פתרון תרגיל מספר 8 ־ תורת המשחקים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

6 ביוני 2021

1. **הערה: לאורך התרגיל כשאכתוב נשלטת, הכוונה חזק אם לא צוין אחרת**
צ"ל: לצמצם את המטריצה
הוכחה:
נסתכל על המטריצה

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

נשים לב כי השורה השלישית והראשונה נשלטות על ידי החמישית ולכן

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

נשים לב כי העמודה הראשונה והשנייה נשלטות על ידי העמודה האחרונה ולכן

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

נשים לב שאין יותר אסטרטגיות שולטות ולכן זאת המטריצה הסופית.
הערה: אולי ניתן לצמצם יותר עם אסטרטגיות שולטות מעורבות אך מוכיחים שזה מותר רק בשאלה הבאה ולכן לא נראלי נכון להשתמש בזה בשאלה הזאת.

מ.ש.ל.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $x_i^* = 0$
הוכחה:
נשים לב כי $\forall y \in \Delta_n \to u(e_i, y) < u(e_j, y)$.
תהי x^* אסטרטגיה אופטימלית של השחקן הראשון.
נגדיר $[x']_k = \begin{cases} 0 & i = k \\ x_i^* + x_j^* & j = k \\ x_k^* & else \end{cases}$. נשים לב כי $0 \le [x']_k \le 1$ לכל k כי $0 \le x_i^* + x_j^* \le \sum x_k^* = 1$ וגם מתקיים

$$\sum_k [x']_k = \sum x_k^* = 1$$

ולכן $x' \in \Delta_m$. נשים לב כי

$$\begin{aligned} u\left(x',y\right)-u\left(x^*,y\right) &= \sum_k \left[x'\right]_k u\left(e_k,y\right)-\sum_k \left[x^*\right]_k u\left(e_k,y\right) \\ &= \left[x'\right]_i u\left(e_i,y\right)+\left[x'\right]_j u\left(e_j,y\right)-\left[x^*\right]_i u\left(e_i,y\right)-\left[x^*\right]_j u\left(e_j,y\right) \\ &= 0\cdot u\left(e_i,y\right)+\left(x_i^*+x_j^*\right)\cdot u\left(e_j,y\right)-\left[x^*\right]_i u\left(e_i,y\right)-\left[x^*\right]_j u\left(e_j,y\right) \\ &= \left[x^*\right]_i\cdot\left(u\left(e_j,y\right)-u\left(e_i,y\right)\right) \end{aligned}$$

נניח בשלילה ש $\left[x^*\right]_i \neq 0$ אז מתקיים

$$u\left(x',y\right)-u\left(x^*,y\right)=\left[x^*\right]_i\cdot\left(u\left(e_j,y\right)-u\left(e_i,y\right)\right)>0$$

ולכן לכל $y\in\Delta_n$ מתקיים $u\left(x',y\right)>u\left(x^*,y\right)$ בסתירה לכך ש- x^* אופטימלי ולכן $\left[x^*\right]_i=0$.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $x_i^*=0$

הוכחה:

תחילה נראה שקיימת $x''\in\Delta_m$ כך ש- $\left[x''\right]_i=0$.

נשים לב כי $u\left(x',y\right)-u\left(e_i,y\right)>0$,

נגדיר $\left[x''\right]_k=\begin{cases}0 & k=i\\ \frac{\left[x'\right]_j}{1-\left[x'\right]_i} & else\end{cases}$, ולכן

$$\begin{aligned} u\left(x',y\right)-u\left(e_i,y\right)&=\sum\left[x'\right]_j\cdot u\left(e_j,y\right)-u\left(e_i,y\right)>0 \\ &\implies \sum_{j\neq i}\left[x'\right]_j\cdot u\left(e_j,y\right)>\left(1-\left[x'\right]_i\right)\cdot u\left(e_i,y\right) \\ &\implies \sum_{j\neq i}\frac{\left[x'\right]_j}{1-\left[x'\right]_i}\cdot u\left(e_j,y\right)\overset{\star}{>}u\left(e_i,y\right) \\ &\implies u\left(x'',y\right)>u\left(e_i,y\right) \end{aligned}$$

$\star$ - $\left[x'\right]_i\neq 1$ אחרת $x'=e_i$ ואז הנתון ש- x' שולטת על e_i לא נכון.

