פתרון תרגיל מספר 4 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

7 במאי 2020

שאלה 1

סעיף 1 חלק a

צ"ל: $\equiv$ הוא יחס שקילות

הוכחה:

נוכיח כל תכונה:

1. רפלקסיביות: תהי $q \in Q$, לכן לכל $z \in \Sigma^*$ מתקיים $\delta^*(q,z) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q,z) \in F$ (טאוטולוגיה), ולכן $q \equiv q$
2. סימטריות: יהיו $q_1, q_2 \in Q$ כך ש־ $q_1 \equiv q_2$, לכן לכל $z \in \Sigma^*$ מתקיים מההגדרה כי $\delta^*(q_2,z) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q_1,z) \in F$, ולכן מסימטריות אם"ם $\delta^*(q_2,z) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q_1,z) \in F$,
כלומר לכל $z \in \Sigma^*$ מתקיים $\delta^*(q_2,z) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q_1,z) \in F$ ולכן $q_2 \equiv q_1$
3. טרנזטיביות: יהיו $q_1, q_2, q_3 \in Q$ כך ש־ $q_1 \equiv q_2, q_2 \equiv q_3$,
נניח בשלילה כי $q_1 \not\equiv q_3$, כלומר קיים זנב מפריד $z \in \Sigma^*$ כך ש־ $\delta^*(q_1,z) \notin F$ וגם $\delta^*(q_3,z) \in F$ (בלי הגבלת הכלליות),
מהיות $q_1 \equiv q_2$, מתקיים כי $\delta^*(q_1,z) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q_2,z) \in F$, ולכן $\delta^*(q_2,z) \notin F$,
מהיות $q_2 \equiv q_3$, מתקיים כי $\delta^*(q_2,z) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q_3,z) \in F$, ולכן $\delta^*(q_3,z) \notin F$,
קיבלנו כי $\delta^*(q_3,z) \in F$ וגם $\delta^*(q_3,z) \notin F$, סתירה ולכן לא קיים זנב מפריד בין q_1 ל־ q_3,
כלומר לכל $z \in \Sigma^*$ מתקיים $\delta^*(q_1,z) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q_3,z) \in F$, כלומר $q_1 \equiv q_3$

כלומר היחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזטיבי ולכן מההגדרה היחס הוא יחס שקילות

מ.ש.ל.א.1.☺

סעיף 1 חלק b

צ"ל: δ' מוגדר היטב

הוכחה:

יהיו $q, s \in Q$ כך ש־ $q \equiv s$,

יהי $\sigma \in \Sigma$, תחילה נוכיח כי $\delta(q,\sigma) \equiv \delta(s,\sigma)$.

נניח בשלילה ש־ $\delta(q,\sigma) \not\equiv \delta(s,\sigma)$, כלומר קיים זנב מפריד $z \in \Sigma^*$ כך ש־ $\delta^*(\delta(q,\sigma),z) \notin F$ וגם $\delta^*(\delta(s,\sigma),z) \in F$ (בלי הגבלת הכלליות),

נשים לב כי $\delta^*(\delta(q,\sigma),z) = \delta^*(q,\sigma \cdot z) \notin F$ (הוכחנו בתרגיל 3 את התכונה הזאת)

וגם נשים לב כי $\delta^*(\delta(s,\sigma),z) = \delta^*(s,\sigma \cdot z) \in F$ (הוכחנו בתרגיל 3 את התכונה הזאת)

ולכן $\delta^*(s,\sigma \cdot z) \in F$ וגם $\delta^*(q,\sigma \cdot z) \notin F$, כלומר $\sigma \cdot z$ הוא זנב מפריד בין q ל־ s בסתירה לכך ש־ $q \equiv s$.

