פתרון תרגיל מספר 5 - לינארית 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

11 באפריל 2019

1. **צ"ל:** U הוא תת מרחב $p(T)$ אינווריאנטי
הוכחה:
תחילה נוכיח באינדוקציה כי $\forall u \in U$, $T^i(u) \in U$,
<u>בסיס:</u> עבור $n = 1$, יהי $u \in U$, מהנתון כי U הוא תת מרחב T אינווראינטי מתקיים כי $T(u) \in U$, כנדרש
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה לn ונראה שהיא נכונה ל$n+1$,
יהי $u \in U$, נשים לב כי $T^n(u) \in U$ מהנחת האינדוקציה, לכן נוכל לסמן $u' = T^n(u) \in U$, לכן

$$T^{n+1}(u) = T(T^n(u)) = T(u') \overset{\star}{\in} U$$

נשים לב כי $\star$ נכון מהנימוק שניתן לבסיס האינדוקציה, לכן הטענה נכונה ל$n+1$,
נסמן $p(x) = a_0 + \cdots + a_n \cdot x^n$, יהי $u \in U$, לכן

$$[p(T)](u) = [a_0 Id + a_1 T + \cdots + a_n T^n](u) = a_0 \cdot u + a_1 \cdot T(u) + \cdots + a_n T^n(u) \in \text{span}\{u, T(u), \ldots, T^n(u)\}$$

מהנימוק שראינו קודם מתקיים כי $T^i(u) \in U$, $0 \le i \le n$ (עבור 0 ברור),
לכן $\text{span}\{u, T(u), \ldots, T^n(u)\} \subseteq U$ וגם ראינו כי $[p(T)](u) \in \text{span}\{u, T(u), \ldots, T^n(u)\}$,
לכן $[p(T)](u) \in U$, $\forall u \in U$, לכן מההגדרה מתקיים כי U הוא $p(T)$ אינווריאנטי

מ.ש.ל.☺

2. **צ"ל:** $Im(p(T)) \subseteq Im(r(T))$
הוכחה:
יהי $v' \in Im(p(T))$, אזי $\exists v \in V$ כך ש$v' = p(T(v))$, לכן

$$v' = p(T(v)) = q(T(v)) \cdot r(T(v)) = (r(T) \circ q(T))(v) = (r \circ T)[(q(T(v)))]$$

נשים לב כי $q(T(v)) \in V$, כי $T(v) \in V$ ו$q(T)$ הוא סכום של וקטורים מV.
לכן נסמן $q(T(v)) = w \in V$, ונקבל כי $v' = (r \circ T)(w)$, לכן $v' \in Im[r \circ T] = Im(r(T))$,
לכן הראנו כי $v \in Im(p(T)) \Rightarrow v \in Im(r(T))$, לכן $\boxed{Im(p(T)) \subseteq Im(r(T))}$, כנדרש

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** $\dim Z(T, v) \le k$
הוכחה:
נסמן $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$, כאשר $a_k \neq 0$, לכן

$$0 = p(T)(v) = a_0 \cdot v + a_1 \cdot T(v) + \cdots + a_k \cdot T^k(v)$$
$$\Rightarrow T^k(v) = -\frac{1}{a_k}\left(a_0 \cdot v + a_1 \cdot T(v) + \cdots + a_{k-1} \cdot T^{k-1}(v)\right) \in \text{span}\left\{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{k-1}(v)\right\}$$

לכן מתקיים $\text{span}\left\{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{k-1}(v)\right\} = \text{span}\left\{v, T(v), T^2(v), \ldots\right\} = Z(T, v)$,
מהיות ומצאנו כי יש k וקטורים הפורשים את המרחב, מתקיים כי $\boxed{\dim Z(T, v) \le k}$

מ.ש.ל.☺

4. **צ"ל:** $0 < \dim U \leq k$

הוכחה:

מהנתון $p(T)$ "איננה על" לכן $\ker p \circ T \neq \{0\}$, כלומר $\exists v \in V \neq 0$ כך ש$p(T)(v) = 0$.

