

אינפי 2 - סמסטר א' תשע"ט

תרגיל בית 2

להגשה עד יום חמישי, 8 בנובמבר, בשעה 20:00, דרך תיבת ההגשה במודל

בכל השאלות, אלא אם נאמר אחרת, כאשר מוזכר "קטע $[a, b]$ " אנחנו מניחים ש- $a, b \in \mathbb{R}$ ו- $a < b$.

1. תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית ב- $[a, b]$, ויהיו $c, d \in [a, b]$ כך ש- $c < d$. הוכיחו ש- f אינטגרבילית גם ב- $[c, d]$.

2. (א) תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית ו- $c \in \mathbb{R}$. הוכיחו שגם $c \cdot f$ אינטגרבילית ב- $[a, b]$ ושמתיקים $\int_a^b (c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f$.
 (ב) תהינה $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות אשר מקיימות $f_1 \leq f_2$ (כלומר, $f_1(x) \leq f_2(x)$ לכל $x \in [a, b]$). הוכיחו שמתיקים $\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2$.
 (ג) יהי $M \in \mathbb{R}$, ותהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית אשר מקיימת $|f(x)| \leq M$ לכל $x \in [a, b]$. הוכיחו שמתיקים $\left| \int_a^b f \right| \leq M(b-a)$.
 (ד) תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ו- $a \leq c \leq b$. הוכיחו ש- f אינטגרבילית ב- $[a, b]$ אם ורק אם היא אינטגרבילית גם ב- $[a, c]$ וגם ב- $[c, b]$. הוכיחו שבמקרה זה, מתקיים $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

3. תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית ב- $[0, \Delta]$, ובעלת מחזור Δ . הוכיחו ש- f אינטגרבילית בכל תת-קטע סגור של \mathbb{R} , ושכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\int_a^{a+\Delta} f = \int_0^\Delta f$.

4. הוכיחו את המשפט הסנדויץ' הבא: נניח ש- f, g, h שלושתן פונקציות $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, כאשר f ו- h אינטגרביליות ב- $[a, b]$ ומתיקים $f \leq g \leq h$. הוכיחו שגם g אינטגרבילית ב- $[a, b]$, וששני האינטגרלים המסוימים לעיל שווים גם ל- $\int_a^b g$.
 בכל $[a, b]$, ו- $\int_a^b f = \int_a^b h$.

5. יהי $c > 0$ ממשי ותהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית המקיימת $|f(x)| \geq c$ לכל $x \in [a, b]$. הוכיחו ש- $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית ב- $[a, b]$.

6. הוכיחו או הפריכו: אם $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ שתיהן אינטגרביליות (כל אחת בתחום שלה), ול- g יש בדיוק נקודת אי-רציפות אחת, אז $g \circ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית ב- $[a, b]$.