אלגברה לינארית 1 סמסטר ב' תשע"ח - תרגיל 12

1. יהי $V=\mathbb{R}^2$, ויהי $B=\left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\right)$ בסיס של V. מצאו את הבסיס B^* של V^*.

2. יהי $V=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ותהינה $f_1(x)=\cos x, f_2(x)=x^2$. יהי $B=(f_1,f_2)$, ויהי $U=SpanB$.
   א. הוכיחו כי B בסיס של U.
   ב. יהיו $T_1,T_2\in V^*$ פונקציונלים המוגדרים על ידי:
   $$T_1(f)=f(0)+f(1)$$
   $$T_2(f)=f(0)-f(1)$$
   יהיו $S_1,S_2\in U^*$, הצמצומים של T_1,T_2, בהתאמה, לU. כלומר, לכל $f\in U$, $S_1(f)=T_1(f), S_2(f)=T_2(f)$. נסמן $\mathcal{S}=(S_1,S_2)$. הוכיחו כי $\mathcal{S}$ בסיס של U^*. מצאו בסיס C של U כך ש $C^*=\mathcal{S}$.

3. יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{F}$ סקלרים שונים. עבור $1\le i\le 3$, נגדיר את הפולינום:
   $$p_i(x)=\prod_{j\in\{1,2,3\}\setminus\{i\}}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}$$
   למשל:
   $$p_2(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}$$
   נגדיר $V=\mathbb{F}[x]$ מרחב הפולינומים מעל $\mathbb{F}$, ויהי $B=(p_1,p_2,p_3)$. יהי $U=SpanB$.
   א. הוכיחו כי B מהווה בסיס לU.
   ב. יהי $B^*=(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ הבסיס הדואלי ל B. הוכיחו כי קיימים סקלרים $b_1,b_2,b_3\in\mathbb{F}$, כך שלכל $f\in U$ ולכל $1\le i\le 3$, $\ell_i(f)=f(b_i)$.

4. יהי $V=\mathbb{R}_{\le 3}[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים מדרגה שלוש לכל היותר. יהיו $T_1,T_2,T_3,T_4:V\to\mathbb{R}$ הפונקציונלים המוגדרים על ידי:
   $$T_1(p)=p(1),T_2(p)=p(2),T_3(p)=p(3),T_4(p)=p(4)$$
   מצאו פולינומים $B=(p_1,p_2,p_3,p_4)$ כך שB בסיס של V וכך ש $B^*=(T_1,T_2,T_3,T_4)$.

5. נתבונן ב $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. $f_1,f_2\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מוגדרות על ידי $f_1(x)=\sin x, f_2(x)=\cos x$. נסמן $U=Span\{f_1,f_2\}$. עבור $a\in\mathbb{R}$ נגדיר $\ell_a:U\to\mathbb{R}$ על ידי $\ell_a(f)=f(a)$.
   א. הוכיחו כי $\left(\ell_0,\ell_{\pi/3}\right)$ מהווה בסיס סדור של U^*, ומצאו בסיס C של U כך ש $C^*=(\ell_1,\ell_2)$.
   ב. הוכיחו כי ℓ_a,ℓ_b בת"ל אם"ם $\frac{a-b}{\pi}\notin\mathbb{Z}$.

6. יהיו V מ"ו ממימד n מעל שדה $\mathbb{F}$, U ת"מ של V, $\ell_1, \ell_2, m \in V^*$ כך ש $m \in U^0$, $m \neq 0$, וגם $\ell_1(u) = \ell_2(u)$ לכל $u \in U$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם $\dim U = 1$ אז קיים $a \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים $\ell_2 = \ell_1 + am$.
ב. אם $\dim U = n-1$ אז קיים $a \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים $\ell_2 = \ell_1 + am$.

7. יהי V מ"ו ויהיו U_1, U_2 ת"מ. הוכיחו כי $(U_1+U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$.

8. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה קבוצה $S \subseteq \mathbb{F}^n$. נסמן על ידי E את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. בכל סעיף מצאו בסיס לS^0, וכן מערכת משוואות הומוגנית $Ax=0$ כך שקבוצת הפתרונות היא בדיוק קבוצת הוקטורים $\left\{[\ell]_{E^*} : \ell \in S^0\right\}$.
א. $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $n=3$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
ב. $\mathbb{F} = \mathbb{F}_5$, $n=4$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
ג. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $n=3$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

9. יהי V מ"ו ויהיו U, W תתי מרחבים. הראו שאם $W^0 \subseteq U^0$ אז $U \subseteq W$.

10. נגדיר $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ על ידי $T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$, ו $\ell \in \left(\mathbb{R}^3\right)^*$ על ידי $\ell \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 - x_2$. מצאו את $T^t(\ell)$.

11. יהיו V, W מ"ו ויהי $T \in Hom(V,W)$. הוכיחו כי Tעל אס"ם T^t חח"ע.

12. תהי $T : V \to W$ ה"ל, $w \in W$, $w \notin ImT$. הוכיחו כי קיים $\ell \in W^*$ כך ש $T^t(\ell) = 0$ וגם $\ell(w) = 1$.

13. תהי $S : U \to V, T : V \to W$ ה"ל. הוכיחו כי $S^t \circ T^t = (T \circ S)^t$.

14. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$