פתרון תרגיל מספר 6 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

16 במאי 2020

שאלה 1

סעיף 1

צ"ל: קונפיגורציה של תזוזה פעמיים שמאלה ופעמיים ימינה

הוכחה:

נתון לנו שהקונפיגורציה היא $uabqcdev$

ולכן כשנעשה $\delta(q,c)=(q',x,LL)$ לשנות את c ל־ x ונצטרך להזיז את הראש פעמיים שמאלה, כלומר הקונפיגורציה תהיה $uq'abxdev$

באופן דומה כשנעשה $\delta(q,c)=(q',x,RR)$ לשנות את c ל־ x ונצטרך להזיז את הראש פעמיים ימינה, כלומר הקונפיגורציה תהיה $uabxdq'ev$

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2

צ"ל: קונפיגורציה כשאי אפשר לזוז פעמיים בסרט ימינה

הוכחה:

נתון לנו שהקונפיגורציה היא qcv

ולכן כשנעשה $\delta(q,c)=(q',x,LL)$ לשנות את c ל־ x ונצטרך להזיז את הראש פעמיים שמאלה אבל לא ניתן ולכן נשאר במקום, כלומר הקונפיגורציה תהיה $q'xv$

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3

צ"ל: לכל $jumping-TM$ יש TM שמקביל לו

הוכחה:

יהי $\mathcal{M}=\langle Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{acc},q_{rej}\rangle$ שהוא $jumping-TM$

נגדיר $\mathcal{M}'=\langle Q\times\{L,R,S\},\Sigma,\Gamma,\delta',\langle q_0,S\rangle,\langle q_{acc},S\rangle,\langle q_{rej},S\rangle\rangle$

הרעיון בבנייה היא שתמיד נהיה ב־ $\langle q_i,S\rangle$ ($S-Start$) וכשנצטרך לעשות RR,LL נשנה את S ל ־ R,L בהתאמה כדי לא לשנות את הערך הקרוב הבא בסרט.

פורמלית, יהיו $q\in\Gamma,\sigma\in\Sigma$ נסמן $\delta(q,\sigma)=\langle q',\sigma',X\rangle$, נגדיר

$$\delta'(\langle q,S\rangle,\sigma)=\begin{cases}\langle\langle q',S\rangle,\sigma',X\rangle & (X=R)\vee(X=L)\\ \langle\langle q',R\rangle,\sigma',R\rangle & X=RR\\ \langle\langle q',L\rangle,\sigma',L\rangle & X=LL\end{cases}$$

וגם נגדיר

$$\delta'(\langle q,L\rangle,\sigma)=\langle\langle q,S\rangle,\sigma,L\rangle,\delta'(\langle q,R\rangle,\sigma)=\langle\langle q,S\rangle,\sigma,R\rangle$$

נוכיח באינדוקציה שהקונפיגורציות של $\mathcal{M}$ ושל $\mathcal{M}'$ זהות על כל ריצה באורך n (עד כדי ביצוע 2 צעדים עד הגעה למצב $\langle q,S\rangle$ של $\mathcal{M}$ ושינוי שם של q ב־ $\langle q,S\rangle$)

<u>בסיס:</u> $n=0$
נשים לב שהקונפיגורציה היא מהצורה q_0cv ב־ $\mathcal{M}$ ו־ $\langle q_0,S\rangle cv$ ב־ $\mathcal{M}'$ ולכן שוות עד כדי שינוי שם
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל־ $n-1$ ונוכיח ל־ n
נראה שיהיה להן קונפיגורציות דומות בצעד ה־ n, נחלק ל2 מקרים:

1. אם הקונפיגוריה של $\mathcal{M}$ לאחר $n-1$ צעדים היא מהצורה $uabqcdev$.
מהנחת האינדוקציה הקונפיגוריות של $\mathcal{M}$ ושל $\mathcal{M}'$ זהות עד כדי שינוי שם של q ב־ $\langle q,S\rangle$ בהרצה של $n-1$ צעדים ולכן הקונפיגורציה של $\mathcal{M}'$ לאחר $n-1$ צעדים היא $uab\langle q,S\rangle cdev$, נחלק למקרים:

   (א) אם $\delta(q,c)=(q',x,R)$ או ש־ $\delta(q,c)=(q',x,L)$:
   נשים לב ש־ δ' מוגדרת להיות בדיוק δ עד כדי העובדה ש־ q הינו $\langle q,S\rangle$ ולכן הקונפיגורציה תשאר זהה בשניהם עד כדי שינוי השם של q ל־ $\langle q,S\rangle$

