תרגיל 10 אלגברה לינארית 1

מיכאל גרינבאום

211747639

1. **צ"ל:** T לא על
נתונים: $T:\mathbb{F}^{n+1}\to\mathbb{F}^{n}$, $v_1,v_2\in\mathbb{F}^{n+1}$ בת"ל וגם $T(v_1)=T(v_2)=0_V$
הוכחה:
נניח בשלילה שT על ולכן $ImT=\mathbb{F}^{n}$, כלומר $\dim ImT=n$
תחילה נשים לב כי $v_1,v_2\in\ker T$ כי $T(v_1)=T(v_2)=0_V$
נשים לב כי $\{v_1,v_2\}$ בת"ל ב $\ker T$ ולכן $\dim\ker T\geq 2$
אחרת $\{v_1,v_2\}$ היו ת"ל
ממשפט המימדים השני מתקיים $n+1=\dim V=\dim\ker T+\dim ImT\geq 2+\dim ImT$
לכן $n-1\geq\dim ImT=n$ סתירה
לכן T לא על

מ.ש.ל.☺

2. **צ"ל:** $\dim(ImT+ImS)\leq n+8$
נתונים: $\dim V=n+4$, $T:V\to W$, $S:V\to W$, $\dim U=n$, $S(u)=T(u)\ \forall u\in U$
הוכחה:
נשים לב כי $\dim U=n$, לכן קיים לU בסיס ונסמנו ב$\{u_1,\ldots,u_n\}$
נשים לב כי $\{u_1,\ldots,u_n\}$ בV ולכן נוכל להשלימו לבסיס של V
ונסמן את הבסיס של V ב$\{u_1,\ldots,u_n,v_1,v_2,v_3,v_4\}$
נסמן $A=\{T(u_1),\ldots,T(u_n),T(v_1),\ldots,T(v_4),S(v_1),\ldots,S(v_4)\}$
יהי $v\in V$,
אזי $\exists a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_4\in\mathbb{F}$ כך ש$v=a_1u_1+\cdots+a_nu_n+b_1v_1+\ldots b_4v_4$

$$T(v)=T(a_1u_1+\cdots+a_nu_n+b_1v_1+\ldots b_4v_4)=a_1T(u_1)+\cdots+a_nT(u_n)+b_1T(v_1)+\cdots+b_4T(v_4)$$

ולכן

$$T\in Span\{T(u_1),\ldots,T(u_n),T(v_1),\ldots,T(v_4)\}\in Span\{A\}$$

כלומר $ImT\subseteq Span\{A\}$

$$S(v)=S(a_1u_1+\cdots+a_nu_n+b_1v_1+\cdots+b_4v_4)=a_1S(u_1)+\cdots+a_nS(u_n)+b_1S(v_1)+\cdots+b_4S(v_4)$$

נשים לב כי $S(u_i)=T(u_i)$, $1\leq\forall i\in\mathbb{N}\leq n$
ולכן

$$S\in Span\{S(u_1),\ldots,S(u_n),S(v_1),\ldots,S(v_4)\}\in Span\{A\}$$

כלומר $ImS\subseteq Span\{A\}$
ולכן $ImS+ImT\subseteq Span\{A\}$
ולכן $\dim(ImS+ImT)\leq\dim(span\{A\})$
לכן $\dim(span\{A\})\leq n+4+4=n+8$ כי בA יש לכל היותר $n+8$ וקטורים בת"ל
ולכן $\dim(ImT+ImS)\leq n+8$

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** T חח"ע ולא על
נתונים: $T:\mathbb{F}[[x]]\to\mathbb{F}[[x]]$
הוכחה:
יהי $v\in\mathbb{F}[[x]]$, נגדיר $T(v)=v\cdot x$
תחילה נראה שהיא העתקה לינארית
יהיו $v,u\in\mathbb{F}[[x]]$ אזי $T(u+v)=(u+v)\cdot x=ux+vx=T(u)+T(v)$
יהי $v\in\mathbb{F}[[x]]$, ו$\alpha\in\mathbb{F}$ אזי $T(\alpha v)=\alpha vx=\alpha T(v)$
עתה נראה כי T חח"ע
יהיו $u,v\in\mathbb{F}[[x]]$ כך ש$T(u)=T(v)$, ונראה כי $u=v$

