פתרון תרגיל מספר 8 - לינארית 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

12 במאי 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\ker T = \text{span}\left\{b_{s_1}, \dots, b_{s_m}\right\}$

הוכחה:

יהי $v \in \text{span}\left\{b_{s_1}, \dots, b_{s_m}\right\}$, אזי $\exists a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ כך ש $v = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot b_{s_i}$, לכן

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot b_{s_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot T\left(b_{s_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot 0 = 0 \Rightarrow v \in \ker T$$

כלומר $\forall v \in \text{span}\left\{b_{s_1}, \dots, b_{s_m}\right\}$ מתקיים $v \in \ker T$, לכן $\boxed{\ker T \subseteq \text{span}\left\{b_{s_1}, \dots, b_{s_m}\right\}}$,

יהי $v \in \ker T$, לכן $\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ כך ש $v = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$, לכן

$$0 = T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot T(b_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{s_i} \cdot T\left(b_{s_i}\right) + \sum_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus \{s_1,\dots,s_m\}} a_i \cdot T(b_i) =$$
$$= \sum_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus \{s_1,\dots,s_m\}} a_i \cdot T(b_i) = \sum_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus \{s_1,\dots,s_m\}} a_i \cdot b_{i+1}$$

מהיות $b_1, \dots, b_n$ בסיס ו $(b_i)_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus \{s_1,\dots,s_m\}}$ תת קבוצה שלהם אזי הם בת"ל,

לכן $a_i = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{s_1, \dots, s_m\}$, כלומר $v = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot b_{s_i} \in \text{span}\left\{b_{s_1}, \dots, b_{s_m}\right\}$,

כלומר $\forall v \in \ker T$ מתקיים $v \in \text{span}\left\{b_{s_1}, \dots, b_{s_m}\right\}$, לכן $\boxed{\text{span}\left\{b_{s_1}, \dots, b_{s_m}\right\} \subseteq \ker T}$,

לכן $\boxed{\text{span}\left\{b_{s_1}, \dots, b_{s_m}\right\} = \ker T}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** מצאו בסיס לImT

הוכחה:

תחילה ממשפט המימדים מתקיים

$$n = \dim V = \dim ImT + \dim \ker T = \dim ImT + m$$
$$\Rightarrow \boxed{\dim ImT = n - m}$$

נשים לב כי $T(b_i) = b_{i+1}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{s_1, \dots, s_m\}$,

לכן $b_2, \dots, b_{s_1}, b_{s_1+2}, \dots, b_{s_2}, \dots, b_{s_m} \in ImT$,

נשים לב כי $b_2, \dots, b_{s_1}, b_{s_1+2}, \dots, b_{s_2}, \dots, b_{s_m}$ הם $n - m$ וקטורים בת"ל (תת קבוצה של קבוצה בת"ל),

לכן $b_2, \dots, b_{s_1}, b_{s_1+2}, \dots, b_{s_2}, \dots, b_{s_m} = (b_{i+1})_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus \{s_1,\dots,s_m\}}$ בסיס של ImT

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** מצאו נוסחא למספר השרשראות

הוכחה:

תחילה, ממשפט המימדים מתקיים

$$\dim \ker T^k = \dim V - \dim ImT^k = n - rk\left(T^k\right)$$

אם $k=s_1$, אז מספר השרשאות (על פי הנוסחא מהתרגול הוא) (וגם כי $\ker T^{s_1}=V$

$$2\cdot\dim\ker T^k-\dim\ker T^{k+1}-\dim\ker T^{k-1}=2n-n-\left(n-rk\left(T^{k-1}\right)\right)=rk\left(T^{k-1}\right)$$

אחרת אם $1<k<s_1$, מספר השרשאות (על פי הנוסחא מהתרגול הוא)

$$\begin{aligned}2\dim\ker T^k-\dim\ker T^{k-1}-\dim\ker T^{k+1}&=2\left(n-rk\left(T^k\right)\right)-\left(n-rk\left(T^{k-1}\right)\right)-\left(n-rk\left(T^{k+1}\right)\right)\\&=rk\left(T^{k+1}\right)+rk\left(T^{k-1}\right)-2\cdot rk\left(T^k\right)\end{aligned}$$

אחרת $k=1$, מספר השרשאות (על פי הנוסחא מהתרגול הוא)

$$\begin{aligned}2\dim\ker T^k-\dim\ker Id_V-\dim\ker T^{k+1}&=2\left(n-rk\left(T^k\right)\right)-0-\left(n-rk\left(T^{k+1}\right)\right)\\&=rk\left(T^{k+1}\right)+n-2\cdot rk\left(T^k\right)\end{aligned}$$

