פתרון תרגיל מספר 12 - אינפי 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

17 בינואר 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\sum \frac{e^n \cdot x}{n^n}$, תחומי התכנסות ובדיקת התכנסות במ"ש ב(a,b) וב$(-\infty,\infty)$

הוכחה:

תחילה נחשב את f, יהי $x \in \mathbb{R}$, נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{e^n \cdot x}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|} \cdot \sqrt[n]{\left|\left(\frac{e}{n}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n} = 0$$

לכן ממבחן השורש הטור $\sum \frac{e^n \cdot x}{n^n} = x \cdot \sum \left(\frac{e}{n}\right)^n$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$,

כלומר תחום ההתכנסות הוא $I = \mathbb{R}$,

נגדיר $f(x) = \sum \frac{e^n \cdot x}{n^n}$, $f_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{e^n \cdot x}{n^n}$

i. עתה נראה כי הטור במ"ש בקטע (a,b), יהי $x \in (a,b)$ נשים לב כי

$$\sum \left|\frac{e^n \cdot x}{n^n}\right| \le \sum \left|\frac{e^n}{n^n}\right| \cdot \max\{|a|,|b|\}$$

ראינו כי הטור $\sum \left|\frac{e^n}{n^n}\right| \cdot \max\{|a|,|b|\}$ בהחלט ולכן מתכנס,

ולכן מקריטריון M ויירשטראס הטור $\sum \frac{e^n \cdot x}{n^n}$ מתכנס במ"ש ב(a,b)

ii. עתה נראה כי הטור $\sum \frac{e^n \cdot x}{n^n}$ לא במ"ש בקטע $(-\infty,\infty)$,

לכן מקריטריון קושי $\exists N \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall N < k < m \in \mathbb{N}$, $\forall x \in (-\infty,\infty)$ מתקיים

$$|f_k(x) - f_m(x)| < 1$$

נבחר $k = N+1, m = N+2$, $x = \frac{(N+2)^{N+2}}{e^{N+2}}$, נשים לב כי

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{e^n \cdot x}{n^n}\right| = \left|\sum_{k=N+2}^{N+2} \frac{e^n \cdot x}{n^n}\right| = \frac{e^{N+2}}{(N+2)^{N+2}} \cdot \frac{(N+2)^{N+2}}{e^{N+2}} = 1 < 1$$

סתירה, כלומר הטור $\sum \frac{e^n \cdot x}{n^n}$ לא במ"ש בקטע $(-\infty,\infty)$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\sum \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)$, בדיקת התכנסות במ"ש ב$[a,b]$ וב$(-\infty,\infty)$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי

$$y \ge 0 \Leftrightarrow y+1 \ge 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+y} \le 1 \Leftrightarrow \ln(1+y) = \int_0^y \frac{1}{1+y} dy \le \int_0^y 1 = y$$

עתה יהי $x\in\mathbb{R}$, נשים לב כי

$$\sum\left|\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)\right|=\sum\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)\leq\sum\frac{x^2}{n^2}=x^2\cdot\sum\frac{1}{n^2}=\left|x^2\right|\cdot\sum\left|\frac{1}{n^2}\right|$$

לכן ממבחן ההשוואה עם הטור $x^2\cdot\sum\frac{1}{n^2}$ (ברור שהוא מתכנס),
נסיק כי $\sum\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$,
כלומר תחום ההתכנסות הוא $I=\mathbb{R}$,
נגדיר $f\left(x\right)=\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$, $f_k\left(x\right)=\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$

i. עתה נראה כי הטור במ"ש בקטע $[a,b]$, יהי $x\in[a,b]$ נשים לב כי

$$\sum\left|\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)\right|\leq\sum\left|\ln\left(1+\frac{\max\left\{|a|,|b|\right\}^2}{n^2}\right)\right|\leq\left|\max\left\{|a|,|b|\right\}^2\right|\cdot\sum\left|\frac{1}{n^2}\right|$$

