

## פתרון תרגיל מספר 7 - חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, ת.ז: 211747639

24 במאי 2020

### שאלה 2

סעיף 1

צ"ל:  $A_{TM}$  היא שפה RE-hard

הוכחה:

תהי  $L \in \text{RE}$  ונוכיח כי  $L \leq_m A_{TM}$  בעזרת רדוקציה.

נשים לב ש-  $L \in \text{RE}$  ולכן קיימת  $M$  המזהה את  $L$ .

נגדיר  $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  באופן הבא  $f(w) = \langle M \rangle, w$  לכל  $w \in \Sigma^*$

תחילה נראה ש-  $w \in L \iff f(w) \in A_{TM}$

$$\begin{aligned} w \in L &\iff w \in L(M) \iff M \text{ accepts } w \iff \langle M \rangle, w \in \{ \langle M, w' \rangle \mid M \text{ accepts } w' \} \\ &\iff \langle M \rangle, w \in A_{TM} \iff f(w) \in A_{TM} \end{aligned}$$

נשים לב ש-  $f$  היא ניתנת לחישוב בגלל שכל מה שתעשה היא תשמור בצד את  $w$ , תכתוב את  $\langle M \rangle$  (שזה קידוד קבוע) ואז תכתוב את  $w$ .

לכן הראנו שקיימת פונקציה חשיבה  $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  כך ש-  $w \in L \iff f(w) \in A_{TM}$

לכן מההגדרה נקבל כי  $L \leq_m A_{TM}$ ,

לכן  $L \leq_m A_{TM}$  לכל  $L \in \text{RE}$  ולכן לפי הגדרה  $A_{TM}$  היא שפה RE-hard

מ.ש.ל.א. ☺

סעיף 2

צ"ל:  $\Sigma^*, L \neq \emptyset$  היא שפה R-hard

הוכחה:

תהי  $L' \in R$  ולכן קיימת מ"ט  $M'$  שמכריעה אותה

נשים לב ש-  $\Sigma^*, L' \neq \emptyset$  ולכן קיימים  $w_1, w_2 \in \Sigma^*$  כך ש-  $w_2 \in L'$  וגם  $w_1 \notin L'$

$$\text{נגדיר } f(w) = \begin{cases} w_2 & M' \text{ accepts } w \\ w_1 & \text{else} \end{cases} \text{ לכל } w \in \Sigma^*$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned} w \in L' &\rightarrow w \in L(M') \rightarrow M' \text{ accepts } w \rightarrow f(w) = w_2 \in L \\ w \notin L' &\rightarrow w \notin L(M') \rightarrow M' \text{ doesn't accept } w \rightarrow f(w) = w_1 \notin L \end{aligned}$$

לכן נקבל כי  $w \in L' \iff f(w) \in L$

הפונקציה חישובית כי  $M'$  עוצרת על כל קלט ולכן תמיד נוכל להריץ את  $M'$  על  $w$ , לראות האם קיבלה, ובהתאם לכתוב את  $w_2$  או את  $w_1$  על הסרט.

לכן הראנו שקיימת פונקציה חשיבה  $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  כך ש-  $w \in L' \iff f(w) \in L$

לכן מההגדרה נקבל כי  $L' \leq_m L$ ,

לכן  $L' \leq_m L$  לכל  $L' \in R$  כאשר  $\Sigma^*, L \neq \emptyset$  ולכן לפי הגדרה  $L$  היא שפה R-hard

מ.ש.ל.ב. ☺