תרגיל 3 אלגברה לינארית 1

211747639

מיכאל גרינבאום

כך של מטריצות אלמנטרית QD בQD = A כך של קיימת Q כך של אלמנטרית אלמנטרית א. 2D = AA מטריצה מדורגת מצומצמת של D נתון:

 $\overline{\mathrm{D}}$ נסמן את המטריצות האלמנטריות המתאימות לפעולות השורה שנעשו על A כדי להגיע ל

$$E_1, \ldots, E_k$$
 2

$$E_k \cdot ... \cdot E_1 A = D$$
 נשים לב כי

 $1 \leq orall i \leq k$, את המטריצה האלמנטרית בעלת הפעולה בעלת האלמנטרית האלמנטריצה את ב E_i^{-1}

 $E_{k-1}\cdot...\cdot E_1A=E_k^{-1}D$ ולכן $A=E_1^{-1}\cdot...\cdot E_k^{-1}D$ נעשה זאת לכל מטריצה אלמנטרית ונקבל QD=Aונקבל $Q=E_1^{-1}\cdot...\cdot E_k^{-1}$ נסמן ישר אונקבל עם פון ונקבל ישר אונקבל ישר אונקב

$$QD=A$$
 נסמן $Q=E_1^{-1}\cdot ...\cdot E_k^{-1}$ ונקבל

מ.ש.ל.א.⊡

 \mathbf{Q} של iה לעמודה לעמודה הlית של \mathbf{A} והה לעמודה הואל:

 e_i היא D נתון: העמודה הlית של

$$Q = egin{bmatrix} q_{1,1} & \cdots & q_{1,m} \\ dots & \ddots & dots \\ q_{m,1} & \cdots & q_{m,m} \end{bmatrix}$$
נטמן $Q \cdot \overrightarrow{e_i} = egin{bmatrix} q_{1,i} \\ q_{2,i} \\ dots \\ q_{m,i} \end{bmatrix}$ נשים לב כי

 $Q\cdot\overrightarrow{e_i}=egin{pmatrix}q_{1,i}\\q_{2,i}\\\vdots\\\end{pmatrix}$ והיא: Q והיא: Q מוגדרת להיות העמודה הQ בפול D כפול מוגדרת להיות העמודה להיות העמודה ה

 $egin{array}{c} q_{1,i} \\ q_{2,i} \\ \vdots \\ q_{m,i} \\ \end{pmatrix}$ היא Q היא של Q היא

מ.ש.ל.ב.⊙

עמודות n-m על ידי מחיקה על מהמטריצה Q מתקבלת מהמטריצה על צ"ל: המטריצה Q מתקבלת מהמטריצה איל מחיקה על ידי מחיקה על איל נתון: בD אין שורות אפסים

הוכחה:

. עמודות סטנדרטיות שפסים, קיימים בח שורות שורות שורות מהיות מהיות שורות אפסים, היימים בח שורות שורות שורות אפסים, היימים בח שורות שורות אפסים, היימים בח שורות ש

. נסתכל על \widehat{D} שהיא המטריצה D לאחר מחיקה של העמודות ללא איבר מוביל

.Do לאחר שנמחקו עמודות עמודות אותן לאחר מחיקה \hat{A} לאחר מחיקה של \hat{A}

 \widehat{Q} נשים לב כי העמודה ה \widehat{D} של \widehat{D} של $1 \leq Vi \leq m$ מוגדרת להיות העמודה של \widehat{D} כפול

 e_i נשים לב כי העמודה ה \widehat{D} שווה ל

 \dot{A} של ווה לעמודה ה \dot{a} של החליים שהעמודה ה \dot{a} של מסעיף ב מתקיים שהעמודה ה \dot{a}

 $Q=\hat{A}$ נשים לב שהדבר מתקיים לכל $1\leq i\leq m$ נשים

. עם איבר מוביל. עם איבר ומn עמודות ומחקנו מn-m עמודות, מחקנו עם איבר מוביל.

