<u>תרגיל 2 אלגברה לינארית 1</u>

211747639

מיכאל גרינבאום

1. א. **<u>צ"ל:</u>** מטריצה מדורגת מצומצמת בעלת אוסף פתרונות זהה וקבוצת פתרונות בצורה פרמטרית
<u>הוכחה:</u>

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&1&0\\2&1&2&0\\4&2&3&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3-2*R_1]{R_2\to R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_1-R_2]{R_3-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&\frac{1}{2}&0&\frac{0}{1}\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

ולכן $x_1+\frac{1}{2}x_2=0, x_3=0$, נסמן $x_2=t$ ונקבל $x_1=-\frac{t}{2}, x_2=t, x_3=0$

ולכן אוסף הפתרונות בצורה הפרמטרית הוא $S=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}\middle| t\in\mathbb{R}\right\}$

והמטריצה מדורגת מצומצמת בעלת אוסף פתרונות זהה היא $\left[\begin{array}{ccc|c}1&\frac{1}{2}&0&\frac{0}{1}\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$

מ.ש.ל.א. ☺

ב. **<u>צ"ל:</u>** מטריצה מדורגת מצומצמת בעלת אוסף פתרונות זהה וקבוצת פתרונות בצורה פרמטרית
<u>הוכחה:</u>

$$\left[\begin{array}{cccc|c}5&2&4&1&2\\0&0&-1&1&1\\5&2&5&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3-5*R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}5&2&4&1&2\\0&0&-1&1&1\\0&0&1&-1&-2\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left[\begin{array}{cccc|c}5&2&4&1&2\\0&0&-1&1&1\\0&0&0&0&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_1\to\frac{1}{5}R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&0&-1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{4}{5}R_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&\frac{2}{5}&0&1&\frac{6}{5}\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&0&-1\end{array}\right]\xrightarrow[R_2\to R_2-R_3]{R_1\to R_1+\frac{6}{5}R_3}\left[\begin{array}{cccc|c}1&\frac{2}{5}&0&1&\frac{0}{1}\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&-1\end{array}\right]$$

ולכן נשים לב שהמשוואה האחרונה היא $0*x_1+0*x_2+0*x_3+0*x_4=-1$ ולכן אין פתרון למשוואות. אז $S=\emptyset$

והמטריצה מדורגת מצומצמת בעלת אוסף פתרונות זהה היא $\left[\begin{array}{cccc|c}1&\frac{2}{5}&0&1&\frac{0}{1}\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&-1\end{array}\right]$

מ.ש.ל.ב. ☺

ג. **<u>צ"ל:</u>** מטריצה מדורגת מצומצמת בעלת אוסף פתרונות זהה וקבוצת פתרונות בצורה פרמטרית
<u>הוכחה:</u>

$$\left[\begin{array}{cccc|c}0&2&1&1&1\\2&0&1&2&0\\2&1&0&1&-1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left[\begin{array}{cccc|c}0&2&1&1&1\\2&0&1&2&0\\0&1&-1&-1&-1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to R_1-2*R_3}\left[\begin{array}{cccc|c}0&0&3&3&3\\2&0&1&2&0\\0&1&-1&-1&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_3]{R_1\to\frac{1}{3}R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}0&0&1&1&1\\0&1&-1&-1&-1\\2&0&1&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{cccc|c}2&0&1&2&0\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_2+R_3]{R_1-R_3}\left[\begin{array}{cccc|c}2&0&0&1&-1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\end{array}\right]$$

ולכן $x_1+\frac{1}{2}x_4=-\frac{1}{2}, x_2=0, x_3+x_4=1$, נסמן $x_4=t$ ונקבל $x_1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t, x_3=1-t$
ולכן אוסף הפתרונות בצורה הפרמטרית הוא

$$S=\left\{\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\\0\\1-t\\t\end{bmatrix}\middle| t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-1\\1\end{bmatrix}\middle| t\in\mathbb{R}\right\}$$

והמטריצה מדורגת מצומצמת בעלת אוסף פתרונות זהה היא $\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\end{array}\right]$

