פתרון תרגיל מספר 6 - דאסט

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

4 במאי 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** פסואודו קוד למציאת איבר קודם
הוכחה:
בגדול הרעיון הוא כמו $succesor$ רק בדיוק הפוך, אם יש בן שמאלי אז להחזיר את המקסימום של התת עץ ההוא, אחרת להחזיר את האב הראשון שהעלה הוא הבן השמאלי

```
Max(tree):
    if tree.root is null
      return null
    node = tree.root
    while node.right is not null
      node = node.right
    return node
Predeccessor(node):
    if node.left is not null
      return Max(node.left)
    parent = node.parent
    while (parent is not null) and (node == parent.left)
      node = parent
      parent = node.parent
    return parent
```

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** לעוקב של e אין בן שמאלי ולקודם אין בן ימני
הוכחה:
לפי האלגוריתם לעוקב, ל e יש 2 עלים ולכן יחזיר את המינימום של התת עץ הימני.
המינימום מחזיר את האיבר שהוא הכי שמאלי בעץ (אחרת הוא ימשיך בלולאה), מסיבה זאת לא יהיה לעוקבו בן שמאלי, אחרת הוא לא היה יוצא מהלולאה ומחזיר איבר זה.
לפי האלגוריתם לקודם, ל e יש 2 עלים ולכן יחזיר את המקסימום של התת עץ השמאלי.
המקסימום מחזיר את האיבר שהוא הכי ימני בעץ (אחרת הוא ימשיך בלולאה), מסיבה זאת לא יהיה לעוקבו בן ימני, אחרת הוא לא היה יוצא מהלולאה ומחזיר איבר זה.

מ.ש.ל.ב.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** להוכיח נוסחת פיבונאצ'י באינדוקציה
הוכחה:

<u>בסיס:</u> עבור $n=0,1$, מתקיים

$$F_0=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(1-1\right)=0$$
$$F_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=1$$

כלומר הטענה מתקיימת עבור $n=0,1$
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה לכל $k<n$ ונוכיח שהיא נכונה לn

$$\begin{aligned}F_n=F_{n-1}+F_{n-2}&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n-1}-\psi^{n-1}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n-2}-\psi^{n-2}\right)=\frac{\phi^{n-2}}{\sqrt{5}}\cdot(\phi+1)-\frac{\psi^{n-2}}{\sqrt{5}}\cdot(\psi+1)\\&\overset{\star}{=}\frac{\phi^{n-2}}{\sqrt{5}}\cdot\phi^2-\frac{\psi^{n-2}}{\sqrt{5}}\cdot\psi^2=\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}-\frac{\psi^n}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)\end{aligned}$$

כלומר הטענה נכונה לn, כנדרש
הערה: נשים לב כי $\star$ מתקיים $\phi+1=\phi^2,\psi+1=\psi^2$ (בחרנו אותם להיות פתרונות למשוואה $x^2-x-1=0\Rightarrow$ $x^2=x+1$)

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** נוסחא ישירה ל$T(n)$
הוכחה:
נשים לב כי $T(n)=4+\sum_{i=1}^{n-2}T(i)$ וגם $T(1)=T(2)=3$,
נשים לב כי

$$T(n+1)-T(n)=\left(4+\sum_{i=1}^{n-1}T(i)\right)-\left(4+\sum_{i=1}^{n-2}T(i)\right)=T(n-1)$$
$$\Rightarrow\boxed{T(n+1)=T(n)+T(n-1)}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** c_1,c_2
הוכחה:
תחילה נשים לב ש$T(n)$ מקיים את נוסחת הרקורסיה של פיבונאצ'י וגם $T(1)=T(2)$,
בדיוק כמו $F_1=F_2=1$, כלומר נוסחת הרקורסיה ניתנת לכתיבה כמשהו $T(1)\cdot F_n+c$, הסיבה ל$+c$ כי הוא מתבטל בהפרש אך כן יש לו חשיבות בנוסחת הרקורסיה עצמה, לכן נקבל כי $T(n)=T(1)\cdot F_n+c=c_1\cdot T(n)+c_2$
נשים לב כי $T(1)=T(2)=3=3\cdot F_1=3\cdot F_2$,
כלומר כל פעם אנחנו מסתכלים על איבר פיבונאצ'י פי 3 יותר גדול, לכן $c_1=3$, כלומר $T(n)=3F_n+c_2$,
נציב $n=3$ ונקבל $T(3)=7=3\cdot F_3+c_2=6+c_2\Rightarrow c_2=1$,
כלומר