נבחר $\boxed{U = Z(T, v)}$, מהיות U הוא T ציקלי הוא גם T אינווראינטי (הוכח בהרצאה),

נשים לב כי $\boxed{\dim U > 0}$ כי $0 \neq v \in U$.

נסמן $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$, כאשר $a_k \neq 0$, לכן

$$\begin{aligned} 0 &= p(T)(v) = a_0 \cdot v + a_1 \cdot T(v) + \cdots + a_k \cdot T^k(v) \\ \Rightarrow T^k(v) &= -\frac{1}{a_k}\left(a_0 \cdot v + a_1 \cdot T(v) + \cdots + a_{k-1} \cdot T^{k-1}(v)\right) \in \operatorname{span}\left\{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{k-1}(v)\right\} \end{aligned}$$

לכן מתקיים $\operatorname{span}\left\{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{k-1}(v)\right\} = \operatorname{span}\left\{v, T(v), T^2(v), \ldots\right\} = Z(T, v) = U$,

מהיות ומצאנו כי יש k וקטורים הפורשים את המרחב, מתקיים כי $\boxed{0 < \dim U \leq k}$

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:** קיים U כך שהוא אינווראינטי וגם $\dim U = 2$

הוכחה:

מהשאלה הקודמת, אנחנו יודעים כי קיים תת מרחב U T אינווריאנטי כך ש$0 < \dim U \leq 2$,

נראה כי $\dim U \neq 1$ ומפה נסיק כי $\dim U = 2$ ונסיים. נניח בשלילה כי $\dim U = 1$,

לכן הוא מהצורה $U = \operatorname{span}\{u\}$ כאשר u הוא וקטור עצמי של T ונסמן את הערך העצמי שלו בλ.

נסמן $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, לכן מההגדרה של u בשאלה הקודמת מתקיים:

$$0 = p(T)(u) = a_0 \cdot u + a_1 \cdot T(u) + a_2 \cdot T^2(u) = a_0 u + a_1 \lambda u + a_2 \lambda^2 u = \left(a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2\right) \cdot u$$

אנחנו יודעים כי $u \neq 0$, לכן $p(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 = 0$, אבל ראינו כי $p(x)$ הוא פולינום אי פריק ולכן אין לו שורשים בסתירה לכך שהראנו כי λ הוא שורש של p.

לכן $\dim U \neq 1$, כלומר $\boxed{\dim U = 2}$

מ.ש.ל.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $Im(q(T)) \subseteq U$

הוכחה:

יהי $v \in Im(q(T))$, אזי קיימים $u \in U, w \in W$ יחידים כך ש$v = u + w$, אזי

$$q(T(v)) = q(T(u + w)) = q(T(u)) + q(T(w)) = q(T(u)) + 0 \in Z(T, u)$$

נשים לב כי $Z(T, u)$ הוא תת מרחב של U כי $T^k(u) \in U$,$\forall k \in \mathbb{N}$ (כי U הוא T אינווריאנטי) וסכום של וקטורים מU הוא וקטור בU. לכן $Z(T, u) \subseteq U$, לכן $q(T(v)) \in U$, כלומר $\boxed{Im(q(T)) \subseteq U}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\ker(q(T)) \subseteq W$

הוכחה:

נרצה תחילה להראות כי $\ker q(T) \cap U = \{0\}$,

יהי $u_0 \in \ker q(T) \cap U$, אזי מהיות $U \subseteq Im(q(T))$ קיימים $u_1 \in U, w_1 \in W, v_1 \in V$ יחידים כך ש$v_1 = u_1 + w_1$ וגם $u_0 = q(T(v_1))$ אזי

$$\begin{aligned} u_0 &= q(T(v_1)) = q(T(u_1 + w_1)) = q(T(u_1)) + q(T(w_1)) \in U \\ \Rightarrow u_0 - q(T(u_1)) &= q(T(w_1)) \in U \cap W = \{0\} \end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $q\left(T\left(u_1\right)\right)=u_0$, כלומר הראנו כי $\left(\forall u\in U\right)\left(\exists u'\in U\right)\left(u=q\left(T\right)\left(u'\right)\right)$,
כלומר $q\left(T\right)|_U$ היא על ומהיות U T אינווראינטי מתקיים $q\left(T\right)|_U\colon U\to U$, לכן ממשפט המימדים מתקיים כי
$q\left(T\right)|_U$ היא חח"ע, כלומר $\boxed{\ker q\left(T\right)\cap U=\{0\}}$,
עתה יהי $v\in\ker\left(q\left(T\right)\right)$, אזי קיימים $u\in U,w\in W$ יחידים כך ש$v=u+w$, אזי

