פתרון תרגיל מספר 6 ־ כלים מתמטיים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

27 בנובמבר 2020

1. **צ"ל:** $\|x\|_p \ge \|x\|_q$
הוכחה:
יהי $x \in \mathbb{R}^n$,
תחילה נשים לב כי $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i|^p = \|x\|_p$ לכל $1 \le p \le \infty$.
עתה יהיו $1 \le p \le q \le \infty$ ונשים לב כי

$$\begin{aligned}\|x\|_q^q &= \sum_{i=1}^n |x_i|^q = \sum_{i=1}^n |x_i|^{q-p}\cdot|x_i|^p \le \sum_{i=1}^n \left[\max_{1\le i\le n}|x_i|\right]^{q-p}\cdot|x_i|^p \\ &= \left[\max_{1\le i\le n}|x_i|\right]^{q-p}\cdot\sum_{i=1}^n|x_i|^p = \left[\max_{1\le i\le n}|x_i|\right]^{q-p}\cdot\|x\|_p^p = \|x\|_\infty^{q-p}\cdot\|x\|_p^p \le \|x\|_p^{q-p}\cdot\|x\|_p^p = \|x\|_p^q\end{aligned}$$

כלומר הראנו כי $\|x\|_q^q \le \|x\|_p^q$ ומפה נקבל כי $\boxed{\|x\|_p \ge \|x\|_q}$, כנדרש.

מ.ש.ל.☺

2. **פתרון:**
(א) **צ"ל:** פורבליוס ו־ $l_2 \to l_2$ הם אורתוגונליים בלתי תלויים
הוכחה:
תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ויהיו $U \in O(m)$, $V \in O(n)$.
נשתמש בכך ש־ $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$ כש־ A, B ריבועיות ונקבל כי

$$\begin{aligned}\|U\cdot A\cdot V\|_F &= \sqrt{\text{trace}\left((U\cdot A\cdot V)\cdot(U\cdot A\cdot V)^T\right)} = \\ &= \sqrt{\text{trace}\left(U\cdot A\cdot V\cdot V^T\cdot A^T\cdot U^T\right)} \\ &= \sqrt{\text{trace}\left(U\cdot A\cdot I_n\cdot A^T\cdot U^T\right)} \\ &= \sqrt{\text{trace}\left(U\cdot A\cdot A^T\cdot U^T\right)} \\ &\overset{A\cdot A^T\in M_{m\times m}(\mathbb{R})}{=} \sqrt{\text{trace}\left(A\cdot A^T\cdot U\cdot U^T\right)} \\ &= \sqrt{\text{trace}\left(A\cdot A^T\cdot I_n\right)} = \sqrt{\text{trace}\left(A\cdot A^T\right)} = \|A\|_F\end{aligned}$$

כלומר נורמת פורבליוס היא אורתוגונלית בלתי תלויה
עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}\|U\cdot A\cdot V\|_{2,2} &= \max_{\|v\|_2=1}\|U\cdot A\cdot V\cdot v\|_2 \\ &\overset{\forall v\in\mathbb{R}^n\to\|U\cdot A\cdot V\cdot v\|_2=\|A\cdot V\cdot v\|_2}{=} \max_{\|v\|_2=1}\|A\cdot V\cdot v\|_2\end{aligned}$$

נשים לב כי V היא העתקה חח"ע ועל וגם $\forall v \in \mathbb{R}^n \to \|v\|_2 = \|V \cdot v\|_2$,
כלומר V היא גם העתקה חח"ע ועל בין כל הוקטורים עם אותה הנורמה!
ולכן $\max_{\|v\|_2=1} \|A \cdot V \cdot v\|_2 = \max_{\|v\|_2=1} \|A \cdot v\|_2$, נחזור ונקבל כי

$$\|U \cdot A \cdot V\|_{2,2} = \max_{\|v\|_2=1} \|A \cdot V \cdot v\|_2 = \max_{\|v\|_2=1} \|A \cdot v\|_2 = \|A\|_{2,2}$$

