0, 1.....n\}, 0\leq p \leq 1; \quad q=1-p}$$

כאשר k מסמן **בדיוק** את מספר ההצלחות ואילו n-k מייצג **בדיוק** את מספר הכשלונות.

0.6 הילוך מקרי־ Random Walk

בבעיה מסוג זה, אנחנו מסתכלים למשל על אדם בציר זמן מסוים ורוצים לתאר היכן הוא נמצא לאחר n צעדים,

אותו אדם יכול ללכת קדימה ואחורה בלבד.

ועל כן, מרחב המדגם שלנו הינו: $|\Omega| = \{\omega = (a_1, ..., a_n|a_i = 1or - 1\}$

$a_i = +1$ האדם הולך קדימה בצעד ה־i. $a_i = -1$ האדם הולך אחורה בצעד ה־i.

נגדיר מאורע A_k להיות האדם בנקודה k , $k \in \{-n, ..., -1, 1, ...n\}$ לאחר n צעדים.

נחשב את ההסתברות של A_k.

נגדיר את A_k:

$$A_k = \{\omega = (a_1, ...a_n)|\, a_i = 1\, or\, -1; a_1 + ... + a_n = k;\; k \in \{-n, ..., -1, 1, ...n\}\}$$

ונראה כי מתקיים: $a_1 + ... + a_n = \underbrace{\upsilon(\omega)}_{numbers\, of\, +1\, in\, \omega} - \underbrace{(n - \upsilon(\omega)\quad)}_{numbers\, of\, -1\, in\, \omega}$

היות ואנו מחפשים היכן האדם שלנו נמצא, נרצה את $\upsilon(\omega)$:

$$\upsilon(\omega) = \frac{n + (a_1 + ... + a_n)}{2} = \frac{n + k}{2}$$

ומכאן נובע:

$$P(A_k) = \begin{cases} 0, & \frac{n+k}{2} \notin \{-n, ..., -1, 1, ...n\} \\ \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} & \frac{n+k}{2} \in \{-n, ..., -1, 1, ...n\} \end{cases}$$

0.7 התפלגות מולטינומית

זוהי הכללה של ההתפלגות הבינומיאלית.

נגדיר: $A_{n_1,...n_r} = \{\omega = (a_1, ...a_n)| \begin{matrix} \upsilon(\omega) = n_1 \\ \vdots \\ \upsilon(\omega) = n_r \end{matrix} \}$

כאשר־

$$P(A_{n_1,..,n_r}) = \binom{n}{n_1, ...n_r} p_1^{n_1} \cdot ... \cdot p_r^{n_r}; \quad n_1 \geq 0, ...n_r \geq 0; \quad n_1 + ... + n_r = n$$

1 **משפט The Inclusion-Exclusion Principle

Proof without induction

בעזרת משפט זה, ניתן לחשב את ההסתברות **שלפחות** אחד מן המאורעות $A_1,..A_N$ יתרחש.

תחילה, נייצג בעזרת S_k את ההסתברות **ש־k מאורעות יתרחשו**. ו־$k \in \{1,...N\}$

$S_1 = \sum_{i=1}^{N} P(A_i)$ (רק אחד מהמאורעות $A_1,...A_k$ יתרחש)

$S_2 = \sum_{1 \le l_1 < l_2 \le N} P(A_{l_1} \cap A_{l_2})$ (2 מן המאורעות $A_1,...A_k$ יתרחשו)

$\vdots$

$S_{\mathrm{k}} = \sum_{1 \le l_1 < l_2 .... < l_k \le N} P(A_{l_1} \cap A_{l_2} .. \cap A_{l_k})$

$\vdots$

$S_{\mathrm{N}} = \sum_{1 \le l_1 < l_2 .... < l_k \le N} P(A_{l_1} \cap A_{l_2} .. \cap A_{l_N})$

המשפט עצמו:

$$\underset{P(A_1 \cup .... \cup A_N)}{The\,probability\,that\,at\,least\,one\,event\,will\,occur} = S_1 - S_2 + S_3 - .... + (-1)^{N-1} S_N$$

כאשר־ $S_k = \sum_{1 \le l_1 < ... < l_k \le N} P(A_{l_1} \cap ... \cap A_{l_k})$

<u>הוכחה:</u>

1) במידה ו־ $\omega \notin A_1 \cup .... \cup A_n$ אזי $\omega \notin A_1, ..., \omega \notin A_N$

דבר הגורר ש־$p(\omega)$ אינה תורמת לאף אחד מאגפי השיוויון:

$P(A_1 \cup ... \cup A_N) = S_1 - S_2 + ... + (-1)^{N-1} S_N$

2) נניח כי ω נמצאת בדיוק ב־m מן המאורעות $A_1,..A_N$ כאשר $1 \le m \le N$ אז ω תורמת:

- $\binom{m}{1} p(\omega)$ לסכום S_1
- $\binom{m}{2} p(\omega)$ לסכום S_2

- $\vdots$

- $\binom{m}{m}p(\omega)$ לסכום S_m
- אינה תורמת ל־S_{m+1}ובאותה הצורה כל מה שבא אחרייה לא תתרום דבר, ז"א עד S_N.

לכן, אם ω נמצאת בדיוק ב־m מן המאורעות$A_1,..A_N$, היא תורמת ל־$S_1 - S_2 + ... + (-1)^{N-1}S_N$ בדיוק באופן הבא:

$p(\omega) = p(\omega)[\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + ... + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}] = 1 + (-1))^m + 1) -$ נובע מהבינום של ניוטון.

ז"א שω תורמת $p(\omega)$לשני אגפי השוויון ואכן נקבל את הדרוש־

$$P(A_1 \cup ... \cup A_N) = S_1 - S_2 + ... + (-1)^{N-1}S_N$$

1.0.1 דוגמא

למשל, בחלוקת כובעים מחדש, ההסתברות שמתוך n אנשים, k יקבלו את אותו הכובע, שווה ל:

$$A_{L_1} \cap A_{L_2} \cap .... \cap A_{L_k} = \{(L_1..L_N)|\text{k people will get the same hat}\}$$

$$S_k = \sum_{1 \le L_1 \le .... \le L_k \le N} P(A_1 \cap A_2 \cap ...A_k) = \binom{N}{k}\frac{(N-k)!}{N!} = \frac{1}{k!}$$

בנושא זה אפשר לשאול שאלות על תמורה, להסתכל בהרצאה 4, יש שם שאלות לדוגמא $(The\, matching\, problem)$+ משפט נוסף.

הרצאה 5-6

1.1 הסתברות מותנית

יהי מרחב הסתברותי: (Ω, f, P) כך ש- $A, B \in f$;$P(A) > 0$

הביטוי: $P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$ נקרא ההסתברות המותנית של B בהינתן A

תכונות של ההסתברות המותנית:

1. P(A|A)=1
2. $P(\varnothing|A) = 0$
3. אם $B \supseteq A$ אזי P(B|A)= $\frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$
4. נניח כי $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ אזי: $P(B_1 \cup B_2|A) = \frac{P((B_1\cup B_2)\cap A)}{P(A)} = P(B_1|A) + P(B_2|A)$

1.2 משפט נוסחאת ההסתברות השלמה

יהי מרחב הסתברותי: (Ω, f, P)

$\Omega = \bigcup_{k+1}^{N} A_k; A_k \cap A_l = \varnothing; k \neq l$

$P(A_k) > 0;$ כך ש- $k \in \{1, ...N\}$

2 **טענה- $The\, formula\, for\, total\, probability$

$P(B) = \sum_{k=1}^{N} P(B|A_k) \cdot P(A_k), \forall B \in f$

הוכחה: בהינתן ש- $\Omega = \bigcup_{k+1}^{N} A_k; \quad A_k \cap A_l = \varnothing; k \neq l; \quad B = \bigcup_{k=1}^{N} B \cap A_k$

מתקיים-

$P(B) = \text{P}(\bigcup_{k=1}^{N} B \cap A_k) =$[2]$\sum_{k=1}^{N} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{P(B\cap A_k)\cdot P(A_k)}{P(A_k)} = \sum_{k=1}^{N} P(B|A_k) \cdot P(A_k)$

[2] סיגמא אדיטיביות

ניתן למצוא בהרצאה 5־6 בעמוד 5.5 **דוגמא טובה.**

2.1 משפט בייס

יהי מרחב הסתברותי: (Ω, f, P) , $P(A), P(B) > 0$

2.1.1 טענה על חוק בייס(על הנוסחא שלו)

$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$

הוכחה:

$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}, P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \dashrightarrow P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$

דהיינו, $P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$

3 **הוכחת משפט בייס (התאוריה)

יהי מרחב הסתברותי: (Ω, f, P) , P(B)>0, $P(A_i) > 0$

$\Omega = \bigcup_{k+1}^{N} A_k; \quad A_j \cap A_i = \varnothing;$ j $\neq i$

טענה־ $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{N} P(B|A_j)\cdot P(A_i)}$

הוכחה־

1. מחוק בייס ניתן לרשום־ $P(A_i|B)\cdot P(B) = P(B|A_i)\cdot P(A_i)$

או בכתיבה אחרת, $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)}$

2.מהסתברות שלמה $P(B) = \sum_{j=1}^{N} P(B|A_j)\cdot P(A_j)$

3.נציב את סעיפים 2,1: $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{N} P(B|A_j)P(A_j)}$ **וסיימנו.**

4 **משפט נוסחאת הכפל להסתברות

מתקיים על אותו מרחב של משפט בייס

טענה־ כאשר$P(A_N \cap .... \cap A_1) > 0$

מתקיים: $P(A_N \cap .... \cap A_1) = P(A_N|A_{N-1} \cap .... \cap A_1)\cdot P(A_{N-1}|A_{N-2} \cap .... \cap A_1)\cdot ..... \cdot P(A_2|A_1)P(A_1)$

הוכחה־ $P(A_N \cap ... \cap A_1) = P(A_N \cap (A_{N-1} \cap ...A_1)) = P(A_N|A_{N-1} \cap .... \cap A_1)\cdot P(A_{N-1} \cap .... \cap A_1) =$

$= P(A_N|A_{N-1} \cap .... \cap A_1)\cdot P(A_{N-1}|A_{N-2} \cap .... \cap A_1)\cdot ..... \cdot P(A_2|A_1)P(A_1)$

4.1 הכד של פוליה

בכד ישנם bכדורים שחורים ו־rכדורים אדומים. כדור נשלף באקראי. אם הכדור הנשלף הוא שחור, אזי מחזירים את הכדור הנשלף ומוסיפים עוד cכדורים שחורים. אם הכדור הנשלף הוא אדום, אזי מחזירים את הכדור הנשלף ומוסיפים עוד cכדורים אדומים. נניח כי עושים זאת nפעמים. מהי ההסתברות שכל הכדורים הנשלפים יהיו שחורים?

<u>פתרון:</u>

עבור $n=1$ מתקיים: $P(b_1)=\frac{b}{b+r}$

עבור $n=2$מתקיים: $P(b_1\cap b_2)=P(b_2|b_1)\cdot P(b_1)=\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\frac{b}{b+r}$

את הפעולה הזו ניתן לבצע עד שמגיעים לשליפה ה־n ז"א:

$$P(b_n\cap .....\cap b_1)=\frac{b+(n-1)c}{b+r+(n-1)c}\cdot ....\cdot\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\frac{b}{b+r}$$

הרצאה 7-8

4.2 The Gambler's Ruin Problem

בידי שחקן יש $x\$$.

כללי המשחק שלנו הם(כאן אנו מניחים כי המטבע הוגן, בשיעורי בית היה לנו מקרה של מטבע לא הוגן):

1. מטבע הוטל ונפל על H, אז השחקן **מרוויח** $1\$$. במידה והמטבע נפל על T, אז השחקן **מפסיד** $1\$$.
2. המשחק מסתיים כאשר:

- בידי השחקן יש $m\$; m > x$
- השחקן מפסיד את כל כספו.

שאלה, מהי ההסתברות שהשחקן יפסיד הכל?

פתרון:

1. נגדיר $p(x) \equiv$ ההסתברות שהשחקן יפסיד הכל כאשר הוא מתחיל מ-$x\$$.
2. A- השחקן מפסיד הכל כאשר הוא מתחיל מ-$x\$$

   B_1- מתקבל Hכאשר המטבע הוטל בפעם הראשונה.

