# פתרון תרגיל מספר 1 ־ לינארית 2

**שם:** מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

17 במרץ 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $A$ הפיכה
**הוכחה:**

$$0_n = 0_n \cdot (A - I_n) = \left(A^2 + A + I_n\right) \cdot (A - I_n) = A^3 + A^2 + A - A^2 - A - I_n = A^3 - I_n$$
$$\Rightarrow A^3 \overset{(1)}{=} I_n$$
$$\Rightarrow (\det(A))^3 = \det\left(A^3\right) = \det(I_n) = 1$$
$$\Rightarrow \det(A) \overset{(2)}{=} 1 \neq 0$$

בלינארית 1 ראינו כי $A$ הפיכה אם"ם $\det(A) \neq 0$ והראנו כי $\det(A) = 1 \neq 0$, לכן $A$ הפיכה

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $A^3 = I_n$
**הוכחה:**
בסעיף א' הראנו במשוואה (1) כי מתקיים $A^3 = I_n$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\det(A)$
**הוכחה:**
בסעיף א' הראנו במשוואה (2) כי מתקיים $\det(A) = 1$

מ.ש.ל.ג.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $A + B$ הפיכה
**הוכחה:**
תחילה נשים לב כי

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 + BA - AB - B^2 = A^2 + AB - AB - B^2 = A^2 - B^2$$

עתה נניח בשלילה כי $A + B$ איננה הפיכה, לכן $\det(A + B) = 0$, לכן

$$\det\left(A^2 - B^2\right) = \det((A - B) \cdot (A + B)) = \det(A + B) \cdot \det(A - B) = 0 \cdot \det(A - B) = 0$$

כלומר $\det\left(A^2 - B^2\right) = 0$, לכן $A^2 - B^2$ לא הפיכה בסתירה לנתון.
לכן $A + B$ הפיכה, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $A, B$ כך ש$A+B$ לא הפיכה ו$A^2-B^2$ הפיכה

**הוכחה:**

נבחר $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, נשים לב כי

$$B^2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+1\cdot 0&1\cdot 0+0\cdot 1\\0&0\cdot 1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0_2$$

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 1+0\cdot 1&1\cdot 0+0\cdot 1\\1\cdot 1+1\cdot 1&0\cdot 1+1\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$$

לכן $A^2-B^2=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}-0_2=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$,

לכן $\det\left(A^2-B^2\right)=1\cdot 1-0\cdot 2=1$, כלומר $A^2-B^2$ הפיך, כנדרש

וגם נשים לב כי $A+B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$,

לכן $\det(A+B)=1\cdot 1-1\cdot 1=0$, כלומר $A+B$ לא הפיך כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

3. **שאלה 4444 פתרון:**

(א) **צ"ל:** $U\oplus W=V$

**הוכחה:**

תחילה נראה כי $U+W=V$, יהי $v\in V$, נסמן $v=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$.

נשים לב כי

$$v=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c&b\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-c&0\\c&d\end{bmatrix}$$

וגם מתקיים $\begin{bmatrix}-c&0\\c&d\end{bmatrix}\in W$ ו$\begin{bmatrix}a+c&b\\0&0\end{bmatrix}\in U$, לכן $v\in U+W$, לכן $V\subseteq U+W$,

וגם ברור כי $U+W\subseteq V$ כי הם תתי מרחבים ולכן $V=U+W$.

עתה נראה כי $U\cap W=\{0_V\}$. יהי $v\in U\cap W$. נסמן $v=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$,

מהיות $v\in U$, נוכל להסיק כי $c=d=0$, כלומר $v=\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix}$,

מהיות $v\in W$, נוכל להסיק כי $a=0$ (כי $a=-c=0$) ו$b=0$, כלומר $v=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$.

לכן $U\cap W\subseteq\{0_V\}$ וגם $\{0_V\}\subseteq U\cap W$ ולכן $U\cap W=\{0_V\}$.

