קבוצות וקומבינטוריקה

26 בפברואר 2019

1 השלמות מתורת הקבוצות

הגדרה 1.1 פונקציה f מקבוצה A לקבוצה B היא <u>חח"ע</u> אם לכל $x, y \in A$ השוויון $f(x) = f(y)$ גוור שמתקיים $x = y$.

העתקה f מקבוצה A לקבוצה B היא <u>על</u> אם לכל איבר $b \in B$ יש איבר $a \in A$ כך ש־$f(a) = b$.

דוגמאות:

1. פונקציית הזהות $f : A \to A$ המקיימת $f(a) = a$ הינה חח"ע ועל באופן טריוויאלי: לכל $x \in A$ מתקיים $f(x) = x$ ולכן היא על, והיא חח"ע כי אם $f(x) = f(y)$ אז
$$x = f(x) = f(y) = y$$

2. הפונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(n) = n^2$ היא חח"ע אבל לא על: לאיבר 3 אין מקור. מצד שני אם $f(n) = f(m)$ אז $n^2 = m^2$ ולכן $n = \pm m$ ואנחנו עובדים רק בטבעיים, אז אין מספרים שליליים $\Leftarrow n = m$.

3. הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^2$ מהממשיים לממשיים האי־שליליים היא על אבל לא חח"ע: לדוגמא $f(\pm 1) = 1$ ולכן היא לא חח"ע. מצד שני לכל $x \geq 0$ מתקיים $f(\sqrt{x}) = x$ ולכן היא כן על.

הגדרה 1.2 תהא A קבוצה סופית. העוצמה של הקבוצה A היא מספר האיברים בה. נסמן את המספר הזה ב־ $|A|$.

למה 1.3 יהיו A, B שתי קבוצות סופיות.

א. אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע אז $|A| \leq |B|$.

ב. אם קיימת $f : A \to B$ על אז $|A| \geq |B|$.

בפרט, $|A| = |B|$ אם ורק אם קיימת העתקה חח"ע ועל $f : A \to B$.

הגדרה 1.4 קבוצה A נקראת בת מנייה אם קיימת העתקה חח"ע ועל $T:\mathbb{N}\to A$.

באופן שקול, A היא בת מנייה אם ניתן להציג את איבריה באמצעות סדרה: $A=(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

דוגמאות:

1. $A=\mathbb{N}$ אז העתקת הזהות $f(n)=n$ מראה שהיא בת־מנייה.
2. $\mathbb{Q}$ (קבוצת המספרים הרציונליים, שהם השברים $\frac{m}{n}$ כש־m,n שלמים) היא בת־מנייה.
3. אם $A=[0,1]$ אזי A איננה בת־מנייה. זוהי תוצאה מפורסמת של גיאורג קנטור, ובדרך כלל מוכיחים אותה בקורס בתורת הקבוצות. המשמעות היא שאי אפשר להרכיב רשימה ממצה של איברי $[0,1]$, כי השורה בה מופיע איבר ברשימה כזו תהווה התאמה חח"ע מהטבעיים ל־$[0,1]$, והמילה "ממצה" אומר שהעתקה זו גם תהיה על.

הגדרה 1.5 א. עבור קבוצות A,B, נסמן ב־ B^A את אוסף הפונקציות מ־A ל־B. נסמן ב־ 2^A את אוסף כל תתי הקבוצות של A. כלומר, $B\in 2^A$ אם ורק אם $B\subset A$.

ב. אם $A\subset B$ קבוצה אז הפונקציה $1_A:B\to\mathbb{R}$ היא הפונקציה שמקיימת $1_A(b)=1$ אם $b\in A$ ו $1_A(b)=0$ אם $b\notin A$. פונקציה זו מכונה ה**פונקציה המציינת** של A.

ג. נניח ש $A\subset X$. אז נסמן ב־ A^C את קבוצת כל האיברים של X שאינם נמצאים ב־A, כלומר

$$A^C=X\setminus A=\{x\in X\mid x\notin A\}$$

ד. אם X,Y קבוצות, $A\subset X$, $B\subset Y$ תתי קבוצות, ו־ $f:X\longrightarrow Y$ פונקציה כלשהי, נסמן ב־$f(A)$ את תמונת A תחת f, וב־ $f^{-1}(B)$ את התמונה ההפוכה של B תחת f:

$$\begin{aligned} f(A): &= \{f(a)\mid a\in A\}\\ f^{-1}(B) &= \{x\in X\mid f(x)\in B\}\end{aligned}$$

2 קומבינטוריקה

2.1 עקרון שובך היונים

למה 2.1 נתונים n עצמים שמחולקים ל m תאים. אם $n>m$ אז קיים תא שמכיל יותר מעצם אחד.

דוגמאות:

1. בקורס בתורת ההסתברות רשומים בדיוק 367 סטודנטים. אז ישנם לפחות שני סטודנטים בעלי אותו יום הולדת: אכן, ניקח בתור התאים שלנו את תאריכי ימי ההולדת, ובתור העצמים את הסטודנטים בקורס. היות ויש 366 תאים (כולל שנה מעוברת), נקבל את התוצאה מעיקרון שובך היונים.

2. תהא $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. נטען שלכל תת־קבוצה $B \subset A$ כך ש־$|B| = 6$ יש שני איברים $b_1, b_2 \in B$ כך ש־$b_1 + b_2 = 9$.
הוכחה: נציין את כל הזוגות שסכומם 9:

$$\{0,9\}, \{1,8\}, \{2,7\}, (3,6), \{4,5\}$$

יש חמישה זוגות כאלו. אלו הם התאים שלנו. תהא כעת $B \subset A$ בעלת 6 איברים (אלו העצמים שלנו) הרי שיש תא שמכיל יותר מעצם אחד. כלומר, ישנם שני איברים של B שנמצאים באותו התא, ומכאן התוצאה. 9. ∎

2.2 כלל המכפלה

הגדרה 2.2 יהיו $A_1, ..., A_n$ סידרת קבוצות כלשהי. אז

$$A_1 \times A_2 ... \times A_n := \{(a_1, ..., a_n) : \quad a_i \in A_i\}$$

טענה 2.3 (כלל המכפלה) יהיו $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות סופיות. <u>אזי</u>:

$$|A_1 \times \ldots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

דוגמה 1: נתונה קובייה. מבצעים את הניסוי הבא: מטילים קוביה 10 פעמים. מהו מספר התוצאות האפשריות של הניסוי?

תשובה: נסמן ב־ A את אוסף התוצאות האפשריות בהטלת קובייה:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$

לפי הגדרה, הקבוצה הבאה מתארת את אוסף התוצאות האפשריות של הניסוי שלנו:

$$\underbrace{A \times \ldots \times A}_{10\, times}$$

ומספר התוצאות הינו:

$$\underbrace{|A \times ... \times A|}_{10\, times} = |A|^{10} = 6^{10}$$

דוגמה 2: יהיו A, B קבוצות סופיות. הראו ש $|B^A| = |B|^{|A|}$.

תשובה: על סמך כלל המכפלה, מספיק להוכיח שקיימת העתקה חח"ע ועל $\phi : B^A \longrightarrow \prod_{a\in A} B$. לשם כך, תהא $f \in B^A$, כלומר $f : A \to B$ היא פונקציה. נסמן

$$A = \{a_1, ..., a_n\}$$

ונגדיר

$$\phi(f) = (f(a_1), ..., f(a_n)) \in \prod_{i=1}^{n} B = \prod_{a\in A} B.$$

בדיקה ישירה מעלה שהעתקה זו הינה חח"ע ועל. לכן, העוצמה של שתי הקבוצות זהה:

$$|B^A| = |\prod_{a\in A} B| = \prod_{a\in A} |B| = |B|^{|A|}$$

כאשר שני השיוויונות האחרונים נובעים מכלל המכפלה.

2.3 עבודה עם תמורות

למה 2.4 נתונים n עצמים שונים. כמות כל הדרכים לסדר אותם בשורה הינה

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

למה 2.5 נתונים n עצמים שונים. מספר הדרכים לבחור k איברים מתוכם ללא חזרות כשהסדר משנה הוא $\frac{n!}{(n-k)!}$

דוגמה 3: בכיתה 52 תלמידים המתחרים בתחרות ריצה עבור חמשת המקומות הראשונים. כמה אפשרויות יש לתוצאת התחרות?

תשובה: מספר המתחרים הוא 52 ומנצחים החמישה הראשונים, לכן התשובה היא $\frac{52!}{47!}$.

2.4 מקדם בינומי

הגדרה 2.6 יהיו $0 \leq k \leq n$ טבעיים. המקדם הבינומי שהם מגדירים הינו

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

למה 2.7 נתונה קבוצה בגודל n. כמות תתי הקבוצות שלה בגודל $k \leq n$ הינה בדיוק $\binom{n}{k}$.

למה 2.8 יהיו $A_1, ..., A_n$ סידרת קבוצות זרות וסופיות. אז

$$|A_1 \cup A_2 ... \cup A_n| = \sum |A_i|$$

טענה 2.9

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

הוכחה: תהא $A = \{1, ..n\}$ כלומר $|A| = n$. תהא

$$B = \{C : \quad C \subseteq A\}$$

נחשב את הגודל של B בשתי דרכים:

א. ניתן לכתוב את B בתור איחוד זר $B = B_0 \cup B_1 .... \cup B_n$ כאשר לכל $0 \leq i \leq n$ מתקיים

$$B_i = \{C \in B : \quad |C| = i\}.$$

אז

$$|B| = \sum_{i=0}^{n} |B_i| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

לפי טענה קודמת.

ב. נטען שקיימת העתקה חח"ע ועל $f : B \to \{0,1\}^A$. אכן, תהא $C \in B$ כלומר $C \subseteq A$. אז נגדיר

$$f(C) = 1_C$$

כאשר $1_C : A \to \{0,1\}$ הינה הפונקציה המציינת של C. בדיקה ישירה מעלה שזו אכן העתקה חח"ע ועל. לכן, לפי טענה שהוכחנו,

$$|B| = |\{0,1\}^A| = 2^{|A|} = 2^n$$

שילוב של שני הסעיפים למעלה נותן את הטענה. ■

הערה 2.10 הוכחה זו היא דוגמה לטיעון **קומבינטורי**. אנו מוצאים דרך להציג את השאלה כך שנוכל לספור את איברי הקבוצה שלנו בשתי דרכים שונות. בתרגיל תצטרכו למצוא עוד טיעונים כאלו.

2.5 בעיות כדורים ותאים

דוגמה 5: עבור $k \leq n$, כמה פתרונות אי שליליים שלמים יש למשוואה:

$$x_1 + ... + x_k = n$$

או באופן שקול, בכמה אופנים ניתן לחלק n כדורים (זהים) ל־k תאים שונים?ם.

טענה 2.11 מספר הפתרונות למשוואה הנ"ל הוא $\binom{n+k-1}{k-1}$.

הוכחה: נטען שמספר הפתרונות הוא כמו מספר הסידורים של n עיגולים ו־$k-1$ קווים בשורה.

מצד אחד, אם יש לנו פתרון $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ למשוואה, נכתוב לכל $1 \leq i \leq k$ x_i עיגולים בשורה ובין כל שתי קבוצות נשים קו (כאילו להפריד בין הסלים). למשל $(2,4,0,1)$ יתורגם ל־

$$00 \mid 0000 \mid\mid 0$$

מצד שני, בהינתן שורה כנ"ל נוכל לשחזר את הפתרון ע"י הגדרת x_i להיות מספר העיגולים בין הקו ה־$i-1$ לקו ה־i (אם $i=1$ אז כל העיגולים עד הקו הראשון ואם $i=k$ אז כל העיגולים מהקו האחרון ועד הסוף). מכאן שההתאמה הזו היא הפיכה ולכן חח"ע ועל.

לפיכך, עוצמת קבוצת הפתרונות שווה לעוצמת קבוצת הסידורים האלו.

מהי עוצמת קבוצת הסידורים. יש לנו שורה של $n+k-1$ סמלים. מספיק לומר איפה יבואו הקווים, כי בשאר המקומות יהיו עיגולים. יש לנו $k-1$ קווים שהסדר שלהם לא משנה, אז השאלה היא כמה תתי קבוצות בגודל $k-1$ יש לקבוצה $\{1, 2, \ldots n+k-1\}$ והתשובה היא $\binom{n+k-1}{n}$ לפי מה שכבר אמרנו ממקודם. ■

הסתברות 1 ־ תרגול 2

14 במרץ 2019

1 מרחבי הסתברות סופיים ובני מנייה

תזכורת תהא Ω קבוצה. אז 2^Ω היא אוסף כל תתי הקבוצות של Ω. נסמן מעתה $\mathcal{F} := 2^\Omega$.

הגדרה 1.1 תהא Ω קבוצה בת מנייה או סופית. פונקציה $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ תקרא פונקציית הסתברות אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

1. חיוביות: לכל $A \subseteq \Omega$ מתקיים $P(A) \geq 0$.
2. נירמול: $P(\Omega) = 1$.
3. סיגמא־אדיטיביות: תהא $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ סדרת תתי קבוצות זרות של Ω. כלומר $A_i \subseteq \Omega$ לכל i, ולכל $i \neq j$ מתקיים $A_i \cap A_j = \emptyset$. אז

$$P\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{n=1}^\infty P\left(A_i\right)$$

סימון אם Ω קבוצה בת מנייה או סופית ו $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ פונקציית הסתברות, נאמר שהשלשה $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ הוא **מרחב הסתברות**. Ω נקראת **מרחב המדגם**. אם $A \subseteq \Omega$ נאמר ש־A הוא **מאורע**.

הגדרה 1.2 יהא $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות. פונקציית ההסתברות הנקודתית שלה $p : \Omega \to [0,1]$ מוגדרת ע"י

$$p(\omega) := P(\{w\}).$$

הערה 1.3

1. שימו לב שהפונקציה P מקבלת קבוצה ומחזירה מספר בין אפס לאחד.

2. ניתן להגדיר מ"ה גם עבור אוספים קטנים יותר של $\mathcal{F}$ שנקראים סיגמא־אלגבראות, אך לא נעסוק בכך בשלב זה של הקורס.

3. מתקיים $P(\emptyset)=0$. אכן, נגדיר $\emptyset = A_1 = A_2 = A_3 = ...$. אז אלו קבוצות זרות באופן טריוויאלי, ולכן

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$$

אם $P(\emptyset) > 0$ נקבל לפיכך ש $P(\emptyset) = \infty$ בסתירה לכך ש $P(\emptyset) \in [0,1]$.

4. מתכונת האדיטיביות האינסופית (סיגמא־אדיטיביות) נובעת גם תכונת אדיטיביות סופית: אם $A_1, .., A_n$ סידרת מאורעות זרים אז

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{n=1}^{n} P\left(A_i\right)$$

אכן ־ ניקח בתור $A_{n+1} = A_{n+2}...$ את $\emptyset$. אז לפי סעיף קודם $P(\emptyset)=0$ והתוצאה נובעת מתכונת הסיגמא אדיטיביות.

5. ראינו שהפונקציה P מגדירה את הפונקציה p. בנוסף, לפי תכונת האדיטיביות הסופית, לכל $A \subseteq \Omega$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

ובפרט $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. מצד שני, כל פונקציה $q : \Omega \to [0,1]$ המקיימת

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

ניתנת להרחבה לפונקציית הסתברות P על Ω כך ש q היא פונקציית ההסתברות הנקודתית שלה, ע"י הגדרה של

$$P(A) := \sum_{\omega \in A} q(\omega)$$

דוגמאות:

1. נניח שמבצעים את הניסוי הבא: מטילים מטבע הוגן, כלומר יש הסתברות שווה שהוא נוחת על עץ ־ H ועל פלי ־ T. נבנה מרחב הסתברות שמתאים לניסוי הנ"ל. נגדיר $\Omega = \{T, H\}$. כמו כן, נגדיר $P : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}_+$ כך שלכל $A \in 2^{\Omega}$ מתקיים $P(A) = \frac{|A|}{2}$ כאשר $|A|$ מסמן את הגודל (העוצמה) של הקבוצה A. בפרט, $P(\{T\}) = \frac{1}{2} = P(\{H\})$ ־ וזה נותן את פונקציית ההסתברות הנקודתית. נבדוק שבאמת שלושת תנאי ההגדרה מתקיימים:

(א) אם $A=\emptyset$ אז $P(A)=0$ כי $|\emptyset|=0$. לכל מאורע $A\neq\emptyset$ אכן מתקיים $P(A)>0$, כי $|A|>0$.

(ב) $P(\Omega)=P(\{H,T\})=\frac{2}{2}=1$.

(ג) סיגמא אדיטיביות מתקיימת באופן טריוויאלי, כי יש רק שלוש מאורעות זרים ב2^{Ω} - $\{T\},\{H\},\emptyset$. בדיקה ישירה של כל האפשרויות מעלה שאכן מתקיימת סיגמא־אדיטיביות.

הגדרה 1.4 תהא Ω קבוצה סופית. תמיד ניתן להגדיר על Ω את פונקציית ההסתברות P המוגדרת ע"י $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$ כאשר A מאורע, ו־$|A|$ מסמן את מספר האיברים של A. אנו משאירים כתרגיל את הבדיקה שזו אכן פונקציית הסתברות. למרחב ההסתברות שנקבל באופן הזה (Ω,P) קוראים **מרחב הסתברות אחיד**, ול־P קוראים **פונקציית הסתברות אחידה**.

הערה 1.5 במרחב הסתברות אחידה, פונקציית ההסתברות הנקודתית לא תלויה ב $\omega\in\Omega$, כלומר לכל ω כנ"ל

$$p(\omega)=P(\{\omega\})=\frac{|\{\omega\}|}{|\Omega|}=\frac{1}{|\Omega|}$$

למה 1.6 יהא (Ω,P) מ"ה. יהא $A\in 2^{\Omega}$ מאורע. אז

$$P(A)=1-P(A^C)$$

כאשר נזכיר ש $A^C=\Omega\setminus A=\{x\in\Omega : x\notin A\}$.

הוכחה: על סמך תכונת הנירמול, ולפי האדיטיביות הסופית של P מתקיים

$$1=P(\Omega)=P(A\bigcup A^C)=P(A)+P(A^C).$$

■

2. נניח שמבצעים את הניסוי הבא: זורקים מטבע הוגן שלוש פעמים. נבנה מרחב הסתברות שמתאים לניסוי הנ"ל. נגדיר

$$\Omega=\{H,T\}^3=\{HHH,HHT,HTH,HTT,TTT,TTH,THH,THT\}.$$

כלל המכפלה מעלה ש $|\Omega|=2^3=8$ ועל כן נוכל להגדיר על Ω את ההסתברות האחידה $P(A)=\frac{|A|}{8}$.

(א) מה ההסתברות שיצא עץ פעמיים?
המאורע שיצא עץ פעמיים הוא $A=\{HHT,THH,HTH\}$ ועל כן $P(A)=\frac{|A|}{8}=\frac{3}{8}$.

(ב) מה ההסתברות שיצא עץ לפחות פעמיים?
המאורע המדובר הוא $B=\{HHT,THH,HTH,HHH\}$ ועל כן $P(B)=\frac{|B|}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

3. מטילים קובייה 30 פעמים. חשבו את ההסתברות שהפעם הראשונה שקיבלנו את הספרה 6 הייתה לאחר לא יותר מעשר זריקות?

פתרון:נגדיר מרחב הסתברות: כל רצף של 30 הטלות ייוצג במרחב המדגם כרצף באורך 30 של ספרות בין 1 ל־6. מרחב המדגם יהיה כל הרצפים האפשריים:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^{30}$$

P תהיה פונקציית הסתברות אחידה. נגדיר את A להיות המאורע בו הספרה 6 מתקבלת בעשר ההטלות הראשונות:

$$A = \{(x_1,...,x_{30}) \in \Omega : \ \exists 1 \leq i \leq 10 \, \text{such that} \; x_i = 6\}$$

עלינו לחשב את $P(A)$. מתכונות פונקציית ההסתברות (נרמול ואדיטיביות), אנו יודעים ש־

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

לכן נוכל לחשב את $P(A^c)$ במקום.

