פתרון תרגיל מספר 3 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

23 באפריל 2020

שאלה 5:

סעיף 1:

צ"ל: התנאים למת הניפוח מתקיימים עבור $p = 2$

הוכחה:

תהי $w \in L$ מילה כך ש־ $|w| \geq 2$, נראה שקיימת חלוקה x, y, z כך ש־ $w = x \cdot y \cdot z$, $|y| > 0$, $|x \cdot y| \leq p$ וגם $x \cdot y^i \cdot z \in L$ לכל $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

מהיות $w \in L$ מתקיים כי $w = a^i b^j c^k$, נחלק למקרים:

1. אם $i = 0$: נחלק למקרים

   (א) אם $j = 0$: אז מתקיים כי $w = c^k$, כלומר $x = \varepsilon, y = c, z = c^{k-1}$,
   תחילה נשים לב כי $x \cdot y \cdot z = \varepsilon \cdot c \cdot c^{k-1} = c^k = w$,
   נשים לב כי $|x \cdot y| = 1 \leq 2 = p$ וגם $|y| = 1 > 0$, וגם יהי $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, נשים לב כי

   $$x \cdot y^l \cdot z = c^l \cdot c^{k-1} = c^{l+k-1} \overset{i \equiv 0 \mod 2}{\in} L$$

   כנדרש, כלומר כל התנאים מתקיימים

   (ב) אם $j \neq 0$: אז מתקיים $w = b^j \cdot c^k$, נבחר $x = \varepsilon, y = b, z = b^{j-1} c^k$,
   תחילה נשים לב כי $x \cdot y \cdot z = \varepsilon \cdot b \cdot b^{j-1} c^k = b^j c^k = w$,
   נשים לב כי $|x \cdot y| = 1 \leq 2 = p$ וגם $|y| = 1 > 0$, וגם יהי $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, נשים לב כי

   $$x \cdot y^l \cdot z = b^l \cdot b^{j-1} c^k = b^{j+l-1} c^k \overset{i \equiv 0 \mod 2}{\in} L$$

   כנדרש, כלומר כל התנאים מתקיימים

2. אם $i \neq 0$ וגם $i \equiv 0 \mod 2$: נבחר $x = \varepsilon, y = a^2, z = a^{i-2} b^j c^k$,
   תחילה נשים לב כי $x \cdot y \cdot z = \varepsilon \cdot a^2 \cdot a^{i-2} b^j c^k = a^i b^j c^k = w$,
   נשים לב כי $|x \cdot y| = 2 \leq 2 = p$ וגם $|y| = 2 > 0$, וגם יהי $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, נשים לב כי

   $$i + 2 \cdot (l-1) \equiv 0 + 2 \cdot (l-1) \equiv 0 + 0 = 0 \mod 2$$

   $$x \cdot y^l \cdot z = a^{2l} \cdot a^{i-2} b^j c^k = a^{i+2\cdot(l-1)} b^j c^k \overset{i+2\cdot(l-1) \equiv 0 \mod 2}{\in} L$$

   כנדרש, כלומר כל התנאים מתקיימים

3. אם $i \neq 0$ וגם $i \equiv 1 \mod 2$: נבחר $x = \varepsilon, y = a, z = a^{i-1} b^j c^k$,
   תחילה נשים לב כי $x \cdot y \cdot z = \varepsilon \cdot a \cdot a^{i-1} b^j c^k = a^i b^j c^k = w$,
   נשים לב כי $|x \cdot y| = 1 \leq 2 = p$ וגם $|y| = 1 > 0$,
   מהיות $a^i b^j c^k = w \in L$ וגם $i \not\equiv 0 \mod 2$ מתקיים כי $j = k$
   עתה, יהי $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, נשים לב כי

   $$x \cdot y^l \cdot z = a^l \cdot a^{i-1} b^j c^k = a^{i+l-1} b^j c^k \overset{j=k}{\in} L$$

   כנדרש, כלומר כל התנאים מתקיימים

כלומר לכל מילה $w \in L$ כך ש־ $|w| \geq 2$ קיימת חלוקה x, y, z כך ש־ $w = x \cdot y \cdot z$, $|y| > 0$, $|x \cdot y| \leq p$ וגם $x \cdot y^i \cdot z \in L$ לכל $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
כלומר השפה מקיימת את למת הניפוח

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2:

צ"ל: השפה לא רגולרית

הוכחה:

נסמן $L_1 = \left\{a \cdot b^j \cdot c^k \mid j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$,
נניח בשלילה ש־ $L \in REG$, לכן מסגור לחיתוך נקבל כי $L' = L \cap L_1 = \{a \cdot b^m \cdot c^m \mid m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ גם רגולרית.
נסמן את קבוע הניפוח ב־ p עבור השפה L',
נסתכל על המילה $w = a \cdot b^p \cdot c^p \in L'$
תהי x, y, z חלוקה המקיימת $w = x \cdot y \cdot z$, $|y| > 0$, $|x \cdot y| \leq p$
נשים לב כי $|w| \geq p$
נסמן $|x| = n, |y| = m$:

1. אם $n = 0$: אזי נקבל כי $x = \varepsilon, y = a \cdot b^{m-1}$ ו־ $z = b^{p-m+1} \cdot c^p$,
לכן מלמת הניפוח מתקיים כי $x \cdot y^0 \cdot z \in L'$, אבל נשים לב כי

$$x \cdot y^0 \cdot z = \left(a \cdot b^{m-1}\right)^0 \cdot b^{p-m+1} \cdot c^p = b^{p-m+1} \cdot c^p \overset{\text{doesn't start with a}}{\notin} L'$$

2. אם $n \neq 0$: אזי נקבל כי $x = a \cdot b^{n-1}, y = b^m$ ו־ $z = b^{p-m-n+1} \cdot c^p$,
לכן מלמת הניפוח מתקיים כי $x \cdot y^0 \cdot z \in L'$, אבל נשים לב כי

$$x \cdot y^0 \cdot z = a \cdot b^{n-1} \cdot b^{0 \cdot m} \cdot b^{p-m-n+1} \cdot c^p = ab^{p-m} \cdot c^p \overset{p-m \neq p}{\notin} L'$$

כלומר הראנו שלכל חלוקה של w ו־2 התנאים הראשונים מתקיימים, השלישי לא מתקיים,
כלומר קיבלנו סתירה ללמת הניפוח, ולכן $L' \notin REG$,
ולכן ההנחה שהנחנו לא נכונה ונקבל כי $\boxed{L \notin REG}$.

מ.ש.ל.ב.☺