פתרון תרגיל מספר 7 ־ מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

12 במאי 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{E}[Y]$

הוכחה:

נסמן בc את כמות השקלים שהאדם הימר,

לכל מספר $1 \le \forall k \le 6$, מספר הפעמים שיוצא k הוא משתנה מקרי $X \sim bin\left(3, \frac{1}{6}\right)$ (כי אין חשיבות לסדר הזכיות ו$\frac{1}{6}$ זה הסיכוי לזכות ויש 3 ניסיונות),

עתה נגדיר Y בתור הרווח מזכייה, נשים לב כי $Y = \begin{cases} -c & X = 0 \\ c \cdot X & 1 \le X \le 3 \end{cases}$,

לכן

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \sum_{y \in \mathrm{Im} Y} y \cdot \mathbb{P}(y) = (-c) \cdot \mathbb{P}_X(0) + (c) \cdot \mathbb{P}_X(1) + (2c) \cdot \mathbb{P}_X(2) + (3c) \cdot \mathbb{P}_X(3) \\
&= c \cdot ((-1) \cdot \mathbb{P}_X(0) + \mathbb{P}_X(1) + 2\mathbb{P}_X(2) + 3\mathbb{P}_X(3)) \\
&= c \cdot \left((-1) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 2\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right)^3\right) \\
&= c \cdot \left((-1) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 2\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right)^3\right) \\
&= \frac{c}{6^3} \cdot \left(-5^3 + 3 \cdot 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 1^2 \cdot 5 + 3 \cdot 1^3\right) = \frac{-17}{6^3} \cdot c = \frac{-17}{216} \cdot c
\end{aligned}$$

לכן קיבלנו כי

$$\boxed{\mathbb{E}[Y] = -\frac{17}{216} \cdot c}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathrm{Var}[Y]$

הוכחה:

תחילה נחשב את $\mathbb{E}\left[Y^2\right]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y^2\right] &= \sum_{y\in \mathrm{Im}Y} y^2\cdot\mathbb{P}\left(y\right) = \left(-c\right)^2\cdot\mathbb{P}_X\left(0\right)+\left(c\right)^2\cdot\mathbb{P}_X\left(1\right)+\left(2c\right)^2\cdot\mathbb{P}_X\left(2\right)+\left(3c\right)^2\cdot\mathbb{P}_X\left(3\right) = \\ &= c^2\cdot\left(\mathbb{P}_X\left(0\right)+\mathbb{P}_X\left(1\right)+4\mathbb{P}_X\left(2\right)+9\mathbb{P}_X\left(3\right)\right) \\ &= c^2\cdot\left(\left(\frac{5}{6}\right)^3+\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+4\cdot\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)+9\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\right) \\ &= c^2\cdot\left(\left(\frac{5}{6}\right)^3+\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+4\cdot\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)+9\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\right) \\ &= \frac{c^2}{6^3}\cdot\left(5^3+3\cdot1\cdot5^2+4\cdot3\cdot1^2\cdot5+9\cdot1^3\right) = \frac{269}{6^3}\cdot c^2 = \frac{269}{216}\cdot c^2\end{aligned}$$

לכן

$$\mathrm{Var}\left[Y\right] = \mathbb{E}\left[Y^2\right]-\left(\mathbb{E}\left[Y\right]\right)^2 = \frac{269}{216}\cdot c^2-\left(-\frac{17}{216}\cdot c\right)^2 = c^2\cdot\left(\frac{269\cdot216+17^2}{216^2}\right)\sim 1.24c^2$$

כלומר

$$\boxed{\mathrm{Var}\left[Y\right] = c^2\cdot\left(\frac{269\cdot216+17^2}{216^2}\right)\sim 1.24c^2}$$

מ.ש.ל.ב.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** התפלגות משותפת של X_1,X_2,X_3
הוכחה:

$$\mathbb{P}\left(X_1\cap X_2\cap X_3\right) = \mathbb{P}\left(X_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(X_2\cap X_3\mid X_1\right) = \mathbb{P}\left(X_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(X_2\mid X_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(X_3\mid X_1\cap X_2\right)$$