מכלל המכפלה מתקיים $|\Omega| = 6^{30}$. עבור $|A^c|$ - נשים לב שהרצפים שלא נמצאים ב־A הם בדיוק כל הרצפים בהם **לא** מופיעה הספרה 6 ב־10 המקומות הראשונים:

$$A^c = \{(x_1,...,x_{20}) \in \Omega : \ \forall 1 \leq i \leq 10, \, x_i \in \{1,2,3,4,5\}\}$$

או במילים אחרות:

$$A^c = \underbrace{\{1,...,5\} \times ... \times \{1,...,5\}}_{10\,times} \times \underbrace{\{1,...,6\} \times ... \times \{1,...,6\}}_{20\,times}$$

ולכן $|A^c| = 5^{10} \cdot 6^{20}$. כעת התוצאה היא:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

4. 8 בנים ו־8 בנות עומדים בשורה לפי סדר כלשהו. בהנחה שלכל סדר יש הסתברות אחידה, מה ההסתברות שיעמדו כך ש־8 הבנים יעמדו ב־8 המקומות הימניים, ו־8 הבנות יעמדו ב־8 המקומות השמאליים?

פתרון: ראשית נתאר את מרחב ההסתברות. מרחב המדגם Ω יהיה כל הדרכים של 16 אנשים אלו לעמוד בשורה. אם A הוא המאורע "8 הבנים עומדים ב־8 המקומות הימניים, ו־8 הבנות עומדות ב־8 המקומות השמאליים", עלינו לחשב את $P(A)$. אנו מניחים ש־ P היא פונקציית הסתברות אחידה, לפי הנתון, ולכן מתקיים $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. ולכן עלינו למצוא את $|\Omega|$ ואת $|A|$:

- אנו יודעים ש־$|\Omega| = 16!$.
- גודלה של A הוא מספר הדרכים להושיב את שמונת הבנים במקומות הראשונים מימין ($8!$), כאשר לכל מקרה כזה יש להושיב את שמונה הבנות במקומות הנותרים ($8!$ לכל אפשרות הושבה של הבנים). נקבל, $|A| = 8! \cdot 8!$, ולכן התשובה היא

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8! \cdot 8!}{16!}$$

5. ניתן דוגמא למרחב הסתברות המוגדר על קבוצה אינסופית.

(א) יהא $\Omega = \mathbb{N}$. נגדיר את $P : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$ באופן הבא

$$P(A) = \sum_{n \in A} 2^{-n}$$

ולכן פונקציית ההסתברות הנקודתית מקיימת

$$p(n) = P(\{n\}) = 2^{-n}$$

- מתקבל מיד ש־$P(A) \geq 0$ לכל $A \subseteq \mathbb{N} = \Omega$.
- נבדוק נרמול: הסתברות כל המרחב היא אכן 1:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \\ &= \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \end{aligned}$$

כשהשתמשנו בנוסחה של סכום טור הנדסי $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$.
נעיר שעכשיו ההסתברות של כל מאורע $A \subseteq \Omega$ היא טור חלקי לטור ההנדסי הנ"ל, שמתכנס, ממבחן ההשוואה לטורים חיוביים (חזרה לאינפי 2).

- אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ מאורעות זרים בזוגות אז

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \sum_{n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} 2^{-n} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \in A_i} 2^{-i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \end{aligned}$$

כשהשתמשנו בכך שאנו סוכמים על מספרים אי שליליים, אז אם הטור מתכנס (והערנו כבר שהוא מתכנס) הוא מתכנס בהחלט, וסדר הסכימה לא משנה ־ המעבר לשורה השנייה הוא שינוי סדר סכימה ומיקומי סוגריים.

- נחשב את ההסתברות של קבוצת המספרים הזוגיים. $A=\{2n \mid n\in\mathbb{N}\}$,

$$\begin{aligned}P\left(A\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}2^{-2n}=\sum_{n=1}^{\infty}4^{-n}\\ &= \frac{1/4}{1-1/4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

2 אי־שוויוניים

למה 2.1 יהא $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מ"ה. אם $A\subseteq B$ אז $P(A)\leq P(B)$.

הוכחה: נרשום

$$B=A\bigcup[B\setminus A]$$

כאשר מדובר באיחוד זר. לפיכך

$$P(B)=P(A)+P(B\setminus A)\geq P(A)$$

שכן הסתברות של מאורע מהווה גודל אי שלילי. ■

טענה 2.2 (אי שוויון בול) יהא (Ω,P) מ"ה. אז לכל סידרת מאורעות $A_1,A_2,\ldots$ מתקיים

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

הוכחה: נגדיר סידרת מאורעות חדשים

$$B_i=A_i\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j$$

אז מתקיים:

א. המאורעות $\{B_i\}$ זרים בזוגות.

ב. מתקיים $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$.

ג. לכל i מתקיים $B_i\subseteq A_i$.

לפיכך

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

כנדרש. ■

הסתברות 1 – תרגול 3

21 במרץ 2019

1 נוסחת ההכלה וההדחה

טענה יהא $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסתברות. יהיו A,B שני מאורעות, אז

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

עבור קבוצה של N מאורעות $\{A_i\}_{i=1}^N$ נקבל

$$P(\bigcup_{i=1}^{N}A_i)=\sum_{1\leq i\leq N}P(A_i)-\sum_{1\leq i<j\leq N}P(A_i\cap A_j)+...+(-1)^{n+1}P(\bigcap_{i=1}^{N}A_i)$$

$$=\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\sum_{I\subset\{1,..,N\},|I|=k}P(\bigcap_{j\in I}A_j).$$

דוגמא 1 מבצעים את הניסוי הבא: בוחרים מספר דו ספרתי בהסתברות אחידה מתוך המספרים $\{00,01,02,...,99\}$. מה ההסתברות שקיבלנו מספר x עם ספרת אחדות 9 או ספרת עשרות 9?

נתחיל מלבנות מרחב הסתברות מתאים. ניקח את $\Omega=\{00,...,99\}$ ונייצד אותו בפונקציית ההסתברות האחידה P (כלומר לכל מאורע A, $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$). יהא A המאורע "יצא מספר עם ספרת עשרות 9" ויהא B המאורע "יצא מספר עם ספרות אחדות 9". נבחין שמאורע המבוקש הוא $A\cup B$. נבחין גם שמתקיים

$$A=\{90,91,...,99\}$$

ולכן $|A|=10$ ומכאן $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=0.1$. באופן דומה,

$$B=\{09,19,..,99\}$$

ולכן $P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=0.1$.

כעת, נבחין ש

$$A\cap B=\{99\}$$

ולכן $P(A\cap B)=\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}=0.01$.

לפיכך, לפי נוסחת ההכלה וההדחה,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{20}{100} - \frac{1}{100} = \frac{19}{100}.$$

דוגמא 2 בכד 11 כדורים ממסופרים. הכדורים הממוספרים בין 1 ל 6 הינם לבנים. הכדורים האחרים שחורים. מוציאים שני כדורים מהכד בזה אחר זה. מה ההסתברות שהוצאנו כדור אחד שחור וכדור אחד לבן?

נתחיל שוב מלבנות מרחב הסתברות מתאים. יהא

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_i \in \{1, ..., 11\}, x_1 \neq x_2\}$$

(כאשר אנחנו מזהים בין הכדור לבין המספר שכתוב עליו). לפי הנוסחא שלמדנו בתרגול הראשון (בחירה של תת קבוצה מגודל 2 מתוך קבוצה בגודל 11 עם חשיבות לסדר),

$$|\Omega| = 11 \cdot 10$$

תהא P פונקציית ההסתברות האחידה על Ω כך ש (Ω, P) הוא מ"ה אחידה.

יהא A המאורע "הוצאנו כדור לבן". נחשב את ההסתברות של A. נבחין ש

$$A = \{(x_1, x_2) \in \Omega : \exists i, x_i \in \{1, .., 6\}\}$$

ולכן

$$A^C = \{(x_1, x_2) \in \Omega : \forall i, x_i \notin \{1, .., 6\}\} = \{(x_1, x_2) \in \Omega : \forall i, x_i \in \{7, .., 11\}\}$$

ומכאן על סמך הנוסחא שהזכרנו, $|A^C| = 5 \cdot 4$ ולפיכך $P(A^C) = \frac{|A^C|}{|\Omega|} = \frac{20}{110}$. לבסוף,

$$P(A) = 1 - P(A^C) = \frac{90}{110}$$

יהא B המאורע "הוצאנו כדור שחור". אז, בדומה לחישוב הקודם,

$$B^C = \{(x_1, x_2) \in \Omega : \forall i, x_i \notin \{7, .., 11\}\} = \{(x_1, x_2) \in \Omega : \forall i, x_i \in \{1, .., 6\}\}$$

ולכן $|B^C| = 6 \cdot 5$ כלומר $P(B^C) = \frac{30}{110}$ ולכן

$$P(B) = 1 - P(B^C) = \frac{80}{110}$$

נבחין גם ש $A \cup B = \Omega$, מכיוון שבכד יש רק כדורים שחורים ולבנים, ולכן בטוח שלפנו אחד מהם. מכאן, לפי נוסחת ההכלה וההדחה

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ולכן

$$P(A \cap B) = -1 + P(A) + P(B) = \frac{-110 + 90 + 80}{110} = \frac{60}{110}$$

היות והמאורע $A \cap B$ הינו המאורע "יצא לנו גם כדור שחור וגם כדור לבן", סיימנו.

2 נוסחא עבור התרחשות של בדיוק או לפחות כמות מסויימת של מאורעות מתוך רשימה נתונה

טענה 2.1 יהא $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מ"ה, ויהיו $A_1, .., A_N$ מאורעות. נסמן ב $p_{[m]}$ את ההסתברות שיתרחשו בדיוק $m \leq N$ מאורעות מתוך $A_1, ..., A_N$. אז

$$p_{[m]} = S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + \binom{m+2}{m} S_{m+2} - ... + (-1)^{N-m} \binom{N}{m} S_N$$

עבור

$$S_k = \sum_{1 \leq l_1 < ... < l_k \leq N} P(A_{l_1} \cap .. \cap A_{l_k})$$

דוגמא 3 בחבילת קלפים נתונה ישנם 52 קלפים, המחולקים ל 4 סריות, באופן הסטנדרטי. מחלקים 13 קלפים מהחבילה באופן מקרי. יהא A_i המאורע "קיבלנו 4 קלפים מסוג i" כאשר המוסכמה היא ש $i = 1$ מייצג אס.

שאלה מה ההסתברות שקיבלנו רביעייה של אסים?

נתחיל מלבנות מ"ה שמתאים לבעיה. יהא Ω אוסף כל הדרכים לבחור 13 קלפים מתוך החבילה שלנו. אז

$$|\Omega| = \binom{52}{13}$$

נצייד את Ω בהסתברות אחידה. ניגש כעת לשאלה שנשאלנו עליה. יהא A_1 המאורע "קיבלנו רביעיית אסים". אז

$$|A_1| = \binom{48}{9}$$

שכן יש 9 אפשרויות לקלפים הנוספים שקיבלנו מלבד האסים, וכן פסלנו 4 קלפים. בסה"כ

$$P(A_1) = \frac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}}$$

שאלה מה ההסתברות של המאורע A_i עבור i שונה?

בוודאי שזה לא משנה איזה קלף בחרנו. לפיכך נקבל

$$P(A_i) = \frac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}}$$

לכל $i = 1, .., 13$.

שאלה מה ההסתברות של המאורע $A_i \cap A_j$ לאילו $1 \leq i \neq j \leq 13$?

במקרה הזה, הגדרנו מראש 8 קלפים מתוך ה13 שחילקנו. לכן נשארו לנו 5 קלפים נוספים לחלק, מתוך 44 קלפים מותרים. מכאן

$$|A_i \cap A_j| = \binom{44}{5}$$

ולפיכך

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{\binom{44}{5}}{\binom{52}{13}}$$

שאלה מה ההסתברות של המאורע $A_i \cap A_j \cap A_k$ לאילו $1 \leq i < j < k \leq 13$?

במקרה הזה, הגדרנו מראש 12 קלפים מתוך ה13 שחילקנו. לכן נשארו לנו קלף בודד נוסף לחלק, מתוך 40 קלפים מותרים. מכאן

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{40}{1}$$

ולפיכך

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{\binom{40}{1}}{\binom{52}{13}}$$

שאלה נתבונן ברשימת המאורעות $A_1, ..., A_3$. חשבו את ההסתברות $p_{[i]}$, שהתרחשו בדיוק i מהם, לכל $1 \leq i \leq 13$.

נתחיל מהמקרים הטריוויאלים: היות ומקבלים רק 13 קלפים, אי אפשר לקבל יותר מ 3 רביעיות. מכאן, $p_{[i]} = 0$ לכל $i \geq 4$.

נטפל כעת בשאר המקרים. לשם כך, נעזר בנוסחא שהוכחתם בכיתה, שהוזכרה בתחילת הסעיף. נזכיר ש

$$S_k = \sum_{1 \leq l_1 < ... < l_k \leq N} P(A_{l_1} \cap .. \cap A_{l_k})$$

אם כן

$$S_1 = \sum_{i=1}^{13} P(A_i) = 13 \cdot \frac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}}$$

$$S_2 = \sum_{1 \leq l_1 < l_2 \leq N} P(A_{l_1} \cap A_{l_2}) = \binom{13}{2} \cdot \frac{\binom{44}{5}}{\binom{52}{13}}$$

$$S_3 = \sum_{1\le l_1<l_2<l_3\le N} P(A_{l_1}\cap A_{l_2}\cap A_{l_3}) = \binom{13}{3}\cdot\frac{\binom{40}{1}}{\binom{52}{13}}$$

ומהצבה בנוסחא

$$p_m = S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + \binom{m+2}{m} S_{m+2} - ... + (-1)^{N-m}\binom{N}{m} S_N$$

נקבל

$$p_{[1]} = 13\cdot\frac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} - 2\cdot\binom{13}{2}\cdot\frac{\binom{44}{5}}{\binom{52}{13}} + 3\cdot\binom{13}{2}\cdot\frac{\binom{44}{5}}{\binom{52}{13}}$$

$$p_{[2]} = \binom{13}{2}\cdot\frac{\binom{44}{5}}{\binom{52}{13}} - 3\cdot\binom{13}{2}\cdot\frac{\binom{44}{5}}{\binom{52}{13}}$$

$$p_{[3]} = \binom{13}{3}\cdot\frac{\binom{40}{1}}{\binom{52}{13}}$$

טענה 2.2 יהא $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מ"ה, ויהיו $A_1,..,A_N$ סידרת מאורעות. תהא P_m ההסתברות שלפחות m מאורעות מתוך מהמאורעות הנ"ל יתקיימו. אז

$$P_m = p_{[m]} + p_{[m+1]} + ... + p_{[N]}$$

ובמונחים של הגדלים S_k שהוגדרו בטענה הקודמת,

$$S_m - \binom{m}{m-1} S_{m+1} + \binom{m+1}{m-1} S_{m+2} - ... + \pm\binom{N-1}{m-1} S_N$$

3 הסתברות מותנית

תזכורת יהא $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסתברות. יהיו A,B שני מאורעות כך ש $P(A)>0$ אז

$$P(B\mid A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

היא ההסתברות של המאורע B, בהינתן שידוע לנו ש־A קרה.

דוגמא 3 מטילים מטבע הוגן פעמיים. חשבו את ההסתברות שקיבלנו פעמיים ראש, בהנתן ש: (א) בהטלה הראשונה קיבלנו ראש (ב) לפחות בהטלה אחת קיבלנו ראש?

נתחיל מלבנות מרחב הסתברות שמתאר את השאלה. יהא

$$\Omega = \{H, T\}^2 = \{HH, HT, TH, TT\}$$

, ונניח ש $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות אחידה. נסמן ב $B = \{HH\}$ המאורע שיצאו שני ראשים, ב $F = \{HH, HT\}$ המאורע שיצא ראש ראשון, ו $A = \{HH, HT, TH\}$ המאורע שיצא לפחות ראש אחד. אז ההסתברות עליה אנחנו נשאלים ב (א) היא

$$P(B|F) = \frac{P(F \cap B)}{P(F)} = \frac{P(\{H, H\})}{P(\{HH, HT\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

עבור (ב) נקבל

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{H, H\})}{P(\{H, H\}, \{H, T\}, \{T, H\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

כך שקיבלנו, באופן מעט מפתיע אולי, שההסתברות שיצא פעמיים ראש בהנתן שיצא ראש בפעם הראשונה גדולה מההסתברות שיצא פעמיים ראש בהנתן שיצא לפחות ראש אחד.

דוגמא 4 זורקים שתי קוביות הוגנות שונות. נתון שסכום התוצאות שהתקבלו גדול מ 10. מה ההסתברות שבקובייה הראשונה יצא מספר שגדול מ 5?

ובכן, ניקח את $\Omega = \{1, 2, .., 6\}^2$ ונצייד אותו בפונקציית ההסתברות האחידה. נסמן ב A את המאורע שסכום התוצאות שהתקבלו גדול מ 10. נסמן ב B את המאורע שבקובייה הראשונה יצא מספר שגדול מ 5. אז

$$A = \{(6, 6), (5, 6), (6, 5)\}$$

$B = \{(6, i) : 1 \le i \le 6\}$ וכן $A \cap B = \{(6, 6), (6, 5)\}$. לכן,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega}} = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{2}{3}$$

4 חוק ההסתברות השלמה

חוק ההסתברות השלמה: נניח כי $\Omega = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, כשה־$(A_n)$ זרות זו לזו ומתקיים $P(A_j) > 0$ לכל j. אז לכל מאורע B מתקיים

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j) \cdot P(A_j)$$

הוכחה

$$\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j) \cdot P(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(B \cap A_j)}{P(A_j)} \cdot P(A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(B \cap A_j) = P(\bigcup_{j=1}^{n} B \cap A_j)$$

$$= P(B \cap (\bigcup_{j=1}^{n} A_j)) = P(B \cap \Omega) = P(B)$$

כאשר בשוויון השלישי נעזרנו בכך שהמאורעות $\{B \cap A_j\}_{j=1}^{n}$ זרים, ובמעבר הלפני אחרון נעזרנו בנתון ש$\Omega =$ $.A_1 \cup \cdots \cup A_n$

דוגמא 5 6 ילדים משחקים כדורגל בשכונה, וצריכים להחליט מי מהם יהיה שוער. יהושע (ילד שאיננו מעורב במשחק) מציע את הדרך הבאה להחליט מי יהיה שוער: יהושע יקח שישה גפרורים זהים, וישבור לאחד מהם את החלק האחורי. לאחר מכן, בזה אחר זה, הילדים ישלפו גפרורים ללא החזרה מתוך ידו של יהושע (כך שהם לא יכולים לדעת האם החלק התחתון של הגפרור שבור או לא). הילד שישלוף את הגפרור השבור יהיה שוער. האם זוהי דרך הוגנת לבחור שוער?

