פתרון תרגיל מספר 10 - אינפי 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

2 בינואר 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** f_n, f רציפות

הוכחה:

תחילה נשים לב שמההגדרה מתקיים כי f_n רציפה ב$[0,2] \setminus \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right\}$ מאריתמטיקה של רציפות,
עתה נראה כי f_n רציפה ב$\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right\}$

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{n}\right)^-} f_n(x) = \lim_{x\to\left(\frac{1}{n}\right)^-} n^2 \cdot x = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{n}\right)^+} f_n(x) = \lim_{x\to\left(\frac{1}{n}\right)^-} n^2 \cdot \left(\frac{2}{n} - x\right) = n^2 \cdot \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right) = n$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\left(\frac{1}{n}\right)^+} f_n(x) = n = \lim_{x\to\left(\frac{1}{n}\right)^-} f_n(x)$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{2}{n}\right)^-} f_n(x) = \lim_{x\to\left(\frac{2}{n}\right)^-} n^2 \cdot \left(\frac{2}{n} - x\right) = n^2 \cdot \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{2}{n}\right)^+} f_n(x) = \lim_{x\to\left(\frac{2}{n}\right)^-} 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\left(\frac{2}{n}\right)^+} f_n(x) = 0 = \lim_{x\to\left(\frac{2}{n}\right)^-} f_n(x)$$

לכן f_n רציפה ב$\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right\}$ וגם ב$[0,2] \setminus \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right\}$, לכן f_n רציפה ב$[0,2]$,
עתה נחשב את f, נשים לב כי

$$(\forall x \in [0,2])\,(\exists N_x \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\left(N_x < n \to \frac{2}{n} < x \Leftrightarrow f_n(x) = 0\right)$$

לכן $f_n(x) = 0$ מתקיים כמעט תמיד, כלומר $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$,
כלומר $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,2]$ (ברור שהיא רציפה כי היא פונקציה קבועה)

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $f_n \to f$ לא במידה שווה

הוכחה:

i. תחילה נפתור את הבעיה לפי ההגדרה עם sup

$$\begin{aligned}\sup\left\{|f_n(x) - f(x)|\, x \in [0,2]\right\} &= \sup\left\{|f_n(x) - 0| \mid x \in [0,2]\right\} \\ &= \sup\left\{|f_n(x)| \mid x \in [0,2]\right\} \\ &\geq \sup\left\{n^2 \cdot \frac{1}{n} \mid x \in [0,2]\right\} = n\end{aligned}$$

לכן $\lim_{n\to\infty} n \neq 0 \leq \lim_{n\to\infty}\sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid x\in[0,2]\}$,
ראינו בהרצאה כי $f_n \to f$ במידה שווה אס"ם $\lim_{n\to\infty}\sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid x\in[0,2]\}=0$,
והראנו כי $\lim_{n\to\infty}\sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid x\in[0,2]\}\neq 0$, כלומר $f_n \to f$ לא במידה שווה

ii. נחשב את $\int_0^2 f_n(x)\,dx$ ו-$\int_0^2 f(x)\,dx$,
נשים לב כי $f_n(x)$ הוא פונקצית משולש שגובהו הוא n ובסיסו $\frac{2}{n}$,
לכן שטחו הוא $n\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}=1$, לכן $\int_0^2 f_n(x)\,dx=1$,
נשים לב כי

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 0\cdot dx=0$$

נניח בשלילה ש-$f_n \to f$ במידה שווה, לכן

$$0=\int_0^2 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^2 f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}1=1$$

סתירה כי $1\neq 0$, לכן $f_n \to f$ לא במידה שווה

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $f_n \to f$ מתכנסת נקודתית, f_n, f רציפות, האם בהכרח $f_n \to f$ במידה שווה?
הוכחה:
לא בהכרח!
נבחר $f_n(x)=\begin{cases} n^2\cdot x & 0\leq x\leq\frac{1}{n} \\ n^2\cdot\left(\frac{2}{n}-x\right) & \frac{1}{n}\leq x\leq\frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n}\leq x\leq 2\end{cases}$ ו-$f(x)=0$,
בסעיף א ראינו כי $f_n \to f$ מתכנסת נקודתית וגם f_n, f רציפות,
בסעיף ב ראינו כי $f_n \to f$ לא במידה שווה, כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)=f(x_0)$
הוכחה:
מהיות $f_n \to f$ במידה שווה מתקיים

