פתרון תרגיל מספר 2 ־ תורת המשחקים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

16 באפריל 2021

1. **צ"ל:** N, P

הוכחה:

בהינתן n ערימות, נסמן את מספר האיברים בערימות ב־ $(a_1, \dots, a_n)$, נגדיר $m = \sum_{i=1}^{n} 1_{a_i > 1}$ (מספר הערימות עם יותר מאיבר אחד).

תחילה נסתכל על המשחק כאשר $m = 0$, כלומר יש רק מצבים של n ערימות בגודל 1.

נוכיח באינדוקציה על $n = 2k + 1$ שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת כאשר $m = 0$.

אבחנה: במצב זה, כל מהלך מוריד ערימה שלמה

<u>בסיס:</u> $k = 0$, נשים לב שהשחקן הראשון מחויב לקחת את הערימה האחרונה ויפסיד ולכן השחקן השני יינצח כנדרש.

<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל־ $k - 1$ ונוכיח שהיא נכונה ל־ k.

השחקן הראשון מחויב לקחת ערימה ויישאר $2k + 1 - 1$ ערימות.

השחקן השני גם מחויב לקחת ערימה ויישאר $2k + 1 - 1 - 1 = 2(k - 1) + 1$ ערימות ומהנחת האינדוקציה השחקן השני מנצח ממצב זה, כנדרש.

כלומר קיבלנו שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת כאשר יש $2k + 1$ ערימות ו־ $m = 0$,

נשים לב שלשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת כאשר יש $2k$ ערימות בגודל 1 על ידי לקיחת ערימה והפיכה לשחקן השני.

כלומר לשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת כאשר יש n ערימות בגודל 1 אס"ם $n \equiv 0 \mod 2$.

עתה נניח שיש n ערימות בגודל 1 וערימה אחת בגודל s עם $s > 1$ איברים.

נראה אסטרטגיה מנצחת לשחקן הראשון במקרה זה:

(א) אם $n \equiv 0 \mod 2$, נשאיר איבר אחד בערימה עם ה־ s איברים. עתה יהיו $n + 1 \equiv 1 \mod 2$ ערימות בגודל 1 וראינו שבמצב זה השחקן הקודם מנצח ובמקרה שלנו זהו השחקן הראשון, כנדרש.

(ב) אם $n \equiv 1 \mod 2$, נשאיר 0 איברים בערימה עם ה־ s איברים. עתה יהיו $n \equiv 1 \mod 2$ ערימות בגודל 1 וראינו שבמצב זה השחקן הקודם מנצח ובמקרה שלנו זהו השחקן הראשון, כנדרש.

כלומר השחקן הראשון מנצח במקרה ויש ערימה אחת עם יותר מ־ 1 איברים.

אבחנה: בהינתן $m = 1$, אז $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$ (יש ערימה אחת בדיוק עם יותר מאיבר אחד ולכן יש לה ביט שהוא לא הביט הכי ימני דלוק שלא ייכבה בקסור)

נוכיח שאם $m > 1$, אז לשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת אם $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$, האסטרטגיה של השחקן הראשון תהיה:

(א) אם $m > 1$, נוריד מהערימות כך ש־ $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$

(ב) אם $m \leq 1$, נעשה את האסטרגיה המנצחת שראינו קודם לשחקן הראשון

אם השחקן הראשון יגיע תמיד למקרה ש־ $m = 1$, נקבל שהאסטרטגיה שהצגנו מנצחת.

נשים לב שכמו במשחק נים הרגיל, כל עוד אנחנו במצב א' של האסטרטגיה, השחקן הראשון תמיד יהיה במצב $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$ והשחקן השני יהיה במצב $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$.

נשים לב שמספר הערימות שאורכן גדול מאחד יורד מונוטונית לכל היותר ב־ 1 בכל פעם, ולכן אחד השחקנים יגיע למצב שבו יש רק ערימה אחת עם יותר מאיבר אחד.

מהאבחנה שציינו קודם, במצב שבו יש רק ערימה אחת עם יותר מאיבר אחד, מתקיים $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$ ולכן זה יהיה תור

השחקן הראשון כאשר יש רק ערימה עם יותר מאיבר אחד, וראינו שמצב זה לשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת.

עתה נשים לב שאם $m > 1$ ומתקיים $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$, אז השחקן הראשון יצטרך להעביר ל־ $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$ והשחקן השני יינצח בדיוק באותה אסטרטגיה של השחקן הראשון.