על השאלה הזו נענה מבלי לבנות מרחב מדגם מפורש. נסמן את הילדים לפי המיקום שלהם בשליפה (ילד 1, ילד 2 וכן הלאה). נחשב, לכל ילד i, את ההסתברות של המאורע A_i שהוא יהיה שוער. ובכן,

$$P(A_1) = \frac{1}{6}$$

שכן לילד הראשון יש בחירה של גפרור שבור 1 מתוך 6 גפרורים. כעת, $\Omega = A_1 \cup A_1^C$ ולכן לפי חוק ההסתברות השלמה

$$P(A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|A_1^C)P(A_1^C)$$

מכיוון ש $P(A_2|A_1) = 0$ (לא ייתכן שהילד השני ייבחר אם הילד הראשון כבר נבחר), נקבל שהיות ו $P(A_1^C) = \frac{5}{6}$ וכן $P(A_2|A_1^C) = \frac{1}{5}$ (כי הילד השני בוחר גפרור אחד מתוך החמישה שנותרו),

$$P(A_2) = P(A_2|A_1^C)P(A_1^C) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

באופן דומה, עבור הילד השלישי נבחין ש $\Omega = (A_1 \cup A_2) \cup (A_1 \cup A_2)^C$. לכן

$$P(A_3) = P(A_3|(A_1 \cup A_2)P(A_1 \cup A_2) + P(A_3|(A_1 \cup A_2)^C)P((A_1 \cup A_2)^C)$$

כעת. המאורע $A_1 \cup A_2$ משמעותו שהילד הראשון נבחר או שהילד השני נבחר. לכן $P(A_3|A_1 \cup A_2) = 0$. בנוסף, לפי כלל ההכלה וההדרה,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{3}$$

ולכן $P((A_1 \cup A_2)^C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. לבסוף,

$$P(A_3|(A_1 \cup A_2)^C) = \frac{1}{4}$$

כי לילד השלישי נותרו 4 גפרורים לבחור מתוכם. לכן,

$$P(A_3) = P(A_3|(A_1 \cup A_2)^C)P((A_1 \cup A_2)^C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

באופן דומה, רואים שלכל i, $P(A_i) = \frac{1}{6}$ ולכן זו אכן דרך הוגנת לבחור שוער.

הסתברות 1 – תרגול 4

28 במרץ 2019

1 חוק ההסתברות השלמה

חוק ההסתברות השלמה: נניח כי $\Omega = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, כשה־$(A_n)$ זרות זו לזו ומתקיים $P(A_j) > 0$ לכל j. אז לכל מאורע B מתקיים

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j) \cdot P(A_j)$$

הוכחה

$$\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j) \cdot P(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(B \cap A_j)}{P(A_j)} \cdot P(A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(B \cap A_j) = P(\bigcup_{j=1}^{n} B \cap A_j)$$

$$= P(B \cap (\bigcup_{j=1}^{n} A_j)) = P(B \cap \Omega) = P(B)$$

כאשר בשוויון השלישי נעזרנו בכך שהמאורעות $\{B \cap A_j\}_{j=1}^{n}$ זרים, ובמעבר הלפני אחרון נעזרנו בנתון ש$\Omega = A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

.

דוגמא נתונים 3 יצרנים של מחשבים ־ מחשבים מסוג 1, סוג 2, סוג 3. אחוז המחשבים מסוג 1 בשוק הוא 50%, אחוז המחשבים מסוג 2 בשוק הוא 30%, אחוז המחשבים מסוג 3 הוא 20%. ידוע שמחשב מסוג 1 יתקלקל בשנה הראשונה בהסתברות $\frac{1}{10}$, שמחשב מסוג 2 יתקלקל בשנה הראשונה בהסתברות $\frac{1}{5}$, שמחשב מסוג 3 יתקלקל בשנה הראשונה בהסתברות $\frac{15}{100}$.אם מחשב נקנה באופן אקראי, מה ההסתברות שיתקלקל בשנה ראשונה?

נסמן ב־C_j את המאורע "קיבלנו המחשב מסוג j", וב־B המאורע "המחשב יתקלקל בשנה ראשונה". הנתונים הם:

$$P(C_1) = 0.5,\ P(C_2) = 0.3,\ P(C_3) = 0.2$$

$$P(B \mid C_1) = 0.1,\ P(B \mid C_2) = 0.2,\ P(B \mid C_3) = 0.15$$

המאורעות C_1, C_2, C_3 זרים, ואיחודם מכסה את מרחב המדגם. מכלל ההסתברות השלמה:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{3} P(B \mid C_j)P(C_j) = 0.5 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.15 = 0.14$$

דוגמא בדיקת פוליגרף משטרתית מגלה שקרן בהסתברות 0.8 ומגלה שאדם דובר אמת בהסתברות 0.9. ידוע שבהסתברות 0.7 הנבדק משקר. נרצה לחשב מה ההסתברות שאדם יוכרז כ "דובר אמת" במכונה.

נסמן ב A את המאורע שהאדם דובר אמת, ב B את המאורע שהוא דובר שקר, ב A' את המאורע שהאדם הוכרז כדובר אמת וב B' את המאורע שהאדם הוכרז כדובר שקר. לפי נוסחת ההסתברות השלמה, היות והאדם הוא דובר אמת או דובר שקר (כלומר $\Omega = A \cup B$),

$$P(A') = P(A'|A)P(A) + P(A'|B)P(B).$$

ידוע ש $P(B'|B) = 0.8$ וכן ש $P(A'|A) = 0.9$. מכיוון ש $P(B'|B) + P(A'|B) = 1$ (מדוע זה נכון?) אז $P(A'|B) = 0.2$. לבסוף, ידוע ש $P(B) = 0.7$ ולכן $P(A) = 0.3$. לכן,

$$P(A') = P(A'|A)P(A) + P(A'|B)P(B) = 0.9 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.41$$

2 חוק בייס

חוק בייס: יהא $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות. אם עבור שני מאורעות $P(A), P(B) > 0$, אז

$$P(B \mid A) \cdot P(A) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

הוכחה מושארת כתרגיל.

דוגמא 8 במבחן אמריקאי לכל שאלה יש ארבע תשובות אפשריות. סטודנט פותר מבחן אמריקאי. כאשר הוא נתקל בשאלה עליה הוא לא יודע את התשובה, הוא בוחר תשובה באופן מקרי (כלומר בהסתברות אחידה). נניח שהסטודנט יודע 60% מהחומר. נסמן ב־B את המאורע שהסטודנט יודע לענות על השאלה הראשונה (כלומר יודע את החומר הרלוונטי), וב־A את המאורע שהסטודנט ענה נכון על השאלה הראשונה. אז לפי הנתון $P(B) = 0.6$ וכן $P(A|B) = 1$, $P(A|B^C) = \frac{1}{4}$. מכאן ההסתברות של המאורע A היא, לפי נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^C)P(B^C) = 1 \cdot 0.6 + \frac{1}{4} \cdot 0.4 = 0.7.$$

נניח כעת שהסטודנט ענה נכון על השאלה הראשונה. ההסתברות שהוא אכן ידע את התשובה לשאלה היא, לפי חוק בייס,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{6}{7}.$$

דוגמא 9 חברת ביטוח מאמינה שניתן לחלק את בני האדם לשני סוגים: מועדים לתאונות ושאינם מועדים לתאונות. על פי הנתונים שלה, אדם המועד לתאונה יעשה תאונה בשנה נתונה בהסתברות 0.4 ואילו אדם שאיננו מועד לתאונה יעשה תאונה בהסתברות 0.2. נתון ש 0.3 מבני האדם מועדים לתאונות. אדם רוכש ביטוח מהחברה. בהנתן שהאדם ביצע תאונה בשנה הראשונה, מה ההסתברות שהוא היה מועד לתאונה? .

נחשב ראשית את ההסתברות שהאדם יעשה תאונה בשנה הראשונה. יהא A_1 המאורע "האדם עשה תאונה בשנה הראשונה". יהא A המאורע "האדם מועד לתאונה". אז לפי נוסחת ההסתברות השלמה, ועל סמך הנתון

$$P(A_1) = P(A_1|A)P(A) + P(A_1|A^C)P(A^C) = 0.4 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.26$$

נניח כעת שהאדם עשה תאונה בשנה הראשונה, ונחשב את ההסתברות שהוא היה מועד לתאונה:

$$P(A|A_1) = \frac{P(A) \cdot P(A_1|A)}{P(A_1)} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.26} = \frac{6}{13}$$

כאשר נעזרנו בחוק בייס.

3 נוסחת בייס המותנית

טענה יהא (Ω, P) מ"ה. יהיו A, B, C מאורעות כך ש $P(B \cap C) > 0$ וכן $P(A \cap C) > 0$. אז

$$P(A|B \cap C) = P(B|A \cap C) \cdot \frac{P(A|C)}{P(B|C)}$$

הוכחה נפתח סוגריים:

$$P(B|A\cap C) \cdot \frac{P(A|C)}{P(B|C)} = \frac{P(B \cap A \cap C)}{P(A \cap C)} \cdot \frac{P(A|C)}{P(B|C)} = \frac{P(B \cap A \cap C)}{P(A \cap C)} \cdot \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \frac{P(C)}{P(B \cap C)}$$

$$= \frac{P(B \cap A \cap C)}{P(B \cap C)} = P(A|B \cap C)$$

נבחין שביצענו התנייה על המאורע C. למה זה מוגדר היטב?

4 אי תלות

הגדרה יהא $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות. שני מאורעות A, B הם בלתי תלויים (נכתוב בדרך כלל ב"ת) אם מתקיים

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

הערה חשובה אי תלות של מאורעות לא גוררת שהם זרים! בתרגיל תדונו עוד ביחסים בין שתי ההגדרות הנ"ל.

דוגמא 1 שולפים קלף באופן מקרי מתוך חפיסת קלפים בת 52 קלפים. יהא E המאורע "קיבלנו אס" ויהא F המאורע "קיבלנו לב". האם אלו מאורעות ב"ת?

יהא (Ω, P) מ"ה האחידה שברקע (כאשר נבחר את Ω להיות חפיסת הקלפים, ולכן $|\Omega| = 52$). מכיוון שיש בחבילה 4 קלפים מסוג אס, אז $|E| = 4$ ולכן $P(E) = \frac{4}{52}$. בדומה, בחפיסה יש 13 קלפים מסוג לב ולכן $P(F) = \frac{13}{52}$. מצד שני, המאורע "קיבלנו אס מסוג לב" שווה בדיוק למאורע $E \cap F$ וזהו מאורע מעוצמה 1 ולכן $P(E \cap F) = \frac{1}{52}$. קיבלנו

$$P(F) \cdot P(E) = \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{52} = P(F \cap E)$$

ולכן המאורעות F ו E הינם ב"ת.

דוגמא 2 בכד נמצאים 3 מטבעות - שניים מהם הוגנים, ואילו על השלישי מסומן H (כלומר "עץ") על שני הצדדים. נניח שבוחרים מטבע אחד באופו מקרי ומטילים אותו פעמיים. נסמן את המאורע $A_i, i = 1, 2$ להיות המאורע שבו יצא בהטלה ה-i "עץ". האם המאורעות הנ"ל הם ב"ת?

יהא (Ω, P) מ"ה ברקע (שאנחנו לא מפרטים מה המבנה המדוייק שלו). כדי לענות על השאלה הזאת, נחשב את שני הביטויים בהגדרה בנפרד ונבדוק האם הם שווים. נסמן ב D את המאורע ששלפנו מטבע הוגן מהכד. לפי הנתון $P(D) = \frac{2}{3}$. כמו כן,

$$P(A_1|D) = \frac{1}{2}, P(A_1|D^C) = 1.$$

לפי נוסחת ההסתברות השלמה,

$$P(A_1) = P(A_1|D)P(D) + P(A_1|D^C)P(D^C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

קל לראות שנקבל בדיוק מאותו החישוב ש $P(A_2) = \frac{2}{3}$. מצד שני,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2|D)P(D) + P(A_1 \cap A_2|D^C)P(D^C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

אבל $P(A_1) \cdot P(A_2) = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$. לכן, המאורעות הנ"ל **אינם** בלתי תלויים.

דוגמא 3 מטילים שתי קוביות הוגנות. יהא E_1 המאורע "סכום הקוביות יצא 6", ויהא E_2 המאורע "סכום הקוביות יצא 7". יהא F המאורע "הקובייה הראשונה יצאה 4". האם המאורעות E_1 ו F ב"ת? האם המאורעות E_2 ו F ב"ת?

יהא $(\{1,..,6\}^2, P)$ מ"ה אחידה המתאים לשאלה. נתחיל מלבדוק את אי התלות של המאורעות E_1 ו F. אם כן,

$$F = \{(4,i) : 1 \le i \le 6\} \quad E_1 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$$

ע"י ספירה ישירה, רואים ש $|F| = 6$ ולכן $P(F) = \frac{6}{36}$ וכן ש $P(E_1) = \frac{5}{36}$ כי $|E_1| = 5$. כמו כן

$$E \cap F = \{(4,2)\}$$

ומכאן $P(E \cap F) = \frac{1}{36}$. מצד שני,

$$P(E_1)P(F) = \frac{5}{36}\frac{1}{36} = \frac{5}{216} \neq \frac{1}{36}$$

ולכן המאורעות אינם ב"ת.

מצד שני,

$$E_2 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(1,6)\}$$

ולכן $|E_2| = 6$ ומכאן $P(E_2) = \frac{1}{6}$. כמו כן

$$E_2 \cap F = \{(4,3)\}$$

ולכן $P(E_2 \cap F) = \frac{1}{36}$. מכאן,

$$P(E_2) \cdot P(F) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(E_2 \cap F)$$

ולכן המאורעות E_2 ו F הינם ב"ת.

טענה יהא (Ω, P) מ"ה. יהיו A_1, A_2 שתי מאורעות ב"ת. אז A_1^C ו־ A_2^C הינם ב"ת.

הוכחה

$$P(A_1^C \cap A_2^C) = P((A_1 \cup A_2)^C) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2))$$

$$= 1 - P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 1 - P(A_1) + P(A_2)(1 - P(A_1)$$

$$= (1 - P(A_1))(1 - P(A_2) = P(A_1^C)P(A_2^C)$$

הצדיקו את המעברים!

דוגמא 4 לזוג שני ילדים. מין כל ילד הוא זכר או נקבה, בהסתברות שווה. לכל אחד מהילדים הסתברות שווה להוולד בכל אחד מימות השבוע. ידוע שמין הילד והיום בשבוע בו הוא נולד הם ב"ת. בנוסף, הימים שבהם הילדים השונים נולדו והמינים שלהם הם ב"ת (כלומר המאורעות "הילד הראשון הוא בן" ו"הילד השני הוא בת" הם ב"ת). בהנתן שאחד

הילדים הוא בן שנולד ביום שלישי, מה ההסתברות שהילד האחר הוא בת (כלומר, יש לזוג ילד וילדה)?

נכיל סדר על שני הילדים לפי סדר הלידה (כלומר לפי מי הילד הבכור). כך נקבל מרחב מדגם $\Omega = \{1,..,7\} \times \{b,g\} \times \{1,..,7\} \times \{b,g\}$ עם הסתברות אחידה, כך ש $|\Omega| = 196$ לפי כלל המכפלה. למשל, המאורע "הבת הבכורה נולדה ביום שני והבן שנולד אחריה נולד ביום שבת" הינו בדיוק היחידון

$$\{(2,g,7,b)\}$$

יהא A המאורע אחד הילדים הוא בן שנולד ביום שלישי. כלומר,

$$A = \{\omega = (\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) \in \Omega : \quad (\omega_1,\omega_2) = (3,b) \quad \text{or} \quad (\omega_3,\omega_4) = (3,b)\}$$

נחשב את $|A|$. נגדיר $A = A_1 \cup A_2$ כאשר המאורע A_i הוא המאורע הילד ה־i הוא בן שנולד ביום שלישי, למשל

$$A_1 = \{\omega = (\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) \in \Omega : \quad (\omega_1,\omega_2) = (3,b)\},$$

אז $|A_1| = |A_2| = 14$ לפי כלל המכפלה, ולכן לפי הכלה והדחה

$$|A| = |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 14 + 14 - 1 = 27$$

כאשר נבחין ש $A_1 \cap A_2$ הוא המאורע שנולדו שני בנים ביום שלישי , ומכאן

$$A_1 \cap A_2 = \{(3,b,3,b)\}$$

נגדיר את המאורע B להיות המאורע "נולדה ילדה", כלומר

$$B = \{\omega = (\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) \in \Omega : \quad \omega_2 = g \quad \text{or} \quad ,\omega_4 = g\}$$

אז $B \cap A_1$ וכן $B \cap A_2$ הם מאורעות זרים. לכן,

$$|B\cap A| = |B\cap(A_1\cup A_2)| = |(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)| = |B\cap A_1| + |B\cap A_2| = 1\cdot 7 + 1\cdot 7 = 14$$

ומכאן, היות ומדובר במרחב הסתברות אחידה,

$$P(B|A) = \frac{|B\cap A|}{|A|} = \frac{14}{27}.$$

5 ניסויים חוזרים ב"ת

1. יהיו (Ω_1, P_1) וכן (Ω_2, P_2) שני מ"ה הסתברות. נגדיר מ"ה נוסף ע"י $(\Omega_1 \times \Omega_2, P_1 \times P_2)$, כל שלכל שתי מאורעות $A_1 \subset \Omega_1$ ו $A_2 \subset \Omega_2$ מתקיים

$$P_1 \times P_2(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$$

בפרט, לכל שני מאורעות A_1ו A_2 כנ"ל, המאורעות $A_1 \times \Omega_2$ וכן $\Omega_1 \times A_2$ הם ב"ת במ"ה $(\Omega_1 \times \Omega_2, P_1 \times P_2)$.

2. בדומה, אם נתונה לנו סידרה של מרחבים הסתברות $(\Omega_1, P_1), ..., (\Omega_n, P_n)$ נגדיר מ"ה נוסף ע"י $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \times_{i=1}^n P_i)$, כך שלכל סידרת מאורעות $A_i \subset \Omega_i$ מתקיים

$$(\times_{i=1}^n P_i)(\prod_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P_i(A_i)$$

ומכאן מקבלים שלכל סידרה כנ"ל, המאורעות שבקואורדינטה ה i שלהם מופיעה הקבוצה A_i ואחרת מופיע Ω_i בשאר הקואורדינטות, הינם ב"ת.

3. נאמר שסידרת מאורעות $A_1, ..., A_n$ במ"ה (Ω, P) הן ב"ת אם לכל k ולכל לכל תת קבוצה מגודל k $A_{i_1}, ..., A_{i_k}$ מתוך המאורעות הנ"ל,

$$P(\bigcap_{n=i_1}^{i_k} A_n) = \prod_{n=i_1}^{i_k} P(A_{n)}$$

נבחין שזה אומר בפרט שלכל סידרת סימנים $\epsilon_i \in \{1, C\}$ מתקיים

$$P(\bigcap A_i^{\epsilon_i}) = \prod_{i=1}^n P(A_i^{\epsilon_i})$$

כאשר מגדירים $A_i^1 = A_i$ ו A_i^C הוא המאורע המשלים.

דוגמא 4 נתון מטבע בעל הסתברות p ליפול על ראש. מטילים את המטבע n פעמים, כאשר אנחנו מניחים שההטלות ב"ת.

1. מה ההסתברות שקיבלנו לפחות ראש אחד?
2. יהא $0 \le k \le n$. מה ההסתברות שקיבלנו בדיוק k ראשים?

נתחיל מלבנות מ"ה מתאים. יהא (Ω_1, P_1) מ"ה $\Omega = \{H, T\}$ עם $P(\{H\}) = p$ וכן $P(\{T\} = 1 - p$. ניקח בתור (Ω, P) את מ"ה $(\prod_{i=1}^n \Omega_1, \times_{i=1}^n P_1)$. לפי התזכורת למעלה, נקבל שכל תוצאה בהטלה בקואורדינטה הi הינה ב"ת בשאר ההטלות בשאר הקואורדינטות.