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall x\in I)(\forall n\in\mathbb{N})(N<n\to|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$$

יהי $\varepsilon>0$, לכן $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ כך ש-$\forall n\in\mathbb{N}>N, \forall x\in I$ מתקיים

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

לכן $\forall n\in\mathbb{N}>N$ מתקיים

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|<\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon<f_n(x_n)-f(x_n)<\varepsilon$$

לכן ממונוטוניות הגבול

$$-\varepsilon<\lim_{n\to\infty}[f_n(x_n)-f(x_n)]<\varepsilon$$

כלומר מכיוון שהאי שוויון נכון לכל ε, נסיק כי

$$\lim_{n\to\infty}[f_n(x_n)-f(x_n)]=0$$

מהנתון שf רציפה בx_0 מתקיים

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=f\left(x_0\right)\\
\Rightarrow &0=\lim_{n\to\infty}\left[f_n\left(x_n\right)-f\left(x_n\right)\right]=\lim_{n\to\infty} f_n\left(x_n\right)-f\left(x_0\right)\\
\Rightarrow &\lim_{n\to\infty} f_n\left(x_n\right)-f\left(x_0\right)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty} f_n\left(x_n\right)=f\left(x_0\right)
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $f_n\to f$ מתכנסת נקודתית וגם $\lim_{n\to\infty} f_n\left(x_n\right)\neq f\left(x_0\right)$ וגם f רציפה בx_0

הוכחה:

נבחר $f_n\left(x\right)=\begin{cases}n^2\cdot x & 0\leq x\leq\frac{1}{n}\\ n^2\cdot\left(\frac{2}{n}-x\right) & \frac{1}{n}\leq x\leq\frac{2}{n}\\ 0 & \frac{2}{n}\leq x\leq 2\end{cases}$ ו$f\left(x\right)=0$,

בשאלה 1 סעיף א ראינו כי $f_n\to f$ מתכנסת נקודתית

נבחר $x_n=\frac{1}{n}$, לכן

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0=x_0$$

נשים לב כי f רציפה ב0 (ראינו בשאלה 1 סעיף א)

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[n^2\cdot\frac{1}{n}\right]=\lim_{n\to\infty} n\neq 0=f\left(0\right)=f\left(x_0\right)$$

מ.ש.ל.ב.☺

3. **צ"ל:** $f_n=f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ מתכנסת במידה שווה לf

הוכחה:

תחילה נשים לב כי f רציפה במידה שווה ב$\mathbb{R}$ ולכן

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists\delta\left(\varepsilon\right)\in\mathbb{R}\right)\left(\forall x,y\in\mathbb{R}\right)\left(\left|x-y\right|<\delta\left(\varepsilon\right)\to\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon\right)$$

יהי $\varepsilon>0$, לכן מהיות f רציפה במידה שווה, $\exists\delta\left(\varepsilon\right)\in\mathbb{R}$ כך ש$\forall x,y\in\mathbb{R}$ שמקיימים $\left|x-y\right|<\delta\left(\varepsilon\right)$ מתקיים

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon$$

נשים לב כי

$$\left(\exists N\left(\delta\left(\varepsilon\right)\right)\in\mathbb{N}\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\left(N<n\to\frac{1}{n}<\delta\left(\varepsilon\right)\right)$$

לכן $\forall n\in\mathbb{N}>N$, $x\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=\left|f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x\right)\right|\overset{\left|x+\frac{1}{n}-x\right|=\frac{1}{n}<\delta\left(\varepsilon\right)}{<}\varepsilon$$