נשים לב שעברנו על כל המקרים ועתה נוכל להגיד מהם N, P כפונקציה של n, m שהוגדרו בהתחלה

$$\begin{aligned} N &= \{m = 0 \wedge n \equiv 0 \mod 2\} \cup \{m = 1\} \cup \{m > 1 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0\} \\ P &= \{m = 0 \wedge n \equiv 1 \mod 2\} \cup \{m > 1 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0\} \end{aligned}$$

נשים לב כי שראינו באבחנה כי כאשר $m = 1$ מתקיים $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$ ולכן נוכל לכתוב את הקבוצות באופן הבא:

$$\begin{aligned} N &= \{m = 0 \wedge n \equiv 0 \mod 2\} \cup \{m \geq 1 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0\} \\ P &= \{m = 0 \wedge n \equiv 1 \mod 2\} \cup \{m \geq 1 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0\} \end{aligned}$$

נשים לב שבמקרה ש־ $m = 0$, מתקיים שיש n ערימות בגודל 1 ולכן $n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ ונשים לב כי $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = \underbrace{1 \oplus \cdots \oplus 1}_{n \text{ times}} \equiv n$,

נשים לב שהקסור הוא 0 או 1 ולכן נקבל כי ניתן לפשט את הקבוצות ל־

$$\begin{aligned} N &= \{m = 0 \wedge n \equiv a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \equiv 0 \mod 2\} \cup \{m \geq 1 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0\} \\ &= \{m = 0 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0\} \cup \{m \geq 1 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0\} \\ P &= \{m = 0 \wedge n \equiv a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \equiv 1 \mod 2\} \cup \{m \geq 1 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0\} \\ &= \{m = 0 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 1\} \cup \{m \geq 1 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0\} \\ &= \{m = 0 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0\} \cup \{m \geq 1 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0\} \end{aligned}$$

והתשובה הסופית שנקבל היא

$$\begin{aligned} N &= \{m = 0 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0\} \cup \{m \geq 1 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0\} \\ P &= \{m = 0 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0\} \cup \{m \geq 1 \wedge a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0\} \end{aligned}$$

מ.ש.ל.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** אין מהלך חוקי מ־ $\hat{P}$ ל־ $\hat{P}$

הוכחה:

בהינתן $(x, y) \in \hat{P}$ קיים $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש־ $x = a_i, y = b_i$ (בלי הגבלת הכלליות)

נחלק למקרים לפי המהלך:

i. אם המהלך הוא למצב $(x - a, y)$ כאשר $1 \leq a \leq x$:

ננית בשלילה ש־ $(x - a, y) \in \hat{P}$, נחלק ל־ 2 מקרים:

א'. קיים $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש־ $x - a = a_j, y = b_j$,

נשים לב כי $y = b_i = b_j$ וממונוטוניות עולה ממש של b (ראינו בתרגול) נקבל כי $i = j$,

ולכן $x - a = a_i = a_j = x$, ונקבל כי $a = 0$ בסתירה לכך ש־ $1 \leq a \leq x$.

ב'. קיים $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש־ $x - a = b_j, y = a_j$, ונקבל כי $a_j = y = b_i$, נשים לב שמצב זה לעולם לא יקרה אלא אם $i = j = 0$ כפי שראינו בתרגול. ואם $i = j = 0$ אז נקבל כי $b_i = a_i = 0 = x = y$ ואז לא הייתה פעולה חוקית מהצורה $(x - a, y) = (-a, 0)$, סתירה

ii. אם המהלך הוא למצב $(x, y - a)$ כאשר $1 \leq a \leq y$:

ננית בשלילה ש־ $(x, y - a) \in \hat{P}$, נחלק ל־ 2 מקרים:

א'. קיים $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש־ $x = a_j, y - a = b_j$,

נשים לב כי $x = a_i = a_j$ וממונוטוניות עולה ממש של a (ראינו בתרגול) נקבל כי $i = j$,

ולכן $y - a = b_i = b_j = y$, ונקבל כי $a = 0$ בסתירה לכך ש־ $1 \leq a \leq y$.