   B_2- מתקבל Tכאשר המטבע הוטל בפעם הראשונה.
3. $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2};\ B_1 \cap B_2 = \varnothing$

   $\Omega = B_1 \cup B_2$

ולכן ניתן לרשום מנוסחאת ההסתברות השלמה: $P(A) = P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)$

כאשר $P(A|B_1) = P\{$השחקן מפסיד הכל בהינתן שמתקבל Hבפעם הראשונה$\}$

$P(A|B_2) = P\{$השחקן מפסיד הכל בהינתן שמתקבל Tבפעם הראשונה$\}$

אזי ניתן לרשום $P(A|B_1) = p(x+1); P(A|B_2) = p(x-1)$

ונקבל:

(*)

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{2}p(x+1) + \frac{1}{2}p(x-1)}$$

4. בנוסף מתקיים: $p(0)=1; p(m)=0$

5. כל פונקציה מהסוג: $p(x)=C_1+C_2x$ מקיימת:

$C_1+C_2x=\frac{C_1+C_2(x+1)+C_1+C_2(x-1)}{2}$ שזה מזכיר את הצורה של (*)

עבור $p(0)=1$ נקבל: $C_1=1$

עבור $p(m)=0$ נקבל: $0=C_1+C_2m$ ולכן: $C_2=-\frac{1}{m}$

ולכן־ $p(x)=1-\frac{1}{m}$

בהרצאה מספר 7, ניתן למצוא דוגמא נוספת בחלק של 7.2

4.3 מאורעות בלתי תלויים

יהי מרחב הסתברותי: (Ω,f,P) ;$A,B\in f$.

4.4 הגדרה־

נאמר כי מאורעות הם בלתי תלויים כאשר: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

ז"א שמספיק להראות זאת והמאורעות הינם בלתי תלויים.

הערה:

נניח כי המאורע A,B בת"ל, אזי מתקיים:

1) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$

2) A,Ω בלתי תלויים, $P(A\cap\Omega)=P(A)=P(A)\underbrace{P(\Omega)}_{=1}=P(A)$

3) $A,\varnothing$ בלתי תלויים: $P(A\cap\varnothing)=P(\varnothing)=0=P(\varnothing)P(A)$

4) $P(A^c\cap B)=P((\Omega)\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

מצד שני, $P(A^c)P(B)=(1-P(A))P(B)=P(B)-P(A)P(B)$

והגענו למסקנה כי אם A,B בלתי תלויים, אזי גם A^c,B הם בלתי תלויים.

ניתן למצוא דוגמא ב־7.5 .

4.5 משתנה מקרי־ $Random\,Variable$

יהי מרחב הסתברותי: (Ω,f,P)

4.5.1 הגדרה־

משתנה מקרי־ יהי מרחב הסתברותי: (Ω,f,P), Ω־ קבוצה סופית, $\zeta:\Omega\to\mathbb{R}$ אזי פונקציית ζ נקראת משתנה מקרי.

4.5.2

(Ω, f, P) מרחב ההסתברות, $A \in f$ כך שמתקיים־ $I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$

המשתנה המקרי: $\zeta(\omega) \stackrel{def}{=} I_A(\omega)$ נקרא פונקציה אופיינת של A ובתכלס גם נקראת אינדיקטור.

4.5.3 .־ The Bernoulli Random Variables

$$\Omega = \{\omega = (a_1, ..a_n) | a_i = 0 \, or \, 1\}$$

פונקציית ההסתברות הנקודתית הינה: $p(\omega) = p^{\sum_{i=1}^{n} a_i} q^{n - \sum_{i=1}^{n}}$

ונגדיר:

$$\zeta_1(\omega) = a_1$$

$$\zeta_2(\omega) = a_2$$

$$\vdots$$

$$\zeta_n(\omega) = a_n$$

המשתנים המקריים .... $\zeta_1, \zeta_2,$נקראים המשתנים המקריים.

יתר על כן, נגדיר: $S_n(\omega) \stackrel{def}{=} a_1 + ... + a_n$

כך שמתקיים: $S_n(\omega) = \zeta_1(\omega) + ... + \zeta_n(\omega)$ ולכן $S_n(\omega)$הוא הסכום של המשתנים ברנולי.

4.5.4 Random Walk-

$$\Omega = \{\omega = (a_1, .., a_n) | a_i = +1 \, or -1\}$$

$$p(\omega) = p^{\nu(\omega)} q^{\nu(\omega)}$$

מספר 1+ ב־ω=$\nu(\omega)$ =מסמל את המשתנה המקרי.

$$S_n(\omega) = a_1 + ... + a_n = \zeta_1(\omega) + ... + \zeta_n(\omega)$$

כך ש־$S_n(\omega)$ מציין את מיקום החלקיק לאחר nצעדים.

בהתאמה $S_1(\omega)$ יציין את מיקום החלקיק לאחר צעד 1 וכן הלאה.

4.5.5 The Probability Distribution Of a Random Variable

יהי מרחב הסתברותי: (Ω, f, P), Ω־ קבוצה סופית, $\zeta : \Omega \to \mathbb{R}$ אזי פונקציית ζ נקראת

משתנה מקרי.

$Range(\zeta)=X\subset\mathbb{R}$

אם Ω היא קבוצה סופית אזי X היא קבוצה סופית ונרשום: $X=\{x_1,...,x_m\}$

נגדיר:

$$P_\zeta(x_1)\overset{def}{=}P\{\omega:\zeta(\omega)=x_1\}$$
$$P_\zeta(x_2)\overset{def}{=}P\{\omega:\zeta(\omega)=x_2\}$$
$$\vdots$$
$$P_\zeta(x_n)\overset{def}{=}P\{\omega:\zeta(\omega)=x_n\}$$

נשים לב כי מתקיים־ $0\leq P_\zeta(x_i)\leq 1$ וגם $\sum_{i=1}^{m}P_\zeta(x_i)=1$

רשימת ההסתברויות: $(P_\zeta(x_1),...P_\zeta(x_n))$ **נקראת ההתפלגות של המשתנה המקרי** ζ

*ניתן למצוא דוגמא ב־ $7.8, 8.8$ ועד סוף הרצאה 8 (בסוף יש דוגמא שנראה לי חשוב להסתכל עליה).

הרצאה 9-10

4.6 Waiting Time

$$\Omega=\{\omega:\omega=(a_1,..,a_n)|a_i=0\,or\,1\}$$

$$\mathrm{P}(\omega)=p^{\sum_{i=1}^{n}a_i}q^{n-\sum_{i=1}^{n}a_i},p+q=1,p\geq 0,q\geq 0$$

$X(\omega)$= מספר האפסים ברשימה $(a_1,...,a_n)$ עד " 1" הראשון.

נרצה לחשב את ההתפלגות של X

ולכן:

$$Range(X)=\{0,1...n\}$$

נניח כי $0\leq k\leq n-2$ אזי מתקיים:

$$P(\omega:X(\omega)=k\}=P\{\omega:\omega=(0,...,0,\underset{k+1}{1},\underset{\underset{k}{n-k-1}}{a_{k+2},..a_n});a_i=1\,or\,0\}$$

ועכשיו, ניתן לשים לב שהבעיה שקולה לפיזור l כדורים מתוך קבוצה של $n-k-1$ כדורים. (כי אנחנו לא יודעים בדיוק מהו ערכו המדויק של l.

lיכול להיות כל מספר בין$0\leq l\leq n-k-1$

ולכן:

$$=\sum_{l=0}^{n-k-1}\binom{n-k-1}{l}p^{l+1}q^{n-1-l}=pq^k\underbrace{\sum_{l=0}^{n-k-1}\binom{n-k-1}{l}p^lq^{n-k-1-l}}_{1}=pq^k$$

אזי מכאן נובע: $P\{\omega:X(\omega)=k\}=pq^k;0\leq k\leq n-2$

ולכן בעבור $k=n-1$ מתקיים:$P\{\omega:X(\omega)=n-1\}=pq^{n-1}$

וכך למעשה קיבלנו את ההתפלגות הגיאומטרית! :)

ולכן,

$$P\{\omega:X(\omega)=k\}=\begin{cases}pq^k & 0\leq k\leq n-2\\ q^n & k=n\end{cases}$$

הערה: $\sum_{k=0}^{n}P\{\omega:X(\omega)=k\}=....=1$

תוכלו למצוא את הפירוט על הפיתוח של זה (...) ב9.2 עד 9.7

4.7 פונקציית התפלגות ופונקציית התפלגות מצטברת־

(Ω, f, P), Ω־ קבוצה סופית, $\zeta : \Omega \to \mathbb{R}$ משתנה מקרי.

4.7.1 הגדרה

$B \subseteq \mathbb{R}$, $\Phi_\zeta(B) = P\{\omega : \zeta(\omega) \in B\}$ **פונקציית התפלגות**

4.7.2 הגדרה

עבור כל $x \in \mathbb{R}$: $F_\zeta(x) \stackrel{def}{=} P\{\omega : \zeta(\omega) \le x\}$ **פונקציית התפלגות מצטברת**

הערה: $F_\zeta : \mathbb{R} \to [0,1]$

דוגמא תוכלו למצוא ב9.5

4.7.3 הגדרה The Expectation Of a Random Variable

יהי מרחב הסתברותי: (Ω, f, P), Ω־ קבוצה סופית, $\zeta : \Omega \to \mathbb{R}$

$$Range(\zeta) = X = \{x_1, ...x_m\}$$

$$\mathbb{E}\{\zeta\} \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{m} x_k P_\zeta(x_k)$$

כאשר $(P_\zeta(x_1), ..., P_\zeta(x_m))$ מהווה התפלגות של משתנה מקרי ζ

לדוגמא, $\Omega = \{\omega : (a_1, ..., a_n) | a_i = 1 \, or \, 0\}$

$$P(\omega) = p^{\sum_{i=1}^{n} a_i} q^{n - \sum_{i=1}^{n} a_i}; p + q = 1; p, q \ge 0$$

ולכן כאשר נשתמש במשתנה הרנדומלי של ברנולי, $\zeta_i(\omega) = a_i$

$$P_{\zeta_i}(x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & x = 0,1 \\ \\ o & x \ne 0,1 \end{cases}$$

נקבל: $\mathbb{E}\{\zeta_i\} = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

עוד דוגמאות תוכלו למצוא ב9.9 וכן הלאה.

דוגמא נוספת,

$$X_n(\omega) = the \, waiting \, time$$

$$P_{X_n}(k) = \begin{cases} pq^k & k = 0, 1, ...n-1 \\ \\ q^n & k = n \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\{X_n\} = \sum_{k=0}^{n-1} pkq^k + nq^n = pq \sum_{k=0}^{n-1} kq^{k-1} + nq^n$$

4.7.4 טענה־

מתקיים: $\sum_{k=0}^{n-1} kq^{k-1} = \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1}+1}{(q-1)^2}$

הוכחה־

ראשית נשים לב שניתן להבחין כי שני האגפים שווים אך ההבדל נעוץ בכך שאגף שמאל מזכיר את הנגזרת של אגף ימין.

ולהוכחה האמיתית,

$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 + q + ... + q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1}$

מצד שני, $\frac{d}{dq}\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} kq^{k-1}$

ולכן, $\frac{d}{dq}\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{nq^{n-1}(q-1)-(q^n-1)}{(q-1)^2} = \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1}+1}{(q-1)^2}$

טענה זו גוררת כי: $\mathbb{E}\{X_n\} = \frac{pq[(n-1)q^n - nq^{n-1}+1}{(q-1)^2}$

יתר על כן, $\lim_{x\to\infty} q^n = 0;\ \ \lim_{x\to\infty} n\cdot q^n = 0$

כאשר $0 \le q < 1$ לכן נקבל: $\lim_{x\to\infty}\mathbb{E}\{X_n\} = \frac{pq}{(q-1)^2}$

דוגמא למתי נקבל שהתוחלת שואפת לאינסוף

אם $q = 0,\ p = 1$ אזי $P_{X_n}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \\ 0 & k = 1, 2, ..n \end{cases}$

ולכן:

$\mathbb{E}\{X_n\} = \sum_{k=0}^{n} kP_{X_n}(k) = 0, q = 0$

אם $q = 1, p = 0$ אזי, $P_{X_n}(k) = \begin{cases} 0; & k = 0, 1, ..n-1 \\ \\ 1; & k = n \end{cases}$

$\mathbb{E}\{X_n\} = n; \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\{X_n\} = \infty$

4.8 תוחלת

4.8.1 משפט־ (תכונות של תוחלת)

(Ω, f, P), Ω־ קבוצה סופית, $\zeta : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mu : \Omega \to \mathbb{R}$

4.8.2 **טענה־ אם** $\zeta(\omega) \geq 0$ **אזי** $\mathbb{E}\{\zeta\} \geq 0$

הוכחה: נניח כי $Range(\zeta) = \{x_1, ...x_m\}$.