לכן

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left(X_1=0\right)\cap\left(X_2=0\right)\cap\left(X_3=0\right)\right) &= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6} \\ \mathbb{P}\left(\left(X_1=0\right)\cap\left(X_2=0\right)\cap\left(X_3=1\right)\right) &= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5} \\ \mathbb{P}\left(\left(X_1=0\right)\cap\left(X_2=1\right)\cap\left(X_3=0\right)\right) &= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5} \\ \mathbb{P}\left(\left(X_1=0\right)\cap\left(X_2=1\right)\cap\left(X_3=1\right)\right) &= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} \\ \mathbb{P}\left(\left(X_1=1\right)\cap\left(X_2=0\right)\cap\left(X_3=0\right)\right) &= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5} \\ \mathbb{P}\left(\left(X_1=1\right)\cap\left(X_2=0\right)\cap\left(X_3=1\right)\right) &= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} \\ \mathbb{P}\left(\left(X_1=1\right)\cap\left(X_2=1\right)\cap\left(X_3=0\right)\right) &= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} \\ \mathbb{P}\left(\left(X_1=1\right)\cap\left(X_2=1\right)\cap\left(X_3=1\right)\right) &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\end{aligned}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** התפלגות משותפת של X_1, X_2, X_3
הוכחה:

$$\mathbb{P}(X_1 \cap X_2) = \mathbb{P}(X_1 \cap X_2 \cap (X_3 = 0)) + \mathbb{P}(X_1 \cap X_2 \cap (X_3 = 1))$$

לכן

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \\
\mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)) &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)) &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ב.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathrm{Var}[X]$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי בתרגיל 6 ראינו כי $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$, לכן

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{1}{p^2}$$

נחשב $\mathbb{E}\left[X^2\right]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \mathbb{E}\left[X^2 - X + X\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - X\right] + \mathbb{E}[X] \\
&= \mathbb{E}[X(X-1)] + \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p + \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\sum_{k=1}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1) \cdot q^{k-2} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} q^k\right)'' = \left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)'' = \frac{2 - q^{n-2}\left((n-2)(n-1)q^2 - 2(n-2)nq + (n-1)n\right)}{(1-q)^3}$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1) \cdot q^{k-1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)'' = \frac{2}{(1-q)^3}$$

נציב חזרה ב$\mathbb{E}\left[X^2\right]$ ונקבל

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p + \frac{1}{p} \\
&= p \cdot (1-p) \cdot \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot (1-p)^{k-2} + \frac{1}{p} \\
&= \frac{2}{(1-q)^3} \cdot p \cdot (1-p) + \frac{1}{p} = \frac{2}{p^3} \cdot p \cdot (1-p) + \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

נציב ונקבל

$$\boxed{\operatorname{Var}[X]=\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{2-p-1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\operatorname{Var}[X]$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי בתרגיל 6 ראינו כי $\mathbb{E}[X]=\frac{Mn}{N}$, לכן

$$\operatorname{Var}[X]=\mathbb{E}\left[X^2\right]-(\mathbb{E}[X])^2=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\left(\frac{Mn}{N}\right)^2=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\frac{M^2n^2}{N^2}$$

נחשב $\mathbb{E}\left[X^2\right]$, בתרגיל 6 ראינו כי $X(k)=\frac{\binom{N-M}{n-k}\cdot\binom{M}{k}}{\binom{N}{n}}$ ו-$\operatorname{Range}(X)=0,\dots,\min(M,n)$, נציב ונקבל

