פתרון תרגיל מספר 11 - תורת המשחקים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

26 ביוני 2021

1. **צ"ל:** ערך השחקן ה- i
הוכחה:
נשים לב ש-

$$\Psi_i(v)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi}\left[v\left(P_i(\pi)\cup\{i\}\right)-v\left(P_i(\pi)\right)\right]=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi}\left[\sum_{j\in P_i(\pi)\cup\{i\}}v(\{j\})-\sum_{j\in P_i(\pi)}v(\{j\})\right]$$
$$=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi}\left[\sum_{j\in P_i(\pi)}v(\{j\})+v(\{i\})-\sum_{j\in P_i(\pi)}v(\{j\})\right]=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi}\left[v(\{i\})\right]=\frac{n!}{n!}\cdot v(\{i\})=v(\{i\})$$

מ.ש.ל.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $(v^*)^*=v$
הוכחה:
נשים לב ש- $\forall S\subset N$ מתקיים

$$(v^*)^*(S)\overset{\text{def}}{=}v^*(N)-v^*(N\setminus S)\overset{\text{def}}{=}\left(v(N)-v(N\setminus N)\right)-\left(v(N)-v\left(N\setminus(N\setminus S)\right)\right)$$
$$=v\left(N\setminus(N\setminus S)\right)-v(N\setminus N)=v(S)-v(\emptyset)\overset{v(\emptyset)=0}{=}v(S)$$

ולכן קיבלנו כי $\forall S\subset N$ מתקיים $(v^*)^*(S)=v(S)$ ולכן $(v^*)^*=v$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\Psi_i(v^*)=\Psi_i(v)$
הוכחה:
נספור את התרומות בעזרת הקבוצה שמופיעה $P_i(\pi)$ ומספר הפעמים שהיא מופיעה ונקבל ש-

$$\Psi_i(v)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi}\left[v\left(P_i(\pi)\cup\{i\}\right)-v\left(P_i(\pi)\right)\right]=\frac{1}{n!}\sum_{S\subset N\setminus\{i\}}|S|!\cdot(n-|S|-1)!\cdot\left[v(S\cup\{i\})-v(S)\right]$$

ועתה נשתמש בנוסחא האלגנטית הזאת כדי להוכיח את הטענה

$$\begin{aligned}
\Psi_i\left(v^*\right) &= \frac{1}{n!}\sum_{S\subset N\setminus\{i\}} |S|!\cdot(n-|S|-1)!\cdot\left[v^*\left(S\cup\{i\}\right)-v^*\left(S\right)\right] \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{S\subset N\setminus\{i\}} |S|!\cdot(n-|S|-1)!\cdot\left[\left[v\left(N\right)-v\left(N\setminus\left(S\cup\{i\}\right)\right)\right]-\left[v\left(N\right)-v\left(N\setminus S\right)\right]\right] \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{S\subset N\setminus\{i\}} |S|!\cdot(n-|S|-1)!\cdot\left[v\left(N\setminus S\right)-v\left(N\setminus\left(S\cup\{i\}\right)\right)\right] \\
&\overset{|N\setminus(S\cup\{i\})|=n-|S|-1}{=} \frac{1}{n!}\sum_{S\subset N\setminus\{i\}} |S|!\cdot|N\setminus\left(S\cup\{i\}\right)|!\cdot\left[v\left(N\setminus S\right)-v\left(N\setminus\left(S\cup\{i\}\right)\right)\right] \\
&\overset{|S|=n-|N\setminus(S\cup\{i\})|-1}{=} \frac{1}{n!}\sum_{S\subset N\setminus\{i\}} \left(n-|N\setminus\left(S\cup\{i\}\right)|-1\right)!\cdot|N\setminus\left(S\cup\{i\}\right)|!\cdot\left[v\left(\left[N\setminus\left(S\cup\{i\}\right)\right]\cup\{i\}\right)-v\left(N\setminus\left(S\cup\{i\}\right)\right)\right] \\
&\overset{\star}{=} \frac{1}{n!}\sum_{S\subset N\setminus\{i\}} |S|!\cdot(n-|S|-1)!\cdot\left[v\left(S\cup\{i\}\right)-v\left(S\right)\right]=\Psi_i\left(v\right)
\end{aligned}$$

נשים לב ש־ $\star$ נכון על ידי החלפת משתנה ל־ $N\setminus\left(S\cup\{i\}\right)$ ונשים לב שעדיין עוברים על כל תתי הקבוצות שלא מכילות את i.

