פתרון תרגיל מספר 11 - דאסט

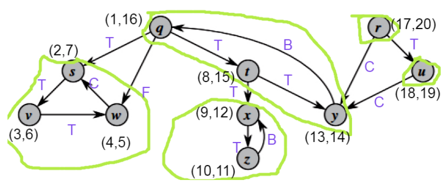
שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

11 ביוני 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** גרף

הוכחה:



מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\Theta\left(|V|+|E|\right)$

הוכחה:

נשים לב שלאלגוריתם 4 שלבים:

i. שלב א' הוא DFS על G שלוקח $\Theta\left(|V|+|E|\right)$ (עם יצירת מערך ושמירת זמני יציאה)

ii. שלב ב' הוא חישוב של G^T שלוקח $\Theta\left(|E|\right)$

iii. שלב ג' הוא DFS על G^T כשיש סדר חיפוש של צלעות, לוקח $\Theta\left(|V|+|E|\right)$

iv. שלב ד' הגדרת של כל רכיב קשירות חזק (רצים לכל היותר על כל קודקוד פעם אחת ביער ומבצעים לכל קודקוד מספר סופי של פעולות) לכן זמן הריצה הוא $O\left(|V|\right)$

לכן זמן הריצה הכולל הוא

$$\boxed{\Theta\left(|V|+|E|\right)+\Theta\left(|E|\right)+\Theta\left(|V|+|E|\right)+O\left(|V|\right)=\Theta\left(|V|+|E|\right)}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** מספר חדש של רכיבי קשירות

הוכחה:

נשים לב שהגרף מחולק לn רכיבי קשירות חזקים ונסמנם $S_1,\dots,S_n$,
הוספת צלע יכולה (u,v) יכולה להשפיע לכל היותר על 2 רכיבי קשירות כי u,v שייכים רק לרכיב קשירות אחד.
נסמן רכיבי קשירות אלה בS_u,S_v.

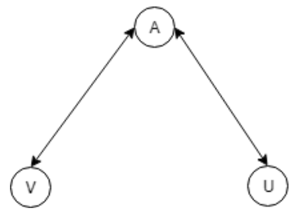
i. אם $S_u\cup S_v$ הוא רכיב קשירות לאחר הוספת (u,v) היו קיימות, נקבל כי מספר רכיבי הקשירות יהיה $n-1$

ii. אחרת $S_u\cup S_v$ אינו רכיב קשירות, לכן ניתן לפרקם לפחות ל2 קבוצות שכל אחד הוא רכיב קשירות, וראינו כי $S_1,\dots,S_n$ הם רכיבי קשירות (נתון), לכן מספר רכיבי הקשירות יישאר n

מ.ש.ל.ג.☺

2. **פתרון:**

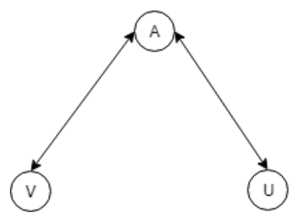
(א) **צ"ל:** v צאצא של u
הוכחה:
לא נכון! נסתכל על



אם נפעיל DFS מA (בהנחה נלך קודם לU) נקבל כי $u.pre < v.pre$ אבל אין מסלול בין u,v ביער, לכן u,v לא יכולים להיות צאצא אחד של השני, כי נקבל שהיער הוא $A \to V, A \to U$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $v.pre < u.post$
הוכחה:
לא נכון! נסתכל על



אם נפעיל DFS מA (בהנחה נלך קודם לU) נקבל כי

$$3 = u.post < v.pre = 4$$

בסתירה לטענה, לכן לא בהכרח מתקיים $v.pre < u.post$

מ.ש.ל.ב.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** הרצת מיון טופולוגי
הוכחה:
לאחר הרצת האלגוריתם נקבל את הסדר:

Iron man, Iron man 2, The Incredible Hulk, Thor, Captain America First Avenger
, Marvel's The Avengers, Iron man 3, Thor The Dark World, Captain America Winter Soldier
, Avengers age of ultron, Doctor Strange, Thor Ragnarok, Ant-man, Avengers Civil war
,Black Panther, Spiderman Homecoming, Guardians of the galaxy, Guardians of the galaxy 2
Avengers Infinity War, Captain marvel, Avengers End game