לכן $\delta(q,\sigma) \equiv \delta(s,\sigma)$, ולכן $\boxed{\delta'(q,\sigma) = [\delta(q,\sigma)] = [\delta(s,\sigma)] = \delta'(s,\sigma)}$, כנדרש

מ.ש.ל.א.2.☺

סעיף 1 חלק c

צ"ל: $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$

הוכחה:

תהי $w \in \Sigma^*$, נוכיח באינדוקציה על אורך המילה כי $\delta'^*([q_0],w) = [\delta^*(q_0,w)]$,

בסיס: $\underline{n=0}$ לכן $w=\varepsilon$, נשים לב כי

$$\left[\delta^*\left(q_0,w\right)\right]=\left[\delta^*\left(q_0,\varepsilon\right)\right]=\left[q_0\right]=\delta'^*\left(\left[q_0\right],\varepsilon\right)$$

צעד: נניח שהטענה נכונה לכל מילה באורך $n-1$ ונוכיח למילה באורך n,
נסמן $w=\sigma_1\ldots\sigma_n$ כאשר $\sigma_i\in\Sigma$, נגדיר $u=\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}$, לכן $w=u\cdot\sigma_n$,
נשים לב כי $|u|=n-1$ ולכן מהנחת האינדוקציה מתקיים $\delta'^*\left(\left[q_0\right],u\right)=\left[\delta^*\left(q_0,u\right)\right]$, כלומר $\delta^*\left(q_0,u\right)\equiv\delta'^*\left(\left[q_0\right],u\right)$,
לכן לפי הסעיף הקודם מתקיים כי $\delta'\left(\delta'^*\left(\left[q_0\right],u\right),\sigma_n\right)=\delta'\left(\delta^*\left(q_0,u\right),\sigma_n\right)$ ולכן

$$\begin{aligned}\delta'^*\left(\left[q_0\right],w\right)=\delta'^*\left(\left[q_0\right],u\cdot\sigma_n\right)&\overset{\text{def}}{=}\delta'\left(\delta'^*\left(\left[q_0\right],u\right),\sigma_n\right)=\delta'\left(\delta^*\left(q_0,u\right),\sigma_n\right)\\&\overset{\text{def}}{=}\left[\delta\left(\delta^*\left(q_0,u\right),\sigma_n\right)\right]\overset{\text{def}}{=}\left[\delta^*\left(q_0,u\cdot\sigma_n\right)\right]=\left[\delta\left(q_0,w\right)\right]\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי לכל $w\in\Sigma^*$ מתקיים $\delta'^*\left(\left[q_0\right],w\right)=\left[\delta^*\left(q_0,w\right)\right]$,
נשים לב כי

$$w\in L\left(\mathcal{A}'\right)\Leftrightarrow\delta'^*\left(\left[q_0\right],w\right)\in F'\Leftrightarrow\left[\delta^*\left(q_0,w\right)\right]\in F'\Leftrightarrow\delta^*\left(q_0,w\right)\in F\Leftrightarrow w\in L\left(\mathcal{A}\right)$$

כלומר הראנו כי $w\in L\left(\mathcal{A}'\right)\Leftrightarrow w\in L\left(\mathcal{A}\right)$, ולכן $\boxed{L\left(\mathcal{A}'\right)=L\left(\mathcal{A}\right)}$

מ.ש.ל.א.3.☺

סעיף 1 חלק d

צ"ל: $\mathcal{A}'$ הוא בעל מספר מינימלי של מצבים לכל שפה שמכירה את $L\left(\mathcal{A}\right)$

הוכחה:

נסמן את מספר המצבים של $\mathcal{A}'$ ב־ n.
נסמן ב־ $q_0^{\mathcal{A}'},\ldots,q_{n-1}^{\mathcal{A}'}$ נציגים ממחלקות השקילות של $\equiv$ של $\mathcal{A}'$.
יהיו $w_1,\ldots,w_n$ מילים כך ש־ $\delta^*_{\mathcal{A}'}\left(q_0^{\mathcal{A}'},w_i\right)=q_{i-1}^{\mathcal{A}'}$ לכל $i\in[n]$, (כל מצב הוא ישיג באוטומט)
נשים לב שלכל $i,j\in[n]$ כך ש־ $i\neq j$ קיים $z\in\Sigma^*$ כך ש־ $\delta^*_{\mathcal{A}'}\left(q_i,z\right)\in F$ וגם $\delta^*_{\mathcal{A}'}\left(q_j,z\right)\notin F$ (אחרת $q_i\equiv q_j$ ומאלגוריתם הצמצום רק אחד מ־ 2 המצבים האלו היה נשאר ב־ $\mathcal{A}'$)
נניח בשלילה שקיים אוטומט $\mathcal{A}''$ כך ש־ $L\left(\mathcal{A}'\right)=L\left(\mathcal{A}''\right)$ עם פחות מ־ n מצבים.
נסמן ב־ $q_0^{\mathcal{A}''},\ldots,q_{m-1}^{\mathcal{A}''}$ את המצבים של $\mathcal{A}''$ (כלומר $m<n$)
עתה משובך היונים, (מקבוצת הנציגים למצבים) קיימים $i\neq j\in[n]$ כך ש־ q $\delta^*_{\mathcal{A}''}\left(q_0,w_i\right)=\delta^*_{\mathcal{A}''}\left(q_0,w_j\right)=q$
ממה שצוין מלעיל, קיים זנב מפריד $z\in\Sigma^*$ כך ש־

