# פתרון תרגיל מספר 3־ לינארית 2

**שם:** מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

2019 באפריל

### ו. פתרוו:

 $\lambda^3$  עם  $T^3$  עם עם עם v (א)

נשים לב כי

$$T^{3}\left(v\right) = T\left(T\left(T\left(v\right)\right)\right) = T\left(T\left(\lambda v\right)\right) = T\left(\lambda \cdot T\left(v\right)\right) = T\left(\lambda \cdot \lambda v\right) = T\left(\lambda^{2}v\right) = \lambda^{2}T\left(v\right) = \lambda^{3} \cdot v$$

 $\lambda^3$  הערך העצמי אל  $T^3$  הערך וקטור לכן  $\sigma$ , לכן  $T^3$ , לכן כלומר קיבלנו כי

מ.ש.ל.א.©

T עם  $\lambda$  עם ע וקטור עצמי וקטור עצמי על: האם א בהכרח עצמי של  $T^3$  עם א וקטור עצמי של (ב)

נשים לב כי 
$$v=\left[egin{array}{c}1\\0\end{array}
ight]$$
 , $T\left(\left[egin{array}{c}x\\y\end{array}
ight]
ight)=\left[egin{array}{c}0\\x\end{array}
ight]$  , $V=\mathbb{R}^2$  נשים לב כי

$$T^{3}\left(v\right)=T^{3}\left(\left[\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right]\right)=T\left(T\left(T\left(\left[\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right]\right)\right)\right)=T\left(T\left(\left[\begin{array}{c}0\\1\end{array}\right]\right)\right)=T\left(\left[\begin{array}{c}0\\0\end{array}\right]\right)=0\cdot\left[\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right]=0\cdot v$$

לכן  $T^3$  של עצמי וקטור vלכן לכן  $0\neq v$  ,  $T^3\left(v\right)=0\cdot v$ ים לכן לכן לכן לכן לכן

$$T\left(v\right) = T\left(\left[\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{c}0\\1\end{array}\right] \notin \mathrm{span}\left\{v\right\}$$

T לכן v אינו וקטור עצמי של

מ.ש.ל.ב.©

# 2. פתרון:

 $\lambda=1$  או  $\lambda=0$  (א)

הוכחה:

נבחר  $f\left(v
ight)=\lambda\cdot v$  כך שv
eq0 אזי

$$\lambda \cdot v = f(v) = f^{2}(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda^{2} \cdot v \Rightarrow \boxed{\lambda^{2} \cdot v = \lambda \cdot v}$$
$$\Rightarrow \boxed{(\lambda^{2} - \lambda) \cdot v = 0}$$

$$\lambda\cdot(\lambda-1)=0$$
 אכן לכן  $\lambda^2-\lambda=0$  כי נובע כי  $(\lambda^2-\lambda)\cdot v=0$  וגם ע $v\neq 0$  מהיות שדה, אין מחלקי 0, לכן מתקיים  $\lambda-1=0$  או  $\lambda=0$  כלומר  $\lambda$  אין מחלקי  $\lambda$  בנדרש

מ.ש.ל.א.©

f בהכרח ערך עצמי של f (ב)

0 אט ווא ווא הוא 1 ולא  $0\neq \forall v\in V$ , לכן  $f=Id_V$  וקטור עצמי והערך מתקיים לא נכון, נבחר לא נכון, נבחר  $f^{2}\left(v
ight)=f\left(f\left(v
ight)
ight)=f\left(v
ight)\Rightarrow\left|\left.f\left(v
ight)=f^{2}\left(v
ight)\right|
ight|$ וגם מתקיים

מ.ש.ל.ב.©

עצמיים  $f\left(v\right),f\left(v\right)-v$  (ג) איים עצמיים (ג)

הוכחה:

נשים לב כי

$$f(f(v)) = f^{2}(v) = f(v) \Rightarrow f(f(v)) = f(v)$$

לכן  $\lambda=1$  וגם מתקיים אל  $\lambda=1$  וגם ערך עצמי של לכן לכן הוא וקטור עצמי של לכן לכן

$$f(f(v) - v) = f(f(v)) - f(v) = f^{2}(v) - f(v) = f(v) - f(v) = 0 = 0 \cdot (f(v) - v)$$