$$0=q\left(T\left(v\right)\right)=q\left(T\left(u+w\right)\right)=q\left(T\left(u\right)\right)+q\left(T\left(w\right)\right)\in U$$

לכן $q\left(T\left(w\right)\right)=-q\left(T\left(u\right)\right)\in U\cap W=\{0\}$ (מהיות U,W הם T אינווראינטים),
כלומר $u,w\in\ker q\left(T\right)$ ואף $u\in\ker q\left(T\right)\cap U$, $w\in\ker q\left(T\right)\cap W$,
לפיכך, ברור שמתקיים

$$\boxed{\ker q\left(T\right)\subseteq\ker q\left(T\right)\cap U+\ker q\left(T\right)\cap W=\{0\}+\ker q\left(T\right)\cap W\subseteq W}$$

מ.ש.ל.ב.☺

7. **צ"ל:** v וקטור עצמי או $T\left(v\right)-\mu v$ הוא וקטור עצמי
הוכחה:
נשים לב כי קיימים 2 ערכים עצמיים במרחב ממימד 2, לכן $\mathbb{R}^2=V_\lambda\oplus V_\mu$,
יהי $0\neq v\in\mathbb{R}^2$, אזי קיימים $u\in V_\lambda,w\in V_\mu$ יחידים כך ש$v=u+w$,
אם $u=0$ סיימנו כי $0\neq v=w\in V_\mu$, כלומר v הוא וקטור עצמי, אחרת $u\neq 0$ אזי

$$T\left(v\right)-\mu v=T\left(u+w\right)-\mu\left(u+w\right)=\lambda u+\mu w-\mu\left(u+w\right)=\left(\lambda-\mu\right)u\neq 0$$
$$T\left(T\left(v\right)-\mu v\right)=T\left(\left(\lambda-\mu\right)u\right)=\lambda\left(\lambda-\mu\right)u=\lambda\left(T\left(v\right)-\mu v\right)$$

כלומר $0\neq T\left(v\right)-\mu v\in V_\lambda$, כלומר $T\left(v\right)-\mu v$ הוא וקטור עצמי

מ.ש.ל.☺

8. **צ"ל:** חסם הדוק על $\dim Z_A$ ודוגמא למקרה קיצון
הוכחה:
נראה כי $\dim Z_A\leq n$, נראה כי $A^{n+1}\in\operatorname{span}\{A,\ldots,A^n\}$, נשים לב כי $0=\chi_A\left(A\right)=\sum_{i=0}^n c_i\cdot A^i$, וגם $c_n\neq 0$
לכן,

$$0=0\cdot A=\left[\sum_{i=0}^n c_i\cdot A^i\right]\cdot A=\sum_{i=0}^n c_i\cdot A^{i+1}$$
$$\Rightarrow A^{n+1}=-\frac{1}{c_n}\left[\sum_{i=1}^n c_{i-1}\cdot A^i\right]=\sum_{i=1}^n\frac{-c_{i-1}}{c_n}\cdot A^i\in\operatorname{span}\{A,\ldots,A^n\}$$

לכן $Z_A=\operatorname{span}\{A,\ldots,A^n\}$, כלומר $\boxed{\dim Z_A\leq n}$,
עתה נבחר $A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&\ddots&0&0&0\\0&0&\ddots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&1&0&\vdots\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$, נראה כי $\dim Z_A\geq n$ ומהטיעון הקודם נסיק כי $\boxed{\dim Z_A=n}$,
יהיו $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ כך ש$a_1\cdot A+a_2\cdot A^2+\cdots+a_n\cdot A^n=0$, אזי $\forall v\in V$ מתקיים

$$\left(a_1\cdot A+a_2\cdot A^2+\cdots+a_n\cdot A^n\right)\left(v\right)=0$$

נציב $v = e_1$ ונקבל

$$0 = \left(a_1 \cdot A + a_2 \cdot A^2 + \cdots + a_n \cdot A^n\right)(v) = a_1 \cdot e_2 + a_2 \cdot e_3 + \cdots + a_{n-1} \cdot e_n + a_n \cdot e_1$$