ב'. קיים $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש־ $x = b_j, y - a = a_j$, ונקבל כי $a_i = x = b_j$, נשים לב שמצב זה לעולם לא יקרה אלא אם $i = j = 0$ כפי שראינו בתרגול. ואם $i = j = 0$ אז נקבל כי $y = x = 0 = a_i = b_i$ ואז לא הייתה פעולה חוקית מהצורה $(x, y - a) = (0, -a)$, סתירה

iii. אם המהלך הוא למצב $(x - a, y - a)$ כאשר $1 \leq a \leq \min\{x, y\}$:
נניח בשלילה ש־ $(x - a, y - a) \in \hat{P}$, נחלק ל־ 2 מקרים:

א'. קיים $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש־ $x - a = a_j, y - a = b_j$,
נשים לב כי $a_i - a_j = x - (x - a) = a$ וגם כי $b_i - b_j = y - (y - a) = a$,
נשים לב כי

$$a = b_i - b_j = (a_i + i) - (a_j + j) = a_i - a_j + i - j = a + (i - j)$$

ולכן $i - j = 0$, כלומר $i = j$ כלומר $a = 0 = b_i - b_i = b_i - b_j$, בסתירה לכך ש־ $1 \leq a \leq \min\{x, y\}$.

ב'. קיים $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש־ $x - a = b_j, y - a = a_j$,
נשים לב כי

$$a = x - (x - a) = a_i - b_j = a_i - (a_j + j)$$
$$a = y - (y - a) = b_i - a_j = (a_i + i) - a_j$$

מחיסור המשוואות נקבל כי $i + j = 0$, כלומר $i = j = 0$, ואז לא הייתה פעולה חוקית מהצורה $(x - a, y - a) = (-a, -a)$, סתירה

נשים לב שעברנו על כל הפעולות החוקיות והראנו שאף פעולה לא תעביר אותנו מ־ $\hat{P}$ ל־ $\hat{P}$, כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** אם $(x, y) \notin \hat{P}$ אז קיים מהלך שיעביר אותנו ל־ $\hat{P}$

הוכחה:

יהיו $(x, y) \notin \hat{P}$, ראינו בתרגול כי $\{0, 1, \ldots, k\} \subseteq \{a_0, b_0, \ldots, a_k, b_k\}$, נחלק למקרים:

i. קיימים $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש־ $x = a_i, y = a_j$,

א'. אם $i \neq j$, נניח בלי הגבלת הכלליות כי $i > j$, ולכן $x = a_i > b_j$ מהגדרת a_i. ולכן המהלך $(x - (x - b_j), y)$ חוקי ומתקיים

$$(x - (x - b_j), y) = (a_i - (a_i - b_j), a_j) = (b_j, a_j) \in \hat{P}$$

ב'. אם $i = j$, נעשה את המהלך $(x - x, y - x)$, נשים לב כי $1 \leq x \leq \min\{x, y\}$ (ההנחה שהמהלך לא סופי כלומר אינו $(0,0)$ אחרת המשחק כבר הסתיים)
ונקבל כי $(x - x, y - x) = (a_i - a_i, a_j - a_i) = (0, 0) = (a_0, b_0) \in \hat{P}$, כנדרש

ii. קיימים $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש־ $x = b_i, y = a_j$,

א'. אם $i < j$, אז נשים לב כי $a_i \leq b_i < a_j = y$ ולכן המהלך הבא חוקי $(x, y - (y - a_i))$ וגם

$$(x, y - (y - a_i)) = (b_i, a_i) \in \hat{P}$$

ב'. אם $i = j$, נשים לב כי $x = b_i, y = a_i$ ונקבל כי $(b_i, a_i) \notin \hat{P}$ בסתירה להגדרת $\hat{P}$ ולכן מקרה זה לא יתקיים.

ג'. אם $i > j$, אז נשים לב כי $b_j < b_i = x$ ולכן המהלך הבא חוקי $(x - (x - b_j), y)$ וגם

$$(x - (x - b_j), y) = (b_j, a_j) \in \hat{P}$$

iii. קיימים $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש־ $x = a_i, y = b_j$, נשים לב שמקרה זה סימטרי לחלוטין למקרה הקודם עד כדי שינוי הפעלת הפעולה על הקורדינאטה הראשונה או השנייה.

iv. קיימים $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש־ $x = b_i, y = b_j$,

א'. אם $i \neq j$, נניח בלי הגבלת הכלליות כי $i < j$ ולכן $a_i < a_j \leq b_j = y$ ולכן המהלך הבא חוקי $(x, y - (y - a_i))$ וגם

$$(x, y - (y - a_i)) = (b_i, a_i) \in \hat{P}$$

ב'. אם $i = j$, נעשה את המהלך $(x - x, y - x)$, נשים לב כי $1 \leq x \leq \min\{x, y\}$ (ההנחה שהמהלך לא סופי כלומר אינו $(0,0)$ אחרת המשחק כבר הסתיים)
ונקבל כי $(x - x, y - x) = (b_i - b_i, b_j - b_i) = (0, 0) = (a_0, b_0) \in \hat{P}$, כנדרש