   (ב) אם $\delta(q,c)=(q',x,RR)$:
   נשים לב שמסעיף א' נקבל שהקונפיגורציה העוקבת לפי $\mathcal{M}$ היא $uabxdq'ev$
   נשים לב שהקונפיגורציה העוקבת של $\mathcal{M}'$ לפי הגדרה היא $uabx\langle q',R\rangle dev$,
   ואם נסתכל על העוקבת של הקונפיגורציה הזאת (אינה מקבלת או דוחה אחרת לא היינו מסתכלים על העוקב) נקבל שהעוקב הוא $uabxd\langle q',S\rangle ev$, שזהה לקונפיגורציה הבאה של $\mathcal{M}$ עד כדי שינוי שם של q' ל־ $\langle q',S\rangle$

   (ג) אם $\delta(q,c)=(q',x,LL)$:
   נשים לב שמסעיף א' נקבל שהקונפיגורציה העוקבת לפי $\mathcal{M}$ היא $uq'abxdev$
   נשים לב שהקונפיגורציה העוקבת של $\mathcal{M}'$ לפי הגדרה היא $ua\langle q',R\rangle bxdev$,
   ואם נסתכל על העוקבת של הקונפיגורציה הזאת (אינה מקבלת או דוחה אחרת לא היינו מסתכלים על העוקב) נקבל שהעוקב הוא $u\langle q',S\rangle abxdev$, שזהה לקונפיגורציה הבאה של $\mathcal{M}$ עד כדי שינוי שם של q' ל־ $\langle q',S\rangle$

2. אחרת, הקונפיגוריה של $\mathcal{M}$ לאחר $n-1$ צעדים היא מהצורה qcv.
מהנחת האינדוקציה הקונפיגוריות של $\mathcal{M}$ ושל $\mathcal{M}'$ זהות עד כדי שינוי שם של q ב־ $\langle q,S\rangle$ בהרצה של $n-1$ צעדים ולכן הקונפיגורציה של $\mathcal{M}'$ לאחר $n-1$ צעדים היא $\langle q,S\rangle cv$, נחלק למקרים:

   (א) אם $\delta(q,c)=(q',x,LL)$:
   נשים לב שמסעיף ב' נקבל שהקונפיגורציה העוקבת לפי $\mathcal{M}$ היא $q'xv$
   נשים לב שהקונפיגורציה העוקבת של $\mathcal{M}'$ לפי הגדרה היא $\langle q',R\rangle xv$,
   ואם נסתכל על העוקבת של הקונפיגורציה הזאת (אינה מקבלת או דוחה אחרת לא היינו מסתכלים על העוקב) נקבל שהעוקב הוא $\langle q',S\rangle xv$, שזהה לקונפיגורציה הבאה של $\mathcal{M}$ עד כדי שינוי שם של q' ל־ $\langle q',S\rangle$

   (ב) אם $\delta(q,c)=(q',x,L)$:
   נשים לב ש־ δ' מוגדרת להיות בדיוק δ עד כדי העובדה ש־ q הינו $\langle q,S\rangle$ ולכן הקונפיגורציה תשאר זהה בשניהם עד כדי שינוי השם של q ל־ $\langle q,S\rangle$

כלומר נקבל שבכל המקרים הקונפיגורציות של $\mathcal{M}$ ו־ $\mathcal{M}'$ זהות עד כדי שינוי של q ל־ $\langle q,S\rangle$
$\mathcal{M}$ מקבלת w $\Leftrightarrow$ הריצה של $\mathcal{M}$ על w מגיעה ל־ q_{acc} $\Leftrightarrow$ הריצה של $\mathcal{M}'$ על w מגיעה ל־ $\langle q_{acc},S\rangle$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ מקבלת w
$\mathcal{M}$ דוחה w $\Leftrightarrow$ הריצה של $\mathcal{M}$ על w מגיעה ל־ q_{rej} $\Leftrightarrow$ הריצה של $\mathcal{M}'$ על w מגיעה ל־ $\langle q_{rej},S\rangle$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ דוחה w
לכן $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ מקבלות, דוחות ולא עוצרות ביחד (לא עוצרות ביחד כי אם אחת תעצור אז השנייה תעצור), כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