פתרון תרגיל מספר 6 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

17 במאי 2020

שאלה 3

סעיף 1 חלק a

צ"ל: $E_{TM} \in \text{coRE}$

הוכחה:

נסמן ב־ Σ את השפה שבה נקודד מ"ט ומילים (ראינו בתרגול שאפשר לעשות זאת עם $\{0,1,\#\}$)

נסמן ב־ E אנומרטור שמדפיס את כל המילים ב־ Σ^*

נבנה $\mathcal{M}$ שהוא TM שמזהה את $\overline{E_{TM}}$ באופן הבא:

1. תחילה נבדוק ש־ $\langle M \rangle$ הוא קידוד של מכונת טיורינג, אם לא נקבל
2. לכל $n \in \{1,2,3,\dots\}$:
   (א) נריץ את האנומרטור E שידפיס את ה־ n מילים הראשונות בצורה $w_1\#w_2\#\dots\#w_n$
   (ב) נריץ את M n צעדים על כל מילה שהודפסה $\{w_1,\dots,w_n\}$
   (ג) אם M קיבלה מילה בצעד הקודם, נקבל אותה

עתה נוכיח ש־ $L(\mathcal{M}) = \overline{E_{TM}}$,

תהי $\langle M \rangle \in L(\mathcal{M})$, לכן מהשלב הראשון אנחנו יודעים ש־ $\langle M \rangle$ הוא לא קידוד למכונת טיורינג או קיים שלב n שבו המ"ט M קיבל את אחת המילים $\{w_1,\dots,w_n\}$.

כלומר $L(M) \cap \{w_1,\dots,w_n\} \neq \emptyset$ ולכן $L(M) \neq \emptyset$,

ולכן $\langle M \rangle \in \{\text{M is not an encoding to a turing machine or } L(M) \neq \emptyset\} = \overline{E_{TM}}$

כלומר $\boxed{L(\mathcal{M}) \subseteq \overline{E_{TM}}}$

עתה יהי $\langle M \rangle \in \overline{E_{TM}}$ אזי $\langle M \rangle$ הוא לא קידוד למכונת טיורינג או ש־ $L(M) \neq \emptyset$

אם $\langle M \rangle$ לא קידוד למכונת טיורינג אז לפי שלב א' יתקיים ש־ $\langle M \rangle \in L(\mathcal{M})$

אחרת $L(M) \neq \emptyset$, אזי $\exists w \in \Sigma^*$ כך ש־ $w \in L(M)$.

נסמן ב־ k את אינדקס ההדפסה הראשונה של w על ידי E (יש כזה כי E מדפיסה את כל המילים)

נסמן ב־ l את מספר הצעדים ש־ M רצה על w

נשים לב שבשלב ה־ $\max(k,l)$, בשלב 2ב נרוץ l שלבים על w_k ונקבל אותה, ולכן $\mathcal{M}$ יקבל את $\langle M \rangle$.

ולכן $\langle M \rangle \in L(\mathcal{M})$ ולכן $\boxed{\overline{E_{TM}} \subseteq L(\mathcal{M})}$

ולכן $\boxed{L(\mathcal{M}) = \overline{E_{TM}}}$, כלומר מצאנו $\mathcal{M}$ שהוא TM כך ש־ $L(\mathcal{M}) = \overline{E_{TM}}$ ולכן $\overline{E_{TM}} \in \text{RE}$ מההגדרה,

כלומר $E_{TM} \in \text{coRE}$, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 1 חלק b

צ"ל: $E_{TM} \notin \text{RE}$

הוכחה:

נניח בשלילה ש־ $E_{TM} \in \text{RE}$, בסעיף הקודם ראינו ש־ $E_{TM} \in \text{coRE}$ ולכן $E_{TM} \in \text{RE} \cap \text{coRE} = R$

כלומר קיימת מכונת טיורינג $\mathcal{M}$ כך ש־ $L(\mathcal{M}) = E_{TM}$ וגם $\mathcal{M}$ עוצרת על כל קלט.

נסמן ב־ E אנומרטור שמדפיס את כל המילים ב־ Σ^*

נבנה מכונת טיורינג עזר $\mathcal{M}_{helper}^{\langle\langle M \rangle, w\rangle}$ באופן הבא:

1. נקבל x
2. נריץ את M על w
3. אם M קיבל או דחה, נקבל

נשים לב ש־ $L\left(\mathcal{M}_{helper}^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right)=\begin{cases}\Sigma^* & \text{M halts on w}\\ \emptyset & else\end{cases}$ (כי נקבל רק את M עצר על w, אחרת לא נקבל אף מילה)

נבנה מכונת טיורינג חדשה $\mathcal{M}'$ ל־ $HALT_{TM}$ באופן הבא:

1. תחילה נקבל $(\langle M\rangle, w)$ ונבדוק ש־ $\langle M\rangle$ הוא קידוד תקין, אם לא אז נדחה
2. נריץ את $\mathcal{M}$ על $\left\langle\mathcal{M}_{helper}^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right\rangle$
3. אם $\mathcal{M}$ קיבל, נדחה
4. אם $\mathcal{M}$ דחה, נקבל

נשים לב ש־ $\mathcal{M}'$ עוצרת על כל קלט בגלל שהיא רק מריצה את $\mathcal{M}$ שהיא עוצרת על קלט (ובדיקה של קידוד שגם עוצר)

נזכר ש־ $L\left(\mathcal{M}_{helper}^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right)=\begin{cases}\Sigma^* & \text{M halts on w}\\ \emptyset & else\end{cases}$, ולכן $\text{M halts on w}\Leftrightarrow L\left(\mathcal{M}_{helper}^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right)\neq\emptyset$, לכן

$$\begin{aligned}(\langle M\rangle, w)\in L(\mathcal{M}')&\Leftrightarrow(\text{M is not an encoding to a turing machine})\wedge\left(\left\langle\mathcal{M}_{helper}^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right\rangle\notin L(\mathcal{M})\right)\\&\Leftrightarrow(\text{M is not an encoding to a turing machine})\wedge\left(L\left(\mathcal{M}_{helper}^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right)\neq\emptyset\right)\\&\Leftrightarrow(\text{M is not an encoding to a turing machine})\wedge(\text{M halts on w})\\&\Leftrightarrow\langle\langle M\rangle, w\rangle\in HALT_{TM}\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו ש־ $L(\mathcal{M}')=HALT_{TM}$ וגם $\mathcal{M}'$ עוצר על כל קלט.
לכן מההגדרה מתקיים כי $HALT_{TM}\in R$, אך בהרצאה הוכחנו ש־ $HALT_{TM}\notin R$, סתירה
ולכן $\boxed{E_{TM}\notin \text{RE}}$

מ.ש.ל.ב.☺