$$\boxed{T(n)=3F_n+1}$$

מ.ש.ל.ג.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** יש לפחות $2^{bh(x)}-1$ קודקודים פנימיים
הוכחה:
נוכיח את הטענה באינדוקציה על גובה השורש x
<u>בסיס:</u> $h(x)=0$, נשים לב כי אין לx קודקודים פנימיים ולכן יש לו לפחות $0=2^{b\cdot 0}-1=1-1$,
כלומר הטענה מתקיימת עבור $h(x)=0$
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה לכל עץ בגובה קטן מ$h(x)$ ונוכיח ל$h(x)$,
נשים לב שלx יש 2 ילדים, לכל ילד יש לפחות $2^{b\cdot h(x-1)}-1=2^{b\cdot h(x)-1}-1$ קודקודים פנימיים,
הערה: גובה הילדים הוא $h(x-1)=h(x)-1$
לכן לx יש לפחות

$$\left(2^{b\cdot h(x)-1}-1\right)+\left(2^{b\cdot h(x)-1}-1\right)+1=2^{b\cdot h(x)}-1$$

קודקדים פנימיים, כלומר הטענה נכונה עבור $h(x)$, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** יש לפחות $\frac{n}{2}$ עלים שחורים בכל מסלול
הוכחה:
נסמן מסלול משורש העץ לעלה ב$(v_1,\dots,v_n)$, כאשר $v_i=\text{red}|\text{black}$ (מסמן את הצבע של הקודקוד הi במסלול)
נשים לב כי אם v_i אדם אז v_{i-1},v_{i+1} הינם שחורים,
לכן אם נניח כי v_i אדום, לכל היותר יתקיים $v_i,v_{2+i},v_{4+i},\dots$ אדומים, כאשר $n=2k+1$ או $n=2k+2$, שזה לכל היותר $\frac{n-(i-1)}{2}$ אדומים
לכן יש לכל היותר $\frac{n}{2}$ אדומים (מתקיים כש$i=1,2$)
מכאן נוכל להסיק כי יש לכל היותר $\frac{n}{2}$ אדומים, כלומר יש לכל הפחות $n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}$ שחורים, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

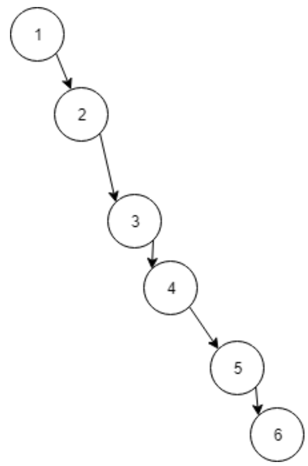
(ג) **צ"ל:** $h(x)\leq 2\cdot\log(n+1)$
הוכחה:
מסעיף ב' מתקיים כי $b\geq\frac{h(x)}{2}$, כי בכל מסלול יש לפחות $\frac{h(x)}{2}$ שחורים ונתון כי יש b שחורים
מסעיף א' מתקיים כי

$$\begin{aligned}&n\geq 2^{b\cdot h(x)}-1\geq 2^{b}-1\geq 2^{\frac{h(x)}{2}}-1\\ \Rightarrow &n+1\geq 2^{\frac{h(x)}{2}}\Rightarrow\log(n+1)\geq\frac{h(x)}{2}\Rightarrow\boxed{h(x)\leq 2\cdot\log(n+1)}\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ג.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** כל מסלול באורך מקסימלי בעץ חיפוש בינארי עם יותר מ5 קודקודים הוא בין 2 עלים
הוכחה:
לא נכון! נסתכל על העץ הבא



נשים לב ש$D\left(T\right)=6$, והמסלול הארוך ביותר הוא בין השורש לעלה, בסתירה לטענה שזה בין 2 עלים

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** כל מסלול באורך מקסימלי בעץ AVL עם יותר מ5 קודקודים הוא בין 2 עלים

הוכחה:

נכון! נסמן את המסלול הארוך ביותר ב$v_0,\ldots,v_n$, כאשר $D\left(T\right)=n+1$
נניח בשלילה כי v_0 או v_n לא עלה
נניח בלי הגבלת הכלליות כי v_0 לא עלה (אותו טיעון עבור v_n),
נסמן בh_{v_0} את גובה תת העץ של v_0
נניח בלי הגבלת הכלליות כי $v_0.left$ מוגדר,