ראינו כי הטור $\left|\max\left\{|a|,|b|\right\}^2\right|\cdot\sum\left|\frac{1}{n^2}\right|$ בהחלט ולכן מתכנס,
ולכן מקריטריון M ויירשטראס הטור $\sum\left|\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)\right|$ מתכנס במ"ש ב$[a,b]$

ii. עתה נראה כי הטור $\sum\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$ לא במ"ש בקטע $(-\infty,\infty)$,
לכן מקריטריון קושי $\exists N\in\mathbb{N}$ כך ש$\forall N<k<m\in\mathbb{N}$, $\forall x\in(-\infty,\infty)$ מתקיים

$$\left|f_k\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|<\ln\left(2\right)$$

נבחר $k=N+1,m=N+2$, $x=\left(N+2\right)^2$, נשים לב כי

$$\left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)\right|=\left|\sum_{k=N+2}^{N+2}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)\right|=\ln\left(1+\frac{\left(N+2\right)^2}{\left(N+2\right)^2}\right)=\ln\left(2\right)<\ln\left(2\right)$$

סתירה, כלומר הטור $\sum\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$ לא במ"ש בקטע $(-\infty,\infty)$

מ.ש.ל.ב.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot a_n\cdot x^{n-1}$ הוא גם R
הוכחה:
נשים לב כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot a_n\cdot x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)\cdot a_{n+1}\cdot x^n$$

ראינו כי רדיוס ההתכנסות של $\sum b_nx^n$ הוא $R=\left(\limsup\sqrt[n]{b_n}\right)^{-1}$,
נסמן את רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot a_n\cdot x^{n-1}$ בR' ואת רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$ הוא R, כלומר

$$R'=\left(\limsup\sqrt[n]{\left(n+1\right)\cdot a_{n+1}}\right)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}\cdot\left(\limsup\sqrt[n]{a_{n+1}}\right)^{-1}$$
$$=1\cdot\left(\limsup\sqrt[n]{a_n}\right)^{-1}=1\cdot R=R$$

כלומר $R'=R$, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n}\cdot x^{n+1}$ הוא גם R

הוכחה:

נשים לב כי

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n}\cdot x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{n+1}\cdot x^n$$

ראינו כי רדיוס ההתכנסות של $\sum b_n x^n$ הוא $R=\left(\limsup\sqrt[n]{b_n}\right)^{-1}$,
נסמן את רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n}\cdot x^{n+1}$ בR' ואת רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$ הוא R, כלומר

$$R'=\left(\limsup\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{n+1}}\right)^{-1}=\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}\right)^{-1}\cdot\left(\limsup\sqrt[n]{a_{n+1}}\right)^{-1}$$
$$=1\cdot\left(\limsup\sqrt[n]{a_n}\right)^{-1}=1\cdot R=R$$

כלומר $R'=R$, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ותחום ההתכנסות הנקודתית

הוכחה:

נשים לב כי

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right|=e^{|x|}$$

לכן $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|$ מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$ ממבחן ההשוואה עם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right|$,
לכן הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ מתכנס בהחלט לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכן $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$,
כלומר $R=\infty$ ותחום ההתכנסות הוא $I=\mathbb{R}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n+6^n}x^n$ ותחום ההתכנסות הנקודתית

הוכחה:

נשים לב כי $R=\frac{1}{\limsup\sqrt[n]{a_n}}$ וגם נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n+4^n}{5^n+6^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n}{\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{6}{6}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n}{\left(\frac{5}{6}\right)^n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n}}{\sqrt[n]{\left(\frac{5}{6}\right)^n+1}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n}}{1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{6}\right)\sqrt[n]{1+\left(\frac{3}{6}\right)^n\cdot\left(\frac{6}{4}\right)^n}=\frac{2}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{2}{3}$$

לכן

$$\limsup\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{2}{3}$$
$$R=\frac{1}{\limsup\sqrt[n]{a_n}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

עתה נחשב קצוות

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n+6^n}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{9^n+12^n}{10^n+12^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n+1}\overset{\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n+1}\neq 0}{=}\text{doesn't converge}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n+6^n}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{9^n+12^n}{10^n+12^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n+1}\overset{\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n+1}\neq 0}{=}\text{doesn't converge}$$