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X^2\right]&=\sum_{x\in\operatorname{Im}X}x\cdot\mathbb{P}_X(x)=\sum_{k=0}^{\min(M,n)}k^2\cdot\mathbb{P}_X(k)=\sum_{k=0}^{\min(M,n)}k^2\cdot\frac{\binom{N-M}{n-k}\cdot\binom{M}{k}}{\binom{N}{n}}\\&=\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot\frac{\binom{N-M}{n-k}\cdot\binom{M}{k}}{\binom{N}{n}}\overset{\text{wolfram}}{=}\frac{M\cdot n\cdot(M(n-1)-n+N)}{N\cdot(N-1)}\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[X]&=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\frac{M^2n^2}{N^2}=\frac{M\cdot n\cdot(M(n-1)-n+N)}{N\cdot(N-1)}-\frac{M^2n^2}{N^2}\\&=\frac{Mn}{N}\cdot\left(\frac{M(n-1)-n+N}{N-1}-\frac{Mn}{N}\right)=\frac{Mn}{N}\cdot\frac{(M(n-1)-n+N)\cdot N-(Mn)\cdot(N-1)}{(N-1)\cdot N}\\&=\frac{Mn}{N}\cdot\frac{(M(n-1)-n+N)\cdot N-(Mn)\cdot(N-1)}{(N-1)\cdot N}\\&=\frac{Mn}{N}\cdot\left(\frac{MNn-MN-nN+N^2-MNn+Mn}{(N-1)\cdot N}\right)\\&=\frac{Mn}{N}\cdot\left(\frac{-MN-nN+N^2+Mn}{(N-1)\cdot N}\right)=\frac{Mn}{N}\cdot\left(\frac{M(n-N)+N(N-n)}{(N-1)\cdot N}\right)\\&=\frac{Mn}{N}\cdot\left(\frac{(N-n)\cdot(N-M)}{(N-1)\cdot N}\right)=\frac{M\cdot n\cdot(N-n)\cdot(N-M)}{(N-1)\cdot N^2}\end{aligned}$$

לכן

$$\boxed{\operatorname{Var}[X]=\frac{M\cdot n\cdot(N-n)\cdot(N-M)}{(N-1)\cdot N^2}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

4. **צ"ל:** מינימום Cov

הוכחה:

תחילה נשים לב כי $\operatorname{Var}[X_i]=p\cdot q=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ כי כך מחושב Var ברנולי.

נגדיר $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$, עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[X\right]&=\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]\overset{\star}{=}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\left[X_i\right]+2\sum_{i<j}Cov\left(X_i,X_j\right)=\frac{n}{4}+2\sum_{i<j}Cov\left(X_i,X_j\right)\\&=\frac{n}{4}+2\sum_{i<j}Cov\left(X_1,X_2\right)=\frac{n}{4}+n\cdot(n-1)\cdot Cov\left(X_1,X_2\right)\end{aligned}$$

וגם מתקיים $0\leq\mathrm{Var}\left[X\right]=\frac{n}{4}+n\cdot(n-1)\cdot Cov\left(X_1,X_2\right)$,
לכן

$$\boxed{Cov\left(X_1,X_2\right)\geq\frac{-1}{4\left(n-1\right)}}$$

עתה כדוגמא נבחר $X_1\sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$, ונגדיר $X_2=1-X_1$ (לכן X_1,X_2 ב"ת כי $\mathbb{P}\left(X_1\cap X_2\right)=0\neq\mathbb{P}\left(X_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(X_2\right)$)
לכן מהיות $X_1,1$ משתנים ב"ת מתקיים $Cov\left(X_1,1\right)=0$, לכן

$$\begin{aligned}Cov\left(X_1,X_2\right)&=Cov\left(X_1,1-X_1\right)\overset{\star}{=}Cov\left(X_1,1\right)-Cov\left(X_1,X_1\right)\\&=Cov\left(X_1,1\right)-\mathrm{Var}\left(X_1,X_1\right)=0-\frac{1}{4}=\frac{-1}{4\left(2-1\right)}\end{aligned}$$

הערה: $\star$ מתקיים מתכוות המוכחות בשאלה 6

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:** $\mathbb{E}\left[X\right],\mathrm{Var}\left[X\right]$
הוכחה:
נסמן בX_i משתנה מקרי האם הכדור הכחול הi יושב ליד בן זוגו (1 אם כן אחרת 0)
נשים לב כי יש $19!$ אפשרויות לסידור שאר הכדורים,
ומהם מתקיים כי ב$2\cdot18!$ מהסידורים, הכדור הכחול הi יושב ליד בן זוגו, לכן

$$\mathbb{P}\left(X_i=1\right)=\frac{2\cdot18!}{19!}=\frac{2}{19}$$

עתה נשים לב כי $X=\sum_{i=1}^{10}X_i$, לכן

$$\mathbb{E}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{10}X_i\right]=\sum_{i=1}^{10}\mathbb{E}\left[X_i\right]=\sum_{i=1}^{10}\mathbb{P}\left(X_i\right)=\sum_{i=1}^{10}\frac{2}{19}=\frac{20}{19}$$