נשים לב כי $T(v) = ux = vx = T(u)$, $\forall x \in \mathbb{F}$
מהיות $v \in \mathbb{F}[[x]]$, $\exists a_0, \dots \in \mathbb{F}$ כך ש $v = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $vx = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1}$
מהיות $u \in \mathbb{F}[[x]]$, $\exists b_0, \dots \in \mathbb{F}$ כך ש $u = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, $ux = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^{j+1}$
ולכן $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1} = vx = ux = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^{j+1}$
מהגדרת שוויון פולינומים מתקיים $a_i = b_i$, $\forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
לכן $v = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = u$
עתה נראה שT לא על ונסיים
נניח בשלילה שT על, נשים לב כי $f(x) = 1 \in \mathbb{F}[[x]]$
ולכן $\exists v \in \mathbb{F}[[x]]$ כך ש$T(v) = 1$
מהיות $v \in \mathbb{F}[[x]]$, $\exists a_0, \dots \in \mathbb{F}$ כך ש $v = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $T(v) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1}$
ולכן $1 = T(v) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1}$, לכן $1 - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1} = 0_{\mathbb{F}}$
נשים לב כי $\{1, x, x^2, \dots\}$ בת"ל
ולכן השוויון לא מתקיים אחרת נקבל פתרון לא טריוויאלי
כלומר $1 \notin ImT$, כלומר T לא על

מ.ש.ל.☺

4. **צ"ל:** $[T_A]_B^E$, $[T_A]_B^B$, $[T_A]_E^B$

נתונים: $T_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+2y \\ x-y \end{bmatrix}$, $E = (e_1, e_2)$, $B = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$

הוכחה:

נשים לב כי $T_A(e_1) = T_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

נשים לב כי $T_A(e_2) = T_A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ולכן $[T_A]_B^E = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

נשים לב כי $T_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 10 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

נשים לב כי $T_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = 15 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 8 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ולכן $[T_A]_B^B = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}$

נשים לב כי $T_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

נשים לב כי $T_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ולכן $[T_A]_E^B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:** $T(v)$

נתונים: $T: V \to \mathbb{R}^2$, $[T]_C^B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$, $v, v_1, v_2, v_3 \in V$

$B = (v_1, v_2, v_3)$, $[v]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

הוכחה:

נשים לב כי $T(v_1) = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$

וגם נשים לב כי $T(v_3) = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

וגם מתקיים כי $v = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 - 1 \cdot v_3$

לכן $T(v) = T(v_1 - v_3) = T(v_1) - T(v_3) = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

מ.ש.ל.☺

6א. **צ"ל:** $B=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס של V
נתונים: $T:V\to W$ ה"ל, $(v_1,\dots,v_k)$ בסיס של $\ker T$ ו$(T(v_{k+1}),\dots,T(v_n))$ בסיס של ImT
כש $v_1,\dots v_n\in V$
הוכחה:
תחילה נשים לב שממשפט המימדים השני מתקיים $\dim V=\dim ImT+\dim\ker T=n$
עתה נראה כי $B=(v_1,\dots,v_n)$ בת"ל
יהיו $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{F}$ כך ש $a_1v_1+\cdots+a_nv_n=0_V$
נשים לב כי $T(v_i)=0_W$, $\forall i\in\mathbb{N}\le k$

$$0_W=T(0_V)=T(a_1v_1+\cdots+a_nv_n)=a_{k+1}T(v_{k+1})+\cdots+a_nT(v_n)$$

נשים לב כי $(T(v_{k+1}),\dots,T(v_n))$ בסיס של ImT ולכן בת"ל
כלומר $a_{k+1}=\cdots=a_n=0_{\mathbb{F}}$
נציב חזרה ונקבל $a_1v_1+\cdots+a_kv_k=a_1v_1+\cdots+a_kv_k+0_V+\cdots+0_V=0_V$
נתון כי $(v_1,\dots,v_k)$ בסיס של $\ker T$ ולכן בת"ל
כלומר $a_1=\cdots=a_k=0_{\mathbb{F}}$
ולכן $a_1=\cdots=a_n=0_{\mathbb{F}}$
כלומר $B=(v_1,\dots,v_n)$ בת"ל
ראינו שאם יש n וקטורים בת"ל במרחב ממימד n אז הם בסיס
לכן $B=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס של V

