

## אלגברה לינארית (1) התשע"ח סמסטר ב' - תרגיל 2

8 באפריל 2018

1. בכל סעיף נתונה מערכת משוואות לינאריות, רשמו את המטריצה המורחבת שלה, כתבו מטריצה מדורגת מצומצמת עם אוסף פתרונות זהה, והציגו את קבוצת הפתרונות בצורה פרמטרית.

(א)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

(ב)

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ -x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

(ג)

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = -1 \end{cases}$$

(ד)

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_3 = 10 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$$

(ה)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + 16x_3 = 12 \end{cases}$$

(1)

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

2.

(א) תהי  $A$  מטריצה  $m \times n$  מדורגת מצומצמת. יהי  $g$  מספר האיברים המובילים ב  $A$ . הוכיחו כי  $g \leq n$ .

(ב) תהי  $A$  מטריצה  $m \times n$ . יהי  $g$  מספר האיברים המובילים ב  $A$ . האם בהכרח  $g \leq n$ ? אם כן, הוכיחו תשובתכם. אם לא, הפריכו את הטענה על ידי דוגמא נגדית.

3. תהי  $A$  מטריצה  $m \times n$  מדורגת מצומצמת בעלת  $g$  איברים מובילים. הניחו שב  $A$  אין איבר מוביל בעמודה הימנית ביותר. נניח ש  $A$  היא המטריצה המורחבת של מערכת משוואות לינאריות כלשהי. כמה פרמטרים יש בפתרון המערכת?

4. תהי  $A$  מטריצה מורחבת של מערכת משוואות לינאריות הומוגניות (כלומר, כל המשוואות הם מהצורה  $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0$ ) עם  $m$  שורות ו  $n + 1$  עמודות. שימו לב שבמערכת המשוואות יש  $m$  משוואות ו  $n$  נעלמים. תהי  $B$  מטריצה מדורגת מצומצמת המתקבלת על ידי ביצוע סדרה של פעולות שורה אלמנטריות על  $A$ .

(א) הוכיחו כי אם ב  $B$  יש  $m$  איברים מובילים, אז למערכת קיים פתרון אחד לפחות.

(ב) תנו לדוגמא למערכת לינארית העונה על התנאים הנ"ל, לה יש פתרון אחד בדיוק.

(ג) בנוסף להנחות הקודמות, הניחו עתה כי  $n > m$ . הוכיחו כי למערכת אינסוף פתרונות.

5. בהינתן מטריצה המתארת מערכת משוואות לינאריות והומוגנית קבעו לגבי כל אחת מהפעולות הבאות אם היא מייצגת פעולה שמשמרת את קבוצת הפתרונות של המערכת והוכיחו את תשובתכם.

(א) הכפלת כל אברי המטריצה בסקלאר שונה מאפס.

(ב) כפל של עמודה בסקלאר שונה מאפס.

(ג) החלפה בין שתי העמודות הראשונות.

(ד) שינוי כלשהו של סדר השורות.

(ה) החלפת שלושת השורות  $R_i, R_j, R_k$  בשורות  $R_i + R_j, R_i + R_k, R_j + R_k$  כאשר  $i, j, k$  שונים.

6. בחנות שוקולד ישנם שלוש סוגי חפיסות שוקולד: שוקולד גלילי, המכיל 2 גר' סוכר, 3 גר' קאקאו, ו 5 גר' חלבון, שוקולד שפלתי, המכיל 2 גר' סוכר, 4 גר' קאקאו, ו 10 גר' חלבון, ושוקולד דרומי, המכיל 2 גר' סוכר, 5 גר' קאקאו, ו 13 גר' חלבון.

נתונים שלוש רשימות של ערכים תזונתיים. עבור כל אחד קבעו האם ניתן לקנות מספר שלם של חפיסות שערכם התזונתי הכולל מתאים לנתונים.

(א) 12 גר' סוכר, 22 גר' קאקאו, 48 גר' חלבון.

(ב) 4 גר' סוכר, 10 גר' קאקאו, 28 גר' חלבון.

(ג) 5 גר' סוכר, 10 גר' קאקאו, 23 גר' חלבון.