כלומר הראנו שלכל $(x, y) \notin \hat{P}$ קיים מהלך שמעביר אותו ל־ $\hat{P}$ על ידי חלוקה ל־ 4 המקרים האפשריים ל־ x, y ולהראות שבכל אחד מהם יש מהלך חוקי שמעביר ל־ $\hat{P}$.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $P = \hat{P}$
הוכחה:
נראה שהשחקן הראשון מנצח אם המצב ההתחלתי הוא לא ב־ $\hat{P}$.
האסטרטגיה של השחקן הראשון תהיה להעביר את המצב להיות ב־ $\hat{P}$ (ראינו שאפשר לפי סעיף ב').
נוכיח באינדוקציה שלאחר n תורות של השחקן הראשון, המצב יהיה ב־ $\hat{P}$ לאחר תור השחקן הראשון.
<u>בסיס:</u> $n = 1$, לפי האסטרטגיה של השחקן הראשון, המצב ייסתיים ב־ $\hat{P}$ כנדרש.
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל־ $n - 1$ ונוכיח ל־ n.
נשים לב שלאחר $n - 1$ תורות של השחקן הראשון, המצב יסתיים ב־ $\hat{P}$ מהנחת האינדוקציה. ולכן לפי סעיף א', כל מהלך של השחקן השני יעביר את המצב לא להיות ב־ $\hat{P}$.
עתה שוב תור השחקן הראשון והוא יחזיר את המצב להיות ב־ $\hat{P}$.

עתה נשים לב שהמשחק הוא סופי ולכן נגיע למצב מסיים לאחר מספר סופי של תורות והמצב המסיים הוא $(0, 0) = (a_0, b_0) \in \hat{P}$. השחקן היחיד במשחק שהעביר מצבים ל־ $\hat{P}$ הוא השחקן הראשון ולכן הוא האחד שהגיע למצב $(0, 0)$ וניצח.

עתה בהינתן והמצב ההתחלתי הוא ב־ $\hat{P}$, לפי הסעיף הראשון, כל מהלך של השחקן הראשון יעביר למצב שאינו ב־ $\hat{P}$ (ובפרט לא מנצח). ומפה השחקן השני יוכל לעשות את האסטרטגיה של השחקן הראשון ולנצח.

כלומר הראנו את כל האפשרויות וראינו שהשחקן השני מנצח אם"ם המצב ההתחלתי הוא ב־ $\hat{P}$, ולכן לפי הגדרה $P = \hat{P}$, כנדרש.

מ.ש.ל.ג.☺

3. **צ"ל:** השחור לא יכול לנצח
הוכחה:
נניח בשלילה שלשחקן השחור יש אסטרטגיה מנצחת σ. נוכל לגנוב את האסטרטגיה שלו בכך שנזיז את הסוס קדימה ונחזיר אותו למקום שבו היה בהתחלה. בכך השארנו את הלוח באותו המצב והעברנו את התור לשחקן השחור, ונוכל להעתיק את האסטרטגיה שלו ממצב זה ולנצח גם כן. ובגלל שזה בלתי אפשרי שגם השחקן הראשון וגם השני ינצחו ביחד, אז קיבלנו סתירה לכך שלשחקן השחור יש אסטרטגיה מנצחת.

מ.ש.ל.☺

4. **צ"ל:** השחקן הראשון מנצח
הוכחה:
האסטרטגיה של השחקן הראשון תהיה:

(א) לשים את המטבע הראשון באמצע השולחן

(ב) להתנהג באופן סימטרי לשחקן השני

השחקן הראשון ינצח בגלל שבכל שלב במשחק לאחר התור של השחקן הראשון, המצב הוא סימטרי. אז בהנחה והשחקן השני שם מטבע במקום כלשהו חוקי, אז באופן סימטרי גם לשחקן הראשון יש מקום לשים את המטבע שלו בצד ההפוך של השולחן. ולכן השחקן הראשון לא יכול להפסיד, ומהיות וחייב להיות מפסיד (כי אין תיקו במשחק), נסיק שהשחקן השני מפסיד ואין לו איפה לשים מטבע.
ולכן השחקן הראשון מנצח, כנדרש.

