אלגברה לינארית (2) תשע"ט 2018-2019 - סמסטר ב' - תרגיל 6

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז.** יש לציין **כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 1.5.19 בשעה 21:00.

1. יהי $\mathbb{F}$ שדה ממציין 0 . בכל סעיף נתונים $P, D \in \mathbb{F}[x]$. חלקו את P ב- D עם שארית.
   (א) $P = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 4 \quad , \quad D = x - 2$.
   (ב) $P = x^4 - 3x^2 + 5x - 7 \quad , \quad D = x^2 - 2x + 4$.

2. יהי $\mathbb{F}$ שדה כלשהו ויהי $Q \in \mathbb{F}[x]$ פולינום ללא שורשים ב- $\mathbb{F}$. אלו מהטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
   (א) אם הדרגה של Q היא 3 , אז Q אי-פריק.
   (ב) אם הדרגה של Q היא 4 , אז Q אי-פריק.

3. יהי $\mathbb{F}$ שדה ממציין 2 ויהי $Q \in \mathbb{F}[x]$. אלו מהטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
   (א) אם הדרגה של Q היא 2 אז Q פריק.
   (ב) אם הדרגה של Q היא 3 אז Q פריק.

4. נתון $Q \in \mathbb{R}[x]$. פרקו את Q לגורמים אי-פריקים כאשר:
   (א) $Q = x^5 - 4x^3 + 2x$.
   (ב) $Q = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$.
   (ג) $Q = x^3 - 4$.

5. נתונים פולינומים $P, Q \in \mathbb{R}[x]$. מצאו את $\gcd(P,Q)$ ומצאו $S, M \in \mathbb{R}[x]$ כך ש- $MP + SQ = \gcd(P,Q)$.
   (א) $P = x^5 - 2x^3 - x^2 + 2 \quad , \quad Q = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$.
   (ב) $P = x^4 - 1 \quad , \quad Q = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$.

6. יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $P, Q \in \mathbb{F}[x]$. הוכיחו או הפריכו:
   (א) אם $M, S \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים המקיימים $MP + SQ = 1 \in \mathbb{F}[x]$, אז ל- P ו- Q אין שורשים משותפים ב- $\mathbb{F}$. (כלומר לא קיים $a \in \mathbb{F}$ כך ש- $P(a) = Q(a) = 0$)
   (ב) אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ול- P ו- Q אין שורשים משותפים ב-$\mathbb{R}$, אז קיימים $M, S \in \mathbb{R}[x]$ כך ש- $MP + SQ = 1$.
   (ג) אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, אז קיימים $M, S \in \mathbb{C}[x]$ כך ש-$MP + SQ = 1$ אם ורק אם ל- P ו- Q אין שורשים משותפים ב- $\mathbb{C}$.

7. יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $T : V \to V$ אופרטור לינארי כך ש- $T \circ T \circ T = \mathrm{Id}_V$.
   (א) נתון ש- $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 3$. והוכיחו כי $V = U \oplus W$ כאשר
   $$U = \{\vec{v} \in V \ \mid \ T(\vec{v}) = \vec{v}\} \ , \ W = \{\vec{v} \in V \ \mid \ T(T(\vec{v})) = -T(\vec{v}) - \vec{v}\}$$
   (ב) האם התוצאה מהסעיף הקודם עדיין נכונה כאשר $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 3$?

8. נגדיר אופרטור לינארי $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ על ידי $T(\vec{v}) = A\vec{v}$ לכל $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ כאשר
   $$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R}).$$
   (א) חשבו את הפולינום האופייני χ_T של T ובדקו האם T לכסינה.
   (ב) מצאו פולינומים $P, Q, M, S \in \mathbb{R}[x]$ כך ש- $\chi_T = PQ$, $\deg P \geqslant 1$, $\deg Q \geqslant 1$ וגם $MP + SQ = 1$.
   (ג) מצאו בסיסים עבור $U = \ker P(T)$ ו- $W = \ker Q(T)$ וודאו כי האיחוד שלהם הוא בסיס של $\mathbb{R}^3$.