 $\lambda=0$  לכן עם ערך עצמי של f אם וקטור וקטור הוא  $0 \neq f\left(v\right)-v$ 

מ.ש.ל.ג.©

## 3. פתרון:

עצמיים עצמיים U,W (א)

תחילה נרצה להוכיח כי  $V_{\lambda=1}=U$ , יהי להוכיח ערu+w=v כך שיu+w=v גד כך שיu+w=v, אזי אי

$$R_{U,W}(v) = u - w = v = u + w \Rightarrow 2 \cdot w = 0 \Rightarrow \boxed{w = 0}$$

 $V_{\lambda=1}\subseteq U$  לכן,  $v=u+0=u\in U$  נציב ונקבל כי

 $u\in V_{\lambda=1}$ , לכן  $R_{U,W}\left(u
ight)=u=1\cdot u$  עתה יהי  $u\in V_{\lambda=1}$ , לכן בתרגיל 1 שאלה 2 כי

לכן  $V_{\lambda=-1}=W$  , עתה נראה כי עתה איז עתה עראה עראה כי אוגם וגם ווגם איז ער איז ער

$$R_{U,W}(v) = u - w = v = -(u + w) \Rightarrow 2 \cdot u = 0 \Rightarrow \boxed{u = 0}$$

 $V_{\lambda=-1}\subseteq W$  נציב ונקבל כי  $v=0+w=w\in W$ , לכן , $w\in V_{\lambda=-1}$  לכן , $R_{U,W}\left(w\right)=w=-1\cdot w$  עתה יהי ש, ראינו בתרגיל 1 שאלה 1 אלה 2 כי

 $V_{\lambda=-1}=W$  לכן

מ.ש.ל.א.©

 $v \in U \cup W$  וקטור עצמי אזי $v : U \cup W$  (ב)

נסמן ב $\lambda$  את הערך העצמי של u+w=v כך שu+w=u כך אזי אוג  $\exists u\in U, w\in W$  וגם

$$R_{U,W}(v) = u - w = \lambda \cdot v = \lambda \cdot (u + w) \Rightarrow (\lambda - 1) \cdot u - (\lambda + 1) w = 0$$
$$\Rightarrow \left[ (\lambda - 1) \cdot u = (\lambda + 1) \cdot w \right]$$

 $u=0+w=w\in W$ , נציב ונקבל ,u=0 לכן , $u=rac{\lambda+1}{\lambda-1}\cdot w\in U\cap W=\{0\}$  אם  $\lambda\neq 1$ , גקבל כי

, $w=rac{\lambda-1}{\lambda+1}\cdot u\in U\cap W=\{0\}$  אם האי גקבל כי אזי גקבל כי אזי גע אזי איזי אזי אזי גע

, $v=u+0=u\in U$  לכן (נציב ונקבל w=0

 $v \in U \cup W$  כלומר קיבלנו כי  $v \in W$  או  $v \in U$ 

מ.ש.ל.ב.☺

### 4. פתרון:

T+S אט ערך עצמי של בהכרח  $\mu+\lambda$  (א)

$$_{s}S\left(\left[egin{array}{c} x\\y \end{array}
ight]
ight)=\left[egin{array}{c} -x\\y \end{array}
ight]$$
 ,  $T\left(\left[egin{array}{c} x\\y \end{array}
ight]
ight)=\left[egin{array}{c} x\\-y \end{array}
ight]$  ,  $v=\mathbb{R}^2$  הרוא ערך עצמי של  $T\left(\left[egin{array}{c} 1\\0 \end{array}
ight]
ight)=\left[egin{array}{c} 1\\0 \end{array}
ight]$  נשים לב כי  $T\left(\left[egin{array}{c} 1\\0 \end{array}
ight]
ight)=\left[egin{array}{c} 1\\0 \end{array}
ight]$  ,  $T\left(\left[egin{array}{c} 1\\0 \end{array}
ight]
ight)=\left[egin{array}{c} 0\\1 \end{array}
ight]$  וגם  $T\left(\left[egin{array}{c} 1\\0 \end{array}
ight]$  , לכן  $T\left(\left[egin{array}{c} 1\\0 \end{array}
ight]$  הוא ערך עצמי של  $T\left(\left[egin{array}{c} 1\\0 \end{array}
ight]$ 

