אלגוריתמים (67504) - פתרון תרגיל 8

שם: גיא לוי, **ת.ז:** 211744636 ; **שם:** מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

31 בדצמבר 2019

1. פתרון: **צ"ל:** f היא זרימה אופטימלית שמקיימת את הטענה
הוכחה:
תחילה נראה כי f זרימה חוקית:

(א) f מקיימת את דרישות הקיבול:
תהי $e\in E$, נסמן $e=(x,y)$

i. אם $\{x,y\}\notin B$ אז $f(x,y)=g(x,y)$, ומההנחה ש- g היא זרימה אופטימלית, נובע ש- g זרימה חוקית ולכן $0\le g(x,y)\le c(x,y)$, ולכן

$$\boxed{0\le f(x,y)=g(x,y)\le c(x,y)}$$

ולכן f מקיימת את דרישות הקיבול

ii. אחרת $\{x,y\}\in B$ אז $f(x,y)=g(x,y)-\min\{g(x,y),g(y,x)\}$, ומההנחה ש- g היא זרימה אופטימלית, נובע ש- g זרימה חוקית ולכן $g(x,y)\le c(x,y)$ וגם $0\le\min\{g(x,y),g(y,x)\}$ כי הזרימה היא אי שלילית, ולכן

$$\begin{aligned}
f(x,y)&=g(x,y)-\min\{g(x,y),g(y,x)\}\le g(x,y)\le c(x,y)\\
f(x,y)&=g(x,y)-\min\{g(x,y),g(y,x)\}\ge g(x,y)-g(x,y)=0\\
&\Rightarrow\boxed{0\le f(x,y)\le c(x,y)}
\end{aligned}$$

ולכן f מקיימת את דרישות הקיבול

(ב) f מקיימת את חוק שימור החומר:
יהי $x\in V\setminus\{s,t\}$, ונראה כי $\sum_{\substack{v\in V\\(x,v)\in E}}f(v,x)=\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E}}f(u,x)$,
נשים לב כי מההגדרה של B מתקיים

$$((u,v)\in E\wedge\{u,v\}\in B)\Leftrightarrow((v,u)\in E\wedge\{v,u\}\in B)$$

עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\in B}}f(u,x)-\sum_{\substack{v\in V\\(x,v)\in E\\\{x,v\}\in B}}f(x,v)=\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\in B}}f(u,x)-\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\in B}}f(x,u)=\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\in B}}[f(u,x)-f(x,u)]\\
&=\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\in B}}[[g(u,x)-\min\{g(u,x),g(x,u)\}]-[g(x,u)-\min\{g(u,x),g(x,u)\}]]\\
&=\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\in B}}[g(u,x)-g(x,u)]=\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\in B}}g(u,x)-\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\in B}}g(x,u)=\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\in B}}g(u,x)-\sum_{\substack{v\in V\\(x,v)\in E\\\{x,v\}\in B}}g(x,v)
\end{aligned}$$

ולכן

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E}} f(u,x) - \sum_{\substack{v\in V\\(x,v)\in E}} f(v,x)\\
&= \left[\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\notin B}} f(u,x) + \sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\in B}} f(u,x)\right] - \left[\sum_{\substack{v\in V\\(x,v)\in E\\\{x,v\}\notin B}} f(v,x) + \sum_{\substack{v\in V\\(x,v)\in E\\\{x,v\}\in B}} f(x,v)\right]\\
&= \left[\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\notin B}} g(u,x) - \sum_{\substack{v\in V\\(x,v)\in E\\\{x,v\}\notin B}} g(v,x)\right] + \left[\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\in B}} f(u,x) - \sum_{\substack{v\in V\\(x,v)\in E\\\{x,v\}\in B}} f(x,v)\right]\\
&= \left[\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\notin B}} g(u,x) - \sum_{\substack{v\in V\\(x,v)\in E\\\{x,v\}\notin B}} g(v,x)\right] + \left[\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\in B}} g(u,x) - \sum_{\substack{v\in V\\(x,v)\in E\\\{x,v\}\in B}} g(x,v)\right]\\
&= \left[\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\notin B}} g(u,x) + \sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E\\\{u,x\}\in B}} g(u,x)\right] - \left[\sum_{\substack{v\in V\\(x,v)\in E\\\{x,v\}\notin B}} g(v,x) + \sum_{\substack{v\in V\\(x,v)\in E\\\{x,v\}\in B}} g(x,v)\right]\\
&= \sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E}} g(u,x) - \sum_{\substack{v\in V\\(x,v)\in E}} g(v,x) = 0
\end{aligned}
$$