אם $\zeta(\omega) \geq 0$ עבור כל $\omega \in \Omega$ אזי מתקיים כי ־ $x_1 \geq 0, ...x_m \geq 0$ ועל כן:

$\mathbb{E}\{\zeta\} = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot P_\zeta(x_j) \geq 0$

4.8.3 **טענה־** $\mathbb{E}(a \cdot \zeta + b\mu) = a \cdot \mathbb{E}(\zeta) + b\mathbb{E}(\mu)$ **כאשר** $a, b \in \mathbb{R}$

נגדיר: $Range(\zeta) = \{x_1, ...x_m\}$ ו־ $Range(\mu) = \{y_1, ...y_m\}$

אזי ניתן לרשום: $\zeta(\omega) = \sum_{i=1}^{m} x_i I_{A_i}(\omega); A_i = \{\omega : \zeta(\omega) = x_i\}$

$\mu(\omega) = \sum_{i=1}^{k} y_i I_{B_i}(\omega); B_i = \{\omega : \mu(\omega) = y_i\}$

נניח את הדעת על העובדה כי מתקיים: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} A_i; A_i \cap A_s = \varnothing, i \neq s$

$\Omega = \bigcup_{j=1}^{k} B_j; B_j \cap B_t = \varnothing; j \neq t$

ולכן ניתן לרשום כי ־ $\Omega = \bigcup_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...k}} A_i \cap B_j; (A_i \cap B_j) \cap (A_s \cap B_t) = \varnothing; when\ (i, j) \neq (s, t)$

אם $\omega \in \Omega$ אזי קיים A_iו־ B_iכך שיתקיים כי־ $\omega \in A_i \cap B_j$. כעת **נניח בשלילה** כי ־

$\omega \in (A_i \cap B_j) \cap (A_s \cap B_t); (i, j) \neq (s, t)$

דבר זה גורר כי־ $\omega \in A_j, \omega \in A_s, \omega \in B_j, \omega \in B_t$ ומכאן נובע כי $i = s, j = t$סתירה!

ולכן, $\alpha\zeta(\omega) + \beta\mu(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} (\alpha x_i + \beta y_j) I_{A_i \cap B_j}$

יש עוד מלא פיתוח אלגברי. הפסקתי לרשום. ראו מעמוד 10.3

4.8.4 טענה: $\zeta(\omega) \geq \mu(\omega) \quad \forall\omega \in \Omega$ אזי מתקיים: $\mathbb{E}\{\zeta\} \geq \mathbb{E}\{\mu\}$ (הוכחה בסיכומים של יבגני) הרצאה 10

4.8.5 טענה: $|\mathbb{E}\{\zeta\}| \leq \mathbb{E}\{|\zeta|\}$ (הוכחה בסיכומים של יבגני) הרצאה 10

4.8.6 טענה:$(\mathbb{E}\{|\zeta \cdot \mu|\})^2 \leq \mathbb{E}\{\zeta^2\} \cdot \mathbb{E}\{\mu^2\}$ ממשפט קושי שוורץ (כי ליניארית אף פעם לא באמת נגמרה) [(הוכחה בסיכומים של יבגני)] הרצאה 10

4.8.7 טענה: אם $\zeta = I(A)$ אז $\mathbb{E}\{\zeta\} = P(A)$ (הוכחה בסיכומים של יבגני)־הרצאה 10

4.9 משפט־

(Ω, f, P), Ω־ קבוצה סופית, $\zeta : \Omega \to \mathbb{R}$ $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ־ פונקציה חח"ע. $Range\{\zeta\} = \{x_1, .., x_m\}$

4.9.1 טענה־ $\mathbb{E}\{\phi)\zeta(\omega))| = \sum_{i=1}^{m} \phi(x_i) P_\zeta(x_i)$. **ההוכחה בסיכומים של יבגני. עמוד** 10.10

הרצאה 11-12

4.10 משתנים מקריים בלתי תלוים-

4.10.1 הגדרה-

יהי מרחב הסתברותי: (Ω, f, P), Ω- קבוצה סופית

$(\zeta_1, ...\zeta_n)$- וקטור של משתנים מקריים.

נגדיר: $P_{\zeta_1,..\zeta_n}(x_1, ..., x_n) \stackrel{def}{=} P\{\omega : \zeta_1(\omega) = x_1, ..., \zeta_n(\omega) = x_n\}$

כאשר $x_n \in Range(\zeta_n), ..., x_1 \in Range(\zeta_1)$

אם מתקיים: $P_{\zeta_1,..\zeta_n}(x_1, ..x_n) = P_{\zeta_1}(x_1) \cdot ..P_{\zeta_n}(x_n)$ **אזי נאמר שהמשתנים המקריים** $\zeta_1, ..\zeta_n$ **הם בלתי תלויים.**

<u>הערה-</u> פונקציית $P_{\zeta_1,..\zeta_n}(x_1, ..., x_n)$נקראת התפלגות הסתברותית של וקטור $(\zeta_1, ..\zeta_n)$

דוגמאות תוכלו למצוא בהרצאה 11

5 ** משפט- If ζ, μ are two independent random variables

יהי מרחב הסתברותי: (Ω, f, P), Ω- קבוצה סופית

$\mu : \Omega \to \mathbb{R}; \zeta : \Omega \to \mathbb{R}$ ו- μ, ζ הם בלתי תלויים.

<u>**סיכוי סביר שהמשפט הנ"ל יהיה במבחן**</u>

5.0.1 **טענת המשפט-

מתקיים- $\mathbb{E}\{\zeta(\omega)\mu(\omega)| = \mathbb{E}\{\zeta(\omega)\} \cdot \mathbb{E}\{\mu(\omega)\}$

הוכחה-

שלב 1) $\zeta(\omega) = \sum_{i=1}^{m} x_i I_{A_i}(\omega)$; $\mu(\omega) = \sum_{j=1}^{k} y_j I_{B_j}(\omega);$

כאשר- $Range\{\zeta\} = \{x_1, ...x_n\}$

$Range\{\mu\} = \{y_1, ..y_n\}$

$$A_i=\{\omega:\zeta(\omega)=x_i\}$$

$$B_j=\{\omega:\mu(\omega)=y_i\}$$

שלב 2) $\zeta(\omega)\cdot\mu(\omega)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k x_iy_jI_{A_i}(\omega)I_{B_j}(\omega)$

ונשים לב כי־ $I_{A_i}(\omega)\cdot I_{B_j}(\omega)=I_{A_i\cap B_j}(\omega)$ (היות והנחו כי μ,ζ הם בלתי תלויים.

לכן ניתן לרשום: $\zeta(\omega)\cdot\mu(\omega)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k x_iy_jI_{A_i\cap B_j}(\omega)$ (1)

שלב 3) נפעיל תוחלת על שני אגפי המשוואה (1) ונקבל־

$$\mathbb{E}\{\zeta(\omega)\mu(\omega)\}=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k x_iy_j\mathbb{E}\{I_{A_i\cap B_j}(\omega)\}=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k x_iy_jP\{I_{A_i\cap B_j}(\omega)\}$$

שלב 4) **אבל**

$$P\{A_i\cap B_i\}=P\{\omega:\zeta(\omega)=x_i,\mu(\omega)=y_j\}=P_{\zeta,\mu}(x_i,y_j)\underset{"}{=}P_\zeta(x_i)P_\mu(y_j)$$

ולכן מתקיים:

$$\mathbb{E}\{\zeta(\omega)\mu(\omega)\}=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k x_iP_\zeta(x_i)y_jP_\mu(y_j)=$$

$$=(\sum_{i=1}^m x_iP_\zeta(x_i)(\sum_{j=1}^k y_jP_\mu(y_j)=\mathbb{E}\{\zeta\}\mathbb{E}\{\mu\}$$

6 **משפט ־ The Poisson Theorem The Poisson theorem (convergence of the binomial distribution to the Possion distribution

כפי שהשם מרמז, נרצה להמיר את ההתפלגות הבינומית (אך בהרצאה יבגני **התחיל מברנולי** ולכן אעשה זאת גם כן) להתפלגות פואסון.
נגדיר־
התפלגות פואסונית מתאימה לתיאור מספר התופעות המתרחשות בפרק זמן מסוים, כאשר ההסתברות להתרחשות התופעה בפרק זמן קצרצר היא קבועה.
<u>סיכוי סביר שיהיה במבחן</u>

1. $\Omega=\{\omega:\omega=(a_1,..,a_n);a_i=1\,or\,0\}$
2. $\zeta_1,...\zeta_n$משתנים ברנולי, $1\le i\le n$ $\zeta_i(\omega)\overset{def}{=}a_i;$
3. $P(\omega)=p^{\sum_{i=1}^n a_i}q^{n-\sum_{i=1}^n a_i};\,p+q=1$
4. $S_n=\zeta_1+...+\zeta_n$
   $P(S_n=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$

6.1 **טענה(אותה צריך ללמוד למעשה)־

נניח כי $p = p(n); p(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ומתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty} p(n)\cdot n = \lambda, \lambda > 0$

אזי - $\lim\limits_{n\to\infty}\{P\{S_n = k\}\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-k}$

כאשר $k \in \{0, 1, 2, ...\}$

הוכחה־

1. ניתן לרשום־ $p(n) = \frac{\lambda}{n} + \phi(n), \quad \lim\limits_{n\to\infty} n\phi(n) = 0$
2. $P(S_n = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!}((p(n))^k(1-p(n))^{n-k} =$ (הצבה בהתפלגות הבינומית)
$= \frac{n(n-1)....(n-k+1)}{k!}(\frac{\lambda}{n} + \phi(n))^k(1 - \frac{\lambda}{n} - \phi(n))^{n-k}$
3. נשים לב : $\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} \underset{n\to\infty}{\to} 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} n\phi(n) = 0$
כך שבסה"כ עבור: $n(n-1)...(n-k+1)(\frac{\lambda}{n} + \phi(n))^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}(\lambda + n\phi(n))^k$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}(\lambda + n\phi(n))^k = (1\cdot\lambda + 0)^k = \lambda^k$
4. ועכשיו, $(1-\frac{\lambda}{n}-\phi(n))^{n-k} = e^{(n-k)ln(1-\frac{\lambda+n\phi(n)}{n})} \cong e^{-(n-k)\frac{(\lambda+n\phi(n))}{n}} = e^{-\frac{n-k}{n}(\lambda+n\phi(n))}$
ולכן, $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{\lambda}{n} - \phi(n))^{n-k} = e^{-\lambda}$

6.2 הערה 1

מתקיים $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} = 1$ ועל כן סדרת ההסתברויות $\{\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\}_{k=0}^{\infty}$ היא **התפלגות (התפלגות פואסון)**

6.3 הערה 2

נגדיר את המשתנה המקרי $\zeta_{poisson}$ע"י $\quad P\{\zeta_{poisson} = k\} \overset{def}{=} \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$

אזי מתקיים־

$$\mathbb{E}\{\zeta_{poisson}\} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!} \underset{1}{=} \lambda$$

6.4 הגדרה־

$$Var\{\zeta_{poisson}\} = \mathbb{E}\{\zeta^2_{poisson}\} - (\mathbb{E}\{\zeta_{poisson}\})^2$$

נרצה כעת לחשב את ערכו של $\mathbb{E}\{\zeta^2_{poisson}\}$

$$\mathbb{E}\{\zeta^2_{poisson}\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =?$$

$$1 = \frac{d}{d\lambda}\lambda = \frac{d}{d\lambda}(\sum_{k=0}^{\infty} \underset{=\lambda,2}{k\frac{\lambda^k}{k!}} \cdot e^{-\lambda}) = (\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{k!} \cdot e^{-\lambda}) - \sum_{k=0}^{\infty} \underset{=\lambda,2}{k\frac{\lambda^k}{k!}} \cdot e^{-\lambda}$$

