פתרון תרגיל מספר 2 - לינארית 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

26 במרץ 2019

1. **פתרון:**

(א) **פתרון:**

i. **צ"ל:** האם T אינווריאנטי כאשר $U = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

הוכחה:

לא! נשים לב כי $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \in U$ וגם $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \notin U$, לכן $T(U) \not\subseteq U$, כלומר T לא אינווריאנטי בU

מ.ש.ל.א.1.☺

ii. **צ"ל:** האם T אינווריאנטי כאשר $U = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

הוכחה:

כן! יהי $v \in U$, אזי $\exists a, b \in \mathbb{R}$ כך ש $v = a \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ אזי

$$T(v) = T\left(a \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}0\\a\\a+b\end{bmatrix}\right) = a \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \in U$$

לכן $T(U) \subseteq U$, כלומר T אינווריאנטי בU

מ.ש.ל.א.2.☺

iii. **צ"ל:** האם T אינווריאנטי כאשר $U = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

הוכחה:

לא! נשים לב כי $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \in U$ וגם $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \notin U$, לכן $T(U) \not\subseteq U$, כלומר T לא אינווריאנטי בU

מ.ש.ל.א.3.☺

(ב) **פתרון:**

i. **צ"ל:** האם T ציקלי כאשר $U = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

הוכחה:

לא! נשים לב כי בסעיף הקודם ראינו שמרחב זה אינו אינווראינטי וכל מרחב ציקלי הוא אינווראינטי,
לכן מרחב זה אינו ציקלי (אחרת בשלילה נקבל סתירה לסעיף א')

מ.ש.ל.ב.1.☺

ii. **צ"ל:** האם T אינווריאנטי כאשר $U=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

הוכחה:

כן! נבחר $v=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$,

$$Z(T,v)=\operatorname{span}\{v,T(v),T(T(v)),\dots\}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right),T\left(T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)\right),\dots\right\}$$
$$=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right),\dots\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right),\dots\right\}$$
$$=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\dots\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}=U$$
$$\Rightarrow\boxed{U=Z\left(T,\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)}$$

מ.ש.ל.ב.2.☺

iii. **צ"ל:** האם T אינווריאנטי כאשר $U=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

הוכחה:

לא! נשים לב כי בסעיף הקודם ראינו שמרחב זה אינו אינווראינטי וכל מרחב ציקלי הוא אינווראינטי,
לכן מרחב זה אינו ציקלי (אחרת בשלילה נקבל סתירה לסעיף א')

מ.ש.ל.ב.3.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** B כאשר $v=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

הוכחה:

$$U=Z(T,v)=\mathbf{span}\{v,T(v),T(T(v)),\dots\}=\mathbf{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right),T\left(T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)\right),\dots\right\}$$
$$=\mathbf{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right),\dots\right\}=\mathbf{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix},\dots\right\}=\mathbb{R}^3$$

עתה נחפש B כך ש $[f\mid_{\mathbb{R}^3}]_B^B=\begin{bmatrix}0&0&\alpha_1\\1&0&\alpha_2\\0&1&\alpha_3\end{bmatrix}$,

נבחר $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$ (ברור שהוא בסיס כי הוא סטנדרטי עד כדי סקלר)

נשים לב כי

$$T\left(b_1\right)=T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=b_2$$

$$T\left(b_2\right)=T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}=b_3$$

$$T\left(b_3\right)=T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}=-b_1$$

לכן $[f\mid_{\mathbb{R}^3}]_B^B=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$, כלומר $\boxed{B=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}}$ מקיים את הנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** B כאשר $v=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

הוכחה:

$$U=Z\left(T,v\right)=\operatorname{span}\left\{v,T\left(v\right),T\left(T\left(v\right)\right),\dots\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right),T\left(T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)\right),\dots\right\}$$

$$=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right),\dots\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\dots\right\}$$

$$\overset{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}}{=}\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

עתה נחפש B כך ש $[f\mid_{\mathbb{R}^3}]_B^B=\begin{bmatrix}0&\alpha_1\\1&\alpha_2\end{bmatrix}$ עבור $U=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

נבחר $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ (ברור שהוא בסיס כי הוקטורים בת"ל ופורשים)

נשים לב כי

$$T\left(b_1\right)=T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=b_2$$

$$T\left(b_2\right)=T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=\alpha_1\cdot b_1+\alpha_2\cdot b_2$$

לכן $\begin{bmatrix}0&\alpha_1\\1&\alpha_2\end{bmatrix}=[f\mid_{\mathbb{R}^3}]_B^B=[f\mid_{\mathbb{R}^3}]_B^B$, כלומר $\boxed{B=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}}$ מקיים את הנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $Y \subseteq U$ או $Y \subseteq W$

הוכחה:

מהיות $\dim Y = 1$, קיים בסיס שנסמנו בv ומתקיים $Y = \operatorname{span}\{v\}$,

$\exists u \in U, w \in W$ כך ש$v = u + w$,

בנוסף לכך Y אינווריאנטי ולכן $R_{U,W}(v) = u - w \in Y = \operatorname{span}\{v\}$