כעת, על מנת לחשב את ההסתברות בסעיף הראשון, קל יותר לחשב את ההסתברות של המאורע המשלים. כלומר, לחשב את ההסתברות שלא יצא H בכלל. יהא A_i המאורע "בהטלה ה i קיבלנו ראש". אז לפי נוסחת המכפלה, $P(A_i) = p$ לכל i. אז עלינו לחשב

$$P(A_1^C \cap A_2^C \cap ... \cap A_n^C) = P(A_1^C) \cdots P(A_n^C) = (1-p)^n$$

ומכאן ההסתברות המבוקשת היא $P(A_1 \cup ... \cup A_n) = 1 - (1-p)^n$. שימו לב שכאשר $n \to \infty$ הסתברות זו שואפת ל 1!

עבור החלק השני, נבחן סידרה נתונה של k הצלחות ושל $n-k$ כשלונות. למשל, נניח שהיו לנו k הצלחות בהתחלה ו $n-k$ כשלונות אחר כך. ההסתברות לכך היא

$$P(A_1 \cap ... \cap A_k \cap A_{\{k+1\}}^C \cap ... \cap A_n^C) = p^k (1-p)^{n-k}.$$

נשים לב שלמעשה לכל סידרה כנ"ל של k הצלחות ו $n-k$ כשלונות יש את אותה ההסתברות שכתובה למעלה. לכן, כדי לחשב את ההסתברות שבשאלה, עלינו לחשב כמה סדרות כאלו יש. נשים לב שרק מעניין אותנו באילו k זמנים קיבלנו H, כי אז ממילא בשאר ה $n-k$ זמנים מקבלים T. כלומר, אנחנו מחפשים כמה תתי קבוצות מגודל k יש לקבוצה מגודל n, כלומר $\binom{n}{k}$. מכאן,

$$P(\{\text{exactly k times heads}\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

דוגמא 5 מבצעים את הניסוי הבא: זורקים מטבע הוגן, הנופל על ראש בהסתברות p, בזה אחר זה באופן ב"ת. יהיו $n, m \in \mathbb{N}$. מה ההסתברות שנקבל n ראשים לפני שנקבל m פעמים פאלי?

הפיתרון של פרמה נבחין שתנאי מספיק והכרחי על מנת שיהיו n ראשים לפני שהיו m פאלי, הוא שהיו לפחות n ראשים מתוך ה $n+m-1$ הנסיונות הראשונים. מדוע זה נכון? מכיוון שאם היו לפחות n ראשים מתוך ה $n+m-1$ נסיונות הראשונים, אז היו לכל היותר $m-1$ פאלי בנסיונות הללו. מכאן שהיו n ראשים לפני שהיו m פאלי. מאידך, אם היו פחות מ n ראשים ב $n+m-1$ נסיונות הראשונים, אז היו לפחות m פאלי שיצאו שם, ולכן לא קיבלנו n ראשים לפני שקיבלנו m פאלי.

כעת, יהא (Ω, P) מ"ה המתאים לשאלה (אפשר למשל לקחת מרחב מכפלה כמו בשאלה הקודמת עבור $n+m-1$ נסיונות). יהא $A_{n,m}$ המאורע "קיבלנו n ראשים לפני שקיבלנו m פאלי". יהא A_k המאורע "קיבלנו בדיוק k ראשים מתוך ה $n+m-1$ נסיונות הראשונים". אז לפי הדוגמא הקודמת,

$$P(A_k) = \binom{n+m-1}{k} p^k (1-p)^{n+m-1-k}$$

וכן לפי הדיון הקודם,

$$A_{n,m} = \bigcup_{k=n}^{m+n-1} A_k$$

מכיוון שמדובר באיחוד זר (מדוע זה איחוד זר?) נקבל

$$P(A_{n,m}) = \sum_{k=n}^{m+n-1} P(A_k) = \sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{n+m-1}{k} p^k (1-p)^{n+m-1-k}$$

הסתברות 1 - תרגול 5

14 באפריל 2019

1 משתנים מקריים

הגדרה יהא $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות. משתנה מקרי (מ"מ) הוא פונקציה $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ ממרחב המדגם לממשיים.

הגדרה 1.1 יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מ"ה ו־$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ מ"מ עליו.

1. נניח ש X מוגדר על מרחב הסתברות עם Ω קבוצה סופית. נתבונן באוסף האיברים $Im(\xi) = \{x_1, ..., x_n\}$ שמוכל ב $\mathbb{R}$. לכל $x_i \in Im(\xi)$ נגדיר

$$P_\xi(x_i) = P(\{\omega | \xi(\omega) = x_i\})$$

ההתפלגות של ξ הינה האוסף

$$(P_\xi(x_1), ..., P_\xi(x_n)).$$

פונקציית ההתפלגות של ξ היא הפונקציה $\mathbb{P}_\xi : 2^{\mathbb{R}} \to [0,1]$ המוגדרת על ידי:

$$\mathbb{P}_\xi(E) = \mathbb{P}(\xi \in E) \stackrel{def}{=} \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in E\}) \qquad \forall E \subset \mathbb{R}$$

נשים לב שלכל קבוצה $Im(\xi) \subset D \subset \mathbb{R}$, מתקיים ש־$(D, 2^D, \mathbb{P}_\xi)$ הוא מרחב הסתברות (כאן הכוונה לצמצום של $\mathbb{P}_\xi$ על 2^D) (הוכחה - תרגיל).

2. את פונקציית ההתפלגות האטומית של $\mathbb{P}_X$ נסמן ב־p_X. לפונקציה זו קוראים גם פונקציית ההתפלגות האטופית של X. כלומר, $p_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא הפונקציה המקיימת

$$p_X(s) = P(\{\omega : \quad X(\omega) = s\}) = P(X^{-1}\{s\}).$$

תרגיל 1: מטילים 2 קוביות הוגנות. יהי Y מ"מ המתאר את סכום הקוביות. מה ההתפלגות של Y?

פתרון: יהי $\Omega = \{1,...,6\}^2$, $\mathbb{P}$ התפלגות אחידה. כל איבר ב־Ω יסומן ב־$\omega = (\omega_1, \omega_2)$. נסמן ב־$X_i$ את התוצאה בהטלת הקוביה ה־i, ואת N נגדיר להיות סכומם:

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= \omega_1 \\ X_2(\omega) &= \omega_2 \\ Y(\omega) &= X_1(\omega) + X_2(\omega) \end{aligned}$$

פתרון לשאלה שקול למציאת פונקצית ההתפלגות של Y:

$$\begin{aligned} p_Y(1) &= \mathbb{P}(Y=1) = \frac{0}{6^2} = 0 \\ p_Y(2) &= \mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{6^2} \\ p_Y(3) &= \mathbb{P}(Y=3) = \mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 1 \, or \, X_1 = 1, X_2 = 2) = \frac{2}{6^2} \end{aligned}$$

באופן כללי, לכל k,

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \{\omega : X_1(\omega) = i,\ X_2(\omega) = (k-i)\}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(\{\omega : X_1(\omega) = i,\ X_2(\omega) = (k-i)\}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\left(\{\omega : X_1\left(\omega\right) = i\}\right) \mathbb{P}\left(\{\omega : X_2\left(\omega\right) = k-i\}\right) \end{aligned}$$

(בשוויון השני השתמשנו בעובדה שהאיחוד הוא איחוד זר, ובשלישי באי־תלות שתי ההטלות).
כעת, צריך לדרוש $1 \le i, k-i \le 6$, כלומר $\max\left(1, k-6\right) \le i \le \min\left(6, k-1\right)$ כדי שיתקיים $\mathbb{P}\left(\{\omega : X_1\left(\omega\right) = i\}\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega : X_2\left(\omega\right) = k-i\}\right) = \frac{1}{6}$, ואחרת אחד מהם יהיה 0. לכן נקבל:

$$\begin{aligned} p_Y\left(k\right) &= \sum_{i=\max(1,k-6)}^{\min(6,k-1)} \frac{1}{6^2} \\ &= \begin{cases} \frac{\min(6,k-1)-\max(1,k-6)+1}{36} & \min\left(6,k-1\right) \ge \max\left(1,k-6\right) \\ 0 & \min\left(6,k-1\right) < \max\left(1,k-6\right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & k \le 0 \\ \frac{k-1}{36} & 1 \le k \le 6 \\ \frac{13-k}{36} & 7 \le k \le 12 \\ 0 & k \ge 13 \end{cases} \end{aligned}$$

תרגיל 2: נתאר את הניסוי הבא: נמצאים ברשותנו שתי קוביות: קוביה א', עם מספרים 1 עד 6 (הוגנת), וקוביה ב' עם מספרים 1 עד 4 (הוגנת). מטילים מטבע, אם יצא עץ, זורקים את

קוביה א'. אם יוצא פלי, זורקים את קוביה ב'. יהא Y המ"מ שמתאר את תוצאת הניסוי. מצאו את התפלגות Y.

שאלות מסוג זה פתרנו בעבר גם ללא מ"מ,ואכן אין צורך במ"מ כדי לפתור את השאלה. בכל זאת, נשתמש במ"מ כדי שנבין טוב יותר את הנושא.

נגדיר מרחב הסתברות מתאים להטלה של המטבע ושתי הקוביות ־ לדוגמה

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4\} \times \{H,T\}$$

ו־$\mathbb{P}$ התפלגות אחידה. נסמן איבר ב־Ω על ידי $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. כעת נגדיר מ"מים: Z יהיה 1 אם קיבלנו עץ ו־0 אחרת, X_1 יהיה ערך קוביה א', ו־X_2 יהיה ערך קוביה ב'. Y יהיה התוצאה בניסוי הנ"ל. כלומר:

$$\begin{aligned}
Z(\omega) &= \begin{cases} 1 & \omega_3 = H \\ 0 & \omega_3 = T \end{cases} \\
X_1(\omega) &= \omega_1 \\
X_2(\omega) &= \omega_2 \\
Y(\omega) &= \begin{cases} \omega_1 & \omega_3 = H \\ \omega_2 & \omega_3 = T \end{cases}
\end{aligned}$$

את Y ניתן לבטא גם כפונקציה אלגברית של שאר המשתנים מקריים־

$$Y = Z \cdot X_1 + (1 - Z) \cdot X_2$$

כשהמשמעות של המשוואה הזו היא שלכל $\omega \in \Omega$ הערך של אגף שמאל ב־ω שווה לערך של אגף ימין ב־ω:

$$Y(\omega) = Z(\omega)X_1(\omega) + (\mathbf{1}(\omega) - Z(\omega))X_2(\omega)$$

(אנו מתייחסים למספר 1 כפונקצייה הקבועה על Ω)

פתרון השאלה שקול למציאת פונקציית ההתפלגות האטומית של Y:

$$\begin{aligned}
p_Y(1) &= \mathbb{P}(Y = 1) \\
&= \mathbb{P}(Z = 1, X_1 = 1 \; or \; Z = 0, X_2 = 1) \\
&= \mathbb{P}(Z = 1, X_1 = 1) + \mathbb{P}(Z = 0, X_2 = 1) \\
&= \frac{4}{6 \cdot 4 \cdot 2} + \frac{6}{6 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{5}{24}
\end{aligned}$$

באותו אופן נקבל $p_Y(2) = p_Y(3) = p_Y(4) = \frac{5}{24}$. עבור 5 ו־6,

$$\begin{aligned}
p_Y(5) &= \mathbb{P}(Y = 5) \\
&= \mathbb{P}(Z = 1, X_1 = 5) \\
&= \frac{4}{6 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{2}{24}
\end{aligned}$$

ואותו חישוב יהיה נכון עבור $p_X(6)$.

2 התפלגות מותנית

נשים לב שההתפלגות $\mathbb{P}_X$ של משתנה מקרי X תלויה בפונקציה X ממרחב המדגם לממשיים, ובפונקציית ההסתברות $\mathbb{P}$ על אותו מרחב מדגם. ברגע שמשנים את הגדרת הפונקציה על מרחב המדגם , או לחילופין משנים את ההסתברות על מרחב המדגם, משתנה ההתפלגות של X.

הגדרות: יהי X מ"מ על מרחב ההסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,ויהי $A \in \mathcal{F}$ מאורע עם הסתברות חיובית.

1. נסמן ב־ $\mathbb{P}_A$ את פונקציית ההסתברות המותנית על Ω:

$$\mathbb{P}_A(B) := \mathbb{P}(B|A) \quad \forall B \in \mathcal{F}$$

2. נסמן ב־$(X|A)$ את הפונקציה $X : \Omega \to \mathbb{R}$ כמשתנה מקרי על מרחב ההסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_A)$.

תרגיל 3: נחזור לדוגמה בתרגיל 2. נחשב את ההתפלגות האטומית של:

א. $(Y|Z = 1)$,

ב. $(Y|Y \in \{4, 5\})$.

פתרון: א. למרות שהתשובה הסופית די צפויה, כדאי לעקוב אחרי המעברים כדי להבין את ההגדרות. לכל $1 \le k \le 6$

$$\begin{aligned} p_{(Y|Z=1)}(k) &= \mathbb{P}_{Z=1}(Y = k) \\ &= \mathbb{P}(Y = k|Z = 1) \\ &= \frac{\mathbb{P}(Y = k, Z = 1)}{\mathbb{P}(Z = 1)} \\ &= \frac{4}{6 \times 4} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

ב. נתחיל עבור k כללי:

$$\begin{aligned} p_{(X|X\in\{4,5\})}(k) &= \mathbb{P}_{X\in\{4,5\}}(X = k) \\ &= \mathbb{P}(X = k|X \in \{4, 5\}) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = k, X \in \{4, 5\})}{\mathbb{P}(X \in \{4, 5\})} \end{aligned}$$

עבור $k \notin \{4, 5\}$ התוצאה היא אפס. אחרת,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(X = k, X \in \{4, 5\})}{\mathbb{P}(X \in \{4, 5\})} &= \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X \in \{4, 5\})} \\ &= \frac{p_X(k)}{p_x(4) + p_X(5)} \\ &= \begin{cases} \frac{5}{7} & k = 4 \\ \frac{2}{7} & k = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

הגדרה: יהיו $(\Omega_2,\mathcal{F}_2,\mathbb{P}_2),(\Omega_2,\mathcal{F}_2,\mathbb{P}_2)$ שני מרחבי הסתברות (זהים או שונים). עבור שני משתנים מקריים $X:\Omega_1\to\mathbb{R},\ Y:\Omega_2\to\mathbb{R}$, נאמר שהם שווי התפלגות אם $\mathbb{P}_X\equiv\mathbb{P}_Y$. נבחין שזה קורה אם ורק אם $p_X=p_Y$.

שאלה יהיו X,Y שני מ"מ מוגדרים על אותו מרחב הסתברות. נאמר שהם שווים בהסתברות 1, אם $\mathbb{P}(\{\omega|X(\omega)=Y(\omega)\})=1$. הוכח או הפרך:

1. אם X,Y שווים בהסתברות 1, אזי הם שווי התפלגות.
פתרון: מכיוון שלכל $A\subset\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X(A)&=\mathbb{P}(X\in A)\\&=\mathbb{P}(X\in A,\ X=Y)+\mathbb{P}(X\in A,\ X\neq Y)\\&=\mathbb{P}(Y\in A,\ X=Y)+0\\&=\mathbb{P}(Y\in A,\ X=Y)+\mathbb{P}(Y\in A,\ X\neq Y)\\&=\mathbb{P}(Y\in A)\\&=\mathbb{P}_Y(A)\end{aligned}$$

(השתמשנו בתכונת המונוטוניות של $\mathbb{P}$ כדי לקבל $0\leq\mathbb{P}(X\in A,\ X\neq Y)\leq\mathbb{P}(X\neq Y)=0$, וכן $0\leq\mathbb{P}(Y\in A,\ X\neq Y)\leq\mathbb{P}(X\neq Y)=0$).

(א) אם X,Y שווי התפלגות אזי הם שווים בהסתברות 1.
פתרון: אם ידוע ששני מ"מ הם שוי התפלגות, אין זה גורר שהם שווים בהסתברות 1. בדוגמה 1 לעיל, המ"מ X_1,X_2 מייצגים את הערכים שקיבלנו בהטלה הראשונה והשנייה. הם אמנם שווי התפלגות –

$$\mathbb{P}_x(\{n\})=\mathbb{P}_x(\{n\})=\frac{1}{6}\quad\forall 1\leq n\leq 6$$

אבל אינם שווים בהסתברות 1 – קיימת הסתברות חיובית למאורע $X_1\neq X_2$.

3 סוגי התפלגויות

3.1 התפלגות ברנולי

הגדרה יהא (Ω,P) מרחב הסתברות. נאמר שמ"מ X המוגדר על Ω מתפלג ברנולי עם פרמטר p (ונסמן $X\sim ber(p)$), אם X מקבל ערכים ב $\{0,1\}$ וכן מתקיים:

$$\begin{aligned}p_X(1)&=p\\p_X(0)&=1-p\end{aligned}$$

דוגמא יהא (Ω,P) מרחב ההסתברות האחידה שמתאר הטלת מטבע הוגן, כלומר $\Omega=\{H,T\}$. יהא X המשתנה המקרי שנותן 1 אם יצא ראש ו־0 אחרת. אז X מתפלג ברנולי

עם פרמטר $\frac{1}{2}$. אם המטבע לא בהכרח הוגן, אלא נופל על ראש בהסתברות p, הרי ש $X \sim ber(p)$.

דוגמא משתנה מקרי אינדיקטור: עבור מאורע $A \subset \Omega$ נגדיר $1_A = 1$ אם המאורע A התרחש, ו־$1_A = 0$ אם המאורע A^c התרחש. אז$1_A \sim Ber\left(P\left(A\right)\right)$ כי:

$$
\begin{aligned}
p_{1_A}(1) &= P\left(A\right) = p \\
p_{1_A}(0) &= P\left(A^c\right) = 1 - p
\end{aligned}
$$

הערה: אם $X \sim ber(p)$, אזי ניתן לכתוב את X כפונקציית האינדיקטור 1_A, כאשר $A = X^{-1}(\{1\})$.

3.2 התפלגות בינומית

הגדרה יהא (Ω, P) מרחב הסתברות. נאמר שמשתנה מקרי X המוגדר על Ω מתפלג בינומי עם פרמטרים n ו־p, ונכתוב $X \sim bin(n,p)$, אם X מקבל ערכים בקבוצה $\{0,...,n\}$ ופונקציית ההתפלגות האטומית שלו היא, עבור $0 \leq k \leq n$,

$$
p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
$$

טענה: יהיו $X_1,...,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים (כלומר כל המאורעות שתלויים בהם ב"ת) ושווי התפלגות, $X_i \sim ber(p)$. נגדיר $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. אז $Y \sim Bin(n,p)$.

כלומר מ"מ בינומי עונה על השאלה הבאה: נתון מטבע עם הסתברות p לקבלת H, המוטל ברצף n פעמים באופן ב"ת. מה ההסתברות לקבלת k H־ים בדיוק?

תרגיל 4 יוסי ויסמין זורקים מטבע הוגן במקביל n פעמים. מה ההסתברות ששניהם קיבלו עץ אותו מספר פעמים?

נכתוב את מרחב ההסתברות באופן מפורש: $\Omega = \{H,T\}^{2n}$, ו־$\mathbb{P}$ פונקציית ההסתברות. נקודד את ההטלות של יוסי בקוארדינטות האי זוגיות, ואת ההטלות של יסמין בקוארדינטות הזוגיות. נגדיר $2n$ משתנים מקריים $X_1,...,X_n,Y_1,...,Y_n$ באופן הבא:

$$
X_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_{2i-1} = H \\ 0 & \omega_{2i-1} = T \end{cases}
$$

$$
Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_{2i} = H \\ 0 & \omega_{2i} = T \end{cases}
$$

אז לכל i מקבלים ש $X_i, Y_i \sim ber(\frac{1}{2})$. נסמן ב N_a את סכום העצים של יוסי, וב־N_b את סכום העצים של יסמין. כלומר:

$$
\begin{aligned}
N_a &= \sum X_i \\
N_b &= \sum Y_i
\end{aligned}
$$

נשים לב שליוסי וליסמין יוצא אותו סכום של עצים אמ"ם מספר העצים שיצאו ליוסי יחד עם מספר הפלי שיצאו ליסמין מסתכמים ל־n:

$$N_a = N_b \iff N_a + (n - N_b) = n$$

ולכן עלינו לחשב את ההסתברות למאורע $\{\omega | \, (N_a(\omega) + (n - N_b(\omega))) = n\}$.

