פתרון תרגיל מספר 4 - חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

1 במאי 2020

שאלה 2

צ"ל: L רגולרית אם"ם מספר מחלקות השקילות סופי
הוכחה:
$\Leftarrow$: נניח ש- L רגולרית אזי קיים אוטומט $\mathcal{A}$ כך ש- $L(\mathcal{A})=L$
נסמן $Q=\left\{q_0,q_1,\dots,q_{|Q|-1}\right\}$, יהיו $x,y\in\Sigma^*$, נגדיר יחס

$$x\sim_{\mathcal{A}}y\Leftrightarrow(\forall q\in Q)\left(\delta^*(q,x)=\delta^*(q,y)\right)$$

נוכיח ש- $\sim_{\mathcal{A}}$ הוא יחס שקילות כדי לדבר על מחלקות השקילות שלו:

1. <u>רפלקסיביות:</u> לכל $x\in\Sigma^*$ נשים לב כי $(\forall q\in Q)\left(\delta^*(q,x)=\delta^*(q,x)\right)$ ולכן $x\sim_{\mathcal{A}}x$
2. <u>סימטריות:</u> לכל $x,y\in\Sigma^*$, נניח ש- $x\sim_{\mathcal{A}}y$, נשים לב כי $(\forall q\in Q)\left(\delta^*(q,x)=\delta^*(q,y)\right)$ ולכן מסימטריות השוויון מתקיים $(\forall q\in Q)\left(\delta^*(q,y)=\delta^*(q,x)\right)$, כלומר $y\sim_{\mathcal{A}}x$
3. <u>טרנזטיביות:</u> לכל $x,y,z\in\Sigma^*$, נניח ש- $x\sim_{\mathcal{A}}y,y\sim_{\mathcal{A}}z$,
נשים לב כי $(\forall q\in Q)\left(\delta^*(q,x)=\delta^*(q,y)\right)$ וגם $(\forall q\in Q)\left(\delta^*(q,y)=\delta^*(q,z)\right)$,
ולכן מטרנזטיביות השוויון מתקיים $(\forall q\in Q)\left(\delta^*(q,x)=\delta^*(q,y)=\delta^*(q,z)\right)$, כלומר $(\forall q\in Q)\left(\delta^*(q,x)=\delta^*(q,z)\right)$
ולכן $x\sim_{\mathcal{A}}z$

כלומר $\sim_{\mathcal{A}}$ הוא יחס שקילות.
יהיו $x,y,z,w\in\Sigma^*$, כאשר $x\sim_{\mathcal{A}}y$, נסמן $\delta^*(q_0,z)=q$, נשים לב כי

$$\begin{aligned}\delta^*(q_0,z\cdot x\cdot w)&=\delta^*\left(\delta^*\left(\delta^*(q_0,z),x\right),w\right)=\delta^*\left(\delta^*(q,x),w\right)\\&=\delta^*\left(\delta^*(q,y),w\right)=\delta^*\left(\delta^*\left(\delta^*(q_0,z),y\right),w\right)=\delta^*(q_0,z\cdot y\cdot w)\end{aligned}$$

כלומר מתקיים $\delta^*(q_0,z\cdot x\cdot w)\in F\Leftrightarrow\delta^*(q_0,z\cdot y\cdot w)\in F$, כלומר $x\sim_L y$
כלומר מספר המחלקות של L הוא קטן שווה מספר המחלקות של $\sim_{\mathcal{A}}$.
ונשים לב שב - $\sim_{\mathcal{A}}$ יש לכל היותר $|Q|^{|Q|}$ מחלקות (נסתכל לכל מילה $w\in\Sigma^*$ על הרשימה $\left(\delta^*(q_0,w),\dots,\delta^*\left(q_{|Q|-1},w\right)\right)$,
יש לכל היותר $|Q|^{|Q|}$ רשימות כאלה ועבור רשימות שוות, נקבל שהמילים שקולות לפי יחס $\mathcal{A}$ ממהגדרה, ולכן יש לכל היותר $|Q|^{|Q|}$ מחלקות שונות ביחס $\sim_{\mathcal{A}}$)
ולכן יש מספר סופי של מחלקות ל $\sim_L$, כנדרש.
$\Rightarrow$: נניח שמספר מחלקות השקילות סופי.
יהיו $x,y\in\Sigma^*$, נגדיר יחס $x\sim_{L_1}y\Leftrightarrow(\forall z\in\Sigma^*)(x\cdot z\in L\Leftrightarrow y\cdot z\in L)$ (הוכחנו בהרצאה שזה יחס שקילות)
יהיו $x,y\in\Sigma^*$ כך ש- $x\sim_L y$, נשים לב כי

$$\begin{aligned}x\sim_L y&\Rightarrow(\forall z,w\in\Sigma^*)(w\cdot x\cdot z\in L\Leftrightarrow w\cdot y\cdot z\in L)\\&\overset{w=\varepsilon}{\Rightarrow}(\forall z\in\Sigma^*)(x\cdot z\in L\Leftrightarrow y\cdot z\in L)\\&\Rightarrow x\sim_{L_1}y\end{aligned}$$

כלומר מתקיים שמספר המחלקות של $\sim_L$ גדולה מזאת של $\sim_{L_1}$,
ומהיות מספר המחלקות של $\sim_L$ סופית נסיק כי $\sim_{L_1}$ סופית.
נשים לב כי $\sim_{L_1}$ הוא בדיוק היחס במשפט Myhill-Norde והוא סופי,
ולכן פי המשפט $Myhill - Norde$ מתקיים שהשפה רגולרית, כנדרש.

מ.ש.ל.☺