כלומר הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n+6^n}\cdot x^n$ לא מתכנס עבור $x=\frac{3}{2},\frac{-3}{2}$,
לכן תחום ההתכנסות הנקודתית הוא $I=\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n^2}+4^n}{5^n+6^n}x^n$ ותחום ההתכנסות הנקודתית
הוכחה:
נשים לב כי $R=\frac{1}{\limsup\sqrt[n]{a_n}}$ וגם נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^{n^2}+4^n}{5^n+6^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{n^2}}\cdot\sqrt[n]{\frac{1+4\cdot\frac{1}{3^{n^2}}}{5^n+6^n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{n^2}}\cdot\frac{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+4\cdot\frac{1}{3^{n^2}}}}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n+6^n}}\geq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{n^2}}\cdot\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n+5^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{n^2}}\cdot\frac{1}{5}=\infty$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\infty$$

לכן

$$\limsup\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\infty$$

$$R=\frac{1}{\limsup\sqrt[n]{a_n}}=\frac{1}{\infty}=0$$

לכן $R=0$ ותחום ההתכנסות הוא $I=[0,0]$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^{2n+1}$ ותחום ההתכנסות הנקודתית
הוכחה:
נשים לב כי

$$a_n=\frac{-1}{1},0,\frac{1}{2},0,\frac{-1}{3},0,\frac{1}{4},0,\frac{-1}{5},0,\ldots$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{0}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[4n+3]{a_{4n+3}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[4n+3]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4n+3]{n}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[4n+1]{a_{4n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[4n+1]{\frac{-1}{n}}\leq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$$

לכן

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \sup\left\{0, 1, \lim_{n\to\infty} \sqrt[4n+1]{a_{4n+1}}\right\} = 1$$
$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{1} = 1$$

עתה נחשב קצוות,
נשים לב כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot 1^{2n+1}$ מתכנס כי הוא טור לייבניץ,
נשים לב כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot (-1)^{2n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס כי הוא טור לייבניץ,
לכן $R = 1$ ותחום ההתכנסות הוא $I = [-1, 1]$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n\cdot\ln(n)} x^{2n+1}$ ותחום ההתכנסות הנקודתית
הוכחה:
נשים לב כי $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}}$ וגם נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{5^{n\cdot\ln(n)}} = \lim_{n\to\infty} 5^{\frac{n\cdot\ln(n)}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} 5^{\frac{\ln(n)}{2+\frac{1}{n}}} \geq \lim_{n\to\infty} 5^{\frac{\ln(n)}{2}} = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{0} = 0$$

לכן

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sup\{\infty, 0\} = \infty$$
$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

לכן $R = 0$ ותחום ההתכנסות הוא $I = [0, 0]$

מ.ש.ל.ה.☺

(ו) **צ"ל:** רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot x^{n^2}$ ותחום ההתכנסות הנקודתית
הוכחה:
נשים לב כי $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}}$ וגם נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{a_{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{a^n} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 0 & a = 0 \\ 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$

תהי a_{n_k} סדרה מתכנסת, אם היא 0 כמעט תמיד אז $\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = 0$, אחרת $a_{n_k} = a_{l^2}$ כמעט תמיד,
לכן

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = \begin{cases} 0 & a = 0 \\ 1 & a > 0 \\ |-1| & a < 0 \end{cases}$$

לכן

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} 0 & a = 0 \\ 1 & a \neq 0 \end{cases}$$
$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}} = \begin{cases} \infty & a = 0 \\ 1 & a \neq 0 \end{cases}$$

לכן אם $a=0$, $R=\infty$ ותחום ההתכנסות הוא $I=\mathbb{R}$,
אחרת $a\neq 0$, נבדוק קצוות,
נשים לב כי כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot 1^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$ מתכנס אם ורק אם $-1<a<1$,
נשים לב כי כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot (-1)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-a)^n$ מתכנס אם ורק אם $-1<a<1$,
כלומר אם $a=0$, אז $R=\infty$ ותחום ההתכנסות הוא $I=\mathbb{R}$,
אם $a\in(-1,1)\setminus\{0\}$, אזי $R=1$ ותחום ההתכנסות הוא $I=[-1,1]$,
אחרת $R=1$ ותחום ההתכנסות הוא $I=(-1,1)$

