פתרון תרגיל מספר 7 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

21 במאי 2020

שאלה 4

סעיף 1 חלק a

צ"ל: אם $L_2 \in R$ אז $L_1 \in R$

הוכחה:

נשים לב ש־ $L_2 \in R$ אז קיימת מ"ט $\mathcal{M}_2$ כך ש־ $L\left(\mathcal{M}_2\right) = L$,
נבנה את המ"ט $\mathcal{M}_1$ הבאה:

1. נקבל קלט w
2. נחשב את $f\left(w\right)$
3. נריץ את $\mathcal{M}_2$ על $f\left(w\right)$ ואם הוא דחה, נדחה את w
4. נחשב את $g\left(w\right)$
5. נריץ את $\mathcal{M}_2$ על $g\left(w\right)$ ואם הוא קיבל, נדחה את w
6. נקבל את w

נשים לב ש־ $\mathcal{M}_1$ עוצרת על כל קלט כי $f, g, \mathcal{M}_2$ עוצרות על כל קלט.
נשים לב ש־ $\mathcal{M}_1$ מקבלת אם רק אם תגיע לשלב 6, כלומר $\mathcal{M}_2$ קיבלה את $f\left(w\right)$ וגם $\mathcal{M}_2$ דחתה את $g\left(w\right)$.
לכן

$$w \in L\left(\mathcal{M}_1\right) \iff f\left(w\right) \in L\left(\mathcal{M}_2\right) \wedge g\left(w\right) \notin L\left(\mathcal{M}_2\right) \iff f\left(w\right) \in L_2 \wedge g\left(w\right) \notin L_2 \overset{\star}{\iff} w \in L_1$$

המעבר $\star$ הוא מהנתון.
כלומר קיבלנו כי $w \in L_1 \iff w \in L\left(\mathcal{M}_1\right)$, כלומר $L_1 = L\left(\mathcal{M}_1\right)$.
כלומר קיימת מ"ט $\mathcal{M}_1$ שעוצרת על כל קלט וגם $L_1 = L\left(\mathcal{M}_1\right)$
כלומר קיימת מ"ט $\mathcal{M}_1$ שמכירעה את L_1, כלומר $\boxed{L_1 \in R}$, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 1 חלק b

צ"ל: אם $L_2 \in \mathrm{RE}$ אז לא בהכרח $L_1 \in \mathrm{RE}$

הוכחה:

נבחר $L_1 = \overline{A_{TM}}$, $L_2 = A_{TM}$.
ראינו בהרצאה ש־ $L_2 = A_{TM} \in \mathrm{RE}$,
נשים לב ש־ L_2 לא ריקה, כלומר קיימת $\left\langle\left\langle M\right\rangle, w\right\rangle \in L_2$
נגדיר $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ באופן הבא: $f\left(x\right) = \left\langle\left\langle M\right\rangle, w\right\rangle$ לכל $x \in \Sigma^*$
נגדיר $g : \Sigma^* \to \Sigma^*$ באופן הבא: $g\left(x\right) = x$ לכל $x \in \Sigma^*$
נשים לב ש־ $f\left(x\right)$ רק כותבת את $\left\langle\left\langle M\right\rangle, w\right\rangle$ על הסרט ומקבלת ו־ $g\left(x\right)$ ישר מקבלת, ולכן f, g חישוביות.

עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}
&x\in L_1 \overset{\langle\langle M\rangle,w\rangle\in L_2}{\iff} \langle\langle M\rangle,w\rangle\in L_2\wedge x\in L_1 \overset{g(x)=x}{\iff} \langle\langle M\rangle,w\rangle\in L_2\wedge g(x)\in L_1\\
&\overset{f(x)=\langle\langle M\rangle,w\rangle}{\iff} f(x)\in L_2\wedge g(x)\in L_1 \iff f(x)\in L_2\wedge g(x)\in\overline{A_{TM}}\\
&\iff f(x)\in L_2\wedge g(x)\notin A_{TM} \iff f(x)\in L_2\wedge g(x)\notin L_2
\end{aligned}$$

כלומר f,g,L_1,L_2 מקיימות את הנתונים.
ראינו בהרצאה כי $A_{TM}\notin \mathrm{coRE}$ ולכן $\overline{A_{TM}}\notin \mathrm{RE}$ מההגדרה.
ולכן נקבל כי $L_1=\overline{A_{TM}}\notin \mathrm{RE}$, בסתירה לטענה של השאלה, כלומר הטענה לא נכונה, כנדרש.