מהיות וראינו כי $U\cap W=\{0_V\}$ ו$U+W=V$ נובע כי $U\oplus W=V$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $P_{U,W}\left(\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x'&y'\\z'&t'\end{bmatrix}$

**הוכחה:**

יהי $v\in V$, נסמן $v=\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}$,

תחילה נשים לב שמסעיף א אנחנו יודעים כי $\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+z&y\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-z&0\\z&t\end{bmatrix}$,

לכן

$$P_{U,W}\left(\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\right)=P_{U,W}\left(\begin{bmatrix}x+z&y\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-z&0\\z&t\end{bmatrix}\right)=P_{U,W}\left(\begin{bmatrix}x+z&y\\0&0\end{bmatrix}\right)+P_{U,W}\left(\begin{bmatrix}-z&0\\z&t\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+z&y\\0&0\end{bmatrix}$$

כלומר $\boxed{x'=x+z,y'=y,z'=t'=0}$

מ.ש.ל.ב.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $T$ הטלה

**הוכחה:**

תחילה נראה כי $\{b_1-b_3,b_1-b_2,b_1+2b_2+3b_3\}$ הינם בסיס של $V$,

יהיו $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{F}$ כך ש

$$0=a_1\cdot(b_1-b_3)+a_2\cdot(b_1-b_2)+a_3\left(b_1+2\cdot b_2+3\cdot b_3\right)$$
$$\Rightarrow 0=(a_1+a_2+a_3)\cdot b_1+(2a_3-a_2)\cdot b_2+(3a_3-a_1)\cdot b_3$$

מהיות $b_1,b_2,b_3$ בסיס, אזי $a_1+a_2+a_3=0,2a_3-a_2=0,3a_3-a_1=0$, לכן

$$\Rightarrow 2a_3=a_2,3a_3=a_1$$
$$\Rightarrow 0=a_1+a_2+a_3=3a_3+2a_3+a_3=6a_3\Rightarrow a_3=0$$
$$\Rightarrow \boxed{a_3=0\Rightarrow a_1,a_2=0}$$

כלומר $a_1=a_2=a_3=0$, לכן $\{b_1-b_3,b_1-b_2,b_1+2b_2+3b_3\}$ בת"ל,

בלינארית 1 הוכחנו שאם יש $n$ וקטורים בת"ל במרחב ממימד $n$ אזי הוקטורים הם בסיס.

לכן, ממשפט זה נובע כי $\{b_1-b_3,b_1-b_2,b_1+2b_2+3b_3\}$ בסיס של $V$,

נגדיר $\boxed{U=\operatorname{span}\{b_1-b_3,b_1-b_2\},W=\operatorname{span}\{b_1+2b_2+3b_3\}}$, (ברור שהינם תתי מרחבים של $V$)

אזי מהיות $\{b_1-b_3,b_1-b_2,b_1+2b_2+3b_3\}$ בסיס של $V$ מתקיים

$$V=\operatorname{span}\{b_1-b_3,b_1-b_2,b_1+2b_2+3b_3\}=\operatorname{span}\{b_1-b_3,b_1-b_2\}+\operatorname{span}\{b_1+2b_2+3b_3\}=U+W$$
$$\Rightarrow \boxed{V=U+W}$$

עתה נראה כי $U\cap W=\{0_V\}$, יהי $v\in U\cap W$ אזי $\exists a_1,a_2,a_3\in\mathbb{F}$ כך ש

$$a_1\cdot(b_1-b_3)+a_2\cdot(b_1-b_2)=v=a_3\left(b_1+2\cdot b_2+3\cdot b_3\right)$$
$$0=a_1\cdot(b_1-b_3)+a_2\cdot(b_1-b_2)-a_3\left(b_1+2\cdot b_2+3\cdot b_3\right)$$

ראינו כי הוקטורים הנ"ל בת"ל ולכן השוויון מתקיים אס"ם $a_1=a_2=a_3=0$, נציב ונקבל $v=0\cdot(b_1+2\cdot b_2+3\cdot b_3)=0$,

לכן $U\cap W\subseteq\{0_V\}$ ומהיות $U,W$ מרחבים וקטורים אזי מתקיים $\{0_V\}\subseteq U\cap W$, כלומר $\boxed{U\cap W=\{0_V\}}$,

