פתרון תרגיל מספר 4 ־ תורת המשחקים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

7 במאי 2021

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** יש מעבר ל־ $\text{sg}_{G_1}(y_1) \oplus \text{sg}_{G_2}(y_2) = 0$

הוכחה:

נשים לב כי $\text{sg}_{G_1}(x_1) \neq \text{sg}_{G_2}(x_2)$ אחרת $\text{sg}_{G_1}(x_1) \oplus \text{sg}_{G_2}(x_2) = 0$ בסתירה לנתון.

נניח בלי הגבלת הכלליות כי $\text{sg}_{G_1}(x_1) < \text{sg}_{G_2}(x_2)$.

נשים לב כי $\text{sg}_{G_2}(x_2) = \text{mex}\left\{\text{sg}_{G_2}(y_2) \mid y_2 \in S_{G_2}(x_2)\right\}$.

נניח בשלילה ש־ $\forall y_2 \in S_{G_2}(x_2)$ מתקיים $\text{sg}_{G_2}(y_2) \neq \text{sg}_{G_1}(x_1)$, כלומר

$$\text{sg}_{G_2}(x_2) = \text{mex}\left\{\text{sg}_{G_2}(y_2) \mid y_2 \in S_{G_2}(x_2)\right\} \leq \text{sg}_{G_1}(x_1) < \text{sg}_{G_2}(x_2)$$

קיבלנו סתירה שמספר קטן מעצמו, לכן $\exists y_2 \in S_{G_2}(x_2)$ כך ש־ $\text{sg}_{G_2}(y_2) = \text{sg}_{G_1}(x_1)$.

נשים לב ש־ $(x_1, y_2) = (y_1, y_2)$ הינה פעולה חוקית שמעבירה למצב ב־ G ומתקיים

$$\text{sg}_{G_1}(y_1) \oplus \text{sg}_{G_2}(y_2) = \text{sg}_{G_1}(x_1) \oplus \text{sg}_{G_2}(y_2) = \text{sg}_{G_1}(x_1) \oplus \text{sg}_{G_1}(x_1) = 0$$

כלומר הראנו שקיימת פעולה חוקית שמעבירה למצב (x_1, y_2) כך ש־ $\text{sg}_{G_1}(y_1) \oplus \text{sg}_{G_2}(y_2) = 0$, כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** כל מעבר מקיים $\text{sg}_{G_1}(y_1) \oplus \text{sg}_{G_2}(y_2) \neq 0$

הוכחה:

נניח בשלילה שקיימת פעולה שמעבירה למצב (y_1, y_2) כך ש־ $\text{sg}_{G_1}(y_1) \oplus \text{sg}_{G_2}(y_2) = 0$.

מחוקיות הפעולה מתקיים $x_1 = y_1$ או ש־ $x_2 = y_2$.

נניח בלי הגבלת הכלליות כי $x_1 = y_1$, כלומר המצב הוא (x_1, y_2), נשים לב כי

$$\begin{aligned}\text{sg}_{G_2}(y_2) &= \text{sg}_{G_2}(y_2) \oplus \text{sg}_{G_1}(x_1) \oplus \text{sg}_{G_1}(x_1) = \text{sg}_{G_2}(y_2) \oplus \text{sg}_{G_1}(y_1) \oplus \text{sg}_{G_1}(x_1) = \\ &= 0 \oplus \text{sg}_{G_1}(x_1) = \left(\text{sg}_{G_1}(x_1) \oplus \text{sg}_{G_2}(x_2)\right) \oplus \text{sg}_{G_1}(x_1) = 0 \oplus \text{sg}_{G_2}(x_2) = \text{sg}_{G_2}(x_2)\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\text{sg}_{G_2}(x_2) = \text{sg}_{G_2}(y_2)$,

מהגדרת $\text{sg}_{G_2}(x_2)$, מתקיים כי לכל $z_2 \in S_{G_2}(x_2)$ מתקיים $\text{sg}_{G_2}(z_2) \neq \text{sg}_{G_2}(x_2)$,

נשים לב כי $y_2 \in S_{G_2}(x_2)$ (מעבר של פעולה חוקית במשחק G_2) וגם כי $\text{sg}_{G_2}(y_2) = \text{sg}_{G_2}(x_2)$ בסתירה להגדרת $\text{sg}_{G_2}(x_2)$.