כלומר נורמת $l_2 \to l_2$ היא אורתוגונלית בלתי תלויה, כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **פתרון:**

i. **צ"ל:** $\|A\|_{2,2} = \sigma_1(A)$
הוכחה:
תחילה ממשפט ה־ SVD קיימות $U \in O(m), D, V \in O(n)$ כך ש־ $A = U \cdot D \cdot V^T$,
מהסעיף הקודם $\|A\|_{2,2} = \left\|U \cdot D \cdot V^T\right\|_{2,2} = \|D\|_{2,2}$,
נשים לב ש־ D היא מטריצה "אלכסונית" עם ערכים סינגולריים $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ באלכסון כש־ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k$.
יהי $v \in \mathbb{R}^n$ כך ש־ $\|v\|_2 = 1$, אזי קיימים $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ כך ש־ $v = \sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i$,
נשים לב כי

$$\begin{aligned}\|D \cdot v\|_2 &= \left\|D \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i\right)\right\|_2 = \left\|\sum_{i=1}^n a_i \cdot (D \cdot e_i)\right\|_2 = \left\|\sum_{i=1}^k a_i \cdot \sigma_i \cdot e_i\right\|_2 = \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \cdot \sigma_i^2 \cdot \|e_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \|e_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sigma_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \cdot \|e_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \|e_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sigma_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \|e_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sigma_1 \cdot \|v\|_2\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\|D \cdot v\|_2 \leq \sigma_1 \cdot \|v\|_2$, וגם נשים לב כי $\|D \cdot e_1\|_2 = \|\sigma_1 \cdot e_1\|_2 = \sigma_1$,
כלומר $\max_{\|v\|_2=1} \|D \cdot v\|_2 = \sigma_1$ בגלל שהוא חסום על ידי σ_1 וגם קיים וקטור שמגיע לערך זה, כלומר

$$\|A\|_{2,2} = \|D\|_{2,2} = \max_{\|v\|_2=1} \|D \cdot v\|_2 = \sigma_1 = \sigma_1(A)$$

כנדרש.

מ.ש.ל.ב.1.☺

ii. **צ"ל:** $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2(A)$
הוכחה:
תחילה ממשפט ה־ SVD קיימות $U \in O(m), D, V \in O(n)$ כך ש־ $A = U \cdot D \cdot V^T$,
מהסעיף הקודם $\|A\|_F = \left\|U \cdot D \cdot V^T\right\|_F = \|D\|_F$,
נשים לב ש־ D היא מטריצה "אלכסונית" עם ערכים סינגולריים $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ באלכסון כש־ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k$.
הערה: $k = \min(n, m)$ בגלל שבתרגול ראינו $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ הם שורש הערכים העצמיים מותפים של $A \cdot A^T, A^T \cdot A$
שיש $\min(n, m)$ מהם (שחלקם אולי אפסים)
נשים לב כי

$$\|A\|_F^2 = \|D\|_F^2 = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2(A)$$

כנדרש.

מ.ש.ל.ב.2.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\|A\|_{\infty,\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|$
הוכחה:

תחילה נסמן $|A_{i,j}|$ $i^{*}=\operatorname{argmax}_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|A_{i,j}|$,
יהי $v\in\mathbb{R}^{n}$ כך ש־ $\|v\|_{\infty}=1$, כלומר לכל $1\le j\le n$ מתקיים $|v_j|\le 1$,
נשים לב כי

$$\begin{aligned}\|A\cdot v\|_{\infty}&=\max_{1\le i\le m}|[A\cdot v]_i|=\max_{1\le i\le m}\left|\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}\cdot v_j\right|\le\max_{1\le i\le m}\left|\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}\right|\\&\le\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|A_{i,j}|=\sum_{j=1}^{n}|A_{i^{*},j}|\end{aligned}$$

עתה נגדיר $\operatorname{sign}(A_{i^{*},j})=\begin{cases}1 & A_{i^{*},j}\ge 0\\ -1 & A_{i^{*},j}<0\end{cases}=u_j$, נשים לב כי

$$\begin{aligned}\|A\cdot u\|_{\infty}&=\max_{1\le i\le m}|[A\cdot u]_i|=\max_{1\le i\le m}\left|\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}\cdot u_j\right|=\max\left\{\left|\sum_{j=1}^{n}A_{i^{*},j}\cdot u_j\right|,\max_{1\le i\le m\wedge i\ne i^{*}}\left|\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}\cdot u_j\right|\right\}\\&\ge\left|\sum_{j=1}^{n}A_{i^{*},j}\cdot u_j\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}A_{i^{*},j}\cdot\operatorname{sign}(A_{i^{*},j})\right|=\sum_{j=1}^{n}|A_{i^{*},j}|\end{aligned}$$

