פתרון תרגיל מספר 2 ־ מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

26 במרץ 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** n כדורים שונים בm תאים
הוכחה:

$$\Omega = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}\}$$
$$|\Omega| = m^n$$
$$p(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{m^n}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** n כדורים דומים בm תאים
הוכחה:

$$\Omega = \{(a_1, \ldots, a_m) \mid a_1 + \cdots + a_m = n; a_i \geq 0\}$$
$$|\Omega| = \binom{n+m-1}{n}$$
$$p(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{n! \cdot (m-1)!}{(n+m-1)!}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** n כדורים שונים בm תאים וכל תא מכיל לכל היותר כדור אחד
הוכחה:

$$\Omega = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\} \mid f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\}$$
$$|\Omega| = \frac{m!}{(m-n)!}$$
$$p(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{(m-n)!}{m!}$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** n כדורים זהים בm תאים וכל תא מכיל לכל היותר כדור אחד
הוכחה:

$$\Omega = \{A \subseteq \{1, \ldots, m\} \mid |A| = n\}$$
$$|\Omega| = |\{A \subseteq \{1, \ldots, m\} \mid |A| = n\}| = \binom{m}{n}$$
$$p(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{\binom{m}{n}} = \frac{n!\,(m-n)!}{m!}$$

מ.ש.ל.ד.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $P\left(B\right)=P\left(A\cap B\right)+P\left(B\cap A^{C}\right)$

הוכחה:

$$P\left(B\right)=P\left(\left(B\setminus A\right)\cup\left(B\cap A\right)\right)=P\left(B\setminus A\right)+P\left(A\cap B\right)\overset{\star}{=}P\left(B\cap A^{C}\right)+P\left(A\cap B\right)$$
$$\Rightarrow\boxed{P\left(B\right)=P\left(A\cap B\right)+P\left(B\cap A^{C}\right)}$$

נשים לב ש$\star$ נכון כי $B\setminus A=B\cap A^{C}$ מכיוון

$$x\in B\setminus A\Leftrightarrow x\in B\wedge x\notin A\Leftrightarrow x\in B\wedge x\in A^{C}\Leftrightarrow x\in B\cap A^{C}\Rightarrow\boxed{B\setminus A=B\cap A^{C}}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)$

הוכחה:

$$\begin{aligned}P\left(A\right)&=P\left(\left(A\setminus B\right)\cup\left(A\cap B\right)\right)=P\left(A\setminus B\right)+P\left(A\cap B\right)\\
P\left(B\right)&=P\left(\left(B\setminus A\right)\cup\left(A\cap B\right)\right)=P\left(B\setminus A\right)+P\left(A\cap B\right)\\
P\left(A\cup B\right)&=P\left(\left(A\setminus B\right)\cup\left(A\cap B\right)\cup\left(B\setminus A\right)\right)=P\left(A\setminus B\right)+P\left(A\cap B\right)+P\left(B\setminus A\right)\\
&=\left(P\left(A\setminus B\right)+P\left(A\cap B\right)\right)+\left(P\left(B\setminus A\right)+P\left(A\cap B\right)\right)-P\left(A\cap B\right)\\
&=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\\
&\Rightarrow\boxed{P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)}\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $P\left(A\cap B\right)\geq P\left(A\right)+P\left(B\right)-1$

הוכחה:

$$P\left(A\cap B\right)\overset{\star}{=}P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cup B\right)\geq P\left(A\right)+P\left(B\right)-1$$
$$\Rightarrow\boxed{P\left(A\cap B\right)\geq P\left(A\right)+P\left(B\right)-1}$$

נשים לב כי $\star$ מתקיים מסעיף ב'

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $P\left(\left(A\cap B^{C}\right)\cup\left(B\cap A^{C}\right)\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-2\cdot P\left(A\cup B\right)$

הוכחה:

$$P\left(\left(A\cap B^{C}\right)\cup\left(B\cap A^{C}\right)\right)=P\left(A\cap B^{C}\right)+\left(B\cap A^{C}\right)\overset{\star}{=}P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cup B\right)-P\left(A\cup B\right)$$
$$\Rightarrow\boxed{P\left(\left(A\cap B^{C}\right)\cup\left(B\cap A^{C}\right)\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-2\cdot P\left(A\cup B\right)}$$

נשים לב כי $\star$ מתקיים מסעיף א'

מ.ש.ל.ד.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** הסתברות לבחור 6 מתוך 13 תלתן
הוכחה:

$$\Omega = \{A \subseteq \{1,\dots,13\} \times \{T,A,E,L\} \mid |A| = 13\}$$
$$|\Omega| = \binom{52}{13}$$
$$A = \{B \subseteq \{1,\dots,13\} \times \{T,A,E,L\} \mid \textbf{6 from B are T, 7 from B are not T}\}$$
$$|A| = \underbrace{\binom{13}{6}}_{\textbf{pick the numbers in the T}} \cdot \underbrace{\binom{52-13}{7}}_{\textbf{pick the numbers not in T}} = \binom{13}{6} \cdot \binom{39}{7}$$
$$p(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{\binom{52}{13}}$$
$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{13}{6}\cdot\binom{39}{7}}{\binom{52}{13}}}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** 5 אנשים, מה ההסתברות ש2 נולדו באותו החודש
הוכחה:

$$\Omega = \{(a_1,\dots,a_5) \mid a_i \in \{1,\dots,12\}\}$$
$$|\Omega| = 12^5$$
$$A = \{(a_1,\dots,a_5) \mid a_i \in \{1,\dots,12\}; a_i \neq a_j\}$$
$$|A| = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$$
$$p(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{12^5}$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{12^5} = \frac{11}{12}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{12} = \frac{11}{12}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}$$
$$= \frac{11}{12}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{55}{144}$$
$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}\left(A^C\right) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{55}{144} = \frac{89}{144}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** 16 אנשים ברצף בן בת