מ.ש.ל.ג. ☺

ד. <u>**צ״ל:**</u> מטריצה מדורגת מצומצמת בעלת אוסף פתרונות זהה וקבוצת פתרונות בצורה פרמטרית
<u>**הוכחה:**</u>

$$\left[\begin{array}{ccc|c}5&2&4&0\\0&0&-1&10\\3&1&2&-5\end{array}\right]\xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_3]{R_1\to\frac{1}{5}R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&\frac{0}{1}\\3&1&2&-5\\0&0&-1&10\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&\frac{0}{1}\\0&-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&-\frac{5}{1}\\0&0&-1&10\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2\to -5R_2]{R_3\to -R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&\frac{0}{1}\\0&1&2&25\\0&0&1&-10\end{array}\right]\xrightarrow[R_1\to R_1-\frac{4}{5}R_3]{R_2\to R_2-2R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&\frac{2}{5}&0&8\\0&1&0&45\\0&0&1&-10\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{2}{5}R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-10\\0&1&0&45\\0&0&1&-10\end{array}\right]$$

ולכן נקבל ש$x_1=-10, x_2=45, x_3=-10$ ולכן אוסף הפתרונות הוא $S=\left\{\begin{bmatrix}-10\\45\\-10\end{bmatrix}\right\}$

והמטריצה מדורגת מצומצמת בעלת אוסף פתרונות זהה היא $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-10\\0&1&0&45\\0&0&1&-10\end{array}\right]$

מ.ש.ל.ד. ☺

ה. <u>**צ״ל:**</u> מטריצה מדורגת מצומצמת בעלת אוסף פתרונות זהה וקבוצת פתרונות בצורה פרמטרית
<u>**הוכחה:**</u>

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\1&2&4&5\\1&3&9&8\\1&4&16&12\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&3&2\\0&2&8&5\\1&4&16&12\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-2R_2]{R_4-R_4-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&3&2\\0&0&2&1\\0&3&15&9\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3\to\frac{1}{2}R_3]{R_4\to R_4-3R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&3&2\\0&0&\frac{1}{1}&\frac{1}{2}\\0&0&6&3\end{array}\right]\xrightarrow[R_2\to R_2-3R_3]{R_4\to R_4-6R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&\frac{1}{1}&0&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{1}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_1\to R_1-R_2]{R_1\to R_1-R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&\frac{1}{1}&0&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{1}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

נשים לב ש$x_1=2, x_2=\frac{1}{2}, x_3=\frac{1}{2}, 0=0$ ולכן אוסף הפתרונות הוא $S=\left\{\begin{bmatrix}2\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right\}$

והמטריצה מדורגת מצומצמת בעלת אוסף פתרונות זהה היא $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&\frac{1}{1}&0&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{1}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right]$

מ.ש.ל.ה. ☺

ו. **צ״ל:** מטריצה מדורגת מצומצמת בעלת אוסף פתרונות זהה וקבוצת פתרונות בצורה פרמטרית

הוכחה:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\1&0&1&10\\1&1&0&-5\\1&1&1&5\end{array}\right]\xrightarrow[R_4\to R_4-R_2]{R_3\to R_3-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\1&0&1&10\\0&1&-1&-15\\0&1&0&-5\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3-R_4]{R_1\to R_1-R_4}\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&1&5\\1&0&1&10\\0&0&-1&-10\\0&1&0&-5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{R_3\to R_3+R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&1&5\\1&0&0&5\\0&0&0&5\\0&1&0&-5\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\leftrightarrow R_4]{R_1\leftrightarrow R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&0&1&5\\0&1&0&-5\\0&0&0&5\end{array}\right]\xrightarrow[R_1\to R_1-R_4]{R_2\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&-5\\0&0&1&5\\0&0&0&5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-R_4]{R_2\to R_2+R_4}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&5\end{array}\right]\xrightarrow{R_4\to\frac{1}{5}R_4}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]$$

נשים לב ש$x_1=0, x_2=0, x_3=0$ וגם $0*x_1+0*x_2+0*x_3=1$ ולכן אין פתרונות למשוואות האלו.