לכן קיבלנו כי $\boxed{\sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E}} f(u,x) = \sum_{\substack{v\in V\\(x,v)\in E}} f(v,x)}$, לכן f מקיימת את חוק שימור החומר,

הערה: כאשר האי שוויון האחרון מתקיים בגלל ש־ g היא זרימה חוקית

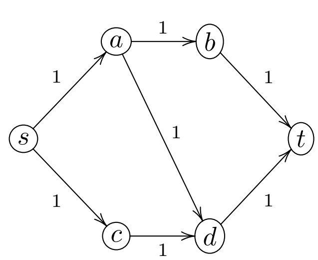
עתה נראה כי f אופטימלית ונסיים:
נשים לב כי

$$\sum_{\substack{v\in V\\(s,v)\in E}} f(s,v) \overset{(v,s)\notin E\to\{v,s\}\notin B}{=} \sum_{\substack{v\in V\\(s,v)\in E}} g(s,v) = |f|$$

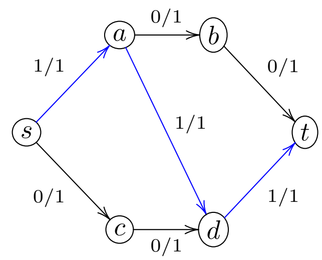
ולכן קיבלנו כי השטף של f הוא זהה לשטף של g שהינו אופטימלי, ולכן f הוא זרימה חוקית ואופטימלית

מ.ש.ל.☺

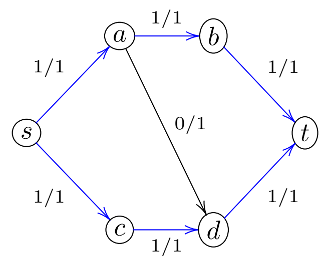
2. פתרון: ניתן דוגמא נגדית לכל שלושת הסעיפים יחד. נסתכל על רשת הזרימה הבאה:



נבחר את המסלול $s \to a \to d \to t$:



הרי כי - נשים לב כי לא קיימים עוד מסלולים בגרף בהם ניתן להזרים עוד חומר - אם נוריד את הצלעות שאנו מזרימים בהם את כל הקיבולת הרי כי נקבל את s, t בשני רכיבי קשירות שונים ואין ביניהם מסלול. לכן זהו פתרון שנקבל על פי האלגוריתם הראשון, נשים לב כי מאחר והקיבולות בכל הצלעות זהות, בחירת המסלול עומדת בתנאי השיפור של שרגא בסעיף ב' ונשים לב כי המסלול המינימלי בין s ל- t מכיל 3 צלעות ולכן המסלול שבחרנו הוא גם מינימלי בהתאם לתנאי השיפור של שרגא בסעיף ג' - לפיכך קיבלנו דוגמא לפלט של האלגוריתם לכל אחד מהסעיפים יחד (בפרט גם לחוד) ונשים לב כי השטף שהתקבל הוא 1! נראה כי קיים שטף גדול יותר: נבחר את המסלולים $s \to a \to b \to t$ וגם $s \to c \to d \to t$:



נשים לב כי אילוץ הקיבול ושימור החומר עדיין מתקיימים לכל קודקוד לא מיוחד ולכן זוהי זרימה חוקית וקיבלנו שטף 2! לפיכך הראינו כי השטף שהתקבל על-ידי האלגוריתם וכן כל אחד מהשיפורים עלולים להיכשל. כדרוש. ■

3. פתרון:

(א) **צ"ל:** f היא זרימה אופטימלית שעולה על השאלה

הוכחה:

ניצור קודקוד שהוא "super" מקור שנסמנו s, קודקוד שהוא "super" בור ונסמנו t,

נגדיר $V' = V \cup \{s, t\}$, $E' = E \cup \{(s, s_i) \mid 1 \le i \le n\} \cup \{(t_i, t) \mid 1 \le i \le m\}$, ונגדיר

$$c'(e) = \begin{cases} c(e) & e \in E \\ \infty & else \end{cases}$$

נשים לב כי $c'(e)$ הוא מוגדר היטב לכל צלע ואי שלילי כי $c(e) \ge 0$ וגם $\infty > 0$,

ורשת הזרימה החדשה שניצור היא (V', E', c', s, t),

נריץ את אדמונדס-קארפ על הרשת שיצרנו שנסמנו ב- f',

ונחזיר $f(u, v) = f'(u, v)$ לכל $u, v \in V$.

הסבר קצר: נשים לב שבשביל להמיר את זה לבעית זרימה שאנחנו מכירים, צריך רק בור ומקור אחד. אז הוספנו מקור שממנו אפשרנו להזרים כמה שרוצים (קיבול אינסופי) לכל אחד מהמקורות, מה שגורם למקורות $s_1, \ldots s_n$ להתנהג כמו מקורות בהגדרה האמיתית שניתן לקבל כמה זרימה שצריך להמשך המערכת. בנוסף לכך הוספנו בור t שאוסף את כל הזרימה מהבורות $t_1, \ldots, t_m$ (גם עם קיבול אינסופי), מה שמאפשר לבורות $t_1, \ldots, t_m$ להתנהג כמו בורות בהגדרה האמיתית. וכל מה שנשאר לעשות זה לפתור את רשת הזרימה החדשה שיצרנו ולקבל את השטף המקסימלי שרצינו.

זמן ריצה: הוספת $n + m$ צלעות לגרף ואז הרצת אדמונדס-קארפ ולכן מהיות וזה סכום של זמנים פולינומיים, מתקיים כי זמן הריצה עצמו הוא פולינומי

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** f היא זרימה אופטימלית שעולה על השאלה

הוכחה:

נגדיר $V' = V$, $E' = \{(u, v) \in E \mid (v \ne s) \wedge (u \ne t) \wedge (u \ne v)\}$, ונגדיר

$$c'(e) = \begin{cases} c(e) & e \in E \end{cases}$$

נשים לב כי $c'(e) = c(e) \geq 0$, ולכן מוגדר היטב.
ורשת הזרימה החדשה שניצור היא (V', E', c', s, t),
נריץ את אדמונדס־קארפ על הרשת שיצרנו שנסמנו ב־ f',
ונחזיר $f(u,v) = f'(u,v)$ לכל $u, v \in V$.

הסבר קצר: נשים לב שהרשת שיצרנו היא חוקית כי אין צלעות שנכנסות למקור, יוצאות מהבור או מכילות לולאות (כי אין להם חשיבות בפתרון האופטימלי של רשת זרימה מכוונת). בנוסף לכך, שמרנו על דרישות הקיבול של הרשת המקורית.
מכיוון שניתן להגדיר $E = \{(u,v) \mid u, v \in V \wedge \{u,v\} \in E\}$, נוכל לראות שביטאנו את אותן הצלעות מהגרף המקורי חוץ מהצלעות שלא יהיו בפתרון האופטימלי, ולכן רשת הזרימה שיצרנו שקולה לרשת הזרימה המקורית.

זמן ריצה: חישוב E' שדורש לכל היותר $O(|E|)$ פעולות ואז הרצת אדמונדס־קארפ ולכן מהיות וזה סכום של זמנים פולינומיים, מתקיים כי זמן הריצה עצמו הוא פולינומי

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** f היא זרימה אופטימלית שעולה על השאלה
הוכחה:
נגדיר

$$V' = \{v_{in} \mid v \in V\} \cup \{v_{out} \mid v \in V\}$$
$$E' = \{(u_{out}, v_{in}) \mid (u,v) \in E\} \cup \{(v_{in}, v_{out}) \mid v \in V\}$$

ונגדיר

$$c'(e) = \begin{cases} \mu(v) & e = (v_{in}, v_{out}) \\ c((u,v)) & e = (u_{out}, v_{in}) \end{cases}$$

נשים לב כי $c'(e)$ מוגדר לכל צלע ואי שלילי כי $\mu(v) \geq 0$ וגם $c(e) \geq 0$
ורשת הזרימה החדשה שניצור היא (V', E', c', s, t),
נריץ את אדמונדס־קארפ על הרשת שיצרנו ונסמנו ב־ f'
ונחזיר זרימה מקסימלית חדשה שנגדירה $\boxed{f(v,u) = f'(v_{out}, u_{in})}$.