מ.ש.ל.ג.⊙

 \mathbf{Q} א. \mathbf{z}'' העמודה ה l_i ית של \mathbf{A} זהה לעמודה הו

i מטריצה מדורגת מצומצמת של l_i ,A היא העמודה המכילה של מטריצה מדורגת לתוני. ם מטריצה של היא היא העמודה המכילה של היא המוביל בשורה הוכחה:

 e_i היא D של ושל העמודה העמודה לב כי העמודה

. A ש l_i זהה לעמודה בשאלה מתקיים שהעמודה ל פעיף 2 מתקיים בשאלה עמודה הוכחנו בשאלה 1 סעיף 2 מתקיים שהעמודה ה

מ.ש.ל.א.⊡

ב.
$$P_1=P_2$$
ב. ב. $\underline{\mathit{E''d:}}$ $P_1=P_2$ ב. ב. $\underline{\mathit{E''d:}}$ $P_1=P_2$ וגם $r=m$, P_1 , $P_2\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

מטריצות אלמנטריות שעבורם E_1,\dots,E_k מטריצות אלמנטריות אלמנטריות מהיות מהיות מספלה של מטריצות אלמנטריות אלמנטריות מתקיים ש

מטריצות אלמנטריות שעבורם E_{k+1},\dots,E_l מטריצות אלמנטריות, אלמנטריות מסיינות מכפלה אלמנטריות מתקיים אלמנטריות פו $P_2=E_{k+1}\cdot\dots\cdot E_l$ מתקיים א

 $1 \leq \forall i \leq k+l$ את המטריצה האלמנטרית בעלת את הפעולה את המטריצה את בסמן בסמן ליצה אלמנטרית את המטריצה את המטריצה את המטריצה את המטריצה אלמנטרית בעלת הפעולה את המטריצה את המטריע המטריצה את המטריעה את המטריעה א

$$E_1^{-1}\cdot...\cdot E_k^{-1}D=A$$
 נשים לב ש $E_k\cdot...\cdot E_1$ A $=D$ נשים לב על $Q_1D=A$ ולכן $Q_1=E_1^{-1}\cdot...\cdot E_k^{-1}$ נסמן לב וליך לב וע E_1

$$E_{k+1}^{-1}\cdot...\cdot E_l^{-1}D=A$$
 נשים לב ש $E_{k+1}\cdot...\cdot E_l$ ו לכן $E_{k+1}\cdot...\cdot E_l$ ולכן $Q_2D=A$ ולכן $Q_2=E_l^{-1}\cdot...\cdot E_{k+1}^{-1}$

 Q_1 שוות לעמודות ושל A נשים כי העמודות מתקיים מתקיים מתקיים לב מהסעיף הקודם לב ו l_i שוות לכל ווג $1 \leq i \leq m$ לכל ווגם על לכל ווגם בי

$$Q_1=Q_2$$
 ולכן העמודות של Q_2 ו ע שוות לכל m שוות לכל $E_1^{-1}\cdot\ldots\cdot E_k^{-1}=E_l^{-1}\cdot\ldots\cdot E_{k+1}^{-1}$ כלומר כלומר $E_1^{-1}\cdot\ldots\cdot E_k^{-1}=E_l^{-1}\cdot\ldots\cdot E_{k+1}^{-1}$ ולכן $E_k\cdot\ldots\cdot E_1\cdot E_l^{-1}\cdot\ldots\cdot E_{k+1}^{-1}=P_1\cdot E_l^{-1}\cdot\ldots\cdot E_{k+1}^{-1}$ נכפיל מימין ב $E_{k+1}=P_1\cdot E_l^{-1}\cdot\ldots\cdot E_{k+2}^{-1}$ ונקבל $E_k=P_1\cdot\ldots\cdot E_l=P_1$ ונקבל $E_k=P_1\cdot\ldots\cdot E_l=P_1$ ולכן $E_k=P_1$ ולכן $E_k=P_1$

מ.ש.ל.ב.⊖

 $P_1 = P_2$ א תמיד (3

 $D=P_1A=P_2A$ כך שר כך אר בר חבר חבר חבר מצומצמת של A וו מטריצה מדורגת מצומצמת של D בריצה מדורגת מצומצמת של הברחה:

$$P_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}, P_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}1&\overline{0}\\0&0\end{bmatrix}$$
 נבחר בחר $D=P_1A=P_2A$ נשים לב כי $D=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ וגם

 $P_1 \neq P_2$ וגם מתקיים ש

מ.ש.ל.⊡

 $\mathrm{TA} = \mathrm{I_n}$ שעבורה מתקיים T שעבורה מטריצה א ביימת שעל: 4 א קיימת מטריצה $AS = I_m$ פרימת מטריצה S כך א ביימת מטריצה $A \in M_{m \times n}(F)$ ביימת מטריצה ביימת ביימת מטריצה ביימת מטריצה ביימת מטריצה ביימת מטריצה ביימת מטריצה

