פתרון תרגיל מספר 3 - מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

1 באפריל 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\Omega, |\Omega|$

הוכחה:

$$\Omega = \left\{ (B_1, B_2, B_3, B_4) \mid B_i \subseteq \{H, T, L, E\} \times \{1, \dots, 13\}\,; \bigcup_{i=1}^{4} B_i = \{H, T, L, E\} \times \{1, \dots, 13\}\,; |B_i| = 13 \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\Omega| = \binom{52}{13, 13, 13, 13}}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $|A_i|$, $\mathbb{P}(A_i)$

הוכחה:

תחילה נבחר את סוג הסריה של A_1, לכך יש $4 = \binom{4}{1}$.

בלי הגבלת הכלליות נניח כי הסוג הוא H, לאחר שבחרנו

$$\Rightarrow \boxed{|A_1| = \binom{4}{1} \cdot \binom{39}{13, 13, 13}} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{39}{13,13,13}}{\binom{52}{13,13,13,13}} = 4 \cdot \frac{39! \cdot 13!}{52!} = \frac{4}{\binom{52}{13}}$$

נשים לב ש $\boxed{\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{52}{13}}}$ כי אין חשיבות למי הוא A_1

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\mathbb{P}(A_i \cap A_j)$

הוכחה:

תחילה נבחר את סוג הסריה של A_1, לכך יש $\binom{4}{1}$.

בלי הגבלת הכלליות נניח כי הסוג הוא H, לאחר מכן נבחר את סוג הסריה של A_2, לכך יש $\binom{3}{1}$,

בלי הגבלת הכלליות נניח כי הסוג הוא T, לאחר שבחרנו

$$\Rightarrow \boxed{|A_1 \cap A_2| = \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{26}{13, 13}} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{26}{13,13}}{\binom{52}{13,13,13,13}}$$

נשים לב ש $\boxed{\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{26}{13,13}}{\binom{52}{13,13,13,13}}}$ כי אין חשיבות למי הוא A_1 ו־A_2

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right)$

הוכחה:

תחילה נבחר את סוג הסריה של A_1, לכך יש $\binom{4}{1}$.

בלי הגבלת הכלליות נניח כי הסוג הוא H, לאחר מכן נבחר את סוג הסריה של A_2, לכך יש $\binom{3}{1}$,

בלי הגבלת הכלליות נניח כי הסוג הוא T, לאחר מכן נבחר את סוג הסריה של A_3, לכך יש $\binom{2}{1}$,

בלי הגבלת הכלליות נניח כי הסוג הוא E, לאחר שבחרנו

$$\Rightarrow \boxed{\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right| = \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{13}{13}} \Rightarrow \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{52}{13,13,13,13}} = \frac{4!}{52!}$$

נשים לב ש $\boxed{\mathbb{P}\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) = \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) = \frac{4!}{52!}}$ כי אין חשיבות למי הוא A_1, A_2 וA_3

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right)$

הוכחה:

תחילה נבחר את סוג הסריה של A_1, לכך יש $\binom{4}{1}$.

בלי הגבלת הכלליות נניח כי הסוג הוא H, לאחר מכן נבחר את סוג הסריה של A_2, לכך יש $\binom{3}{1}$,

בלי הגבלת הכלליות נניח כי הסוג הוא T, לאחר מכן נבחר את סוג הסריה של A_3, לכך יש $\binom{2}{1}$,

בלי הגבלת הכלליות נניח כי הסוג הוא E, לאחר שבחרנו, נשאר לA_4 את הסוג L. לכן

$$\Rightarrow \boxed{\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right| = \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1}} \Rightarrow \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{52}{13,13,13,13}} = \frac{4!}{52!}$$

נשים לב ש $\boxed{\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right) = \frac{4!}{52!}}$

מ.ש.ל.ה.☺

(ו) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\right)$

הוכחה:

נשים לב שמנוסחת ההכלה וההדחה מתקיים

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\right) \\
&\quad = \binom{4}{1} \cdot \mathbb{P}\left(A_1\right) - \binom{4}{2} \cdot \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2\right) + \binom{4}{3} \cdot \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) - \binom{4}{4} \cdot \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right) \\
&\quad = 4 \cdot \frac{\binom{4}{1}}{\binom{52}{13}} - \binom{4}{2} \cdot \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{26}{13,13}}{\binom{52}{13,13,13,13}} + \binom{4}{3} \cdot \frac{4!}{52!} - \binom{4}{4} \cdot \frac{4!}{52!} \\
&\quad \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\right) = 4 \cdot \frac{\binom{4}{1}}{\binom{52}{13}} - \binom{4}{2} \cdot \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{26}{13,13}}{\binom{52}{13,13,13,13}} + \binom{4}{3} \cdot \frac{4!}{52!} - \binom{4}{4} \cdot \frac{4!}{52!}}
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ו.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** הסתברות לבחור 4 מתוך 10 זוגות נעליים כך שיהיה לפחות זוג נעליים אחד?

הוכחה:

Ω - כל האפשרויות לבחור 4 נעליים מתוך 20, לכן $|\Omega| = \binom{20}{4}$,

נגדיר A - כל האפשרויות לבחור 4 נעליים מתוך 10 זוגות כך שיהיה לפחות זוג נעליים אחד ונרצה לחשב $\mathbb{P}(A)$,

תחילה נחשב את $\mathbb{P}\left(A^C\right)$,
לנעל הראשונה יש 20 אפשרויות, לנעל השנייה יש 18 אפשרויות, לנעל השלישית יש 16 אפשרויות ולרביעית יש 14 אפשרויות. נשים לב שאין חשיבות לסדר ולכן נחלק את המכפלה ב!4 ונקבל $\left|A^C\right| = \frac{20\cdot18\cdot16\cdot14}{4!}$,
לכן

$$\mathbb{P}\left(A^C\right) = \frac{\frac{20\cdot18\cdot16\cdot14}{4!}}{\binom{20}{4}} = \frac{\frac{20\cdot18\cdot16\cdot14}{4!}}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{4!}} = \frac{20\cdot18\cdot16\cdot14}{20\cdot19\cdot18\cdot17} = \frac{14\cdot16}{17\cdot19}$$
$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A) = 1-\mathbb{P}\left(A^C\right) = 1-\frac{14\cdot16}{17\cdot19} \approx 0.3065015479876161}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** הסתברות ל3 ראשים ברצף?
הוכחה:
Ω - כל האפשרויות לזרוק 5 פעמים מטבע, לכן $|\Omega| = 2^5 = 32$,
A - כל האפשרויות להטיל מטבע 5 פעמים ולקבל רצף של 3 H, לכן

$$A = \{HHHHH, HHHHT, HHHTH, HHHTT, HTHHH, THHHH, THHHT, TTHHH\}$$
$$\Rightarrow |A| = 8 \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** הסתברות לא לבחור k סוגים?
הוכחה:
Ω - כל האפשרויות לבחור 5 קלפים , לכן $|\Omega| = \binom{52}{5}$,
A - כל האפשרויות לא לבחור k סוגים, נרצה לחשב את $|A|$,
נשים לב שמספר האפשרויות לבחור את הסוגים שלא מופיעים בA הוא $\binom{4}{k}$,
לאחר שבחרנו את הסוגים שלא מופיעים, נשאר לנו לבחור קלפים מ$52-k\cdot13$ (לא לבחור כאלה מהסוגים שבחרנו שלא יופיעו ויש 13 מכל סוג), ומספר אפשרויות זה הוא $\binom{52-13\cdot k}{5}$, לכן

$$|A| = \binom{4}{k}\cdot\binom{52-13\cdot k}{5} \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{k}\cdot\binom{52-13\cdot k}{5}}{\binom{52}{5}}}$$

מ.ש.ל.ג.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $A\subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A\mid B)$
הוכחה:

$$\mathbb{P}(A\mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \overset{\mathbb{P}(B)\leq1}{\geq} \frac{\mathbb{P}(A)}{1} = \mathbb{P}(A)$$
$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A\mid B)}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $B \subseteq A \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \mid B)$
הוכחה:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$
$$\Rightarrow 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A) \leq 1 = \mathbb{P}(A \mid B)}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $A \cap B = \emptyset \not\Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \mid B)$
הוכחה:
לא נכון! נבחר $\Omega = \{H, T\}$ (הטלת מטבע הוגן), $A = \{H\}$, $B = \{T\}$ אזי