לכן

$$\boxed{\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{20}{19}}$$

עתה נחשב את $\mathbb{E}\left[X^2\right]$, נשים לב כי

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X^2\right]&=\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{10}X_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{10}X_i\right)\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{10}X_i\right]+\mathbb{E}\left[2\sum_{i<j}X_iX_j\right]=\sum_{i=1}^{10}\mathbb{E}\left[X_i^2\right]+2\sum_{i<j}\mathbb{E}\left[X_iX_j\right]\\&=\sum_{i=1}^{10}\mathbb{E}\left[X_i\right]+2\sum_{i<j}\mathbb{E}\left[X_iX_j\right]=\frac{20}{19}+2\sum_{i<j}\mathbb{E}\left[X_iX_j\right]=\frac{20}{19}+10\cdot9\cdot\mathbb{E}\left[X_iX_j\right]\end{aligned}$$

עתה נחשב את $\mathbb{E}\left[X_iX_j\right]$,
נשים לב כי יש $19!$ אפשרויות לסידור שאר הכדורים,
ומהם מתקיימים כי ב$4\cdot 17!$ מהסידורים, הכדור הכחול הi יושב ליד בן זוגו וגם הכדור הj יושב ליד בן זוגו (כי לזוג של i,j יש רק 2 מקומות לבחירה), לכן

$$\mathbb{P}\left(\left(X_i=1\right)\cap\left(X_j=1\right)\right)=\frac{4\cdot 17!}{19!}=\frac{4}{19\cdot 18}$$

לכן

$$\mathbb{E}\left[X_iX_j\right]\overset{A=\begin{cases}0 & \left(X_i=0\right)\cup\left(X_j=0\right)\\ 1 & \left(X_i=1\right)\cap\left(X_j=1\right)\end{cases}}{=}\mathbb{E}\left[I_A\right]=\mathbb{P}\left(A\right)=\mathbb{P}\left(\left(X_i=1\right)\cap\left(X_j=1\right)\right)=\frac{4}{19\cdot 18}$$

נציב ונקבל

$$\mathbb{E}\left[X^2\right]=\frac{20}{19}+10\cdot 9\frac{4}{19\cdot 18}=\frac{20}{19}+\frac{20}{19}=\frac{40}{19}$$

לכן

$$\mathrm{Var}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2=\frac{40}{19}-\frac{20^2}{19^2}=\frac{360}{361}$$

לכן

$$\boxed{\mathrm{Var}\left[X\right]=\frac{360}{361}}$$

מ.ש.ל.☺

6. **פתרון:**

(א) **פתרון:**

i. **צ"ל:** $\mathrm{Var}\left[X+a\right]=\mathrm{Var}\left[X\right]$
הוכחה:
נעזר בסעיף ג' ונוכיח אותו בלי תכונה זאת

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(X+a\right)&=\mathbb{E}\left[\left(X+a\right)^2\right]-\mathbb{E}^2\left[X+a\right]=\mathbb{E}\left[X^2+2Xa+a^2\right]-\left(\mathbb{E}\left[X\right]+a\right)^2\\&=\mathbb{E}\left[X^2\right]+2a\mathbb{E}\left[X\right]+a^2-\mathbb{E}^2\left[X\right]-2a\mathbb{E}\left[X\right]-a^2\\&=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2=\mathrm{Var}\left(\xi\left(\omega\right)\right)\end{aligned}$$

מ.ש.ל.א.1.☺

ii. **צ"ל:** $\mathrm{Var}\left[a\cdot X\right]=a^2\cdot\mathrm{Var}\left[X\right]$
הוכחה:
נעזר בסעיף ג' ונוכיח אותו בלי תכונה זאת

$$\mathrm{Var}\left(a\cdot X\right)=\mathbb{E}\left[a^2X^2\right]-\left(\mathbb{E}\left[a\cdot X\right]\right)^2=a^2\left(\mathbb{E}\left[X^2\right]-\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2\right)=a^2\cdot\mathrm{Var}[X]$$

מ.ש.ל.א.2.☺

iii. **צ"ל:** $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] &= \mathbb{E}\left[X^2 - 2\cdot\mathbb{E}[X]\cdot\xi + \mathbb{E}^2[X]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}^2[X] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2(\omega)\right] - (\mathbb{E}[X])^2\end{aligned}$$