$$0 
eq \mu + \lambda = 1 + 1 = 2$$
 נשים לב כי  $(T+S)$  ( $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ) ( $T+S$ ) ( $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ) נשים לב כי  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  נשים לב כי  $(T+S)$  ( $T+S$ ) (

מ.ש.ל.א.©

T+S בהכרח וקטור עצמי שלT+S (ב)

### :מחסומ

 $T\left(v
ight)=\lambda\cdot v$  נכון! נסמן ב $\lambda$  את הערך העצמי המתאים לvנסמן ב $\mu \cdot v$  אזי אוי המתאים המתאים הערך העצמי הערך אזי  $S\left(v
ight)=\mu \cdot v$  אזי

$$(T+S)(v) = T(v) + S(v) = \lambda \cdot v + \mu \cdot v = (\lambda + \mu) \cdot v$$

 $\lambda + \mu$  עם הערך העצמי של T + S לכן עצמי וקטור העצמי לכן הוא

מ.ש.ל.ב.©

# 5. פתרון:

ערכים גאומטריים עצמיים, מרחבים עצמיים אומטריים (א) אומטריים ערכים עצמיים, ערכים עצמיים (א)

תחילה נחשב את הערכים העצמיים בעזרת הפולינום האופייני

$$\det (A - \lambda \cdot I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \lambda^4 - 1$$

$$\lambda,\lambda=1,-1$$
 רק אם  $\det{(A-\lambda\cdot I)}=\lambda^4-1=0$  , $\mathbb F=\mathbb R$  לכן מהיות מהיות 
$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\in V_{\lambda=1}$$
 יהי , $V_{\lambda=1}$  אזי

$$A \cdot \left[ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} y \\ z \\ t \\ x \end{array} \right] \Rightarrow x = y, y = z, z = t, t = x$$

$$V_{\lambda=1}\subseteq \mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}
ight]
ight\}$$
 לכן  $\left[egin{array}{c}x\\y\\z\\t\end{array}
ight]=\left[egin{array}{c}x\\x\\x\\x\end{array}
ight]\in \mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}
ight]
ight\}$  , כלומר מתקיים כי  $x=y=z=t$  , כלומר  $x=y=z=t$ 

$$A \cdot \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} \in \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ איז איז איז א }$$
 
$$A \cdot \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$
 
$$V_{\lambda=1} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ other } A = 1 \text{ if } A = 1 \text{$$

מ.ש.ל.א.©

ב) אומטריים אומטריים עצמיים, ערכים עצמיים עצמיים אומטריים (ב) אומטריים ערכים עדיים אומטריים הוכחה:

 $\lambda = 1, -1, i, -i$  בסעיף א' ראינו שהפולינום האופייני הוא  $\lambda^4 - 1$ , לכן הערכים העצמיים האפשריים החופייני הוא

אזי
$$\left[egin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \end{array}
ight] \in V_{\lambda=1}$$
 יהי  $V_{\lambda=1}$  אזי

$$A \cdot \left[ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} y \\ z \\ t \\ x \end{array} \right] \Rightarrow x = y, y = z, z = t, t = x$$

$$V_{\lambda=1}\subseteq \mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}1\1\1\1\1\end{array}
ight]
ight\}$$
 , deg ,  $\left[egin{array}{c}x\y\z\t\end{array}
ight]=\left[egin{array}{c}x\x\x\x\x\end{array}
ight]\in \mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}1\1\1\1\end{array}
ight]
ight\}$  , deg ,  $x=y=z=t$  כלומר מתקיים כי  $x=y=z=t$  , כלומר  $x=y=z=t$ 