כלומר הראנו כי

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists N\left(\varepsilon\right)\in\mathbb{N}\right)\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\left(N<n\to\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)$$

כלומר $f_n\to f$ רציפה במידה שווה ב$\mathbb{R}$ מההגדרה

מ.ש.ל.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** אם $f_n \to f$ במידה שווה ב$D_1, \ldots, D_m$ אז $f_n \to f$ במידה שווה ב$\bigcup_{i=1}^{m} D_i$

הוכחה:

יהי $1 \le i \le m$, אזי מהיות $f_n \to f$ במידה שווה בD_i מתקיים

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_i(\varepsilon) \in \mathbb{N})\,(\forall x \in D_i)\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(N_i < n \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

יהי $\varepsilon > 0$, מהיות $f_n \to f$ במידה שווה בD_i, $\exists N_i(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ כך ש$N_i < \forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in D_i,$ מתקיים

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

נבחר $N(\varepsilon) = \max\{N_i(\varepsilon) \mid 1 \le i \le m\}$, לכן $\forall x \in \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ ו$N < \forall n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$|f_n(x) - f(x)| \overset{N_j \le N < n}{<} \varepsilon$$

כלומר הראנו כי

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})\left(\forall x \in \bigcup_{i=1}^{m} D_i\right)(\forall n \in \mathbb{N})\,(N < n \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

כלומר $f_n \to f$ רציפה במידה שווה ב$\bigcup_{i=1}^{m} D_i$ מההגדרה

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $f_n(x) = x^n$ לא מתכנסת במידה שווה ב$[0,1)$

הוכחה:

נשים לב כי $f_n \to f$ מתכנסת נקודתית בקטע $[0,1]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$,

נסתכל על $f, f_n : [1,1] \to \mathbb{R}$,

יהי $\varepsilon > 0$, אז נבחר $N(\varepsilon) = 1$, נשים לב כי $\forall x \in [1,1]$ ($x = 1$) ו$N < \forall n \in \mathbb{N}$ $1 = $ מתקיים

$$|f_n(x) - f(x)| = |1^n - 1| = 0 < \varepsilon$$

כלומר

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})\,(\forall x \in [1,1])\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(N < n \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

כלומר $f_n \to f$ רציפה במידה שווה ב$[1,1]$ מההגדרה,

נניח בשלילה ש$f_n \to f$ במידה שווה ב$[0,1)$,

לכן מסעיף א מתקיים כי $f_n \to f$ במידה שווה ב$[0,1] = [0,1) \cup [1,1]$,

אך ראינו בהרצאה כי $f_n \to f$ לא מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$,

כלומר $f_n \to f$ לא מתכנסת במידה שווה ב$[0,1)$, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** נתון $f_n(x) = (\sin(x))^n$, למצוא את f, והאם $f_n \to f$ במ"ש ב$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ וב$[0,b]$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$ וב$[0, \frac{\pi}{2})$

הוכחה:

תחילה נחשב את f, נחלק למקרים:

i. אם $\exists k \in \mathbb{Z}$ כך ש $x = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi \cdot k$ אז $\sin(x) = 1$, לכן

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} (1)^n = 1 = f(x)$$

ii. אם $\exists k \in \mathbb{Z}$ כך ש $x = -\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi \cdot k$ אז $\sin(x) = -1$, לכן

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n = \text{doesn't converge}$$

כלומר $f(x)$ לא מוגדרת

iii. אם $-1 < \sin(x) < 1$ אז

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (\sin(x))^n = 0 = f(x)$$

בגלל ש$q^n \to 0$ כאשר $|q| < 1$

לכן קיבלנו $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \forall k \in \mathbb{Z} \\ 1 & x = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi \cdot k; \exists k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

עתה נחשב את הקטעים:

i. בקטע $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, נבחר x_n כך ש $\sin(x_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, וגם $x_n \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, לכן

$$\sin(x_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \sin(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} (\sin(x_n))^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \frac{1}{2} \neq 1 = f_n(x_0)$$

