תרגיל 1 אלגברה לינארית 1

211747639

מיכאל גרינבאום

1. **צ״ל:** הצגה פולארית של $5-5i$
הוכחה:
תחילה נחשב $r=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$
עתה נחשב θ. נשים לב ש$5>0,-5<0$
ולכן $\theta=2\pi+tg^{-1}\left(-\frac{5}{5}\right)=2\pi+tg^{-1}(-1)=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7}{4}\pi$
ולכן ההצגה הפולארית של $5-5i$ היא $5\sqrt{2}*cis\left(\frac{7}{4}\pi\right)$

מ.ש.ל.☺

2. **צ״ל:** הצגה קרטזית של $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{33}$
הוכחה:
תחילה נחשב את $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ בהצגה פולארית.
נשים לב ש$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$
בנוסף לכך המספר נמצא ברביע הרביעי
ולכן $\theta=2\pi+tg^{-1}\left(-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=2\pi+tg^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11}{6}\pi$
ולכן המספר $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ בהצגה פולארית הוא $cis\left(\frac{11}{6}\pi\right)$
נשים לב ש$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{33}=\left(cis\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right)^{33}=1^{33}*cis\left(33*\frac{11}{6}\pi\right)=cis\left(\frac{121}{2}\pi\right)=cis(\frac{\pi}{2})$
נחשב את ההצגה הקרטזית של$cis(\frac{\pi}{2})$ ונסיים.
נשים לב $x=1*\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, y=1*\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$
ולכן $z=0+1*i=i$ ולכן $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{33}=i$

מ.ש.ל.☺

3. א. **צ״ל:** הצגה קרטזית של $(4-9i)*(-2-5i)$
הוכחה:

$$(4-9i)*(-2-5i)=(-8-45)+(-20+18)i=-53-2i$$

תשובה: ההצגה הקרטזית של $(4-9i)*(-2-5i)$ היא $-53-2i$

מ.ש.ל.א.☺

ב. **צ״ל:** הצגה קרטזית של $(7-i)^3$
הוכחה:

$$(7-i)^3=(7-i)*(7-i)*(7-i)=\big((49-1)+(-7-7)i\big)*(7-i)$$

$$= (48 - 14i) * (7 - i) = (48 * 7 - 14) + (-48 - 14 * 7)i = 322 - 146i$$

תשובה: ההצגה הקרטזית של $(7-i)^3$ היא $322 - 146i$

מ.ש.ל.ב.☺

ג. **צ״ל:** הצגה קרטזית של $\frac{2+i}{4+3i}$
הוכחה:

$$\frac{2+i}{4+3i} = \frac{(2+i)*(4-3i)}{(4+3i)*(4-3i)} = \frac{(2+i)*(4-3i)}{16+9} = \frac{(8+3)+(4-6)i}{25} = \frac{11}{25} - \frac{2}{25}i$$

תשובה: ההצגה הקרטזית של $\frac{2+i}{4+3i}$ היא $\frac{11}{25} - \frac{2}{25}i$

מ.ש.ל.ג.☺

ד. **צ״ל:** הצגה קרטזית של $\frac{1-i}{i} + \frac{i}{1-i}$
הוכחה:

$$\frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i} = \frac{-1+(1-i)^2}{(1-i)*i} = \frac{-1+(1-1)+(-1-1)i}{1+i} = \frac{-1-2i}{1+i} = -\frac{(1+2i)*(1-i)}{(1+i)*(1-i)}$$

$$= -\frac{(1+2)+(2-1)i}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

תשובה: ההצגה הקרטזית של $\frac{1-i}{i} + \frac{i}{1-i}$ היא $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

מ.ש.ל.ד.☺

4. א. **צ״ל:** כל $z \in \mathbb{C}$ שעבורו מתקיים $z^2 + 6z + 10 = 0$
הוכחה:

לפי נוסחא לפתרון משוואות ריבועיות נקבל $z_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4*10}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-6 \mp 2i}{2} = -3 \pm i$

תשובה: הפתרונות למשוואה מעל $\mathbb{C}$ הם $z = -3 - i$ ו $z = -3 + i$

מ.ש.ל.א.☺

ב. **צ״ל:** כל $z \in \mathbb{C}$ שעבורו מתקיים $z^2 - 2iz + 3 = 0$
הוכחה:

לפי נוסחא לפתרון משוואות ריבועיות נקבל $z_{1,2} = \frac{2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4*3}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2i \pm 4i}{2} = i \pm 2i$

תשובה: הפתרונות למשוואה מעל $\mathbb{C}$ הם $z = -i$ ו $z = 3i$

מ.ש.ל.ב.☺

ג. **צ״ל:** כל $z \in \mathbb{C}$ שעבורו מתקיים $z^2 + (-4 + 2\sqrt{3}i)z + (3 - 2\sqrt{3}i) = 0$
הוכחה:
נשים לב ש $z^2 + \left(-4 + 2\sqrt{3}i\right)z + \left(3 - 2\sqrt{3}i\right) = 0 = (z-1) * (z - 3 + 2\sqrt{3}i)$

ולכן $z = 1, z = 3 - 2\sqrt{3}i$ הם הפתרונות למשוואה

מ.ש.ל.ג.☺

ד. **צ״ל:** כל $z \in \mathbb{C}$ שעבורו מתקיים $z^4 + 16 = 0$

הוכחה:

נסמן $z = rcis(\theta)$ אז $\mathrm{z}^4 = r^4 cis(4\theta) = -16$

ולכן $r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$ אך מהגדרת $r \geq 0$ ולכן $r = 2$

וגם $4\theta = \pi + 2\pi k$ מכיוון שאין רכיב מדומה והרכיב הממשי שלילי.

ולכן נקבל ש$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

ולכן נקבל $z = 2cis\left(\frac{\pi}{4}\right), z = 2cis\left(\frac{3\pi}{4}\right), z = 2cis\left(\frac{5\pi}{4}\right), z = 2cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ הפתרונות למשוואה.

מ.ש.ל.ד.☺

5. **צ״ל:** הצגה פולארית של $\bar{z}, z^{-1}$

נתון: $z = rcis(\theta)$, $z \neq 0$

הוכחה:

נסמן $z^{-1} = r_1 cis(\theta_1)$ ונשים לב ש$cis(0) = 1 = z * z^{-1} = (r * r_1) * cis(\theta + \theta_1)$

ולכן $r * r_1 = 1 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{r}$ (נתון $z \neq 0$ ולכן $r \neq 0$ ולכן זה מוגדר)

בנוסף לכך נשים לב שהדרישה מתקיימת רק אם $\cos(\theta + \theta_1) = 1$ ולכן $\theta + \theta_1 = 2\pi k$ אך אנחנו

יודעים ש$0 \leq \theta, \theta_1 < 2\pi$ ולכן $0 \leq \theta + \theta_1 < 4\pi$

ולכן אם $\theta \neq 0$ נקבל $\theta + \theta_1 = 2\pi \Rightarrow \theta_1 = 2\pi - \theta$

ולכן אם $\theta \neq 0$ נקבל ש$\boldsymbol{z^{-1} = \frac{1}{r} * cis(2\pi - \theta)}$

אם $\theta = 0$ נקבל $0 \leq \theta + \theta_1 < 2\pi$ ולכן $\theta + \theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0$

ולכן אם $\theta = 0$ נקבל ש$\boldsymbol{z^{-1} = \frac{1}{r} cis(0)}$

עתה נסמן $\bar{z} = \mathrm{r}_2 cis(\theta_2)$ ונשים לב ש$r^2 cis(0) = r^2 = z * \bar{z} = (r * r_2) * cis(\theta + \theta_2)$

ולכן נשים לב ש $r * r_2 = r^2 \Rightarrow r_2 = r$ (מכיוון ש$r \neq 0$ ניתן לחלק בו את המשוואה)

בנוסף לכך נשים לב שהדרישה מתקיימת רק אם $\cos(\theta + \theta_2) = 1$ ולכן $\theta + \theta_2 = 2\pi k$ אך אנחנו

יודעים ש$0 \leq \theta, \theta_2 < 2\pi$ ולכן $0 \leq \theta + \theta_2 < 4\pi$

ולכן אם $\theta \neq 0$ נקבל $\theta + \theta_2 = 2\pi \Rightarrow \theta_2 = 2\pi - \theta$

ולכן אם $\theta \neq 0$ נקבל ש$\boldsymbol{\bar{z} = r * cis(2\pi - \theta)}$

אם $\theta = 0$ נקבל $0 \leq \theta + \theta_2 < 2\pi$ ולכן $\theta + \theta_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = 0$