מהיות $u - w \in Y = \operatorname{span}\{v\}$, $\exists \alpha \in \mathbb{F}$ כך ש

$$u - w = \alpha \cdot v = \alpha \cdot (u + w) \Rightarrow (1-\alpha) \cdot u - (1+\alpha) \cdot w = 0$$

נשים לב כי $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, לכן $1 - \alpha \neq 0$ או $1 + \alpha \neq 0$,

- אם $1 - \alpha \neq 0$, נסמן $\beta = 1 - \alpha$ אזי

$$\beta \cdot u - (1+\alpha) \cdot w = 0 \Rightarrow u = \frac{1+\alpha}{\beta} \cdot w \in W$$

לכן $u \in U \cap W = \{0_V\}$, כלומר $u = 0_V$, כלומר $v = 0_V + w = w \in W$

- אם $1 + \alpha \neq 0$, נסמן $\beta = 1 + \alpha$ אזי

$$(1-\alpha) \cdot u - \beta \cdot w = 0 \Rightarrow w = \frac{1-\alpha}{\beta} \cdot u \in U$$

לכן $w \in U \cap W = \{0_V\}$, כלומר $u = 0_V$, כלומר $v = 0_V + u = u \in U$

כלומר הראנו כי $v \in U$ או $v \in W$ ולכן $Y = \operatorname{span}\{v\} \subseteq U$ או $Y = \operatorname{span}\{v\} \subseteq W$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\dim Z \leq 2$

הוכחה:

יהי $v \in V$ כך ש$Z = Z(R_{U,W}, v)$, לכן $\exists u \in U, w \in W$ כך ש$v = u + w$,

נוכיח באינדוקציה כי $R^{2i}_{U,W}(v) = u + w$, $R^{2i-1}_{U,W}(v) = u - w$

<u>בסיס:</u> $i = 1$, נציב

$$R^{2-1}_{U,W}(v) = R_{U,W}(v) = u - w$$
$$R^{2}_{U,W}(v) = R_{U,W}(R_{U,W}(v)) = R_{U,W}(u - w) = u + w$$

<u>שלב האינדוקציה:</u> נניח שהטענה נכונה לn ונראה שהיא נכונה ל$n+1$

$$R^{2n-1}_{U,W}(v) = R_{U,W}\left(R^{2(n-1)}_{U,W}(v)\right) = R_{U,W}(u + w) = u - w$$
$$R^{2n}_{U,W}(v) = R_{U,W}\left(R_{U,W}\left(R^{2(n-1)}_{U,W}(v)\right)\right) = R_{U,W}(R_{U,W}(u + w)) = R_{U,W}(u - w) = u + w$$

לכן

$$\begin{aligned} Z = Z(R_{U,W}, v) &= \operatorname{span}\left\{v, R_{U,W}(v), R^2_{U,W}(v), \dots\right\} \\ &= \operatorname{span}\{u + w, u - w, u + w, \dots\} = \operatorname{span}\{u - w, u + w\} \end{aligned}$$

לכן

$$\dim Z = \dim[\operatorname{span}\{u - w, u + w\}] \leq 2$$

מ.ש.ל.ב.☺

4. **צ"ל:** האם בהכרח $Y \subseteq U$ או $Y \subseteq W$?
הוכחה:
לא! נבחר $V = \mathbb{R}^2$, $U = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, $W = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $Y = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $T = Id$,
יהי Ω תת מרחב של V, יהי $\omega \in \Omega$ אזי $T(\omega) = \omega \in \Omega$, לכן Ω אינווראינטי לכל תת מרחב של V.
כלומר Y, U, W אינווריאנטים. נשים לב כי $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in Y$ וגם $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin U$ וגם $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$,
לכן $Y \nsubseteq U$ וגם $Y \nsubseteq W$

מ.ש.ל.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** האם בהכרח Y אינווריאנטי כאשר $\text{Im}T \subseteq Y$?
הוכחה:
כן! יהי $y \in Y$, אזי $T(y) \in \text{Im}T$, מהיות $\text{Im}T \subseteq Y$ נובע כי $T(y) \in Y$, לכן Y אינווריאנטי

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם בהכרח Y אינווריאנטי כאשר $\ker T \subseteq Y$?
הוכחה:
לא! נבחר $Y = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $V = \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$,
נשים לב כי $\ker T = \{0_V\} \subseteq Y$ וגם $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \notin Y$, כלומר T מקיים את הנדרש וY לא אינווראינטי כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** האם בהכרח Y אינווריאנטי כאשר $Y \subseteq \text{Im}T$?
הוכחה:
לא! נבחר $Y = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, $V = \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$,
נשים לב כי $Y \subseteq \text{Im}T = \mathbb{R}^2$ וגם $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin Y$, כלומר T מקיים את הנדרש וY לא אינווראינטי כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** האם בהכרח Y אינווריאנטי כאשר $Y \subseteq \ker T$?
הוכחה:
כן! יהי $y \in Y$, אזי $y \in \ker T$, לכן $T(y) = 0_V \in Y$, לכן Y אינווריאנטי