מכאן נובע כי

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{k!} \cdot e^{-\lambda} = 1 - \lambda \to \lambda(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{k!} \cdot e^{-\lambda}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \lambda(\lambda - 1) \Rrightarrow \mathbb{E}\{\zeta^2_{poisson}\} = \lambda(\lambda\text{-}1)$$

ולכן נקבל ש־ $Var\{\zeta_{poisson}\} = \mathbb{E}\{\zeta^2_{poisson}\} - (\mathbb{E}\{\zeta_{poisson}\})^2 = \lambda(\lambda - 1) - \lambda^2 = \lambda$

7 **משפט־ אי שיוויון Chebyshev

(Ω, F, P) מרחב הסתברות כלשהו.
$\zeta : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq \mathbb{O}}$ ־ משתנה **מקרי חיובי**

8 **טענה $P\{\omega : \zeta(\omega) \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{E}\{\zeta(\omega)\}}{\varepsilon}, \quad while\, \varepsilon > 0$

הוכחה:

1. $\Omega = \underbrace{\{\omega : \zeta(\omega) \geq \varepsilon\}}_{=A} \cup \underbrace{\{\omega : 0 \leq \zeta(\omega) < \varepsilon\}}_{=A^c}$

$$\zeta(\omega) = \zeta(\omega)I_A(\omega) + \zeta(\omega)I_{A^c}(\omega) \geq^4 \zeta(\omega)I_A(\omega) \geq^3 \varepsilon \cdot I_A(\omega)$$

2. נפעיל על שני אגפי המשוואה את התוחלת, ונקבל:

$$\mathbb{E}\{\zeta(\omega)\} \geq \varepsilon \cdot \mathbb{E}\{I_A(\omega)\} = \varepsilon \cdot P(A)$$

אז קיבלנו למעשה: $\mathbb{E}\{\zeta(\omega)\} \geq \varepsilon \cdot P\{\omega : \zeta(\omega) \geq \varepsilon\}$ או בכתיבה אחרת: $P\{\omega : \zeta(\omega) \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{E}\{\zeta(\omega)\}}{\varepsilon}$

---

[3] בחרנו ב־A ועל כן־ $\zeta(\omega) \geq \varepsilon$
[4] היות ו־ ζ משתנה מקרי חיובי.

9 **טענה: $P\{\omega : |\zeta(\omega)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{E}\{|\zeta(\omega)|\}}{\varepsilon}$,

הוכחה:

היות והשמתנה המקרי שלנו הוא חיובי, אזי $|\zeta(\omega)|$ =$\zeta(\omega)$ ולכן הטענה מתקיימת באופן הזהה לטענה הקודמת.

10 **טענה: $P\{\omega : |\zeta(\omega)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{E}\{\zeta^2(\omega)\}}{\varepsilon^2}$

הוכחה:

$$P\{\omega : |\zeta(\omega)| \geq \varepsilon\} =^{5} P\{\omega : \zeta^2(\omega) \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{\mathbb{E}\{\zeta^2(\omega)\}}{\varepsilon^2}$$

11 **טענה: $P\{\omega : |\zeta(\omega) - \mathbb{E}\{\zeta(\omega)\}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{Var\{\zeta(\omega)\}}{\varepsilon^2}$

הוכחה: $P\{\omega : |\zeta(\omega) - \mathbb{E}\{\zeta(\omega)\}| \geq \varepsilon\} \leq^{6} \frac{\mathbb{E}\{(\zeta(\omega) - \mathbb{E}\{\zeta(\omega)\}^2\}}{\varepsilon^2} = \frac{Var\{\zeta(\omega\}\}}{\varepsilon^2}$

12 **משפט החוק החלש של המספרים הגדולים

- (Ω, F, P)= מרחב הסתברות כלשהו
- $\zeta_1, ...\zeta_n : \Omega \to \mathbb{R}$ משתנים מקריים.
- $\zeta_1, ..., \zeta_n$ בלתי תלויים עם אותה ההתפלגות $\mu < \infty$ כך ש:
  $\rho^2 = Var\{\zeta_1\} = Var\{\zeta_n\}; \mu = \mathbb{E}\{\zeta_1\} = ... = \mathbb{E}\{\zeta_n\}$ [7]

12.1 **טענה־ $\lim\limits_{n\to\infty}\{P\{\omega : |\frac{\zeta_1(\omega)+...+\zeta_n(\omega)}{n} - \mu| \geq \varepsilon\}\} = 0$

הוכחה עם המון מעברים אלגבריים, רעיון כללי שיעזור לזכור: נשתמש באי־שוויון צ'בישב ונרצה לפתח את הסכום.

הוכחה־

[5] אם נפרק את השיוויון באגף ימין על ידי נוסחאת הכפל המקוצר, נקבל תשובה אחת שהיא כביכול לא הגיונית, ככה שלא הוספנו פתרונות למערכת ואנו עומדים בתנאי האי־שיוויון משמאל.

[6] **מטענה 10רק החלפתי את המשתנה**

[7] לא ידעתי מה זה השבלול המוזר הזה שהוא שם בסיכומים שלו, אז הגדרתי אותו להיות ρ

1. נגדיר: $S_n(\omega) = \zeta_1(\omega) + ... + \zeta_n(\omega)$

2. מתקיים $\mathbb{E}\{S_n(\omega)\} = n \cdot \mu$ (אם לא הבנתם למה, אז תזכרו בסעיף 3 בתנאים לקיום חוק זה)

$$Var\{\frac{S_n(\omega)}{n}\} = \frac{\mathbb{E}\{S_n^2(\omega)\} - (\mathbb{E}\{S_n(\omega)\})^2}{n^2}$$

3. מטענה 11 נקבל כי: $\mathrm{P}\{\omega : |\frac{S_n(\omega)}{n} - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{Var\{\frac{S_n(\omega)}{n}\}}{\varepsilon^2}$ (מתזכרת־ $\mu = \mathbb{E}\{\zeta_1\} = ... = \mathbb{E}\{\zeta_n\}$)

ומשילוב של שלב 2 בהוכחה, נראה כי־ $\frac{Var\{\frac{S_n(\omega)}{n}\}}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{E}\{S_n^2(\omega)\} - (\mathbb{E}\{S_n(\omega)\})^2}{\varepsilon^2 n^2}$

4. $(\mathbb{E}\{S_n(\omega)\})^2 = n^2\mu^2$

$$\mathbb{E}\{S_n^2(\omega)\} = \mathbb{E}\{[\sum_{i=1}^n \zeta_i(\omega)][\sum_{j=1}^n \zeta_j(\omega)] =^{8} \mathbb{E}\{\sum_{i=1}^n \zeta_i^2(\omega) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n\, in\, fact\, (i\neq j)} \underbrace{\mathbb{E}\{\zeta_i(\omega)\}}_{=\mu}\underbrace{\mathbb{E}\{\zeta_j(\omega)\}}_{=\mu} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\zeta_i^2(\omega)\} + n(n-1)\mu^2$$

ולכן נקבל: $\mathbb{E}\{S_n^2(\omega)\} - (\mathbb{E}\{S_n(\omega)\})^2 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\zeta_i^2(\omega)\} - n\mu^2$

(א) נזכיר כי בעבור $i \in \{1, ...n\}$;

$$n\mu = n\mathbb{E}\{\zeta_i\} = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\zeta_i\}$$

ז"א: $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\zeta_i^2(\omega)\} - n\mu^2 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\zeta_i^2(\omega)\} - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\zeta_i(\omega)\} \cdot \mu =$

$$\sum_{i=1}^n [\mathbb{E}\{\zeta_i^2(\omega)\} - \mathbb{E}\{\zeta_i(\omega)\} \cdot \mu] = \sum_{i=1}^n [\mathbb{E}\{\zeta_i^2(\omega)\} - (\mathbb{E}\{\zeta_i(\omega)\})^2] =$$

$$= \sum_{i=1}^n Var(\zeta_i(\omega)) = n\rho^2$$

למעשה קיבלנו: $Var\{\frac{S_n(\omega)}{n}\} = \frac{\rho^2}{n}$

5. ניזכר בטענה 11 ונמצא ש־ $P\{\omega : |\frac{S_n(\omega)}{n} - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\rho^2}{n\varepsilon}$ כאשר נשאיף את $n \to \infty$

[8] פיצלנו את המכפלה לשתי סיגמות נפרדות, אם נדמיין את זה כמטריצה, אז הסיגמא השמאלית שהתקבלה מייצגת את האלכסון(כאשר הקורדינטה של העמודה שווה לקורדינטה של השורה) ואילו הסיגמא הימנית מייצגת את כל מה שהוא לא האלכסון. היות ומבחינתו $(i, j) = (j, i)$ (הסדר לא חשוב) אז הורדנו סיגמא אחד ופשוט הכפלנו ב־2.

נקבל שהתוצאה גם שואפת לאפס. וזה בדיוק מה שרצינו.

הוכחה במילים שלי:

12.2 **טענה־ $\lim_{n\to\infty}\{P\{\omega : |\frac{\zeta_1(\omega)+...+\zeta_n(\omega)}{n} - \mu| \geq \varepsilon\}\} = 0$

החוק החלש של המספרים הגדולים

נרצה להוכיח את הטענה הנ"ל.

יהיו $\zeta_1(\omega), ...\zeta_n(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ משתנים מקרים בת"ל זה לזה.

באמת ניתן לראות כי הטענה מזכירה את אי־שיווין צ'בישב(מוגדר עבור כל $\mathbb{R}$ועל כן נעזר בו).

תחילה, המשתנים המקרים שלנו צריכים להיות בת"ל ושווי התפלגות, כלומר: $\zeta_1(\omega) = \zeta_2(\omega).... = \zeta_n(\omega)$

נסמן$\mathbb{E}[\zeta_1(\omega)] = \mathbb{E}[\zeta_2(\omega)].... = \mathbb{E}[\zeta_n(\omega)]=\mu$

$Var\zeta_1(\omega) = ...Var\zeta_n(\omega) = \rho^2$

$\zeta_1(\omega) + ... + \zeta_n(\omega) = S_n(\omega)$

דבר זה גורר רישום אחר:$|\frac{\zeta_1(\omega)+...+\zeta_n(\omega)}{n} - \mu| = \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - \mathbb{E}[\frac{S_n(\omega)}{n}]\right| \leq \frac{Var[S_n(\omega)]}{n\varepsilon^2}$

נרצה לדעת למה הערך הנ"ל שווה. ועל כן מהגדרה: $Var[S_n(\omega)] = \mathbb{E}[S_n^2(\omega)] - (\mathbb{E}[S_n])^2$

נבטא את $\mathbb{E}[S_n^2(\omega)]$. לשם כן, נפריד לשתי סיגמות שונות, כאשר $i = j$וכאשר $i \neq j$:

(בתכלס זה השונות)!

$$\mathbb{E}[S_n^2(\omega)] = \mathbb{E}([\sum_{i=1}^n \zeta_i(\omega)][\sum_{i=1}^n \zeta_i(\omega)] = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n \zeta_i^2(\omega)) + 2\sum_{1\leq i\neq j\leq n} \mathbb{E}\zeta_i(\omega)\mathbb{E}\zeta_j(\omega)) =$$

$$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n \zeta_i^2(\omega)) + \mathbb{E}(\sum_{1\leq i\neq j\leq n} \zeta_i(\omega)\zeta_j(\omega)) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\zeta_i^2(\omega)) + n(n-1)\mu^2$$

$$Var[S_n(\omega)] = \mathbb{E}[S_n^2(\omega)] - (\mathbb{E}[S_n])^2 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\zeta_i^2(\omega)) + n(n-1)\mu^2 - (n\mu)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\zeta_i^2(\omega)) - n\mu\cdot\mu =$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\zeta_i^2(\omega)) - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\zeta_i(\omega)\cdot\mu = \sum_{i=1}^n [\mathbb{E}(\zeta_i^2(\omega) - \mathbb{E}(\zeta_i(\omega)^2] =$$

$$= \sum_{i=1}^n Var(\zeta_i(\omega) = n\rho^2$$

**** הערה ****

$Var[S_n(\omega)]$ נפרק את השונות בדרך אחרת.