הסבר קצר: תחילה נשים לב שהוספנו כל קודקוד פעמיים וכל הצלעות מחוברות או מזרימים חומר לv_{in} או לוקחים חומר מ־v_{out}, ולכן כל החומר שעובר מ־ v_{in} ל־ v_{out} עובר ב־ (v_{in}, v_{out}) שברשת שלנו הגדרנו את הקיבול שלו להיות $\mu(v)$, ולכן כמות החומר המקסימלית שתעבור ב־ v_{in} היא $\mu(v)$. לבסוף נצטרך להמיר את הרשת שלנו חזרה לרשת מקורית ולכן נוכל למחוק את הכפילויות שיצרנו כדי ליצור את התנאי של כמות החומר בכל קודקוד.

זמן ריצה: צריך להוסיף לכל היותר $O(|V|)$ קודקודים וצלעות, צריך לחשב את הזרימה שנחזיר לכל קודקוד שייקח $O\left(|V|^2\right)$ ולהריץ אדמונדס־קארפ ולכן מהיות וזה סכום של זמנים פולינומיים, מתקיים כי זמן הריצה עצמו הוא פולינומי

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** f היא זרימה אופטימלית שעולה על השאלה
הוכחה:
נגדיר

$$V' = V, E' = E$$
$$c'(e) = \begin{cases} 1 & e \in E' \end{cases}$$

נשים לב כי $c'(e)$ מוגדר לכל צלע ואי שלילי כי $1 \geq 0$ (כשאנחנו מעל שדה הממשיים לפי אינפי 1)
ורשת הזרימה החדשה שניצור היא (V', E', c', s, t),
נריץ את אדמונדס־קארפ על הרשת שיצרנו ונסמנו ב־ f'
ונחזיר $|f'|$.

הסבר קצר: תחילה נשים לב שהאלגוריתם מזרים בשלמים, ולכן אם בשלילה היו 2 מסלולים שעברנו בצלע $e \in E$, אז היה מתקיים כי $f'(e) \geq 1 + 1 > c'(e)$ בסתירה לקיבול של הרשת. לכן נקבל כי הרשת תחזיר את מספר המסלולים המירבי שניתן למצוא בגרף ללא לחזור על צלע כלשהי יותר מפעם אחת.

זמן ריצה: צריך רק להריץ אדמונדס־קארפ עם פונקציה של 1, ולכן מהיות זמן פולינומיים, מתקיים כי זמן הריצה עצמו הוא פולינומי

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** f היא זרימה אופטימלית שעולה על השאלה
הוכחה:
נגדיר

$$V'=V,E'=E$$
$$c'\left(e\right)=\begin{cases}1 & e\in E'\end{cases},\mu\left(v\right)=1$$

נשים לב כי $c'\left(e\right)$ מוגדר לכל צלע ואי שלילי כי $1\geq0$ (כשאנחנו מעל שדה הממשיים לפי אינפי 1)
ורשת הזרימה החדשה שניצור היא $\left(V',E',c',s,t\right)$,
נריץ את סעיף ג' עם הרשת והפונקציות שיצרנו ונחזיר $|f'|$.
הסבר קצר: נניח בשלילה שהיה קודקוד $v\in V$, כך שהוא חזר ב2 מסלולים שונים (או אפילו באותו מסלול), מהיות האלגוריתם עובד בשלמים, נקבל שדרך v עברו לפחות פעמיים ולכן הקיבול של v הוא לפחות 2 בסתירה לדרישת הקיבול הקודקודים של $\mu\left(v\right)=1$. ולכן הרשת תחזיר את מספר המסלולים המקסימלי שעוברים בין s לt ללא חזרה על קודקודים
זמן ריצה: זמן ריצה זהה לזה בסעיף ג', וראינו שהוא פולינומי