ולכן אם $\theta = 0$ נקבל ש$\boldsymbol{\bar{z} = rcis(0)}$

תשובה:

אם $\theta = 0$ אז נקבל $z^{-1} = \frac{1}{r} cis(0), \bar{z} = rcis(0)$

אחרת אם $\theta \neq 0$ נקבל $z^{-1} = \frac{1}{r} * cis(2\pi - \theta), \bar{z} = r * cis(2\pi - \theta)$

מ.ש.ל.☺

6. **צ״ל:** טווח לθ

נתונים: $z = rcis(\theta), z = a + bi, |b| < |a|, b < 0 < a$

הוכחה:

נשים לב שz נמצא ברביע הרביעי ולכן $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$.

נשים לב שמתקיים $\left|tg\left(\frac{b}{a}\right)\right| \overset{\left|\frac{b}{a}\right|<1}{<} |tg(1)| = \frac{\pi}{4}$

נשים לב ש$tg\left(\frac{b}{a}\right) < 0$ ולכן $-\frac{\pi}{4} < tg\left(\frac{b}{a}\right) < 0$

ולכן $\theta = 2\pi + tg\left(\frac{b}{a}\right) > 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$

ולכן הטווח על θ הוא $\frac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi$

<u>מ.ש.ל.☺</u>

7. **<u>צ״ל:</u>** טווח לθ_3

<u>נתונים:</u> $z_3 = z_1 * z_2$, $z_1 = r_1 cis(\theta_1), z_2 = r_2 cis(\theta_2)$, $\frac{10}{9}\pi < \theta_1 < \frac{11}{9}\pi, \frac{11}{9}\pi < \theta_2 < \frac{13}{9}\pi$

<u>הוכחה:</u>

נשים לב ש$z_3 = z_1 * z_2 = (r_1 * r_2) * cis(\theta_1 + \theta_2)$

נשים לב ש$2\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{21}{9}\pi < \theta_1 + \theta_2 < \frac{24}{9}\pi = 2\pi + \frac{2}{3}\pi$

נשים לב ש$0 \le \theta_3 < 2\pi$ וגם מתקיים שקיים $k \in \mathbb{Z}$ שעבורו מתקיים $\theta_1 + \theta_2 = \theta_3 + 2\pi k$

ולכן $2\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{21}{9}\pi < \theta_1 + \theta_2 = \theta_3 + 2\pi < \frac{24}{9}\pi = 2\pi + \frac{2}{3}\pi$

ולכן $\frac{1}{3}\pi < \theta_3 < \frac{2}{3}\pi$

<u>מ.ש.ל.☺</u>

8. א. **<u>צ״ל:</u>** $0 < a$

<u>נתונים:</u> $z_1 * z_2 = z_3$, $0 < d < -c, -f < e < 0$, $z_1 = a + bi, z_2 = c + di, z_3 = e + fi$

<u>הוכחה:</u>

נסמן $z_1 = r_1 cis(\theta_1), z_2 = r_2 cis(\theta_2), z_3 = r_3 cis(\theta_3)$

מהנתונים נקבל ש$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 + 2\pi k, r_3 = r_1 * r_2$

נשים לב ש$c < 0 < d$ וגם $|d| < |c|$ ולכן z_2 נמצא ברביע השני.

בנוסף לכך נשים לב ש$\frac{\pi}{4} = |tg(1)| \overset{\left|\frac{d}{c}\right|<1}{<} \left|tg\left(\frac{d}{c}\right)\right|$ וגם $tg\left(\frac{d}{c}\right) < 0$ ולכן $-\frac{\pi}{4} < tg\left(\frac{d}{c}\right) < 0$

עתה נשים לב ש$\theta_2 = tg\left(\frac{d}{c}\right) + \pi > \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$

וגם $\theta_2 = tg\left(\frac{d}{c}\right) + \pi < \pi$ ולכן $\frac{3}{4}\pi < \theta_2 < \pi$

באותו האופן נשים לב ש$e < 0 < f$ ו$|e| < |f|$ נמצא ברביע השני ולכן $\frac{\pi}{2} < \theta_3 < \pi$

בנוסף לכך נשים לב ש$\frac{\pi}{4} = |tg(1)| \overset{|f|>|e|}{>} \left|tg\left(\frac{f}{e}\right)\right|$ וגם $tg\left(\frac{f}{e}\right) < 0$ ולכן $tg\left(\frac{d}{c}\right) < -\frac{\pi}{4}$