$$\begin{aligned}\delta^*_{\mathcal{A}'}\left(q_0^{\mathcal{A}'},w_i\cdot z\right)&=\delta^*_{\mathcal{A}'}\left(\delta^*_{\mathcal{A}'}\left(q_0^{\mathcal{A}'},w_i\right)\cdot z\right)=\delta^*_{\mathcal{A}'}\left(q_{i-1}^{\mathcal{A}'},z\right)\in F_{\mathcal{A}'}\\\delta^*_{\mathcal{A}'}\left(q_0^{\mathcal{A}'},w_j\cdot z\right)&=\delta^*_{\mathcal{A}'}\left(\delta^*_{\mathcal{A}'}\left(q_0^{\mathcal{A}'},w_j\right)\cdot z\right)=\delta^*_{\mathcal{A}'}\left(q_{j-1}^{\mathcal{A}'},z\right)\notin F_{\mathcal{A}'}\end{aligned}$$

(בלי הגבלת הכלליות) ,
כלומר מתקיים כי $w_i\cdot z\in L\left(\mathcal{A}'\right)=L\left(\mathcal{A}''\right)$ וגם $w_j\cdot z\notin L\left(\mathcal{A}'\right)=L\left(\mathcal{A}''\right)$,
כלומר $\delta^*_{\mathcal{A}''}\left(q_0^{\mathcal{A}''},w_i\cdot z\right)\in F_{\mathcal{A}''}$ וגם - $\delta^*_{\mathcal{A}''}\left(q_0^{\mathcal{A}''},w_j\cdot z\right)\notin F_{\mathcal{A}''}$
לכן, נשים לב כי

$$\begin{aligned}\delta^*_{\mathcal{A}''}\left(q,z\right)&=\delta^*_{\mathcal{A}''}\left(\delta^*_{\mathcal{A}''}\left(q_0^{\mathcal{A}''},w_j\right),z\right)=\delta^*_{\mathcal{A}''}\left(q_0^{\mathcal{A}''},w_j\cdot z\right)\notin F_{\mathcal{A}''}\\\delta^*_{\mathcal{A}''}\left(q,z\right)&=\delta^*_{\mathcal{A}''}\left(\delta^*_{\mathcal{A}''}\left(q_0^{\mathcal{A}''},w_i\right),z\right)=\delta^*_{\mathcal{A}''}\left(q_0^{\mathcal{A}''},w_i\cdot z\right)\in F_{\mathcal{A}''}\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי יש $\delta^*_{\mathcal{A}''}\left(q,z\right)\in F_{\mathcal{A}''}$ וגם $\delta^*_{\mathcal{A}''}\left(q,z\right)\notin F_{\mathcal{A}''}$.
סתירה ולכן לא קיים אוטומט $\mathcal{A}''$ כך ש־ $L\left(\mathcal{A}'\right)=L\left(\mathcal{A}''\right)$ עם פחות מ־ n מצבים.

מ.ש.ל.א.4.☺

סעיף 2

צ"ל: δ' מוגדר היטב

הוכחה:

נפעיל את האלגוריתם שהוראה בהרצאה למציאת מחלקות השקילות, נחשב את $\equiv_i$ עד שנמצא נקודת שבת.