מ.ש.ל.ו.☺

(ז) **צ"ל:** רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2}\cdot x^n$ ותחום ההתכנסות הנקודתית
הוכחה:
נשים לב כי $R=\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}}$ וגם נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|a^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|a^{\frac{n^2}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} |a^n| = \begin{cases} 0 & -1<a<1 \\ \infty & |a|>1 \\ 1 & a=1,-1 \end{cases}$$

לכן

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} 0 & -1<a<1 \\ \infty & |a|>1 \\ 1 & a=1,-1 \end{cases}$$

$$R=\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}} = \begin{cases} \infty & -1<a<1 \\ 0 & |a|>1 \\ 1 & a=1,-1 \end{cases}$$

לכן אם $a\in(-1,1)$, $R=\infty$ ותחום ההתכנסות הוא $I=\mathbb{R}$,
אם $|a|>1$, אז $R=0$ ותחום ההתכנסות הוא $I=[0,0]$,
אחרת $a=1,-1$, נבדוק קצוות,
נשים לב כי עבור $a,x=-1,1$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} a^{n^2}\cdot x^n = 1,-1 \neq 0$$

לכן התנאי ההכרחי להתכנסות לא מתקיים, כלומר $\sum a^{n^2}\cdot x^n$ לא מתכנס,
לכן עבור $a=-1,1$, $R=1$ ותחום ההתכנסות הוא $I=[-1,1]$

מ.ש.ל.ז.☺

4. **צ"ל:** טור חזקות שתחום ההתכנסות הוא $[-1,1]$ וב-$x=1,-1$ מתכנס בתנאי
הוכחה:
נבחר $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^{2n}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{0} = 0$$

$$\Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \sup\{0,1\} = 1$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$$

לכן רדיוס ההתכנסות הוא 1,
נשים לב כי $\sum \frac{(-1)^n}{n} = \sum \frac{(-1)^n}{n} \cdot (-1)^{2n} = \sum \frac{(-1)^n}{n} \cdot 1^{2n}$ הוא טור לייבניץ, לכן הוא מתכנס,
כלומר תחום ההתכנסות הוא $[-1,1]$,
בנוסף נשים לב כי $\sum \frac{1}{n} = \sum \left|\frac{(-1)^n}{n} \cdot (-1)^{2n}\right| = \sum \left|\frac{(-1)^n}{n} \cdot 1^{2n}\right|$ לא מתכנס כי הוא הטור ההרמוני,
לכן ב$x = 1, -1$ הטור מתכנס בתנאי, כנדרש

מ.ש.ל.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $R_3 \geq \min\{R_1, R_2\}$

הוכחה:

נסמן $R = \min\{R_1, R_2\}$, יהי $x \in (-R, R)$, נשים לב כי $|x| \leq R_1, R_2$,
לכן $\sum a_n \cdot x^n, \sum b_n \cdot x^n$ מתכנסים,
לכן מתכונת הלינאריות מתקיים

$$\sum a_n x^n + \sum b_n x^n = \sum [a_n x^n + b_n x^n] = \sum (a_n + b_n) x^n$$

גם כן מתכנס, כלומר הראנו כי $\sum (a_n + b_n) x^n$ מתכנס $\forall x \in (-R, R)$,
כלומר $R_3 \geq R$ (כי רדיוס ההתכנסות הוא הקטע המקסימלי המקיים תנאי זה $\forall x \in (-R, R)$),
כלומר

$$R_3 \geq R = \min\{R_1, R_2\}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $R_3 = \min\{R_1, R_2\}$

הוכחה:

נניח בלי הגבלת הכלליות כי $R_1 < R_2$,
בסעיף א ראינו כי $R_3 \geq \min\{R_1, R_2\} = R_1$ ועתה נראה כי $R_3 \leq \min\{R_1, R_2\} = R_1$,
נראה זאת בכך שנראה כי $\forall x \in \mathbb{R}$ כך ש$R_2 > |x| > R_1$ מתקיים כי $\sum (a_n + b_n) x^n$ מתבדר,
יהי $R_1 < |x| < R_2$ אזי מהגדרת רדיוס התכנסות מתקיים כי $\sum a_n x^n$ מתבדר וגם $\sum b_n x^n$ מתכנס,
נניח בשלילה כי $\sum (a_n + b_n) x^n$ מתכנס,
אזי הטור $\sum a_n x^n = \sum (a_n + b_n) x^n - \sum b_n x^n$ מתכנס בסתירה להנחה,
לכן $\sum (a_n + b_n) x^n$ מתבדר
עתה נסיק כי $R_3 \leq R_1$, אחרת $R_3 > R_1$ קיים $R < x < \min\{R_2, R_3\}$,
לכן לפי הגדרת הרדיוס $\sum (a_n + b_n) x^n$ מתכנס סתירה לכך שהראנו כי $\sum (a_n + b_n) x^n$ מתבדר עבור ערך זה, לכן
$R_3 \leq \min\{R_1, R_2\}$, כלומר

$$R_3 \leq \min\{R_1, R_2\}, R_3 \geq \min\{R_1, R_2\} \Rightarrow R_3 = \min\{R_1, R_2\}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $R_3 > \min\{R_1, R_2\}$

הוכחה:

נבחר $a_n = -1, b_n = 1$,
בהרצאה ראינו כי רדיוס ההתכנסות של $-\sum a_n \cdot x^n = \sum x^n = \sum b_n \cdot x^n$ הוא $1 = R_1 = R_2$,
נשים לב כי $0 = \sum (1-1) x^n = \sum (a_n + b_n) x^n$ מתכנס בכל $\mathbb{R}$, כלומר $R_3 = \infty$, לכן

$$\infty = R_3 > \min\{R_1, R_2\} = 1$$

מ.ש.ל.ג.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:**

$$\liminf(-a_n) = -\limsup(a_n)$$

הוכחה:
נסמן בA את קבוצת הגבולות החלקיים של a_n ובB את קבוצת הגבולות החלקיים של $-a_n$,
יהי $s \in A$, אזי קיימת תת סדרה $a_{n_k} \to s$, אזי $-a_{n_k} \to -s$, כלומר $-s \in B$
יהי $s \in B$, אזי קיימת תת סדרה $-a_{n_k} \to s$, אזי $a_{n_k} \to -s$, כלומר $-s \in A$,
כלומר $B = \{-s \mid s \in A\}$, לכן

$$\liminf(-a_n) \overset{\text{def}}{=} \inf B = \inf\{-s \mid s \in A\} = -\sup\{s \mid s \in A\} = -\sup A \overset{\text{def}}{=} -\limsup(a_n)$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:**

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \Leftrightarrow \limsup|c_n| = 0$$

הוכחה:
$\Leftarrow$: נניח כי $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, נסמן ב$S$ את קבוצת הגבולות החלקיים של $|c_n|$,
יהי $s \in S$, אזי קיימת תת סדרה $|c_{n_k}| \to s$, ממשפט הירושה מתקיים כי $c_{n_k} \to 0$,
לכן מאריתמטיקה של גבולות מתקיים כי $|c_{n_k}| \to 0$, כלומר $s = 0$, לכן $S = \{0\}$, כלומר

$$\limsup|c_n| \overset{\text{def}}{=} \sup S = \sup\{0\} = 0$$

$\Rightarrow$: נניח $\limsup|c_n| = 0$, יהי $\varepsilon > 0$,
מתכונת ה$\limsup$ שראינו מתקיים כי $|c_n| < 0 + \varepsilon = \varepsilon$ כמעט תמיד,
כלומר $-\varepsilon < c_n < \varepsilon$ כמעט תמיד, כלומר $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $a_n < L$ באופן שכיח
הוכחה:
נחלק למקרים:

i. אם $\liminf a_n = s$, אז מתכונת גבול חלקי, לכל $\varepsilon > 0$, $a_n < s + \varepsilon$ באופן שכיח,
נבחר $\varepsilon = 1$, ונבחר $L = s + 1$, אזי $a_n < s + 1 = L$ באופן שכיח, כנדרש
ii. אם $\liminf a_n = -\infty$, אז קיימת תת סדרה $a_{n_k} \to -\infty$, מהגדרת הגבול

$$(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(K < k \to a_{n_k} < 1)$$