מ.ש.ל.ה.☺

4. פתרון:

(א) **הוכחה:** על מנת להראות כי ההרחבה N' הינה רשת זרימה חוקית, נראה כי ההגדרה מתקיימת. נראה כי התנאים על פונקציית הקיבול מתקיימות:

i. צ"ל: $\forall x\in V:c'\left(x,x\right)=0$.
הוכחה: מהיות N רשת זרימה רגילה הרי כי $\left(x,x\right)\notin E$ (הנחה שנעשתה בשיעור) ולכן מהגדרת c' מתקיים $c'\left(x,x\right)=0$ כדרוש. $\square$

ii. צ"ל: $\forall x\in V:c'\left(x,s\right)=0$.
הוכחה: מהיות N רשת זרימה רגילה הרי כי s קודקוד מקור ב־ N ולכן אין צלעות הנכנסים אליו ולכן $\left(x,s\right)\notin E$ ולכן מהגדרת c' מתקיים $c'\left(x,s\right)=0$ כדרוש. $\square$

iii. צ"ל: $\forall x\in V:c'\left(t,x\right)=0$.
הוכחה: מהיות N רשת זרימה רגילה הרי כי t קודקוד בור ב־ N ולכן אין צלעות היוצאים ממנו ולכן $\left(t,x\right)\notin E$ ולכן מהגדרת c' מתקיים $c'\left(t,x\right)=0$ כדרוש. $\square$

לפיכך קיבלנו כי N הינה רשת זרימה חוקית. על מנת להראות כי f' זרימה חוקית ב־ N' נוכיח כי ההגדרה מתקיימת:

i. צ"ל: לכל $x\neq y\in V$ מתקיים $f'\left(x,y\right)=-f'\left(y,x\right)$.
הוכחה: יהיו $x\neq y\in V$.
אם $\left(x,y\right)\in E$ וגם $f\left(x,y\right)>0$ אנו מגדירים $f'\left(x,y\right)=f\left(x,y\right)$. מאחר ומההנחה $[f\left(y,x\right)>0\wedge\left(y,x\right)\in E$ לא מתקיים יחד עם ההנחה הראשונית] ־ הרי כי נקבל מהגדרת f' כי $f'\left(y,x\right)=-f\left(x,y\right)$ ולכן קיבלנו כי $f'\left(y,x\right)=-f'\left(x,y\right)$.
אחרת אם $\left(y,x\right)\in E$ וגם $f\left(y,x\right)>0$ אנו מגדירים $f'\left(x,y\right)=-f\left(y,x\right)$ מאחר ומההנחה $[f\left(x,y\right)>0\left(x,y\right)\in E$ לא מתקיים יחד עם ההנחה הראשונית] ־ הרי כי נקבל מהגדרת f' כי $f'\left(x,y\right)=-f\left(y,x\right)$ ולכן קיבלנו כי $f'\left(x,y\right)=-f'\left(y,x\right)$.
אחרת לפי הגדרת f' מתקיים $f'\left(x,y\right)=0=f'\left(y,x\right)=-f'\left(y,x\right)$. נשים לב כי בכל המקרים קיבלנו כי f' אנטי־סימטרית כדרוש. $\square$

ii. צ"ל: $\forall x,y\in V:f'\left(x,y\right)\leq c'\left(x,y\right)$.
הוכחה: יהיו $x,y\in V$. נשים לב כי מתקיים c' פונקציה אי־שלילית ולכן בפרט אם $0\leq f'\left(x,y\right)$ מתקיים $f'\left(x,y\right)\leq c'\left(x,y\right)$. נותר להראות כאשר $f'\left(x,y\right)>0$ כלומר כאשר $f\left(x,y\right)>0\wedge\left(x,y\right)\in E$ (שכן בשאר המקרים f' אי־חיובית וטיפלנו במקרה זה). נשים לב כי במקרה זה $f'\left(x,y\right)=f\left(x,y\right)\leq c\left(x,y\right)=c'\left(x,y\right)$ כאשר אי־השוויון באמצע נובע מהיות f זרימה חוקית ברשת זרימה רגילה N והשוויון האחרון נובע מהגדרת c' עבור $\left(x,y\right)\in E$ ולכן קיבלנו את הדרוש בכל המקרים. $\square$