משילוב האבחנה הקודמת נקבל כי $\sum_{j=1}^{n}|A_{i^{*},j}|\le\|A\cdot u\|_{\infty}\le\sum_{j=1}^{n}|A_{i^{*},j}|$, לכן $\sum_{j=1}^{n}|A_{i^{*},j}|=\|A\cdot u\|_{\infty}$.
כלומר $\max_{\|v\|_{\infty}=1}\|A\cdot v\|_{\infty}=\sum_{j=1}^{n}|A_{i^{*},j}|$ בגלל שהוא חסום על ידי $\sum_{j=1}^{n}|A_{i^{*},j}|$ וגם קיים וקטור שמגיע לערך זה, כלומר

$$\|A\|_{\infty,\infty}=\max_{\|v\|_{\infty}=1}\|A\cdot v\|_{\infty}=\sum_{j=1}^{n}|A_{i^{*},j}|=\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|A_{i,j}|$$

כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\|A\|_{\infty,\infty}=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m}|A_{i,j}|$
הוכחה:
תחילה נסמן $j^{*}=\operatorname{argmax}_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|A_{i,j}|$,
יהי $v\in\mathbb{R}^{n}$ כך ש־ $\|v\|_{1}=1$, כלומר $\sum_{i=1}^{n}|v_i|=1$,
נשים לב כי

$$\begin{aligned}\|A\cdot v\|_{1}&=\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}\cdot v_j\right|\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|A_{i,j}\cdot v_j|=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|A_{i,j}\cdot v_j|\\&=\sum_{j=1}^{n}|v_j|\cdot\sum_{i=1}^{m}|A_{i,j}|\le\sum_{j=1}^{n}|v_j|\cdot\sum_{i=1}^{m}|A_{i,j^{*}}|=\left(\sum_{i=1}^{m}|A_{i,j^{*}}|\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}|v_j|\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{m}|A_{i,j^{*}}|\right)\cdot 1=\left(\sum_{i=1}^{m}|A_{i,j^{*}}|\right)\end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\|A\cdot e_{j^{*}}\|_{1}=\sum_{i=1}^{m}|A_{i,j^{*}}|$$

כלומר $\max_{\|v\|_1=1}\|A\cdot v\|_1=\sum_{i=1}^m |A_{i,j^*}|$ בגלל שהוא חסום על ידי $\sum_{i=1}^m |A_{i,j^*}|$ וגם קיים וקטור שמגיע לערך זה, כלומר

$$\|A\|_{1,1}=\max_{\|v\|_1=1}\|A\cdot v\|_1=\sum_{i=1}^m |A_{i,j^*}|=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^m |A_{i,j}|$$

כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\|A\|_{1,\infty}=\max_{1\le j\le n,1\le i\le m}|A_{i,j}|$
הוכחה:
תחילה נסמן $(i^*,j^*)=\text{argmax}_{1\le j\le n,1\le i\le m}|A_{i,j}|$,
יהי $v\in\mathbb{R}^n$ כך ש־ $\|v\|_1=1$, כלומר $\sum_{i=1}^n |v_i|=1$,
נשים לב כי

$$\|A\cdot v\|_\infty=\max_{1\le i\le m}\left|\sum_{j=1}^n A_{i,j}\cdot v_j\right|\le\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^n |A_{i,j}|\cdot|v_j|\le\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^n |A_{i^*,j^*}|\cdot|v_j|$$

$$=\max_{1\le i\le m}|A_{i^*,j^*}|\cdot\sum_{j=1}^n |v_j|=\max_{1\le i\le m}|A_{i^*,j^*}|\cdot 1=\max_{1\le i\le m}|A_{i^*,j^*}|=|A_{i^*,j^*}|$$

נשים לב כי

$$\|A\cdot e_{j^*}\|_\infty=\max_{1\le i\le m}|A_{i,j^*}|=|A_{i^*,j^*}|$$

כלומר $\max_{\|v\|_1=1}\|A\cdot v\|_\infty=A_{i^*,j^*}$ בגלל שהוא חסום על ידי $|A_{i^*,j^*}|$ וגם קיים וקטור שמגיע לערך זה, כלומר

$$\|A\|_{1,\infty}=\max_{\|v\|_1=1}\|A\cdot v\|_\infty=|A_{i^*,j^*}|=\max_{1\le j\le n,1\le i\le m}|A_{i,j}|$$

כנדרש.