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:** השחקן השני מנצח
הוכחה:
תחילה נוכיח באינדוקציה על k שלשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת כשמתחילים עם $2k+1$ מטבעות
בסיס: $k=0$, נשים לב שיש רק מטבע אחד, ניקח אותו והשחקן הראשון ינצח
צעד: נניח שהטענה נכונה ל־ $k-1$ ונראה שהיא נכונה ל־ k.
נניח שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת σ ממצב התחלתי $2k+1$,
נחלק למקרים:

(א) אם האסטרטגיה המנצחת של השחקן השני מהמצב $2k$ היא לקחת מטבע אחד.
מה שהשחקן הראשון יעשה הוא לקחת מטבע אחד, ויהיה תור השחקן השני עם $2k+1-1=2k$ מטבעות.
השחקן השני לוקח מטבע אחד, ונשאר עם $2k-1=2(k-1)+1$ מטבעות ומהנחת האינדוקציה לשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת ממצב זה ונקבל סתירה לכך שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת כי גם לראשון יש אסטרטגיה מנצחת ובלתי אפשרי ששניהם ינצחו.

(ב) אחרת, האסטרטגיה המנצחת של השחקן השני מהמצב $2k$ היא לקחת חצי מהמטבעות.
אם השחקן השני מחלק ב־ 2, נשאר עם k מטבעות.
נשים לב שבתור השחקן הראשון נוכל לחלק ב־ 2 בעצמנו ונשאר עם k מטבעות ומפה לגנוב את האסטרטגיה של השחקן השני ולנצח ממצב זה.
שוב נקבל סתירה לכך שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת כי גם לראשון יש אסטרטגיה מנצחת ובלתי אפשרי ששניהם ינצחו.

כלומר קיבלנו שעבור מספר אי זוגי של מטבעות, השחקן הראשון תמיד בעל אסטרטגיה מנצחת.
יהי $k\in\mathbb{N}$, נכתוב את $k=n\cdot 2^m$ כאשר $n\equiv 1 \mod 2$ ו־ $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,
נוכיח באינדוקציה שלשחקן הראשון יש אסטרגיה מנצחת אם $m\equiv 0 \mod 2$,
נכתוב $m=2l$,
בסיס: $l=0$, נשים לב כי $k=n$ אי זוגי וראינו שבמקרה זה לשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת
צעד: נניח שהטענה נכונה ל־ $l-1$ ונוכיח ל־ l.
האסטרטגיה של השחקן הראשון תהיה לחלק את כמות המטבעות ב־ 2. ונשאר עם $n\cdot 2^{m-1}$ מטבעות.
נחלק למקרים:

(א) אם השחקן השני לוקח מטבע אחד, נשאר עם $n\cdot 2^{m-1}-1\equiv 1 \mod 2$ ומפה ראינו שלשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת.

(ב) אם השחקן השני מחלק את כמות המטבעות ב־2, נשאר עם $n\cdot 2^{m-1-1}=n\cdot 2^{2\cdot l-2}=n\cdot 2^{2(l-1)}$ מטבעות ומהנחת האינדוקציה לשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת.

כלומר קיבלנו שעבור $k=n\cdot 2^m$ כאשר $n\equiv 1 \mod 2$ ו־ $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, כאשר $m\equiv 0 \mod 2$ לשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת.
עתה נניח כי $m\equiv 1 \mod 2$, נחלק למקרים:

(א) אם השחקן הראשון לוקח מטבע אחד, אז נשאר עם $n\cdot 2^m-1\equiv 1 \mod 2$ ומפה לשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת (הראנו שהשחקן שמתחיל ממספר אי זוגי מנצח)

(ב) אם השחקן הראשון לוקח חצי מהמטבעות, אז נשאר עם $n\cdot 2^{m-1}$ ומתקיים $m-1\equiv 0 \mod 2$ ולכן לשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת (הראנו שהשחקן שמתחיל מחזקה זוגית של 2 מנצח)

כלומר קיבלנו שאם $m\equiv 1 \mod 2$ אז לשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת.

נשים לב שעברנו על כל המרחב ונוכל להסיק שהשחקן הראשון מנצח ב־ k מטבעות כאשר $k = n \cdot 2^m$ כאשר $n \equiv 1 \mod 2$ ו־ $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ אם"ם $m \equiv 0 \mod 2$.

נשים לב ש־ $1000 = 125 \cdot 2^3$ ולכן לפי מה שהוכחנו, לשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת.

מ.ש.ל.☺