אלגברה לינארית (1) תשע"ח - תרגיל (7)

22 במאי 2018

שאלה 1

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, U_1, U_2, W תת־מרחבים של V. אלו מהטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אחרת, הביאו דוגמא נגדית.

א') $(U_1 + U_2) \cap W = (U_1 \cap W) + (U_2 \cap W)$.

ב') $(U_1 \cap U_2) + W$ מוכל ב־$(U_1 + W) \cap (U_2 + W)$.

ג') $(U_1 + W) \cap (U_2 + W)$ מוכל ב־$(U_1 \cap U_2) + W$.

ד') אם U_1 מוכל ב־U_2, אז $U_1 + W$ מוכל ב־$U_2 + W$.

ה') אם $U_1 + W$ מוכל ב־$U_2 + W$, אז U_1 מוכל ב־U_2.

שאלה 2

יהי V מרחב וקטורי ו־U, W תת־מרחבים שלו. נניח כי

- $\dim V = 10$.
- $\dim U = 8$.
- $\dim W = 7$.

מהם הערכים האפשריים עבור $\dim(U \cap W)$? עבור כל ערך אפשרי, תנו דוגמא ל־V, U, W ספציפיים שעבורם ערך זה מתקבל.

שאלה 3

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ו־U, W תת־מרחבים שלו. נניח ש־$V = U + W$ ו־$U \cap W = \{0_V\}$. הוכיחו שכל $v \in V$ ניתן להצגה בצורה יחידה בתור $u + w$, כאשר $u \in U$ ו־$w \in W$. כלומר, אם $u_1 \in U$ ו־$w_1 \in W$ כך ש־$v = u_1 + w_1$, אז $u = u_1$ ו־$w = w_1$.

הערה - במקרה הנ"ל, אומרים ש־V הוא סכום ישר של U ו־W. מקובל לסמן מצב דברים זה על ידי $V = U \oplus W$.

שאלה 4

מטריצה ריבועית $A = (a_{ij})$ מסדר $n \times n$ עם מקדמים ב־$\mathbb{F}$ תקרא סימטרית אם $a_{ij} = a_{ji}$ לכל i, j, $1 \leq i, j \leq n$. A תקרא אנטי סימטרית אם $a_{ij} = -a_{ji}$ לכל i, j, $1 \leq i, j \leq n$. נתבונן ב־ $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. נסמן ב־$\mathcal{S}$ את אוסף המטריצות הסימטריות ב־V וב־$\mathcal{A}$ את אוסף המטריצות האנטי סימטריות ב־V. הוכיחו:

א') $\mathcal{A}$ ו־$\mathcal{S}$ הם תת־מרחבים של V.

ב') $V = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

שאלה 5

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $U,W,Z\subseteq V$ תת־מרחבים המקייימים:

- $\dim(W+Z)=\dim U$.
- $\dim(Z+U)=\dim W$.
- $\dim(U+W)=\dim Z$.

האם בהכרח $U=W=Z$? אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

שאלה 6

מצאו בסיס לתת המרחב U של V מעל $\mathbb{F}$ כאשר:

א') $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, $U=\operatorname{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix}-2\\-5\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\9\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\8\\10\end{bmatrix}\right\}\right)$.

ב') $V=\mathbb{C}^3$ מעל $\mathbb{C}$, $U=\operatorname{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix}2i\\1+i\\-3+2i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3-i\\5+2i\\i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-9+5i\\-11-2i\\-12+5i\end{bmatrix}\right\}\right)$.

ג') $V=\mathbb{F}_3^3$ מעל $\mathbb{F}_3$, $U=\operatorname{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}\right\}\right)$.

שאלה 7

בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונים תת־מרחבים U,W של $\mathbb{R}^4$. מצאו בסיס ומימד של $U+W$ כאשר:

א') $U=\operatorname{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix}\right\}\right)$ ו־ $W=\operatorname{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\2\\2\end{bmatrix}\right\}\right)$.

ב') $U=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\begin{matrix}x_1+x_2-x_3=0\\x_1-x_4=0\end{matrix}\right\}$ ו־ $W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\begin{matrix}x_1+x_4=0\\3x_1-x_2-x_3=0\end{matrix}\right\}$.

שאלה 8

בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתון מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$, $v\in V$ ו־$\mathcal{B}$ בסיס סדור של V. חשבו את $[v]_{\mathcal{B}}$ כאשר:

א') $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}=\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$ ו־ $v=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

ב') $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}=\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$ ו־ $v=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

ג') $V=\mathbb{F}_3^2$ מעל $\mathbb{F}_3$, $\mathcal{B}=\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)$ ו־ $v=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.