אזי 
$$\left[egin{array}{c} t \\ t \\ t \\ t \end{array}
ight]\in \mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}
ight]
ight\}$$
 אזי

$$A \cdot \left[ \begin{array}{c} t \\ t \\ t \\ t \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} t \\ t \\ t \\ t \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} t \\ t \\ t \end{array} \right]$$

$$\dim V_{\lambda=1}=1$$
 הוא  $\lambda=1$  הוא לכן הריבוי הגאומטרי של האומטרי אומ אומטרי על געומר אומטרי אוא אומטרי לכן הריבוי האומטרי  $egin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$ 

עתה נחפש את 
$$egin{bmatrix} x \ y \ z \ t \end{bmatrix} \in V_{\lambda=-1}$$
 יהי $V_{\lambda=-1}$  אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y \\ z \\ t \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow x = -y, y = -z, z = -t, t = -x$$

$$\left\{egin{array}{c} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \end{array}
ight\}$$
 לכן  $\left\{egin{array}{c} x \ y \ z \ t \ \end{array}
ight\}$  לכן  $\left\{egin{array}{c} x \ y \ z \ t \ \end{array}
ight\}$  לכן  $\left\{egin{array}{c} x \ y \ z \ t \ \end{array}
ight\}$  לכן  $\left\{egin{array}{c} x \ z \ z \ \end{array}
ight\}$  לכן  $\left\{egin{array}{c} x \ z \ z \ \end{array}
ight\}$  לכן  $\left\{egin{array}{c} x \ z \ \end{array}
ight\}$ 

$$au$$
עתה יהי $egin{bmatrix} t \ -t \ t \ -t \end{bmatrix} \in \mathrm{span} \left\{ egin{bmatrix} 1 \ -1 \ 1 \ -1 \end{bmatrix} 
ight\}$  אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \\ -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \\ -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \\ -t \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \\ -t \end{bmatrix}$$

$$\dim V_{\lambda=-1} = \min \lambda = -1 \ \, \text{ (c)} \quad \, V_{\lambda=-1} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \quad \operatorname{noise} , \quad \int \limits_{t}^{t} = V_{\lambda=-1} \text{ (c)}$$

 $V_{\lambda=-i}\subseteq \operatorname{span}\left\{\left|egin{array}{c}1\\-i\\-1\\i\end{array}
ight|\left.egin{array}{c}x\\y\\z\\t\end{array}
ight|=\left|egin{array}{c}x\\-ix\\-x\\ix\end{array}
ight|\in \operatorname{span}\left\{\left|egin{array}{c}1\\-i\\-1\\i\end{array}
ight|\right.$ כלומר מתקיים כי  $x=-i\cdot y=-z=i\cdot t$ , כלומר  $x=-i\cdot y=-z=i\cdot t$ 

$$\gamma$$
עתה יהי $\left[egin{array}{c} t \ -it \ -t \ it \end{array}
ight]\in \mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c} 1 \ -i \ -1 \ i \end{array}
ight]
ight\}$  אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} t \\ -it \\ -t \\ it \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ -it \\ -t \\ it \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it \\ -t \\ it \\ t \end{bmatrix} = -i \cdot \begin{bmatrix} t \\ -it \\ -t \\ it \end{bmatrix}$$

$$\dim V_{\lambda=-i}=\sin\lambda=-i$$
 כלומר  $\lambda=-i$  הוא לכן הריבוי הגאומטרי של ג $V_{\lambda=-i}=\mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}1\\i\\-1\\-i\end{array}
ight]
ight\}$  כלומר  $\lambda=-i$  הוא  $\lambda=-i$  לכן הריבוי הגאומטרי של כלומר ווא ביי האומטרי לכן הריבוי האומטרי ביי האומטרי

מ.ש.ל.ב.☺

ערכים עצמיים, מרחבים עצמיים וריבויים גאומטריים,  $\mathbb{F}=\mathbb{C}$  (ג)