אבל אנחנו יודעים כי $e_1, \ldots, e_n$ בת"ל לכן $a_1 = \cdots = a_n = 0$, לכן $A, A^2 \ldots, A^n$ בת"ל,
לכן מהיות ויש n וקטורים בת"ל בZ_A מתקיים כי $\dim Z_A \geq n$, עתה בשילוב עם החסם שמצאנו מתקיים כי $\boxed{\dim Z_A = n}$

מ.ש.ל.☺

9. **פתרון:**

(א) **צ"ל:**

$$\mathcal{R}(A) \cdot A^k = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} + \mathcal{R}(A)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(A) \cdot A^k &= (A - I_n)^{-1} \cdot A^k = (A - I_n)^{-1} \cdot \left[A^k - I_n + I_n\right] = (A - I_n)^{-1} \cdot \left[A^k - I_n\right] + (A - I_n)^{-1} \\
&= (A - I_n)^{-1} \cdot \left[(A - I_n) \cdot \left(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}\right)\right] + \mathcal{R}(A) \\
&= \left[(A - I_n)^{-1} \cdot (A - I_n)\right] \cdot \left(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}\right) + \mathcal{R}(A) \\
&= I_n \cdot \left(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}\right) + \mathcal{R}(A) \\
&= I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} + \mathcal{R}(A)
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:**

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \mathcal{R}(A) = -\sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\sum_{m=k+1}^{n} c_m\right) \cdot A^k\right]$$

הוכחה:
תחילה נשים לב כי ממשפט קיילי המילטון מתקיים $\chi_A(A) = 0$, לכן

$$\begin{aligned}
0 &= 0 \cdot \mathcal{R}(A) = \chi_A(A) \cdot \mathcal{R}(A) = \left(\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot A^i\right) \cdot \mathcal{R}(A) = \sum_{i=0}^{n} \left[c_i \cdot A^i \cdot \mathcal{R}(A)\right] \\
&\overset{\star}{=} \sum_{i=0}^{n} \left[c_i \cdot \left[\sum_{k=0}^{i-1} A^k + \mathcal{R}(A)\right]\right] = \sum_{m=0}^{n} \left[c_m \cdot \sum_{k=0}^{m-1} A^k\right] + \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \mathcal{R}(A) \\
&= \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \mathcal{R}(A) + c_1 \cdot A^0 + c_2 \cdot A^0 + c_2 \cdot A^1 + c_3 \cdot A^0 + c_3 \cdot A^1 + c_3 \cdot A^2 + \cdots + c_n \cdot A^{n-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \mathcal{R}(A) + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\sum_{m=k+1}^{n} c_m\right) \cdot A^k\right] \\
&\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \mathcal{R}(A) + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\sum_{m=k+1}^{n} c_m\right) \cdot A^k\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \mathcal{R}(A) = -\sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\sum_{m=k+1}^{n} c_m\right) \cdot A^k\right]}
\end{aligned}$$

נשים לב כי $\star$ מתקיים מסעיף א'. עתה נראה כי $\sum_{i=0}^{n} c_i \neq 0$, נניח בשלילה כי $\sum_{i=0}^{n} c_i = 0$ אזי

$$0 = \sum_{i=0}^{n} c_i = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot 1^i = \chi_A(1)$$

כלומר 1 הוא ערך עצמי של A, לכן $A - I_n$ איננה הפיכה בסתירה להנחה. לכן $\sum_{i=0}^{n} c_i \neq 0$, ומפה נוכל להסיק כי

$$\mathcal{R}\left(A\right) = \frac{-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\sum_{m=k+1}^{n} c_m\right) \cdot A^k\right]}{\sum_{i=0}^{n} c_i}$$

מ.ש.ל.ב.☺