לכן, $\boxed{U\oplus W=V}$, עתה נרצה להראות כי $T=P_{U,W}$,

יהי $u\in U$ אזי $\exists a_1,a_2\in\mathbb{F}$ כך ש$u=a_1\cdot(b_1-b_3)+a_2\cdot(b_1-b_2)$, אזי

$$T(u)=T\left(a_1\cdot(b_1-b_3)+a_2\cdot(b_1-b_2)\right)=a_1\cdot\left(T(b_1)-T(b_3)\right)+a_2\left(T(b_1)-T(b_2)\right)$$
$$=a_1\cdot\left(\left(\frac{5}{6}b_1-\frac{1}{3}b_2-\frac{1}{2}b_3\right)-\left(-\frac{1}{6}b_1-\frac{1}{3}b_2+\frac{1}{2}b_3\right)\right)+a_2\left(\left(\frac{5}{6}b_1-\frac{1}{3}b_2-\frac{1}{2}b_3\right)-\left(-\frac{1}{6}b_1+\frac{2}{3}b_2-\frac{1}{2}b_3\right)\right)$$
$$=a_1\cdot(b_1-b_3)+a_2\left(b_1-b_2\right)=u=P_{U,W}(u)$$

יהי $w\in W$ אזי $\exists a\in\mathbb{F}$ כך ש$w=a\cdot(b_1+2\cdot b_2+3\cdot b_3)$, אזי

$$T(w)=T\left(a\cdot(b_1+2\cdot b_2+3\cdot b_3)\right)=a_1\cdot\left(T(b_1)+2T(b_2)+3T(b_3)\right)$$
$$=a_1\cdot\left(\left(\frac{5}{6}b_1-\frac{1}{3}b_2-\frac{1}{2}b_3\right)+2\cdot\left(-\frac{1}{6}b_1+\frac{2}{3}b_2-\frac{1}{2}b_3\right)+3\cdot\left(-\frac{1}{6}b_1-\frac{1}{3}b_2+\frac{1}{2}b_3\right)\right)$$
$$=a_1\cdot(0\cdot b_1+0\cdot b_2+0\cdot b_3)=a_1\cdot 0=0=P_{U,W}(w)$$

יהי $v\in V$, אזי $\exists u\in U,w\in W$ כך ש$v=u+w$ וגם

$$T(v)=T(u+w)=T(u)+T(w)=u=P_{U,W}(v)$$

לכן מהיות $\forall v\in V$ מתקיים $T(v)=P_{U,W}(v)$ נובע כי $T=P_{U,W}$,

כלומר $T$ הטלה

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $U,W$ כך ש $T=P_{U,W}$
**הוכחה:**
בסעיף א' ראינו כי $T=P_{U,W}$ עבור $\boxed{U=\operatorname{span}\{b_1-b_3,b_1-b_2\},W=\operatorname{span}\{b_1+2b_2+3b_3\}}$

מ.ש.ל.ב.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $P_{U,W}\circ P_{W,U}=0$
**הוכחה:**
יהי $v\in V$, אזי $\exists u\in u,w\in W$ כך ש $v=u+w$ אזי

$$\begin{aligned}(P_{U,W}\circ P_{W,U})(v)&=P_{U,W}(P_{W,U}(v))=P_{U,W}(P_{W,U}(u+w))\\&=P_{U,W}(P_{W,U}(w)+P_{W,U}(u))=P_{U,W}(w)+0_W\\&=P_{U,W}(w)=P_{U,W}(w+0_U)=P_{U,W}(w)+P_{U,W}(0_U)\\&=0_U+0_U=0_U=0_V\end{aligned}$$

לכן $\forall v\in V$ מתקיים $(P_{U,W}\circ P_{W,U})(v)=0$, כלומר $\boxed{P_{U,W}\circ P_{W,U}=0}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $P_{U,W}+P_{W,U}=Id_V$
**הוכחה:**
יהי $v\in V$, אזי $\exists u\in u,w\in W$ כך ש $v=u+w$ אזי

$$\begin{aligned}(P_{U,W}+P_{W,U})(v)&=P_{U,W}(v)+P_{W,U}(v)=P_{U,W}(u+w)+P_{W,U}(u+w)\\&=P_{U,W}(u)+P_{U,W}(w)+P_{W,U}(u)+P_{W,U}(w)\\&=u+0_U+0_W+w=u+w=v\end{aligned}$$