הוכחה: בסעיף א' ראינו שהפולינום האופייני הוא 
$$\lambda^4-1$$
, לכן הערכים העצמיים האפשריים הם  $\lambda^4-1$  בסעיף א' ראינו שהפולינום האופייני הוא  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in V_{\lambda=1}$ , יהי  $\lambda^4-1$  אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ t \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow x = y, y = z, z = t, t = x$$

$$V_{\lambda=1}\subseteq \mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}1\1\1\1\end{array}
ight]
ight\}$$
 לכן  $\left[egin{array}{c}x\y\z\t\end{array}
ight]=\left[egin{array}{c}x\x\x\x\x\end{array}
ight]\in \mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}1\1\1\1\end{array}
ight]
ight\}$  כלומר מתקיים כי  $x=y=z=t$  כלומר מתקיים כי

$$egin{aligned} t \ t \ t \ t \ t \ \end{bmatrix} \in \mathrm{span} \left\{ egin{bmatrix} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \end{bmatrix} 
ight\}$$
 אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

$$\dim V_{\lambda=1}=1$$
 הוא  $\lambda=1$  הוא הגאומטרי של און,  $V_{\lambda=1}=\mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}
ight]
ight\}$  הוא הוא לכן  $V_{\lambda=1}=\mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}1\\t\\t\\t\end{array}
ight]$ 

מ.ש.ל.ג.©

# 6. פתרון:

ערכים גאומטריים עצמיים, מרחבים עצמיים אומטריים (א) איל:  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 

תחילה נחשב את הערכים העצמיים בעזרת הפולינום האופייני

$$\det\left(A-\lambda\cdot I\right) = \det\left(\begin{array}{cc} 1-\lambda & 2\\ 3 & -4-\lambda \end{array}\right) = (1-\lambda)\cdot(-4-\lambda) - 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda-2)\cdot(\lambda+5)$$

, $\lambda=2,-5$  רק אם  $\det{(A-\lambda\cdot I)}=(\lambda-2)\cdot(\lambda+5)=0$  , $\mathbb{F}=\mathbb{R}$  לכן מהיות מהיות לכן יהי אוי  $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in V_{\lambda=2}$ , יהי יהי את  $V_{\lambda=2}$  אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x - 4y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x + 2y = 2x, 3x - 4y = 2y}$$
$$\Rightarrow 2y = x, 3x = 6y \Rightarrow \boxed{x = 2y}$$

, 
$$V_{\lambda=2}\subseteq \mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}2\\1\end{array}
ight]
ight\}$$
, לכן  $\left[egin{array}{c}x\\y\end{array}
ight]=\left[egin{array}{c}2y\\y\end{array}
ight]\in \mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}2\\1\end{array}
ight]
ight\}$  אזי  $\left[egin{array}{c}2t\\t\end{array}
ight]\in \mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}2\\1\end{array}
ight]
ight\}$  אזי  $\left[egin{array}{c}2t\\t\end{array}
ight]$ 

$$A \cdot \left[ \begin{array}{c} 2t \\ t \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} 2t \\ t \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 2t + 2t \\ 6t - 4t \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 4t \\ 2t \end{array} \right] = 2 \cdot \left[ \begin{array}{c} 2t \\ t \end{array} \right]$$

,  $\dim V_{\lambda=2}=1$  הוא  $\lambda=2$  הוא הגאומטרי של ג=2 הוא הריבוי הגאומטרי של ג=2 הוא הוא לכן  $V_{\lambda=2}=\mathrm{span}\left\{\left[\begin{array}{c}2\\1\end{array}\right]\right\}$  הוא לכן  $\left[\begin{array}{c}2t\\t\end{array}\right]\in V_{\lambda=2}$  איי עתה נחפש את  $V_{\lambda=-5}$  , יהי  $V_{\lambda=-5}$  איי