לכן $S=\emptyset$

והמטריצה מדורגת מצומצמת בעלת אוסף פתרונות זהה היא $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]$

מ.ש.ל.ו. ☺

2. א. **צ״ל:** $g\le n$

נתונים: $A\in M_{m\times n}(F)$ מדורגת מצומצמת וg מספר האיברים המובילים

הוכחה:

נניח בשלילה כי $g>n$ ולכן $g\ge n+1$

נשים לב שכל איבר נמצא בעמודה סטנדרטית כלומר כל העמודה 0 חוץ מהאיבר המוביל והוא 1.

כלומר יש לפחות $n+1$ עמודות סטנדרטיות בסתירה להנחה שבA יש רק n עמודות.

מ.ש.ל.א. ☺

ב. **צ״ל:** $g \le n$ לא תמיד

נתונים: $A \in M_{m\times n}(F)$ וg מספר האיברים המובילים

הוכחה:

נבחר $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, נשים לב ש$A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ ולכן $n = 2$.

נשים לב שמספר האיברים המובילים הוא $g = 3$

ולכן $g = 3 > 2 = n$

מ.ש.ל.ב. ☺

3. **צ״ל:** מספר הפרמטרים בפתרון המערכת

הוכחה:

תחילה נשים לב שנתון שבעמודה האחרונה אין איברים מובילים ולכן האיבר המוביל הוא לפני העמודה האחרונה או אין איבר מוביל בשורה בכלל ולכן יש פתרון אחד לפחות (כי או שיש תלות במשתנה או שיש שורת אפסים ששווה לאפס).

נסתכל על $A = \left[\begin{matrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n-1} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right]$

נשים לב ש$a_{ij} = 0, b_i = 0$ $\mathrm{g} + 1 \le \forall \mathrm{i} \le \mathrm{m}, 1 \le \mathrm{j} \le \mathrm{n} - 1$

נסמן ב$\hat{\imath}$ להיות j כאשר $a_{i,j}$ האיבר המוביל בשורה הi

ונקבל ש$x_{\hat{1}} = b_1, x_{\hat{2}} = b_2, x_{\hat{g}} = b_g$ והשאר הם 0 הוא פתרון למשוואה.

לכן מספר הפרמטרים בפתרון המשוואה שווה ל$n - 1 - g$ (מספר המשתנים פחות מספר המשתנים בפתרון ספציפי)

מ.ש.ל.☺

4. א. **צ״ל:** קיים לפחות פתרון 1 למערכת הנתונה

הוכחה:

תחילה נשים לב כי $m \ge n$ מכיוון שיש m איברים מובילים והוכחנו כי מספר האיברים המובילים קטן שווה n.

נשים לב ש$1 \le \forall i \le n, x_i = 0$ הוא פתרון למשוואה ההומוגנית.

ולכן מהיות B שקולת שורות לA קיים לפחות פתרון אחד לA.

מ.ש.ל.א.☺

ב. **צ״ל:** למצוא מטריצה A המקיימת את התנאים עם פתרון יחיד

הוכחה:

נבחר $A = \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right]$. נשים לב שיש לו רק פתרון אחד $x_1 = 0, x_2 = 0$ וA שקולת שורות למטריצה מדורגת מצומצמת כי היא בעצמה מדורגת מצומצמת

מ.ש.ל.ב.☺

ג. **צ״ל:** להוכיח שיש אינסוף פתרונות אם $m < n$

הוכחה:

נשים לב שB מדורגת מצומצמת. נראה שלB יש אינסוף פתרונות ונסיים.

נסמן ב$\hat{\imath}$ להיות j כאשר $b_{i,j}$ האיבר המוביל בשורה הi ו$k_{\hat{\imath}}$ להיות i.

נסמן ב$\widehat{m+1}$ בתור המספר הטבעי המינימלי כך ש$b_{i,\widehat{m+1}}$ אינו איבר מוביל כאשר $1 \le \forall i \le m$

נסמן את $x_{\widehat{m+1}} = t$.

נבחר $x_i = 0$ כש$i \ne \hat{\imath}$ כאשר $\forall \hat{\imath}$ שהגדרנו לעיל

נבחר $x_{\hat{\imath}} = -t * b_{k_{\hat{\imath}},\widehat{m+1}}$ לכל $\hat{\imath}$ חוץ מ$x_{\widehat{m+1}}$ פתרון למערכת מכיוון שכל משוואה היא $x_{\hat{\imath}} + t * b_{k_{\hat{\imath}},\widehat{m+1}} = 0$

לכן יש אינסוף פתרונות כי לכל $t \in \mathbb{R}$ קיים פתרון.