ולכן נקבל שההנחה שקיימת פעולה שמעבירה למצב (y_1, y_2) כך ש־ $\text{sg}_{G_1}(y_1) \oplus \text{sg}_{G_2}(y_2) = 0$ אינה נכונה.

כלומר לכל פעולה שמעבירה למצב (y_1, y_2) מתקיים ש־ $\text{sg}_{G_1}(y_1) \oplus \text{sg}_{G_2}(y_2) \neq 0$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $(x_1, x_2) \in P$ אם"ם $\text{sg}_{G_1}(x_1) \oplus \text{sg}_{G_2}(x_2) = 0$

הוכחה:

נגדיר

$$\hat{P} = \left\{(x_1, x_2) \mid \text{sg}_{G_1}(x_1) \oplus \text{sg}_{G_2}(x_2) = 0\right\}$$
$$\hat{N} = \left\{(x_1, x_2) \mid \text{sg}_{G_1}(x_1) \oplus \text{sg}_{G_2}(x_2) \neq 0\right\}$$

נבחין שבסעיף הראשון הוכחנו שקיימת פעולה שמעבירה מ- $\hat{N}$ ל- $\hat{P}$.
נבחין שבסעיף השני הוכחנו שכל פעולה מעבירה מ- $\hat{P}$ ל- $\hat{N}$.
בנוסף לכך, נבחין שכל מצב סופי שבו השחקן מפסיד הינו ב- $\hat{P}$.
נראה אסטרטגיה מנצחת לשחקן הראשון כשהמצב ההתחלתי הוא ב- $\hat{N}$.
השחקן הראשון תמיד יעביר מ- $\hat{N}$ ל- $\hat{P}$ והשחקן השני יהיה חייב להחזיר את המצב ל- $\hat{N}$.
נשים לב שהמשחק חסום ולכן מתישהו המשחק יסתיים ואחד השחקנים ינצח,
נשים לב כי השחקן שיגיע למצב הסופי הוא המנצח, ומהגדרת $\hat{P}, \hat{N}$, השחקן שיגיע למצב הסופי יעבור מ- $\hat{N}$ ל- $\hat{P}$.
מבחירת האסטרטגיה של השחקן הראשון הוא יהיה האחד שיגיע למצב הסופי ולכן יהיה האחד שינצח. כלומר $\hat{N} \subseteq N$.

עתה נראה כי לשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת כשהמצב ההתחלתי הוא ב- $\hat{P}$.
השחקן הראשון יהיה חייב בעקבות הסעיף הקודם להעביר את המצב ל- $\hat{N}$.
מפה ראינו שלשחקן הנוכחי יש אסטרטגיה מנצחת (כשבמקרה שלנו השחקן הנוכחי הוא השני).
לכן $\hat{P} \subseteq P$.

נשים לב כי $\hat{N} \cup \hat{P} = V$ וגם $\hat{N} \cap \hat{P} = \emptyset$ וגם $N \cup P = V$ וגם $N \cap P = \emptyset$ וגם $\hat{P} \subseteq P$ וגם $\hat{N} \subseteq N$.
מכל אלה נסיק כי חייב להתקיים $P = \hat{P}$ וגם $N = \hat{N}$.
ולכן $P = \left\{(x_1, x_2) \mid \mathrm{sg}_{G_1}(x_1) \oplus \mathrm{sg}_{G_2}(x_2) = 0\right\}$, כנדרש.

מ.ש.ל.ג.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathrm{sg}(0), \mathrm{sg}(1), \mathrm{sg}(2), \mathrm{sg}(3), \mathrm{sg}(4), \mathrm{sg}(5)$
הוכחה:
נשים לב כי

$$\begin{aligned}
\mathrm{sg}(0) &= \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(y) \mid y \in S(0)\} = \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(y) \mid y \in \emptyset\} = \mathrm{mex}\emptyset = 0 \\
\mathrm{sg}(1) &= \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(y) \mid y \in S(1)\} = \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(y) \mid y \in \{0\}\} = \mathrm{mex}\{0\} = 1 \\
\mathrm{sg}(2) &= \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(y) \mid y \in S(2)\} = \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(y) \mid y \in \{0,1\}\} = \mathrm{mex}\{0,1\} = 2 \\
\mathrm{sg}(3) &= \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(y) \mid y \in S(3)\} = \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(y) \mid y \in \{0,1,2\}\} = \mathrm{mex}\{0,1,2\} = 3 \\
\mathrm{sg}(4) &= \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(y) \mid y \in S(4)\} = \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(y) \mid y \in \{0,1,2,3\}\} = \mathrm{mex}\{0,1,2,3\} = 4 \\
\mathrm{sg}(5) &= \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(y) \mid y \in S(5)\} = \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(y) \mid y \in \{1,2,3,4\}\} = \mathrm{mex}\{1,2,3,4\} = 0
\end{aligned}$$