נשים לב כי f רציפה בx_0,

ולכן לפי שאלה 2 סעיף א מתקיים כי $f_n \to f$ לא מתכנסת במידה שווה ב$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

אחרת היה מתקיים $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$

ii. בקטע $[0, b]$, נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} [\sin(b)]^n = 0$$

יהי $\varepsilon > 0$, לכן $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n \in \mathbb{N} > N$ מתקיים

$$|[\sin(b)]^n - 0| < \varepsilon \Rightarrow [\sin(b)]^n < \varepsilon$$

לכן מהיות $\sin$ עולה בקטע $[0, b]$, $\forall x \in [0, b]$ מתקיים

$$0 < \sin^n(x) \leq \sin^n(b) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = |\sin^n(x) - 0| = \sin^n(x) < \varepsilon$$

כלומר

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall x \in [0, b])(\forall n \in \mathbb{N})(N < n \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

כלומר $f_n \to f$ רציפה במידה שווה ב$[0, b]$ מההגדרה

iii. בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, נבחר x_n כך ש $\sin(x_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, וגם $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, לכן

$$\sin(x_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \sin(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} (\sin(x_n))^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \frac{1}{2} \neq 1 = f_n(x_0)$$

נשים לב כי f רציפה בx_0,
ולכן לפי שאלה 2 סעיף א מתקיים כי $f_n \to f$ לא מתכנסת במידה שווה ב$\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,
אחרת היה מתקיים $\lim_{n\to\infty} f_n\left(x_n\right) = f\left(x_0\right)$
בנוסף לכך, יהי $\varepsilon > 0$, אז נבחר $N\left(\varepsilon\right) = 1$, נשים לב כי $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ($x = \frac{\pi}{2}$) ו$\forall n \in \mathbb{N} > N = 1$ מתקיים

$$\left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| = \left|1^n - 1\right| = 0 < \varepsilon$$

כלומר

$$\left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists N\left(\varepsilon\right) \in \mathbb{N}\right)\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\left(N < n \to \left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| < \varepsilon\right)$$

כלומר $f_n \to f$ רציפה במידה שווה ב$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ מההגדרה,
נניח בשלילה ש$f_n \to f$ במידה שווה ב$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$,
לכן משאלה 4 סעיף א מתקיים כי $f_n \to f$ במידה שווה ב$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
אך ראינו כי $f_n \to f$ לא מתכנסת במידה שווה בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
כלומר $f_n \to f$ לא מתכנסת במידה שווה ב$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, כנדרש
מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** נתון $f_n\left(x\right) = x^n - x^{2n}$, למצוא את f, והאם $f_n \to f$ במ"ש ב$\left[0,1\right], \left[0,b\right]$
הוכחה:
תחילה נחשב את f, נחלק למקרים:

i. אם $-1 < x < 1$ אז

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right) = \lim_{n\to\infty}\left[x^n - x^{2n}\right] = 0 - 0 = 0 = f\left(x\right)$$

ii. אם $x = 1$ אז

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right) = \lim_{n\to\infty}\left[x^n - x^{2n}\right] = 1 - 1 = 0 = f\left(x\right)$$

iii. אם $x = -1$ נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} f_{2n}\left(x\right) = \lim_{n\to\infty}\left[x^{2n} - x^{4n}\right] = \left(-1\right)^{2n} - 1 = 1 - 1 = 0 = f\left(x\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} f_{2n+1}\left(x\right) = \lim_{n\to\infty}\left[x^{2n+1} - x^{4n+2}\right] = \left(-1\right)^{n} - 1 = -1 - 1 = -2 = f\left(x\right)$$

כלומר $0 = f\left(-1\right) = -2$, סתירה לכן f לא מוגדרת ב$x = -1$

iv. אם $x > 1$ אז

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right) = \lim_{n\to\infty}\left[x^n\left(1 - x^n\right)\right] = -\infty$$

