אלגברה לינארית (2) תשע`ט 2019-2018 - סמסטר ב' - תרגיל 9

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז.** יש לציין **כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 22.5.19 בשעה 21:00.

1. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה מטריצה $A\in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$. הסבירו מדוע האופרטור הלינארי $T\colon \mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ המוגדר על ידי $T(x)=Ax$ עבור כל $x\in\mathbb{R}^5$ הוא נילפוטנטי ומצאו בסיס שרשראות כלשהו עבור T .

א) $A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0\end{bmatrix}$

ב) $A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\end{bmatrix}$

2. יהי $\mathbb{F}$ שדה ו- $\lambda,\lambda'\in\mathbb{F}$ כך ש- $\lambda\neq\lambda'$. יהיו $J(\lambda)$ ו- $J(\lambda')$ בלוקי ז'ורדן המתאימים ל- λ ו- λ' בהתאמה, כלומר $J(\lambda)=\operatorname{diag}\left(J_{k_1}(\lambda),\ldots,J_{k_r}(\lambda)\right)$ ו- $J(\lambda')=\operatorname{diag}\left(J_{k_1'}(\lambda'),\ldots,J_{k_{r'}'}(\lambda')\right)$, עם $k_1\geqslant\ldots\geqslant k_r$ ו- $k_1'\geqslant\ldots\geqslant k_{r'}'$ ($k_i,k_j',r,r'\in\mathbb{N}$). נסמן: $l=k_1+k_2+\ldots+k_r$ ו- $l'=k_1'+k_2'+\ldots+k_{r'}'$.
תהי $A=\operatorname{diag}\left(J(\lambda),J(\lambda')\right)$ מטריצת ז'ורדן ו- $T\colon\mathbb{F}^{l+l'}\to\mathbb{F}^{l+l'}$ האופרטור המוגדר ע"י $T(x)=Ax$ לכל $x\in\mathbb{F}^{l+l'}$.
הוכיחו כי:

(א) הפולינום האופייני של T הנו $\chi_T(X)=(X-\lambda)^l(X-\lambda')^{l'}$.

(ב) $\ker(T-\lambda Id_V)^l=Span(e_1,e_2,\ldots,e_l)$.

(ג) $\ker(T-\lambda Id_V)^{k_1}=\ker(T-\lambda Id_V)^l$.

(ד) $g(T)=0$ כאשר $g(X)=(X-\lambda)^{k_1}(X-\lambda')^{k_1'}$.

3. (א) יהי $J_k(\lambda)$ בלוק ז'ורדן אלמנטרי. הוכיחו שהפולינום המינימלי של $J_k(\lambda)$ הוא $(X-\lambda)^k$.

(ב) הוכיחו ש- $g(X)$ מהשאלה הקודמת הוא הפולינום המינימלי של המטריצה A בשאלה הקודמת.

4. יהיו $\mathbb{F}$ שדה , $n\in\mathbb{N}$ ו- $P=a_0+a_1X+\cdots+a_{n-1}X^{n-1}+X^n\in\mathbb{F}[X]$. תהי $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ המטריצה המלווה של P :

$$A=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\cdots&0&-a_1\\0&1&\cdots&0&-a_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_{n-1}\end{bmatrix}$$

הוכיחו ש- P הנו הפולינום המינימלי של A .

(רמז: חישבתם בהרצאה את הפולינום האופייני של A . על איזה תת-מרחב-וקטורי התסכלתם בכדי להגדיר את A ?)

5. יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי על מרחב וקטורי סוף מימדי V, ונניח שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים. הוכיחו: T ניתן ללכסון אם ורק אם הפולינום המינימלי של T מתפרק לגורמים לינאריים שונים (כלומר, הפולינום המינימלי מתפרק לגורמים לינאריים והחזקה של כל גורם לינארי היא 1).

6. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה מטריצה $A\in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$. חשבו את הפולינום האופייני של האופרטור הלינארי $T\colon\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4$ המוגדר ע"י $T(x)=Ax$ לכל $x\in\mathbb{C}^4$. מצאו בסיס B של $\mathbb{C}^4$ כך שהמטריצה $[T]_B^B$ תהייה בצורת ז'ורדן.

א) $A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&0&-2&2\\-2&1&3&-3\\-2&1&1&-1\end{bmatrix}\in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$

ב) $A=\begin{bmatrix}1&1&-1&0\\1&1&-1&1\\1&0&0&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$

7. הוכיחו את יחידות הפירוק במשפט Fitting , כלומר:
אם $g:V\to V$ אופרטור לינארי על מרחב וקטורי סוף מימדי V ו- V_N,V_I,V_N',V_I' תת-מרחבים g-אינווריאנטים כך ש- $V=V_N\oplus V_I$ וגם $V=V_N'\oplus V_I'$ וכך ש- $g|_{V_N}$ ו- $g|_{V_N'}$ אופרטורים נילפוטנטים וגם $g|_{V_I}$ ו- $g|_{V_I'}$ אופרטורים הפיכים, אזי $V_N=V_N'$ וגם $V_I=V_I'$.