נבחין שהראנו כי $\mathrm{sg}(x) = x \mod 5$ לכל $0 \le x \le 5$.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathrm{sg}(x) = x \mod 5$
הוכחה:
נוכיח באינדוקציה כי לכל n מתקיים $\mathrm{sg}(n) = n \mod 5$
<u>בסיס:</u> $0 \le n \le 5$ נשים לב שהראנו זאת בסעיף הקודם
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל- $n-4, n-3, n-2, n-1$ ונראה שהיא נכונה ל- n

$$\begin{aligned}
\mathrm{sg}(n) &= \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(y) \mid y \in S(n)\} = \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(y) \mid y \in \{n-4, n-3, n-2, n-1\}\} \\
&= \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(n-4), \mathrm{sg}(n-3), \mathrm{sg}(n-2), \mathrm{sg}(n-1)\} \\
&\overset{\text{induction}}{=} \mathrm{mex}\{(n-4) \mod 5, (n-3) \mod 5, (n-2) \mod 5, (n-1) \mod 5\} \\
&= \mathrm{mex}\{\{0,1,2,3,4\} \setminus \{n \mod 5\}\} \overset{\star}{=} n \mod 5
\end{aligned}$$

נשים לב שמעבר $\star$ נכון כי המספר הכי קטן שלא נמצא בקבוצה הוא בדיוק $n \mod 5$, והמעבר לפני נכון מרציפות של שאריות חלוקה ב- 5.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** לחשב את N,P

הוכחה:

נשים לב שהמשחק הוא $G=G_1\oplus G_2$ כאשר $G_1=G_2$ הוא המשחק שתואר בסעיף הקודם.

לכן ממשפט שהראנו בהרצאה מתקיים

$$\begin{aligned}N&=\{\operatorname{sg}((n,m))\neq 0\mid (n,m)\in V_G\}=\{\operatorname{sg}(n)\oplus\operatorname{sg}(m)\neq 0\mid (n,m)\in V_G\}\\&=\{(n\mod 5)\oplus(m\mod 5)\neq 0\mid (n,m)\in V_G\}\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}P&=\{\operatorname{sg}((n,m))=0\mid (n,m)\in V_G\}=\{\operatorname{sg}(n)\oplus\operatorname{sg}(m)=0\mid (n,m)\in V_G\}\\&=\{(n\mod 5)\oplus(m\mod 5)=0\mid (n,m)\in V_G\}\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** לחשב את N,P

הוכחה:

נשים לב שהמשחק הוא $G=G_1\oplus\cdots\oplus G_k$ כאשר $G_1=\cdots=G_k$ הוא המשחק שתואר בסעיף א' וב'.

לכן ממשפט שהראנו בהרצאה מתקיים

$$\begin{aligned}N&=\{\operatorname{sg}((n_1,\ldots,n_k))\neq 0\mid (n_1,\ldots,n_k)\in V_G\}\\&=\{\operatorname{sg}(n_1)\oplus\cdots\oplus\operatorname{sg}(n_k)\neq 0\mid (n_1,\ldots,n_k)\in V_G\}\\&=\{(n_1\mod 5)\oplus\cdots\oplus(n_k\mod 5)\neq 0\mid (n_1,\ldots,n_k)\in V_G\}\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}P&=\{\operatorname{sg}((n_1,\ldots,n_k))=0\mid (n_1,\ldots,n_k)\in V_G\}\\&=\{\operatorname{sg}(n_1)\oplus\cdots\oplus\operatorname{sg}(n_k)=0\mid (n_1,\ldots,n_k)\in V_G\}\\&=\{(n_1\mod 5)\oplus\cdots\oplus(n_k\mod 5)=0\mid (n_1,\ldots,n_k)\in V_G\}\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ד.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** להוכיח ש־ $\operatorname{sg}(G)=\operatorname{sg}(G_1)\oplus\cdots\oplus\operatorname{sg}(G_k)$

הוכחה:

תחילה נראה שיש מיפוי חח"ע ועל בין המצבים של $G_1\oplus\cdots\oplus G_k$ ל־ G.