טענה: $(N_a + (n - N_b)) \sim Bin(2n, \frac{1}{2})$.

הוכחה ־ יהא $1 \leq k \leq 2n$, ונסמן את המאורע $\{\omega| \quad (N_a(\omega) + (n - N_b(\omega)) = k\}$ ב־B_k. כל סדרה $(\omega_1, ..., \omega_{2n}) \in B_k$ מגדירה תת קבוצה בגודל k מתוך $\{1, .., 2n\}$: אכן, לקבוצה שלנו נכניס את הזמנים שבהם יוסי קיבל ראש, ואת הזמנים בהם יסמין קיבלה פלי. מצד שני, בהנתן תת קבוצה A בגודל k של $\{1, ..., 2n\}$, נתאים לה את המאורע "יוסי קיבל ראש באיברים האי זוגיים של A ואילו יסמין קיבלה פלי באיברים הזוגיים של A". כלומר, יש התאמה חח"ע ועל בין הקבוצה B_k לבין אוסף תתי הקבוצות בגודל k של $\{1, ..., 2n\}$. בנוסף, לכל $(\omega_1, ..., \omega_{2n}) \in B_k$ מתקיים

$$P(\{(\omega_1, ..., \omega_{2n})\}) = \frac{1}{2^{2n}}$$

שכן מדובר במרחב הסתברות אחידה. לכן,

$$\mathbb{P}(B_k) = \binom{2n}{k} 2^{-2n}$$

בחזרה לשאלה שלנו ־ המאורע שאנו מעוניינים בו הוא בדיוק B_n. לפי הטענה שהוכחנו, ההסתברות שלו הינה

$$\mathbb{P}(B_k) = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$$

כדי שנקבל תחושה לגבי הערכים שמופיעים בקורס, נשתמש בנוסחת סטירלינג:

נוסחת סטירלינג $\lim_n \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1$.

לכן עבור n מספיק גדול, הביטוי הנ"ל מתקרב ל־

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} 2^{-2n} &\sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}(2n/e)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}(n/e)^n\right)\left(\sqrt{2\pi n}(n/e)^n\right)} 2^{-2n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\end{aligned}$$

3.3 התפלגות גיאומטרית

הגדרה יהא (Ω, P) מרחב הסתברות. מ"מ X המוגדר על Ω מתפלג גיאומטרית עם פרמטר p, $X \sim Geo(p)$, אם הוא מקבל ערכים בקבוצה $\mathbb{N}$ וכן פונקציית ההתפלגות האטומית שלו מקיימת

$$p_X(k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

הערה משתנה מקרי גיאומטרי מתאר את הסיטואציה הבאה: מטילים מטבע שנופל על ראש בהסתברות p באופן ב"ת עד שמקבלים ראש. X מסמן את כמות הנסיונות שעשינו עד שקיבלנו ראש.

הערה אם $X \sim Geo(p)$ אז לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$P(X > k) = (1-p)^k$$

דוגמא מסקרים שנערכו התברר ש40% מתושבי העיר משתמשים במשחת השיניים "לובן". איש חברת פרסום רוצה לראיין משתמש כזה. נניח שהוא פונה לאנשים ברחוב באופן מקרי. נסמן ב X את מספר האנשים שאליהם הוא פונה עד שהוא מגיע לאדם שמשתמש במשחה "לובן". ההסתברות שהוא יראיין לכל היותר שלושה צרכנים היא

$$P(X \le 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - 0.6^3$$

כאשר נעזרנו בהערה בשוויון האחרון.

טענה יהא $X \sim Geo(p)$. אז X הוא חסר זיכרון, כלומר

$$P(X = n + k | X > k) = P(X = n)$$

הסתברות 1 – תרגול השלמה

9 באפריל 2019

1 סוגי התפלגויות

1.1 התפלגות ברנולי

הגדרה יהא (Ω, P) מרחב הסתברות. נאמר שמ"מ X המוגדר על Ω מתפלג ברנולי עם פרמטר p (ונסמן $X \sim ber(p)$), אם X מקבל ערכים ב $\{0,1\}$ וכן מתקיים:

$$p_X(1) = p$$
$$p_X(0) = 1 - p$$

דוגמא יהא (Ω, P) מרחב ההסתברות האחידה שמתאר הטלת מטבע הוגן, כלומר $\Omega = \{H, T\}$. יהא X המשתנה המקרי שנותן 1 אם יצא ראש ו־0 אחרת. אז X מתפלג ברנולי עם פרמטר $\frac{1}{2}$. אם המטבע לא בהכרח הוגן, אלא נופל על ראש בהסתברות p, הרי ש $X \sim ber(p)$.

דוגמא משתנה מקרי אינדיקטור: עבור מאורע $A \subset \Omega$ נגדיר $1_A = 1$ אם המאורע A התרחש, ו־$1_A = 0$ אם המאורע A^c התרחש. אז$1_A \sim Ber\left(P\left(A\right)\right)$ כי:

$$p_{1_A}(1) = P\left(A\right) = p$$
$$p_{1_A}(0) = P\left(A^c\right) = 1 - p$$

הערה: אם $X \sim ber(p)$, אזי ניתן לכתוב את X כפונקציית האינדיקטור 1_A, כאשר $A = X^{-1}(\{1\})$.

1.2 התפלגות בינומית

הגדרה יהא (Ω, P) מרחב הסתברות. נאמר שמשתנה מקרי X המוגדר על Ω מתפלג בינומי עם פרמטרים n ו־p, ונכתוב $X \sim bin(n,p)$, אם X מקבל ערכים בקבוצה $\{0, ..., n\}$

ופונקציית ההתפלגות האטומית שלו היא, עבור $0 \leq k \leq n$,

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

טענה: יהיו $X_1, ..., X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים (כלומר כל המאורעות שתלויים בהם ב"ת) ושווי התפלגות, $X_i \sim ber(p)$. נגדיר $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. אז $Y \sim Bin(n,p)$.

כלומר מ"מ בינומי עונה על השאלה הבאה: נתון מטבע עם הסתברות p לקבלת H, המוטל ברצף n פעמים באופן ב"ת. מה ההסתברות לקבלת k H־ים בדיוק?

תרגיל 4 יוסי ויסמין זורקים מטבע הוגן במקביל n פעמים. מה ההסתברות ששניהם קיבלו עץ אותו מספר פעמים?

נכתוב את מרחב ההסתברות באופן מפורש: $\Omega = \{H,T\}^{2n}$, ו־$\mathbb{P}$ פונקציית ההסתברות. נקודד את ההטלות של יוסי בקואורדינטות האי זוגיות, ואת ההטלות של יסמין בקואורדינטות הזוגיות. נגדיר $2n$ משתנים מקריים $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n$ באופן הבא:

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_{2i-1} = H \\ 0 & \omega_{2i-1} = T \end{cases}$$

$$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_{2i} = H \\ 0 & \omega_{2i} = T \end{cases}$$

אז לכל i מקבלים ש $X_i, Y_i \sim ber(\frac{1}{2})$. נסמן ב N_a את סכום העצים של יוסי, וב־N_b את סכום העצים של יסמין. כלומר:

$$N_a = \sum X_i$$

$$N_b = \sum Y_i$$

נשים לב שליוסי וליסמין יוצא אותו סכום של עצים אמ"ם מספר העצים שיצאו ליוסי יחד עם מספר הפלי שיצאו ליסמין מסתכמים ל־n:

$$N_a = N_b \iff N_a + (n - N_b) = n$$

ולכן עלינו לחשב את ההסתברות למאורע $\{\omega | \, (N_a(\omega) + (n - N_b(\omega))) = n\}$.

טענה: $(N_a + (n - N_b)) \sim Bin(2n, \frac{1}{2})$.

הוכחה ־ יהא $1 \leq k \leq 2n$, ונסמן את המאורע $\{\omega| \quad (N_a(\omega) + (n - N_b(\omega)) = k\}$ ב־B_k. כל סדרה $(\omega_1, ..., \omega_{2n}) \in B_k$ מגדירה תת קבוצה בגודל k מתוך $\{1, .., 2n\}$: אכן, לקבוצה שלנו נכניס את הזמנים שבהם יוסי קיבל ראש, ואת הזמנים בהם יסמין קיבלה פלי. מצד שני, בהנתן תת קבוצה A בגודל k של $\{1, ..., 2n\}$, נתאים לה את המאורע "יוסי קיבל ראש באיברים האי זוגיים של A ואילו יסמין קיבלה פלי באיברים הזוגיים של A". כלומר,

יש התאמה חח"ע ועל בין הקבוצה B_k לבין אוסף תתי הקבוצות בגודל k של $\{1, ..., 2n\}$.
בנוסף, לכל $(\omega_1, ..., \omega_{2n}) \in B_k$ מתקיים

$$P(\{(\omega_1, ..., \omega_{2n})\}) = \frac{1}{2^{2n}}$$

שכן מדובר במרחב הסתברות אחידה. לכן,

$$\mathbb{P}(B_k) = \binom{2n}{k} 2^{-2n}$$

בחזרה לשאלה שלנו - המאורע שאנו מעוניינים בו הוא בדיוק B_n. לפי הטענה שהוכחנו, ההסתברות שלו הינה

$$\mathbb{P}(B_k) = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$$

כדי שנקבל תחושה לגבי הערכים שמופיעים בקורס, נשתמש בנוסחת סטירלינג:

נוסחת סטירלינג $\lim_n \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1$.

לכן עבור n מספיק גדול, הביטוי הנ"ל מתקרב ל-

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} 2^{-2n} &\sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}(2n/e)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}(n/e)^n\right)\left(\sqrt{2\pi n}(n/e)^n\right)} 2^{-2n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\end{aligned}$$

1.3 התפלגות גיאומטרית

הגדרה יהא (Ω, P) מרחב הסתברות. מ"מ X המוגדר על Ω מתפלג גיאומטרית עם פרמטר p, $X \sim Geo(p)$, אם הוא מקבל ערכים בקבוצה $\mathbb{N}$ וכן פונקציית ההתפלגות האטומית שלו מקיימת

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

הערה משתנה מקרי גיאומטרי מתאר את הסיטואציה הבאה: מטילים מטבע שנופל על ראש בהסתברות p באופן ב"ת עד שמקבלים ראש. X מסמן את כמות הנסיונות שעשינו עד שקיבלנו ראש.

הערה אם $X \sim Geo(p)$ אז לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$P(X > k) = (1-p)^k$$

דוגמא מסקרים שנערכו התברר ש40% מתושבי העיר משתמשים במשחת השיניים "לובן".
איש חברת פרסום רוצה לראיין משתמש כזה. נניח שהוא פונה לאנשים ברחוב באופן מקרי.

נסמן ב X את מספר האנשים שאליהם הוא פונה עד שהוא מגיע לאדם שמשתמש במשחה "לובן". ההסתברות שהוא יראיין לכל היותר שלושה צרכנים היא

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - 0.6^3$$

כאשר נעזרנו בהערה בשוויון האחרון.

טענה יהא $X \sim Geo(p)$. אז X הוא חסר זיכרון, כלומר

$$P(X = n + k | X > k) = P(X = n)$$

2 ניסויים חוזרים ב"ת

1. יהיו (Ω_1, P_1) וכן (Ω_2, P_2) שני מ"ה הסתברות. נגדיר מ"ה נוסף ע"י $(\Omega_1 \times \Omega_2, P_1 \times P_2)$, כל שלכל שתי מאורעות $A_1 \subset \Omega_1$ ו $A_2 \subset \Omega_2$ מתקיים

$$P_1 \times P_2(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$$

בפרט, לכל שני מאורעות A_1ו A_2 כנ"ל, המאורעות $A_1 \times \Omega_2$ וכן $\Omega_1 \times A_2$ הם ב"ת במ"ה $(\Omega_1 \times \Omega_2, P_1 \times P_2)$.

2. בדומה, אם נתונה לנו סידרה של מרחבים הסתברות $(\Omega_1, P_1), ..., (\Omega_n, P_n)$ נגדיר מ"ה נוסף ע"י $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \times_{i=1}^n P_i)$, כך שלכל סידרת מאורעות $A_i \subset \Omega_i$ מתקיים

$$(\times_{i=1}^n P_i)(\prod_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P_i(A_i)$$

ומכאן מקבלים שלכל סידרה כנ"ל, המאורעות שבקוארדינטה ה i שלהם מופיעה הקבוצה A_i ואחרת מופיע Ω_i בשאר הקוארדינטות, הינם ב"ת.

3. נאמר שסידרת מאורעות $A_1, ..., A_n$ במ"ה (Ω, P) הן ב"ת אם לכל k ולכל לכל תת קבוצה מגודל k $A_{i_1}, ..., A_{i_k}$ מתוך המאורעות הנ"ל,

$$P(\bigcap_{n=i_1}^{i_k} A_n) = \prod_{n=i_1}^{i_k} P(A_{n)}$$

נבחין שזה אומר בפרט שלכל סידרת סימנים $\epsilon_i \in \{1, C\}$ מתקיים

$$P(\bigcap A_i^{\epsilon_i}) = \prod_{i=1}^n P(A_i^{\epsilon_i})$$

כאשר מגדירים $A_i^1 = A_i$ ו A_i^C הוא המאורע המשלים.

דוגמא 4 נתון מטבע בעל הסתברות p ליפול על ראש. מטילים את המטבע n פעמים, כאשר אנחנו מניחים שההטלות ב"ת.

1. מה ההסתברות שקיבלנו לפחות ראש אחד?

2. יהא $0 \leq k \leq n$. מה ההסתברות שקיבלנו בדיוק k ראשים?

נתחיל מלבנות מ"ה מתאים. יהא (Ω_1, P_1) מ"ה $\Omega = \{H, T\}$ עם $P(\{H\}) = p$ וכן $P(\{T\} = 1-p$. ניקח בתור (Ω, P) את מ"ה $(\prod_{i=1}^n \Omega_1, \times_{i=1}^n P_1)$. לפי התזכורת למעלה, נקבל שכל תוצאה בהטלה בקואורדינטה הi הינה ב"ת בשאר ההטלות בשאר הקואורדינטות.

כעת, על מנת לחשב את ההסתברות בסעיף הראשון, קל יותר לחשב את ההסתברות של המאורע המשלים. כלומר, לחשב את ההסתברות שלא יצא H בכלל. יהא A_i המאורע "בהטלה ה i קיבלנו ראש". אז לפי נוסחת המכפלה, $P(A_i) = p$ לכל i. אז עלינו לחשב

$$P(A_1^C \cap A_2^C \cap ... \cap A_n^C) = P(A_1^C) \cdots P(A_n^C) = (1-p)^n$$

ומכאן ההסתברות המבוקשת היא $P(A_1 \cup ... \cup A_n) = 1 - (1-p)^n$. שימו לב שכאשר $n \to \infty$ הסתברות זו שואפת ל 1!

עבור החלק השני, נבחן סידרה נתונה של k הצלחות ושל $n-k$ כשלונות. למשל, נניח שהיו לנו k הצלחות בהתחלה ו $n-k$ כשלונות אחר כך. ההסתברות לכך היא

$$P(A_1 \cap ... \cap A_k \cap A_{\{k+1\}}^C \cap ... \cap A_n^C) = p^k (1-p)^{n-k}.$$

נשים לב שלמעשה לכל סידרה כנ"ל של k הצלחות ו $n-k$ כשלונות יש את אותה ההסתברות שכתובה למעלה. לכן, כדי לחשב את ההסתברות שבשאלה, עלינו לחשב כמה סדרות כאלו יש. נשים לב שרק מעניין אותנו באילו k זמנים קיבלנו H, כי אז ממילא בשאר ה $n-k$ זמנים מקבלים T. כלומר, אנחנו מחפשים כמה תתי קבוצות מגודל k יש לקבוצה מגודל n, כלומר $\binom{n}{k}$. מכאן,

$$P(\{\text{exactly k times heads}\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

דוגמא 5 מבצעים את הניסוי הבא: זורקים מטבע הוגן, הנופל על ראש בהסתברות p, בזה אחר זה באופן ב"ת. יהיו $n, m \in \mathbb{N}$. מה ההסתברות שנקבל n ראשים לפני שנקבל m פעמים פאלי?

הפיתרון של פרמה נבחין שתנאי מספיק והכרחי על מנת שיהיו n ראשים לפני שהיו m פאלי, הוא שהיו לפחות n ראשים מתוך ה $n+m-1$ הנסיונות הראשונים. מדוע זה נכון? מכיוון שאם היו לפחות n ראשים מתוך ה $n+m-1$ נסיונות הראשונים, אז היו לכל היותר $m-1$ פאלי בנסיונות הללו. מכאן שהיו n ראשים לפני שהיו m פאלי. מאידך, אם היו פחות מ n ראשים ב $n+m-1$ נסיונות הראשונים, אז היו לפחות m פאלי שיצאו שם, ולכן לא קיבלנו n ראשים לפני שקיבלנו m פאלי.

כעת, יהא (Ω, P) מ"ה המתאים לשאלה (אפשר למשל לקחת מרחב מכפלה כמו בשאלה הקודמת עבור $n+m-1$ נסיונות). יהא $A_{n,m}$ המאורע "קיבלנו n ראשים לפני שקיבלנו m פאלי". יהא A_k המאורע "קיבלנו בדיוק k ראשים מתוך ה $n+m-1$ נסיונות הראשונים". אז לפי הדוגמא הקודמת,

$$P(A_k) = \binom{n+m-1}{k} p^k (1-p)^{n+m-1-k}$$

וכן לפי הדיון הקודם,

$$A_{n,m} = \bigcup_{k=n}^{m+n-1} A_k$$

מכיוון שמדובר באיחוד זר (מדוע זה איחוד זר?) נקבל

$$P(A_{n,m}) = \sum_{k=n}^{m+n-1} P(A_k) = \sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{n+m-1}{k} p^k (1-p)^{n+m-1-k}$$

דוגמא 6 n נשים מוזמנות למסיבת תחפושות. כל אישה מגיעה עם מסיכה למסיבה. במהלך המסיבה, הן מורידות את המסיכות ומניחות אותן בצד. כל אישה, כאשר היא עוזבת את המסיבה, בוחרת באופן מקרי מסיכה.

1. מה ההסתברות שאף אישה לא בחרה את המסיכה איתה היא הגיעה?
2. מה ההסתברות שבדיוק k נשים בחרו את המסיכות איתן הן הגיעו?

הערה בכיתה ראיתם פיתרון של הבעיה הזו עם נוסחת ההכלה וההדרה. אנו ניגש לבעיה בדרך מעט שונה.

יהא E המאורע "אף אישה לא בחרה את המסיכה איתה היא הגיעה". על מנת להדגיש את התלות ב n נכתוב $P_n = P(E)$. נניח שמור הלכה מהמסיבה ראשונה. יהא M המאורע "מור בחרה את המסיכה שלה". אז לפי נוסחת ההסתברות השלמה,

$$P_n = P(E) = P(E|M)P(M) + P(E|M^C)P(M^C)$$

מכיוון ש $P(E|M) = 0$ (כי אם מור בחרה את המסיכה שלה לא ייתכן ש E קרה), וכן מכיוון ש $P(M) = \frac{1}{n}$ (למור יש מסיכה אחת לבחור מתוך n) נקבל ש

$$P_n = P(E|M^C) \cdot \frac{n-1}{n}$$

כעת, $P(E|M^C)$ היא ההסתברות שאף אישה לא בחרה את המסיכה שלה, כאשר $n-1$ נשים בוחרות מסיכה מתוך $n-1$ מסכות, ולאחת מהנשים המסיכה שלה חסרה (כי מור לקחה אותה).