- אם $h_{v_0}=1$, אז נסתכל על המסלול $v_0.left,v_0,\ldots,v_n$ זהו מסלול פשוט ארוך יותר (כי מ$v_0.left$ ניתן להגיע רק לv_0) בסתירה למקסימליות $D\left(T\right)=n+1$ כי מצאנו מסלול באורך $n+2$
- אחרת $h_{v_0}>1$, אם v_n לא בתת העץ של v_0 אז נסתכל על המסלול $v_0.left,v_0,\ldots,v_n$ זהו מסלול פשוט ארוך יותר (כי מ$v_0.left$ ניתן להגיע רק לv_0 או לתת העץ) בסתירה למקסימליות $D\left(T\right)=n+1$ כי מצאנו מסלול באורך $n+2$.

  אחרת v_n בתת עץ של v_0, אם v_0 הוא לא השורש אז נסתכל על המסלול $v_0.parent,v_0,\ldots,v_n$ זהו מסלול פשוט ארוך יותר (כי מ$v_0.parent$ ניתן להגיע רק לv_0 או לא להכנס לתת העץ בו נמצא v_n) בסתירה למקסימליות $D\left(T\right)=n+1$ כי מצאנו מסלול באורך $n+2$.

  עתה נשאר המקרה v_0 שורש וv_n ענף, וגובה העץ גדול מ1 מהיות והוא AVL ויש יותר מ5 קודקודים,
  לכן ננניח בלי הגבלת הכלליות כי $v_1=v_0.left$ אז המסלול הבא פשוט $v_0.right,v_0,\ldots,v_n$, כלומר $D\left(T\right)\geq n+2$ בסתירה לכך ש$n+1$

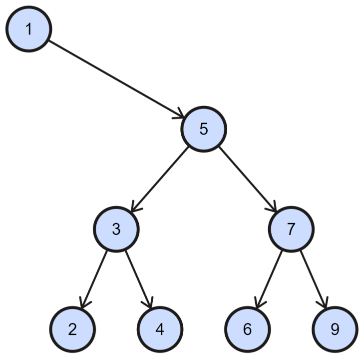
לאחר עבירה על כל המקרים, קיבלנו בכולם סתירה, כלומר v_0,v_n עלים כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** כל מסלול באורך מקסימלי בעץ חיפוש בינארי עם יותר מ5 קודקודים כולל שורש עץ

הוכחה:

לא נכון! נסתכל על העץ הבא



המסלול הארוך ביותר הוא בין 2 ל9 (לדוגמא) ו$D(T)=4$ כאשר מסלול דרך השורש הוא לכל היותר מאורך 3

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** כל מסלול באורך מקסימלי בעץ AVL עם יותר מ5 קודקודים כולל שורש עץ

הוכחה:

נכון! יהי מסלול $v_0,\dots,v_k$, נסמן את הגובה של העץ בn,
אם המסלול הוא בתת עץ של n אז גובה תת העץ הוא לכל היותר $n-1$,
אורך המסלול המקסימלי הניתן ליצור בעץ מגובה $n-1$ הוא באורך $n+n-1=2n-1$,
נסתכל על תת העץ הימני והשמאלי, גובהם הוא לפחות $n-1,n-2$
לכן קיים עלה בכל אחד מהם בגובה $n-1,n-2$ (בהתאמה ביחס למי $n-1$ ומי $n-2$)
נסתכל על אורך המסלול בין העלים הללו ונראה שהוא באורך $n+1+n+1-1=2n$,
נשים לב כי $2n-1<2n$, כלומר הראנו שקיים מסלול שעובר בשורש שהוא ארוך יותר מכל מסלול שלא עובר בשורש,
לכן כל מסלול באורך מקסימלי עובר בשורש, כנדרש

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **פתרון:**

i. **צ"ל:** הצעה לשדה חדש להוספה

הוכחה:

נוסיף את השדה גובה 1+.