iii. צ"ל: $\forall x\in V\setminus\left\{s,t\right\}:\sum_{v\in V}f'\left(x,v\right)=0$.
הוכחה: יהי $x\in V\setminus\left\{s,t\right\}$. מהיות f זרימה חוקית ברשת זרימה רגילה הרי כי

$$\sum_{v\in V,\left(x,v\right)\in E}f\left(x,v\right)=\sum_{v\in V,\left(v,x\right)\in E}f\left(v,x\right)$$

לכן

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in V} f'(x,v) &= \sum_{v\in V,(x,v)\in E\wedge f(x,y)>0} f'(x,v) + \sum_{v\in V,(v,x)\in E\wedge f(y,x)>0} f'(x,v) + \sum_{\substack{v\in V,(x,v)\notin E\vee f(x,v)=0\\ \vee (v,x)\notin E\vee f(v,x)=0}} f'(x,v)\\
&= \sum_{v\in V,(x,v)\in E\wedge f(x,y)>0} f(x,v) + \sum_{v\in V,(v,x)\in E\wedge f(y,x)>0} -f(v,x) + \sum_{\substack{v\in V,(x,v)\notin E\vee f(x,v)=0\\ \vee (v,x)\notin E\vee f(v,x)=0}} 0\\
&= \sum_{v\in V,(x,v)\in E\wedge f(x,y)>0} f(v,x) + \sum_{v\in V:(v,x)\in E\wedge f(y,x)>0} -f(v,x) =\\
&= \sum_{v\in V,(x,v)\in E\wedge f(x,y)>0} f(v,x) - \sum_{v\in V:(v,x)\in E\wedge f(y,x)>0} f(v,x) = 0
\end{aligned}$$

כאשר השוויון השני נובע מהצבה של הגדרת f'. וקבילנו את הדרוש. □

(ב) **הוכחה:**

$$\begin{aligned}
|f'| = \sum_{v\in V} f'(s,v) &= \sum_{v\in V\wedge(s,v)\in E} f'(s,v) + \sum_{v\in V\wedge(s,v)\notin E} f'(s,v) = \sum_{v\in V\wedge(s,v)\in E} f(s,v) + \sum_{v\in V\wedge(s,v)\notin E} 0\\
&= \sum_{v\in V\wedge(s,v)\in E} f(s,v) = |f|
\end{aligned}$$

כאשר השוויון השני מתקיים מהצבה של הגדרה וכן עבור הסכום השני ־ מתקיים $f'(s,v)=0$ כאשר $v\in V\wedge(s,v)\notin E$ מאחר ש־ שאז f' שווה $-f(v,s)$ או 0 והראינו כי $f(v,s)=0$ ולכן כדרוש הוא תמיד 0. והראינו את הדרוש. ■

5. פתרון:

(א) **הוכחה:** נשים לב כי c מוגדרת להיות $c'(e)$ לכל $e\in\{(x,y)\,|c'(x,y)>0\}$ ולכן נקבל $c(e)>0$ ולכן c פונקציה שמחזירה ערכים בתחום $\mathbb{R}_{>0}$ כדרוש.

(ב) **הוכחה:** נראה כי תנאי ההגדרה מתקיימים:

i. אילוץ הקיבול: יהי $e\in E$: אם $f(e)=0$ הרי כי מהיות c פונקציה בטווח $\mathbb{R}_{>0}$ ולכן אילוץ הקיבול מתקיים. אחרת $f(e)=f'(e)\le c'(e)=c(e)$ ואילוץ הקיבול מתקיים כדרוש.