מהגדרת שונות, $Var[S_n(\omega)] = \sum_{i=1}^{n} Var[\zeta_i(\omega) + \sum_{i\neq j} cov(\zeta_i(\omega), \zeta_j(\omega))$

היות והמשתנים שלנו הם בת"ל, אז ניתן לומר כי השונות שווה ל־0 ולכן־ $Var[S_n(\omega)] =$ $\sum_{i=1}^{n} Var[\zeta_i(\omega) = n\rho^2$

מטענה שכבר ראינו, מתקיים כי: - $\left|\frac{S_n(\omega)}{n} - \mathbb{E}[\frac{S_n(\omega)}{n}]\right| \leq \frac{Var[S_n(\omega)]}{\varepsilon} = \frac{n\rho^2}{\varepsilon}$ וכאשר נשאיף לאינסוף נקבל 0 . סיימנו.

13 **חוק החלש של המספרים הגדולים עבור משתנים מקריים ברנולי:

הפעם נגדיר־

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, ..., a_n); a_i = 1\, or\, 0\}$$

$$P(\omega) = p^{\sum_{i=1}^{n} a_i} q^{n-\sum_{i=1}^{n} a_i}; \quad p+q=1; \quad p,q \geq 0$$

$$\zeta_1(\omega) = a_1, ...\zeta_n(\omega) = a_n; \quad \mathbb{E}\{\zeta_1\} = ...\mathbb{E}\{\zeta_n\} = p; \quad Var\{\zeta_1\} = ... =^9 Var\{\zeta_n\} = pq$$

בעזרת כל התנאים המקדימים, נקבל את החוק החלש של המספרים הגדולים עבור משתנים מקריים ברנולי

$$P\{\omega : |\frac{\zeta_1(\omega)+...+\zeta_n(\omega)}{n} - p| \geq \varepsilon\} \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2} \to 0; n \to \infty$$

13.1 **טענה־

נגדיר $S_n(\omega) = \zeta_1(\omega) + ... + \zeta_n(\omega)$

אזי ניתן לרשום:

$$P\{\omega : |\frac{S_n(\omega)}{n} - p| \geq \varepsilon\} = \sum_{k:|\frac{k}{n}-p|\geq\varepsilon} P_n(k)$$

כאשר־ $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

הוכחה־

להשתמש בזה שמתקיים: $P\{\omega : S_n(\omega) = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$\mathbb{E}[\zeta_1^2] = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p; \quad \mathbb{E}\{\zeta_1\}^2 = p^2; \quad Var\{\zeta_1\} = \mathbb{E}[\zeta_1^2] - \mathbb{E}\{\zeta_1\}^2 = p - p^2 = p(1-p) =^9 pq$

אזי ניתן לרשום־ [10] $\sum_{k:|\frac{k}{n}-p|\geq\varepsilon} P_n(k) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2} = \frac{p-p^2}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

14 **משפט־ The Weierstrass Theorem

יש לדעת טוב

אתחיל ואומר, ההוכחה לא נראת פשוטה ואף ארוכה.

תנאים לקיום המשפט:

- $f: [0,1] \to \mathbb{R}$; f **פונקציה רציפה.**
- $0 \leq p \leq 1$
- The Bernstein polynomial: $B_n(p) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

14.1 **טענה $\lim_{n\to\infty}\{\max_{0\leq p\leq 1}|f(p)-B_n(p)|\} = 0$

במילים אחרות, סידרה $\{B_n(p)\}_{n=0}^{\infty}$מתכנסת לפונקציה $f(p)$במידה שווה בקטע $[0,1]$

הוכחה־

1. נבחר $\varepsilon > 0$ אם fרציפה בקטע $[0,1]$אזי היא גם רציפה במידה שווה בקטע $[0,1]$ולכן קיים $\delta = \delta(\omega)$ כך שיתקיים:
$x, y \in [0,1]; \quad |x-y| \leq \delta(\varepsilon) \Rrightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$

2.

$$\begin{aligned}
|f(p)-B_n(p)| &= |\sum_{k=0}^{n}(f(p)-f(\frac{k}{n}))\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}| \\
&\leq^{(1)} \sum_{k=0}^{n}|f(p)-f(\frac{k}{n})|\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} =^{(2)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k:|\frac{k}{n}-p|\leq\delta(\omega)}|f(p)-f(\frac{k}{n})|\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + \sum_{k:|\frac{k}{n}-p|>\delta(\omega)}|f(p)-f(\frac{k}{n})|\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\leq^{(3)} \varepsilon \cdot \sum_{k:|\frac{k}{n}-p|\leq\delta(\omega)}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + 2M\sum_{k:|\frac{k}{n}-p|>\delta(\omega)}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

[10] אני חושבת שזה בה מהמקום שכאשר $p = q = \frac{1}{2}$נקבל את החסם הטוב מכל.

(1) אי־שיווין המשולש

(2) פיצול לשתי סיגמות שמשלימות לכל דלתא אפשרית

(3) עבור: $M = \underset{0\le x\le 1}{max}|f(x)|$

אבל(!) $\sum_{k:|\frac{k}{n}-p|}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \le \sum_{k=0|}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = 1$

ומכאן נובע: $|f(p)-B_n(p)| \le \varepsilon + 2M\sum_{k:\,|\frac{k}{n}-p|>\delta(\omega)}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

3. כעת נניח כי $\zeta_1,...\zeta_n$הינם משתנים מקריים ברנולי, ונגדיר: $S_n(\omega) = \zeta_1(\omega) + ... + \zeta_n(\omega)$

ולפי החוק החלש במספרים הגדולים, נקבל:

$P\{\omega : |\frac{S_n(\omega)}{n} - p| > \delta(\omega)\} \le \frac{p(1-p)}{n\delta^2(\omega)}$ וצורה אחרת:

$\sum_{k:|\frac{k}{n}-p|>\delta(\varepsilon)}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \le \frac{p(1-p)}{n\delta^2(\omega)} \le \frac{1}{4n\delta^2(\varepsilon)}$

4. ונקבל- $|f(p)-B_n(p)| \le \varepsilon + \frac{2M}{4n\delta^2(\varepsilon)}$

ולכן נקבל סופסוף: $\lim_{n\to\infty}\underset{0\le p\le 1}{max}\{|f(p)-B_n(p)|\} = 0$

15 **משפט:** The Gaussian Approximation For The Bernouli Distrobution

לדעת טוב

- נגדיר- $P_n(k) = \binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ונניח כי $0 < p < 1$
- $k = k(n)$, $\lim_{n\to\infty} k(n) = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(n-k(n)) = \infty; \underset{n\to\infty}{lim}[\frac{(k(n)-np)^3}{n^2} = 0$

15.1 **טענה:** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{P_n(k(n))}{\frac{1}{\sqrt{2\pi pq}}e^{-\frac{(k(n)-np)^2}{2npq}}}\right) = 1$

במילים אחרות,$n\to\infty$, $P_n(k(n)) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi pq}}e^{-\frac{(k(n)-np)^2}{2npq}}$

הוכחה־

1. מנוסחא סטרלינג, מתקיים: $n! = \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n(1+R(n))$ כאשר $\lim_{n\to\infty}R(n) = 0$

2. $P_n(k) = \frac{n!}{(n-k)!k!}p^kq^{n-k} = \frac{(\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n)}{(\sqrt{2\pi(n-k)}e^{-(n-k)}(n-k)^{n-k})\cdot(\sqrt{2\pi k}e^{-k}k^k)}\cdot[\frac{(1+R(n)}{(1+R(n-k)(1+R(k)}]\cdot p^kq^{n-k}$

$; \quad n, k, n-k \to \infty$

3. $P_n(k) \simeq [\frac{n}{2\pi k(n-k)}]^{\frac{1}{2}} \frac{(n)^{k+(n-k)}q^{n-k}p^k}{k^k(n-k)^k} = [\frac{n}{2\pi k(n-k)}]^{\frac{1}{2}}(\frac{np}{k})^k(\frac{nq}{n-k})^{n-k}$

נגדיר $\delta_k = k - np$

$k = \delta_k + np$

$n - k = nq - \delta_k$

$\frac{\delta_k^3}{n^2} \to 0, n \to \infty$ - כחלק מההנחות על המשפט אנו יודעים כי זה מתקיים

אזי ניתן לרשום- $P_n(k) \simeq [\frac{n}{2\pi(\delta_k+np)(nq-\delta_k)}]^{\frac{1}{2}} \cdot [\frac{1}{(1+\frac{\delta_k}{np})}]^{\delta_k+np} \cdot [\frac{1}{1-\frac{\delta_k}{nq}}]^{nq-\delta_k}$

4. ברור כי- $[\frac{n}{2\pi(\delta_k+np)(nq-\delta_k)}]^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$

5. $[\frac{1}{(1+\frac{\delta_k}{np})}]^{\delta_k+np} \cdot [\frac{1}{1-\frac{\delta_k}{nq}}]^{nq-\delta_k} = e^{-(\delta_k+np)ln(1+\frac{\delta_k}{np})-(nq-\delta_k)ln(1-\frac{\delta_k}{nq})=}$

$$= e^{-(\delta_k+np)(\frac{\delta_k}{np}-\frac{\delta_k^2}{2n^2p^2}+\frac{\delta_k^3}{3n^3p^3}-...)+(nq-\delta_k)(\frac{\delta_k}{nq}+\frac{\delta_k^2}{2n^2q^2}+\frac{\delta_k^3}{3n^3q^3}+...)=}$$

$$= exp\{-\delta_k + \delta_k - \delta_k^2(\frac{1}{np} - \frac{1}{2np}) - \delta_k^2(\frac{1}{nq} - \frac{1}{2nq}) - \delta_k^3(\frac{1}{3n^2p^2} - \frac{1}{2n^2p^2}) - \delta_k^3(\frac{1}{2n^2q^2} - \frac{1}{3n^2q^2}) + ...\} =$$

$$\simeq exp\{-\frac{\delta_k^2}{2n}(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\} = exp\{-\frac{\delta_k^2}{2npq}\}$$

אזי- $P_n(k) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{\delta_k^2}{2npq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(np-k)^2}{2npq}}$

הרצאה 14

לא היה משהו מעניין

הרצאה 15-16

15.2 הגדרה- The Standart Gaussian Distribution On The Real Line

$$\varPhi_{Gauss}(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

15.3 הגדרה- The Standart Gaussian Real Variable

$$X_{Gauss} : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$P\{\omega : X_{gauss}(\omega) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

15.4 עבור ניסוי ברנולי-

מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\omega : a \leq \frac{S_n(\omega)-np}{\sqrt{npq}} \leq b\} = \frac{1}{2\pi \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \varPhi_{Gauss}(b) - \varPhi_{Gauss}(a)\surd}$

15.5 משפט- Central Limit Theorem

$\zeta_1, ..., \zeta_n$משתנים מקריים בלתי תלוים עם אותה ההתפלגות,

$$\mathbb{E}\{\zeta_1\} = ... = \mathbb{E}\{\zeta_n\} = \mu < \infty$$

$$Var\{\zeta\} = ... = Var\zeta_n = \rho^2 < \infty$$

אזי מתקיים-

$$lim_{n\to\infty}[P\{\omega : \alpha < \frac{\zeta_1(\omega)+...+\zeta_n(\omega)-n\mu}{\rho n^{\frac{1}{2}}} < \beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

או

$$\zeta_1(\omega) + ... + \zeta_n(\omega) \simeq n\mu + \rho n^{\frac{1}{2}} X_{Gauss}$$

15.5.1 דוגמא- קזינו

נניח ואנו בקזינו ולגלגל ברולטה יש 38 חריצים(התאים ממוספרים):

18 אדומים, 18 שחורים ו-2 ירוקים

קיים מהמר "לארג'" אשר בוחר להמר על 1\$ על צבע אדום. מניחים שהוא משתתף במשחק n פעמים.

מצאי את ההסתברות P_n שהמהמר ירוויח כסף אחרי שהוא משחק n פעמים, כאשר 1) $n = 100$ 2) $n = 1000$

הפתרון בהרצאה 15, ארוך מדי. אין לי כוח לרשום אבל לדעתי דוגמא חשובה מאוד

דבר נוסף, A Competition Problem Random Grouth,Brownian Motion

גם בעיות שחשוב לעבור עליהן.-הכל בהרצאה 16-15-.

