פתרון תרגיל מספר 7 - אינפי 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

12 בדצמבר 2018

1. **צ"ל:** קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים

(א) **צ"ל:** $\sum a_n$ מתכנס לא גורר כי $\sum a_n^2$ מתכנס

הוכחה:

נבחר $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$, נשים לב כי $\frac{1}{\sqrt{n}}$ מונוטונית יורדת במובן החזק ו-$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,
לכן מקריטריון לייבניץ מתקיים כי $\sum a_n = \sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ מתכנס,
נשים לב כי

$$a_n \cdot a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$$

לכן $\sum a_n^2 = \sum \frac{1}{n}$ מתבדר (ראינו בהרצאה שהטור ההרמוני מתבדר),
לכן התכנסות $\sum a_n$ לא גוררת את ההתכנסות של $\sum a_n^2$,
נראה כי הטענה נכונה עבור טור חיובי a_n, מהיות $\sum a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
ולכן $a_n < 1$ כמעט תמיד ולכן $0 < a_n^2 < a_n \cdot 1 = a_n$ כמעט תמיד,
ולכן ממשפט ההשוואה מתקיים כי $\sum a_n^2$ מתכנס כי $\sum a_n$ מתכנס

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים לא גורר כי $\sum a_n \cdot b_n$ מתכנס

הוכחה:

נבחר $a_n = b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$, נשים לב כי $\frac{1}{\sqrt{n}}$ מונוטונית יורדת במובן החזק ו-$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,
לכן מקריטריון לייבניץ מתקיים כי $\sum a_n = \sum b_n = \sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ מתכנס,
נשים לב כי

$$a_n \cdot b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$$

לכן $\sum a_n \cdot b_n = \sum \frac{1}{n}$ מתבדר (ראינו בהרצאה שהטור ההרמוני מתבדר),
לכן התכנסות $\sum a_n, \sum b_n$ לא גוררת את ההתכנסות של $\sum a_n \cdot b_n$,
נראה כי הטענה נכונה עבור טורים חיוביים a_n, b_n, מהיות $\sum a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
ולכן $a_n < 1$ כמעט תמיד ולכן $0 < a_n \cdot b_n < b_n \cdot 1 = b_n$ כמעט תמיד,
ולכן ממשפט ההשוואה מתקיים כי $\sum a_n \cdot b_n$ מתכנס כי $\sum b_n$ מתכנס

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\sum a_n^2$ מתכנס לא גורר כי $\sum a_n$ מתכנס

הוכחה:

נבחר $a_n = \frac{1}{n}$,
נשים לב כי $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$ מתבדר (ראינו בהרצאה שהטור ההרמוני מתבדר),
וגם $\sum a_n^2 = \sum \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס כי $2 > 1$
לכן התכנסות $\sum a_n^2$ לא גוררת את ההתכנסות של $\sum a_n$,
נשים לב שבחרנו a_n טור חיובי וראינו שהטענה לא נכונה, ולכן הטענה לא נכונה בהכרח לטורים חיוביים

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\sum |a_n|$ מתכנס גורר כי $\sum a_n$ מתכנס

הוכחה:

נשים לב כי $\sum |a_n|$ מתכנס, על כן הוא מקיים את קריטריון קושי להתכנסות,

לכן, $\forall \varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n, m \in \mathbb{N}$ וגם $N \leq n \leq m$ מתקיים $|a_n| + \dots |a_m| \leq \varepsilon$

יהי $\varepsilon > 0$, לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n, m \in \mathbb{N}$ וגם $N \leq n \leq m$ מתקיים $|a_n| + \dots |a_m| \leq \varepsilon$

נשים לב כי

$$|a_n + \dots + a_m| \leq |a_n| + \dots + |a_m| \leq \varepsilon$$

כלומר $\sum a_n$ מקיים את קריטריון קושי להתכנסות ולכן $\sum a_n$ מתכנס

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** $\sum a_n$ מתכנס לא גורר כי $\sum a_{2n}$ מתכנס

הוכחה:

נבחר $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, נשים לב כי $\frac{1}{n}$ מונוטונית יורדת במובן החזק ו$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

לכן מקריטריון לייבניץ מתקיים כי $\sum a_n = \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ מתכנס,

נשים לב כי

$$a_{2n} = (-1)^{2n+1} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

לכן $\sum \frac{1}{n} \frac{-1}{2} = \sum \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{n} = \sum a_n$ מתבדר (ראינו בהרצאה שהטור ההרמוני מתבדר),

לכן התכנסות $\sum a_n$ לא גוררת את ההתכנסות של $\sum a_{2n}$,

נראה כי הטענה נכונה עבור טור חיובי a_n, מהיות $\sum a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ מתכנס,

לכן ממשפט הירושה מתקיים $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$ מתכנס, ולכן $\sum a_{2n}$ מתכנס

מ.ש.ל.ה.☺

(ו) **צ"ל:** $\sum |a_n|$ מתכנס גורר כי $\sum a_{2n}$ מתכנס

הוכחה:

נשים לב כי $\sum |a_n|$ מתכנס, על כן הוא מקיים את קריטריון קושי להתכנסות,

לכן, $\forall \varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n, m \in \mathbb{N}$ וגם $N \leq n \leq m$ מתקיים $|a_n| + \dots |a_m| \leq \varepsilon$

יהי $\varepsilon > 0$, לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n, m \in \mathbb{N}$ וגם $N \leq n \leq m$ מתקיים $|a_{2\cdot n}| + \dots |a_{2\cdot m}| \leq \varepsilon$

נשים לב כי

$$\left|a_{2\cdot n} + a_{2\cdot(n+1)} + \dots + a_{2\cdot m}\right| \leq |a_{2\cdot n}| + \left|a_{2\cdot(n+1)}\right| + \dots + |a_{2\cdot m}| \leq \sum_{k=2\cdot n}^{2\cdot m} |a_k| \leq \varepsilon$$

כלומר $\sum a_{2n}$ מקיים את קריטריון קושי להתכנסות ולכן $\sum a_{2n}$ מתכנס

מ.ש.ל.ו.☺

(ז) **צ"ל:** $\sum a_{2n}, \sum a_{2n-1}$ מתכנסים גורר כי $\sum a_{2n}$ מתכנס

הוכחה:

נסמן $b_n = \begin{cases} a_n & n \equiv 1 \mod 2 \\ 0 & n = 0 \mod 2 \end{cases}$ ו $c_n = \begin{cases} 0 & n \equiv 1 \mod 2 \\ a_n & n = 0 \mod 2 \end{cases}$,

נשים לב כי $\sum c_n = \sum a_{2n}; \sum b_n = \sum a_{2n-1}$,

לכן $\sum b_n, c_n$ מתכנסים, נשים לב כי $a_n = b_n + c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

לכן

$$\sum a_n = \sum (b_n + c_n) = \sum b_n + \sum c_n$$

לכן מתכונת הלינאריות של טורים ומהיות $\sum b_n, c_n$ מתכנסים נובע כי $\sum a_n$ מתכנס

מ.ש.ל.ז.☺

2. **הוכחה:** קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או לא מתכנסים

(א) **צ"ל:** $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6^n}\right)$

הוכחה:

נשים לב כי $0 \geq \frac{\pi}{6^n} \geq \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ולכן $0 \geq \tan\left(\frac{\pi}{6^n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

לכן $0 \geq 5^n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6^n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ולכן הטור שאנחנו חוקרים הינו טור חיובי!

