אלגברה לינארית (2) תשע"ט 2018-2019 - סמסטר ב' - תרגיל 3

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז.** יש לציין **כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 3.4.19 בשעה 21:00.

1. יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $T\colon V\to V$ אופרטור לינארי.
   (א) נתון $\vec{v}\in V$ וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי $\lambda\in\mathbb{F}$. הוכיחו כי $\vec{v}$ הוא וקטור עצמי של T^3 . לאיזו ערך עצמי של T^3 הוא שייך?
   (ב) נתון $\vec{v}\in V$ וקטור עצמי של T^3 השייך לערך עצמי $\mu\in\mathbb{F}$. האם $\vec{v}$ גם וקטור עצמי של T ?

2. יהי V מ"ו, ויהי $f\colon V\to V$ אופרטור לינארי כך ש- $f^2=f$.
   (א) יהי λ ערך עצמי של f . הוכיחו כי $\lambda=1$ או $\lambda=0$.
   (ב) האם 0 הוא בהכרח ערך עצמי של f ?
   (ג) יהי $\vec{v}\in V$ כך ש- $f(\vec{v})\neq 0$ וגם $f(\vec{v})\neq\vec{v}$.
   הוכיחו כי $f(\vec{v})$ ו- $f(\vec{v})-\vec{v}$ הם וקטורים עצמיים של f . לאלו ערכים עצמיים הם שייכים?

3. יהי $\mathbb{F}$ שדה עם $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2$, V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, ויהיו U,W תתי-מרחבים של V כך ש- $V=U\oplus W$.
   יהי $R_{U,W}\colon V\to V$ השיקוף סביב U במקביל ל- W .
   (א) הראו ש-U ו-W הם מרחבים עצמיים של $R_{U,W}$. לאלו ערכים עצמיים הם שייכים?
   (ב) יהי $\vec{v}\in V$ וקטור עצמי של $R_{U,W}$. הוכיחו כי $\vec{v}\in U\cup W$.

4. יהי V מ"ו ויהיו $T,S\colon V\to V$ שני אופרטורים לינאריים. הוכיחו או הפריכו:
   (א) אם λ הוא ערך עצמי של T ו-μ הוא ערך עצמי של S אז $\lambda+\mu$ הוא ערך עצמי של $T+S$.
   (ב) אם $\vec{v}\in V$ וקטור עצמי של T וגם של S אז $\vec{v}$ הוא וקטור עצמי של $T+S$.

5. עבור $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\in M_{4\times 4}(\mathbb{F})$, מצאו את כל הערכים העצמיים, המרחבים העצמיים והריבויים הגאומטריים השייכים להם כאשר
   (א) $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ (ב) $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ (ג) $\mathbb{F}=\mathbb{F}_2$ ($\mathbb{F}_2$ הוא השדה עם שני איברים).

6. עבור $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&-4\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{F})$, מצאו את כל הערכים העצמיים ,המרחבים העצמיים והריבויים הגאומטריים השייכים להם כאשר
   (א) $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ (ב) $\mathbb{F}=\mathbb{F}_7$ (כאשר $\mathbb{F}_7$ הוא השדה עם שבעה איברים).

7. יהיו $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצות דומות. הוכיחו כי $\det(A)=\det(B)$.

8. יהיו $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. הוכיחו או הפריכו:
   (א) אם A ו- B דומות אז A ו- B שקולות שורה.
   (ב) אם A ו- B שקולות שורה אז A ו- B דומות.
   (תזכורת: A ו- B שקולות שורה אם B מתקבלת מ-A ע"י הפעלה של מספר סופי של פעולות אלמנטריות)

9. תהי $A=[a_{ij}]\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. **העיקבה** (*trace*) של A מוגדרת להיות $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}\in\mathbb{F}$.
   (א) יהיו $X,Y\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. הוכיחו כי $\operatorname{tr}(XY)=\operatorname{tr}(YX)$.
   (ב) יהיו $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצות דומות. השתמשו בסעיף הקודם על מנת להוכיח כי $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$.