לכן $\forall v\in V$ מתקיים $(P_{U,W}+P_{W,U})(v)=v$, כלומר $\boxed{P_{U,W}+P_{W,U}=Id_V}$

מ.ש.ל.ב.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\ker T=0$, $\mathrm{Im}T=\mathbb{R}^3$
**הוכחה:**
יהי $v\in\ker T$, נסמן $v=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$,
אזי $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\-z\end{bmatrix}=T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)$, לכן מהשוויון נובע כי $x=y=0$, $-z=0\to z=0$,
לכן $v=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, כלומר $\ker T\subseteq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ ולכל אופרטור לינארי מתקיים $\{0_{\mathbb{R}^3}\}\subseteq\ker T$,
לכן $\boxed{\{0_{\mathbb{R}^3}\}=\ker T}$,
עתה נשים לב שממשפט המימדים מתקיים

$$\dim V=\dim\mathrm{Im}T+\dim\ker T=\dim\mathrm{Im}T$$

וגם מתקיים כי $\mathrm{Im}T\subseteq\mathbb{R}^3$ מההגדרה.
בלינארית 1 הוכחנו שעבור $U,W$ מרחבים וקטורים כך ש $U\subseteq W$ וגם $\dim U=\dim W$ אזי מתקיים כי $U=W$.
לכן $\boxed{\mathrm{Im}T=\mathbb{R}^3}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $T(u)=u$ אם"ם $u\in\operatorname{span}\{e_1,e_2\}$ ו־$T(u)=-u$ אם"ם $u\in\operatorname{span}\{e_3\}$

**הוכחה:**

יהי $v\in V$, נסמן $v=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$,

נשים לב כי $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=v=\begin{bmatrix}x\\y\\-z\end{bmatrix}=T(v)$ אם"ם $z=-z$ אם"ם $2z=0$ אם"ם $z=0$,

כלומר אם"ם $v=\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}$ אם"ם $v\in\operatorname{span}\{e_1,e_2\}$.

כלומר $T(u)=u$ אם"ם $u\in\operatorname{span}\{e_1,e_2\}$.

נשים לב כי $\begin{bmatrix}-x\\-y\\z\end{bmatrix}=-v=\begin{bmatrix}x\\y\\-z\end{bmatrix}=T(v)$ אם"ם $x=-x,y=-y$ אם"ם $2x=2y=0$

אם"ם $x=y=0$, כלומר אם"ם $v=\begin{bmatrix}0\\0\\z\end{bmatrix}$ אם"ם $v\in\operatorname{span}\{e_3\}$.

כלומר $T(u)=-u$ אם"ם $u\in\operatorname{span}\{e_3\}$.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $T\circ T=Id_V$

**הוכחה:**

יהי $v\in V$, נסמן $v=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$,

$$T\circ T(v)=T(T(v))=T\left(T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)\right)=T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\-z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=v$$

לכן $\forall v\in V$ מתקיים $(T\circ T)(v)=v$, כלומר $\boxed{T\circ T=Id_V}$

מ.ש.ל.ג.☺

7. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $R_{U,W}$ אופרטור לינארי

**הוכחה:**

יהיו $v_1,v_2\in V$ אזי $\exists u_1,u_2\in U$, $\exists w_1,w_2\in W$ יחידים כך ש־$v_1=u_1+w_1$, $v_2=u_2+w_2$.

נשים לב כי $v_1+v_2=(u_1+u_2)+(w_1+w_2)$ וגם $u_1+u_2\in U$, $w_1+w_2\in W$.

לכן

$$R_{U,W}(v_1+v_2)=(u_1+u_2)-(w_1+w_2)=(u_1-w_1)+(u_2-w_2)=R_{U,W}(v_1)+R_{U,W}(v_2)$$

עתה נראה לינאריות בסלקר,

יהיו $v\in V$, $\alpha\in\mathbb{F}$ אזי $\exists u\in U$, $\exists w\in W$ יחידים כך ש־$v=u+w$.

נשים לב כי $\alpha\cdot v=\alpha\cdot u+\alpha\cdot w$ וגם $\alpha\cdot u\in U$, $\alpha\cdot w\in W$.