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B); \mathbb{P}(A \cap B) = 0$$
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0}{\mathbb{P}(B)} = 0$$
$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \not\leq 0 = \mathbb{P}(A \mid B)$$
$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A) \not\leq \mathbb{P}(A \mid B)}$$

מ.ש.ל.ג.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** מה ההסתברות שקיבלנו HHT?
הוכחה:
Ω - כל האפשרויות לזרוק 6 פעמים מטבע, לכן $|\Omega| = 2^6 = 64$,
A - כל האפשרויות להטיל מטבע 6 פעמים ולקבל רצף של HHT, נחשב את $|A|$
נחשב את מספר האפשרויות שבמקומות $i, i+1, i+2$ מופיע הרצף HHT, לכך יש 2^3 אפשרויות (כל השאר יכולים להיות H או T).
ומכיוון שיש לנו 4 אפשרויות למיקום הרצף HHT, נקבל שמספר האפשרויות $4 \cdot 8 = 32$,
אך הרצף $HHTHHT$ נספר פעמיים עבור $i = 1, 4$ לכן מספר האפשרויות הכולל הוא 31, לכן $|A| = 31$,
לכן

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{31}{64}}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** מה ההסתברות שקיבלנו $TTTT$ בהנחה והתקבל הרצף HHT?
הוכחה:
ראינו בסעיף א' כי יש 31 אפשרויות לקבל את הרצף HHT,
נגדיר Ω - כל האפשרויות להטיל מטבע 6 פעמים ולקבל רצף של HHT, לכן $|\Omega| = 31$,
נגדיר A - כל האפשרויות להטיל מטבע 6 פעמים ולקבל רצף של HHT וגם $TTTT$.
נשים לב שהרצף היחיד שכיל גם את HHT וגם את $TTTT$ הוא הרצף $HHTTTT$, לכן $|A| = 1$.

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{31}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** מה ההסתברות שקיבלנו HHT בהנחה והתקבל הרצף $TTTT$?
הוכחה:
נגדיר Ω - כל האפשרויות להטיל מטבע 6 פעמים ולקבל רצף של $TTTT$, נחשב את $|\Omega|$,
נשים לב כי

$$\Omega = \{HHTTTT, HTTTTH, HTTTTT, THTTTT, TTTTHH, TTTTHT, TTTTTH, TTTTTT\}$$
$$\Rightarrow |\Omega| = 8$$

נגדיר A - כל האפשרויות להטיל מטבע 6 פעמים ולקבל רצף של HHT וגם $TTTT$.
נשים לב שהרצף היחיד שכיל גם את HHT וגם את $TTTT$ הוא הרצף $HHTTTT$, לכן $|A| = 1$.

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{8}}$$

מ.ש.ל.ג.☺

5. **צ"ל:** מה ההסתברות שהמכונית שהעד ראה הייתה כחולה?
הוכחה:
נחשב נסמן בA את המאורעות בהן המכונית הייתה כחולה, ובB את העד אומר שהמכונית היא כחולה אזי

$$\mathbb{P}(B \mid A) = 0.8; \mathbb{P}\left(B \mid A^C\right) = 0.2$$

עתה מהיות $A \cup A^C = \Omega$, $A \cap A^C = \emptyset$ מתקיים ממשפט שהוכח בהרצאה כי

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B \mid A^C\right) \cdot \mathbb{P}\left(A^C\right) = 0.8 \cdot 0.15 + 0.2 \cdot 0.85$$

עתה ממשפט בייס מתקיים

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.8 \cdot 0.15}{0.8 \cdot 0.15 + 0.2 \cdot 0.85} \approx 0.4137931034482758$$

נשים לב כי $\mathbb{P}(A \mid B)$ זאת ההסתברות שרצינו, מה הסיכוי שהמכונית שהעד ראה הייתה כחולה והסתברות זאת היא

$$\boxed{\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{0.8 \cdot 0.15}{0.8 \cdot 0.15 + 0.2 \cdot 0.85} \approx 0.4137931034482758}$$

מ.ש.ל.☺