15.6 הגדרה-(משתנה מקרי רציף)

- יהי ζ משתנה מקרי, $\zeta : \Omega \to \mathbb{R}$ נאמר ש-ζ רציף אם קיימת פונקציה אינטגרבילית $P_\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

כך שמתקיים- $P\{\omega : \alpha \leq \zeta(\omega) \leq \beta\} = \int_\alpha^\beta P_\zeta(x)dx$ עבור כל $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$

- פונקציה $P_\zeta(x)$ נקראת פונקציית צפיפות של ζ
- מתקיים: $\int_{-\infty}^{\infty} P_\zeta(x)dx = 1$
- אם ζ הוא משתנה מקרי רציף, אזי מתקיים $\forall a \in \mathbb{R}, P\{\omega : \zeta(\omega) = a\} = 0$

15.7 הגדרה- פונקציית התפלגות של משתנה מקרי רציף-

יהי ζ משתנה מקרי רציף. נגדיר: $\Phi_\zeta(x) = P\{\omega : \zeta(\omega) \leq x\}$ פונקציה זו נקראת פונקציית ההתפלגות של ζ.

נשים לב כי מתקיים-$\Phi_\zeta(x) = \int_{-\infty}^{x} P_\zeta(t)dt$

15.8 הגדרה־ צפיפות משותפת־

יהיו ζ_1, ζ_2 שני משתנים מקריים רציפים המוגדרים מעל אותו מרחב ההסתברות. נאמר של־ ζ, μ קיימת צפיפות משותפת

אם: $P\{\omega : (\zeta_1, \zeta_2) \in B\} = \int_B \int p_{\zeta_1,\zeta_2}(x_1, x_2)dx_1dx_2$

במידה וניתן להוכיח כי ζ_1, ζ_2 הם משתנים בלתי תלויים אזי מתקיים:

$p_{\zeta_1,\zeta_2}(x_1, x_2) = p_{\zeta_1}(x_1)p_{\zeta_2}(x_2)$

16 **משפט(סכום של שני משתנים מקריים בלתי תלוים)

ζ_1, ζ_2 משתנים רציפים בלתי תלוים

$p_{\zeta_1}(x)$ ־ צפיפות של ζ_1

$p_{\zeta_2}(x)$ ־ צפיפות של ζ_2

16.0.1 **טענה־ $p_{\zeta_1+\zeta_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\zeta_1}(t)p_{\zeta_2}(x-t)dt$

הוכחה־

1. נניח כי $p_{\zeta_1,\zeta_2}(x, y)$ היא צפיפות משותפת של ζ_1, ζ_2 מתקיים $p_{\zeta_1,\zeta_2}(x, y) = p_{\zeta_1}(x)p_{\zeta_2}(y)$

$$P\{\omega : \zeta_1(\omega) + \zeta_2(\omega) \le z\} = \int \int_{(x,y):x+y\le z} p_{\zeta_1,\zeta_2}(x, y)dxdy$$

נעזר כעת ביעקוביאן־ ונגדיר לשם כך־

$u \in [-\infty, z] \Leftarrow u = x + y$

$x = x$

$-1 = | \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} | = | \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \end{matrix} |$ לכן ניתן לרשום:

$$\int \int_{(x,y):x+y\le z} p_{\zeta_1,\zeta_2}(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{z} p_{\zeta_1,\zeta_2}(x, u - x) \cdot | - 1| \cdot du)dx =$$ [11]

$$\int_{-\infty}^{z}(\int_{-\infty}^{\infty} p_{\zeta_1}(x)p_{\zeta_2}((u - x)dx)du$$

נשתמש בנגזרת ביחס ל־Z

כך שנקבל־ $p_{\zeta_1+\zeta_2}(\mathrm{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\zeta_1}(x)p_{\zeta_2}(z - x)dx$

---

[11] את היעקוביאן אנו שמים בערך מוחלט, ובמקרה שלנו הוא חסר השפעה. כי 1־ בערך מוחלט זה 1.

17 הרצאה 17-18

17.1 הערה:

ניתן למצוא 2 דוגמאות בתחילת ההרצאה, שווה לעבור עליהן. (במיוחד על השנייה).

17.2 הגדרה-תוחלת של משתנה מקרי רציף

1. אם ζ הוא משתנה מקרי רציף עם צפיפות $p_\zeta(x)$אזי נגדיר: $\mathbb{E}\{\phi(\zeta)\} \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\rho_\zeta(x)dx$

2. אם ζ_1, ζ_2 הם שני משתנים רציפים עם צפיפות משותפת $\rho_{\zeta_1,\zeta_2}(x,y)$, אזי נגדיר:
$\mathbb{E}\{\phi(\zeta_1,\zeta_2)\} \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,y)\rho_{\zeta_1,\zeta_2}(x,y)dxdy$

17.3 הגדרה- $The\, K'th\, Order\, Statistics\, Of\;\; X_1,...,X_n$

- $X_1,...X_n$משתנים אקראיים
- נגדיר: $X_{(1)} \overset{def}{=} min(X_1,...X_n)$

$$X_{(2)} \overset{def}{=} min(X_1,...X_n)\backslash(X_{(1)}\;)$$
$$\vdots$$
$$X_{(n)} \overset{def}{=} max(X_1,...X_n)$$

- משתנה מקרי$X_{(k)}$נקרא סטטיסטיקה מסדר kעבור $X_1,....,X_n$

18 **משפט-

$The\, Formula\, For\, The\, Probability\, Density$

$Function\, Of\, The\, K'th\, Orther\, Statistics$

<u>לדעת טוב</u>

- $X_1, ...X_n$- משתנים רציפים ובלתי תלויים.
- $F_{X_1}(x) = .. = F_{X_n}(x) = F(x) = \int_{\infty}^{x} p(t)dt$
- $X_{(k)}$- סטטיסטיקה מסדר k עבור $X_1, .., X_n$

18.1 **טענה-

$$p_{X_{(k)}}(x) = np(x)\binom{n-1}{k-1}((F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}$$

כאשר $-\infty < x < \infty$, $k = 1, 2, ..., n$

<u>הערה-</u> נזכיר כי $X_{(1)} = min(X_1, ., X_n)$

$X_{(n)} = max(X_1, ..., X_n)$

אזי- $p_{X_{(1)}}(x) = np(x)(1-F(x))^{n-1}$

$P_{X_{(n)}}(x) = np(x)(F(x))^{n-1}$

הוכחה-

1. נחשב את $p_{x_{(n)}}(x)$:

$$p_{x_{(n)}}(x)dx = P\{X_{(n)} \in dx\} = P\{one\, of\, the\, x_1, ..x_n\ in\, dx,\, all\, others\ < x\} =$$

$$= P(X_1 \in dx, all\, others\ < x) + P(X_2 \in dx,\, all\, others\ < x) + ... + P(X_n \in dx,\, all\, others\ < x) =^{(1)}$$

$$nP(X_1 \in dx,\, all\, others\ < x) =^{(2)} nP(X_1 \in dx) \cdot P(all\, others\ < x) = np(x)dx\left(\int_{-\infty}^{x} p(t)dt^{n-1}\right) = np(x)dx\,(F(x))^{n-1}$$

(1) נובע מסימטריות

(2) נובע מאי־תלות

2. באופן כללי,

$$P_{X_{(k)}}(x)dx = P\{X_{(k)} \in dx\} = P\{one\,of\ the\,X's\ \in dx, exactly\,k{-}1\,of\,the\,other\ < x\} =$$

$$= nP\{X_1 \in dx,\ exactly\,k-1\,of\,the\,others\ < x\} =$$

$$= n\underbrace{P\{X_1 \in dx\}}_{=p(x)dx} \cdot P\{exactly\,k-1\,of\,the\,others\ < x\} \overset{(3)}{=}$$

$$= np(x)dx\tbinom{n-1}{k-1}\left(F(x)\right)^{k-1}\left(1-F(x)\right)^{n-k}$$

$$\tbinom{n-1}{k-1}\left(\int_{-\infty}^{x} p(t)dt\right)^{k-1}\left(\int_{x}^{\infty} p(t)dt\right)^{(n-1)-(k-1)} \quad (3)$$

18.1.1 דוגמא־$Order\,Statistics\,Of\,Uniform\,Random\,Variables$

- $X_1, ...X_n$בלתי תלויים עם התפלגות אחידה בקטע $[0,1]$
- $$p_{x_1}(x) = ... = p_{x_n}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

ולכן,

$$P_{X_{(k)}}(x) = n\binom{n-1}{k-1}\left(\int_{-\infty}^{x} 1dt\right)^{k-1}\left(1-\int_{x}^{\infty} dt\right)^{(n-1)-(k-1)} when\,x \in [0,1]$$

$$or\,0 when\,x \notin [0,1]$$

18.2 הגדרה־ $Conditional\, Expectation:\ Discrete\, Case$

- X־ משתנה מקרי

$Range(X)$ ־ קבוצה **בדידה** (כלומר סופית או בת מניה)

אזי X הוא משתנה **מקרי דיסקרטי**

- A־ מאורע, $P(A) > 0$

$E(X|A) \overset{def}{=} \sum_{x\in Range(x)} xP\{\omega : X(\omega) = x|A\}$ (תוחלת תחת התנייה)

- ניתן למצוא דוגמא בהרצאה 18.3

18.3 משפט־

- $\Omega = A_1 \cup ... \cup A_n; \quad A_i \cap A_j = \varnothing$
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ משתנה מקרי דיסקרטי.

18.3.1 טענה־ $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X|A_i)P(A_i)$

מהגדרת תוחלת אנו יודעים כי מתקיים:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in Range(X)} x \cdot P\{\omega : X(\omega) = x\} =$$

$$= \sum_{x\in Range(X)} x \cdot \sum_{i=1}^{n} P\{X = x|A_i\}P(A_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{x\in Range(X)} x \cdot P\{X = x|A_i\} \right) P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X|A_i)P(A_i)$$

18.3.2 מסקנה־

ניתן לרשום: $\mathbb{E}(Y)=\sum_{x\in Range(X)}\mathbb{E}(Y|X=x)P(X=x)$

18.4 הגדרה־ $Conditional\,Expectation\,Of\,Y\,given\,X$

- X,Y־ שני משתנים מקריים בדידים.
- נגדיר: $\mathbb{E}(Y|X):Range(x)\to\mathbb{R}$

על ידי: $\mathbb{E}(Y|X)(x)\overset{def}{=}\mathbb{E}(Y|X=x),\ x\in Range(X)$

19 **משפט־

X,Y־ שני משתנים מקריים בדידים.

<u>**ללמוד טוב**</u>

19.1 **טענה־ $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))=\mathbb{E}(Y)$

הוכחה־

1. נניח כי ϕ היא פונקציה של משתנה מקרי X. אזי ניתן לרשום מהגדרת תוחלת:
$\mathbb{E}[\phi(X)]=\sum_{x\in Range(X)}\phi(x)P(x=X)$
2. כעת נציב: $\phi(x)=\mathbb{E}(Y|X)$ כך שנקבל־$\mathbb{E}(Y)$
$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))=\mathbb{E}[\sum_{x\in Range(X)}\mathbb{E}(Y|X)P(x=X)]=$[12]
*יש דוגמאות מ־ 18.9 כדאי לעבור עליהן.

[12] הסטטיסטיקאי חסר ההכרה+ממסקנה 18.3.2

19.1.1 דוגמא קצרה־

נסמן ב=Xאת מספר הילדים במשפחה. מניחים כי Xהוא משתנה מקרי שעבורו מתקיים ־ $\mathbb{E}[X] = \mu$.