מ.ש.ל.א.☺

6ב. **צ"ל:** $\exists w_1,\dots,w_l\in W$ כך ש$(T(v_{k+1}),\dots,T(v_n),w_1,\dots,w_l)$ בסיס של W
נתונים: $T:V\to W$ ה"ל, $(v_1,\dots,v_k)$ בסיס של $\ker T$ ו$(T(v_{k+1}),\dots,T(v_n))$ בסיס של ImT
כש $v_1,\dots v_n\in V$, W נוצר סופית
הוכחה:
מהיות W נוצר סופית, נסמן $\dim W=m$
נשים לב כי $m>n-k$,
מכיוון ש$(T(v_{k+1}),\dots,T(v_n))$ בסיס של ImT מתקיים ש$(T(v_{k+1}),\dots,T(v_n))$ בת"ל בW
ולכן $m>n-k$
אם $m=n-k$, סיימנו כי m וקטורים בת"ל במרחב וקטורי עם מימד m הוא בסיס
אחרת $span\{T(v_{k+1}),\dots,T(v_n)\}\neq W$,
לכן $\exists w_1\in W$ כך ש$w_1\notin span\{T(v_{k+1}),\dots,T(v_n)\}$
יהיו $a_{k+1},\dots,a_n,b_1\in\mathbb{F}$ כך ש $a_{k+1}T(v_{k+1})+\cdots+a_nT(v_n)+b_1w_1=0_W$
אם $b_1\neq 0_{\mathbb{F}}$, ולכן $a_{k+1}T(v_{k+1})+\cdots+a_nT(v_n)=-b_1w_1$
כלומר $-(b_1)^{-1}a_{k+1}T(v_{k+1})+\cdots+-(b_1)^{-1}a_nT(v_n)=w_1$
ולכן $w_1\in span\{T(v_{k+1}),\dots,T(v_n)\}$ בסתירה להנחה על w_1
לכן $b_1=0_{\mathbb{F}}$, נקבל $a_{k+1}T(v_{k+1})+\cdots+a_nT(v_n)=0_W$
ואנחנו יודעים שהם בת"ל ולכן $b_1=a_{k+1}=\cdots=a_n=0_{\mathbb{F}}$
כלומר $(T(v_{k+1}),\dots,T(v_n),w_1)$ בת"ל
אם $m=n-k+1$, סיימנו
אחרת נחזור על התהליך
לאחר $m-n+k$ חזרות נקבל $(T(v_{k+1}),\dots,T(v_n),w_1,\dots,w_{m-n+k})$ בת"ל
ולכן סיימנו כי $m=m-n+k-k+n$ וקטורים בת"ל במרחב וקטורי עם מימד m הוא בסיס
כלומר $(T(v_{k+1}),\dots,T(v_n),w_1,\dots,w_{m-n+k})$ בסיס של W

מ.ש.ל.ב.☺

6ג. **צ"ל:**$[T]_C^B$
נתונים: $T:V\to W$ ה"ל, $(v_1,\dots,v_k)$ בסיס של $\ker T$ ו$(T(v_{k+1}),\dots,T(v_n))$ בסיס של ImT
כש $v_1,\dots v_n\in V$, W נוצר סופית
הוכחה:

$$1\le\forall i\in\mathbb{N}\le k\ ,T(v_i)=0_W=0_{\mathbb{F}}\cdot T(v_1)+\cdots+0_{\mathbb{F}}\cdot T(v_n)+0_{\mathbb{F}}\cdot w_1+\cdots+0_{\mathbb{F}}\cdot w_l$$

$$k+1\le\forall i\in\mathbb{N}\le n\ ,T(v_i)=0_{\mathbb{F}}\cdot T(v_1)+\cdots+1_{\mathbb{F}}\cdot T(v_i)+\cdots+0_{\mathbb{F}}\cdot T(v_n)+0_{\mathbb{F}}\cdot w_1+\cdots+0_{\mathbb{F}}\cdot w_l$$