לכן

$$R_{U,W}(\alpha\cdot v)=\alpha\cdot u-\alpha\cdot w=\alpha\cdot(u-w)=\alpha\cdot R_{U,W}(v)$$

כלומר ההעתקה היא אופרטור לינארי כי הוא מקיים את תכונות הלינאריות

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $R_{U,W}\left(u\right)=u$, $R_{U,W}\left(w\right)=-w$

**הוכחה:**

יהי $u\in U$ אזי נשים לב כי $u=u+0_{W}$ וגם $0_{V}=0_{W}\in W$, לכן מההגדרה נקבל כי

$$R_{U,W}\left(u\right)=u-0_{W}=u\Rightarrow\boxed{R_{U,W}\left(u\right)=u}$$

יהי $w\in W$ אזי נשים לב כי $w=0_{u}+w$ וגם $0_{V}=0_{U}\in u$, לכן מההגדרה נקבל כי

$$R_{U,W}\left(w\right)=0_{U}-w=-w\Rightarrow\boxed{R_{U,W}\left(w\right)=-w}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\ker R_{U,W}=0$, $\mathrm{Im}R_{U,W}=V$

**הוכחה:**

יהי $v\in\ker R_{U,W}$, אזי $\exists u\in U,w\in W$ כך ש$v=u+w$, אזי מההנחה מתקיים כי

$$0_{V}=R_{U,W}\left(v\right)=u-w\Rightarrow u=w$$

נשים לב כי $U\cap W=\{0_{V}\}$ ולכן $u=w$ מתקיים אם"ם $u=w=0_{V}$.

נציב ונקבל $v=0_{V}+0_{V}=0_{V}$, לכן $\ker R_{U,W}\subseteq\{0_{V}\}$,

ולכל אופרטור לינארי מתקיים $\{0_{V}\}\subseteq\ker R_{U,W}$, לכן $\boxed{\{0_{V}\}=\ker R_{U,W}}$

עתה נשים לב שממשפט המימדים מתקיים

$$\dim V=\dim\mathrm{Im}R_{U,W}+\dim\ker R_{U,W}=\dim\mathrm{Im}R_{U,W}$$

וגם מתקיים כי $\mathrm{Im}R_{U,W}\subseteq V$ מההגדרה.

בלינארית 1 הוכחנו שעבור $U,W$ מרחבים וקטורים כך ש $U\subseteq W$ וגם $\dim U=\dim W$ אזי מתקיים כי $U=W$.

לכן $\boxed{\mathrm{Im}R_{U,W}=V}$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $R_{U,W}+R_{W,U}=0$

**הוכחה:**

יהי $v\in V$, אזי $\exists u\in U,w\in W$ כך ש$v=u+w$, אזי מתקיים

$$\left(R_{U,W}+R_{W,U}\right)\left(v\right)=R_{U,W}\left(v\right)+R_{W,U}\left(v\right)=\left(u-w\right)+\left(w-u\right)=0_{V}$$

לכן $\boxed{R_{U,W}+R_{W,U}=0}$ כי $\forall v\in V$ מתקיים $\left(R_{U,W}+R_{W,U}\right)\left(v\right)=0_{V}$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** $R_{U,W}\circ R_{U,W}=Id_{V}$

**הוכחה:**

יהי $v\in V$, אזי $\exists u\in U,w\in W$ כך ש$v=u+w$,

נשים לב כי עבור $u-w$ מתקיים כי $u\in U$, $-w\in W$

לכן מתקיים

$$\left(R_{U,W}\circ R_{U,W}\right)\left(v\right)=R_{U,W}\left(R_{U,W}\left(v\right)\right)=R_{U,W}\left(u-w\right)=u-\left(-w\right)=u+w=v$$

לכן $\boxed{R_{U,W}+R_{W,U}=Id_{V}}$ כי $\forall v\in V$ מתקיים $\left(R_{U,W}\circ R_{U,W}\right)\left(v\right)=v$

מ.ש.ל.ה.☺

(ו) **צ"ל:** $R_{U,W}\circ R_{W,U}=-Id_V$

**הוכחה:**

יהי $v\in V$, אזי $\exists u\in U,w\in W$ כך ש־$v=u+w$,

נשים לב כי עבור $-u+w$ מתקיים כי $-u\in U$, $w\in W$

לכן מתקיים

$$\left(R_{U,W}\circ R_{W,U}\right)(v)=R_{U,W}\left(R_{W,U}(v)\right)=R_{U,W}(w-u)=-u-w=-(u+w)=-v$$

