פתרון תרגיל מספר 14 ־ לינארית 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

21 ביוני 2019

1. **צ"ל:** T צמוד לעצמו וO
הוכחה:
נשים לב כי

$$A^* = \overline{A^t} = \overline{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^t} = \overline{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

כלומר $T^* = T$, (כי $[T^*]_E^E = [T]_E^E$ וE בסיס או"נ) כלומר T צמוד לעצמו,
עתה נחפש O אורתוגונלית כך ש$O^{-1}AO$ אלכסונית, תחילה נמצא ערכים עצמיים

$$\begin{aligned}\det(\lambda \cdot I - A) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) \overset{R_1 \to R_1 + R_2 + R_3}{=} \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) \underset{R_2 \to R_2 - R_1}{\overset{R_3 \to R_3 - R_1}{=}} \lambda \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda \cdot (\lambda-3)^2\end{aligned}$$

לכן $\lambda = 0, 3$ הם ערכים עצמיים, נתחיל עם $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}V_0 &= \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} 2x = y + z \\ 2y = x + z \\ 2z = x + y \end{matrix}\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x = y = z\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\end{aligned}$$

ולכן בסיס או"נ של V_0 הוא

$$\boxed{b_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

עתה נסתכל על $\lambda = 3$,

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} 2x - y - z = 3x \\ -x + 2y - z = 3y \\ -x - y + 2z = 3z \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid -x - y - z = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x = -(y+z) \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

כלומר $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ בסיס לV_3, עתה ננרמל אותו

$$\boxed{b_2 = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{b_3 = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}{\left\| \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

כלומר $\boxed{O = [b_1, b_2, b_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}$ מקיימת $O^{-1}AO = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ וגם O אורתוגונלית

מ.ש.ל.☺

2. **צ"ל:** T אוניטרית וU

הוכחה:

נשים לב כי

$$\left([T^*]_E^E\right) \cdot \left([T]_E^E\right) = \left(\overline{\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}}^t \right) \cdot \left(\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{-i}{3} \\ \frac{-i}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{8}{9} + \frac{1}{9} & \frac{2\sqrt{2}i}{3} - \frac{2\sqrt{2}i}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}i}{3} - \frac{2\sqrt{2}i}{3} & \frac{8}{9} + \frac{1}{9} \end{bmatrix} = I_2$$

לכן T אוניטרית מההגדרה, עתה נמצא את U,

$$\det(\lambda \cdot I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{i}{3} \\ -\frac{i}{3} & \lambda - \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \right) = \left(\lambda - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 + \frac{1}{9} = \lambda^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \lambda + \frac{8}{9} + \frac{1}{9}$$
$$= \lambda^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \lambda + 1$$

לכן מנוסחת השורשים מתקיים $\lambda = \frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}+i\right), \frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}-i\right)$, נתחיל עם $\lambda = \frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}+i\right)$,

$$V_{\frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}+i\right)} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid A\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}+i\right)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} \frac{2\sqrt{2}}{3}x+\frac{i}{3}y = \left(\frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}+i\right)\right)\cdot x \\ \frac{i}{3}x+\frac{2\sqrt{2}}{3}y = \left(\frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}+i\right)\right)\cdot y \end{array}\right\}$$
$$= \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x = y\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

לכן

$$\boxed{b_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

עתה נעבוד עם $\lambda = \cdot\left(2\sqrt{2}-i\right)$

$$V_{\frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}-i\right)} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid A\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}-i\right)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} \frac{2\sqrt{2}}{3}x+\frac{i}{3}y = \left(\frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}-i\right)\right)\cdot x \\ \frac{i}{3}x+\frac{2\sqrt{2}}{3}y = \left(\frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}-i\right)\right)\cdot y \end{array}\right\}$$
$$= \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x = -y\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

לכן

$$\boxed{b_2 = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

כלומר $\boxed{U = [b_1, b_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}$ מקיימת $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}+i\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}-i\right) \end{bmatrix}$ וגם U אוניטרית