נתבונן במ"ה המותנה $(\Omega, P(\cdot|M^C))$. כעת, יהא B_1 המאורע "אף אישה לא בחרה את הכובע שלה, והאישה שהמסיכה שלה נלקחה ע"י מור לא בחרה את המסיכה של מור" וכן B_2 המאורע "אף אישה לא בחרה את המסיכה שלה, ואישה שהמסיכה שלה נלקחה ע"י מור בחרה את המסיכה של מור". אז, מכיוון שמדובר במאורעות זרים,

$$P(E|M^C) = P(E \cap B_1|M^C) + P(E \cap B_2|M^C)$$

כעת, נבחין ש $P(E \cap B_1|M^C) = P_{n-1}$ כלומר - ההסתברות שמתוך $n-1$ נשים אף אישה לא בחרה את המסיכה שלה. זה נכון מכיוון שאפשר להתייחס במצב הזה למסיכה של מור בתור המסיכה של של האישה הנוספת, שהמסיכה שלה נלקחה ע"י מור. מצד שני,

שכן במצב הזה אנחנו $P(E\cap B_2|M^C)=P(E|B_2\cap M^C)\cdot P(B_2|M^C)=P_{n-2}\cdot\frac{1}{n-2}$ יודעים שהאישה הנוספת בחרה את הכובע של מור (בחירה של כובע אחד מתוך $n-1$), ונשארו $n-2$ נשים שצריכות לבחור מתוך $n-2$ מסיכות ששייכות להן. קיבלנו ש

$$P(E|M^C)=P_{n-1}+\frac{1}{n-1}\cdot P_{n-2}$$

ואם נציב את התוצאה הקודמת שלנו נקבל

$$P_n=\frac{n-1}{n}\cdot P_{n-1}+\frac{1}{n}P_{n-2}$$

ובאופן שקול

$$P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{n}(P_{n-1}-P_{n-2}).$$

כעת, נבחין ש $P_1=0$ כי אם יש רק אישה אחת אז היא בטוח בוחרת את המסיכה שלה, וכן ש $P_2=\frac{1}{2}$, כי אם יש שתי נשים אז הן בוחרות את המסיכה אחת של השנייה בהסתברות $\frac{1}{2}$. מכאן, באמצעות נוסחת הנסיגה שפיתחנו

$$P_3-P_2=\frac{-1}{3}(P_2-P_1)=-\frac{1}{3!}\iff P_3=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}$$

ובדומה

$$P_4-P_3=-\frac{(P_3-P_2)}{4}=\frac{1}{-4!}\iff P_4=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$$

באופן כללי רואים שבאינדוקציה

$$P_n=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-...+\frac{(-1)^n}{n!}$$

וסיימנו עם סעיף 1.

עבור סעיף 2, נקבע קבוצה כלשהי בגודל k של נשים. נסמן ב A_i את המאורע "האשה ה i מתוך הקבוצה הנ"ל בחרה את המסיכה שלה" וב B את המאורע "בדיוק הנשים הללו בחרו את המסיכה שלהן". אז

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)=P(B|A_1\cap A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)=...=P(B|\bigcap_{i=1}^{k}A_i)P(A_k|A_1\cap...\cap A_{k-1})\cdots P(A_1)$$

$$=P_{n-k}\cdot\frac{1}{n-(k-1)}\cdots\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}$$

שכן, בהנתן שk הנשים שבחרנו לקחו את המסיכה שלהן, $P(B|\bigcap_{i=1}^{k}A_i)$ זו ההסתברות שמתוך קבוצה של $n-k$ נשים, אף אחת לא תבחר את המסיכה שלה. מכיוון שיש $\binom{n}{k}$ תתי קבוצות כנ"ל, והמאורעות המתאימים זרים (למה זה נכון?) אז

$$P(B)=\binom{n}{k}\cdot P_{n-k}\cdot\frac{1}{n-(k-1)}\cdots\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{P_{n-k}}{k!}$$

ואת P_{n-k} חישבנו כבר בסעיף 1.

הסתברות 1 ־ תרגול 6

27 באפריל 2019

1 סוגי התפלגויות ־ המשך

הגדרה 1.1 יהא X מ"מ המוגדר על מ"ה (Ω, F, P). נאמר ש X מתפלג אחיד על קבוצה סופית $B \subset \mathbb{R}$, ונסמן $X \sim U(B)$, אם X מקבל ערכים בקבוצה B וכן

$$P(X=b) = \frac{1}{|B|}, \quad \forall b \in B.$$

אם $B = \{0,..n-1\}$ נסמן לעיתים $B = [n]$.

דוגמא מייצגת נניח שמגרילים באמצעות הסתברות אחידה איבר אקראי של B. יהא X התוצאה של ההגרלה הנ"ל. אז $X \sim U(B)$.

דוגמא2 מסדרים באקראי n מספרים בשורה. נסמן ב־A את המאורע שהמספרים מסודרים בסדר 'עולה־יורד', קרי מסודרים תחילה באופן מונוטוני עולה עד n ואז מונוטוני יורד.
לדוגמא עבור $n=8$ הסידור $3,5,7,8,6,4,2,1$ הינו סידור 'עולה־יורד'.
חשבו את ההסתברות של A.
פתרון:
יהא (Ω, P) מ"ה האחידה המתאים לשאלה (כל סידור מתקבל בהסתברות שווה). נסמן ב־X את המשתנה המקרי ששווה למיקום בשורה של המספר הגדול ביותר, n. X מתפלג באחידות על־פני $\{1,2,...,n\}$.
נחשב את $\mathbb{P}(A|X=k)$ עבור $1 \le k \le n$. כל סידור מתקבל בהסתברות שווה (שהיא $\frac{1}{n!}$). יש $(n-1)!$ סידורים שבהם $X=k$. נבחין שבהנתן זה שהערך n הופיע במקום ה־k הרי שכל בחירה של $k-1$ האיברים שקדמו ל־n תוביל לסדרה עולה־יורדת אחת ויחידה (וההפך, כל סדרה עולה־יורדת עם n במקום ה־k מתוארת באופן יחיד על־ידי $k-1$ המספרים הראשונים בסדרה). נבחין כי איברים אילו נבחרים מתוך $\{1,2,...,n-1\}$. מכאן ש־$\mathbb{P}(A|X=k) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{(n-1)!}$.
לבסוף, כדי לחשב את $\mathbb{P}(A)$ נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A|X=k) \cdot \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n \cdot (n-1)!} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} = \frac{2^{n-1}}{n!}$$

כאשר $2^{n-1} = (1+1)^{n-1} = \sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}$ נובע מהבינום של ניוטון.

דוגמא : בשאלה הקודמת, מה ההתפלגות של $(X \mid A)$?

פתרון: נחשב:

$$\frac{\mathbb{P}\left(A|X=k\right)\cdot\mathbb{P}\left(X=k\right)}{\mathbb{P}\left(A\right)} = \frac{\frac{1}{n\cdot(n-1)!}\binom{n-1}{k-1}}{\frac{2^{n-1}}{n!}} = \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{(n-1)-(k-1)}$$

כלומר $(X \mid A) - 1 \sim Bin\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$. גם זה מתבקש: מבין 2^{n-1} אפשרויות לאיזה איברים מופיעים בחלק העולה של הסדרה שמייצגות את איברי A, אלו שבהן $X=k$ הן תתי הקבוצות בגודל $k-1$ בדיוק.

הגדרה יהא (Ω, P) מרחב הסתברות. מ"מ X המוגדר על Ω מתפלג גיאומטרית עם פרמטר p, $X \sim Geo(p)$, אם הוא מקבל ערכים בקבוצה $\mathbb{N}$ וכן פונקציית ההסתברות האטומית שלו מקיימת

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1}\cdot p$$

הערה: אם $X \sim Geo(p)$ אז לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\begin{aligned} P(X>k) &= \sum_{i=k+1}^{\infty}(1-p)^{i-1}\cdot p \\ &(1-p)^k\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i p \\ &= (1-p)^k \end{aligned}$$

טענה יהא $X \sim Geo(p)$. אז לכל $s \in \mathbb{N}$, X ו־ $(X-s|X>s)$ שווי התפלגות.

אנחנו נראה את הכיוון ההפוך:

טענה: יהא X מ"מ עם $Im(X) \subset \mathbb{N}$ כך שלכל $s \in \mathbb{N}$, X ו־ $(X-s|X>s)$ שווי התפלגות. אזי $X \sim Geo(p)$ עבור p כלשהו.

הוכחה: נסמן $p := p_X(1)$. נוכיח שלכל $n \in \mathbb{N}$, $p_X(n) = (1-p)^{n-1}p$. עבור $n=1$ הדבר נובע מההגדרה של p. יהי $n \in \mathbb{N}$ ונניח את נכונות הטענה לכל $k < n$. נשים לב שהדבר גורר שגם $\mathbb{P}(X \le n-1)$ שווה להסתברות שמשתנה גאומטרי עם פרמטר p קטן שווה ל־$n-1$, ולכן גם

$$\mathbb{P}(X > n-1) = 1 - \mathbb{P}(X \le n-1)$$

שווה להסתברות שמשתנה גאומטרי עם פרמטר p יהיה גדול מ־n. על פי ההערה לעיל נקבל:

$$\mathbb{P}(X > n-1) = (1-p)^{n-1}$$

כעת נחשב:

$$\begin{aligned}p=p_X(1)=p_{(X-(n-1)|X>n-1)}(1)&\\ &=\mathbb{P}(X-(n-1)=1|X>n-1)\\ &=\mathbb{P}(X=n|X>n-1)\\ &=\frac{\mathbb{P}(X=n)}{\mathbb{P}(X>n-1)}\\ &=\frac{\mathbb{P}(X=n)}{(1-p)^{n-1}}\end{aligned}$$

ומכאן נקבל

$$(1-p)^{n-1}p=\mathbb{P}(X=n)$$

כמבוקש.

2 תוחלת של משתנה מקרי

הגדרה 2.1 יהי X מ"מ בדיד (כלומר מקבל מספר סופי או בן מנייה של ערכים) על מרחב הסתברות (Ω,P). התוחלת של X מוגדרת

$$E\left(X\right)=\sum_{\omega\in\Omega}X\left(\omega\right)P\left(\{\omega\}\right)=\sum_{s\in Im(X)}s\cdot p_X\left(s\right)$$

הערה: התוחלת מוגדרת רק במקרה שהטור הנ"ל מתכנס בהחלט. אחרת, למשתנה המקרי לא קיימת תוחלת.

דוגמאות

1. הטלת קוביה הוגנת -

(א) תוצאת ההטלה היא משתנה מקרי $X\sim Uni\left([6]\right)$ ולכן $E\left(X\right)=\frac{6+1}{2}=3.5$.

(ב) המשתנה שמקבל 1 אם יצא מספר זוגי ו־0 אחרת הוא הפונקציה המציינת $Y=1_{\{2,4,6\}}$ וזהו משתנה ברנולי $Y\sim Ber\left(1/2\right)$. ראיתם בהרצאה ש־ $E\left(Y\right)=1/2$.

(ג) אם מטילים N פעמים את הקוביה, אז מספר הפעמים שמתקבלת תוצאה זוגית הוא משתנה מקרי $X\sim Bin\left(N,\frac{1}{2}\right)$. ראיתם בהרצאה ש־ $E\left(X\right)=\frac{N}{2}$

טענה 2.2 יהי X משתנה מקרי המקבל ערכים ב־$\mathbb{N}$, אזי

$$E\left(X\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X\geq n\right)$$

הוכחה:

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X\geq n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P\left(X=k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}P\left(X=k\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot P\left(X=k\right)=E\left(X\right)$$

כאשר התשמשנו בכך שניתן להחליף סדר סכימה בטור של נסכמים אי־שליליים. ∎

תרגיל חשבו בעזרת נוסחת הזנב את התוחלת של משתנה מקרי גאומטרי.

יהי $X\sim Geo\left(p\right)$. נחשב:

$$P\left(X\geq n\right)=\sum_{k=n}^{\infty}P\left(X=k\right)=\sum_{k=n}^{\infty}p\left(1-p\right)^{k-1}=p\left(1-p\right)^{n-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(1-p\right)^{i}$$

$$=p\left(1-p\right)^{n-1}\frac{1}{1-\left(1-p\right)}=\left(1-p\right)^{n-1}$$

כעת נוכל לחשב את התוחלת של X:

$$E\left(X\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X\geq n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-p\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\left(1-p\right)}=\frac{1}{p}$$

תרגיל חמישה אנשים זורקים קוביות. יהיו H,L התוצאות הגבוהות ביותר והנמוכות ביותר שהתקבלו. חשבו את $E\left(H\right),E\left(L\right)$.

אנחנו נשתמש בנוסחת הזנב, ולכן ראשית כל נחשב עבור $1\leq n\leq6$ את:

$$P\left(H\geq n\right)=1-P\left(H<n\right)=1-\left(\frac{n-1}{6}\right)^{5}$$

$$P\left(L\geq n\right)=\left(\frac{7-n}{6}\right)^{5}$$

כעת נוכל למצוא את התוחלות:

$$E\left(H\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(H\geq n)=\sum_{n=1}^{6}\left(1-\left(\frac{n-1}{6}\right)^{5}\right)=6-\sum_{n=1}^{6}\left(\frac{n-1}{6}\right)^{5}$$
$$=6-\left(\frac{1}{6^{5}}+\frac{2^{5}}{6^{5}}+\frac{3^{5}}{6^{5}}+\frac{4^{5}}{6^{5}}+\frac{5^{5}}{6^{5}}\right)=6-\frac{4425}{7776}\approx5.43$$

$$E\left(L\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(L\geq n)=\sum_{n=1}^{6}\left(\frac{7-n}{6}\right)^{5}$$
$$=\frac{1}{6^{5}}+\frac{2^{5}}{6^{5}}+\frac{3^{5}}{6^{5}}+\frac{4^{5}}{6^{5}}+\frac{5^{5}}{6^{5}}+\frac{6^{5}}{6^{5}}\approx1.57$$

טענה 2.3 יהיו X,Y משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלת סופית המוגדרים באותו מרחב הסתברות, ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$. מתקיים:

$$E\left(aX+bY\right)=aE\left(X\right)+bE\left(Y\right)$$

.

באופן יותר כללי, אם $\left(X_{i}\right)_{i=1}^{N}$ משתנים מקריים כנ"ל ו־$\left(a_{i}\right)_{i=1}^{N}$ מספרים ממשיים אזי:

$$E\left(\sum_{i=1}^{N}a_{i}X_{i}\right)=\sum_{i=1}^{N}a_{i}E\left(X_{i}\right)$$

הגדרה 2.4 יהיו $X_{1},..,X_{n}$ מ"מ המוגדרים על אותו מרחב הסתברות. נאמר שהם ב"ת אם לכל תת אוסף שלהם $X_{l_{1}},...,X_{l_{k}}$ ולכל $A_{1},...,A_{k}\subset\mathbb{R}$ המאורעות

$$\{X_{l_{1}}\in A_{1}\},...,\{X_{l_{k}}\in A_{k}\}$$

הינם ב"ת.

תרגיל שני אנשים, א' ו־ב', מטילים מטבע במקביל n פעמים. המטבע עם הסתברות p ליפול על H. נסמן ב־N את מספר ההטלות בהן לא יצאה להם תוצאה זהה. חשבו את התפלגות N.

פתרון: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מ"ה המתאים לשאלה. נסמן ב־ A_{i} הוא המאורע "בהטלה ה־i של א' יצא H", ב־B_{i} את המאורע "בהטלה ה־i של ב' יצא H", ונגדיר את המ"מ X_{i},Y_{i} ($1\leq i\leq n$) באופן הבא:

$$X_{i}=1_{A_{i}}$$
$$Y_{i}=1_{B_{i}}$$

אז $X_1,...,X_n,Y_1,...,Y_n$ ב"ת, כולם שווי התפלגות עם התפלגות $ber(p)$. נסמן

$$Z_i = |X_i - Y_i|$$

ועלינו לחשב את התפלגות המ"מ $N = \sum_{i=1}^n Z_i$. מכיוון שכל אחד מהמ"מ $Z_1,...,Z_n$ מוגדר כפונקציה של מ"מ שונים, ומכיוון ש־ $X_1,...,X_n,Y_1,...,Y_n$ ב"ת, ע"פ משפט מההרצאה מתקיים ש־$Z_1,...Z_n$ ב"ת. נשים לב ש־$Im(Z_i) = \{0,1\}$ וכן

$$\begin{aligned} p_{Z_i}(1) &= P(X_i = 1, Y_i = 0) + P(X_i = 0, Y_i = 1) \\ &= p_{X_i}(1)p_{Y_i}(0) + p_{X_i}(0)p_{Y_i}(1) \\ &= 2p(1-p) \end{aligned}$$

כלומר $Z_i \sim ber(2p(1-p))$. כעת על פי משפט שלמדתם בהרצאה, סכום של n מ"מ ברנולי בלתי תלויים שוי התפלגות עם התפלגות $ber(q)$מתפלג בינומית עם פרמטרים n, q. בהקשר שלנו, נקבל:

$$N \sim Bin(n, 2p(1-p))$$

תרגיל בוחרים באקראי בהתפלגות אחידה סדרה $\omega \in \{0,1\}^n$. יהי X מספר הפעמים שמופיע הרצף "01", ויהי Y מספר הפעמים שמופיע הרצף "10".

א) מהי התוחלת של X? מהי התוחלת של Y?

ב) מהי ההתפלגות של $X+Y$?

ג) חשבו את התוחלת של $X+Y$ בשתי דרכים.

פיתרון

א) נגדיר משתנים מקריים $(X_i)_{i=1}^{n-1}$ ו־ $(Y_i)_{i=1}^{n-1}$ על ידי :

$$X_i = 1_{\{\omega_i=0,\omega_{i+1}=1\}}$$

$$Y_i = 1_{\{\omega_i=1,\omega_{i+1}=0\}}$$

מתקיים $X_i, Y_i \sim Ber\left(\frac{1}{4}\right)$ וכן $X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i, Y = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$. מלינאריות התוחלת נסיק ש:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) = \frac{n-1}{4}$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n-1} E(Y_i) = \frac{n-1}{4}$$

ב) $X + Y = \sum_{i=1}^{n-1}(X_i + Y_i)$. נשים לב שמתקיים $X_i + Y_i = 1_{\{\omega_i \neq \omega_{i+1}\}}$ ולכן $X_i + Y_i \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$. נוכיח כי $(X_i + Y_i)_{i=1}^{n-1}$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים ואז נוכל להסיק ש־ $X + Y \sim Bin\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$.

טענה : $(X_i+Y_i)_{i=1}^{n-1}$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים.

הוכחה: מכיוון שמדובר במציינים של מאורעות, צריך להראות שהמאורעות $(\{\omega_i\neq\omega_{i+1}\})_{i=1}^{n-1}$הם בלתי תלוים.

יהיו $i_1<i_2<\ldots<i_k$, נוכיח באינדוקציה על k שמתקיים:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k}\left\{\omega_{i_j}\neq\omega_{i_j+1}\right\}\right)=2^{-k}=\prod_{j=1}^{k}P\left(\left\{\omega_{i_j}\neq\omega_{i_j+1}\right\}\right)$$

ברור שהטענה מתקיימת עבור בסיס האינדוקציה $k=1$.

