

# מבני נתונים - 67109

## תרגיל 9

להגשה: עד 29.5.19, 23:59

### שאלה 1

תהא  $\mathcal{H}$  קבוצת פונקציות גיבוב ממרחב מפתחות  $U$  ל- $\{0, 1, \dots, m-1\}$ .

1. הוכיחו שאם  $\mathcal{H}$  היא קבוצת פונקציות גיבוב  $k$ -אוניברסלית עבור  $k > 1$ , אזי היא גם קבוצה  $k-1$  אוניברסלית. בנוסף, הסיקו כי קבוצה  $2$ -אוניברסלית היא קבוצת גיבוב אוניברסלית (כלומר הסיכוי להתנגשות בבחירת  $h$  אקראית הוא לכל היותר  $\frac{1}{m}$ ).

2. הפריכו את הטענה הבאה: אם  $\mathcal{H}$  קבוצה  $1$ -אוניברסלית, אזי היא גם אוניברסלית.

### שאלה 2

נתבונן במחלקת פונקציות הגיבוב הבאה:

$$\mathcal{H} = \{h_{a,b} : U \rightarrow M \mid a \in \mathbb{F}_p^d, b \in \mathbb{F}_p\}$$
$$\forall x \in U \quad h_{a,b}(x) = \left( b + \sum_{i=1}^d a_i \cdot x_i \right) \bmod p$$

הוכיחו כי  $\mathcal{H}$  היא  $2$ -אוניברסלית.

**הדרכה:** יהיו  $x, y \in \mathbb{F}_p^d$ , וכן  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_p$ . נניח ש- $x_k \neq y_k$  לכל קואורדינטה, וכן יהא וקטור מקדמים  $(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_d)$ . חישבו על השאלות הבאות.

- בכמה דרכים נוכל להרחיב את וקטור המקדמים לכדי וקטור  $a = (b, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_d) \in \mathbb{F}_p^{d+1}$
- בכמה דרכים נוכל להרחיב את וקטור המקדמים לכדי וקטור  $a = (b, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_d) \in \mathbb{F}_p^{d+1}$  כך שגם  $h_a(x) = \alpha$  וגם  $h_a(y) = \beta$ ?

### שאלה 3

יהיו שני ת'אנוסים (*Thanoses*). כשת'אנוסים נוקשים בידיהם, חצי מאוכלוסיית העולם מושמדת (הקורבנות מוגרלים באופן אקראי ואחיד). ת'אנוסים מהווים בעצמם חלק מאוכלוסיית העולם. בעולמנו יש שני ת'אנוסים בלבד. נניח שת'אנוס אחד נוקש בידו, ולאחריו, באם הוא עדיין בחיים, הת'אנוס השני נוקש בידו. חשב\י את סיכויך לשרוד.



### שאלה 4

נתון מערך  $A$  של מספרים. תארו אלגוריתם המקבל מספר  $k$  ובודק האם קיימים ב- $A$  זוג מספרים  $a, b$  כך ש- $a + b = k$ . על האלגוריתם לרוץ בזמן  $O(n)$  בממוצע.

### שאלה 5

נתבונן בקבוצת כל הפונקציות מ- $U$ , (כך ש- $|U| = N$  כלשהו. כלומר  $U$  קבוצה סופית), ל- $[m]$ :

$$\mathcal{H} = \{h : U \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\}\}$$

הוכיחו כי קבוצה זו היא משפחה אוניברסלית. שני סעיפים למחשבה:

1. הסבירו מה הקשר בין משפחה זו לבין הנחת גיבוב אחיד פשוט?
2. במה עדיפה המשפחה האוניברסלית שמצאת בשאלה 2, או משפחת המטריצות שראינו בכיתה, על פני המשפחה האוניברסלית הזו שהיא הרבה יותר פשוטה לתיאור?