מ.ש.ל.ב.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\Psi_i\left(v\right)$

הוכחה:

נסמן את הקבוצות ב־ A,B,C,D כשל־ A יש כוח הצבעה של 3.

נשים לב שהקבוצה מנצחת אם $\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{B,C,D\}\subseteq S$,

נשים לב ש־ A הופך את הקבוצה ממפסידה למנצחת אם"ם הוא נכנס 2 או 3 לקבוצה. לכך שהוא נכנס 2 יש $3!=6$ אפשרויות ולכך שהוא נכנס שלישי יש גם $3!=6$ אפשרויות ולכן נקבל כי

$$\Psi_A\left(v\right)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi}\left[v\left(P_i\left(\pi\right)\cup\{i\}\right)-v\left(P_i\left(\pi\right)\right)\right]=\frac{3!+3!}{4!}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$$

נשים לב ש־ B,C,D הם סימטריים ולכן $\Psi_B\left(v\right)=\Psi_C\left(v\right)=\Psi_D\left(v\right)$ וגם נשים לב כי

$$\Psi_D\left(v\right)+\Psi_C\left(v\right)+\Psi_B\left(v\right)+\Psi_A\left(v\right)=1\implies\boxed{\Psi_D\left(v\right)=\Psi_C\left(v\right)=\Psi_B\left(v\right)=\frac{1-\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{6}}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\Psi_i\left(v\right)$

הוכחה:

נסמן את הקבוצות ב־ A,B,C,D,E כשל־ A,B יש כוח הצבעה של 3.

נשים לב ש־ A הופך את הקבוצה ממפסידה למנצחת אם"ם הוא נכנס 2 והראשון היה B או שנכנס 3 לקבוצה או שהוא נכנס 4 לקבוצה ו־ B נכנס אחרון. לכך שהוא נכנס 2 ו־ B נכנס ראשון יש $3!=6$ אפשרויות ולכך שהוא נכנס שלישי יש $4!$ אפשרויות ולכך שהוא נכנס 4 ו־ B נכנס אחרון יש $3!\cdot 1=6$ אפשרויות ולכן נקבל כי

$$\Psi_A\left(v\right)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi}\left[v\left(P_i\left(\pi\right)\cup\{i\}\right)-v\left(P_i\left(\pi\right)\right)\right]=\frac{3!+4!+3!}{5!}=\frac{6+24+6}{120}=\frac{1+4+1}{20}=\frac{3}{10}$$

נשים לב ש־ A,B סימטריים ולכן נקבל כי $\Psi_B(v)=\Psi_A(v)=\frac{1}{4}$,
נשים לב ש־ C,D,E הם סימטריים ולכן $\Psi_E(v)=\Psi_C(v)=\Psi_D(v)$ וגם נשים לב כי

$$\Psi_D(v)+\Psi_E(v)+\Psi_C(v)+\Psi_B(v)+\Psi_A(v)=1 \implies \boxed{\Psi_D(v)=\Psi_C(v)=\Psi_E(v)=\frac{1-\frac{3}{10}\cdot 2}{3}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\Psi_i(v)$
הוכחה:
נסמן את הקבוצות ב־ $A_1,\ldots,A_n$ כשל־ A_1 יש כוח הצבעה של $2n-3$.
נשים לב ש־ A_2 הופך את הקבוצה ממפסידה למנצחת אם"ם הוא אחרי כולם פרט ל־ A_1 או שהוא נכנס שני ו־ A_1 נכנס ראשון. מספר האפשרויות שהוא נכנס אחרון אחרי כולם פרט ל־ A_1 הוא $(n-2)!$ ומספר האפשרויות שהוא נכנס שני ו־ A_1 נכנס ראשון הוא $(n-2)!$ ולכן

$$\Psi_{A_2}(v)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi}\left[v\left(P_i(\pi)\cup\{i\}\right)-v\left(P_i(\pi)\right)\right]=\frac{(n-2)!+(n-2)!}{n!}=\frac{2}{n(n-1)}$$

נשים לב ש־ $A_2,\ldots,A_n$ סימטריים ולכן נקבל כי $\Psi_{A_2}(v)=\cdots=\Psi_{A_n}(v)=\frac{2}{n(n-1)}$, וגם נשים לב כי

$$\sum_{i=1}^{n}\Psi_{A_i}(v)=1 \implies \boxed{\Psi_{A_1}(v)=1-\sum_{i=2}^{n}\Psi_{A_i}(v)=1-\frac{2}{n}}$$

ולכן קיבלנו שכאשר $n\to\infty$ אז A_1 יהיה עם כל הכוח ולאחרים הכוח יישאף ל־ 0.