כלומר f לא מוגדרת
אם $x < 1$ אז

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right) = \lim_{n\to\infty}\left[x^n\left(1 - x^n\right)\right] = \infty$$

כלומר f לא מוגדרת

לכן קיבלנו $f\left(x\right) = \begin{cases} 0 & -1 < x \leq 1 \\ -2 & x = -1 \end{cases}$
עתה נחשב את הקטעים:

i. הקטע $[0,1]$, נבחר $x_n=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$, לכן $\lim_{n\to\infty}x_n=1$

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^n-\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^{2n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{4}\neq 0=f\left(1\right)=f\left(x_0\right)$$

נשים לב כי f רציפה ב1, לכן משאלה 2 סעיף א מתקיים כי $f_n\to f$ לא מתכנסת במידה שווה, אחרת היה מתקיים $\lim_{n\to\infty}f_n\left(x_n\right)=f\left(x_0\right)$

ii. הקטע $[0,b]$, נשים לב כי $\lim_{n\to\infty}b^n=0$ כי $0<b<1$,
יהי $\varepsilon>0$, לכן $\exists N\left(\varepsilon\right)$ כך ש$\forall n\in\mathbb{N}>N$ מתקיים $b^n<\frac{\varepsilon}{2}$,
יהי $x\in[0,b]$, לכן $\forall n\in\mathbb{N}>N$ מתקיים

$$\begin{aligned}\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|&=\left|x^n-x^{2n}-0\right|=\left|x^n-x^{2n}\right|\leq\left|x^n\right|+\left|x^{2n}\right|\leq\left|x^n\right|+\left|x^n\right|=2\left|x\right|^n\\&\leq 2\cdot\left|b\right|^n<2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

כלומר הראנו

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists N\left(\varepsilon\right)\in\mathbb{N}\right)\left(\forall x\in[0,b]\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\left(N<n\to\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)$$

כלומר $f_n\to f$ רציפה במידה שווה ב$[0,b]$ מההגדרה

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** נתון $f_n\left(x\right)=\begin{cases}0 & x\text{ odd}\\ x^n & x\text{ even}\end{cases}$, למצוא את f, והאם $f_n\to f$ במ"ש ב$(-1,1)$

הוכחה:

תחילה נחשב את f, נחלק למקרים:

i. אם $-1<x<1$ אז

$$\lim_{n\to\infty}f_{2n+1}\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}0=f\left(x\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}f_{2n}\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}x^n=0=f\left(x\right)$$

ii. אם $x=1$ אז

$$\lim_{n\to\infty}f_{2n+1}\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}0=f\left(x\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}f_{2n}\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}x^n=1=f\left(x\right)$$

אבל $1=f\left(1\right)=0$, סתירה ולכן f לא מוגדרת ב$x=1$

iii. אם $x=-1$ אז אם $x=1$ אז

$$\lim_{n\to\infty}f_{2n}\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}x^n=\text{doesn't converge}$$

לכן f לא מוגדרת ב$x=-1$ כי f_{2n} לא מתכנס (אם f_n היה מתכנס אז זה היה גורר כי f_{2n} היה מתכנס)

iv. אם $|x|>1$

$$\lim_{n\to\infty}f_{2n}\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}x^n=\text{doesn't converge}$$

לכן f לא מוגדרת ב$|x|>1$ כי f_{2n} לא מתכנס (אם f_n היה מתכנס אז זה היה גורר כי f_{2n} היה מתכנס)

לכן קיבלנו $f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<1\end{cases}$,
נניח בשלילה ש $f_n\to f$ במידה שווה,
יהי $0<\varepsilon<1$, אזי $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ כך ש $\forall n\in\mathbb{N}>N\ ,\forall x\in(-1,1)$ מתקיים

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

נשים לב כי $\forall n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\varepsilon<1\Rightarrow\sqrt[n]{\varepsilon}<1$$