ולכן לB יש אינסוף פתרונות ולכן לA יש אינסוף פתרונות

מ.ש.ל.ג.☺

5. א. **צ״ל:** הכפלת המטריצה בקבוע שונה מאפס משמרת את מרחב הפתרונות

הוכחה:

נשים לב ש $B = c * A = \left[\begin{matrix} c * a_{11} & \cdots & c * a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c * a_{m1} & \cdots & c * a_{m,n} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right]$

נעשה את הפעולה הבאה על B והיא $R_i \to \frac{1}{c} * R_i$ ונקבל את A על ידי פעולות שורה שלא משנות את מרחב הפתרונות.

ולכן מרחב הפתרונות של A הוא בדיוק אותו מרחב פתרונות כמו של $c * A$ עבור $0 \neq c \in \mathbb{R}$

<u>מ.ש.ל.א.☺</u>

ב. **<u>צ"ל:</u>** הכפלת עמודה במטריצה בקבוע שונה מאפס לא משמרת את מרחב הפתרונות

<u>הוכחה:</u>

נבחר $A = \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right]$

נשים לב שמרחב הפתרונות הוא $\left\{ t * \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

עתה נכפיל את העמודה השנייה ב2 ונקבל $B = \left[\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right]$.

נשים לב שמרחב הפתרונות הוא $\left\{ t * \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

נשים לב שהמרחבים אינם שווים

<u>מ.ש.ל.ב.☺</u>

ג. **<u>צ"ל:</u>** החלפת עמודות במטריצה לא משמרת את מרחב הפתרונות

<u>הוכחה:</u>

נבחר $A = \left[\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right]$.

נשים לב שמרחב הפתרונות הוא $\left\{ t * \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

נחליף בין העמודות ונקבל $B = \left[\begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right]$

נשים לב שמרחב הפתרונות הוא $\left\{ t * \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

נשים לב שהמרחבים אינם שווים

<u>מ.ש.ל.ג.☺</u>

ד. **<u>צ"ל:</u>** שינוי סדר השורות משמרת את מרחב הפתרונות

<u>הוכחה:</u>

נוכיח באינדוקציה ששינוי סדר השורות משמר את מרחב הפתרונות

<u>בסיס האינדוקציה</u>: החלפת 2 שורות

נשים לב שהחלפת 2 שורות היא פעולת שורה אלמנטרית ולכן משמרת את מרחב הפתרונות

<u>צעד האינדוקציה</u>: החלפת $n+1$ שורות בהנחה שהחלפת n שורות משמרת

נשים לב שהחלפת השורה ה$n+1$ עם המטריצה שמתקבלת לאחר החלפת n שורות היא פעולת שורה אלמנטרית ולכן משמרת את מרחב הפתרונות עם המטריצה בעלת n החלפות שורה. מהנחת האינדוקציה מרחב הפתרונות זהה למטריצה המקורית

<u>מ.ש.ל.ד.☺</u>

ה. **<u>צ"ל:</u>** החלפת השורות $\begin{bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{bmatrix}$ ב$\begin{bmatrix} R_i + R_j \\ R_j + R_k \\ R_i + R_k \end{bmatrix}$ משמרת את מרחב הפתרונות

<u>הוכחה:</u>

נסתכל על $\begin{bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{bmatrix}$ וננסה בעזרת פעולות שורה להגיע ל $\begin{bmatrix} R_i + R_j \\ R_j + R_k \\ R_i + R_k \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}R_i\\R_j\\R_k\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+R_2]{R_3\to R_3+R_1}\begin{bmatrix}R_i\\R_j\\R_k+R_i+R_j\end{bmatrix}\xrightarrow[R_2\to R_2-R_3]{R_1\to R_1-R_3}\begin{bmatrix}-R_k-R_j\\-R_k-R_i\\R_k+R_i+R_j\end{bmatrix}\xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_1\to -R_1}\begin{bmatrix}R_k+R_j\\R_k+R_i\\R_k+R_i+R_j\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-\frac{1}{2}R_2]{R_3\to R_3-\frac{1}{2}R_1}\begin{bmatrix}R_k+R_j\\R_k+R_i\\\frac{1}{2}R_i+\frac{1}{2}R_j\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to 2*R_3]{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}R_k+R_i\\R_k+R_j\\R_i+R_j\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{bmatrix}R_i+R_j\\R_j+R_k\\R_i+R_k\end{bmatrix}$$