נשים לב כי $0\leq\left[x''\right]_k\leq 1$ לכל k וגם

$$\sum_k\left[x''\right]_k=\sum_{j\neq i}\frac{\left[x'\right]_j}{1-\left[x'\right]_i}=\frac{\sum_j\left[x'\right]_j}{1-\left[x'\right]_i}-\frac{\left[x'\right]_i}{1-\left[x'\right]_i}=\frac{1}{1-\left[x'\right]_i}-\frac{\left[x'\right]_i}{1-\left[x'\right]_i}=\frac{1-\left[x'\right]_i}{1-\left[x'\right]_i}=1$$

ולכן x'' הוא וקטור התפלגות וגם מתקיים $u\left(x'',y\right)>u\left(e_i,y\right)$ לכל $y\in\Delta_n$ וגם $\left[x''\right]_i=0$.

עתה תהי x^* אסטרטגיה אופטימלית של השחקן הראשון.

נגדיר $\left[x'''\right]_k=\begin{cases}0 & k=i\\ \left[x^*\right]_k+\left[x^*\right]_i\cdot\left[x''\right]_k & k\neq i\end{cases}$.

נשים לב כי

$$\begin{aligned} \sum_k\left[x'''\right]_k&=\sum_{k\neq i}\left[\left[x^*\right]_k+\left[x^*\right]_i\cdot\left[x''\right]_k\right]=\sum_{k\neq i}\left[x^*\right]_k+\sum_{k\neq i}\left[x^*\right]_i\cdot\left[x''\right]_k \\ &=\left(1-\left[x^*\right]_i\right)+\left[x^*\right]_i\sum_{k\neq i}\left[x''\right]_k\overset{\left[x''\right]_i=0}{=}\left(1-\left[x^*\right]_i\right)+\left[x^*\right]_i\sum_k\left[x''\right]_k \\ &=\left(1-\left[x^*\right]_i\right)+\left[x^*\right]_i\cdot 1=1 \end{aligned}$$

וגם כי $0 \leq [x''']_k \leq 1$ לכל k ולכן x''' הוא וקטור התפלגות.
נשים לב כי

$$\begin{aligned}
u(x''', y) - u(x^*, y) &= \sum_{k \neq i} \left[[x^*]_k + [x^*]_i \cdot [x'']_k \right] \cdot u(e_k, y) - \sum_{k} [x^*]_k \cdot u(e_k, y) \\
&= \sum_{k \neq i} [x^*]_i \cdot [x'']_k \cdot u(e_k, y) - [x^*]_i \cdot u(e_i, y) \\
&= \sum_{k \neq i} [x^*]_i \cdot [x'']_k \cdot [u(e_k, y) - u(e_i, y)] \\
&= [x^*]_i \cdot \left[\sum_{k \neq i} [x'']_k \cdot u(e_k, y) - \sum_{k \neq i} [x'']_k \cdot u(e_i, y) \right] \\
&= [x^*]_i \cdot [u(x'', y) - u(e_i, y)]
\end{aligned}$$

נניח בשלילה ש $[x^*]_i \neq 0$ אז מתקיים

$$u(x''', y) - u(x^*, y) = [x^*]_i \cdot [u(x'', y) - u(e_i, y)] > 0$$

ולכן לכל $y \in \Delta_n$ מתקיים $u(x''', y) > u(x^*, y)$ בסתירה לכך ש- x^* אופטימלי ולכן $[x^*]_i = 0$.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** מציאת אסטרטגיות אופטימליות
הוכחה:
נסתכל על המטריצה

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2.5 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

תחילה נשים לב כי השורה השנייה נשלטת על ידי ממוצע השורה הראשונה והשלישית ולכן על ידי הסעיף הקודם, נוכל להוריד את השורות האלה ונשאר עם

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2.5 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

נשים לב שהשורה השלישית נשלטת על ידי $\frac{3}{5}$ השורה השנייה ו- $\frac{2}{5}$ השורה הראשונה ולכן עד ידי הסעיף הקודם נשאר עם

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

נשים לב שהעמודה השלישית נשלטת על ידי $\frac{4}{5}$ העמודה השנייה ו- $\frac{1}{5}$ העמודה האחרונה ולכן עד ידי הסעיף הקודם נשאר עם

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

נשים לב שהעמודה הראשונה נשלטת על ידי $\frac{2}{5}$ העמודה השנייה ו- $\frac{3}{5}$ העמודה האחרונה ולכן עד ידי הסעיף הקודם נשאר עם

