פתרון תרגיל מספר 7 - חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

21 במאי 2020

שאלה 5

צ"ל: קיים אנומרטור זיגזג אם"ם $L \in R$

הוכחה:

$\Leftarrow$: נניח ש- E היא אנומרטור זיגזג

נבנה את המכונת טיורינג $\mathcal{M}$ הבאה:

1. נקבל קלט x
2. לכל $i \in \{1, 2, \dots\}$:
   (א) נדפיס את המילה ה- $2 \cdot i - 1$ של E, אם $w = x$, נקבל
   (ב) נדפיס את המילה ה- $2 \cdot i$ של E, אם $w = x$, נדחה

תחילה נוכיח ש- $\mathcal{M}$ עוצרת על כל קלט.

יהי $x \in \Sigma^*$, מהיות E מדפיסה את כל המילים ב- Σ^* קיים אינדקס $i \in \mathbb{N}$ שבו E ידפיס את x.

נשים לב שבאיטרציה ה- $\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil$ נריץ את E ובשלב a או בשלב b יודפס i ונקבל או נדחה בהתאם (כלומר נסיים לרוץ).

כלומר $\mathcal{M}$ עוצרת על כל קלט.

נראה ש- $w \in L \iff w \in L(\mathcal{M})$:

1. נראה שאם $w \in L$ אז לעולם לא נדחה את w, נניח בשלילה שדחינו את w בשלב 2ב, כלומר קיים אינדקס $i \in \mathbb{N}$ כך שהמילה ה- $2 \cdot i$ שהודפסה על ידי E היא w, לכן מהיות E אנומרטור זיגזג, מההגדרה מתקיים כי $w \notin L$ בסתירה להנחה.
   כלומר מהיות $\mathcal{M}$ עוצרת על w וגם לא דוחה את w, נסיק כי $\mathcal{M}$ מקבלת את w , ולכן $w \in L(\mathcal{M})$, ולכן $\boxed{w \in L \to w \in L(\mathcal{M})}$
2. נראה שאם $w \notin L$ אז לעולם לא נקבל את w, נניח בשלילה שקיבלנו את w בשלב 2א, כלומר קיים אינדקס $i \in \mathbb{N}$ כך שהמילה ה- $2 \cdot i - 1$ שהודפסה על ידי E היא w, לכן מהיות E אנומרטור זיגזג, מההגדרה מתקיים כי $w \in L$ בסתירה להנחה.
   כלומר מהיות $\mathcal{M}$ עוצרת על w וגם לא מקבלת את w, נסיק כי $\mathcal{M}$ דוחה את w , ולכן $w \notin L(\mathcal{M})$, ולכן $\boxed{w \notin L \to w \notin L(\mathcal{M})}$

כלומר קיבלנו ש- $w \in L \to w \in L(\mathcal{M})$ וגם $w \notin L \to w \notin L(\mathcal{M})$ ולכן $w \in L(\mathcal{M}) \iff w \in L$, כלומר $L = L(\mathcal{M})$

ולכן נקבל כי $L(\mathcal{M}) = L$ וגם $\mathcal{M}$ עוצרת על כל קלט, ולכן $L \in R$ מההגדרה.

$\Rightarrow$: אם $L \in R$ אז $L \in \mathrm{RE} \cap \mathrm{coRE}$ ולכן $L \in \mathrm{RE}$ וגם $\overline{L} \in \mathrm{RE}$.

לכן, מהמשפט שהוכחנו בהרצאה ש- $L \in \mathrm{RE}$ אם"ם קיים אנומרטור E כך ש- $L(E) = L$,

נקבל כי קיימים E_1, E_0 אנומרטורים כך ש- $L(E_0) = L, L(E_1) = \overline{L}$ (והשפות לא ריקות כי $L \neq \emptyset, \Sigma^*$)

ניצור אנומרטור זיגזג E באופן הבא:

1. לכל $i \in \{1, 2, \dots\}$:
   (א) נדפיס את המילה ה- i של E_0
   (ב) נדפיס את המילה ה- i של E_1

תחילה נראה ש- E מדפיס כל מילה ואז נוכיח שבאינדקסים זוגיים מדפיס מילים ב- L ובאי זוגיים מילים ב- $\overline{L}$.

תהי $w \in \Sigma^*$, נחלק ל2 מקרים:

1. אם $w\in L$ אז $w\in L\left(E_0\right)$ ולכן קיים אינדקס $i\in\mathbb{N}$ כך שהמילה ה־ i של E_0 היא w. לכן לפי בניית E, יתקיים שהמילה ה־ $2\cdot i-1$ שתודפס היא המילה ה־ i של E_0 שהיא w, ולכן $w\in E$
2. אם $w\in\overline{L}$ אז $w\in L\left(E_1\right)$ ולכן קיים אינדקס $i\in\mathbb{N}$ כך שהמילה ה־ i של E_1 היא w. לכן לפי בניית E, יתקיים שהמילה ה־ $2\cdot i$ שתודפס היא המילה ה־ i של E_1 שהיא w, ולכן $w\in E$

לכן E מדפיסה כל מילה, עתה נראה שבאינדקסים אי זוגיים היא מדפיסה מילים מ־ L ובזוגיים מילים מ־ $\overline{L}$.
תהי $w\in L$, יהי i אינדקס בו המילה w הודפסה אזי היא הודפסה על ידי $E_{i\%2}$ (על ידי הבנייה),
לכן $w\in L\left(E_{i\%2}\right)$, נניח בשלילה ש $i\%2=1$ ונקבל כי $w\in L\left(E\right)=\overline{L}$ בסתירה לכך ש־ $w\in L$, כלומר $i\%2=0$.
תהי $w\in\overline{L}$, יהי i אינדקס בו המילה w הודפסה אזי היא הודפסה על ידי $E_{i\%2}$ (על ידי הבנייה),
לכן $w\in L\left(E_{i\%2}\right)$, נניח בשלילה ש $i\%2=0$ ונקבל כי $w\in L\left(E\right)=L$ בסתירה לכך ש־ $w\in\overline{L}$, כלומר $i\%2=1$.
כלומר הראנו ש־ E מדפיסה באינדקסים אי זוגיים מילים מ־ L ובזוגיים מילים מ־ $\overline{L}$ ומדפיסה כל מילה לפחות פעם אחת ולכן E היא אנומרטור זיגזג מההגדרה.

מ.ש.ל.☺