מ.ש.ל.ג.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $|\{i\in[n]\mid |x_i|\ge t\}|\le\frac{\|x\|_p^p}{t^p}$
הוכחה:
נסמן $A=\{i\in[n]\mid |x_i|\ge t\}$,
נשים לב כי

$$\frac{\|x\|_p^p}{t^p}=\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{t^p}=\sum_{i=1}^n\frac{|x_i|^p}{t^p}=\sum_{i\in A}\frac{|x_i|^p}{t^p}+\sum_{i\in[n]\setminus A}\frac{|x_i|^p}{t^p}\ge\sum_{i\in A}\frac{|x_i|^p}{t^p}\ge\sum_{i\in A}\frac{t^p}{t^p}=\sum_{i\in A}1=|A|$$

כלומר קיבלנו כי

$$|\{i\in[n]\mid |x_i|\ge t\}|\le|A|\le\frac{\|x\|_p^p}{t^p}$$

כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $x_k \le k^{-\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_p$
הוכחה:
נשים לב כי

$$k \cdot |x_k|^p \le \sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \le \|x\|_p^p$$

מפה נקבל כי $|x_k|^p \le \frac{1}{k} \cdot \|x\|_p^p$, נעשה שורש p ונסיק כי $x_k = |x_k| \le k^{-\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_p$, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\|x - x_s^*\|_2 \le \frac{C_p}{s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}} \cdot \|x\|_p$
הוכחה:
נשים לב כי $x^{-\frac{2}{p}}$ היא פונקציה מונוטונית יורדת ולכן

$$\sum_{i=s+1}^{\infty} i^{-\frac{2}{p}} \le \int_s^{\infty} x^{-\frac{2}{p}} = \frac{1}{1-\frac{2}{p}} x^{1-\frac{2}{p}} \mid_s^{\infty} = \frac{1}{1-\frac{2}{p}} \left[0 - s^{1-\frac{2}{p}}\right] = \frac{1}{s^{\frac{2}{p}-1}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{p}-1} = \frac{1}{s^{\frac{2}{p}-1}} \cdot \frac{p}{2-p}$$

לכן נבחר $C_p = \sqrt{\frac{p}{2-p}}$ ונשים לב כי

$$\begin{aligned}\|x - x_s^*\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - [x_s^*]_i)^2 = \sum_{i=s+1}^{n} x_i^2 \le \sum_{i=s+1}^{n} \left(i^{-\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_p\right)^2 = \|x\|_p^2 \cdot \sum_{i=s+1}^{n} i^{-\frac{2}{p}} \\ &\le \|x\|_p^2 \cdot \sum_{i=s+1}^{\infty} i^{-\frac{2}{p}} \le \frac{1}{s^{\frac{2}{p}-1}} \cdot \sqrt{\frac{p}{2-p}} \cdot \|x\|_p^2 = \left(\frac{1}{s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}\right)^2 \cdot C_p^2 \cdot \|x\|_p^2\end{aligned}$$

ולכן נקבל כי $\|x - x_s^*\|_2 \le \frac{C_p}{s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}} \cdot \|x\|_p$, כנדרש.

מ.ש.ל.ג.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\|G\|_F^2 \ge \frac{m^2}{n}$
הוכחה:
נעשה לפי ההדרכה, נשים לב ש־ G לכסינה כי היא סימטרית, נסמן את הערכים העצמיים ב־ $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ כך שמתקיים $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \cdots \ge \lambda_m$ ונסמן ב־ $r = \operatorname{rank}(G)$. כלומר $\lambda_i = 0$ לכל $r+1 \le i \le m$.
יהי $v \in \mathbb{R}^m$ שהוא וקטור עצמי של λ_i, נשים לב כי

$$\begin{aligned}\lambda_i \cdot \|v\|_2^2 &= \lambda_i \cdot v^T \cdot v = v^T \cdot \lambda_i \cdot v = v^T \cdot G \cdot v = \sum_{i=1}^{m} v_i \cdot [G \cdot v]_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} v_i \cdot \left[\sum_{j=1}^{m} G_{i,j} \cdot v_j\right] = \sum_{i=1}^{m} v_i \cdot \left[\sum_{j=1}^{m} \langle x_i, x_j \rangle \cdot v_j\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m} v_i \cdot \left\langle x_i, \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot v_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} v_i \cdot x_i, \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot v_j \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^{m} v_i \cdot x_i \right\|_2^2 \ge 0\end{aligned}$$

כלומר הראנו כי $\lambda_i \cdot \|v\|_2^2 \ge 0$ ומפה נסיק כי $\lambda_i \ge 0$ לכל $1 \le i \le m$.
עתה נשים לב כי מהאבחנה ש־ G לכסינה, קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־ $G = P^{-1} \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \cdot P$,