נחלק למקרים:

i. אם N זוגי אז $\exists x_0\in(-1,1)$ כך ש $\sqrt[N+2]{\varepsilon}<x_0$, לכן

$$\varepsilon>|f_{N+2}(x_0)-f(x_0)|=\left|x_0^{N+2}-0\right|>\left|\left(\sqrt[N+2]{\varepsilon}\right)^{N+2}\right|=\varepsilon$$

לכן קיבלנו $\varepsilon<\varepsilon$, סתירה

ii. אם N אי זוגי אז $\exists x_0\in(-1,1)$ כך ש $\sqrt[N+1]{\varepsilon}<x_0$, לכן

$$\varepsilon>|f_{N+1}(x_0)-f(x_0)|=\left|x_0^{N+1}-0\right|>\left|\left(\sqrt[N+1]{\varepsilon}\right)^{N+1}\right|=\varepsilon$$

לכן קיבלנו $\varepsilon<\varepsilon$, סתירה

לכן לא קיים N המקיים את הנדרש, כלומר ש $f_n\to f$ לא מתכנסת במידה שווהמ.ש.ל.ב.☺

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** נתון $f_n(x)=\begin{cases}\frac{n}{x}\cdot\sin\left(\frac{x}{n}\right) & x\neq0\\ 1 & x=0\end{cases}$, למצוא את f, והאם $f_n\to f$ במ"ש ב$[-1,1]$

הוכחה:
תחילה נחשב את f, נחלק למקרים:

i. אם $x\neq0$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x}\cdot\sin\left(\frac{x}{n}\right)\overset{t=\frac{x}{n}}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\sin(t)}{t}=1=f(x)$$

ii. אם $x=0$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}1=1=f(x)$$

לכן $f(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$,
ערצה להראות כי $\lim_{n\to\infty}\sup\{|f_n(x)-f(x)|\mid x\in[-1,1]\}=0$,
נשים לב כי

$$\frac{n}{x}\cdot\sin\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{n}{x}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{2k+1}\cdot(-1)^k}{(2k+1)!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{2k}\cdot(-1)^k}{(2k+1)!}$$
$$\Rightarrow\frac{n}{x}\cdot\sin\left(\frac{x}{n}\right)-1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{2k}\cdot(-1)^k}{(2k+1)!}-1=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{2k}}{(2k+1)!}$$

נשים לב כי עבור $a_k=\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{2k}}{(2k+1)!}$, מתקיים כי $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot a_k$ הוא טור לייבניץ,
לכן מהמשפט שהוכח בכיתה שמתקיים

$$S_{2n}<\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n<S_{2n+1}\Rightarrow\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n\right|<\max\{|S_{2n+1}|,|S_{2n}|\}$$

נסיק כי

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot a_n\right| < \max\left\{\left|\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{3!}\right|,\left|\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{3!}-\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^4}{5!}\right|\right\} = \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{3!}\cdot\max\left\{1,\left|1-\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^4}{5!}\right|\right\}$$

לכן

$$\begin{aligned}0\le\sup\left\{|f_n(x)-f(x)|\mid x\in[-1,1]\right\} &= \sup\left\{\left|\frac{n}{x}\cdot\sin\left(\frac{x}{n}\right)-1\right|\mid x\in[-1,1]\right\}\\ &=\sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot a_n\right|\mid x\in[-1,1]\right\}\\ &\le\sup\left\{\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{3!}\cdot\max\left\{1,\left|1-\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^4}{5!}\right|\right\}\mid x\in[-1,1]\right\} = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{3!}\cdot\max\left\{1,\left|1-\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^4}{5!}\right|\right\}\end{aligned}$$

לכן ממשפט סנדוויץ' מתקיים $\lim_{n\to\infty}\sup\{|f_n(x)-f(x)|\mid x\in[-1,1]\}=0$,

כי $0 \leftarrow \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{3!}\cdot\max\left\{1,\left|1-\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^4}{5!}\right|\right\}$ (חסומה כפול מתאפסת)

וראינו בהרצאה כי $\lim_{n\to\infty}\sup\{|f_n(x)-f(x)|\mid x\in I\}=0$ אם"ם $f_n\to f$ במ"ש בI,