נניח כי כל ילד יכול להיות בן בהסתברות של $1 - p$ או בת בהסתברות של p. נסמן ב־Gאת מספר הבנות במשפחה. מצאי את $\mathbb{E}[G]$

פתרון־

1. נשים לב כי מתקיים $\mathbb{E}[G] = \mathbb{E}(\mathbb{E}(G|X))$
2. $\mathbb{E}(G|X = n) = \sum_{y=0}^{n} y\binom{n}{y}p^y(1-p)^y = \mathbb{E}[S_n] =^{13} n \cdot p$
   לכן ניתן לרשום־ $\mathbb{E}(G|X) = p\mathrm{X}$
3. $\mathbb{E}[G] = \mathbb{E}(\mathbb{E}(G|X)) = \mathbb{E}(p\mathrm{X}) = p\mathbb{E}(X) = p\mu$

[13] התפלגות בינומית

הרצאה 19-20

19.2 הגדרה-

- Xמשתנה **מקרי רציף**
- Aמאורע
- $\mathrm{P(A|X=x)}=\frac{P(A\cap X\in dx)}{P(X\in dx)}$

19.2.1 הערה-

אם X היה משתנה **מקרי דיסקרטי היינו כותבים-** $P(A|X=x)=\frac{P(A\cap X=x)}{P(X=x)}$ **אבל** אנחנו במקרה של משתנה מקרי רציף. **<u>לשים לב להבדל</u>**

19.3 משפט-

- X,Y משתנים מקריים רציפים
- $\mathrm{p(x,y)}$- צפיפות משותפת של Y,X
- $p_x(x)$- צפיפות של X
- $p_X(x_0)\neq o$

19.3.1 טענה-

נגדיר את הצפיפות של Yבהינתן Xעל ידי: $p_Y(y|X=x)dy=P(Y\in dy|X=x)$

אז מתקיים: $p_Y(y|X=x_0)=\frac{p(x_0,y)}{P_X(x_0)}$

19.3.2 הערה־

צפיפות מותנית $p_Y(y|X=x_0)$מגדירה התפלגות של משתנה מקרי Yבהנתן X:

$P(Y\leq\beta\,|\,X=x_0)=\int_{-\infty}^{\beta}P_Y(y|X=x_0)dy$

דוגמא עם 3 פתרונות(בסוף הרצאה 19). חשוב! במיוחד הדוגמא האחרונה, להזכר איך פונקציית הצפיפות של התפלגות אחידה מוגדרת.

19.4 הגדרה־תוחלת תחת התניה, משתנים רציפים:

$\mathbb{E}(\mathrm{Y}|X=x)\stackrel{def}{=}\int_{-\infty}^{\infty}yp_Y(y|X=x))dy$

19.5 משפט־ $The\,Integral\,Conditioning\,Formula$

1. Aמאורע
2. Xמשתנה מקרי רציף, עם צפיפות $p_X(x)$

19.5.1 טענה־

$P(A)=\int_{\mathbb{R}}P(A|X=x)p_X(x)dx$ (בתכלס זה המקביל לנוסחאת ההסתברות השלמה של המשתנים הלא רציפים[בדידים])

19.6 משפט ־

נניח כי X,Y הם משתנים רציפים. אזי ניתן לרשום:

$\mathbb{E}(g(Y))=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{E}(g(Y)|X=x)p_x(x)dx$

הוכחה ניתן למצוא ב־20.4 אצל יבגני + דוגמאות טובות לאחר מכן.

היה איזה דוגמא בהרצאה 20 על למצוא $\mathbf{E[Y|X],E[X|Y]}$ עם משהו $\frac{1}{2-x}$. לחזור עליה.

כנראה יהיה במבחן.

19.7 משפט־ $The\, Bayes\, Rule\, In\, The\, Continuous\, Case$

- X־ משתנה מקרי רציף
- A מאורע, $P(A)>0$

19.7.1 טענה

$P(X\in dx|A)=\frac{P(A|x=X)}{P(A)}P(X\in dx)$

ההוכחה ב20.8 אצל יבגני. זהה להוכחה שכבר ראינו במקרה הלא רציף.

19.7.2 טענה:

נניח כי Xמשתנה מקרי רציף ו־A,B מאורעות. נניח כי $\mathbf{P(B)>0}$אזי מתקיים־

P(A|B)= $\int_{-\infty}^{\infty}P(A|X=x,B)P_X(x|B)dx$

הוכחה בהרצאה 20.

הרצאה 21

19.8 הגדרה־ (שרשרת $Markov$)

- χ ־ קבוצה סופית או בת מניה (מרחב מצבים, אנחנו נניח כי $\chi=\{0,1,2...\}$
- $(X_n)_{n\geq 0}$־ סדרת משתנים מקריים: $X_n:\Omega\to\chi$
- מתקיים:

$$P\{X_{n+1}=j|X_n=l,X_{n-1}=l_{n-1},..,X_0\}=L_0=P\{X_{n+1}=j|\,X_n=i\}$$

עבור כל $n=1,2,..,n$ ועבור כל $i,j,l_0,...,l_{n-1}\in\chi$

אזי **סדרת המשתנים המקריים** $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ **נקראת שרשרת מרקוב.**

- סימון־ ההסתברות לעבור בצעד אחד מ־iל־j:

$$\rho_{i,j}\overset{def}{=}P(X_{n+1}=j|X_n=i)$$

הערה: לא התייחס ל־n היות והנחנו כי אין תלות בזמן דיסקרטי.

19.8.1 הגדרה־ מטריצת המעברים:

$$\rho\overset{def}{=}\begin{pmatrix}\rho_{0,0}&\rho_{0,1}&\rho_{0,2}&\cdots\\ \rho_{1,0}&\rho_{1,1}&\rho_{1,2}&\cdots\\ \rho_{2,0}&\rho_{2,1}&\rho_{2,2}&\cdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ldots\end{pmatrix}$$

נשים לב כי מתקיימים התנאים הבאים:

1. $\rho_{i,j}\geq 0;\quad i,j=0,1,2....$
2. $\sum_{j=0}^{\infty}\rho_{i,j}=1;\quad i=0,1,2,...$
3. $(\rho_{i,0},\rho_{i,1}...)$ היא ההתפלגות של X_{n+1} בהינתן ש־$X_n=i$

19.9 משפט־

- $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ ־ שרשרת מרקוב, $\chi = \{0, 1, 2...\}$ ־ מרחב מצבים
- $\rho_{i,j} = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$

19.10 טענה־

$$P(X_n = l_n, X_{n-1} = l_{n-1}, ..., X_0 = \rho_{l_{n-1},l_n} \cdot \rho_{l_{n-2},l_{n-1}} \cdot ... \cdot \rho_{l_0,l_1} \cdot P(X_0 = l_0)$$

$$l_0) =$$

הסבר בקצרה על מרקוב, המטרה שלנו לשאול , האם מהנקודה בה אני נמצא כרגע־

יש ברשותי להגיע אל התא אותו ביקשו? במידה וכן, אז נקבל שרשרת מרקוב,

שזה בעצם המסלול מהתא ממנו התחלנו אל התא בו סיימנו.

חשוב לציין שברגע שהגענו לתא מסוים,

שרשרת מרקוב לא זוכרת מה קורה לפני כן, היא רק צופה

אל העתיד. דבר זה יבוא לידי ביטוי בהוכחת המשפט.

19.11 הגדרה(הסתברות המעבר מסדר k)

$\rho_{i,j}^{(k)} \overset{def}{=} P(X_{n+k} = j \mid X_n = i)$ כאשר $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב עם מרחב מצבים $\chi = \{0, 1, 2....\}\ or\ \{0, 1, ..., M\}$

20 **משפט־ $The\,Chapman\ -Kolmogrov\ Equation$

- $\chi = \{0, 1, ..., M\}$
- $\rho_{i,j}^{(n)} \overset{def}{=} P(X_{k+n} = j \mid X_k = i)$
- $0 \le i, j \le M$

20.1 **טענה:

מתקיים: $\rho_{i,j}^{(n)}=\sum_{l=0}^{M}\rho_{i.l}^{(r)}\rho_{l,j}^{(n-r)}$ וגם $1\le r\le n-1,0\le i,j\le M$

<u>אינטואציה:</u> תדמיינו מצב ובו אתם רוצים לעבור מהמקום ה־i למקום ה־j ב־n צעדים.
בנקודה l מתרחשת עצירת ביניים (לאחר r צעדים) ונסכום את כל ערכי l האפשריים.
הוכחה:
בשלב הראשון נאתחל את המקום הראשון והאחרון שלנו לפי הגדרה.
היות והנחנו כי אין תלות בזמן דיסקרטי, נוכל לשנות את המיקום ההתחלתי.
$\rho_{i,j}^{(n)}=P(X_{k+n}=j\,|X_k=i)=P(X_n=j\,|X_0=i)$=
נעזר בתכונות שרשרת מרקוב למטריצת המעברים
(היות וראינו שמרחב המצבים האינסופי ול־M זהה), ונראה:
$P(X_n=j\,|X_0=i)$= $\sum_{l=0}^{M}P(X_n=j,X_r=l\,|\,X_0=i)$
נשים לב לזהות־
$P(A\cap C|B)=\frac{P(A\cap C\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap C\cap B)P(C\cap B)}{P(B)P(C\cap B)}=$
= $\frac{P(A\cap C\cap B)}{P(C\cap B)}\frac{P(C\cap B)}{P(B)}=P(A|C\cap B)\cdot P(C|B)$
כך שבמקרה שלנו נקבל:
$\sum_{l=0}^{M}P(X_n=j,X_r=l\,|\,X_0=i)=$
$=\sum_{l=0}^{M}P(X_n=j|X_r=l\cap X_0=i)P(X_r=l|X_0=i)$

ונזכר בהגדרה של שרשרת מרקוב, שרשרת מרקוב מסתכלת על המיקום הגבוה
ביותר בה היא נמצאת, היא שוכחת מאיפה היא התחילה,
ולכן: $\sum_{l=0}^{M}P(X_n=j|X_r=l)P(X_r=l|X_0=i)$
ומהגדרת שרשרת מרקוב: $\sum_{l=0}^{M}\rho_{i,l}\rho_{l,j}=\sum_{l=0}^{M}\rho_{l,j}\rho_{i,l}$ וסיימנו.
דוגמאות בהרצאה 21

20.1.1 הגדרה־

מצב $j\in\chi$ נקרא נשנה, אם המערכת חוזרת ל־j אחרי זמן סופי עם הסתברות 1.
(בהינתן וב־j היא היתה 0),
אחרת אם הוא לא נשנה, נקרא לו חולף.

הרצאה 24

20.2 משפט־ $Lemma\ Abel\ 1$

נניח כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס, $a_n \geq 0$

טענה:

מתקיים: $\lim\limits_{s \to 1-0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n S^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

20.3 משפט־ $Lemma$ **Abel 2**

בהינתן:

1. $a_n \geq 0$; $\sum_{n=0}^{\infty} a_n S^n$ מתכנס עבור כל s, $s \in [0,1)$

2. $\lim\limits_{s \to 1-0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n S^n\right) = \alpha \leq \infty$

טענה־ מתקיים: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha$

21 **משפט־

לדעת טוב.

$(X_n)_{n=0}^{\infty}$־ שרשרת מרקוב עם מרחב המצבים χ (χ קבוצה סופית או בת מניה)

$\rho_{i,i}^{(n)} = P(X_n = i | X_0 = i); \quad i \in \chi$

21.1 **טענה

התנאים הבאים שקולים:

1. i־ מצב נשנה (recurrent)
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_{i,i}^{(n)} = \infty$

הוכחה:

$1 \to 2$:

1. i־ $recurrent \Leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_{i,i}^{(n)} = 1$

2. נגדיר $|s|<1$, $\mathcal{F}_{i,i}(s)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{i,i}^{(n)} s^n$.
מלמה $Lemma\,Abel, I$ מתקיים־ $\lim\limits_{s\to 1-0} \mathcal{F}_{i,i}(s)=1$
נזכיר כי $\rho_{i,i}(s)\mathcal{F}_{i,i}(s)=\rho_{i,i}(s)-1$ או $\rho_{i,i}(s)=\frac{1}{1-\mathcal{F}_{i,i}(s)}$
לכן מתקיים־ $\lim\limits_{s\to 1-} \rho_{i,i}(s)=\infty$
מלמה $Lemma\,Abel\,2$ ניתן לרשום־ $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_{i,i}^{(n)}=\infty$ (היות ושורה מעל בדיוק מציינת את התנאי לקיום הלמה)

$1\to 2$:

1. נניח בשלילה כי $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_{i,i}^{(n)}=\infty$, אבל i הינו מצב חולף, אזי: $\sum_{n=0}^{\infty} f_{i,i}^{(n)}<1$
2. לפי $lemma\,Abel\,1$ מתקיים: $\lim\limits_{s\to 1-} \mathcal{F}_{i,i}(s)<1$ אזי: $\lim\limits_{s\to 1-} \rho_{i,i}(s)<\infty$
3. לפי $lemma\,Abel\,2$ ניתן לרשום $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_{i,i}^{(n)}<\infty$ סתירה.