הוכחה:

$$\Omega=\{(a_1,\dots,a_{16})\mid a_i\in\{1,\dots,8\}\times\{B,G\};a_i\neq a_k\}$$
$$|\Omega|=16!$$
$$A=\{(a_1,\dots,a_{16})\mid a_i\in\{1,\dots,8\}\times\{B,G\};a_{2i}\ \textbf{are all B or G};a_i\neq a_k\}$$
$$|A|=|\{(a_1,\dots,a_{16})\mid a_i\in\{1,\dots,8\}\times\{B,G\};a_{2i}\ \textbf{are all B or G};a_i\neq a_k\}|$$
$$=2\cdot|\{(a_1,\dots,a_{16})\mid a_i\in\{1,\dots,8\}\times\{B,G\};a_{2i}\ \textbf{are all B};a_i\neq a_k\}|$$
$$=2\cdot|\{(a_1,\dots,a_{16})\mid a_{2i}\in\{1,\dots,8\};a_{2i-1}\in\{1,\dots,8\};a_{2i}\neq a_{2k};a_{2i-1}\neq a_{2j-1}\}|$$
$$=2\cdot 8!\cdot 8!$$
$$p(\{\omega\})=\frac{1}{|\Omega|}=\frac{1}{16!}$$
$$\Rightarrow\boxed{\mathbb{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{2\cdot 8!\cdot 8!}{16!}=\frac{2}{\binom{16}{8}}}$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** 12 כדורים בין 8 תאים. מה ההסתברות שאין תא ריק?

הוכחה:

$$\Omega=\{(a_1,\dots,a_8)\mid a_i\in\{0,1,\dots,12\};a_1+\cdots+a_8=12\}$$
$$|\Omega|=\binom{12+8-1}{12}=\binom{19}{12}$$
$$A=\{(a_1,\dots,a_8)\mid a_j\in\{0,1,\dots,12\};a_1+\cdots+a_8=12;a_i\geq 1\}$$
$$|A|=|\{(a_1,\dots,a_8)\mid a_j\in\{0,1,\dots,12\};a_1+\cdots+a_8=12;a_i\geq 1\}|$$
$$=|\{(b_1,\dots,b_8)\mid a_j\in\{0,1,\dots,12\};b_1+\cdots+b_8=12;b_i\geq 0\}|$$
$$=\binom{12+8-1}{4}=\binom{11}{4}$$
$$p([\omega])=\frac{1}{|\Omega|}=\frac{1}{\binom{19}{7}}$$
$$\mathbb{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{\binom{11}{7}}{\binom{19}{7}}$$
$$\Rightarrow\boxed{\mathbb{P}(A)=\frac{\binom{11}{7}}{\binom{19}{7}}}$$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** m נוסעים בn קרונות. מה ההסתברות שכל אחד בקרון אחר?

הוכחה:

$$\Omega = \{f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}\}$$
$$|\Omega| = n^m$$
$$A = \{f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\} ; f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\}$$
$$|A| = \frac{n!}{(n-m)!}$$
$$p(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n^m}$$
$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n!}{n^m \cdot (n-m)!}}$$

מ.ש.ל.ה.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** A, B, C כך ש$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$

הוכחה:

נגדיר ניסוי של הטלת מטבע פעמיים אזי $\Omega = \{HH, TH, HT, TT\}$, $p(\{w\}) = \frac{1}{|\Omega|}$

נגדיר $A = \{HH, TH, HT\}$, $B = \{HH, TH, TT\}$, $C = \{HH, TT, TH\}$, אזי

$$A \cap B \cap C = \{HH\}$$

לכן

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$$
$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$$
$$\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{|A \cap B \cap C|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$$

כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** A, B, C כך ש$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{3}{4}$

הוכחה:

נגדיר ניסוי של הטלת מטבע פעמיים אזי $\Omega = \{HH, TH, HT, TT\}$, $p(\{w\}) = \frac{1}{|\Omega|}$

נגדיר $A = B = C = \{HH, TH, HT\}$, אזי

$$A \cap B \cap C = \{HH, TH, HT\}$$

לכן

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{|A \cap B \cap C|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$$

כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** A,B,C כך ש$\mathbb{P}\left(A\right)=\mathbb{P}\left(B\right)=\mathbb{P}\left(C\right)$, $\mathbb{P}\left(A\cap B\cap C\right)=\frac{1}{2}$

הוכחה:

נגדיר ניסוי של הטלת מטבע פעמיים אזי $\Omega=\left\{ HH,TH,HT,TT\right\}$, $p\left(\left\{ w\right\} \right)=\frac{1}{\left|\Omega\right|}$

נגדיר $A=B=\left\{ HH,TH,HT\right\}$, $C=\left\{ HH,TH,TT\right\}$, אזי

$$A\cap B\cap C=\left\{ HH,TH\right\}$$

לכן

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A\right) & =\frac{\left|A\right|}{\left|\Omega\right|}=\frac{3}{4}\\
\mathbb{P}\left(B\right) & =\frac{\left|B\right|}{\left|\Omega\right|}=\frac{3}{4}\\
\mathbb{P}\left(C\right) & =\frac{\left|C\right|}{\left|\Omega\right|}=\frac{3}{4}\\
\mathbb{P}\left(A\cap B\cap C\right) & =\frac{\left|A\cap B\cap C\right|}{\left|\Omega\right|}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