מ.ש.ל.ד.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** האם $\text{span}\{u, w\}$ הוא אינווראינטי?
הוכחה:
כן! יהי $v \in \text{span}\{u, w\}$, אזי $\exists a, b \in \mathbb{F}$ כך ש$v = a \cdot u + b \cdot w$, לכן

$$f(v) = f(a \cdot u + b \cdot w) = \underbrace{a \cdot f(u)}_{\in \text{span}\{w\}} + \underbrace{b \cdot f(w)}_{\in \text{span}\{u\}} \in \text{span}\{u\} + \text{span}\{w\} = \text{span}\{u, w\}$$

לכן $\text{span}\{u, w\}$ אינווריאנטי

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם $U+W$ הוא אינווראינטי?
הוכחה:
כן! יהי $v\in U+W$, אזי $\exists u\in U,w\in W$ כך ש$v=u+w$, אזי

$$f(v)=\underbrace{f(u)}_{\in U}+\underbrace{f(w)}_{\in W}\in U+W$$

לכן $U+W$ אינווריאנטי

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** האם $U+W$ הוא ציקלי?
הוכחה:
לא! נבחר $V=\mathbb{R}^2$, $U=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$, $W=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$, $T=0$,
נשים לב כי $U=Z\left(T,\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$, $W=Z\left(T,\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$,
וגם מתקיים כי $U+W=\mathbb{R}^2$, נניח בשלילה כי $U+W$ תת מרחב ציקלי אזי $\exists v\in V$ כך ש

$$U+W=Z(T,v)=\operatorname{span}\{v,0,0,0,\dots\}=\operatorname{span}\{v\}$$

אבל $\dim[U+W]=2\neq 1\geq \operatorname{span}\{v\}$, סתירה להנחה ולכן $U+W$ הוא לא ציקלי

מ.ש.ל.ג.☺

7. **צ"ל:** האם בהכרח $\exists W$ תת מרחב כך ש$U\oplus W=V$, W ציקלי?
הוכחה:
לא! נבחר $V=\mathbb{R}^2$, $U=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$, $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+y\\0\end{bmatrix}$,
יהי $u\in U=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$, אזי $\exists\alpha\in\mathbb{F}$ כך ש$u=\alpha\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,

$$T\left(\alpha\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\alpha\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\in U$$

לכן U אינווריאנטי.
יהי W תת מרחב של V כך ש$U\oplus W=V$.
מהיות $\dim W=2-1=1$, קיים בסיס לW ונסמנו ב $\begin{bmatrix}w_x\\w_y\end{bmatrix}=w\neq 0$. נניח בשלילה כי W אינווריאנטי אזי

$$T\left(\begin{bmatrix}w_x\\w_y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}w_x+w_y\\0\end{bmatrix}\in W$$

לכן $\exists\alpha\in\mathbb{F}$ כך ש

$$\begin{bmatrix}w_x\\w_y\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}w_x+w_y\\0\end{bmatrix}\Rightarrow w_x=\alpha(w_x+w_y),w_y=0\Rightarrow w_x=\alpha\cdot w_x\Rightarrow\alpha=1$$

כלומר $U=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}\ni\begin{bmatrix}w_x\\0\end{bmatrix}=w\neq 0$, כלומר $0\neq w\in U\cap W$ בסתירה לכך ש$U\cap W=\{0_V\}$,
לכן W אם $U\oplus W=V$ נובע כי W לא אינווריאנטי למקרה זה,
כלומר לא קיים תת מרחב W שמקיים $U\oplus W=V$ וגם W אינווריאנטי

מ.ש.ל.☺

8. **צ"ל:** $Z\left(T,v\right)$ לא נוצר סופית
הוכחה:
נבחר $V=\mathbb{F}\left[x\right]$, $T\left(v\right)=x\cdot v$,נראה תחילה כי T לינארי, יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, $v_1,v_2\in V$ אזי

$$T\left(\alpha v_1+\beta v_2\right)=\left(\alpha v_1+\beta v_2\right)\cdot x=\alpha\cdot\left(v_1\cdot x\right)+\beta\cdot\left(v_2\cdot x\right)=\alpha\cdot T\left(v_1\right)+\beta\cdot T\left(v_2\right)$$

עתה נשים לב כי

$$Z\left(T,1\right)=\operatorname{span}\left\{1,1\cdot x,1\cdot x\cdot x,\dots\right\}=\operatorname{span}\left\{1,x,x^2,x^3,\dots\right\}$$

בלינארית 1 ראינו כי $\operatorname{span}\left\{1,x,x^2,x^3,\dots\right\}$ לא נוצר סופית

מ.ש.ל.☺