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** T אוניטרית ו-U
הוכחה:
נשים לב כי

$$\left([T^*]_E^E\right)\cdot\left([T]_E^E\right) = \left(\overline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^t\right)\cdot\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

לכן T אוניטרית מההגדרה, עתה נמצא את U,

$$\det\left(\lambda\cdot I - A\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-\frac{1-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \left(\lambda - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\cdot\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \left(\lambda - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\cdot(\lambda - i)\cdot(\lambda + i)$$

לכן מנוסחת השורשים מתקיים $\lambda = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, i, -i$, נתחיל עם $\lambda = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$,

$$V_{\frac{1-i}{\sqrt{2}}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} -z = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot x \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot y = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot y \\ x = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot z \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} -z = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot z \right) \\ x = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot z \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x = z = 0 \right\} = \operatorname{span}\{e_2\}$$

לכן

$$\boxed{b_1 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = e_2}$$

עתה נעבוד עם $\lambda = i$,

$$V_i = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = i \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} -z = i \cdot x \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot y = i \cdot y \\ x = i \cdot z \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} -z = i \cdot (i \cdot z) \\ x = i \cdot z \\ y = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} x = i \cdot z \\ y = 0 \end{matrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

לכן

$$\boxed{b_2 = \frac{\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

עתה נעבוד עם $\lambda = -i$,

$$V_i = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -i \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} -z = -i \cdot x \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot y = -i \cdot y \\ x = -i \cdot z \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} -z = -i \cdot (-i \cdot z) \\ x = -i \cdot z \\ y = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} x = -i \cdot z \\ y = 0 \end{matrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

לכן

$$\boxed{b_3 = \frac{\begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

כלומר $\boxed{U = [b_1, b_2, b_3] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i & -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}$ מקיימת $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot \left(2\sqrt{2} + i\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \cdot \left(2\sqrt{2} - i\right) \end{bmatrix}$ וגם U אוניטרית

מ.ש.ל.☺

4. **צ"ל:** $\langle T(v), w\rangle = 0$, $T(v) = 0$
הוכחה:
יהיו $v, w \in V$ אזי נשים לב כי

$$0 = \langle T(v+w) \mid v+w\rangle = \langle T(v) \mid v\rangle + \langle T(v) \mid w\rangle + \langle T(w) \mid v\rangle + \langle T(w) \mid w\rangle = \langle T(v) \mid w\rangle + \langle T(w) \mid v\rangle$$

וגם

$$0 = \langle T(v+iw) \mid v+iw\rangle = \langle T(v) \mid v\rangle + \langle T(v) \mid iw\rangle + \langle T(iw) \mid v\rangle + \langle T(iw) \mid iw\rangle = i\left(\langle T(v) \mid w\rangle - \langle T(w) \mid v\rangle\right)$$

קיבלנו 2 משוואות עם 2 משתנים, נפתור אותם על ידי חלוקה בi במשוואה השנייה ולאחר מכן חיבור \ חיסור המשוואות, ונקבל כי

$$\langle T(v) \mid w\rangle = \langle T(w) \mid v\rangle = 0$$

עתה נבחר $w = T(v)$, לכן

$$0 = \langle T(v) \mid T(v)\rangle = \|T(v)\|^2 \Rightarrow \|T(v)\| = 0 \Rightarrow \boxed{T(v) = 0}$$

כלומר $\boxed{T = 0}$

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:** T אוניטרי
הוכחה:
לא נכון! נבחר $T_A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, נשים לב שהערכים העצמיים של T הינם $1, -1$, כלומר T מקיימת את הנדרש. נניח בשלילה שT היה אוניטרי אזי

$$I_2 = [T^*]_E^E \cdot [T]_E^E = \overline{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

קיבלנו סתירה, כלומר T לא אוניטרי.