מ.ש.ל.ה.1.☺

ii. **צ"ל:** הצעה לעידכון הוספה והורדה

הוכחה:

בנוסף לעדכון הגובה, בסוף כל הוספה, נרוץ ב$forloop$ על כל האבות של העלה שנוסף ונעדכן את השדה של גובה התת עץ הימני או השמאלי בהתאם (על ידי הוספת 1).
בנוסף לעדכון הגובה, בסוף כל מחיקה, נעדכן את כל האבות של העלה שנמחק ונעדכן את השדה של גובה התת עץ הימני או השמאלי בהתאם (על ידי הורדת 1).

מ.ש.ל.ה.2.☺

iii. **צ"ל:** הסבר לשמירה על יעילות

הוכחה:

נשים לב שכל מה שעשינו הוא לרוץ על כל ה$Nodes$ שכבר רצנו עליהם פעם אחת כדי לעדכן את הקודקוד הנדרש.
לכן אם רצנו על k קודקודים, נוסיף לזמן הריצה $c\cdot k$ כאשר c זה זמן העדכון.
לכן, זמן הריצה לא ישתנה, אם הוספה או הורדה היה ב$\log$, נרוץ $\Theta(\log(n))+c\cdot\log(n)=\Theta(\log(n))$,
אם הוספה או הורדה היה בn, נרוץ $\Theta(n)+c\cdot n=\Theta(n)$,

מ.ש.ל.ה.3.☺

iv. **צ"ל:** הצעה לאלגוריתם

הוכחה:

```
MaxRoute(node)
  if node == null
```

```
  return -1
sumHeights = 0
if node.left != 0
  sumHeight += node.left.height
if node.right != 0
  sumHeight += node.right.height
return Max(MaxRoute(node.left), MaxRoute(node.right), sumHeights+1)
```

מ.ש.ל.ה.4.☺

v. **צ"ל:** נכונות אלגוריתם

הוכחה:

עבור עץ ריק יחזיר -1 כנדרש,

נוכיח באינדוקציה,

בסיס: $n=0$, נשים לב כי הוא מחזיר $max\left(0,0,1\right)=1$, כנדרש

צעד: נניח שהטענה נכונה לכל עץ בגובה $n-1$ ונוכיח לעץ בגובה n,

נשים לב כי יש 3 סוגי מסלולים אפשריים, או רק בתת עץ ימין, או רק בתת עץ שמאלי או שהוא שילוב של 2 תתי העץ.

נשים לב שאם הוא שילוב, אז אורך המסלול הוא לכל היותר h_L+h_R+1, (מעלה לעלה),

נשים לב כי האלגוריתם מחזיר את המקסימום של האפשרויות שצוינו לעיל (כאשר $MaxRoute(node.left)$, $MaxRoute(node.right)$ מחזירים את המקסימום בתת העץ לפי הנחת האינדוקציה לעצים בגובה $n-1$), כלומר האלגוריתם נכון לכל עץ בגובה n, כנדרש

מ.ש.ל.ה.5.☺

vi. **צ"ל:** יעילות האלגוריתם

הוכחה:

נשים לב כי האלגוריתם מבצע מספר סופי של פעולות שנסמנו בc לכל עלה, ורץ על כל קודקוד פעם אחת לכן

$$n\leq T\left(n\right)\leq c\cdot n\Rightarrow\boxed{T\left(n\right)\in\Theta\left(n\right)}$$

מ.ש.ל.ה.6.☺

vii. **צ"ל:** קריטריון לשדה

הוכחה:

הקריטריון הוא: כל שדה שדורש שינוי של $O\left(1\right)$ לכל אב של הקודקוד לא ישנה את זמן הריצה (כי אנחנו רק מוסיפים $O\left(1\right)\cdot n$ כאשר היעילות היא גדולה או שווה $O\left(n\right)$)

מ.ש.ל.ה.7.☺

5. **צ"ל:** אלגוריתם CUTT_BST

הוכחה:

תחילה האלגוריתם ימצא את הקודקוד שערכו k אם כזה קיים, אחרת יוסיף אותו ($\log\left(n\right)$),

לאחר מכן הוא יבצע $rotations$ כדי לעלות את הקודקוד שערכו k לשורש ($\log\left(n\right)$).$\star$

כשהוא הפך להיות השורש, נחזיר את תתי העצים של השורש, ועץ חדש שמכיל את הערך k.

הערה: נשים לב כי $rotation$ אולי משנה את כמות האיברים אבל הוא תמיד שומר עץ חיפוש בינארי (לפי מה שראינו בהרצאה)

מ.ש.ל.☺