מכיוון שהגענו מ3 השורות הראשונות ל3 האחרונות על ידי פעולות שורה אלמנטריות בלבד אז מרחב הפתרונות נשמר

<u>מ.ש.ל.ה.☺</u>

6. א. **<u>צ״ל:</u>** 12 גרם סוכר, 22 גרם קקאו, 48 גרם חלבון

<u>הוכחה:</u>

נשים לב שזה שקול $2x_1+2x_2+2x_3=12, 3x_1+4x_2+5x_3=22, 5x_1+10x_2+13x_3=48$

נחפש את הפתרונות למטריצה הבאה ונבדוק האם הם שלמים

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&2&2&12\\3&4&5&22\\5&10&13&48\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\3&4&5&22\\5&10&13&48\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3-5R_1]{R_2\to R_2-3R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&1&2&4\\0&5&8&18\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1\to R_1-R_2]{R_3\to R_3-5R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\0&1&2&4\\0&0&-2&-2\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to-\frac{1}{2}R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\0&1&2&4\\0&0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_2\to R_2-2*R_3]{R_1\to R_1+R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

נשים לב ש$x_1=3, x_2=2, x_3=1$ כלומר לקנות 3 חבילות שוקולד גלילי, 2 חבילות שוקולד שפלתי, וחבילת שוקולד דרומי

<u>מ.ש.ל.א.☺</u>

ב. **<u>צ״ל:</u>** 4 גרם סוכר, 10 גרם קקאו, 28 גרם חלבון

<u>הוכחה:</u>

נשים לב שזה שקול $2x_1+2x_2+2x_3=4, 3x_1+4x_2+5x_3=10, 5x_1+10x_2+13x_3=28$

נחפש את הפתרונות למטריצה הבאה ונבדוק האם הם שלמים

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&2&2&4\\3&4&5&10\\5&10&13&28\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\3&4&5&10\\5&10&13&28\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3-5R_1]{R_2\to R_2-3R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&2&4\\0&5&8&18\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1\to R_1-R_2]{R_3\to R_3-5R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-2\\0&1&2&4\\0&0&-2&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to-\frac{1}{2}R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-2\\0&1&2&4\\0&0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_2\to R_2-2*R_3]{R_1\to R_1+R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

נשים לב ש$x_1=-1, x_2=2, x_3=1$

נשים לב ש$x_1=-1$ ולכן לא נוכל לקנות מינוס חבילת שוקולד גלילי ולכן זה בלתי אפשרי

אם ניתן היה להגדיר סחר בשוקולד ולומר שאני אקנה 2 חבילות שוקולד שפלתי, חבילת שוקולד דרומי ואתן לך חבילת שוקולד גלילי בתמורה אז אולי הדבר היה אפשרי

<u>מ.ש.ל.ב.☺</u>

ג. **<u>צ״ל:</u>** 5 גרם סוכר, 10 גרם קקאו, 23 גרם חלבון

<u>הוכחה:</u>

נשים לב שזה שקול $2x_1+2x_2+2x_3=4, 3x_1+4x_2+5x_3=10, 5x_1+10x_2+13x_3=28$

נשים לב שאחת המשוואות היא $x_1+x_2+x_3=\frac{5}{2}=2.5$

נניח כי קיימים $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{Z}$ שעבורם המשוואה מתקיימת

ולכן גם מסגירות לחיבור מתקיים $x_1+x_2+x_3\in\mathbb{Z}$ בסתירה לכך ש2.5 אינו שלם.

ולכן לא ניתן למצוא 3 מספרים שלמים שעבורם יתקיימו המשוואות הנ״ל

כלומר לא ניתן לקנות מספר שלם של חבילות שוקולד כך שנקבל 5 גרם סוכר

<u>מ.ש.ל.ג.☺</u>