מ.ש.ל.א.2.☺

סעיף 2
צ"ל: $\overline{L_2}\le_m L_2$ וגם $L_2\notin \mathrm{RE}$
הוכחה:
נגדיר $HALT_{TM}=\{(\langle M\rangle,w)\mid M \text{ halts on } w\}$,
נגדיר

$$L_2=\{(0,(\langle M\rangle,w))\mid(\langle M\rangle,w)\in HALT_{TM}\}\cup\{(1,(\langle M\rangle,w))\mid(\langle M\rangle,w)\notin HALT_{TM}\}$$

לכן מתקיים כי

$$\overline{L_2}=\{(1,(\langle M\rangle,w))\mid(\langle M\rangle,w)\in HALT_{TM}\}\cup\{(0,(\langle M\rangle,w))\mid(\langle M\rangle,w)\notin HALT_{TM}\}$$

נגדיר $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ באופן הבא: $f(x)=\begin{cases}(1,y) & x=(0,y)\\(0,y) & x=(1,y)\end{cases}$, נשים לב כי

$$\begin{aligned}
&(1,(\langle M\rangle,w))\in\overline{L_2}\iff(\langle M\rangle,w)\in HALT_{TM}\iff(0,(\langle M\rangle,w))\in L_2\\
&\overset{f(1,(\langle M\rangle,w))=(0,(\langle M\rangle,w))}{\iff} f(1,(\langle M\rangle,w))\in L_2
\end{aligned}$$

וגם מתקיים כי

$$\begin{aligned}
&(0,(\langle M\rangle,w))\in\overline{L_2}\iff(\langle M\rangle,w)\notin HALT_{TM}\iff(1,(\langle M\rangle,w))\in L_2\\
&\overset{f(0,(\langle M\rangle,w))=(1,(\langle M\rangle,w))}{\iff} f(0,(\langle M\rangle,w))\in L_2
\end{aligned}$$

לכן נקבל כי

$$x\in\overline{L_2}\overset{x=(1,(\langle M\rangle,w))\in\overline{L_2}\text{ or }x=(0,(\langle M\rangle,w))\in\overline{L_2}}{\iff} f(x)\in L_2$$

כלומר קיבלנו כי $f(x)\in L_2\iff x\in\overline{L_2}$, וגם f ניתנת לחישוב כי היא רק מחליפה את התא הראשון בסרט מ־ 0 ל־ 1 ולהיפך ואז מקבלת.
לכן, $\overline{L_2}\le_m L_2$ מההגדרה.
עתה נגדיר $g:\Sigma^*\to\Sigma^*$ באופן הבא $g(x)=(1,x)$ ונשים לב כי

$$(\langle M\rangle,w)\in HALT_{TM}\iff(1,(\langle M\rangle,w))\in\overline{L_2}\overset{g((\langle M\rangle,w))=(1,(\langle M\rangle,w))}{\iff} g(x)\in\overline{L_2}$$

כלומר קיבלנו כי $f(x) \in \overline{L_2} \iff x \in HALT_{TM}$, וגם g ניתנת לחישוב כי היא רק מוסיפה את הספרה 1 בהתחלה של הקלט.
לכן, $HALT_{TM} \leq_m \overline{L_2}$ מההגדרה,
נשים לב כי $\overline{HALT_{TM}} \leq L_2$ (ראינו שאפשר לעשות שלילה על 2 השפות והיחס יישמר)
ולכן מהיות $HALT_{TM} \notin \text{coRE}$ אז נסיק כי $\overline{HALT_{TM}} \notin \text{RE}$
ולכן $\overline{HALT_{TM}} \leq L_2$ וגם $\overline{HALT_{TM}} \notin \text{RE}$ ולכן $L_2 \notin \text{RE}$ לפי מה שהוכחנו בהרצאה על רדוקציות.
כלומר מצאנו שפה L_2 כך ש- $L_2 \leq_m \overline{L_2}$ וגם $L_2 \notin \text{RE}$, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