שמתי לב ששכחתם את Ant man 2, הוא אמור להכנס בין infinity war לend game, והוא די חשוב, כל הסרט האחרון בנוי עליו :)

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** אלגוריתם
הוכחה:
שלב א': תחילה נרוץ על כל הצלעות עד שנמצא צלע שאין לה צלעות נכנסות $O(|V|)$,
שלב ב': לאחר מכן נרוץ ממנה, נוציא את כל הצלעות המעורבות איתה (כל קודקוד מחזיר את הצלעות כניסה\יציאה

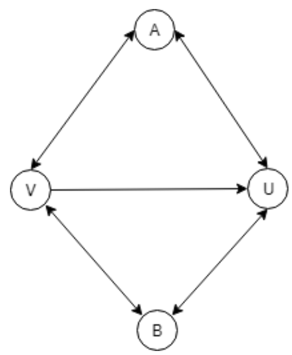
שלו,
ונעבור לקודקוד שכן שעכשיו הוא ללא צלעות נכנסות, ועתה נבצע את שלב ב' על הקודקוד החדש. נשים לב שזמן הריצה לכל קודקוד הוא $O\left(1+\deg\left(v\right)\right)$, לכן זמן הריצה הכולל הוא

$$O\left(|V|\right)+\left(\sum_{v\in V}\left(1+\deg\left(v\right)\right)\right)=O\left(|V|+|V|+2\left|E\right|\right)=O\left(|V|+|E|\right)$$

אם יש מעגל, אז האלגוריתם לא ידפיס כלום ויסיים

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** אלגוריתם עושה מינימום צלעות רעות
הוכחה:
לא נכון! נסתכל על



נשים לב שאם נתחיל מU ונלך לV בריבוע החיצוני, מספר הצלעות הרעות יהיה 5, שזה מה שנקבל אם נריץ DFS שיתחיל מU. אך אם נתחיל מV ונעשה אותו סיבוב נקבל מספר צלעות רעות יהיה 4, בסתירה לטענה שזה נותן מינימלי

מ.ש.ל.ג.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** מספר מינימלי של צלעות בגרף לא מכוון עם k רכיבי קשירות
הוכחה:
נשים לב שיש לנו k רכיבי קשירות ונסמם $G_1,\ldots,G_k$,
נשים לב כי G_i הוא קשיר לכל i, לכן $1\leq\forall i\leq k$

$$|E_i|\geq|V_i|-1$$

ולכן

$$|E|=\sum_{i=1}^{k}|E_i|\geq\sum_{i=1}^{k}\left(|V_i|-1\right)=\sum_{i=1}^{k}|V_i|-k=n-k$$

נשים לב שזהו חסם מינימלי וניתן לקבל אותו על ידי יצירת עץ בכל רכיב קשירות, כלומר החסם גם מתקבל לכן

$$\boxed{|E|\geq n-k}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** מספר מקסימלי של צלעות בגרף לא מכוון עם k רכיבי קשירות
הוכחה:
נשים לב שיש לנו k רכיבי קשירות ונסמם $G_1,\ldots,G_k$,

,

נניח שיש לנו 2 גרפים G_i, G_j שכל הקודקודים בכל אחד מהם מחובר לאחרים באותו הגרף,
ונניח כי $|V_i| < |V_j|$, יהי $v \in V_i$, אז אם נסתכל על $G_i = (V_i \setminus \{v\}), G_j = (V_j \cup \{v\})$ (כשעדיין כל הצלעות מחוברות אחת לשנייה), נשים לב כי מספר הצלעות החדש גדל ב$|V_j| - |V_i| > 0$,
לכן מהנימוק הזה, נבין שמספר מקסימלי של צלעות יתקבל כאשר ב$k-1$ גרפים יש רק קודקוד אחד ו1 שמכיל $n-k+1$ קודקודים שמחוברים אחד לשני, לכן

$$\boxed{|E| \leq \binom{n-k+1}{2}}$$

מ.ש.ל.ב.☺