נשים לב כי

$$(\mathrm{trace}\,(G))^2 = \left(\mathrm{trace}\left(P^{-1}\cdot \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\cdot P\right)\right)^2 = \left(\mathrm{trace}\left(P\cdot P^{-1}\cdot \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\right)\right)^2$$

$$= (\mathrm{trace}\,(I_n\cdot \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)))^2 = \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\right)^2 = \left(\left\langle \begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_r\end{bmatrix}\right\rangle\right)^2$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz inequality}}{\leq} \left[\left(\left\|\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\right\|^2\cdot\left\|\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_r\end{bmatrix}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = \left\|\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\right\|^2\cdot\left\|\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_r\end{bmatrix}\right\|^2 = r\cdot\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2$$

ונשים לב כי משאלה 2 סעיף ב מתקיים כי $\|G\|_F^2 = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2$, כלומר קיבלנו כי

$$r\cdot\|G\|_F^2 = r\cdot\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2 \geq (\mathrm{trace}\,(G))^2 \implies \boxed{\|G\|_F^2 \geq \frac{(\mathrm{trace}\,(G))^2}{r} = \frac{(\mathrm{trace}\,(G))^2}{\mathrm{rank}\,(G)}}$$

נשים לב כי

$$\mathrm{trace}\,(G) = \sum_{i=1}^{m} G_{i,i} = \sum_{i=1}^{m}\langle x_i, x_i\rangle \overset{x_i\in S^{n-1}\implies \langle x_i,x_i\rangle=\|x_i\|^2=1}{=} \sum_{i=1}^{m} 1 = m$$

נזכר שבתרגיל 4 שאלה 1 הוכחנו כי $\mathrm{Rank}\,(BC)\leq \min\{\mathrm{Rank}\,(B),\mathrm{Rank}\,(C)\}$,

נגדיר $X = \begin{bmatrix}\cdots & x_1 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \cdots & x_m & \cdots\end{bmatrix}$, נשים לב כי

$$\left[X\cdot X^T\right]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}[X]_{i,k}\cdot\left[X^T\right]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}[X]_{i,k}\cdot[X]_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}[x_i]_k\cdot[x_j]_k = \langle x_i, x_j\rangle = G_{i,j}$$

כלומר $G = X\cdot X^T$ ולכן $\mathrm{rank}\,(G)\leq \min\left\{\mathrm{rank}\,(X),\mathrm{rank}\,\left(X^T\right)\right\}$,
נשים לב כי $\mathrm{rank}\,(X)\leq \min\,(m,n) = n$ (כי המטריצה X היא $m\times n$) ולכן נקבל כי

$$\mathrm{rank}\,(G)\leq \mathrm{rank}\,(X)\leq \min\,(m,n) = n$$

נשלב את המסקנות ונקבל כי

$$\boxed{\|G\|_F^2 \geq \frac{(\mathrm{trace}\,(G))^2}{\mathrm{rank}\,(G)} \geq \frac{(\mathrm{trace}\,(G))^2}{n} = \frac{m^2}{n}}$$

כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) צ"ל: $\max_{i\neq j}|\langle x_i, x_j\rangle|^2 \geq \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}$
הוכחה:

נשים לב כי

$$\begin{aligned}
\|G\|_F^2 &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} G_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left|\langle x_i, x_i\rangle\right|^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1\wedge j\neq i}^{m} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left|\langle x_i, x_i\rangle\right|^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1\wedge j\neq i}^{m} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^{m} 1 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1\wedge j\neq i}^{m} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 \\
&= m + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1\wedge j\neq i}^{m} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 \leq m + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1\wedge j\neq i}^{m} \max_{i\neq j} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 \\
&= m + \max_{i\neq j} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 \cdot \left(m^2 - m\right) = m \cdot \left[1 + \max_{i\neq j} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 \cdot (m-1)\right]
\end{aligned}$$

נשתמש בסעיף הקודם ונקבל כי

$$m \cdot \left[1 + \max_{i\neq j} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 \cdot (m-1)\right] \geq \|G\|_F^2 \geq \frac{m^2}{n}$$

מפה נקבל כי

$$\begin{aligned}
1 + \max_{i\neq j} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 \cdot (m-1) \geq \frac{m}{n} &\implies \max_{i\neq j} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 \cdot (m-1) \geq \frac{m}{n} - 1 = \frac{m-n}{n} \\
&\implies \max_{i\neq j} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 \geq \frac{m-n}{n\cdot(m-1)} \\
&\implies \boxed{\max_{i\neq j} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right| \geq \sqrt{\frac{m-n}{n\cdot(m-1)}}}
\end{aligned}$$

כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