נשים לב כי קיבלנו שמספר השרשראות תמיד שווה ל$rk\left(T^{k+1}\right)+rk\left(T^{k-1}\right)-2\cdot rk\left(T^k\right)$ (עד כדי התייחסות למקרה קצה)

מ.ש.ל.ג.☺

2. **צ"ל:** מצאו לכל k את מספר השרשראות
הוכחה:
תחילה נשים לב כי קיבלנו בשאלה הקודמת כי מספר השרשראות באורך k הוא

$$rk\left(T^{k+1}\right)+rk\left(T^{k-1}\right)-2\cdot rk\left(T^k\right)$$

לכן, מספר השרשראות באורך $k>4$ הוא ($T^k=T^{k-1}=T^{k+1}=0\Rightarrow rk\left(T^k\right)=rk\left(T^{k-1}\right)=rk\left(T^{k+1}\right)=0$)

$$rk\left(T^{k+1}\right)+rk\left(T^{k-1}\right)-2\cdot rk\left(T^k\right)=0+0-2\cdot 0=0$$

לכן, מספר השרשראות באורך 4 הוא ($T^5=T\left(T^4\right)=T\left(0\right)=0\Rightarrow rk\left(T^4\right)=rk\left(T^5\right)=0$)

$$rk\left(T^5\right)+rk\left(T^3\right)-2\cdot rk\left(T^4\right)=0+2-2\cdot 0=2$$

לכן, מספר השרשראות באורך 3 הוא ($T^4=0\Rightarrow rk\left(T^4\right)=0$)

$$rk\left(T^4\right)+rk\left(T^2\right)-2\cdot rk\left(T^3\right)=0+4-2\cdot 2=0$$

לכן, מספר השרשראות באורך 2 הוא

$$rk\left(T^3\right)+rk\left(T^1\right)-2\cdot rk\left(T^2\right)=9+2-2\cdot 4=3$$

לכן, מספר השרשראות באורך 1 הוא ($T^0=Id\Rightarrow rk\left(T^0\right)=\dim V=18$)

$$rk\left(T^2\right)+rk\left(T^0\right)-2\cdot rk\left(T^1\right)=4+18-2\cdot 9=4$$

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** $T^s=0$
הוכחה:
ממשפט המימדים מתקיים

$$\begin{aligned}\dim\ker T^s&=\dim V-rk\left(T^s\right)=n-rk\left(T^s\right)\\\dim\ker T^{s+1}&=\dim V-rk\left(T^{s+1}\right)=n-rk\left(T^{s+1}\right)=n-rk\left(T^s\right)\end{aligned}$$

מהיות T נילפוטנטית נסמן את דרגת הנילפוטנטיות בl.
נניח בשלילה ש$s > l$, יהי $v_1, \ldots, v_n$ בסיס שרשראות,
ראינו בתרגול שמתקיים שמספר הוקטורים בגובה s מבסיס השרשראות שווה ל$\dim\left(\ker\left(T^{s+1}\right) \setminus \ker T^s\right)$
בתרגיל הקודם הוכחנו כי $\ker T^s \subseteq \ker T^{s+1}$ וגם מתקיים $\dim\ker T^s = n - rk\left(T^s\right) = \dim\ker T^{s+1}$,
לכן ממשפט בלינארית 1 מתקיים $\ker T^s = \ker T^{s+1}$, כלומר

$$\dim\left(\ker\left(T^{s+1}\right) \setminus \ker T^s\right) = \dim\{0\} = 0$$

לכן מספר הוקטורים בגובה s מבסיס השרשראות שווה ל0, כלומר כל השרשאות מאורך לכל היותר s.
אך מהיות T נילפוטנטית מדרגה l קיימת שרשרת באורך l בסתירה לכך שכל השרשאות מאורך לכל היותר $s < l$
לכן $s \leq l$ אזי $T^s = T^{s-l} \circ T^l = T^{s-l} \circ 0 = 0$, כלומר $\boxed{T^s = 0}$ כנדרש.