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x - 4y \end{bmatrix} = -5 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x + 2y = -5x, 3x - 4y = -5y}$$
$$\Rightarrow 2y = -6x, 3x = -9y \Rightarrow \boxed{y = -3x}$$

$$V_{\lambda=5}\subseteq \mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}1\\-3\end{array}
ight]
ight\}$$
, לכן לכן  $\left[egin{array}{c}x\\y\end{array}
ight]=\left[egin{array}{c}x\\-3x\end{array}
ight]\in \mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}1\\-3\end{array}
ight]
ight\}$  אזי לכן  $\left[egin{array}{c}t\\-3t\end{array}
ight]\in \mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}1\\-3\end{array}
ight]
ight\}$  עתה יהי

$$A \cdot \left[ \begin{array}{c} t \\ -3t \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} t \\ -3t \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} t - 6t \\ 3t + 12t \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} -5t \\ 15t \end{array} \right] = -5 \cdot \left[ \begin{array}{c} t \\ -3t \end{array} \right]$$

$$\dim V_{\lambda=5}=1$$
 הוא  $\lambda=-5$  הוא לכן הריבוי הגאומטרי של ל $V_{\lambda=-5}=\mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}1\\-3\end{array}
ight]
ight\}$  ,  $\left[egin{array}{c}t\\-3t\end{array}
ight]\in V_{\lambda=-5}$  מ.ש.ל.א.

ב) אומטריים וריבויים גאומטריים, מרחבים עצמיים (ב)  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_7$  (ב) בירחבי

תחילה נחשב את הערכים העצמיים בעזרת הפולינום האופייני

$$\det\left(A-\lambda\cdot I\right) = \det\left(\begin{array}{cc} 1-\lambda & 2\\ 3 & -4-\lambda \end{array}\right) = (1-\lambda)\cdot(-4-\lambda) - 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda-2)\cdot(\lambda+5)$$

לכן מהיות  $\mathbb{F}=\mathbb{F}$  ולכן יש רק ערך עצמי  $\det\left(A-\lambda\cdot I\right)=(\lambda-2)\cdot(\lambda+5)=0$  ולכן יש רק עצמי לכן מהיות תחילה נחפש את  $V_{\lambda=2}$ , יהי יהי אזי אוני תחילה נחפש את אוני  $A \cdot \left[ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} x + 2y \\ 3x - 4y \end{array} \right] = 2 \cdot \left[ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] \Rightarrow \boxed{x + 2y = 2x, 3x - 4y = 2y}$ 

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ 3x-4y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x+2y=2x, 3x-4y=2y}$$
$$\Rightarrow 2y = x, 3x = 6y \Rightarrow \boxed{x=2y}$$

, 
$$V_{\lambda=2}\subseteq\operatorname{span}\left\{\left[egin{array}{c}2\\1\end{array}
ight]
ight\}$$
, לכן לכן  $\left[egin{array}{c}x\\y\end{array}
ight]=\left[egin{array}{c}2y\\y\end{array}
ight]\in\operatorname{span}\left\{\left[egin{array}{c}2\\1\end{array}
ight]
ight\}$  אזי אזי  $\left[egin{array}{c}2t\\t\end{array}
ight]\in\operatorname{span}\left\{\left[egin{array}{c}2\\1\end{array}
ight]
ight\}$  אזי

$$A \cdot \left[ \begin{array}{c} 2t \\ t \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} 2t \\ t \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 2t + 2t \\ 6t - 4t \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 4t \\ 2t \end{array} \right] = 2 \cdot \left[ \begin{array}{c} 2t \\ t \end{array} \right]$$

 $\dim V_{\lambda=2}=1$  הוא  $\lambda=2$  הוא הגאומטרי של אומ $\lambda=2$  לכן הריבוי הגאומטרי אומר $V_{\lambda=2}=\mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}2\\1\end{array}
ight]
ight\}$  , כלומר לכן  $V_{\lambda=2}=\mathrm{span}\left\{\left[egin{array}{c}2\\1\end{array}
ight]
ight\}$ מ.ש.ל.ב.©

# $\det\left(A\right) = \det\left(B\right)$ .7

לכן א $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$ כך כך הפיכה מטריצה מטריצה קיימת דומות, מטריצות מטריצות מטריצה אות מ

$$\det(A) = \det(P \cdot B \cdot P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(B) \cdot \det(P^{-1}) = \det(B) \cdot \det(P \cdot P^{-1}) = \det(B) \cdot \det(B)$$
$$= 1 \cdot \det(B) = \det(B) \Rightarrow \boxed{\det(A) = \det(B)}$$