ii. חוק שימור החומר: יהי $x\in V\setminus\{s,t\}$ נשים לב כי מהגדרת f מתקיים

$$\begin{aligned}
\sum_{u:(u,x)\in E} f(u,x) - \sum_{v:(x,v)\in E} f(x,v) &= \sum_{\substack{u:(u,x)\in E\\ f(u,x)>0}} f(u,x) + \sum_{\substack{v:(x,v)\in E\\ f(x,v)>0}} -f(x,v)\\
&= \sum_{\substack{u:(u,x)\in E\\ f'(u,x)>0}} f'(u,x) + \sum_{\substack{v:(x,v)\in E\\ f'(v,x)<0}} f'(v,x)\\
&= \sum_{\substack{u:(u,x)\in E\\ f'(u,x)>0}} f'(u,x) + \sum_{\substack{v:(x,v)\in E\\ f'(v,x)<0}} f'(v,x) + \underbrace{\sum_{\substack{v:(x,v)\notin E\\ f'(v,x)=0}} f'(v,x)}_{=0}\\
&= \sum_{v\in V} f'(v,x) = 0
\end{aligned}$$

כאשר השוויון האחרון נובע מהיות f' זרימה מורחבת. לפיכך קיבלנו

$$\sum_{u:(u,x)\in E} f(u,x) = \sum_{v:(x,v)\in E} f(x,v)$$

כדרוש.

ולכן קיבלנו כי f זרימה חוקית רגילה ברשת זרימה רגילה N כדרוש.

(ג) **הוכחה:** מתקיים

$$|f| = \sum_{v:(s,v)\in E} f(s,v) = \sum_{v:(s,v)\in E} f(s,v) + \sum_{v:(s,v)\notin E} 0 = \sum_{v:(s,v)\in E} f'(s,v) + \sum_{v:(s,v)\notin E} f'(s,v)$$
$$= \sum_{v\in V} f'(s,v) = |f'|$$

כדרוש. $\blacksquare$

6. פתרון

(א) **צ"ל:** מסלולים ללא צלעות משותפות

הוכחה:

תחילה נמיר את הבעיה שלנו לבעיה של רשת זרימה.

נגדיר $V' = \{(i,j) \mid 0 \le i \le n, 0 \le j \le m\}$

המקורות שלנו הם $A = \{s_1, \ldots, s_{|A|}\}$ (הערה נשים $|A| \le n \cdot m$ ולכן פולינומי ב־ $|A|$ יהיה גם פולינומי ב־ n, m)

הבורות שלנו הם $\{t_1, \ldots, t_k\} = \{(i,j) \mid (i=0) \vee (i=n) \vee (j=0) \vee (j=m)\}$ (הערה נשים לב כי $k \le 2n+2m$ ולכן פולינומי ב־ k הוא גם פולינומי ב־ n, m)

עתה נגדיר

$$\begin{aligned} E_{helper} &= \{((i,j),(i+1,j)) \mid (i,j),(i+1,j) \in V'\} \\ &\cup \{((i,j),(i-1,j)) \mid (i,j),(i-1,j) \in V'\} \\ &\cup \{((i,j),(i,j-1)) \mid (i,j),(i,j-1) \in V'\} \\ &\cup \{((i,j),(i,j+1)) \mid (i,j),(i,j+1) \in V'\} \end{aligned}$$

ונגדיר $E' = (E_{helper} \setminus \{(t_i, v) \mid v \in V\}) \setminus \{v, s_i \mid v \in V\}$ (כלומר נמחק את הצלעות שמגיעות למקורות ואת אלו שיוצאות מהבורות),

עתה נרצה שכל צלע תשתתף לכל היותר במסלול אחד, לכן נבחר פונקצית קיבול $c(e) = 1$ (הנימוק למדוע זה מחייב שצלע תשתתף לכל היותר במסלול אחד מופיע בשאלה 3 סעיף ד' ושהיא רשת זרימה עם כמות מסלולים מקסימלית),

מכל ההוגדר לעיל, ניצור את רשת הזרימה עם הרבה מקורות ובורות $\left(V', E', c, \{s_1, \ldots, s_{|A|}\}, \{t_1, \ldots, t_k\}\right)$

עתה אם נריץ לפי השיטה שתוארה בשאלה 3 סעיף א' נקבל רשת זרימה <u>מקסימלית</u> שהמקורות הם נקודות ההתחלה והבורות הם הקצוות וכל צלע משתתפת לכל היותר במסלול אחד.

נוכל להמיר את רשת הזרימה המקסימלית הזאת למסלולים אותה הרשת בחרה ולהחזירם.