 $\mathbf{A}\cdot\overrightarrow{\mathbf{x}}=\overrightarrow{0}$ משים לב מהיות קיימים אינסוף קיימים $\mathbf{m}<\mathbf{n}$ היות לב מהיות נשים לב בחר לב מהיות למשוואה.

$$T\cdot A\cdot\overrightarrow{x}=T\cdot\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$$
 תהי T מטריצה ולכן מתקיים ש $T\cdot A\cdot\overrightarrow{x}=T\cdot\overrightarrow{0}=T$ נניח בשלילה כי $TA=I_n$ ולכן ולכן בסתירה להנחה ש $\overrightarrow{x}\neq\overrightarrow{0}$ פתרון למשוואה.

 $TA \neq I_n$ ולכן

מ.ש.ל.⊡

אין פתרון $A \cdot \overrightarrow{x} = b$ אין פתרון b אין פתרון .5 n < mכך ש $A \in M_{m imes n}(F)$ כר

.A את המטריצה המדורגת המצומצמת של

 $D=E_k\cdot\ldots\cdot E_1A$ שעבורן מתקיים E_1,\ldots,E_k אלמנטריות מטריצות לכן קיימות . נשים לב שיש פחות מm איברים מובילים ולכן ב ${
m D}$ יש שורת אפסים לפחות

אין פתרון
$$D\cdot\overrightarrow{x}=\widehat{b}$$
 אין פתרון, גבחר $\widehat{b}=egin{bmatrix}0\ \vdots\ 0\ 1\end{bmatrix}$ ולכן נבחר

ולכן ל $E_k \cdot ... E_1 A \cdot \overrightarrow{x} = \widehat{b}$ ולכן ל

 $1 \leq \forall i \leq k$ את המטריצה האלמנטרית בעלת הפעולה האלמנטרית האלמנטרית המטריצה להשלמנטרית בעלת בעלת בעלת המטריצה אלמנטרית בעלת הפעולה אלמנטרית בעלת המטריצה אלמנטרית בעלת המטריצה אלמנטרית בעלת הפעולה אלמנטרית בעלת המטריצה האלמנטרית בעלת המטריצה אלמנטרית בעלת המטריצה אלמנטרית בעלת המטריצה אלמנטרית בעלת המטריצה האלמנטרית בעלת המטריצה אלמנטרית בעלת המטריצה אלמנטרית בעלת המטריצה אלמנטרית בעלת המטריצה ולכן $A \cdot \overrightarrow{x} = \hat{b} \cdot E_1^{-1} \cdot ... \cdot E_k^{-1}$ ולכן

נסמן
$$\overrightarrow{x}=b$$
 אין פתרון $b=\widehat{b}\cdot E_1^{-1}\cdot ...\cdot E_k^{-1}$ נסמן

מ.ש.ל.א.⊙

אין פתרון AB $\cdot \overrightarrow{\mathbf{x}} = b$ אין פתרון פתרון $B \in M_{n \times k}(F)$ נתנו: $A \in M_{m \times n}(F)$ כך ש

 ${
m A}$ נסמן בD את המטריצה המדורגת המטריצה של

 $D = E_k \cdot \ldots \cdot E_1 A$ שעבורן מתקיים E_1, \ldots, E_k לכן קיימות מטריצות אלמנטריות . נשים לב שיש פחות מm איברים מובילים ולכן ב D יש שורת אפסים לפחות

בסדר B בטריצה לכל אפסים איז שורת אפסים אז למטריצה בנוסף לכך אם לכל מטריצה בנוסף בנוסף בנוסף לכך אם בחרת אפסים איז למטריצה בנוסף לכך אם ל מתאים. (מההגדרה של מכפלת מטריצות, נשים לב שהאיבר האחרון בכל שורה ייצא 0 ולכן תצא שורת אפסים, בהנחה ששורת האפסים היא בשורה האחרונה)

ולכן נסמן ב $D \cdot B = C$, נשים לב של

ולכן נבחר
$$\widehat{x}=\widehat{b}$$
 אין פתרון , $\widehat{b}=egin{bmatrix}0\ dots\ 0\ 1\end{bmatrix}$ ולכן נבחר