נבחר $L = 1$, כלומר $a_{n_k} < 1 = L$ באופן שכיח (כי יש תת סדרה שיורדת מתחת ל1 אינסוף פעמים), כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\limsup(\alpha_n a_n) = \limsup(a_n)$
הוכחה:
נסמן בS את קבוצת הגבולות החלקיים של $\alpha_n a_n$ ובT את קבוצת הגבולות החלקיים של a_n,
יהי $s \in T$, אזי קיימת תת סדרה $a_{n_k} \to s$,
נשים לב שמשפט הירושה מתקיים כי $\alpha_{n_k} \to 1$, לכן $\alpha_{n_k} \cdot a_{n_k} \to 1 \cdot s = s$, כלומר $s \in S$,
כלומר $T \subseteq S$

יהי $s \in S$, אזי קיימת תת סדרה $\alpha_{n_k} \cdot a_{n_k} \to s$,
נשים לב שמשפט הירושה מתקיים כי $\alpha_{n_k} \to 1$, לכן

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_{n_k} \cdot a_{n_k}}{\alpha_{n_k}} = \frac{s}{1} = s$$

כלומר $s \in T$, כלומר $T \subseteq S$, לכן $T = S$, ומתקיים

$$\limsup\left(\alpha_n a_n\right) \overset{\text{def}}{=} \sup S = \sup T \overset{\text{def}}{=} \limsup\left(a_n\right)$$

מ.ש.ל.ד.☺

7. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** קיימת סדרת אינדקסים כך שa_n, b_n מתכנסות
הוכחה:
מהיות a_n סדרה חסומה, ממשפט בולצנו ויירשטראס קיימת תת סדרה מתכנסת ונסמן $a_{n_k} \to L_1$,
נשים לב כי b_{n_k} חסומה כי היא תת סדרה של b_n שהיא סדרה חסומה,
מהיות b_{n_k} סדרה חסומה, ממשפט בולצנו ויירשטראס קיימת תת סדרה מתכנסת ונסמן $b_{n_{k_l}} \to L_2$,
נשים לב כי $a_{n_{k_l}}$ תת סדרה של a_{n_k}, לכן ממשפט הירושה מתקיים כי $a_{n_{k_l}} \to L_1$,
כלומר $a_{n_{k_l}} \to L_1, b_{n_{k_l}} \to L_2$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:**

$$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf\left(a_n + b_n\right)$$

הוכחה:
נסמן בA את קבוצת הגבולות החלקיים של a_n,
נסמן בB את קבוצת הגבולות החלקיים של b_n,
נסמן בC את קבוצת הגבולות החלקיים של $a_n + b_n$,
יהי $s \in C$, אזי קיימת תת סדרה $a_{n_k} + b_{n_k} \to s$,
נשים לב כי $a_{n_k} + b_{n_k}, b_{n_k}$ חסומות כי a_n, b_n חסומות,
לכן מסעיף א עבור הסדרות $a_{n_k} + b_{n_k}, b_{n_k}$ קיימת סדרת אינדקסים ששניהם מתכנסים,
ונסמן $a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}, b_{n_{k_l}} \to b$,
נשים לב כי $a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}$ תת סדרה של $a_{n_k} + b_{n_k}$, לכן ממשפט הירושה $a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}} \to s$, לכן

$$\lim_{l\to\infty} a_{n_{k_l}} = \lim_{l\to\infty}\left[a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}} - b_{n_{k_l}}\right] = s - b$$

כלומר $s - b \in A, b \in B$, נשים לב כי $s - b + b = s$ וגם $b \in B, s - b \in A$,
כלומר הראנו כי $C \subseteq \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ לכן

$$\begin{aligned}\liminf a_n + \liminf b_n &\overset{\text{def}}{=} \inf A + \inf B \\ &\leq \inf\{a + b \mid a \in A, b \in B\} \leq \inf C \overset{\text{def}}{=} \liminf\left(a_n + b_n\right) \\ &\Rightarrow \liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf\left(a_n + b_n\right)\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ב.☺