מ.ש.ל.☺

4. **צ"ל:** מצאו לכל k את מספר השרשראות
הוכחה:
תחילה נשים לב כי קיבלנו בשאלה הקודמת כי מספר השרשראות באורך k הוא

$$rk\left(T^{k+1}\right) + rk\left(T^{k-1}\right) - 2 \cdot rk\left(T^k\right)$$

עתה נשים לב כי $rkT^s \leq rkT^{s-1}$ כי $ImT^s \subseteq ImT^{s-1}$, לכן $0 \leq rkT^3 \leq rkT^2 = 1$,
מהשאלה קודמת ראינו כי $rkT^3 \neq rkT^2$ (אחרת היינו מקבלים $T^2 = 0$ בסתירה לכך ש$rkT^2 \neq 0$), לכן $rkT^3 = 0$,
לכן, מספר השרשראות באורך $k > 3$ הוא ($T^k = T^{k-1} = T^{k+1} = 0 \Rightarrow rk\left(T^k\right) = rk\left(T^{k-1}\right) = rk\left(T^{k+1}\right) = 0$)

$$rk\left(T^{k+1}\right) + rk\left(T^{k-1}\right) - 2 \cdot rk\left(T^k\right) = 0 + 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

לכן, מספר השרשראות באורך 3 הוא ($T^5 = T\left(T^4\right) = T\left(0\right) = 0 \Rightarrow rk\left(T^4\right) = rk\left(T^3\right) = 0$)

$$rk\left(T^4\right) + rk\left(T^2\right) - 2 \cdot rk\left(T^3\right) = 0 + 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

לכן, מספר השרשראות באורך 2 הוא ($T^3 = 0 \Rightarrow rk\left(T^3\right) = 0$)

$$rk\left(T^3\right) + rk\left(T^1\right) - 2 \cdot rk\left(T^2\right) = 0 + 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

לכן, מספר השרשראות באורך 1 הוא ($T^0 = Id \Rightarrow rk\left(T^0\right) = \dim V = 10$)

$$rk\left(T^2\right) + rk\left(T^0\right) - 2 \cdot rk\left(T^1\right) = 1 + 10 - 2 \cdot 4 = 3$$

מ.ש.ל.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** T נילפטונטי ואת מספר השרשראות באורך k
הוכחה:
תחילה נשים לב כי מהגדרת T מתקיים $T^k\left(v\right) = A^k v$, לכן T נילפוטנטי אם"ם A נילפוטנטית,
ולפי משפט המימדים מתקיים

$$\dim\ker T^k = \dim V - \dim ImT^k = n - rk\left(A^k\right)$$

נשים לב כי $A^2 = 0$, לכן $rk\left(A^2\right) = 0$, וגם $rk\left(A\right) = 1$, $rk\left(A^0\right) = \dim V = 5$,
לכן, מספר השרשראות באורך $k > 2$ הוא ($T^k = T^{k-1} = T^{k+1} = 0 \Rightarrow rk\left(T^k\right) = rk\left(T^{k-1}\right) = rk\left(T^{k+1}\right) = 0$)

$$rk\left(T^{k+1}\right) + rk\left(T^{k-1}\right) - 2 \cdot rk\left(T^k\right) = 0 + 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

לכן, מספר השרשראות באורך 2 הוא ($T^2 = T^3 = 0$)

$$rk\left(T^3\right) + rk\left(T^1\right) - 2 \cdot rk\left(T^2\right) = 0 + 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

לכן, מספר השרשראות באורך 1 הוא ($T^0 = Id \Rightarrow rk\left(T^0\right) = \dim V = 5$)

$$rk\left(T^2\right) + rk\left(T^0\right) - 2 \cdot rk\left(T^1\right) = 5 + 0 - 2 \cdot 1 = 3$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** T נילפטונטי ואת מספר השרשראות באורך k

הוכחה:

תחילה נשים לב כי מהגדרת T מתקיים $T^k(v) = A^k v$, לכן T נילפוטנטי אם"ם A נילפוטנטית, ולפי משפט המימדים מתקיים

$$\dim\ker T^k = \dim V - \dim ImT^k = n - rk\left(A^k\right)$$

נשים לב כי

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = 0$$

לכן $rk\left(A^3\right) = 0$, $rk\left(A^2\right) = 1$, וגם $rk\left(A\right) = 3$, $rk\left(A^0\right) = \dim V = 5$,

לכן, מספר השרשראות באורך $k > 4$ הוא ($T^k = T^{k-1} = T^{k+1} = 0 \Rightarrow rk\left(T^k\right) = rk\left(T^{k-1}\right) = rk\left(T^{k+1}\right) = 0$)

$$rk\left(T^{k+1}\right) + rk\left(T^{k-1}\right) - 2 \cdot rk\left(T^k\right) = 0 + 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

לכן, מספר השרשראות באורך 3 הוא ($T^4 = T^3 = 0$)

$$rk\left(T^4\right) + rk\left(T^2\right) - 2 \cdot rk\left(T^3\right) = 0 + 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