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

נעשה בשיטה שראינו בתרגיל 6, נחשב

$$\begin{aligned}u(p,q)&=\begin{bmatrix}p\\1-p\end{bmatrix}^T\cdot A\cdot\begin{bmatrix}q\\1-q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p\\1-p\end{bmatrix}^T\cdot\begin{bmatrix}3q+(1-q)\\4(1-q)\end{bmatrix}\\&=p(3q+(1-q))+4(1-q)(1-p)\\&=2pq+p+4(1-p-q+pq)\\&=4-4q-3p+6pq\end{aligned}$$

נחשב

$$\max_{0\le p\le 1}\min\{u(p,0),u(p,1)\}=\max_{0\le p\le 1}\min\{4-3p,3p\}$$

והפתרון ייתן לנו $\boxed{p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}}$ לכן האסטרטיה האופטימלית של השחקן הראשון במשחק המצומצם היא לבחור את השורה הראשונה $\frac{2}{3}$ מהזמן ו־ $\frac{1}{3}$ מהזמן את השורה השנייה.
נחשב

$$\min_{0\le q\le 1}\max\{u(0,q),u(1,q)\}=\min_{0\le q\le 1}\max\{4-4q,1+2q\}$$

והפתרון ייתן לנו $\boxed{p=\frac{4-1}{4+2}=\frac{1}{2}}$ לכן האסטרטיה האופטימלית של השחקן השני במשחק המצומצם היא לבחור את השורה הראשונה $\frac{1}{2}$ מהזמן ו־ $\frac{1}{2}$ מהזמן את השורה השנייה.
לכן האסטרטגיה האופטימלית היחידה במשחק המקורי היא $\left(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},0\right)$ ולשחקן השני היא $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right)$. (הסיבה היא שכל האסטרטגיות האופטימליות צריכות להשאר במטריצה לאחר הורדת אסטרטגיות נשלטות ונשארה רק אחת לכל שחקן).

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** לא נשלט חזק ולא חלש אך עדיין לא נבחר
הוכחה:
נסתכל על המטריצה $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$.
נשים לב שכל אסטרטגיה שולטת על אחרת חלש ובפרט השורה הראשונה על השנייה.
נשים לב כי לכל p,q מתקיים

$$\begin{bmatrix}p\\1-p\end{bmatrix}^T\cdot A\cdot\begin{bmatrix}q\\1-q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p\\1-p\end{bmatrix}^T\cdot\begin{bmatrix}q+(1-q)\\q+(1-q)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p\\1-p\end{bmatrix}^T\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=1$$

כלומר לכל p,q יתקיים שערך המשחק הוא 1 ולכן בפרט $x^*=e_1,e_2$ הן אסטרטגיות אופטימליות לשחקן הראשון (כי כל אסטרטגיה היא אופטימלית).

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** לא נשלט חזק ולא חלש אך עדיין לא נבחר
הוכחה:
נסתכל על המטריצה $\begin{bmatrix}5&0\\0&5\\2&2\end{bmatrix}$.
נשים לב שאין אסטרטגיות נשלטות כלל, לא חלש ולא חזק.
אך נשים לב שהשורה האחרונה נשלטת על ידי ממוצע השורה הראשונה והשנייה ולכן לא תבחר באסטרטגיה אופטימלית לפי סעיף ב.

מ.ש.ל.ה.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** מטריצה

הוכחה:

המטריצה היא

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -4 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ -5 & -4 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** מטריצה

הוכחה:

המטריצה היא

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -4 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ -5 & -4 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נבחין ש־ 5 העמודות הימניות נשלטות על ידי העמודה הראשונה ולכן נשאר עם

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & -3 & 2 & 0 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & 2 \\ -7 & -6 & -5 & -4 & -3 \\ -8 & -7 & -6 & -5 & -4 \\ -9 & -8 & -7 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

נשים לב ש־ 5 השורות האחרונות נשלטות על ידי השורה הראשונה ולכן נשאר עם

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נשים לב שאף שורה לא נשלטת על ידי אחרות יותר ולכן קיבלנו את המטריצה המצומצמת.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** אסטרטגיות אופטימליות

הוכחה:

נשים לב כי $A=-A^T$ ולכן ערך המשחק הוא 0.