נרצה להראות כי $\tan\left(\frac{\pi}{6^n}\right) < 2 \cdot \frac{\pi}{6^n}$ כמעט תמיד

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{6^n}\right)}{2 \cdot \frac{\pi}{6^n}} \overset{\text{heine}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\tan(x)}{2 \cdot x} \overset{L\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{2} = \frac{1}{2}$$

מהיות $\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{6^n}\right)}{2 \cdot \frac{\pi}{6^n}} = \frac{1}{2}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n \in \mathbb{N} \geq N$ מתקיים

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{6^n}\right)}{2 \cdot \frac{\pi}{6^n}} < 1 \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6^n}\right) < 2 \cdot \frac{\pi}{6^n}$$
$$\Rightarrow 5^n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6^n}\right) < 5^n \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{6^n} = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

לכן

$$N \leq \forall n \in \mathbb{N};\ 0 \leq 5^n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6^n}\right) < 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

נשים לב כי $\sum \left(\frac{5}{6}\right)^n$ הוא טור הנדסי מתכנס, ומכך ש$\sum 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$ מתכנס מתכונת הלינאריות

לכן ממבחן ההשוואה לטורים מתכנסים מתקיים כי $\sum 5^n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6^n}\right)$ מתכנס,

וגם $\sum \left|5^n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6^n}\right)\right| = \sum 5^n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6^n}\right)$ מתכנס,

לכן $\sum 5^n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6^n}\right)$ מתכנס בהחלט

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2(n)}$

הוכחה:

נשים לב כי $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, כי $\cos\left(\frac{1}{n}\right) > 0$,

לכן $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2(n)}$ הוא טור חיובי,

נשים לב כי $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ היא עולה עבור $2 \leq n \in \mathbb{N}$,

לכן $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2(n)} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln^2(n)} = \cos\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(n)}$,

מאינפי 1 אנחנו יודעים כי $n < e^{\sqrt{n}}$ כמעט תמיד, כי $\ln(n) < \ln\left(e^{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}$ כמעט תמיד,

לכן $\frac{1}{\ln(n)} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ כמעט תמיד, ולכן $\frac{1}{\ln^2(n)} < \frac{1}{n}$ כמעט תמיד,

לכן

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2(n)} \geq \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln^2(n)} \geq \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\right)}{n} = \cos\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

לכן ממבחן ההשוואה נובע כי $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2(n)}$ מתבדר כי הטור ההרמוני מתבדר ולכן $\sum \cos\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{n}$ מתבדר,

לכן $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2(n)}$ מתבדר

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n\cdot\sqrt[3]{n+1}}$
הוכחה:
נשים לב כי

$$0\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n\cdot\sqrt[3]{n+1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n+1}}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

לכן ממבחן ההשוואה, מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n\cdot\sqrt[3]{n+1}}\right|$ מתכנס,

כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n\cdot\sqrt[3]{n+1}}$ מתכנס בהחלט, ולכן גם מתכנס

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}}{\sqrt{n}}$
הוכחה:
נסתכל על הטור $\frac{1}{\sqrt{n}}$, נגדיר a_n על ידי הכנסת סוגריים באופן הבא:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{m-1}}\right)}_{a_1}+\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{m}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2\cdot m-1}}\right)}_{a_2}+\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2m}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{3\cdot m-1}}\right)}_{a_3}+\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3\cdot m}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4\cdot m-1}}\right)}_{a_4}+\ldots$$

נשים לב כי

$$2\leq\forall n\in\mathbb{N}\,;\,0\leq a_n\leq\frac{m}{\sqrt{m\cdot(n-1)}}$$

לכן ממשפט סנדוויץ' מתקיים כי $\lim_{n\to\infty}a_n=0$,
עתה נרצה להראות כי a_n מונוטונית יורדת,
מהיות $\frac{1}{\sqrt{n}}$ מונוטונית יורדת, וכל הכנסות הסוגריים הם באותו הגודל (לא כולל הb_1),
נסיק כי a_n מונוטונית יורדת $2\leq\forall n\in\mathbb{N}$,
מכיוון שתנאי משפט לייבניץ מתקיימים עבור a_n (מ$n=2$) נסיק כי $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס,
נשים לב כי $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}}{\sqrt{n}}$,
לכן ממשפט הזנבות נובע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}}{\sqrt{n}}$ מתכנס כי הזנב הm שלו מתכנס,
נשים לב כי $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ לא מתכנס כי $\frac{1}{2}\leq 1$,
לכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}}{\sqrt{n}}$ מתכנס בתנאי