לכן

$$[T]_C^B = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{F}} & \dots & 0_{\mathbb{F}} & 1_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} \\ 0_{\mathbb{F}} & \dots & 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} & \ddots & 0_{\mathbb{F}} \\ 0_{\mathbb{F}} & \dots & 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} & 1_{\mathbb{F}} \\ 0_{\mathbb{F}} & \dots & 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{\mathbb{F}} & \dots & 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0_{n-k\times k} & I_{n-k\times n-k} \\ \hline 0_{l\times k} & 0_{l\times n-k} \end{array}\right]$$

מ.ש.ל.ג.☺

7א. **צ"ל:** $B = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ בסיס של U

נתונים: $U = \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$, $T;\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_3 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$

הוכחה:

נסמן $x_2 = s, x_3 = t$ ונקבל ש $x_1 = -s - t$

ולכן $U = \left\{\begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R}\right\}$

לכן $U = \left\{s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

נראה כי $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ בת"ל

$\forall a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot a$ וגם $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot a$

ולכן $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ בת"ל ופורשים את U

כלומר $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ בסיס של U

מ.ש.ל.א.☺

7ב. **צ"ל:** $T(u) \in U$

נתונים: $U = \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$, $T;\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_3 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$

הוכחה:

יהי $u \in U$ אזי $\exists x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ כך ש $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

נשים לב כי $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ כי $u \in U$

לכן $T(u) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_3 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$

נבדוק האם התנאי לU מתקיים $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = 0$

לכן $T(u) = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_3 \\ 2x_1 \end{bmatrix} \in U$

מ.ש.ל.ב.☺

7ג. **צ"ל:** $T_U(u)$ העתקה לינארית

נתונים: $U=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid x_1+x_2+x_3=0\right\}$, $T;\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x_2\\2x_3\\2x_1\end{bmatrix}$

$T_U:U\to U$, $T_U(u)=T(u)$

הוכחה:

נשים לב כי T העתקה לינארית כי $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\2&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

יהיו $u,v\in U$ אזי $T(u+v)=T(u)+T(v)\in U$ כי U סגור לחיבור ולפי שאלה 7ב

יהי $v\in U$ ו$\alpha\in\mathbb{F}$ אזי $T(\alpha v)=\alpha T(v)\in U$ כי U סגור לכפל בסקלר ולפי שאלה 7ב

לכן T_U מוגדר היטב וגם $T_U(u)=T(u)$ העתקה לינארית כי T העתקה לינארית

מ.ש.ל.ג.☺

7ד. **צ"ל:** $[T_U]_B^B$

נתונים: $U=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid x_1+x_2+x_3=0\right\}$, $T;\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x_2\\2x_3\\2x_1\end{bmatrix}$

$T_U:U\to U$, $T_U(u)=T(u)$

הוכחה:

נשים לב כי $T\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}=0\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

נשים לב כי $T\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\2\\-2\end{bmatrix}=-2\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+-2\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

לכן $[T_U]_B^B=\begin{bmatrix}0&-2\\2&-2\end{bmatrix}$

מ.ש.ל.ד.☺

8. **צ"ל:** $[T_A]_B^B$

נתונים: $T_A\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-2y\\3x+4y\end{bmatrix}$, $B=\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\right)$

הוכחה:

$$\left[\begin{array}{cc|c}2&1&0\\1&5&10\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1}\left[\begin{array}{cc|c}1&\frac{1}{2}&0\\1&5&10\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left[\begin{array}{cc|c}1&0.5&0\\0&4.5&10\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{2}{9}R_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&0.5&0\\0&1&\frac{20}{9}\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{1}{2}R_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-\frac{10}{9}\\0&1&\frac{20}{9}\end{array}\right]$$

ולכן $T\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\10\end{bmatrix}=\frac{-10}{9}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\frac{20}{9}\cdot\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}2&1&-9\\1&5&23\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1}\left[\begin{array}{cc|c}1&\frac{1}{2}&-4.5\\1&5&23\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left[\begin{array}{cc|c}1&0.5&0\\0&4.5&27.5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{2}{9}R_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&0.5&-4.5\\0&1&\frac{55}{9}\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{1}{2}R_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-\frac{68}{9}\\0&1&\frac{20}{9}\end{array}\right]$$