עבור k כללי, נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k}\left\{\omega_{i_j}\neq\omega_{i_j+1}\right\}\right)=$$

$$=P\left(\bigcap_{j=1}^{k}\left\{\omega_{i_j}\neq\omega_{i_j+1}\right\}|\omega_{i_k+1}=0\right)P\left(\omega_{i_k+1}=0\right)+P\left(\bigcap_{j=1}^{k}\left\{\omega_{i_j}\neq\omega_{i_j+1}\right\}|\omega_{i_k+1}=1\right)P\left(\omega_{i_k+1}=1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[P\left(\bigcap_{j=1}^{k}\left\{\omega_{i_j}\neq\omega_{i_j+1}\right\}|\omega_{i_k+1}=0\right)+P\left(\bigcap_{j=1}^{k}\left\{\omega_{i_j}\neq\omega_{i_j+1}\right\}|\omega_{i_k+1}=1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[P\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}\left\{\omega_{i_j}\neq\omega_{i_j+1}\right\}\cap\{\omega_{i_k}=1\}\right)+P\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}\left\{\omega_{i_j}\neq\omega_{i_j+1}\right\}\cap\{\omega_{i_k}=0\}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}P\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}\left\{\omega_{i_j}\neq\omega_{i_j+1}\right\}\right)=\frac{1}{2}\cdot2^{-(k-1)}=2^{-k}$$

כאשר נעזרנו בחישוב באדיטיביות הסתברויות של מאורעות זרים ובהנחת האינדוקציה.

ג) דרך א: ראינו ש - $X+Y\sim Bin\left(n-1,\frac{1}{2}\right)$ ולכן $E\left(X+Y\right)=\frac{n-1}{2}$ כמו שראיתם בהרצאה.

דרך ב: בעזרת לינאריות התוחלת, $E\left(X+Y\right)=E\left(X\right)+E\left(Y\right)=\frac{n-1}{4}+\frac{n-1}{4}=\frac{n-1}{2}$

הערה: שימו לב כי X,Y **אינם** מתפלגים בינומית למרות שסכומם כן.

טענה 2.5 יהיו X,Y משתנים מקריים בדידים בלתי תלויים בעלי תוחלת סופית. אזי XY בעל תוחלת סופית ומתקיים $E\left(XY\right)=E\left(X\right)E\left(Y\right)$.

טענה נהג צורך בחודש G ליטר דלק, כאשר $G\sim Bin\left(200,\frac{2}{5}\right)$. מחיר ליטר דלק P נקבע בתחילת החודש ומתפלג $P\sim U\left(\left[8\right]\right)$. מה תוחלת הוצאות הדלק של הנהג בחודש?

הוכחה הוצאות הדלק החודשיות הן GP. בעזרת טענה 1.8 נוכל לחשב:

$$E\left(GP\right)=E\left(G\right)E\left(P\right)=200\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{2}=360$$

3 תוחלת תחת התניה

הגדרה 3.1 יהי X מ"מ בדיד על מרחב הסתברות $\left(\Omega,P\right)$. יהי $A\subseteq\Omega$ מאורע בעל הסתברות חיובית. התוחלת של X בהינתן A היא:

$$E\left(X|A\right)=\sum_{\omega\in\Omega}X\left(\omega\right)P_{A}\left(\left\{ \omega\right\} \right)=\sum_{s\in Im\left(X\right)}sP\left(X=s|A\right)$$

טענה 3.2 יהי X מ"מ בדיד בעל תוחלת סופית על מרחב הסתברות $\left(\Omega,P\right)$ ותהי $\left(A_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ חלוקה של Ω. מתקיים:

$$E\left(X\right)=\sum_{n=1}^{\infty}E\left(X|A_{n}\right)P\left(A_{n}\right)$$

כאשר הנסכמים באגף ימין שווים 0 במקרה ש־ $P\left(A_{n}\right)=0$.

שאלה מטילים קוביה שוב ושוב עד שמתקבלת התוצאה "6". מה התוחלת של סכום התוצאות שהתקבלו?

הוכחה נסמן ב־ Y את מספר הזריקות עד שהתקבל "6", נסמן ב־X את סכום התוצאות ונסמן ב־ X_{i} את תוצאת ההטלה ה־ i. נחשב את התפלגות המ"מ $\left(X_{i}|Y=n\right)$ עבור $1\leq i\leq n-1$: יהי $k\in\left\{ 1,2,3,4,5\right\}$,

$$P\left(X_{i}=k|Y=n\right)=\frac{P\left(X_{i}=k,Y=n\right)}{P\left(Y=n\right)}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}=\frac{1}{5}$$

קיבלנו ש־$X_i \sim U\left([5]\right)$.

ניעזר בכך כדי לחשב:

$$E\left(X\right)=\sum_{n=1}^{\infty}E\left(X|Y=n\right)P\left(Y=n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i|Y=n\right)P\left(Y=n\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i|Y=n\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(3\left(n-1\right)+6\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{6}}+3\cdot 6=21$$

כאשר בחישוב הטור האחרון השתמשנו בכך שזיהינו אותו כתוחלת של משתנה מקרי גאומטרי עם פרמטר $\frac{1}{6}$.

הסתברות 1 - תרגול 7

11 במאי 2019

1 ליניאריות התוחלת - המשך

טענה 1.1 יהיו X, Y משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלת סופית המוגדרים באותו מרחב הסתברות, ויהיו $a, b \in \mathbb{R}$. מתקיים:

$$E\left(aX + bY\right) = aE\left(X\right) + bE\left(Y\right)$$

.

באופן יותר כללי, אם $\left(X_i\right)_{i=1}^{N}$ משתנים מקריים כנ"ל ו-$\left(a_i\right)_{i=1}^{N}$ מספרים ממשיים אזי:

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} a_i E\left(X_i\right)$$

הגדרה 1.2 יהיו $X_1, .., X_n$ מ"מ המוגדרים על אותו מרחב הסתברות. נאמר שהם ב"ת אם לכל תת אוסף שלהם $X_{l_1}, ..., X_{l_k}$ ולכל $A_1, ..., A_k \subset \mathbb{R}$ המאורעות

$$\{X_{l_1} \in A_1\}, ..., \{X_{l_k} \in A_k\}$$

הינם ב"ת.

תרגיל בוחרים באקראי בהתפלגות אחידה סדרה $\omega \in \{0,1\}^n$. יהי X מספר הפעמים שמופיע הרצף "01", ויהי Y מספר הפעמים שמופיע הרצף "10".

א) מהי התוחלת של X? מהי התוחלת של Y?

ב) מהי ההתפלגות של $X + Y$?

ג) חשבו את התוחלת של $X + Y$ בשתי דרכים.

פיתרון

א) נגדיר משתנים מקריים $(X_i)_{i=1}^{n-1}$ ו־ $(Y_i)_{i=1}^{n-1}$ על ידי :

$$X_i = 1_{\{\omega_i=0,\omega_{i+1}=1\}}$$

$$Y_i = 1_{\{\omega_i=1,\omega_{i+1}=0\}}$$

מתקיים $X_i, Y_i \sim Ber\left(\frac{1}{4}\right)$ וכן $X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i, Y = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$. מלינאריות התוחלת נסיק ש:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) = \frac{n-1}{4}$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n-1} E(Y_i) = \frac{n-1}{4}$$

ב) $X + Y = \sum_{i=1}^{n-1} (X_i + Y_i)$. נשים לב שמתקיים $X_i + Y_i = 1_{\{\omega_i \neq \omega_{i+1}\}}$ ולכן $X_i + Y_i \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$. נוכיח כי $(X_i + Y_i)_{i=1}^{n-1}$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים ואז נוכל להסיק ש־ $X + Y \sim Bin\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$.

טענה : $(X_i + Y_i)_{i=1}^{n-1}$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים.

הוכחה: מכיוון שמדובר במציינים של מאורעות, צריך להראות שהמאורעות $(\{\omega_i \neq \omega_{i+1}\})_{i=1}^{n-1}$הם בלתי תלוים.

יהיו $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, נוכיח באינדוקציה על k שמתקיים:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \left\{\omega_{i_j} \neq \omega_{i_j+1}\right\}\right) = 2^{-k} = \prod_{j=1}^{k} P\left(\left\{\omega_{i_j} \neq \omega_{i_j+1}\right\}\right)$$

ברור שהטענה מתקיימת עבור בסיס האינדוקציה $k = 1$.

עבור k כללי, נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \left\{\omega_{i_j} \neq \omega_{i_j+1}\right\}\right) =$$

$$= P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \left\{\omega_{i_j} \neq \omega_{i_j+1}\right\} | \omega_{i_k+1} = 0\right) P(\omega_{i_k+1} = 0) + P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \left\{\omega_{i_j} \neq \omega_{i_j+1}\right\} | \omega_{i_k+1} = 1\right) P(\omega_{i_k+1} = 1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[P\left(\bigcap_{j=1}^{k}\left\{\omega_{i_j} \neq \omega_{i_j+1}\right\}|\omega_{i_k+1} = 0\right) + P\left(\bigcap_{j=1}^{k}\left\{\omega_{i_j} \neq \omega_{i_j+1}\right\}|\omega_{i_k+1} = 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[P\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}\left\{\omega_{i_j} \neq \omega_{i_j+1}\right\} \cap \{\omega_{i_k} = 1\}\right) + P\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}\left\{\omega_{i_j} \neq \omega_{i_j+1}\right\} \cap \{\omega_{i_k} = 0\}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}P\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}\left\{\omega_{i_j} \neq \omega_{i_j+1}\right\}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2^{-(k-1)} = 2^{-k}$$

כאשר נעזרנו בחישוב באדיטיביות הסתברויות של מאורעות זרים ובהנחת האינדוקציה.

ג) דרך א: ראינו ש - $X + Y \sim Bin\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$ ולכן $E\left(X+Y\right) = \frac{n-1}{2}$ כמו שראיתם בהרצאה.

דרך ב: בעזרת לינאריות התוחלת, $E\left(X+Y\right) = E\left(X\right) + E\left(Y\right) = \frac{n-1}{4} + \frac{n-1}{4} = \frac{n-1}{2}$

הערה: שימו לב כי X, Y **אינם** מתפלגים בינומית למרות שסכומם כן.

טענה 1.3 יהיו X, Y משתנים מקריים בדידים בלתי תלויים בעלי תוחלת סופית. אזי XY בעל תוחלת סופית ומתקיים $E\left(XY\right) = E\left(X\right)E\left(Y\right)$.

טענה נהג צורך בחודש G ליטר דלק, כאשר $G \sim Bin\left(200, \frac{2}{5}\right)$. מחיר ליטר דלק P נקבע בתחילת החודש ומתפלג $P \sim U\left([8]\right)$. מה תוחלת הוצאות הדלק של הנהג בחודש?

הוכחה הוצאות הדלק החודשיות הן GP. בעזרת טענה 1.8 נוכל לחשב:

$$E\left(GP\right) = E\left(G\right)E\left(P\right) = 200 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{2} = 360$$

2 תוחלת תחת התניה

הגדרה 2.1 יהי X מ"מ בדיד על מרחב הסתברות (Ω, P). יהי $A \subseteq \Omega$ מאורע בעל הסתברות חיובית. התוחלת של X בהינתן A היא:

$$E\left(X|A\right) = \sum_{\omega\in\Omega} X\left(\omega\right)P_A\left(\{\omega\}\right) = \sum_{s\in Im(X)} sP\left(X = s|A\right)$$

טענה 2.2 יהי X מ"מ בדיד בעל תוחלת סופית על מרחב הסתברות (Ω, P) ותהי $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ חלוקה של Ω. מתקיים:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X|A_n) P(A_n)$$

כאשר הנסכמים באגף ימין שווים 0 במקרה ש־ $P(A_n) = 0$.

שאלה מטילים קוביה שוב ושוב עד שמתקבלת התוצאה "6". מה התוחלת של סכום התוצאות שהתקבלו?

הוכחה נסמן ב־ Y את מספר הזריקות עד שהתקבל "6", נסמן ב־X את סכום התוצאות ונסמן ב־ X_i את תוצאת ההטלה ה־ i. נחשב את התפלגות המ"מ $(X_i|Y=n)$ עבור $1 \le i \le n-1$: יהי $k \in \{1,2,3,4,5\}$,

$$P(X_i = k|Y=n) = \frac{P(X_i = k, Y=n)}{P(Y=n)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}} = \frac{1}{5}$$

קיבלנו ש־$X_i \sim U([5])$.

ניעזר בכך כדי לחשב:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X|Y=n) P(Y=n) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i|Y=n\right) P(Y=n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} E(X_i|Y=n) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (3(n-1)+6) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{6}} + 3 \cdot 6 = 21$$

כאשר בחישוב הטור האחרון השתמשנו בכך שזיהינו אותו כתוחלת של משתנה מקרי גאומטרי עם פרמטר $\frac{1}{6}$.

3 התפלגות משותפת

במקרים בהם יש לנו יותר ממשתנה מקרי אחד על אותו מרחב הסתברות, בשביל שנוכל לוותר על תיאור מפורש של מרחב ההסתברות נצטרך להשתמש ב**פונקציית ההתפלגות המשותפת**:

הגדרה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מ"ה, ויהיו $X_1, ..., X_n$ מ"מ על אותו מרחב. **פונקציית ההתפלגות המשותפת** שלהם היא פונקציה על תתי קבוצות של $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}_{X_1,...,X_n} : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0,1]$ המוגדרת לכל $A \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{P}_{X_1,...,X_n}(A) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \ (X_1(\omega), ..., X_n(\omega)) \in A\})$$

ו**פונקציית ההתפלגות המשותפת הנקודתית** $p_{X_1,...,X_n} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ מוגדרת לכל $s \in \mathbb{R}^n$:

$$p_{X_1,...,X_n}(s) = \mathbb{P}_{X_1,...,X_n}(\{s\})$$

אם נתונה התפלגות משותפת נקודתית $p_{X_1,...,X_n}$, את ההתפלגות הנקודתית של כל מ"מ בנפרד

$$p_{X_1}, ..., p_{X_n}$$

נכנה בשם **התפלגות שולית**.

טענה 3.1 יהי $\mathcal{X} = \{X_1, ..., X_n\}$ אוסף של מ"מים מעל אותו מרחב הסתברות. אז $\mathcal{X}$ הוא אוסף של מ"מים ב"ת אמ"ם מתקיים לכל $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$p_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdots p_{X_n}(x_n)$$

תרגיל 1: בכד יש 3 כדורים לבנים, 2 כדורים שחורים, וכדור אחד אפור. מוציאים ממנו שני כדורים. יהי W מספר הכדורים הלבנים שהוצאנו, ו־B מספר הכדורים השחורים שהוצאנו. חשבו את ההתפלגות המשותפת $p_{W,B}$, ואת ההתפלגויות השוליות p_W, p_B.

פתרון: נרשום בטבלה את ערכי $p_{X,Y}(i,j)$:

$W \backslash B$	0	1	2	p_B
0	0	$\binom{2}{1}\binom{1}{1}/\binom{6}{2} = \frac{2}{15}$	$\binom{2}{2}/\binom{6}{2} = \frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$
1	$\binom{3}{1}\binom{1}{1}/\binom{6}{2} = \frac{3}{15}$	$\binom{2}{1}\binom{3}{1}/\binom{6}{2} = \frac{6}{15}$	0	$\frac{9}{15}$
2	$\binom{3}{2}/\binom{6}{2} = \frac{3}{15}$	0	0	$\frac{3}{15}$
p_W	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	

בשורה התחתונה והעמודה הימנית רשמנו את ההתפלגויות השוליות p_W, p_B, המתקבלות על ידי סכימת הערכים ־ לכל $i = 0, 1, 2$,

$$\begin{aligned} p_W(i) &= \mathbb{P}(W = i) \\ &= \mathbb{P}(\bigcup_{j=0}^{2} \{W = i, B = j\}) \\ &= \sum_{j=0}^{2} p_{W,B}(i,j) \end{aligned}$$

תרגיל 2: משתנה מקרי X מתפלג באחידות ב־$\{1,\ldots,N\}$, ומשתנה מקרי Y מתפלג כך ש־$(Y \mid X=n)$ מתפלג באחידות ב־$\{1,\ldots,n\}$. כיצד מתפלג Y?

פתרון: התומך של Y הוא $\{1,\ldots,N\}$. נחשב:

$$\begin{aligned}
p_Y(m) &= P(Y=m)\\
&= \sum_{n=1}^{N} P(Y=m \mid X=n)\,P(X=n)\\
&= \sum_{n=m}^{N} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{N}
\end{aligned}$$

תרגיל 3: עבור $X \sim Bin(m,q)$ ו־Y המקיימת $(Y \mid X=n) \sim Bin(n,p)$ חשבו את התפלגות Y. **הוכחה:** ראשית נשים לב ש־$Supp(Y) \subset \{0,1,\ldots,m\}$. נחשב את ההתפלגות הנקודתית של Y. מכיוון ש־ $\mathbb{P}(\bigcup\{X=n\})=1$ והמאורעות $\{X=n\}$ זרים, ע"פ נוסחת ההסתברות השלמה, מתקיים לכל $0\le k\le m$:

$$\begin{aligned}
p_Y(k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=k \mid X=n)\,P(X=n)\\
&= \sum_{n=k}^{m} p_{(Y\mid X=n)}(k)\,p_X(n)\\
&= \sum_{n=k}^{m} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\cdot\binom{m}{n} q^n(1-q)^{m-n}\\
&= \sum_{n=k}^{m} \frac{m!}{(m-n)!k!(n-k)!} p^k(1-p)^{n-k} q^n(1-q)^{m-n}
\end{aligned}$$

מצד שני:

$$\begin{aligned}
\binom{m}{k}(pq)^k(1-pq)^{m-k} &= \binom{m}{k}(pq)^k\left((1-q)+q(1-p)\right)^{m-k}\\
&= \binom{m}{k}(pq)^k \sum_{n'=0}^{m-k}\binom{m-k}{n'}(q(1-p))^{n'}(1-q)^{m-k-n'}\\
&= \binom{m}{k}(pq)^k \sum_{n=k}^{m}\binom{m-k}{n-k}(q(1-p))^{n-k}(1-q)^{m-n}\\
&= \sum_{n=k}^{m} \frac{m!}{(m-n)!k!(n-k)!}(1-p)^{n-k} q^n (1-q)^{m-n} p^k
\end{aligned}$$

לכן $p_Y(k)=\binom{m}{k}(pq)^k(1-pq)^{m-k}$, כלומר $Y \sim Bin(m,pq)$. זה מה שהיינו מצפים מראש: עושים סדרה של m ניסויים, שלכל ניסוי יש שני שלבים: הראשון מצליח בסיכוי q,

ואם הוא מצליח מבצעים ניסוי שני, שמצליח בסיכוי p. כלומר שניהם מצליחים בסיכוי pq.
ספירת ההצלחות נותנת לנו את המ"מ Y. ■

4 שונות

השונות של מ"מ מוגדרת להיות:

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

כלומר, זו התוחלת של המשתנה המקרי $(X - \mathbb{E}(X))^2$.

יהיו X, Y שני מ"מ המוגדרים על אותו מרחב מדגם. **השונות המשותפת** של X, Y מוגדרת ע"י

$$COV(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))]$$

טענה 1 יהיו X, Y, Z מ"מ בעלי שונות סופית ויהי $a \in \mathbb{R}$.

1. $\mathrm{Var}[X + a] = \mathrm{Var}[X]$.
2. $\mathrm{Var}[aX] = a^2 \mathrm{Var}[X]$.
3. $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
4. מתקיים

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2COV(X, Y)$$

5. מתקיים

$$COV(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

6. באופן יותר כללי, אם ישנם $X_1, ..., X_n$ מ"מ אז מתקיים

$$V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{i<j} COV(X_i, X_j)$$

7. $\mathrm{Cov}[X + Y, Z] = \mathrm{Cov}[X, Z] + \mathrm{Cov}[Y, Z]$, וגם $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{Cov}[Y, X]$.