בהינתן גרפים $T_1,\ldots,T_k$ עם קודקודי רצפה $x_1,\ldots,x_k$, נחליפם ב־ x וניצור את הגרף המתאים ב־ G.

נשים לב שהמיפוי הפוך כי בהינתן גרף ב־ G, נוכל לקחת את קודקוד הרצפה x להחליפו ב־ $x_1,\ldots,x_k$ (קודקוד לכל עץ) ולקבל את המצב המקורי. **הערה:** עד כדי שמירת הסדר של העצים אך אפשר לדרוש שצלעות x יהיו לפי סדר ההופעה של $T_1,\ldots,T_k$ (הכי שמאלי T_1 והכי ימני T_k לדוגמא)

לכן המיפוי חח"ע ועל ולכן נותר רק להראות שיש מיפוי חח"ע ועל בין הפעולות של $G_1\oplus\cdots\oplus G_k$ ל־ G.

נשים לב שבהינתן צלע e, אחד הקודקודים שלה יהיו באחד הגרפים $T_1,\ldots,T_k$ (והשנייה גם או שתהיה x), לכן לכל צלע נוכל לדעת מאיזה גרף מהגרפים $T_1,\ldots,T_k$ היא מורידה צלע, נסמן פונקציה זאת ב־ $f:E_G\to\{1,\ldots,k\}$.

המיפוי בין פעולות $G_1\oplus\cdots\oplus G_k$ ל־ G יהיה בהינתן צלע $e\in G_i$, נוריד אותה מ־ G אם $x_i\notin e$ אחרת נוריד את הצלע $(e\setminus\{x_i\})\cup\{x\}$ (הצלע תחליף את הקודקוד x_i ב־ x).

נשים לב שהמיפוי מוגדר היטב מאיך שבנינו את הגרף ב־ G, שהוא זהה ל־ G_i פרט בקודקוד x_i.

עתה נראה שהמיפוי הצלעות שהגדרנו הפיך, בהינתן e, נוריד את הצלע $(e\setminus\{x\})\cup\{x_{f(e)}\}$ מהגרף המשחק $G_{f(e)}$,

נשים לב שהפעלת 2 המיפויים שהגדרנו מחזירה אותנו להורדת הצלע המקורית ולכן זה אכן הפיך.

כלומר הראנו שיש מיפוי חח"ע ועל בין הגרף המשחק של $G_1 \oplus \cdots \oplus G_k$ ל- G ולכן $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_k$ (כי קבוצת המצבים והצלעות של הגרף המייצג את המשחק זהה).

ולכן לפי משפט שראינו בהרצאה מתקיים כי $\mathrm{sg}(G) = \mathrm{sg}(G_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{sg}(G_k)$.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** להוכיח ש- $\mathrm{sg}(G_1) = \mathrm{sg}(G_2)$
הוכחה:
נראה אסטרטגיה מנצחת של השחקן השני מהמצב (G_1, G_2) כשהגרפים נבנו כמתואר בשאלה.
נשים לב שהגרפים סימטריים עד כדי H_1, H_2.
בהינתן פעולה e של השחקן הראשון:

i. אם $e \notin E_{H_1} \cup E_{H_2}$ אז הצלע קיימת בגרף השני ונוריד אותה משם ונחזור לגרפים סימטריים
ii. אם $e \in E_{H_1} \cup E_{H_2}$ אז המצב החדש של הגרפים האלה יהיו $\hat{H}_1, \hat{H}_2$. נשים לב כי $\mathrm{sg}(H_1) \oplus \mathrm{sg}(H_2) = 0$, ולכן לפי המשפט שהוכח בהרצאה יתקיים ש- $\mathrm{sg}\left(\hat{H}_1\right) \oplus \mathrm{sg}\left(\hat{H}_2\right) \neq 0$.
וקיימת פעולה שהשחקן השני יעשה כך שהמצב הבא $\overline{H_1}, \overline{H_2}$ יקיים $\mathrm{sg}\left(\overline{H_2}\right) \oplus \mathrm{sg}\left(\overline{H_1}\right) = 0$.