זמן ריצה: הכנת הרשת $O(n \cdot m)$, הרצת שאלה 3 סעיף א' לוקח זמן פולינומי, והמרת רשת זרימה מקסימלית למסלולים יכול לקחת לכל היותר את כל הקודקודים בטבלה וזמן זה הוא $O(n \cdot m)$, שעדיין מביא לנו זמן פולינומי. ולכן חיבור כל הפעולות ביחד עדיין יביא לנו זמן פולינומי.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** מסלולים ללא קודקודים משותפים

הוכחה:

תחילה נמיר את הבעיה שלנו לבעיה של רשת זרימה.

נגדיר $V'_{helper} = \{(i,j) \mid 0 \le i \le n, 0 \le j \le m\}$

המקורות שלנו הם $A = \{s_1, \ldots, s_{|A|}\}$ (הערה נשים $|A| \le n \cdot m$ ולכן פולינומי ב־ $|A|$ יהיה גם פולינומי ב־ n, m)

הבורות שלנו הם $\{t_1, \ldots, t_k\} = \{(i,j) \mid (i=0) \vee (i=n) \vee (j=0) \vee (j=m)\}$ (הערה נשים לב כי $k \le 2n+2m$ ולכן פולינומי ב־ k הוא גם פולינומי ב־ n, m)

עתה נגדיר

$$\begin{aligned} E_{helper} &= \{((i,j),(i+1,j)) \mid (i,j),(i+1,j) \in V'\} \\ &\cup \{((i,j),(i-1,j)) \mid (i,j),(i-1,j) \in V'\} \\ &\cup \{((i,j),(i,j-1)) \mid (i,j),(i,j-1) \in V'\} \\ &\cup \{((i,j),(i,j+1)) \mid (i,j),(i,j+1) \in V'\} \end{aligned}$$

ונגדיר $E'_{helper1} = (E_{helper} \setminus \{(t_i, v) \mid v \in V\}) \setminus \{v, s_i \mid v \in V\}$ (כלומר נמחק את הצלעות שמגיעות למקורות ואת אלו שיוצאות מהבורות)

נגדיר

$$\begin{aligned} V' &= \left\{v_{in} \mid v \in V'_{helper}\right\} \cup \left\{v_{out} \mid v \in V'_{helper}\right\} \\ E' &= \{(u_{out}, v_{in}) \mid (u,v) \in E\} \cup \left\{(v_{in}, v_{out}) \mid v \in V'_{helper}\right\} \end{aligned}$$

ונגדיר

$$c'(e) = \begin{cases} 1 & e = (v_{in}, v_{out}) \\ 1 & e = (u_{out}, v_{in}) \end{cases}$$

נשים לב שמאותו הנימוק שניתן בשאלה 3 סעיף ג' ו־ ה' ביחד, מתקיים שפונקציית הקיבול הזאת מבטיחה שכל קודקוד יופיע רק במסלול אחד,

מכל ההוגדר לעיל, ניצור את רשת הזרימה עם הרבה מקורות ובורות $\left(V', E', c, \left\{s_1, \ldots, s_{|A|}\right\}, \{t_1, \ldots, t_k\}\right)$

עתה אם נריץ לפי השיטה שתוארה בשאלה 3 סעיף א' נקבל רשת זרימה מקסימלית שהמקורות הם נקודות ההתחלה והבורות הם הקצוות וכל קודקוד משתתף לכל היותר במסלול אחד.

נוכל להמיר את רשת הזרימה המקסימלית הזאת למסלולים אותה הרשת בחרה ולהחזירם.

זמן ריצה: הכנת הרשת $O(n \cdot m) + O(|E| + |V|)$ (כאשר $|V| = O(n \cdot m), |E| = O\left((n+m)^2\right)$), הרצת שאלה 3 סעיף א' לוקח זמן פולינומי, והמרת רשת זרימה מקסימלית למסלולים יכול לקחת לכל היותר את כל הקודקודים בטבלה וזמן זה הוא $O(n \cdot m)$, שעדיין מביא לנו זמן פולינומי. ולכן חיבור כל הפעולות ביחד עדיין יביא לנו זמן פולינומי.

מ.ש.ל.ב.☺