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\Psi_i(v)$
הוכחה:
נסמן את הקבוצות ב־ $A_1,\ldots,A_n$ כשל־ A_1 יש כוח הצבעה של $\frac{n}{3}$.
נשים לב ש־ A_1 הופך את הקבוצה ממפסידה למנצחת אם"ם הוא נכנס בקטע $\left[\frac{n}{6},\frac{n}{2}\right]$. מספר האפשרויות שהוא נכנס במקום ה־ i הוא $(n-1)!$ ולכן מספר האפשרויות שהוא הפך את הקבוצה ממפסידה למנצחת הוא $(n-1)!\cdot\left(\frac{n}{2}-\frac{n}{6}\right)$ ולכן

$$\Psi_{A_1}(v)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi}\left[v\left(P_i(\pi)\cup\{i\}\right)-v\left(P_i(\pi)\right)\right]=\frac{(n-1)!\cdot\left(\frac{n}{2}-\frac{n}{6}\right)}{n!}=\frac{\frac{3n-n}{6}}{n}=\frac{2n}{6n}=\frac{1}{3}$$

נשים לב ש־ $A_2,\ldots,A_n$ סימטריים ולכן נקבל כי $\Psi_{A_2}(v)=\cdots=\Psi_{A_n}(v)$, וגם נשים לב כי

$$\sum_{i=1}^{n}\Psi_{A_i}(v)=1 \implies \boxed{\forall j\in[2,n]\,,\Psi_{A_j}(v)=\frac{1-\frac{1}{3}}{n-1}=\frac{2}{3(n-1)}}$$

ולכן קיבלנו שכאשר $n\to\infty$ אז A_1 יהיה עם $\frac{1}{3}$ ולאחרים הכוח יישאף ל־ 0.

מ.ש.ל.ד.☺

4. **צ"ל:** $\Psi_i(v)$
הוכחה:
נשים לב ש־ L הופך את הקבוצה ממפסידה למנצחת אם"ם הקבוצה היא $\{Y\}$. ולכן

$$\Psi_L(v)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi}\left[v\left(P_i(\pi)\cup\{i\}\right)-v\left(P_i(\pi)\right)\right]=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$$

מהיות L ו־ R סימטריים מתקיים כי $\Psi_R(v)=\frac{1}{6}$ וגם נשים לב כי

$$\Psi_L(v)+\Psi_R(v)+\Psi_Y(v)=1\implies\boxed{\Psi_Y(v)=1-\frac{1}{6}\cdot2=\frac{2}{3}}$$

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:** $\Psi_i(v)$
הוכחה:
נשים לב שעבור $i\notin S$ מתקיים עבור כל קבוצה T ש־ $T\cap S=(T\cup\{i\})\cap S$ ולכן $v(T\cup\{i\})=v(T)$ לכל T.
כלומר לכל $i\notin S$ מתקיים ש־ i הוא שחקן אפס ולכן $\Psi_i(v)=0$.
עתה נשים לב כי לכל $i,j\in S$ מתקיים לכל קבוצה $i,j\notin T$ ש־

$$|(T\cup\{i\})\cap S|=1+|T\cap S|=|(T\cup\{j\})\cap S|$$

ולכן לכל קבוצה $i,j\notin T$ מתקיים כי $v(T\cup\{i\})=v(T\cup\{j\})$.
כלומר i,j סימטריים לכל $i,j\in S$ ולכן נקבל כי

$$1=\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(v)=\sum_{i\in S}\Psi_i(v)+\sum_{i\notin S}\Psi_i(v)=\sum_{i\in S}\Psi_i(v)\implies\boxed{\forall i\in S,\Psi_i(v)=\frac{1}{|S|}}$$

ולכן קיבלנו כי $\Psi_i(v)=\begin{cases}\frac{1}{|S|} & i\in S\\ 0 & i\notin S\end{cases}$

מ.ש.ל.☺

6. **צ"ל:** $\Psi_i(v)$
הוכחה:
נוכל לכתוב את

$$v=2000\cdot u_{\{A,B,C,D,E,F,G,H\}}+1200\cdot u_{\{C,D,E,F,G,H\}}+900\cdot u_{\{F,G,H\}}+1000\cdot u_{\{G,H\}}$$

