אלגברה לינארית 1 סמסטר ב' תשע"ח - תרגיל 11

1. יהי $V=\left\{ a+bx+cx^{2}:a,b,c\in\mathbb{Q}\right\}$ מרחב הפולינומים מדרגה 2 לכל היותר עם מקדמים רציונלים. נתבונן בבסיסים:

$$B=\left(1,x,x^{2}\right),C=\left(1+x,1+x^{2},x+x^{2}\right),D=\left(x,1,x^{2}\right)$$

תהי $T:V\to V$ ההעתקה הלינארית:

$$T\left(a+bx+cx^{2}\right)=b+ax+cx^{2}$$

מצאו את $[T]_{B}^{B}$, $[T]_{C}^{B}$,$[T]_{C}^{C}$ ו $[T]_{D}^{B}$.

2. נתונות מטריצות $K,L\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ דומות זו לזו. הוכיחו כי
א) אם $K=cI_{n}$ עבור $c\in\mathbb{F}$, אז $L=K$.
ב) $K+I_{n}$ ו- $L+I_{n}$ דומות זו לזו.
ג) L^{m} ו- K^{m} דומות זו לזו לכל $m\in\mathbb{N}$.
ד) אם $K^{2}=K$, אז $L^{2}=L$.

3. יהיו V מ"ו, $T:V\to V$ ה"ל, B,C בסיסים של V כך ש- $\left([Id_{V}]_{C}^{B}\right)^{2}=I_{n}$. הוכיחו כי $[T]_{B}^{C}$ ו- $[T]_{C}^{B}$ דומות זו לזו .

4. נתונות מטריצות $K,L\in M_{2\times2}(\mathbb{R})$. האם הן דומות זו לזו כאשר
א) $L=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\quad K=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
ב) $L=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\quad K=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$
ג) $L=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\quad K=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

5. יהיו V,W מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$, עם בסיסים $B=\left(v_{1},\dots,v_{n}\right),C=\left(w_{1},\dots,w_{m}\right)$, בהתאמה. יהי $1\leq k\leq m$, ונגדיר את הקבוצה:

$$L=\left\{ T\in Hom\left(V,W\right):ImT\subseteq Span\left\{ w_{1},\dots,w_{k}\right\} \right\}$$

א) הוכיחו כי L תת-מרחב של $Hom\left(V,W\right)$.
ב) מצאו את $\dim L$.
עתה, יהי $1\leq\ell\leq n$,ונתבונן בקבוצה:

$$M=\left\{ T\in Hom\left(V,W\right):ImT\subseteq Span\left\{ w_{1},\dots,w_{k}\right\} ,Span\left\{ v_{1},\dots,v_{\ell}\right\} \subseteq\ker T\right\}$$

ג) הוכיחו כי M תת-מרחב של $Hom\left(V,W\right)$.
ד) מצאו את $\dim M$.

6. נתבונן ב $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ובבסיס הסדור $B=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ (המטריצות E_{ij} הוגדרו בתרגול). נגדיר ה"ל $T:M_{2\times 2}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2$ על ידי $T(A)=\left[\begin{array}{cc}4&3\\2&1\end{array}\right]A\left[\begin{array}{c}6\\5\end{array}\right]$.
מצאו את $[T]_E^B$, כאשר E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$.

7. נתבונן ב $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ובבסיס הסדור $B=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ (המטריצות E_{ij} הוגדרו בתרגול). נגדיר ה"ל $T:M_{2\times 2}(\mathbb{R})\to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ על ידי $T(A)=A\left[\begin{array}{cc}4&3\\2&1\end{array}\right]$.
מצאו את $[T]_B^B$.

8. יהי V מ"ו ממימד סופי, U ת"מ של V, ו-$m\in U^*$. הוכיחו כי קיים $\ell\in V^*$ כך שלכל $u\in U$, $\ell(u)=m(u)$.

9. יהי V מ"ו, $(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס סדור של V, $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצה הפיכה. הוכיחו כי אם $\ell_1,\ldots,\ell_n\in V^*$ הם כך ש $a_{ij}=\ell_i(v_j)$ לכל $1\leq i,j\leq n$ אז $\{\ell_1,\ldots,\ell_n\}$ בסיס של V^*.

10. נתון בסיס סדור $B=\left(\left[\begin{array}{c}3\\2\end{array}\right],\left[\begin{array}{c}2\\3\end{array}\right]\right)$ של $\mathbb{Q}^2$. מצאו את B^*.

11. יהי V מרחב וקטורי. הוכיחו כי אם $v_1,\ldots,v_n\in V$, $l_1,\ldots,l_n\in V^*$ הם כך ש-$l_i(v_j)=\delta_j^i$ לכל $1\leq i,j\leq n$, אז $\{v_1,\ldots,v_n\}$ בת"ל וגם $\{l_1,\ldots,l_n\}$ בת"ל.

12. יהי V מרחב וקטורי. הוכיחו כי אם $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של V, $B^*=(l_1,\ldots,l_n)$, $v\in V$, אז $v=l_1(v)v_1+\ldots+l_n(v)v_n$.