

# אינפי 2 - סמסטר א' תשע"ט

## תרגיל בית 1

להגשה עד יום חמישי, 1 בנובמבר, בשעה 20:00, דרך תיבת ההגשה במודל

בכל השאלות, אלא אם נאמר אחרת, כאשר מוזכר "קטע  $[a, b]$ " אנחנו מניחים ש-  $a, b \in \mathbb{R}$  ו-  $a < b$ .  
חלק מהשאלות מתייחסות ל- "משפט 2.3" - הוא מופיע בסיכום הרצאה 2, בעמוד 2.6 (עמוד 7 בקובץ).

1. תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה. בשאלה זו אתם מתבקשים לעקוב אחרי ההגדרות מהכיתה בלבד.

(א) הגדירו: "הפונקציה  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ ".

(ב) בהנחה שמתקיים התנאי מסעיף א', הגדירו: "האינטגרל המסוים  $\int_a^b f$ ".

2. עבור החלוקה  $P = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, 1\}$  של הקטע  $[0, 1]$  והפונקציה  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת על-ידי  $f(x) = x^2$ , חשבו את  $L(f, P)$  ו-  $U(f, P)$ .

3. תהי  $D : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית דיריכלה. כלומר,  $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ . הוכיחו ש-  $D$  לא אינטגרבילית ב-  $[a, b]$ .

4. תהי  $A \subset [0, 1]$  קבוצה סופית ו-  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$ . הוכיחו, מתוך הגדרה או בעזרת משפט 2.3 (אבל ללא משפטים שנלמדו מאוחר יותר) ש-  $f$  אינטגרבילית ב-  $[0, 1]$ . חשבו את  $\int_0^1 f$ .

5. יהיו  $0 < a < b$ . חשבו את האינטגרלים המסוימים הבאים בעזרת משפט 2.3 (אם אתם מתקשים, כדאי לעבור על תרגול 2):

$$\int_a^b x^{100} dx \quad \int_a^b 3^x dx \quad \int_a^b \sqrt[3]{x} dx \quad \int_a^b \frac{1}{x} dx$$

6. תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה. הוכיחו או הפריכו את כל אחת מהטענות הבאות (**רמז**: באחד מהסעיפים, כדאי להשתמש במשפט מהכיתה שדן באינטגרליות של הרכבת פונקציות תחת תנאים מסוימים):

(א) אם  $f^2$  אינטגרבילית ב-  $[a, b]$ , אז אותו הדבר נכון לגבי  $f$ .

(ב) אם  $f^3$  אינטגרבילית ב-  $[a, b]$ , אז אותו הדבר נכון לגבי  $f$ .

7. יהיו  $a < b$  מספרים ממשיים. בכל אחד משני הסעיפים הבאים, עליכם להראות שני דברים: (1) האינטגרל באגף שמאל קיים<sup>1</sup> אם ורק אם האינטגרל באגף ימין קיים, (2) במקרה זה, האינטגרלים המסוימים בשני האגפים שווים.

(א) עבור  $c \in \mathbb{R}$  ופונקציה  $f : [a + c, b + c] \rightarrow \mathbb{R}$ , הראו  $\int_a^b f(x + c) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx$ .

(ב) עבור  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$  ופונקציה  $f : [ca, cb] \rightarrow \mathbb{R}$ , הראו  $\int_a^b f(cx) dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f(x) dx$ .

**רמז**: עבור סעיף א', כדאי למצוא דרך טבעית "לייצר חלוקה של  $[a + c, b + c]$  בהינתן חלוקה של  $[a, b]$ , ולהיפך". רעיון דומה עובד בסעיף ב'.

<sup>1</sup>הכוונה בביטוי "האינטגרל קיים" היא שהפונקציה תחת סימן האינטגרל אינטגרבילית בקטע בו מתבצעת האינטגרציה.