22 **משפט ־

$The\,Polya\,Theorem\,For\,a\,Three\,Dimensional\,Random\,Walk$

22.1 **טענה

מצב $0=(0,0,0)$ הוא מצב חולף
הוכחה:

1. $\rho_{0,0}^{(n)}=\sum_{n_1,\dots n_6}\binom{n}{n_1\,n_2\,\dots n_6}\left(\frac{1}{6}\right)^n$
מהציור מהרצאה 24, ניתן לראות כי־
$n_1=n_4$
$n_2=n_5$
$n_3=n_6$
כך שסה"כ: $2n_1+2n_2+2n_3=n$
אם n הוא מספר אי זוגי, אזי $\rho_{0,0}^{(n)}=0$.

$$\rho_{0,0}^{(2n)} = \sum_{\substack{n1,n2,n3: \\ n_1+n_2+n_3=n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2(n_2!)^2(n_3!)^2}\left(\frac{1}{6}^{2n}\right)$$

2. $3^n = (1+1+1)^n = \sum_{\substack{n1,n2,n3: \\ n_1+n_2+n_3=n}} \binom{n}{n_1\ n_2\ n_3}$

לכן מתקיים־

(*) $\sum_{\substack{n1,n2,n3: \\ n_1+n_2+n_3=n}} \binom{n}{n_1\ n_2\ n_3}\frac{1}{3^n} = 1$

3. $\frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{3^n}\binom{2n}{n}C_n \leq^{(*)} \rho_{0,0}^{(2n)} = \frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{3^n}\binom{2n}{n}\sum_{\substack{n_1,n_2 \\ 0\leq n_1+n_2\leq n}} \frac{(n!)^2}{(n_1!)^2(n_2!)^2((n-n_1-n_k)!)^2}\frac{1}{3^n}$ כאשר:

$$C_n = \max_{\substack{n_1,n_2: \\ 0\leq n_1+n_2\leq n}} \frac{n!}{n_1!n_2!(n-n_1-n_2)!}$$

4. קיימים i,j כך שמתקיים־ $0 \leq i+j \leq n$ וגם: $\max_{\substack{n_1,n_2 \\ 0\leq n_1+n_2\leq n}} \frac{n!}{n_1!n_2!(n-n_1-n_2)!}$ –

$$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}$$

$$\frac{n!}{(i+1)!j!(n-i-j-1)!} \leq \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \rightarrow i \geq n-i-j-1$$

$$\frac{n!}{(i-1)!j!(n-i-j+1)!} \leq \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \rightarrow i \leq n-i-j+1$$

$$\frac{n!}{(i)!(j+1)!(n-i-j-1)!} \leq \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \rightarrow j \geq n-i-j-1$$

$$\frac{n!}{(i)!(j-1)!(n-i-j+1)!} \leq \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \rightarrow j \leq n-i-j+1$$

ומכאן נובע כי: $n-j-1 \leq 2i \leq n-j+1$

$$n-i-1 \leq 2j \leq n-i+1$$

סה"כ: $\frac{n-i-1}{2} \leq j \leq \frac{n-i+1}{2}$

$$n - \frac{n-i+1}{2} - 1 \leq 2i \leq n - \frac{n-i-1}{2} + 1$$

$$\frac{n}{2} - \frac{3}{2} \leq \frac{3i}{2} \leq \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$$

$\frac{n}{3} - 1 \leq i \leq \frac{n}{3} + 1$ וגם $\frac{n}{3} - 1 \leq j \leq \frac{n}{3} + 1$

אזי $1 \simeq \frac{n}{3}, j \simeq \frac{n}{3}$ (כאשר $n \rightarrow \infty$)

5. לכן ניתן לרשום: $\rho_{0,0}^{(2n)} \leq \alpha_n$

$$\alpha_n \simeq \frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{3^n}\binom{2n}{n}\frac{n!}{(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!}$$

$$\binom{2n}{n} \simeq \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{3}\right)!\left(\frac{n}{3}\right)!\left(\frac{n}{3}\right)!} \simeq \frac{\sqrt{2\pi}n^{\frac{1}{2}}n^n e^{-n}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3 \frac{n^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{n}{3}}\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{n}{3}}\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{n}{3}} e^{-n}} = \frac{1}{2\pi n}3^{n+\frac{3}{2}}$$

$$\alpha_n \simeq \frac{1}{2}\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}n^{\frac{3}{2}}}3^{\frac{3}{2}}, n \to \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n < \infty \to \sum_{n=0}^{\infty}\rho_{0,0}^{(2n)} < \infty$$

והגענו למצב 0 שהוא מצב חולף.

הרצאה 25

22.2 הגדרה- תהליך $Poisson$

$(X_t)_{t\in[0,\infty)}$- משפחה של משתנים מקריים(תהליך מקרי) $X_t : \Omega \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$

X_t- מספר ההתרחשויות האקראיות בפרק זמן $[0,t]$.

- אם $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$, אזי המשתנים המקריים- $X_{t_1} - X_{t_0}, ...X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ הם <u>בלתי תלויים</u>, ומתקיים $X_0 = 0$
- $X_{t+t_0} - X_{t_o}$ אינו תלוי ב-t_0, ואינו תלוי בגודל של X_{t_0}
- $P\{X_t \geq 1\} = \alpha t + 0(t),\ \ t \to 0, \alpha > 0$
- $P\{X_t \geq 2\} = 0(t),\ t \to 0$

אזי תהליך מקרי $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ נקרא תהליך $poission$.

23 **משפט - $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ תהליך $Poisson$

נגדיר- $p_m(t) = P(X_t = m)$

23.1 **טענה:

מתקיים: $p_m(t) = \frac{(\alpha t)^m}{m!}e^{-\alpha t}$

הוכחה:

1. נניח כי $m = 0$ כלומר:

(אין התרחשויות בפרק זמן $p_0(t) = P(X_t = 0) = P([0,t]$

$X_{t+h} = X_{t+h} - X_t + X_t - X_0$

$$X_{t+h} = 0 = X_{t+h} - X_t = 0 \cap X_t - X_0 = 0$$
$$P(X_{t+h} = 0) = P(X_{t+h} - X_t = 0 \cap X_t - X_0 = 0) =$$
$$= P(X_{t+h} - X_t = 0) \cdot P(X_t - X_0) = P(X_h = 0)P(X_t = 0)$$
כעת נסמן: $\rho(t) = P(X_t \geq 1)$

אזי מתקיים- $p_0(t+h) = (1-\rho(h)) \cdot p_0(t)$

אזי $p_0(t+h) - p_0(t) = -\rho(h)p_0(t)$

עבור תהליך $poisson$ $\rho(h)) = \alpha h + 0(h),\ h \to 0$

לכן: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} = -\alpha p_0(t)$

או $p_0^{'}(t) = -\alpha p_0(t)$.

יתר על כן, $p_0(t=0) = P(X_0 = 0) = 1$

אזי - $\rho_0(t) = e^{-\alpha t}$

2. נניח כי אנו רוצים לחשב:

$p_m(t) = P(X_t = m) = P($ יש התרחשויות בפרק זמן $[0,t]$)

$$X_{t+h} = X_{t+h} - X_t + X_t - X_0$$
$$P(X_{t+h} = m) = \sum_{k=0}^{m} P(X_{t+h} - X_t = k)P(X_t = m-k)$$
כלומר, $p_m(t+h) = \sum_{k=0}^{m} p_k(h)p_{m-k}(t)$

או- $p_m(t+h) = p_0(h)p_m(t) + p_1(h)p_{m-1}(t) + \sum_{k=2}^{m} p_k(h)p_{m-k}(t)$

3. $p_0(h) = P(X_h = 0) = 1 - P(X_h \geq 1) = 1 - \rho(h)$

כאשר $\rho(h) = \alpha h + 0(h),\ h \to 0$

4. $P_1(h) = P(X_h = 1) = \underset{\rho(h)}{P(X_h \geq 1)} - \underset{0(h)}{P(X_h \geq 2)}$

כלומר, $p_1(h) = \rho(h) + 0(h),\ h \to \infty$

5. $\sum_{k=2}^{m} p_k(h)p_{m-k}(t) \leq \sum_{k=2}^{m} p_k(h) = \sum_{k=2}^{m} P(X_h = k) = 0(h),\ h \to \infty$

6. $p_m(t+h) = (1-\alpha h)p_m(t) + \alpha h p_{m-1}(t) + 0(h),\ h \to \infty$

לכן: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{p_m(t+h)-p_m(t)}{h} = -\alpha p_m(t) + \alpha p_{m-1}(t)$

כלומר, אנחנו מקבלים מערכות משוואות:

$$\begin{cases} p_m^{'}(t) = -\alpha p_m(t) + \alpha p_{m-1}(t); & m = 1,2,3.. \\ p_m(0) = 0; & m = 1,2,3... \end{cases}$$

7. נגדיר: $Q_m(t) = p_m(t)e^{\alpha t}; m = 0,1,2,...$

$$p_0(t) = e^{-\alpha t} \Rrightarrow Q_0(t) = 1$$
$$Q_m^{'}(t) = p_m^{'}(t)e^{\alpha t} + \alpha p_m(t)e^{\alpha t} =$$
$$= (-\alpha p_m(t)e^{\alpha t} + \alpha p_{m-1}(t)e^{\alpha t}) + \alpha p_m(t)e^{\alpha t} = \alpha p_{m-1}(t)e^{\alpha t} = \alpha Q_{m-1}(t)$$
אזי: $Q_m^{'}(t) = \alpha Q_{m-1}(t)\,;\ m = 1,2,3.....$

$$Q_0(t) = 1$$

8. $Q_1^{'}(t)=\alpha \Rrightarrow Q_1(t)=\alpha t+C$
$Q_1(t=0)=0 \Rrightarrow C=0$
לכן: $Q_1(t)=\alpha t,\ \ p_1(t)=\alpha te^{-\alpha t}$
$Q_2^{'}(t)=\alpha^2 t \Rightarrow Q_2(t)=\frac{\alpha^2t^2}{2}+C,\ Q_2(t=0)=0$
לכן: $Q_2(t)=\frac{\alpha^2t^2}{2},\ \ p_2(t)=\frac{\alpha^2t^2}{2}e^{-\alpha t}$
$\vdots$
$Q_m(t)=\frac{\alpha^m t^m}{m!},\ \ p_m(t)=\frac{\alpha^m t^m}{m!}e^{-\alpha t}$

הרצאה 26

23.2 הגדרה- זמני המתנה עבור תהליך $poisson$

- $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$- תהליך $poisson$, X_t- כמות האירועים שהתרחשו בזמן $[0,t]$
- W_n- זמן ההמתנה עד אירוע מספר n

24 **משפט- $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ תהליך $Poission$ עם פרמטר $\lambda>0$

24.1 **טענה

מתקיים: $P(W_n\le a)=\int_0^a \rho_{W_n}(t)dt$ כאשר $\rho_{W_n}(t)=\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}$

<u>הוכחה מספר1:</u>

1. = "זמן ההמתנה עד אירוע מס' n פחות או לשווה ל-a" = $W_n\le a$
"מספר האירועים שהתרחשו בפרק זמן $[0,a]$ יותר גדול או שווה ל-n" $\ge X(a)=$
$n=$
2. $P(W_n\le a)=P(X(a)\ge n)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda a)^k}{k!}e^{-\lambda a}=$
$=1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda a)^k}{k!}e^{-\lambda a}$
3. אם $P(W_n\le a)=\int_0^a \rho_{W_n}(t)dt$
אזי ניתן לכתוב- $\rho_{W_n}(t)=\frac{d}{dt}(P(W_n\le t))$

4. לכן ניתן לכתוב־

$$\rho_{W_n}(t) = \frac{d}{dt}(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}) = \frac{d}{dt}(-e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}) =$$
$$= \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda k (\lambda t)^{k-1}}{k!} =$$
$$= \lambda e^{-\lambda t} (\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}) =$$
$$= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$$

<u>הוכחה מספר 2:</u>

1. $t < W_n \leq t + dt$ = $n-1$ אירועים בזמן $[0,t]$, אירוע אחד בזמן $(t, t+dt]$

2. $\mathcal{F}_{W_n}(t) dt = P(t < W_n \leq t + dt) =$

$$= P(X_t = n-1 \cap X_{t+dt} - X_t = 1) = P(X_t = n-1) \cdot P(X_{t+dt} - X_t = 1) =$$
$$= P(X_t = n-1) \cdot P(X_{t+dt} - X_t = 1) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \cdot [\lambda dt + 0(dt)]$$
$$\Rightarrow \mathcal{F}_{W_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$