מ.ש.ל.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** T, T^* יש אותו פולינום אופייני
הוכחה:
לא נכון! נבחר $T(x) = i \cdot x$, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, אזי מהערה בתרגול מתקיים $T^*(x) = \bar{i} \cdot x$,

$$\det(\lambda \cdot I - T) = \lambda - i$$
$$\det(\lambda \cdot I - T^*) = \lambda + i$$

כלומר לT, T^* יש פולינום אופייני שונה, כלומר הטענה לא נכונה

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** v וקטור עצמי של T אם"ם v וקטור עצמי של T^*
הוכחה:
נכון! תחילה נשים לב כי

$$\left(T-\alpha\dot{I_n}\right)^*=T^*-\overline{\alpha}\cdot I_n$$

$$\left(T-\alpha\dot{I_n}\right)^*\cdot\left(T-\alpha\dot{I_n}\right)=\left(T^*-\overline{\alpha}\cdot I_n\right)\cdot\left(T-\alpha\dot{I_n}\right)=T^*T-\overline{\alpha}\cdot T-\alpha T^*+\left|\alpha\right|^2I_n=$$

$$=TT^*-\overline{\alpha}\cdot T-\alpha T^*+\left|\alpha\right|^2I_n=\left(T-\alpha\dot{I_n}\right)\cdot\left(T^*-\overline{\alpha}\cdot I_n\right)=\left(T-\alpha\dot{I_n}\right)\cdot\left(T-\alpha\cdot I_n\right)^*$$

כלומר $T-\alpha\cdot I_n$ היא גם נורמלית,
$\Leftarrow$: נניח כי v ו"ע של T עם ערך עצמי λ אזי

$$0=\left\|T\left(v\right)-\lambda v\right\|^2=\left\langle\left(T-\lambda\cdot Id\right)\left(v\right)\mid\left(T-\lambda\cdot Id\right)\left(v\right)\right\rangle=\left\langle\left(T-\lambda\cdot Id\right)^*\left(v\right)\mid\left(T-\lambda\cdot Id\right)^*\left(v\right)\right\rangle$$

$$=\left\langle\left(T^*-\overline{\lambda}\cdot Id\right)\left(v\right)\mid\left(T^*-\overline{\lambda}\cdot Id\right)\left(v\right)\right\rangle=\left\|T^*\left(v\right)-\overline{\lambda}\cdot v\right\|^2$$

כלומר

$$T^*\left(v\right)-\overline{\lambda}\cdot v=0\Rightarrow\boxed{T^*\left(v\right)=\overline{\lambda}\cdot v}$$

כלומר v הוא וקטור עצמי של T^* עם הערך העצמי $\overline{\lambda}$,
$\Rightarrow$: נניח כי v ו"ע של T^* עם ערך עצמי λ אזי

$$0=\left\|T^*\left(v\right)-\lambda v\right\|^2=\left\langle\left(T^*-\lambda\cdot Id\right)\left(v\right)\mid\left(T^*-\lambda\cdot Id\right)\left(v\right)\right\rangle=\left\langle\left(T^*-\lambda\cdot Id\right)^*\left(v\right)\mid\left(T^*-\lambda\cdot Id\right)^*\left(v\right)\right\rangle$$

$$=\left\langle\left(T-\overline{\lambda}\cdot Id\right)\left(v\right)\mid\left(T-\overline{\lambda}\cdot Id\right)\left(v\right)\right\rangle=\left\|T\left(v\right)-\overline{\lambda}\cdot v\right\|^2$$

כלומר

$$T\left(v\right)-\overline{\lambda}\cdot v=0\Rightarrow\boxed{T\left(v\right)=\overline{\lambda}\cdot v}$$

כלומר v הוא וקטור עצמי של T עם הערך העצמי $\overline{\lambda}$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** v וקטור עצמי של T אם"ם v וקטור עצמי של T^*
הוכחה:
נכון! הוכח בסעיף ב'