ולכן $T\left(\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-9\\23\end{bmatrix}=\frac{-68}{9}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\frac{55}{9}\cdot\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$

ולכן $[T_A]_B^B=\begin{bmatrix}\frac{-10}{9}&\frac{-68}{9}\\\frac{20}{9}&\frac{55}{9}\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-10&-68\\20&55\end{bmatrix}$

מ.ש.ל.☺

9. **צ"ל:** A כך ש $T=T_A$

נתונים: $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$,$B=\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right)$,$[T]_B^E=\begin{bmatrix}-2&5&0\\1&0&-2\end{bmatrix}$

הוכחה:

נרצה למצוא את $A=[T]_{E_2}^{E_3}=[id]_{E_2}^{B}\cdot[T]_B^{E_3}$

נשים לב כי ברור שמתקיים $[id]_{E_2}^{B}=\begin{bmatrix}1&3\\3&0\end{bmatrix}$

ולכן $A=[T]_{E_2}^{E_3}=[id]_{E_2}^{B}\cdot[T]_B^{E_3}=\begin{bmatrix}1&3\\3&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2&5&0\\1&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5&-6\\-6&15&0\end{bmatrix}$

כלומר $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=T_A\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+5y-6z\\-6x+15y\end{bmatrix}$

מ.ש.ל.☺

10. **צ"ל:** v

נתונים: $T:\mathbb{R}^2\to W$, $[T]_C^B=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$, $B=\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right)$,

$C=(w_1,w_2)$, $[T(v)]_C=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$

הוכחה:

נשים לב כי $T\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right)=w_1+w_2$

נשים לב כי $T\left(\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right)=2w_2$

$$T(v)=-3w_1+2w_2=-3\cdot(w_1+w_2)+5w_2=-3\cdot T\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right)+2.5\cdot T\left(\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right)=T\left(\begin{bmatrix}4.5\\-9\end{bmatrix}\right)$$

נשים לב כי $\dim ImT=2$,

כלומר ממשפט המימדים מתקיים $\dim\ker T=0$, לכן T חח"ע

ולכן אם $T(v)=T\left(\begin{bmatrix}4.5\\-9\end{bmatrix}\right)$ אזי מתקיים $v=\begin{bmatrix}4.5\\-9\end{bmatrix}$

מ.ש.ל.☺

11א. **צ"ל:** B בסיס וגם $[T_U]_B^B$ וגם $T_U(u)\in U$

נתונים: $T:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $T(f)(x)=f(x+1)$, $B=\{f,g,h,l\}$, $U=span\{B\}$

$f(x)=1$, $g(x)=x$, $h(x)=x^2$, $l(x)=x^3$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי $\{1,x,x^2,x^3\}$ בת"ל (ראינו בהרצאה)

ולכן B בת"ל ופורשת את U, כלומר B בסיס של U

יהי $v\in U$, אזי $\exists a,b,c,d\in\mathbb{R}$ כך ש $v=ax^3+bx^2+cx+d$

ולכן $T_U(v)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d=$

$ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+(a+b+c+d)\in span\{B\}=U$

נשים לב כי $T_U(1)=1=1\cdot f+0\cdot g+0\cdot h+0\cdot l$

נשים לב כי $T_U(x)=(x+1)=x+1=1\cdot f+1\cdot g+0\cdot h+0\cdot l$

נשים לב כי $T_U(x^2)=(x+1)^2=x^2+2x+1=1\cdot f+2\cdot g+1\cdot h+0\cdot l$

נשים לב כי $T_U(x^3)=(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1=1\cdot f+3\cdot g+3\cdot h+1\cdot l$

ולכן $[T_U]_B^B=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

מ.ש.ל.א.☺

11ב. **צ"ל:** B בסיס וגם $[T_U]_B^B$ וגם $T_U(u)\in U$

נתונים: $T:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $T(f)(x)=f(x+1)$, $B=\{f,g,h\}$, $U=span\{B\}$

$f(x)=1$, $g(x)=2^x$, $h(x)=3^x$

הוכחה:
תחילה נראה ש$\{f,g,h\}$ בת"ל. יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש$af+bg+ch=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$
נציב $x=0$ ונקבל $a\cdot 1+b\cdot 2^0+c\cdot 3^0=a+b+c=0$
נציב $x=1$ ונקבל $a\cdot 1+b\cdot 2^1+c\cdot 3^1=a+2b+3c=0$
נציב $x=2$ ונקבל $a\cdot 1+b\cdot 2^2+c\cdot 3^2=a+4b+9c=0$.