לכן, מספר השרשראות באורך 2 הוא

$$rk\left(T^3\right) + rk\left(T^1\right) - 2 \cdot rk\left(T^2\right) = 0 + 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

לכן, מספר השרשראות באורך 1 הוא ($T^0 = Id \Rightarrow rk\left(T^0\right) = \dim V = 5$)

$$rk\left(T^2\right) + rk\left(T^0\right) - 2 \cdot rk\left(T^1\right) = 5 + 1 - 2 \cdot 3 = 0$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** T נילפטונטי ואת מספר השרשראות באורך k

הוכחה:

תחילה נשים לב כי מהגדרת T מתקיים $T^k(v) = A^k v$, לכן T נילפוטנטי אם"ם A נילפוטנטית, ולפי משפט המימדים מתקיים

$$\dim\ker T^k = \dim V - \dim ImT^k = n - rk\left(A^k\right)$$

נשים לב כי

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^5 = 0$$

לכן $rk\left(A^{5}\right)=0$,$rk\left(A^{4}\right)=1$,$rk\left(A^{3}\right)=2$,$rk\left(A^{2}\right)=3$ וגם $rk\left(A\right)=4$,$rk\left(A^{0}\right)=\dim V=5$,
לכן, מספר השרשראות באורך $k>5$ הוא ($T^{k}=T^{k-1}=T^{k+1}=0\Rightarrow rk\left(T^{k}\right)=rk\left(T^{k-1}\right)=rk\left(T^{k+1}\right)=0$)

$$rk\left(T^{k+1}\right)+rk\left(T^{k-1}\right)-2\cdot rk\left(T^{k}\right)=0+0-2\cdot0=0$$

לכן, מספר השרשראות באורך 5 הוא ($T^{6}=T^{5}=0$)

$$rk\left(T^{6}\right)+rk\left(T^{4}\right)-2\cdot rk\left(T^{5}\right)=0+1-2\cdot0=1$$

לכן, מספר השרשראות באורך 4 הוא ($T^{5}=0$)

$$rk\left(T^{5}\right)+rk\left(T^{3}\right)-2\cdot rk\left(T^{4}\right)=0+2-2\cdot1=0$$

לכן, מספר השרשראות באורך 3 הוא

$$rk\left(T^{4}\right)+rk\left(T^{2}\right)-2\cdot rk\left(T^{3}\right)=1+3-2\cdot2=0$$

לכן, מספר השרשראות באורך 2 הוא

$$rk\left(T^{3}\right)+rk\left(T^{1}\right)-2\cdot rk\left(T^{2}\right)=2+4-2\cdot3=0$$

לכן, מספר השרשראות באורך 1 הוא ($T^{0}=Id\Rightarrow rk\left(T^{0}\right)=\dim V=5$)

$$rk\left(T^{2}\right)+rk\left(T^{0}\right)-2\cdot rk\left(T^{1}\right)=5+3-2\cdot4=0$$

מ.ש.ל.ג.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** בלוקי ז'ורדן 5×5
הוכחה:
תחילה נסמן את המטריצה המז'ורדנת ב

$$\begin{bmatrix}J_{n_{1}}\left(0\right)\\ & \ddots\\ & & J_{n_{r}}\left(0\right)\end{bmatrix}$$

כאשר $n_{1}+\cdots+n_{r}=5$,$n_{1}\geq n_{2}\geq\cdots\geq n_{r}$, נשים לב שהפתרונות לכך הינם

$$5\quad 4+1\quad 3+1+1\quad 3+2\quad 2+2+1\quad 2+1+1+1\quad 1+1+1+1+1$$

לכן המטריצה המז'ורדנת היא מאחת הצורות הבאות

$$\begin{bmatrix}J_{2}\left(0\right)\\ & J_{2}\left(0\right)\\ & & J_{1}\left(0\right)\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}J_{3}\left(0\right)\\ & J_{1}\left(0\right)\\ & & J_{1}\left(0\right)\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}J_{4}\left(0\right)\\ & J_{1}\left(0\right)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}J_{3}\left(0\right)\\ & J_{2}\left(0\right)\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}J_{1}\left(0\right)\\ & J_{1}\left(0\right)\\ & & J_{1}\left(0\right)\\ & & & J_{1}\left(0\right)\\ & & & & J_{1}\left(0\right)\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}J_{2}\left(0\right)\\ & J_{1}\left(0\right)\\ & & J_{1}\left(0\right)\\ & & & J_{1}\left(0\right)\end{bmatrix}$$

$$J_{5}\left(0\right)$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** בלוקי ז'ורדן 6×6 כך ש$J(0)^3 \neq 0_6$
הוכחה:
תחילה נסמן את המטריצה המז'ורדנת ב

$$\begin{bmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r}(0) \end{bmatrix}$$

