

# אלגברה לינארית 1 תשע"ח - תרגיל 9

10 ביוני 2018

## שאלה 1

תהי  $T : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  ההעתקה שלוקחת  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  ומחזירה את הפונקציה  $T(f) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  המוגדרת על ידי  $\forall x : T(f)(x) = f(x+1)$

א' הוכיחו ש- $T$  היא העתקה לינארית.

ב' מצאו את  $\ker T$  ו- $\operatorname{Im} T$ .

## שאלה 2

נתונה העתקה לינארית  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  המקיימת:

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

האם ניתן על סמך נתונים אלו למצוא את

א'  $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$

ב'  $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$

## שאלה 3

מצאו בסיס עבור הגרעין והתמונה של ההעתקות הלינאריות הבאות:

א'  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  המוגדרת על ידי

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 3y + 5z \\ 2x + 6y + 9z \end{bmatrix}.$$

ב'  $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$  המוגדרת על ידי

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y \\ y - 2z \\ z - 2t \\ t - 2x \end{bmatrix}.$$

ג')  $T : \mathbb{F}_5^4 \rightarrow \mathbb{F}_5^2$  המוגדרת על ידי

$$T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

## שאלה 4

האם קיימת העתקה לינארית  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת

א')  $T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 1, T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 2, T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = 3$

ב')  $T \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = 1, T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 2, T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = 3$

ג')  $T \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = 0, T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 1, T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = -1$

## שאלה 5

יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים מעל שדה  $\mathbb{F}$  כך ש-  $V$  נוצר סופית,  $v_1, \dots, v_k \in V$  כך ש-  $\{v_1, \dots, v_k\}$  בת"ל ו-  $w_1, \dots, w_k \in W$ . הוכיחו כי קיימת העתקה לינארית  $T : V \rightarrow W$  עבורה  $T(v_i) = w_i$  לכל  $i, 1 \leq i \leq k$ .

## שאלה 6

יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים מעל שדה  $\mathbb{F}$  ו-  $T : V \rightarrow W$  העתקה לינארית. יהי  $U \subseteq W$  תת מרחב. הוכיחו ש-

$$T^{-1}(U) = \{v \in V \mid T(v) \in U\}$$

הוא תת-מרחב של  $V$ .

## שאלה 7

יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{F}$  ותהי  $T : V \rightarrow V$  העתקה לינארית. נגדיר

$$\text{Fix}T = \{v \in V \mid Tv = v\}$$

הוכיחו ש-  $\text{Fix}T$  הוא תת-מרחב של  $V$ .

## שאלה 8

יהי  $V$  מרחב וקטורי ותהי  $T : V \rightarrow V$  העתקה לינארית. אלו מהטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

א')  $\ker T \subseteq \text{Fix}T$

ב')  $\ker T \cap \text{Fix}T = \{0_V\}$

ג')  $\text{Fix}T \subseteq \text{Im}T$

ד')  $\text{Fix}T + \text{Im}T = V$

## שאלה 9

יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים מעל שדה  $\mathbb{F}$ , ותהי העתקה לינארית  $T : V \rightarrow W$ . יהיו  $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ . אלו מהטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

א' אם  $\text{Span}(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}) = V$  וגם  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$  בת"ל, אז  $T$  חח"ע.

ב' אם  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  בת"ל וגם  $\text{Span}(\{T(v_1), \dots, T(v_k)\}) = W$ , אז  $T$  חח"ע.

## שאלה 10

יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים מעל שדה  $\mathbb{F}$ ,  $T : V \rightarrow W$  העתקה לינארית ו- $v \in V$ . נסמן  $w = T(v)$ . הוכיחו ש-

$$T^{-1}(\{w\}) = v + \ker T$$