ולכן ל $\widehat{E}_k \cdot ... E_1 AB \cdot \overrightarrow{x} = \widehat{b}$ אין פתרון

 $1 \leq \forall i \leq k$, E_i את המטריצה האלמנטרית בעלת הפעולה האלמנטרית המטריצה האלמנטרית נסמן ב ולכן $AB\cdot\overrightarrow{x}=\widehat{b}\cdot E_1^{-1}\cdot...\cdot E_k^{-1}$ אין פתרון ולכן $b=\widehat{b}\cdot E_1^{-1}\cdot...\cdot E_k^{-1}$ אין פתרון נסמן $b=\widehat{b}\cdot E_1^{-1}\cdot...\cdot E_k^{-1}$

₪.ש.ל.ב.

 $(CA)\cdot\overrightarrow{x}=b$ ל קיים פתרון ל כך שלכל כך מטריצה כך מטריצה לא בהכרח קיימת מטריצה כך ג. ביילב

n < mכך ש $A \in M_{m \times n}(F)$ נתוו:

$$n < m$$
 ולכן $n = 1, m = 2$, נשים לב כיל, $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$CA=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$
נסמן $r imes 2$ מסדר $x imes 2$ ונקבל ש C נסמן $t imes 2$ מסדר $t imes 2$ ונקבל ש $t imes 2$ מתקיים כי $t imes 2$ מתקיים כי $t imes 2$ מתקיים כי $t imes 2$ מתקיים כי

ולכן ל
$$\begin{bmatrix} 1\\0\\\vdots\\0 \end{bmatrix}$$
 אין פתרון.

מכפלה של מטריצות אלמנטריות

מ.ש.ל.ג.⊙

ה. א. בייל: מצאו P ריבועית שהיא מכפלה של מטריצות אלמנטריות כך שא P ריבועית שהיא מכפלה של מטריצות אלמנטריות מצומצמת

$$A = I_n \frac{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}$$
הוכחה:

נבחר $P = I_n$ ולכן ולכן $P = I_n$ שהיא מדורגת מצומצמת.

נשים לב כי P היא אלמנטרית המתקבלת על ידי החלפת 2 שורות פעמיים (לדוגמא)

מ.ש.ל.א.☺

ב. PA מדורגת מצומצמת של מטריצות אלמנטריות כך שהיא מכפלה של שהיא מכפלה של מטריצות אלמנטריות בי צ"ל: מצאו

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{R_1 \circ R_1}{1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$$0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P \cap PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ and } P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

מ.ש.ל.ב.⊙

ג. ביילי פאר מדורגת מדורגת מכפלה של מטריצות אלמנטריות כך שPA מדורגת מצומצמת ג. ביילי מצאו P

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

מכפלה של מטריצות P =
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
ומתקיים כי
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
ולכן אלמנטריות

מ.ש.ל.ג.⊙

ד. PAמדורגת מצומצמת אלמנטריות כך של מטריצות שהיא מכפלה של מטריצות אלמנטריות בי מצאו P ביבועית שהיא מכפלה של

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -15 & -10 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{R_4 \to R_4 - 2R_1}{R_2 \to -\frac{1}{5}R_2} \begin{bmatrix}
1 & 2 & 4 & 3 \\
0 & \frac{1}{1} & 2 & 1 \\
0 & -5 & -15 & -10 \\
0 & 0 & -5 & -5
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\
-4 & 0 & 1 & 0 \\
-2 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{5}R_3} \begin{bmatrix}
1 & 2 & 4 & 3 \\
0 & \frac{1}{1} & 2 & 1 \\
0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{1} & 3 & 2 \\
0 & 0 & \frac{1}{1} & 1
\end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}} \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{1} & 1
\end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}} \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{1} & 1
\end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}} \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\
0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix}
1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{1} & 2 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{1} & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{1} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{5}
\end{bmatrix}
\xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{1} & 2 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{1} & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_3} \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & \frac{1}{1} & 0 & -1 \\
0 & 0 & \frac{1}{1} & 1 \\
0 & 0 & \frac{1}{1} & 0
\end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}} \begin{bmatrix}
\frac{2}{5} & 0 & 0 \\
\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\
\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5}
\end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
 ומתקיים

מ.ש.ל.ד.⊡