

פתרון תרגיל מספר 8 - דאסט

שם: מיכאל גרינבאום, ת"ז: 211747639

18 במאי 2019

1. פתרון:

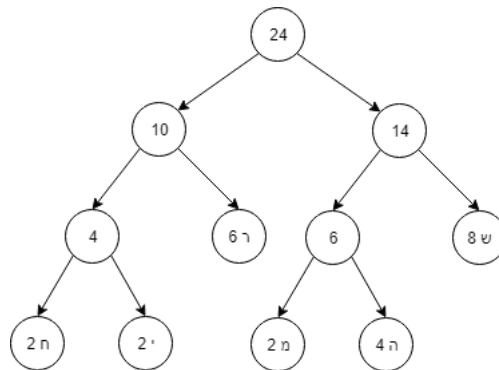
(א) צ"ל: שכיחויות, עץ הופמן, תוחלת

הוכחה:

תחילה נשים לב כי השכיחויות הינם:

אות	ש	ר	ה	י	מ	ח
מספר הופעות	8	6	4	2	2	2
שכיחות	$\frac{8}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{2}{24}$

לכן עץ ההופמן הוא:



נסמן ש - S , ר - R , ה - H , י - Y , מ - M , ח - h , לכן

$$L(S) = L(R) = 2, L(H) = L(h) = L(Y) = L(M) = 3$$

לכן התוחלת היא

$$L(\text{code}) = \sum_{\sigma \in \Sigma} f(\sigma) \cdot L(\sigma) = \frac{8}{24} \cdot L(S) + \frac{6}{24} \cdot L(R) + \frac{4}{24} \cdot L(H) + \frac{2}{24} \cdot L(Y) + \frac{2}{24} \cdot L(M) + \frac{2}{24} \cdot L(h) \\ = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{12} \cdot 3 + \frac{1}{12} \cdot 3 + \frac{1}{12} \cdot 3 = \frac{29}{12} \sim 2.416666$$

לכן הקידוד הוא

0001101000110110000101111010110000101111010100011010001101

והוא באורך 58

מ.ש.ל.א. ☺

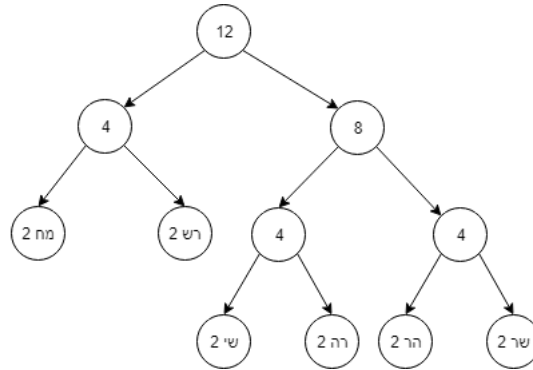
(ב) צ"ל: שכיחויות, עץ הופמן, תוחלת, קוד

הוכחה:

תחילה נשים לב כי השכיחויות הינם:

אות	שר	הש	רה	שי	רש	מח
מספר הופעות	2	2	2	2	2	2
שכיחות	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

לכן עץ ההופמן הוא:



נסמן שר - S , הש - R , רה - H , שי - Y , רש - M , מח - h , לכן

$$L(S) = L(R) = 2, L(H) = L(h) = L(Y) = L(M) = 3$$

לכן התוחלת היא

$$L(\text{code}) = \sum_{\sigma \in \Sigma} f(\sigma) \cdot L(\sigma) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \frac{1}{6} \cdot L(\sigma) = \frac{1}{6} \cdot (2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3) \\ = \frac{1}{6} \cdot (4 + 12) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \sim 2.666666$$

לכן הקידוד הוא

11111010110001001000100111110101

והוא באורך 32

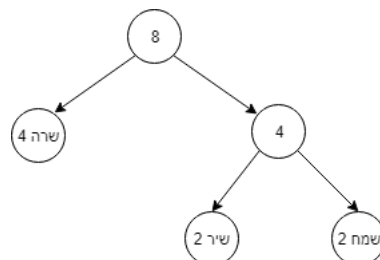
מ.ש.ל.ב. ☺

(ג) צ"ל: שכיחויות, עץ הופמן, תוחלת, קוד הוכחה:

תחילה נשים לב כי השכיחויות הינם:

אות	שרה	שיר	שמח
מספר הופעות	4	2	2
שכיחות	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$

לכן עץ ההופמן הוא:



נסמן שרה - S , שיר - R , שמח - H , לכן

$$L(S) = 1, L(R) = L(H) = 2$$

לכן התוחלת היא לכן הקידוד הוא

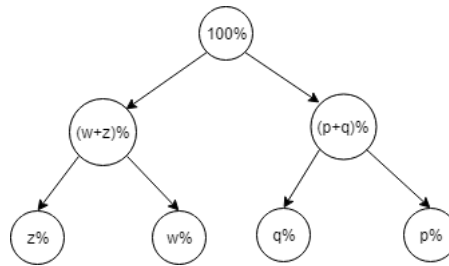
001011101100

והוא באורך 12

מ.ש.ל.ג. ☺

2. צ"ל: אם $f(\sigma) > 0.4$ אז $\exists \tau \in \Sigma$ כך ש $L(\tau) = 1$
הוכחה:

נניח בשלילה שלכל $\sigma' \in \Sigma$ מתקיים $L(\sigma') \geq 2$,
העץ הוא מהצורה כאשר 0.4 הוא קודקוד הוא בתת העץ של אחד העלים בעץ המצורף:



עתה נחלק למקרים:

(א) אם σ בתת העץ של p או של q אז מתקיים $w, z \geq \max\{p, q\} > 0.4$, לכן

$$1 = w + z + p + q \geq w + z + \max\{p, q\} = 1.2$$

סתירה, ולכן σ לא יכול להיות בתת העץ של p או של q

(ב) אם σ בתת העץ של w אז מתקיים $z \geq w > 0.4$, לכן

$$p + q = 1 - z - w < 1 - 0.8 = 0.2$$

לכן לפי האלגוריתם, תת העץ $p + q$ אמור להיות מחובר ל w במקום z בסתירה למבנה העץ

(ג) אם σ בתת העץ של z אז מתקיים $z > 0.4$, מהיות z מחובר ל w , מתקיים כי

$$0.4 < \max\{z, w\} < p + q$$

לכן

$$w = 1 - z - p - q < 0.2$$

ואנחנו יודעים כי $w \geq \max\{p, q\}$, מאידך שהעץ נוצר, לכן

$$0.4 > 2w \geq p + q > 0.4$$

סתירה כי $0.4 \not\geq 0.4$

הראנו שבכל אחת מהאפשרויות, המצב בלתי אפשרי, לכן חייבת להיות אות τ כך ש $L(\tau) = 1$

מ.ש.ל. ☺

3. צ"ל: שיטות פרובינג וכמות התנגשויות
הוכחה:

(א) תחילה נסתכל על לינארי, נשים לב כי המערך הסופי הוא

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
77	54	57	23	74				63	31	76

וכמות ההתנגשויות עבור גישה זאת הוא 11

(ב) עתה נסתכל על ריבועי, נשים לב כי המערך הסופי הוא

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
77	23	57	74		54			63	31	76

וכמות ההתנגשויות עבור גישה זאת הוא 6

(ג) עתה נסתכל על דאבל האש, נשים לב כי המערך הסופי הוא

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
77	23	57	54	74				63	31	76

וכמות ההתנגשויות עבור גישה זאת הוא 4

מ.ש.ל. ☺

4. פתרון:

(א) צ"ל: הצעה למבנה נתונים

הוכחה:

מבנה נתונים של 2 מערכים, אחד יהיה מערך ממוין שמתמייך *initia* (במיון בועות לדוגמא $O(n^2)$) ונקרא לו *sorted*, ומערך נוסף שהוא בגודל n , במערך זה נשתמש בdouble hashing כשנכניס אליו איברים ונקרא לו *set*, (אתחול מערך זה ייקח לכל היותר זמן פולינומיאלי, לכן הסכום באתחול עדיין יהיה זמן פולינומיאלי) נשים לב $select(k)$ היא ב $O(1)$ כי היא פשוט מחזירה את $sorted[k]$, נשים לב כי $Member(x)$ היא בממוצע $O(1)$ כשאנחנו מחפשים בשיטה double hashing ב *set*, כנדרש

מ.ש.ל.א. ☺

(ב) צ"ל: מבנה כזה לא קיים

הוכחה:

נניח בשלילה שמבנה כזה קיים, ונראה שניתן למיין מערך באלגוריתם השוואת ביעילות יותר טובה מ $n \cdot \log(n)$, נקבל מערך בגודל n , נאתחל את מבנה הנתונים עם קבוצה S ריקה באתחול, לכן הוא ייתחל ב $O(1)$, לאחר מכן נוסיף כל איבר מהמערך למבנה נתונים זה ייקח $O(1) \cdot n = O(n)$, לאחר מכן, נשים $arr[i] = select(i)$, לכל i , זה ייקח $O(1) \cdot n = O(n)$, מנכונות $select(i)$, המערך arr יהיה מערך ממוין לאחר הריצה, והזמן שדבר זה לקח הוא $O(1) + O(n) + O(n) = O(n)$, בסתירה לכך שהוכחנו שכל אלגוריתם מיון מבוסס השוואות הוא לפחות ביעילות $n \cdot \log(n)$, לכן מבנה זה לא קיים.

מ.ש.ל.ב. ☺