מ.ש.ל.ג.☺

7. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** האם g תבנית, האם סימטרי או אי סימטרית.
הוכחה:
תחילה נשים לב שהיצוג של g כמטריצה על ידי הבסיס הסטנדרטי הוא $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ וראינו שזה מגדיר תבנית.
נשים לב כי

$$g\left(e_1,e_2\right)=1\neq0=g\left(e_2,e_1\right)$$

כלומר g לא סימטרית ולא אנטי סימטרית.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם g תבנית, האם סימטרי או אי סימטרית.
הוכחה:
נשים לב כי

$$2\cdot g\left(0,e_1\right)=2\neq 4=g\left(0,2\cdot e_1\right)$$

כלומר g לא לינארית באחד המשתנים, כלומר g לא תבנית

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** האם g תבנית, האם סימטרי או אי סימטרית.
הוכחה:
נשים לב כי

$$g\left(\left[\begin{array}{c}x_1\\x_2\end{array}\right],\left[\begin{array}{c}y_1\\y_2\end{array}\right]\right)=x_1\cdot y_2-x_1\cdot y_1-x_2\cdot y_2+x_2\cdot y_1$$

כלומר g מיוצגת על ידי המטריצה $A=\left[\begin{array}{cc}-1&1\\1&-1\end{array}\right]$, נשים לב ש$A$ סימטרית ולכן g סימטרית.
נשים לב כי

$$g\left(e_1,e_2\right)=1\neq -g\left(e_2,e_1\right)=1$$

כלומר g לא אנטי סימטרית

מ.ש.ל.ג.☺

8. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** g ביחס לבסיס הסטנדרטי
הוכחה:

$$\begin{aligned}g\left(e_1,e_1\right)&=1\\g\left(e_1,e_2\right)&=0\\g\left(e_2,e_1\right)&=-1\\g\left(e_2,e_2\right)&=0\end{aligned}$$

כלומר המטריצה המייצגת של g ביחס לבסיס הסטנרדטי היא $\left[\begin{array}{cc}1&0\\-1&0\end{array}\right]$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** g ביחס לבסיס B
הוכחה:
תחילה נשים לב כי $P=[Id]_E^B=\left[\begin{array}{cc}1&1\\0&2\end{array}\right]$,
לפי מה שהוכח בתרגול המטריצה המייצגת של g לפי B היא

$$P^t\cdot[g]_E^E\cdot P=\left[\begin{array}{cc}1&1\\0&2\end{array}\right]^t\cdot\left[\begin{array}{cc}1&0\\-1&0\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cc}1&1\\0&2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}1&0\\1&2\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cc}1&0\\-1&0\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cc}1&1\\0&2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}1&0\\1&2\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cc}1&1\\-1&-1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}1&1\\-1&-1\end{array}\right]$$

כלומר המטריצה המייצגת של g ביחס לB היא $\left[\begin{array}{cc}1&1\\-1&-1\end{array}\right]$

מ.ש.ל.ב.☺

9. **צ"ל:** g_A מכפלה פנימית
הוכחה:
תחילה נשים לב שאנחנו רק צריכים להראות שg_A סימטרית וחיובית ממש, כי g_A לינארית מהיותה תבנית.

(א) סימטריות: יהיו $v,w\in V$ אזי

$$g_A(v,w)=v^t\cdot M^t\cdot M\cdot w=\left(v^t\cdot M^t\cdot M\cdot w\right)^t=w^t\cdot M^t\cdot\left(M^t\right)^t\cdot v=w^t\cdot M^t\cdot M\cdot v=g_A(w,v)$$

כלומר g_A סימטרית

(ב) חיובית ממש: יהי $v\in V$ אזי

$$g_A(v,v)=v^t\cdot M^t\cdot M\cdot v=(M\cdot v)^t\cdot M\cdot v$$

נסמן $u=M\cdot v$, אזי $u^t\cdot u=\|u\|^2$, כלומר $g_A(v,v)=\|u\|^2\geq 0$,
נשים לב ששוויון מתקיים אם"ם $M\cdot v=u=0$ אם"ם $v=M^{-1}\cdot 0=0$.
כלומר $g_A(v,v)=0$ אם"ם $v=0$ וגם $\forall v\in V$ מתקיים $g_A(v,v)\geq 0$

הראנו שg_A מקיים את כל התכונות של מכפלה פנימית, כלומר g_A היא מכפלה פנימית

מ.ש.ל.☺