ולכן $\frac{\pi}{2} < \theta_3 = \pi + tg\left(\frac{f}{e}\right) < \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$

נשים לב ש$\theta_3 < \theta_2$ ולכן $k = -1$ (כי לא יכול להיות יותר ולא פחות) ולכן $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 - 2\pi$

נניח כי $0 \le \theta_1 \le \frac{3}{2}\pi$ ונקבל ש$0 + \frac{3}{4}\pi < \theta_1 + \theta_2 < \frac{3}{2}\pi + \pi = 2\pi + \frac{1}{2}\pi$

ולכן $\frac{3}{4}\pi < \theta_1 + \theta_2 < 2\pi + \frac{1}{2}\pi$ ולכן $0 \le \theta_1 + \theta_2 < \frac{1}{2}\pi$ היחידים המתאימים לθ_3 אך מחוץ לתחום שחיפשנו ולכן $\theta_1 > \frac{3}{2}\pi$ חייב להתקיים.

ולכן z_1 ברביע הרביעי כלומר $a > 0$

<u>מ.ש.ל.א.☺</u>

ב. **<u>צ״ל:</u>** $0 > b$

<u>נתונים:</u> $z_1 * z_2 = z_3$, $0 < d < -c, -f < e < 0$, $z_1 = a + bi, z_2 = c + di, z_3 = e + fi$

<u>הוכחה:</u>

בסעיף א׳ הוכחנו שz_1 ברביע הרביעי כלומר $0 > b$

מ.ש.ל.ב.☺

ג. **צ"ל:** לא תמיד $0 < a + \mathrm{b}$
נתונים: $z_1 = a + bi, z_2 = c + di, z_3 = e + fi ,0 < d < -c, -f < e < 0, z_1 * z_2 = z_3$
הוכחה:
לא תמיד מתקיים $\mathrm{a} + \mathrm{b} > 0$
נבחר $z_1 = 10 - 12i, z_2 = -3 + 2i, z_3 = -6 + 56i$
נשים לב ש$0 < 2 < -(-3), -56 < -6 < 0$
נשים לב ש$z_1 * z_2 = z_3$
ולכן הדרישות מתקיימות אך $-2 = 12 - 10 > 0$ בסתירה לטענה

מ.ש.ל.ג.☺

9. א. **צ"ל:** לכל $z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ קיים $w \in \mathbb{C}$ כך שמתקיים $w^k = z$
נתונים:
הוכחה:
נסמן $z = rcis(\theta)$.
נבחר $w = \sqrt[k]{r} * cis\left(\frac{\theta}{k}\right)$
נשים לב ש$w^k = \left(\sqrt[k]{r}\right)^k * cis\left(\frac{\theta}{k} * k\right) = r * cis(\theta) = z$

מ.ש.ל.א.☺

ב. **צ"ל:** לכל $0 \neq z \in \mathbb{C}$ קיימים $\mathrm{w}_1, w_2 \in \mathbb{C}$ שונים שעבורם מתקיים $w_1^2 = z, w_2^2 = z$
נתונים: $k = 2$
הוכחה:
נסמן $z = rcis(\theta)$.
נבחר $w_1 = \sqrt{r} * cis\left(\frac{\theta}{2}\right)$
נשים לב ש$w_1^2 = \left(\sqrt{r}\right)^2 * cis\left(\frac{\theta}{2} * 2\right) = r * cis(\theta) = z$
נבחר $w_2 = \sqrt{r} * cis\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right)$. נשים לב שמוגדר כי $\theta + 2\pi < 4\pi \Rightarrow \frac{\theta+2\pi}{2} < 2\pi$
נשים לב ש$w_2^2 = \left(\sqrt{r}\right)^2 * cis\left(\frac{\theta+2\pi}{2} * 2\right) = r * cis(\theta + 2\pi) = r * cis(\theta) = z$
בנוסף לכך נשים לב שמתקיים $\mathrm{w}_1 \neq w_2$ כי $\frac{\theta}{2} \neq \frac{\theta+2\pi}{2}$
ולכן מצאנו 2 פתרונות שונים למשוואה ולכן w אף פעם לא יחיד

מ.ש.ל.ב.☺