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&3&8\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-3R_2}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to\frac{1}{2}R_3}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_1\to R_1-R_3]{R_2\to R_2-2R_3}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

לכן $a=b=c=0$, כלומר B בת"ל
ולכן B בת"ל ופורשת את U, כלומר B בסיס של U
יהי $u\in U$, אזי $\exists a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש$u=af+bg+ch$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$$T_U(u)=a\cdot 1+b\cdot 2^{x+1}+c\cdot 3^{x+1}=a\cdot f+2b\cdot g+3c\cdot h\in span\left\{B\right\}=U$$

נשים לב כי $T_U(1)=1=1\cdot f+0\cdot g+0\cdot h$
נשים לב כי $T_U(2^x)=2^{x+1}=2\cdot 2^x=0\cdot f+2\cdot g+0\cdot h$
נשים לב כי $T_U(3^x)=3^{x+1}=3\cdot 3^x=0\cdot f+0\cdot g+3\cdot h$
ולכן $[T_U]_B^B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

מ.ש.ל.ב.☺

11ג. **צ"ל:** B בסיס וגם $[T_U]_B^B$ וגם $T_U(u)\in U$
נתונים: $T:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $T\left(f\right)\left(x\right)=f\left(x+1\right)$, $B=\left\{f,g,h\right\}$, $U=span\left\{B\right\}$
$f\left(x\right)=\sin\left(x\right)$, $g\left(x\right)=\cos\left(x\right)$
הוכחה:
תחילה נראה כי $\{f,g\}$ בת"ל
יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש$af+bg=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$
נציב $x=0$ ונקבל $0=a\sin\left(0\right)+b\cos\left(0\right)=b$
נציב $x=\frac{\pi}{2}$ ונקבל $0=a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+b\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=a$
לכן $a=b=0$, כלומר B בת"ל
ולכן B בת"ל ופורשת את U, כלומר B בסיס של U
נשתמש בזהות שמופיעה בתרגיל 9 שאלה 6 $\sin\left(x+y\right)=\sin\left(x\right)\cos\left(y\right)+\sin\left(y\right)\cos\left(x\right)$
תחילה נשים לב כי $\cos\left(x+y\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\sin\left(-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\cos\left(-x\right)$
$\cos\left(x\right)$ היא פונקציה זוגית ו$\sin\left(x\right)$ היא פונקציה אי זוגית (מוכח באינפי) ולכן
$\cos\left(x+y\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\cos\left(x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\sin\left(x\right)=\cos\left(y\right)\cos\left(x\right)-\sin\left(y\right)\sin\left(x\right)$
יהי $u\in U$, אזי $\exists a,b\in\mathbb{R}$ כך ש$u=af+bg$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$$T_U(u)=a\sin\left(x+1\right)+b\cos\left(x+1\right)=\left(a\cos\left(1\right)\right)\sin\left(x\right)+\left(a\sin\left(1\right)\right)\cos\left(x\right)+b\cos\left(x+1\right)$$

$$=\left(a\cos\left(1\right)\right)\sin\left(x\right)+\left(a\sin\left(1\right)\right)\cos\left(x\right)+\left(b\cos\left(1\right)\right)\cos\left(x\right)-\left(b\sin\left(1\right)\right)\sin\left(x\right)=$$

$$=\left(a\cos\left(1\right)-b\sin\left(1\right)\right)\sin\left(x\right)+\left(a\sin\left(1\right)+b\cos\left(1\right)\right)\cos\left(x\right)\in span\left\{B\right\}=U$$

נשים לב כי $T_U(\sin\left(x\right))=\sin\left(x+1\right)=\cos\left(1\right)\sin\left(x\right)+\sin\left(1\right)\cos\left(x\right)=\cos\left(1\right)\cdot f+\sin\left(1\right)\cdot g$
נשים לב כי $T_U(\cos\left(x\right))=\cos\left(x+1\right)=\cos\left(1\right)\cos\left(x\right)-\sin\left(1\right)\sin\left(x\right)=-\sin\left(1\right)\cdot f+\cos\left(1\right)\cdot g$
ולכן $[T_U]_B^B=\begin{bmatrix}\cos\left(1\right)&-\sin\left(1\right)\\\sin\left(1\right)&\cos\left(1\right)\end{bmatrix}$