נשים לב כי עבור $\boxed{x=y=\left(\frac{4}{37},\frac{6}{37},\frac{17}{37},\frac{6}{37},\frac{4}{37}\right)}$ מתקיים

$$A\cdot y=\begin{bmatrix}\frac{-2\cdot17+6\cdot3+4\cdot4}{37}\\ \frac{-2\cdot6+4\cdot3}{37}\\ \frac{4\cdot2-2\cdot4}{37}\\ \frac{-3\cdot4+2\cdot6}{37}\\ \frac{-6\cdot3-4\cdot4+2\cdot17}{37}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$x^T\cdot A=\left(A^T\cdot x\right)^T=-\left(\left(-A^T\right)\cdot x\right)^T=-\left(A\cdot y\right)^T=-\left[0,0,0,0,0\right]=\left[0,0,0,0,0\right]$$

נסמן $v=0$, נשים לב כי $x^T\cdot A=v\cdot 1$ וגם $A\cdot y=v\cdot 1$,

ולכן לפי משפט שהוכחנו בתרגילים קודמים מתקיים ש־ $v=0$ הוא ערך המשחק ו־ x,y הן אסטרטגיות אופטימליות לשחקן הראשון והשני בהתאמה.

מ.ש.ל.ג.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** אסטרטגיות אופטימליות

הוכחה:

נשתמש ברעיון שראינו בהרצאה של להחליף פעולות סימטריות בפעולה אחת שנבחרת באופן אחיד.

נבחין שיש רק 2 סוגי חלקים center, off center, ננצל סימטריה ונגדיר פעולות חדשות שהן התפלגות אחידה על הפעולות הישנות.

באופן דומה נשים לב כי לשחקן הראשון יש corner, midside, middle ואלה הפעולות שנשאיר לו.

נשים לב כי המטריצה שתתקבל לאחר החלפה היא

	off center	center
corner	$\frac{2}{8}$	0
midside	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4}$
middle	0	1

.

נשים לב כי השורה הראשונה נשלטת על ידי השורה השנייה ונשאר עם $\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

נשים לב כי העמודה השנייה נשלטת חלש על ידי העמודה הראשונה ולכן נקבל $\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ 0\end{bmatrix}$

נשים לב כי השורה השנייה נשלטת על ידי השורה הראשונה ולכן נקבל $\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

כלומר ערך המשחק הוא $\frac{1}{4}$ ומתקבל אם השחקן הראשון משחק midside והשני משחק off center.

עתה נוכל להחזיר את הבעיה לשאלה המקורית ולקבל שאסטרטגיה אופטימלית של השחקן הראשון היא $\left(0,0,0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},0\right)$

ושל השחקן השני היא $\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},0,0,0,0\right)$.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** אסטרטגיות אופטימליות

הוכחה:

נשתמש ברעיון שראינו בהרצאה של להחליף פעולות סימטריות בפעולה אחת שנבחרת באופן אחיד.

נבחין שיש רק 2 סוגי חלקים center, off center, ננצל סימטריה ונגדיר פעולות חדשות שהן התפלגות אחידה על הפעולות הישנות.

באופן דומה נשים לב כי לשחקן הראשון יש corner, midside, middle ואלה הפעולות שנשאיר לו.

נשים לב כי המטריצה שתתקבל לאחר החלפה היא

	off center	center
corner	$\frac{2}{4}$	0
midside	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
middle	0	1

.

נשים לב כי השורה הראשונה השנייה נשלטת חלש על ידי ממוצע השורה הראשונה והשלישית ונשאר עם $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(הערה: איבדנו פתרונות אבל מחפשים רק פתרון אחד ולכן זה בסדר).
נשים לב כי

$$\left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

וגם נשים לב כי

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ולכן מצאנו $x = y = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$ המקיימים $x^T A = (v, v)$ וגם $A \cdot y = (v, v)^T$ ולכן לפי שאלה מתרגיל 7 מתקיים כי x, y אופטימליים וערך המשחק הוא $\frac{1}{3}$.
עתה הפתרון לבעיה המקורית יהיה $\left(\frac{2}{3\cdot4}, \frac{2}{3\cdot4}, \frac{2}{3\cdot4}, \frac{2}{3\cdot4}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{3}\right)$ לשחקן הראשון ו־ $\left(\frac{2}{3\cdot4}, \frac{2}{3\cdot4}, \frac{2}{3\cdot4}, \frac{2}{3\cdot4}, \frac{1}{3\cdot2}, \frac{1}{3\cdot2}\right)$ לשחקן השני.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** אסטרטגיות אופטימליות
הוכחה:
נשים לב כי המטריצה היא I_9 ולכן עבור $x = y = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$ מתקיים כי

$$x^T \cdot A = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$$
$$A \cdot y = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)^T$$

ולכן מצאנו $x = y = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$ המקיימים $x^T A = (v, \ldots, v)$ וגם $A \cdot y = (v, \ldots, v)^T$ ולכן לפי שאלה מתרגיל 7 מתקיים כי x, y אופטימליים וערך המשחק הוא $\frac{1}{9}$.

מ.ש.ל.ג.☺