פתרון תרגיל מספר 6 - חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

16 במאי 2020

שאלה 2

סעיף 1

צ"ל: $\text{RE} = \overline{\text{coRE}}$ טענה לא נכונה

הוכחה:

הטענה לא נכונה, ראינו ש- $\emptyset \in R$ (לדוגמא על ידי מ"ט שדוחה כל מילה ולכן הוא מ"ט שעוצר על כל קלט ולא מקבל אף מילה)

ולכן $\emptyset \in R = \text{RE} \cap \text{coRE}$ ולכן $\emptyset \in \text{RE}$ וגם $\emptyset \in \text{coRE} \Rightarrow \emptyset \notin \overline{\text{coRE}}$

כלומר $\emptyset \in \text{RE}$ וגם $\emptyset \notin \overline{\text{coRE}}$, ולכן $\boxed{\text{RE} \neq \overline{\text{coRE}}}$, כלומר הטענה לא נכונה, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2

צ"ל: RE לא סגור תחת משלים

הוכחה:

הטענה לא נכונה, נגדיר $L = HALT_{TM} = \{(\langle M \rangle, w) \mid \text{M halts on w}\}$

הוכחנו בהרצאה שמתקיים $L \in \text{RE}$ וגם הוכחנו ש- $L \notin R = \text{RE} \cap \text{coRE}$

ולכן $L \notin \text{coRE}$.

לכן, ממהגדרה מתקיים ש- $L \notin \text{coRE}$ אזי $\overline{L} \notin \text{RE}$

כלומר קיבלנו כי $L \in \text{RE}$ וגם $\overline{L} \notin \text{RE}$,

כלומר קיבלנו ש- RE לא סגור תחת משלים (הראנו שיש שפה ב- RE שהמשלים שלה לא ב- RE)

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3

צ"ל: קיימות $L_1 \in \text{RE}$, $L_2 \in \text{coRE}$ כך ש- $L_1 \cup L_2 \in R$

הוכחה:

הטענה נכונה, ראינו ש- $\emptyset \in R$ (לדוגמא על ידי מ"ט שדוחה כל מילה ולכן הוא מ"ט שעוצר על כל קלט ולא מקבל אף מילה)

ולכן $\emptyset \in R = \text{RE} \cap \text{coRE}$ ולכן $\emptyset \in \text{RE}$ וגם $\emptyset \in \text{coRE}$

נגדיר $\boxed{L_1 = L_2 = \emptyset}$ ולכן $\boxed{L_1 \in \text{RE}}$, $\boxed{L_2 \in \text{coRE}}$ וגם מתקיים כי $\boxed{L_1 \cup L_2 = \emptyset \in R}$

כלומר הראנו שקיימות $L_1 \in \text{RE}$, $L_2 \in \text{coRE}$ כך ש- $L_1 \cup L_2 \in R$, ולכן הטענה נכונה, כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

סעיף 4

צ"ל: אם $L_1 \subseteq L_2$ וגם $L_1 \notin \text{RE}$ האם אפשרי ש- $L_2 \in \text{RE}$?

הוכחה:

הערה: נבחר Σ שפה שמכילה את כל האותיות במ"ט ל - $HALT_{TM}$ (ניתן לדוגמא לקודד הכל עם $\{0, 1, \#\}$ כפי שראינו בתרגול)

הטענה נכונה, ראינו ש- $\Sigma^* \in R$ (לדוגמא על ידי מ"ט שמקבל כל מילה ולכן הוא מ"ט שעוצר על כל קלט ומקבל כל מילה)

ונזכר שהוכחנו בהרצאה כי $HALT_{TM} = \{(\langle M \rangle, w) \mid \text{M halts on w}\} \in \text{RE}$.

וגם ראינו ש- $HALT_{TM} \notin R = \text{RE} \cap \text{coRE}$ ולכן $HALT_{TM} \notin \text{coRE}$ כלומר $\overline{HALT_{TM}} \notin \text{RE}$

נסמן $L_1 = \overline{HALT_{TM}}, L_2 = \Sigma^*$

ולכן $L_1 \notin \text{RE}$ וגם $L_1 \subseteq \Sigma^* = L_2$ וגם $L_2 \in R \Rightarrow L_2 \in \text{RE}$

כלומר הראנו שקיימות L_1, L_2 כך ש$L_1 \subseteq L_2$ וגם $L_1 \notin \text{RE}$ וגם מתקיים $L_2 \in \text{RE}$, כנדרש

מ.ש.ל.ד.☺