לכן $\boxed{R_{U,W}+R_{W,U}=-Id_V}$ כי $\forall v\in V$ מתקיים $\left(R_{U,W}\circ R_{W,U}\right)(v)=-v$

מ.ש.ל.ו☺

8. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $U,W$ תתי מרחבים של $V$

**הוכחה:**

תחילה נראה כי $0_V\in U,W$, נשים לב כי $T(0_V)=0_V$ ולכן $0_V\in U$, וגם $T(0_V)=0_V=-0_V$ ולכן $0_V\in W$.

עתה נראה לינאריות:

יהי $v_1,v_2\in U$, אזי $T(v)=v$. יהי $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ אזי

$$T(\alpha\cdot v_1+\beta\cdot v_2)=\alpha\cdot T(v_1)+\beta\cdot T(v_2)=\alpha\cdot v_1+\beta\cdot v_2\Rightarrow\alpha\cdot v_1+\beta\cdot v_2\in U$$

יהי $v_1,v_2\in W$, אזי $T(v)=v$. יהי $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ אזי

$$T(\alpha\cdot v_1+\beta\cdot v_2)=\alpha\cdot T(v_1)+\beta\cdot T(v_2)=\alpha\cdot -v_1+\beta\cdot -v_2=-(\alpha\cdot v_1+\beta\cdot v_2)\Rightarrow\alpha\cdot v_1+\beta\cdot v_2\in W$$

לכן $U,W$ הם תתי קבוצות של מרחב וקטורי שסגורים לחיבור וקטורים, למכפלה בסקלר ומכילים את וקטור ה0,

לכן $U,W$ הינם תתי מרחבים של $V$.

מ.ש.ל.א☺

(ב) **צ"ל:** $U\oplus W=V$

**הוכחה:**

תחילה נראה כי $U\cap W=\{0_V\}$, יהי $v\in U\cap W$,

מהיות $v\in U$ מתקיים כי $T(v)=v$,

מהיות $v\in W$ מתקיים כי $T(v)=-v$, לכן $v=T(v)=-v$,

לכן $v=-v$, כלומר $2v=0_V$, ומהיות $\mathrm{char}(\mathbb{F})\neq 2$ נובע כי $v=0_V$ (כי $2^{-1}\in\mathbb{F}$),

לכן $U\cap W\subseteq\{0_V\}$.

בסעיף א' ראינו כי $0_V\in U,W$ ולכן $0_V\in U\cap W$, לכן $\{0_V\}\subseteq U\cap W$, כלומר $\boxed{U\cap W=\{0_V\}}$.

יהי $v\in V$, נסתכל על $u=\frac{v+T(v)}{2}$, $w=\frac{v-T(v)}{2}$, נשים לב כי $v=u+w$

וגם

$$T(u)=T\left(\frac{v+T(v)}{2}\right)=\frac{T(v)+T(T(v))}{2}=\frac{T(v)+v}{2}=u\Rightarrow u\in U$$

$$T(w)=T\left(\frac{v-T(v)}{2}\right)=\frac{T(v)-T(T(v))}{2}=\frac{T(v)-v}{2}=-w\Rightarrow w\in W$$

כלומר הראנו כי $v\in U+W$, לכן $V\subseteq U+W$ וברור כי $U+W\subseteq V$ (חיבור תתי מרחבים מוכל במרחב),

לכן $\boxed{U+W=V}$, כלומר $\boxed{U\oplus W=V}$

מ.ש.ל.ב☺

(ג) **צ"ל:** $T=R_{U,W}$

**הוכחה:**

יהי $v\in V$, אזי $\exists u\in U,w\in W$ כך ש־$v=u+w$, וגם מתקיים $T(u)=u,T(w)=-w$, לכן

$$T(v)=T(u+w)=T(u)+T(w)=u-w=R_{U,W}(u+w)=R_{U,W}(v)$$

לכן $\forall v\in V$ מתקיים $R_{U,W}(v)=T(v)$, כלומר $T=R_{U,W}$

מ.ש.ל.ג☺