מ.ש.ל.א.3.☺

iv. **צ"ל:** $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\cdot Cov(X,Y)$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X+Y] &= \mathbb{E}\left[((X+Y)-\mathbb{E}[X+Y])^2\right] = \mathbb{E}\left[((X-\mathbb{E}[X])+(Y-\mathbb{E}[Y]))^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2 + 2\cdot(X-\mathbb{E}[X])\cdot(Y-\mathbb{E}[Y]) + (Y-\mathbb{E}[Y])^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] + 2\cdot\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])\cdot(Y-\mathbb{E}[Y])] + \mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}[Y])^2\right] \\ &= \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\cdot Cov(X,Y)\end{aligned}$$

מ.ש.ל.א.4.☺

v. **צ"ל:** $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$

הוכחה:

$$\begin{aligned}Cov(X,Y) &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])\cdot(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY - \mathbb{E}[X]\cdot Y + \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y]\cdot X] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

מ.ש.ל.א.5.☺

vi. **צ"ל:** $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}[X_i] + 2\sum_{i<j} Cov(X_i,X_j)$

הוכחה:

נעזר בסעיף 7 ובו לא נשתמש בסעיף זה.

נוכיח את הטענה באינדוקציה:

<u>בסיס</u> $n=2$, נשים לב שמסעיף 4 מתקיים

$$\mathrm{Var}[X_1+X_2] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] + 2\cdot Cov(X_1,X_2)$$

כנדרש

<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל$n-1$ ונוכיח לn

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i + X_n\right) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) + \mathrm{Var}[X_n] + 2\cdot Cov\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i, X_n\right) \\ &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) + \mathrm{Var}[X_n] + 2\sum_{i=1}^{n-1}[Cov(X_i,X_n)] \\ &\overset{\text{induction}}{=} \sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Var}[X_i] + 2\sum_{i<j<n} Cov(X_i,X_j) + \mathrm{Var}[X_n] + 2\sum_{i=1}^{n-1}[Cov(X_i,X_n)] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}[X_i] + 2\sum_{i<j} Cov(X_i,X_j)\end{aligned}$$

כלומר הטענה נכונה לn, לכן בגלל אינדוקציה נובע כי

$$\boxed{\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}[X_i] + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)}$$

מ.ש.ל.א.6.☺

vii. **צ"ל:** $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$, $Cov(X+Y,Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

הוכחה:

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y\cdot X] - \mathbb{E}[Y]\cdot\mathbb{E}[X] = Cov(Y,X)$$

עתה נוכיח כי $Cov(X+Y,Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$,

$$\begin{aligned} Cov(X+Y,Z) &= \mathbb{E}[(X+Y)\cdot Z] - \mathbb{E}[X+Y]\cdot\mathbb{E}[Z] \\ &= \mathbb{E}[XZ] + \mathbb{E}[YZ] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[Y]\cdot\mathbb{E}[Z] \\ &= (\mathbb{E}[XZ] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Z]) + (\mathbb{E}[YZ] - \mathbb{E}[Y]\cdot\mathbb{E}[Z]) \\ &= Cov(X,Z) + Cov(Y,Z) \end{aligned}$$

מ.ש.ל.א.7.☺

(ב) **צ"ל:** X,Y כך ש$Cov(X,Y)=0$ וגם X,Y לא ב"ת

הוכחה:

נגדיר בניסוי מטבע הוגן עם 3 צדדים, $X = \begin{cases} 2 & H \\ -2 & T \\ 0 & OTHER \end{cases}$, $Y = X^2 = \begin{cases} 4 & H \\ 4 & T \\ 0 & OTHER \end{cases}$, לכן

$$\mathbb{E}[X] = 2\cdot\frac{1}{3} + -2\cdot\frac{1}{3} = 0$$

בנוסף לכך מתקיים $Y\cdot X = \begin{cases} 8 & H \\ -8 & T \\ 0 & OTHER \end{cases}$, לכן

$$\mathbb{E}[XY] = 8\cdot\frac{1}{3} + -8\cdot\frac{1}{3} = 0$$

עתה נשים לב כי

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = 0 - 0\cdot\mathbb{E}[Y] = 0$$

נשים לב כי $Y = X^2$, לכן X,Y לא ב"ת כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