

הסתברות 1 - תרגיל 4

28 במרץ 2019

1. **הגדרה** נאמר שמאורע A מחזק את מאורע B אם $P(B|A) > P(B)$. יהא (Ω, P) מרחב הסתברות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם A מחזק את B ו- B מחזק את C אז A מחזק את C .

ב. אם A מחזק את B אז B מחזק את A .

ג. לכל שני מאורעות A, B מתקיים $P(B|A) + P(B|A^C) = 1$.

ד. לכל שני מאורעות A, B מתקיים $P(B|A) + P(B^C|A^C) = 1$.

ה. אם A ו- B ב"ת, וכן B ו- C ב"ת, אז A ו- C ב"ת.

ו. נאמר ששלושה מאורעות A, B, C הם ב"ת אם הם ב"ת בזוגות (כלומר כל זוג הוא ב"ת) ובנוסף $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$. נניח ש A, B, C ב"ת בזוגות, האם הם ב"ת במובן שהוגדר בשורה הקודמת?

ז. אם A, B, C ב"ת אז A ב"ת ב $C \cap B^C$.

ח. יהיו A_1, \dots, A_n מאורעות ב"ת. אז $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n P(A_i^C)$.

2. ניזכר בניסוי הכד של פוליה מהכיתה: בכד ישנם b כדורים שחורים ו r כדורים לבנים. יהא $c \in \mathbb{N}$. מבצעים את הניסוי הבא: שולפים כדור מהכד, בוחנים את הצבע שלו, ואז מחזירים לכו. אם הכדור היה שחור אז מוסיפים c כדורים שחורים לכד, ואחרת מוסיפים c כדורים לבנים. יהא $n \in \mathbb{N}$, ונניח שחוזרים על הניסוי n פעמים. לכל $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ המקיימים $n_1 + n_2 = n$ חשבו את ההסתברות של המאורע "הוצאנו קודם n_1 כדורים שחורים ואז n_2 כדורים לבנים".

3. פתרו את הסעיפים הבאים. אין צורך להגדיר במפורש מרחב מדגם, אבל יש צורך בחישוב מפורש ומדויק של ההסתברות המבוקשת.

א. בשידה שלוש מגירות. באחת זוג גרביים שחורים, בשנייה זוג גרביים לבנים, ובשלישית גרב שחור וגרב לבן. נניח שבחרתי מגירה באקראי (כלומר בהסתברות אחידה) והוצאתי ממנה גרב באקראי, והוא לבן. מה ההסתברות שגם הגרב השני במגירה לבן?

ב. נתון דלי עם k כדורים לבנים ו- k כדורים שחורים. מוציאים n כדורים, $n < k$ (בלי להחזיר אותם אח"כ). לאחר מכן, מוצאים כדור נוסף, $n+1$ במספר. בהינתן שכל ה- n כדורים הראשונים היו לבנים, מה ההסתברות שהכדור ה- $n+1$ שחור?

ג. נתונים שלושה קלפים זהים בצורתם. הקלף הראשון צבוע משני צדדיו באדום, הקלף השני צבוע משני צדדיו בשחור, והקלף הנותר צבוע בשחור מצדו האחד ובאדום מצדו השני. שלושת הקלפים מוכנסים לכובע, וקלף אחד נשלף באופן מקרי ומונח על שולחן. אם החלק העליון של הקלף אדום, מה ההסתברות שהצד השני שלו צבוע שחור?

ד. בעיר חלם 10% מהתושבים מפורסמים ו-5% מהאוכלוסיה עשירים. ידוע ש 2% מהאוכלוסיה הם עשירים ומפורסמים. עיתונאי מראיין 10 תושבים ברחוב באופן מקרי וב"ת זה בזה. מה ההסתברות שלפחות אחד היה עשיר או מפורסם? כמה אנשים צריך העיתונאים לראיין כדי שבהסתברות 0.9 לפחות הוא יראיין לפחות תושב אחד עשיר או מפורסם?

ה. בבית חולים החשמל מתקבל ע"י n גנרטורים. על מנת שלבית החולים יהיה חשמל, מספיק שרק גנרטור אחד יעבוד. ההסתברות שגנרטור i עובד היא p_i , לכל $1 \leq i \leq n$. בהנחה והגנרטורים ב"ת זה בזה, מה ההסתברות שלבית החולים יש חשמל?