לכן $f_n\to f$ במ"ש ב$[-1,1]$

מ.ש.ל.ד.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** נתון $f_n(x)=\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$, למצוא את f,

הוכחה:

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{\frac{1}{n^2}+x^2}=\frac{x^2}{0+x^2}=1=f(x)$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}f_n(x)\,dx$

הוכחה:

נשים לב כי

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}f_n(x)\,dx &= \int_{-1}^{1}\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}dx \underset{dt=n\cdot dx}{\overset{t=nx}{=}} \int_{-1}^{1}\frac{t^2}{1+t^2}\frac{dt}{n}\\ &=\frac{1}{n}\cdot\int_{-1}^{1}\frac{t^2}{1+t^2}\cdot dt=\frac{1}{n}\cdot\int_{-1}^{1}\left[1-\frac{1}{1+t^2}\right]\cdot dt\\ &=\frac{1}{n}\cdot\left[t-\arctan(t)\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{n}\cdot\left[n\cdot x-\arctan(n\cdot x)\right]_{-1}^{1}\\ &=\frac{1}{n}\cdot\left[n-\arctan(n)-(-n-\arctan(-n))\right]=\\ &=\frac{1}{n}\cdot\left[2n-2\cdot\arctan(n)\right]=2-\frac{\arctan(n)}{n}+\frac{\arctan(-n)}{n}\end{aligned}$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left[2-\frac{\arctan(n)}{n}+\frac{\arctan(-n)}{n}\right]=2-0-0=2$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}1\cdot dx=1-(-1)=2$$

$$\Rightarrow\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=2=\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}f_n(x)\,dx$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** האם $f_n \to f$ במ"ש ב$[a,\infty)$?
הוכחה:
כן! יהי $\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n \in \mathbb{N} > N$ מתקיים $\frac{1}{1+n^2a^2} < \varepsilon$,
יהי $x \in [a,\infty)$ ו$N < n \in \mathbb{N}$ אזי

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} - 1\right| = \left|\frac{1}{1+n^2x^2}\right| \leq \frac{1}{1+n^2a^2} < \varepsilon$$

כלומר הראנו

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall x \in [0,b])(\forall n \in \mathbb{N})(N < n \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

כלומר $f_n \to f$ רציפה במידה שווה ב$[a,\infty)$ מההגדרה

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** האם $f_n \to f$ במ"ש ב$\mathbb{R}$?
הוכחה:
לא! נבחר $x_n = \frac{1}{n}$ ולכן $x_0 = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n$,
נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2}{1+n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \neq 1 = f(0) = f(x_0)$$

נשים לב כי f רציפה כי היא קבועה ולכן f רציפה בx_0,
לכן משאלה 2 סעיף א מתקיים ש$f_n \to f$ לא רציפה במידה שווה,
אחרת היה מתקיים $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$

מ.ש.ל.ד.☺

7. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** f, $f_n \to f$ במ"ש
הוכחה:
נחלק למקרים:

i. אם $x = 1$, אז

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} \Phi(1) \cdot 1^n = \Phi(1) = 0 = f(1)$$

ii. אם $0 \leq x < 1$, אז

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi(x) \cdot x^n = \Phi(x) \cdot \lim_{n\to\infty} x^n = \Phi(x) \cdot 0 = 0 = f(1)$$

לכן $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$,
מהיות Φ פונקציה רציפה ב$[0,1]$, היא חסומה בו ונסמן את החסם M, כלומר $|\Phi(x)| \leq M$, $\forall x \in [0,1]$
יהי $\varepsilon > 0$, מהיות $\Phi(x)$ רציפה קיים $\delta(\varepsilon)$ כך ש$\forall x \in [0,1]$ כך ש$|x-1| < \delta$ מתקיים $|\Phi(x)| < \varepsilon$
בנוסף לכך $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n \in \mathbb{N} > N$ מתקיים $\left|(1-\delta)^n\right| < \frac{\varepsilon}{M}$,
יהי $x \in [0,1]$, ,
אחרת $x \in [0,1)$, יהי $\forall n \in \mathbb{N} > N$, נחלק למקרים:

i. אם $x = 1$ נשים לב כי $|f_n(x) - f(x)| = |0-0| = 0 < \varepsilon$

ii. אם $1-\delta<x<1$,

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|\Phi(x)\cdot x^n-0\right|=\left|\Phi(x)\right|\cdot x^n\le\left|\Phi(x)\right|<\varepsilon$$

iii. אם $0\le x\le 1-\delta$,

$$\begin{aligned}\left|f_n(x)-f(x)\right|&=\left|\Phi(x)\cdot x^n-0\right|=\left|\Phi(x)\right|\cdot x^n\le M\cdot x^n\\&\le M\cdot(1-\delta)^n<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon\end{aligned}$$

כלומר עבור N מתקיים $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ כאשר $\forall x\in[0,1]$,$\forall n\in\mathbb{N}$ $N<$,

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N})\,(\forall x\in[0,1])\,(\forall n\in\mathbb{N})\,(N<n\rightarrow\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon)$$

כלומר $f_n\to f$ רציפה במידה שווה ב$[0,1]$ מההגדרה

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם בהכרח הטענה נכונה כאשר Φ לא רציפה?

הוכחה:

לא! נבחר $\Phi(x)=\begin{cases}0 & x=1\\ 1 & x\neq 1\end{cases}$, לכן $f_n(x)=\begin{cases}0 & x=1\\ x^n & x\neq 1\end{cases}$,

נחשב את f:

i. אם $x=1$, אז

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}0=0=f(1)$$

ii. אם $0\le x<1$, אז

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}x^n=0=f(x)$$

לכן $f(x)=0$, $\forall x\in[0,1]$,

נבחר $x_n=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$, נשים לב כי $\lim_{n\to\infty}x_n=1=x_0$, וגם

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^n=\frac{1}{2}\neq 0=f(1)=f(x_0)$$

וגם f רציפה ב$x_0=1$ (כי היא קבועה),

לכן משאלה 2 סעיף א מתקיים כי $f_n\to f$ לא מתכנסת במידה שווה,

אחרת היה מתקיים $\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$

מ.ש.ל.ב.☺

8. **צ"ל:** $T_nf\to f$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-r,r]$

הוכחה:

ראינו בהרצאה כי $\forall x\in(-1,1)$, $\exists x_0\in(-1,1)$ כך ש$\left|R_nf(x)\right|\le\frac{1}{1+x_0}\cdot\left|x_0\right|^{n+1}$,

נשים לב כי $\forall x_0\in(-1,1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x_0}\cdot\left|x_0\right|^{n+1}=0$$

נשים לב כי מתקיים

$$0 \le \sup\left\{\left|T_n f(x) - f(x)\right| \mid x \in [-r,r]\right\} = \sup\left\{\left|R_n f(x)\right| \mid x \in [-r,r]\right\}$$
$$\overset{x\in[-r,r]\subseteq(-1,1)}{\le} \sup\left\{\frac{1}{1+x_0} \cdot |x_0|^{n+1} \mid x_0 \in (-1,1)\right\}$$

לכן ממשפט סנדוויץ' מתקיים $\lim_{n\to\infty} \sup\left\{\left|T_n f(x) - f(x)\right| \mid x \in [-r,r]\right\} = 0$,
כי $\sup\left\{\frac{1}{1+x_0} \cdot |x_0|^{n+1} \mid x_0 \in (-1,1)\right\} \to 0$, $\forall x_0 \in (-1,1)$,
וראינו בהרצאה כי $\lim_{n\to\infty} \sup\left\{\left|f_n(x) - f(x)\right| \mid x \in I\right\} = 0$ אם"ם $f_n \to f$ במ"ש ב-I,
לכן $T_n f \to f$ במ"ש ב-$[-r,r]$

מ.ש.ל.☺