מ.ש.ל.ג.☺

12א. **צ"ל:** האם $\ker(S\circ T)\subseteq\ker(T)$?
נתונים: $T:V\to W$, $S:W\to Z$ העתקות לינאריות
הוכחה:
לא נכון! נבחר $V=W=Z=\mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, $S\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
נשים לב כי $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=S\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=(S\circ T)\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$, לכן $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\ker(S\circ T)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$
כלומר $\mathbb{R}^2\subseteq\ker(S\circ T)$ וברור כי $\ker(S\circ T)\subseteq\mathbb{R}^2$ ולכן $\ker(S\circ T)=\mathbb{R}^2$
לכן $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\in\ker(S\circ T)$, וגם $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$ ולכן $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\notin\ker(T)$
כלומר $\ker(S\circ T)\not\subseteq\ker(T)$

מ.ש.ל.א.☺

12ב. **צ"ל:** האם $\ker(T)\subseteq\ker(S\circ T)$?
נתונים: $T:V\to W$, $S:W\to Z$ העתקות לינאריות
הוכחה:
נכון! יהי $v\in\ker T$ אזי $T(v)=0_W$ ולכן $S(T(v))=S(0_W)=0_Z$
כלומר $v\in\ker(S\circ T)$, ולכן $\ker(T)\subseteq\ker(S\circ T)$

מ.ש.ל.ב.☺

12ג. **צ"ל:** האם $\ker(T)=\ker(S\circ T)$?
נתונים: $T:V\to W$, $S:W\to Z$ העתקות לינאריות וS חח"ע
הוכחה:
נכון! נראה כי $\ker(S\circ T)\subseteq\ker(T)$
יהי $v\in\ker(S\circ T)$ אזי $S(T(v))=0_Z=S(0_W)$
מכיוון שS חח"ע מתקיים כי $T(v)=0_W$, כלומר $v\in\ker(T)$
ולכן $\ker(S\circ T)\subseteq\ker(T)$, מהסעיף הקודם מתקיים כי $\ker(T)\subseteq\ker(S\circ T)$
ולכן $\ker(T)=\ker(S\circ T)$

מ.ש.ל.ג.☺

13. **צ"ל:** T
נתונים: $T:V\to V$ העתקה לינארית כך ש$T\circ T\neq 0$ וגם $T\circ T\circ T=0$, $\dim V=3$
הוכחה:
יהי (v_1,v_2,v_3) בסיס של V
יהי $v\in V$ אזי $\exists a,b,c\in\mathbb{F}$ כך ש$v=av_1+bv_2+cv_3$
נגדיר $T(v)=av_2+bv_3$
נראה כי T העתקה לינארית
יהיו $u,v\in V$ אזי $\exists a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in\mathbb{F}$
כך ש$v=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3$ וגם $u=b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3$
לכן $T(u+v)=(a_1+b_1)v_2+(a_2+b_2)v_3=a_1v_2+a_2v_3+b_1v_2+b_2v_3=T(v)+T(u)$
יהי $v\in V$ ו$\alpha\in\mathbb{F}$, אזי $\exists a_1,a_2,a_3\in\mathbb{F}$ כך ש$v=av_1+bv_2+cv_3$

$$T(\alpha v)=\alpha a_1v_2+\alpha a_2v_3=\alpha\cdot(a_1v_2+a_2v_3)=\alpha T(v)$$

לכן T העתקה לינארית
יהי $v\in V$ אזי $\exists a,b,c\in\mathbb{F}$ כך ש$v=av_1+bv_2+cv_3$
נשים לב כי $T(T(T(v)))=T(T(av_2+bv_3))=T(av_3)=0_V$
לכן $T\circ T\circ T=0$
נשים לב כי $T(T(v_1))=T(v_2)=v_3\neq 0$ אחרת הם לא בסיס
ולכן $T\circ T\neq 0$

מ.ש.ל.☺