כאשר $n_1+\cdots+n_r=6$, $n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_r$,
עתה נשים לב כי $\begin{bmatrix} J_{n_1}(0)^3 & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r}(0)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r}(0) \end{bmatrix}^3$ בשביל ש$J(0)^3\neq 0$ נוסיף תנאי
$n_1>3$,
נשים לב שהפתרונות לכך הינם

$$5+1 \quad 6 \quad 4+1+1 \quad 4+2$$

לכן המטריצה המז'ורדנת היא מאחת הצורות הבאות

$$J_6(0) \quad \begin{bmatrix} J_4(0) & \\ & J_2(0) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} J_4(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_1(0) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} J_5(0) & \\ & J_1(0) \end{bmatrix}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** בלוקי ז'ורדן 8×8 כך ש$rk(A)=3$
הוכחה:
תחילה ממשפט המימדים מתקיים $\dim\ker T = 8-rk(A)=5$,
עתה נסמן את המטריצה המז'ורדנת ב

$$\begin{bmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r}(0) \end{bmatrix}$$

כאשר $n_1+\cdots+n_r=8$, $n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_r$, **וגם** $r=5$ **(כי** $\dim\ker T=5$**)**
נשים לב שהפתרונות לכך הינם

$$4+1+1+1+1 \quad 3+2+1+1+1 \quad 2+2+2+1+1$$

לכן המטריצה המז'ורדנת היא מאחת הצורות הבאות

$$\begin{bmatrix} J_3(0) & & & & \\ & J_2(0) & & & \\ & & J_1(0) & & \\ & & & J_1(0) & \\ & & & & J_1(0) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} J_4(0) & & & & \\ & J_1(0) & & & \\ & & J_1(0) & & \\ & & & J_1(0) & \\ & & & & J_1(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_2(0) & & & & \\ & J_2(0) & & & \\ & & J_2(0) & & \\ & & & J_1(0) & \\ & & & & J_1(0) \end{bmatrix}$$

מ.ש.ל.ג.☺

7. **צ"ל:** $rk\left(A\right)\leq\frac{k-1}{k}\cdot n$

הוכחה:

נסתכל על $T_{A}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$, הוא נילפוטנטי כי $T_{A}^{k}=A^{k}=0$,

עתה נסמן בl את מספר השרשראות של T,

לפי שאלה 1 סעיף א' מתקיים כי $\dim\ker T_{A}=l$,

וגם אורך כל שרשרת הוא לכל היותר k, ויש n וקטורים בשרשראות, לכן יש לפחות $\frac{n}{k}$ שרשראות,

לכן $\dim\ker T_{A}=l\geq\frac{n}{k}$, לכן ממשפט המימדים מתקיים

$$rk\left(A\right)=n-\dim\ker T_{A}\leq n-\frac{n}{k}=\frac{k-1}{k}\cdot n$$

מ.ש.ל.☺

8. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** A נילפוטנטית

הוכחה:

נשים לב כי $A^{2}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ 1 & -3 & -2 & 2\end{bmatrix}$, לכן

$$A^{4}=A^{2}\cdot A^{2}=\left(\begin{bmatrix}0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ 1 & -3 & -2 & 2\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ 1 & -3 & -2 & 2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

כלומר A נילפוטנטית, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** צורת הז'ורדן של המטריצה

הוכחה:

נשים לב כי

$$A^{4}\cdot e_{1}=A^{3}\cdot\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=A^{2}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=A\cdot\left(\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 5\\ 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ -3\\ -5\end{bmatrix}\right)=A\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\\ -1\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 5\\ 8\end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ -3\\ -5\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}6-6\\ -1+4-3\\ -1+10-9\\ -1+16-15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

כלומר קיבלנו כי $A^{3}\cdot e_{1}\neq0$, וגם $A^{4}=0$, כאשר $n=4$

לכן מהערה בתרגול מתקיים כי $e_{1}\to A\cdot e_{1}\to A^{2}\cdot e_{1}\to A^{3}\cdot e_{1}$ הוא בסיס שרשראות וגם המטריצה המז'ורדנת היא מהצורה $J_{4}\left(0\right)$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** בסיס שרשראות

הוכחה:

בסעיף הקודם נימקנו מדוע $e_{1}\to A\cdot e_{1}\to A^{2}\cdot e_{1}\to A^{3}\cdot e_{1}$ הוא בסיס שרשראות, כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