אינפי 2 - סמסטר א' תשע"ט
תרגיל בית 8

להגשה עד יום חמישי, 20 בדצמבר, בשעה 23:45, דרך תיבת ההגשה במודל

1. פתרו בעזרת פולינומי טיילור:

   (א) האם האינטגרל הלא־אמיתי $\int_0^1 \frac{1}{e^{x^2}-1}dx$ מתכנס? **רמז:** פתחו פולינום טיילור מתאים של e^x.

   (ב) האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$ מתכנס? **רמז:** פתחו פולינום טיילור של $\log(1+x)$ מסדר גבוה מספיק, והוכיחו שסכום של M טורים שבדיוק אחד מהם לא מתכנס, גם הוא לא מתכנס.

2. הוכיחו את המשפט הבא: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור המתקבל מהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ על־ידי הכנסת סוגריים. כלומר, קיימת סדרה עולה ממש של טבעיים $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך ש - $b_k = \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n$ לכל $k \in \mathbb{N}$. נניח שהסוגריים שהוכנסו הן מאורך חסום. כלומר, הסדרה $(n_{k+1}-n_k)_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה. נניח ש - $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. הוכיחו ש - $\sum a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum b_n$ מתכנס.

3. מצאו דוגמה לטור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ עבורו $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^3$ לא מתכנס. **רמז:** בתרגיל קודם מצאתם טור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ עבורו $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ לא מתכנס. היזכרו בפתרון ובמשפט שבו השתמשתם. נסו להשתמש במשהו כללי יותר.

4. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתכנס (טור לייבניץ). נסמן את סכומו ב - L (בכיתה הוזכרה העובדה $L=\ln(2)$. אין צורך בעובדה זו בשאלה הנוכחית. אל תשתמשו בה.)

   (א) הוכיחו: $\frac{7}{12} < L < \frac{47}{60}$. **רמז:** סכמו כמה איברים ראשונים של הטור, והשתמשו בידוע לכם על טורי לייבניץ.

   (ב) נסדר את הטור מחדש באופן הבא:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots$$

   (חיובי אחד ושני שליליים, לסירוגין). שימו לב שלא שינינו את האיברים (גם לא את הסימנים שלהם). רק סידרנו אותם מחדש. הוכיחו שהטור בסידור החדש מתכנס ל - $\frac{1}{2}L$ וש - $\frac{1}{2}L \neq L$.

   (ג) **בונוס (2 נק')** נסדר את הטור מחדש באופן הבא:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots$$

   (שני חיוביים ושלילי, לסירוגין). הוכיחו שהטור בסידור החדש מתכנס ל - $\frac{3}{2}L$.

5. **רמז:** בשאלה זו, כדאי להשתמש באינטגרל של פונקציה מונוטונית כדי לחסום סכום מתאים, או להיפך.

   (א) הוכיחו שהסדרה $a_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \log n$ היא מונוטונית יורדת[1] וחסומה. הסיקו שהיא מתכנסת וסמנו את גבולה ב - γ $\lim_{n\to\infty} a_n = \gamma$.

   (ב) הוכיחו שלכל $m \geq n \geq 1$ שלמים מתקיים $a_n - a_m < \frac{1}{n}$ (**רמז:** חסמו סכום על־ידי אינטגרל).

   (ג) הוכיחו שלכל $n \geq 1$ שלם מתקיים

$$\log n + \gamma < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq \log n + \gamma + \frac{1}{n}$$

[1] מומלץ שתוכיחו שהיא יורדת ממש.