והסיבה לכך היא שאם אחת הקבוצות האלה נכנסת אז צריך לשלם על המשטח שהיא תופסת וזה נתפס בדיוק ב־ u_{B_i} שמוגדר כמו בשאלה 5.
עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}\Psi_A(v)&=\Psi_A\left(2000\cdot u_{\{A,B,C,D,E,F,G,H\}}\right)+\Psi_A\left(1200\cdot u_{\{C,D,E,F,G,H\}}+900\cdot u_{\{F,G,H\}}+1000\cdot u_{\{G,H\}}\right)\\&\overset{\star}{=}2000\cdot\Psi_A\left(2000\cdot u_{\{A,B,C,D,E,F,G,H\}}\right)+0=2000\cdot\frac{1}{|\{A,B,C,D,E,F,G,H\}|}=\frac{2000}{8}\end{aligned}$$

נשים לב ש־ $\star$ נכון כי A הוא שחקן אפס כי הוא לא משפיע במשחקים האלה ולכן ערכו 0 בהם.
מהיות A,B סימטריים נקבל כי $\Psi_B(v)=\frac{2000}{8}$.

$$\begin{aligned}\Psi_C(v)&=\Psi_C\left(2000\cdot u_{\{A,B,C,D,E,F,G,H\}}\right)+\Psi_C\left(1200\cdot u_{\{C,D,E,F,G,H\}}\right)+\Psi_C\left(900\cdot u_{\{F,G,H\}}+1000\cdot u_{\{G,H\}}\right)\\&\overset{\star}{=}2000\cdot\Psi_C\left(2000\cdot u_{\{A,B,C,D,E,F,G,H\}}\right)+1200\cdot\Psi_C\left(u_{\{C,D,E,F,G,H\}}\right)+0\\&=2000\cdot\frac{1}{|\{A,B,C,D,E,F,G,H\}|}+1200\cdot\frac{1}{|\{C,D,E,F,G,H\}|}=\frac{2000}{8}+\frac{1200}{6}\end{aligned}$$

מהיות C, D, E סימטריים נקבל כי $\Psi_D(v) = \Psi_E(v) = \frac{2000}{8}$.

$$\begin{aligned}
\Psi_F(v) &= \Psi_F\left(2000 \cdot u_{\{A,B,C,D,E,F,G,H\}}\right) + \Psi_F\left(1200 \cdot u_{\{C,D,E,F,G,H\}}\right) + \Psi_F\left(900 \cdot u_{\{F,G,H\}} + 1000 \cdot u_{\{G,H\}}\right) \\
&\overset{\star}{=} 2000 \cdot \Psi_F\left(2000 \cdot u_{\{A,B,C,D,E,F,G,H\}}\right) + 1200 \cdot \Psi_F\left(u_{\{C,D,E,F,G,H\}}\right) + 900 \cdot \Psi_F\left(u_{\{F,G,H\}}\right) + 0 \\
&= 2000 \cdot \frac{1}{|\{A,B,C,D,E,F,G,H\}|} + 1200 \cdot \frac{1}{|\{C,D,E,F,G,H\}|} + 900 \cdot \frac{1}{|\{F,G,H\}|} \\
&= \frac{2000}{8} + \frac{1200}{6} + \frac{900}{3}
\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}
\Psi_G(v) &= \Psi_G\left(2000 \cdot u_{\{A,B,C,D,E,F,G,H\}}\right) + \Psi_G\left(1200 \cdot u_{\{C,D,E,F,G,H\}}\right) + \Psi_G\left(900 \cdot u_{\{F,G,H\}}\right) + \Psi_G\left(1000 \cdot u_{\{G,H\}}\right) \\
&\overset{\star}{=} 2000 \cdot \Psi_G\left(2000 \cdot u_{\{A,B,C,D,E,F,G,H\}}\right) + 1200 \cdot \Psi_G\left(u_{\{C,D,E,F,G,H\}}\right) + 900 \cdot \Psi_G\left(u_{\{F,G,H\}}\right) + 1000 \cdot \Psi_G\left(u_{\{G,H\}}\right) \\
&= 2000 \cdot \frac{1}{|\{A,B,C,D,E,F,G,H\}|} + 1200 \cdot \frac{1}{|\{C,D,E,F,G,H\}|} + 900 \cdot \frac{1}{|\{F,G,H\}|} + 1000 \cdot \frac{1}{|\{G,H\}|} \\
&= \frac{2000}{8} + \frac{1200}{6} + \frac{900}{3} + \frac{1000}{2}
\end{aligned}$$

ומהיות G, H סימטריים נקבל כי $\Psi_H(v) = \frac{2000}{8} + \frac{1200}{6} + \frac{900}{3} + \frac{1000}{2}$

מ.ש.ל.☺