אלגברה לינארית (2) תשע`ט 2018-2019 - סמסטר ב' - תרגיל 11

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז.** יש לציין **כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 5.6.19 בשעה 21:00.

1. הוכיחו כי לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ מתקיים : $|\,a+2b+3c\,|\leqslant 4\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

2. בממ"פ $\mathbb{C}^5$ עם המכפלה הסקלרית נתונים הוקטורים : $u_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, $u_2=\begin{bmatrix}1\\i\\-1\\-i\\1\end{bmatrix}$, $u_3=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\8\\16\end{bmatrix}$.
   (א) הראו כי (u_1,u_2,u_3) בת"ל.
   (ב) הפעילו את תהליך גראם-שמידט על (u_1,u_2,u_3) על מנת לקבל בסיס או"נ של $\mathrm{Span}\,\{u_1,u_2,u_3\}$.

3. תהי $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\end{bmatrix}$. נגדיר תת-המרחב U של $\mathbb{C}^5$ עם המכפלה הסקלרית על ידי: $U=\left\{x\in\mathbb{C}^5 : Ax=0\right\}$.
   (א) חשבו את ההטלה האורתוגונלית של $\begin{bmatrix}1\\2\\4\\8\\16\end{bmatrix}$ על U .
   (ב) מצאו את המטריצה המייצגת של P_U ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^5$.

4. נגדיר את ההעתקה $\langle\cdot\mid\cdot\rangle:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ על ידי $\left\langle\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\;\middle|\;\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\right\rangle=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3+x_2y_3+x_3y_2$.
   (א) הוכיחו כי $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ הינה מכפלה פנימית.
   (ב) מצאו בסיס או"נ עבור $U=\mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$.
   (ג) חשבו את ההטלה האורתוגונלית של $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ על U .
   (ד) חשבו את המטריצה המייצגת של P_U ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

5. נצייד את $C\left([-1,1]\right)$ (מרחב הפונקציות הממשיות הרציפות ב- $[-1,1]$) עם המכפלה הפנימית $\langle f\mid g\rangle=\int_{-1}^{1}f\left(x\right)g\left(x\right)dx$.
   מצאו בסיס או"נ למרחב $\mathrm{Span}\left\{1,x,x^2\right\}$.

6. יהי U תת-מרחב של ממ`פ V , $(b_1,\ldots,b_m)$ בסיס אורתונורמלי של U ו- $v\in V$. הוכיחו כי $||v||^2\geqslant\sum_{i=1}^{m}|\,\langle b_i\mid v\rangle\,|^2$.

7. . יהיו U,W תת-מרחבים ממימד סופי של ממ`פ V כך ש- $W\subseteq U$, ויהי $v\in V$.
   u הוא ההטלה האורתוגונלית של v על U ו- w הוא ההטלה האורתוגונלית של v על W . הוכיחו כי :
   (א) $||u||\geqslant||w||$. (ב) $d(v,u)\leqslant d(v,w)$.

8. יהי $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. יהי $\mathcal{B}=(b_1,\ldots,b_n)$ בא"נ של V . יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי.
   תהי $A=[a_{i,j}]$ המטריצה המייצגת את T לפי $\mathcal{B}$. הוכיחו כי לכל $1\leqslant i,j\leqslant n$ מתקיים: $a_{i,j}=\langle b_i\mid T\left(b_j\right)\rangle$.

9. נצייד את $C\left([0,1]\right)$ (מרחב הפונקציות הממשיות הרציפות ב- $[0,1]$) עם המכפלה הפנימית $\langle f\mid g\rangle=\int_{0}^{1}f\left(x\right)g\left(x\right)dx$.
   (א) הוכיחו : $W=\{f\in C\left([0,1]\right):f(0)=0\}$ הוא תת-מרחב של $C\left([0,1]\right)$.
   (ב) הוכיחו כי $W^{\perp}=\left\{\vec{0}\right\}$ והסיקו ש- $W\subsetneqq(W^{\perp})^{\perp}$. (רמז : אם $g\in W^{\perp}$ אז $f=xg\in W$)