מ.ש.ל.ⓒ

## 8. פתרון:

(א) **צ"ל:** האם מטריצות דומות גוררות מטריצות שקולות שורה?

$$P^{-1} = \left[ egin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & rac{1}{2} \end{array} 
ight]$$
 מתקיים  $P = \left[ egin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} 
ight]$  נשים לב כי עבור  $B = \left[ egin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{array} 
ight]$  ,  $A = \left[ egin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} 
ight]$  ,  $A = \left[ egin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} 
ight]$  (אם  $A = \left[ egin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} 
ight]$  ,  $A = \left[ egin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} 
ight]$  ,  $A = \left[ egin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} 
ight]$  (אם  $A = \left[ egin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} 
ight]$  ) ,  $A = \left[ egin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} 
ight]$  (אם  $A = \left[ egin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} 
ight]$  ) ,  $A = \left[ egin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} 
ight]$  (אם  $A = \left[ egin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} 
ight]$  ) ,  $A = \left[ egin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} 
ight]$  (אם  $A = \left[ egin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} 
ight]$  (אם  $A = \left[ egin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} 
ight]$  ) .

לכן A,B דומות. אבל A,B לא שקולות שורה כי שניהן כבר מטריצות קנוניות (מדורגות מצומצמות) ולא אותה אחת, ויש משפט מלינארית 1 שאומר שA,B שקולות שורה אם"ם בעלות אותה מטריצה קנונית. לכן A,B לא שקולות שורה,

מ.ש.ל.א.©

(ב) **צ"ל:** האם מטריצות שקולות שורה גוררות מטריצות דומות ?

 $R_i o rac{1}{2}R_i$  כי שהן שקולות שורה ברור  $A=I_2, B=2\cdot I_2$  , $\mathbb{F}=\mathbb{R}$  לא נכון! נבחר נניח בשלילה שA, B דומות אזי קיימת מטריצה הפיכה P כך שלA, B אזי אוי

$$I_2 = A = P^{-1} \cdot B \cdot P = P^{-1} \cdot (2I_2) \cdot P = 2 \cdot P^{-1} \cdot P = 2I_2$$

בסתירה לכך ש $I_2 
eq 2I_2$ , לכן A,B לא דומות, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

9. פתרון:

 $\operatorname{tr}\left(A\cdot B
ight)=\operatorname{tr}\left(B\cdot A
ight)$  (א) צ"ל:

$$\operatorname{tr}(A \cdot B) = \sum_{i=1}^{n} [A \cdot B]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \left[ \sum_{j=1}^{n} (a_{i,j} \cdot b_{j,i}) \right] = \sum_{j=1}^{n} \left[ \sum_{i=1}^{n} (a_{i,j} \cdot b_{j,i}) \right]$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left[ \sum_{i=1}^{n} (b_{j,i} \cdot a_{i,j}) \right] = \sum_{j=1}^{n} [B \cdot A]_{j,j} = \operatorname{tr}(B \cdot A)$$
$$\Rightarrow \left[ \operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A) \right]$$

מ.ש.ל.א.☺

 $\operatorname{tr}\left(A
ight)=\operatorname{tr}\left(B
ight)$  (ב)

זוכחה:

לכן , $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$ מטריצות אמטריצה מטריצה מטריצה מטריצות דומות, קיימת מטריצה אות מטריצות מטריצות מטריצות אות מטריצה אות מטריצה אות מטריצות מטריצות אות מטר

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(P \cdot B \cdot P^{-1}) = \operatorname{tr}(P \cdot (B \cdot P^{-1})) = \operatorname{tr}((B \cdot P^{-1}) \cdot P) = \operatorname{tr}(B \cdot (P^{-1} \cdot P)) = \operatorname{tr}(B \cdot I_n) = \operatorname{tr}(B)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$$

מ.ש.ל.ב.☺