תחילה נשים לב כי מחלקות השקילות של $\equiv_0$ הם $\{F, Q \setminus F\} = \{\{3,6\},\{1,2,4,5\}\}$

עתה נחשב את $\equiv_1$. נשים לב כי

$$\delta^*(6,a) = 5 \notin F \Leftrightarrow \delta^*(3,a) = 2 \notin F$$
$$\delta^*(6,b) = 3 \in F \Leftrightarrow \delta^*(3,b) = 3 \in F$$

ולכן נקבל כי $3 \equiv_1 6$, עתה נשים לב כי

$$(\delta^*(1,a) = 4 \notin F) \wedge (\delta^*(5,a) = 6 \in F) \Rightarrow 1 \not\equiv_1 5$$

וגם נשים לב כי $\delta(1,\sigma) = \delta(2,\sigma)$ לכל $\sigma \in \Sigma^*$ ולכן לכל $\varepsilon \neq w \in \Sigma^*$ יתקיים

$$\delta^*(1,w) = \delta^*(1,\sigma_1 \ldots \sigma_n) = \delta^*(\delta(1,\sigma_1),\sigma_2 \ldots \sigma_n) = \delta^*(\delta(2,\sigma_1),\sigma_2 \ldots \sigma_n) = \delta^*(2,\sigma_1 \ldots \sigma_n) = \delta^*(2,w)$$

וגם ל־ $w = \varepsilon$ ראינו שהטענה נכונה ולכן $2 \equiv_i 1$ לכל $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

וגם נשים לב כי $\delta(5,a) = 6 = \delta(4,a)$ וגם $\delta^*(5,b) = 4 \notin F \Leftrightarrow \delta(4,b) = 5 \notin F$ ולכן $5 \equiv_1 4$

לכן נקבל $4 \equiv_1 5 \not\equiv_1 2 \equiv_1 1$, ולכן מחלקות השקילות שלנו ל־ $\equiv_1$ הן $\{\{3,6\},\{1,2\},\{4,5\}\}$

עתה נשים לב כי

$$(\delta^*(3,aa) = 4 \notin F) \wedge (\delta^*(6,aa) = 6 \in F) \Rightarrow 3 \not\equiv_2 6$$

תהי $w \in \Sigma^*$ כך ש־ $w = a\sigma_2$,

$$\delta^*(4,w) = \delta^*(4,a\sigma_2) = \delta^*(\delta(4,a),\sigma_2) = \delta^*(\delta(5,a),\sigma_2) = \delta^*(5,a\sigma_2) = \delta^*(5,w)$$

וגם

$$\delta^*(4,bb) = 4 \notin F \Leftrightarrow \delta^*(5,bb) = 5 \notin F$$
$$\delta^*(4,ba) = 6 \in F \Leftrightarrow \delta^*(5,ba) = 6 \in F$$

ולכן מחלקות השקילות של $\equiv_2$ הם $\{\{3\},\{6\},\{1,2\},\{4,5\}\}$

עתה נחשב את $\equiv_3$, ראינו כי $2 \equiv_i 1$ לכל $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ולכן אין צורך לבדוק ונשאר לבדוק רק את $\{4,5\}$

תהי $w \in \Sigma^*$ כך ש־ $w = a\sigma_2\sigma_3$,

$$\delta^*(4,w) = \delta^*(4,a\sigma_2\sigma_3) = \delta^*(\delta(4,a),\sigma_2\sigma_3) = \delta^*(\delta(5,a),\sigma_2\sigma_3) = \delta^*(5,a\sigma_2\sigma_3) = \delta^*(5,w)$$

וגם

$$\delta^*(4,bbb) = 5 \notin F \Leftrightarrow \delta^*(5,bbb) = 4 \notin F$$
$$\delta^*(4,bba) = 6 \in F \Leftrightarrow \delta^*(5,bba) = 6 \in F$$
$$\delta^*(4,bab) = 3 \in F \Leftrightarrow \delta^*(5,bab) = 3 \in F$$
$$\delta^*(4,baa) = 5 \notin F \Leftrightarrow \delta^*(5,bab) = 5 \notin F$$

כלומר קיבלנו כי $5 \equiv_3 4$ ולכן מחלקות השקילות של $\equiv_3$ הם $\{\{3\},\{6\},\{1,2\},\{4,5\}\}$, הן בדיוק המחלקות השקילות של $\equiv_2$ ולכן הן מחלקות השקילות של האוטומט (נקודת השבת שחיפשנו).

מ.ש.ל.ב.☺