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$
הוכחה:
נשים לב כי $\frac{\pi}{2}\geq\frac{1}{n}\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$
ולכן $0<\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, כלומר הטור הינו חיובי!
נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}}{\frac{1}{n\cdot\ln(n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot n\cdot\ln(n)}{\ln(n)}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot n\overset{t=\frac{1}{n}}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(t)}{t}\overset{\star}{=}1$$

לכן ממבחן ההשוואה הגבולי $\sum \frac{1}{n\cdot\ln(n)}$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$ מתכנס,
ראינו בתרגול שהטור $\sum \frac{1}{n^{\alpha}\cdot\ln^{\beta}(n)}$ מתבדר כאשר $\alpha=\beta=1$ ומתקיים $\sum \frac{1}{n\cdot\ln(n)}=\sum \frac{1}{n^{\alpha}\cdot\ln^{\beta}(n)}$,
לכן $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$ מתבדר

מ.ש.ל.ה.☺

(ו) **צ"ל:** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2(n)}$
הוכחה:
נשים לב כי $\forall n\in\mathbb{N}$,$0\le\frac{1}{n}\le\frac{\pi}{2}$
ולכן $\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2(n)}>0$,$\forall n\in\mathbb{N}$, כלומר הטור הינו חיובי!
נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2(n)}}{\frac{1}{n\cdot\ln^2(n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot n\cdot\ln^2(n)}{\ln^2(n)}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot n\overset{t=\frac{1}{n}}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(t)}{t}\overset{\star}{=}1$$

לכן ממבחן ההשוואה הגבולי $\sum \frac{1}{n\cdot\ln^2(n)}$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$ מתכנס,
ראינו בתרגול שהטור $\sum \frac{1}{n^{\alpha}\cdot\ln^{\beta}(n)}$ מתכנס כאשר $\alpha=1$, $\beta>1$ ומתקיים $\sum \frac{1}{n\cdot\ln^2(n)}=\sum \frac{1}{n^{\alpha}\cdot\ln^{\beta}(n)}$,
לכן $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$ מתכנס, וגם $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$ ולכן הטור מתכנס בהחלט

מ.ש.ל.ו.☺

(ז) **צ"ל:** $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}$
הוכחה:
נשים לב כי

$$\left|(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}\right|=\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}\ge\frac{1}{\ln(n)}\ge\frac{1}{n}$$

לכן מבחן ההשוואה מתקיים כי $\sum_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}\right|$ לא מתכנס כי הטור ההרמוני לא מתכנס.
עתה נרצה להראות כי $a_n=\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}$ מונטונית יורדת ושואפת ל0,
נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}=\frac{1}{\infty}=0$$

עתה נראה כי a_n מונוטונית יורדת,

$$a_n\ge a_{n+1}\Leftrightarrow\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}\ge\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\ln(n+1)}\Leftrightarrow\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}-\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\ln(n+1)}\ge 0$$

נרצה להראות כי $\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\ge 0$ כמעט תמיד,
נגדיר $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, נשים לב כי $f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\cdot\ln(x)+\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(\ln(x)-1)$,
וגם $f'(x)<0$, $4<\forall x\in\mathbb{R}$ ולכן f פונקציה יורדת,
ולכן $f(n)-f(n+1)=\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\ge 0$ מתקיים $5\le\forall n\in\mathbb{N}$,
לכן

$$\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}-\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\ln(n+1)}=\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}-\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\ln(n)}>0$$

ולכן מכך ש$\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}-\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\ln(n+1)}\ge 0\Leftrightarrow a_n\ge a_{n+1}$ נובע כי a_n מונוטונית יורדת,
לכן ממשפט לייבניץ מתקיים כי $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}$ מתכנס,
לכן $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}$ מתכנס בתנאי

מ.ש.ל.ז.☺

(ח) **צ"ל:** $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\ldots$

הוכחה:

נשים לב כי $\sum\frac{1}{n}=\sum|a_n|$ מתבדר, כלומר a_n לא מתכנסת בהחלט,

נסתכל על הטור $\frac{1}{n}$, נגדיר b_n על ידי הכנסת סוגריים באופן הבא: $b_n=\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n-1}$

נשים לב כי מתקיים כי $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n-1}\right]=0$,

עתה נרצה להראות כי b_n מונוטונית יורדת,

$$\begin{aligned}b_n-b_{n+1}&=\left(\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n-1}\right)-\left(\frac{1}{2\cdot n+2}+\frac{1}{2\cdot n+2-1}\right)\\&\geq\left(\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n-1}\right)-\left(\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n-1}\right)=0\end{aligned}$$

כלומר b_n מונוטונית יורדת,

מכיוון שתנאי משפט לייבניץ מתקיימים עבור b_n נסיק כי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ מתכנס,

נשים לב כי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\ldots$,

לכן $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\ldots$ טור מתכנס בתנאי

מ.ש.ל.ח.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $n\cdot\ln(n)-n+1\leq\ln(n!)\leq(n+1)\ln(n+1)-n$

הוכחה:

נשים לב כי $\sum_{i=1}^{n}\ln(n)=\ln(n!)$, וראינו בתרגיל 4 כי $\int\ln(x)\,dx=x\cdot(\ln(x)-1)$,

כחלק ממבחן האינטגרל, קיבלנו בהוכחה את האי שוויון הבא לf מונוטונית:

$$\int_1^n f(x)\,dx\leq\sum_{i=1}^{n}f(n)\leq f(1)+\int_1^{n+1}f(x)\,dx$$

נבחר $f(x)=\ln(x)$, נשים לב כי f מוטונית וחיובית,

לכן

$$\begin{aligned}&\int_1^n\ln(x)\,dx\leq\sum_{i=1}^{n}\ln(n)\leq\ln(1)+\int_1^{n+1}\ln(x)\,dx\\&\Rightarrow x\cdot(\ln(x)-1)\,|_1^n\leq\ln(n!)\leq x\cdot(\ln(x)-1)\,|_1^{n+1}\end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned}x\cdot(\ln(x)-1)\,|_1^n&=n\cdot(\ln(n)-1)-[1\cdot(\ln(1)-1)]\\&=n\cdot\ln(n)-n+1\\x\cdot(\ln(x)-1)\,|_1^{n+1}&=(n+1)\cdot(\ln(n)-1)-[1\cdot(\ln(1)-1)]\\&=(n+1)\cdot\ln(n)-(n+1)+1=(n+1)\cdot\ln(n)-n\end{aligned}$$

נציב את החישובים באי שוויון ונקבל

$$n\cdot\ln(n)-n+1\leq\ln(n!)\leq(n+1)\ln(n+1)-n$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le e\cdot\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$

הוכחה:

נסתכל על הנוסחא שהוכחנו בסעיף א ונראה שהיא נכונה אם"ם הנוסחא שאנחנו רוצים להוכיח נכונה,
ובכך נסיים את ההוכחה

$$\begin{aligned}
& n\cdot\ln(n)-n+1 \le \ln(n!) \le (n+1)\ln(n+1)-n \\
& \Leftrightarrow e^{n\cdot\ln(n)-n+1} \le n! \le e^{(n+1)\ln(n+1)-n} \\
& \Leftrightarrow e^{\ln(n^n)-n}\cdot e \le n! \le e^{\ln\left((n+1)^{n+1}\right)-n-1}\cdot e \\
& \Leftrightarrow \frac{e^{\ln(n^n)}}{e^n}\cdot e \le n! \le \frac{e^{\ln\left((n+1)^{n+1}\right)}}{e^{n+1}}\cdot e \\
& \Leftrightarrow \frac{n^n}{e^n}\cdot e \le n! \le \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}\cdot e \\
& \Leftrightarrow e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le e\cdot\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ב.☺

4. **צ"ל:** a_n, b_n כך ש$\sum a_n$ מתכנס, $\sum b_n$ לא מתכנס ו$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$

הוכחה:

נבחר $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$, ראינו בתרגיל בשאלה 1 סעיף א כי $\sum a_n$ מתכנס ו$a_n\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$,
נבחר $b_n=a_n+\frac{1}{n}$, נשים לב כי

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}{(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{\frac{1}{n}}{(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{\frac{1}{n}}{(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]=1
\end{aligned}$$

נניח בשלילה ש$\sum b_n$ מתכנס,
לכן מתכונת הלינאריות מתקיים כי $\sum b_n - \sum a_n = \sum[b_n-a_n] = \sum\frac{1}{n}$ מתכנס כי $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים,
סתירה לכך שהטור ההרמוני לא מתכנס,
לכן $\sum b_n$ מתבדר

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:** $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\dots$ מתכנס

הוכחה:

נשים לב כי $\sum|a_n|=\sum\frac{1}{n}$ מתבדר, כלומר b_n לא מתכנסת בהחלט,
נסתכל על הטור $\frac{1}{n}$, נגדיר a_n על ידי הכנסת סוגריים באופן הבא:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{1}\right)}_{b_1}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}_{b_2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)}_{b_3}+\underbrace{\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)}_{b_4}+\dots$$

נשים לב כי הנוסחא המתקבלת היא $b_n=\frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}+1}+\dots+\frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}+n}=\frac{2}{n^2-n+2}+\dots+\frac{2}{n^2+n}$

נשים לב כי $0\le b_n\le\frac{2n}{n^2-n+2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$,

לכן ממשפט סנדוויץ' מתקיים כי $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ כי $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2-n+2}=0$,

נרצה להראות כי b_n מונוטונית יורדת ממקום מסוים,

$$\begin{aligned}
b_n - b_{n+1} = & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}+k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}+k} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}+k} - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}+k} \right] - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}+n+1} \\
= & \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}+k\right) - \left(\frac{n(n-1)}{2}+k\right)}{\left(\frac{n(n-1)}{2}+k\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}+k\right)} \right] - \frac{1}{(n+1)\left(1+\frac{n}{2}\right)} \\
= & \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{\left(\frac{n(n-1)}{2}+k\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}+k\right)} \right] - \frac{1}{(n+1)\left(1+\frac{n}{2}\right)} \\
\geq & \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{\left(\frac{n(n-1)}{2}+n\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)} \right] - \frac{1}{(n+1)\left(1+\frac{n}{2}\right)} \\
= & \frac{n^2}{\left(\frac{n(n-1)}{2}+n\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)} - \frac{1}{(n+1)\left(1+\frac{n}{2}\right)}
\end{aligned}$$

נשים לב כי ממונוטוניות הגבול מתקיים

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^2(b_n - b_{n+1}) \geq & \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{n^2}{\left(\frac{n(n-1)}{2}+n\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)} - \frac{1}{(n+1)\left(1+\frac{n}{2}\right)} \right) \\
= & \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4}{n^2 \cdot \left(\frac{(n-1)}{2}+1\right)\left(\frac{(n+1)}{2}+1\right)} - \frac{n^2}{(n+1)\left(1+\frac{n}{2}\right)} \right) \\
= & \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4}{\frac{1}{4}n^4 + n^3 + \frac{3}{4}n^2} - \frac{n^2}{\frac{1}{2}n^2 + \left(\frac{3}{2}\right)n + 1} \right) = 4 - 2 = 2
\end{aligned}$$

לכן $n^2\left(b_n - b_{n+1}\right) > 0$ כמעט תמיד ולכן $b_n - b_{n+1} > 0$ כמעט תמיד,
כלומר $b_n > b_{n+1}$ מתקיים כמעט תמיד, כלומר $\exists N \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n \in \mathbb{N} \geq N$ מתקיים $b_n > b_{n+1}$
לכן ממשפט לייבניץ לb_n מתקיים $\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ מתכנס,
לכן ממשפט הזנבות מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ מתכנס,
נשים לב כי $\sum (-1)^{n+1} b_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \ldots$ מתכנס

מ.ש.ל.☺