נשים לב שלאחר כל פעולה של השחקן השני מתקיים ש:

i. הגרפים סימטריים פרט ל- H_1, H_2
ii. $\mathrm{sg}(H_1) \oplus \mathrm{sg}(H_2) = 0$

מהיות המשחק סופי, אחד השחקנים ינצח. נניח בשלילה שהשחקן הראשון ניצח:

i. אם הצלע האחרונה שהוריד הייתה מ- $E_{H_1} \cup E_{H_2}$, אז $\mathrm{sg}(H_1) \oplus \mathrm{sg}(H_2) \neq 0$ ובפרט יש עוד צלעות להוריד והמשחק לא הסתיים בסתירה להנחה שהשחקן הראשון ניצח.
ii. אם הצלע האחרונה שהוריד לא הייתה מ- $E_{H_1} \cup E_{H_2}$, אז מסימטריות מתקיים כי השחקן השני יכל להוריד את הצלע המתאימה בגרף השני והמשחק לא הסתיים בסתירה להנחה שהשחקן הראשון ניצח.

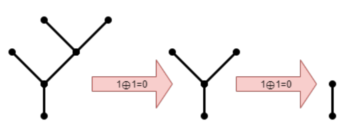
כלומר השחקן השני הוא המנצח מהמצב הנ"ל ולכן $(G_1, G_2) \in P$ ולכן

$$0 = \mathrm{sg}((G_1, G_2)) = \mathrm{sg}(G_1) \oplus \mathrm{sg}(G_2)$$

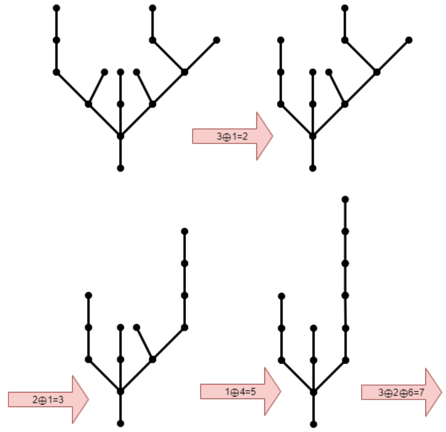
וידוע כי $a \oplus b = 0$ אם"ם $a = b$, ולכן נקבל כי $\mathrm{sg}(G_1) = \mathrm{sg}(G_2)$, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

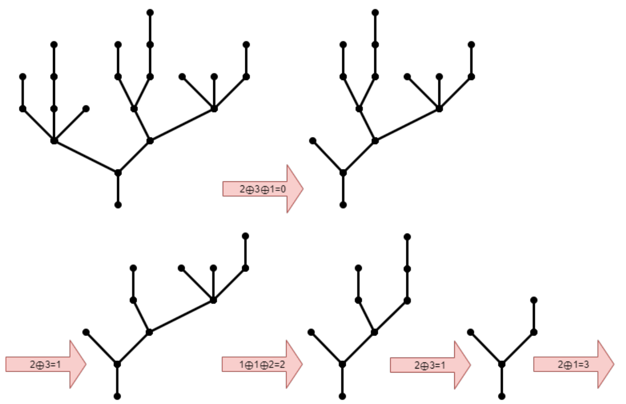
(ג) **צ"ל:** לחשב $\mathrm{sg}(G_1), \mathrm{sg}(G_2), \mathrm{sg}(G_3), \mathrm{sg}(G)$
הוכחה:
נחשב קודם ל- G_1



בעזרת הסעיף הקודם נקבל כי $\mathrm{sg}(G_1) = \mathrm{sg}(1) = 1$



בעזרת הסעיף הקודם נקבל כי $\mathrm{sg}\left(G_2\right)=\mathrm{sg}\left(8\right)=8$



בעזרת הסעיף הקודם נקבל כי $\mathrm{sg}\left(G_3\right)=\mathrm{sg}\left(4\right)=4$
ונקבל כי $\mathrm{sg}\left(\left(G_1,G_2,G_3\right)\right)=\mathrm{sg}\left(G_1\right)\oplus\mathrm{sg}\left(G_2\right)\oplus\mathrm{sg}\left(G_3\right)=1\oplus8\oplus4=13\neq0$, ולכן $\left(G_1,G_2,G_3\right)\in N$, כנדרש.

מ.ש.ל.ג.☺