הסבר חלקי עבור חלק (3),

$$V(X + Y) = \mathbb{E}((X + Y - \mathbb{E}(X + Y))^2) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)) + (Y - \mathbb{E}(Y))^2)$$

$$= \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2+2(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))+(Y-\mathbb{E}(Y))^2) = V(X)+2COV(X,Y)+V(Y)$$

כאשר נעזרנו בלינאריות התוחלת.

עבור חלק 4, שוב בעזרת לינאריות התוחלת,

$$COV(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))\cdot(Y-\mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY-XE(Y)-E(X)Y+E(X)E(Y)) =$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y).$$

טענה 2 יהיו X, Y שני מ"מ המוגדרים על אותו מרחב מדגם. התנאים הבאים שקולים:

1. $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$
2. $COV(X,Y) = 0$.
3. $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

דוגמה 3: נחשב את השונות של משתנה מקרי בינומי. נחשב את השונות של המ"מ $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, באשר $X_1, ..., X_n$ מ"מ ב"ת עם התפלגות $X_i \sim ber(p)$ לכל $1 \le i \le n$:

$$\begin{aligned} V(X) &= V(\sum_{i=1}^{n} X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i<j} COV(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \end{aligned}$$

היות והמשתנים ב"ת. נותר לחשב שונות של משתנה ברנולי:

$$\begin{aligned} \ldots &= n \cdot \left((1-p)^2 p + (0-p)^2(1-p)\right) \\ &= n(1-p)p \end{aligned}$$

דוגמה 4: בעיית הדוור המבולבל: מסדרים את המספרים $\{1, ..., n\}$ בשורה, בהסתברות אחידה על כל אפשרות סידור. יהא X המ"מ המקרי המתאר את כמות המספרים שנמצאים במקומם. לדוגמה, עבור $n = 5$, בסידור

$$\omega = (3\,1\,2\,4\,5)$$

מתקיים $X(\omega) = 2$. נרצה לחשב את השונות של המ"מ X. ניעזר בשיטת החלוקה למציינים: יהא $X_i \sim ber(\frac{1}{n})$ המ"מ שנותן 1 אם המספר i נמצא במקום ה־i, ו 0 אחרת. מכיוון ש

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

נקבל מלינאריות התוחלת ש־

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)=n\cdot\frac{1}{n}=1.$$

החיים שלנו היו קלים לו המ"מ היו ב"ת ־ זה לא המצב (מדוע?). נבחין, אם כך, שהמשתנה המקרי $X_1\cdot X_2\sim ber(\frac{1}{n(n-1)})$, וכך נכון לכל X_iX_j כך ש $i<j$. לכן

$$COV(X_1,X_2)=\mathbb{E}(X_1X_2)-\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2(n-1)}$$

לבסוף, לפי טענה 1 חלק 3 ולפי החישוב שעשינו קודם לכן של שונות של מ"מ ברנולי מתקיים

$$V(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)+2\sum_{i<j}COV(X_i,X_j)=n\cdot\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})+2\cdot\binom{n}{2}\frac{1}{n^2(n-1)}=1$$

הסתברות 1 - תרגול 7

11 במאי 2019

1 עוד על תוחלת ושונות

הגדרה 1.1 יהא X מ"מ. נאמר ש X מתפלג פואסון עם פרמטר λ, ונכתוב $X \sim poi(\lambda)$, אם $Im(X) = \mathbb{N} \cup \{0\}$ וכן לכל k בטווח

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

דוגמאות נוספות לחישוב שונות

1. גלגול קוביה הוגנת הוא $X \sim U[6]$ וראינו ש-$E[X] = 3.5$. חישוב לפי הנוסחה $\mathrm{Var}[U\{1, ..., N\}] = \frac{N^2-1}{12}$ נותן

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{36-1}{12} = \frac{35}{12}$$

2. הטלת מטבע עם הסתברות q ל-H היא מ"מ ברנולי $X \sim \mathrm{Ber}(q)$ עם תוחלת q ושונות $\mathrm{Var}[X] = q(1-q)$.
3. ספירה של H ברצף של N הטלות של המטבע מהדוגמא הקודמת זה מ"מ בינומי $X \sim \mathrm{Bin}(N, q)$ בעל תוחלת $E[X] = Nq$ ושונות $\mathrm{Var}[X] = Nq(1-q)$ (הוכחנו בתרגול הקודם).
4. נתבונן במשתנה פואסון $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$. נחשב את התוחלת שלו:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

כאשר נעזרנו בפיתוח טיילור של האקספוננט בשוויון הרביעי. עבור השונות, נחשב ראשית

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!} \lambda^{k-1}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{(k-1)!} \lambda^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \lambda^{k-1}) = \lambda e^{-\lambda} (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda})$$

כאשר בשורה השנייה השתמשנו באותו הרעיון כמו בחישוב התוחלת (פיתוח טיילור של האקספוננט). לפיכך

$$E(X^2) - E(X)^2 = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda.$$

5. נתבונן במ"מ $X \sim \mathrm{Geo}\,(q)$. ראינו ש־$E\,[X] = {}^1/_q$. נחשב את השונות. ראשית, לפי הנוסחה של טור הנדסי, עבור $|x| < 1$ מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

ע"י גזירה פעמיים משני הצדדים נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n-1)\,x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad (1)$$

כשהגזירה באגף שמאל מותרת, כי הטורים "הגזורים" מתכנסים עבור $|x| < 1$.

$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] - E\,[X] = E\,[X\,(X-1)] &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,(n-1)\,q\,(1-q)^{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,q\,(1-q)^{n-1} \\ &= q\,(1-q) \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,(1-q)^{n-2} \\ (\mathrm{eq.}\,1, x = 1-q) &= q\,(1-q)\,\frac{2}{q^3} = \frac{2\,(1-q)}{q^2} \end{aligned}$$

כך ש־

$$E\left[X^2\right] = \frac{2\,(1-q)}{q^2} + \frac{1}{q}$$

ולכן,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,[X] = E\left[X^2\right] - E\,[X]^2 &= \frac{2\,(1-q)}{q^2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{q^2} \\ &= \frac{2-2q+q-1}{q^2} = \frac{1-q}{q^2} \end{aligned}$$

דוגמא (אספן הקופונים) בעיתון מחלקים בכל יום קופון שמוגרל באופן מקרי מתוך n קופונים בהסתברות אחידה. אספן מחליט להתחיל לאסוף את הקופונים החל מיום מסויים. יהא X המ"מ שמסמן את מספר הימים מהרגע שהאפסן החלט לאסוף ועד שהוא מצא את כולם. חשבו את תוחלת ושונות X .

נסמן X_i כמות הקופונים שקנה האספן אחרי שמצא $i-1$ קופונים ועד שמצא סוג נוסף, הרי ש־

$$X_i \sim \text{Geo}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$$

שימו לב ש־$X_1 \sim \text{Geo}\,(1)$ כי בתחילת האיסוף הקופון הראשון שנקנה הוא אוטומטית קופון חדש.

המ"מ ב"ת ־ לא משנה כמה זמן לקח למצוא את הסוגים הקודמים, הזמן שייקח למצוא אחד נוסף הוא אותו דבר. אם כך, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. לכן, מלינאריות התוחלת

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{1}^{n} \frac{n}{n-i-1} = n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-i-1} = n\sum_{1}^{n} i \sim n\log n$$

מלינאריות השונות עבור מ"מ ב"ת:

$$\begin{aligned}
\text{Var}\,[X] &= \sum_{i=1}^{n}\text{Var}\,[X_i] = \sum_{i=1}^{n}\frac{1-\left(\frac{n+1-i}{n}\right)}{\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)/n}{(n+1-i)^2/n^2} \\
&= n\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{(n+1-i)^2} \\
(j=n+1-i) &= n\sum_{j=1}^{n}\frac{n-j}{j^2} \\
&= n^2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} - n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} \\
&\le n^2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} \\
&\le n^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2} = \frac{(n\pi)^2}{6}
\end{aligned}$$

דוגמא נגדיר את המ"מ X כדלקמן: $Im(X)=\mathbb{N}$, ו־

$$P(X=n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}$$

ידוע ש

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

ולכן X אכן מ"מ לגיטימי. מצד שני

$$\begin{aligned}E\left[X\right]&=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{6}{\pi^2n^2}\\&=\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty.\end{aligned}$$

2 אי־שוויון מרקוב

טענה 2.1 יהי X משתנה מקרי אי־שלילי בעל תוחלת. אזי לכל $a>0$ מתקיים

$$P\left(X\geq a\right)\leq\frac{E\left(X\right)}{a}$$

דוגמא נתון כי מספר הזוכים בלוטו בחודש מתפלג $W\sim Poiss\left(3\right)$ ומספר האנשים שנפגעים מברק בחודש מתפלג $L\sim Poiss\left(2\right)$ באופן בלתי תלוי. חסמו את ההסתברות שמתקיים $W\geq\frac{100}{L+1}$.

פיתרון ראשית נשים לב כי:

$$P\left(W\geq\frac{100}{L+1}\right)=P\left(W\left(L+1\right)\geq100\right)$$

מכיוון ש־ W,L הם מ"מ בלתי תלויים, נוכל להשתמש בכך כדי לחשב את התוחלת של אגף שמאל:

$$E\left(W\left(L+1\right)\right)=E\left(W\right)E\left(L+1\right)=3\cdot\left(2+1\right)=9$$

בעזרת א"ש מרקוב נוכל לקבל כעת:

$$P\left(W\left(L+1\right)\geq100\right)\leq\frac{9}{100}$$

דוגמא מטילים מטבע שנופל על ראש בהסתברות p 20 פעמים. חסמו את ההסתברות שהרצף "HH" התקבל פחות מפעמיים.

תהי $\omega \in \{H,T\}^{20}$ סדרת התוצאות. נסמן ב־ X את מספר הפעמים שהרצף "HH" הופיע, ונגדיר $X_i = 1_{\{\omega_i=\omega_{i+1}=H\}}$. מתקיים $X_i \sim Ber\left(p^2\right)$ ולכן:

$$E\left(X\right) = E\left(\sum_{i=1}^{19} X_i\right) = \sum_{i=1}^{19} E\left(X_i\right) = 19p^2$$

מכיוון ש־ $X \leq 19$, נוכל להשתמש בא"ש מרקוב כדי להעריך:

$$P\left(X \leq 1\right) = P\left(19 - X \geq 18\right) \leq \frac{E\left(19-X\right)}{18} = \frac{19\left(1-p^2\right)}{18}$$

3 א"ש צ'בישב

משפט 3.1 (א"ש צ'בישב) יהי X מ"מ בעל תוחלת ושונות סופיות. <u>אזי</u> לכל $a > 0$ מתקיים

$$P\left(\left|X - E\left[X\right]\right| > a\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left[X\right]}{a^2}$$

דוגמאות

1. במקרה של משתנה פואסון $X \sim \mathrm{Poi}\left(\lambda\right)$ נראה ש־

$$P\left(X > 2\lambda\right) = P\left(\left|X - E\left[X\right]\right| > \lambda\right) \leq \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

כך שלמשל, אם $\lambda = 5$ ההסתברות לקבל תוצאה גדולה מ־10 היא פחות מ־0.2.

הערה 3.2 חשוב לשים לב שהשוויון הראשון הוא בעצם אי־שוויון, כי הוספנו את המאורע

$$X < -\lambda$$

אבל מאחר ו־X מקבל רק ערכים אי־שליליים, הסתברות מאורע זה היא 0.

2. בדוגמה של אספן הקופונים, היינו רוצים לדעת מהו הטווח של מספר הקופונים שיידרשו שבסבירות של לפחות 75% X ייפול בתוכו. כלומר אנו מחפשים r כך

שהסבירות ש־X ייפול רחוק יותר מ־r מהתוחלת הוא לכל היותר 0.25 ־ כי זה המאורע המשלים.

$$P\left(\left|X-E\left[X\right]\right|>r\right)\leq\frac{1}{4}$$
$$P\left(\left|X-E\left[X\right]\right|>r\right)\leq\frac{\mathrm{Var}\left[X\right]}{r^{2}}\leq\frac{\left(n\pi\right)^{2}}{6r^{2}}\leq\frac{1}{4}$$

כלומר, אנו רוצים

$$r^{2}\geq\frac{\left(2\pi n\right)^{2}}{6}$$
$$r\geq\frac{2\pi n}{\sqrt{6}}$$

למשל, עבור $n=10$ נקבל שיספיק לדרוש

$$r\geq\frac{20\pi}{2}=10\pi\sim32$$

כלומר טווח של 32 סביב התוחלת יבטיח שב־75%מהמקרים נקנה מספר קופונים בתוך הטווח הזה.

3. נניח ש $X\sim U\left[11\right]$. מה ההסתברות ש־X רחוק מהתוחלת שלו ביותר מ 4?
את התוחלת אנו יודעים לחשב:

$$E\left[X\right]=\frac{11+1}{2}=6$$

נבחין שהטווח של X^{2} הוא הקבוצה $\{1,4,16...,100,121\}$ וכן ש־

$$E\left[X^{2}\right]=\sum_{i=1}^{11}\frac{1}{11}i^{2}=\frac{1}{11}11(11+1)(22+1)\cdot\frac{1}{6}=46$$

ועל כן

$$\mathrm{Var}\left[X\right]=E\left[X^{2}\right]-E\left[X\right]^{2}=46-36=10$$

ומכאן

$$P(|X-E\left[X\right]|>4)\leq\frac{\mathrm{Var}\left[X\right]}{16}=\frac{10}{16}.$$

מצד שני, אפשר לחשב את ההסתברות הזאת גם באופן ישיר:

$$P(|X-\mathbb{E}(X)|>4)=P(X=1)+P(X=11)=\frac{2}{11}$$

רואים שהחסם שקיבלנו בעזרת צ'בישב איננו הדוק.

4. יהא X סכום הכסף שמושך לקוח מקרי מכספומט. ידוע שבממוצע מושכים לקוחות 150 ש"ח. מה ההסתברות שלקוח מקרי יוציא לפחות 250 ש"ח?

כאן נעזר באי שוויון מרקוב. לפי הנתון $E[X]=150$. לכן

$$P(X \geq 250) \leq \frac{E[X]}{250} = \frac{150}{250} = \frac{3}{5}.$$

נניח כעת שנתון בנוסף $\operatorname{Var}[X]=2500$. כאן חשוב לראות שאי שוויון צ'בישב לא מטפל בנפרד במאורע

$$\{X \geq 250\} = \{X-150 \geq 100\}$$

כל שנוכל להסיק מאי שוויון צ'בישב הוא, אם כך,

$$P(X \geq 250) \leq P(X \geq 250) + P(X \leq 50) = P(|X-150| \geq 100)$$
$$\leq \frac{\operatorname{Var}[X]}{100^2} = \frac{2500}{100^2} = \frac{1}{4}$$

נשים לב שהמידע לגבי השונות של X סייע לנו לשפר את החסם שקיבלנו, אפילו שחסמנו את ההסתברות של מאורע גדול יותר!

5. סופר מתוסכל שואל סטודנטים בקמפוס באופן מקרי האם הם קראו ספר כלשהו שהוא כתב או לא. נסמן ב p את אחוז התלמידים שקרא ספר של הסופר. נניח שהסופר שאל n תלמידים. נסמן את כמות התלמידים שהשיבו בכן לשאלה ב X. ננסה להעריך את p בעזרת הפונקציה $\frac{X}{n}$. כמה תלמידים צריך לשאול כדי להבטיח שהמרחק בין $\frac{X}{n}$ לבין p לא עולה על 0.1 בהסתברות 0.95 ?

נבחין, אם כך, ש $X \sim bin(n,p)$ כאשר אנחנו מנסים להעריך את p. אנחנו מחפשים n כך ש

$$P(|\frac{X}{n} - p| \geq 0.1) \leq 0.05.$$

מכיוון ש X מתפלג בינומית אז $V(X) = np(1-p) \leq \frac{n}{4}$ כי $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ לכל $0 \leq p \leq 1$ (בדקו שזה נכון!). מתכונות השונות נקבל ש

$$V(\frac{X}{n}) = \frac{V(X)}{n^2} \leq \frac{1}{4n}$$

ולכן מאי שוויון צ'בישב

$$P(|\frac{X}{n} - p| \geq 0.1) \leq \frac{V(\frac{X}{n})}{0.1^2} \leq \frac{1}{4n0.1^2} = \frac{25}{n}$$

ואם ניקח $n=500$ נקבל ש $P(|\frac{X}{n}-p| \geq 0.1) \leq 0.05$ ולכן

$$P(|\frac{X}{n} - p| < 0.1) = 1 - P(|\frac{X}{n} - p| \geq 0.1) \geq 1 - 0.05 = 0.95$$

כנדרש.

הסתברות 1 ־ תרגול 9

19 במאי 2019

1 אי־שיוויונות ־ המשך

דוגמא סופר שואל סטודנטים בקמפוס באופן מקרי האם הם קראו ספר כלשהו שהוא כתב או לא. נסמן ב q את אחוז התלמידים שקרא ספר של הסופר. נעריך את q.

נניח שהסופר שאל n תלמידים. נסמן את כמות התלמידים שהשיבו בכך לשאלה ב־X.

ננסה להעריך את q בעזרת הפונקציה $\frac{X}{n}$.

כמה תלמידים צריך לשאול כדי להבטיח שהמרחק בין $\frac{X}{n}$ לבין q לא עולה על 0.1 בהסתברות 0.95 ?

לפי הנתון $X \sim bin(n,q)$ ולכן $E\left[\frac{X}{n}\right] = q$. אנחנו מחפשים n כך ש־

$$P(\left|\frac{X}{n} - q\right| \geq 0.1) \leq 0.05$$

מכיוון ש X מתפלג בינומית אז $\mathrm{Var}\left[X\right] = nq(1-q) \leq \frac{n}{4}$ כי $q(1-q) \leq \frac{1}{4}$ לכל $0 \leq q \leq 1$ (בדקו שזה נכון!). מתכונות השונות נקבל ש

$$V(\frac{X}{n}) = \frac{V(X)}{n^2} \leq \frac{1}{4n}$$

ולכן מאי שוויון צ'בישב

$$P(|\frac{X}{n} - q| \geq 0.1) \leq \frac{V(\frac{X}{n})}{0.1^2} \leq \frac{1}{4n \cdot 0.01} = \frac{100}{4n} = \frac{25}{n}$$

ואם ניקח $n = 500$ נקבל ש $P(|\frac{X}{n} - q| \geq 0.1) \leq 0.05$ ולכן

$$P(|\frac{X}{n} - q| \geq 0.1) < \frac{25}{500} = 0.05$$

כנדרש.

1.1 פונקציה יוצרת מומנטים

הגדרה 1.1 המומנט ה־k של מ"מ X הוא $m_k(X) = E\left[X^k\right]$ אם תוחלת זו קיימת.
הפונקציה יוצרת המומנטים של X היא $M_X(t) = E\left[e^{tX}\right]$.

משפט 1.2 הנגזרת ה־k־ית של M_X ב־0 היא המומנט ה־k:

$$M_X^{(k)}(0) = E\left[X^k\right] = m_k(X)$$

כמו כן, אם X, Y מ"מ ב"ת אז $M_{X+Y}(t) = M_X(t)\, M_Y(t)$.

משפט 1.3 (הסטטיסטיקאי חסר ההכרה) יהיו X מ"מ g פונקציה. אזי

$$E[g(x)] = \sum_{x \in \mathrm{Supp}X} g(x)\, p_X(x)$$

דוגמאות:

1. יהי $X \sim ber(q)$, אז

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] = e^{t\cdot 1} q + e^{t\cdot 0}(1-q) \\ &= qe^t + 1 - q \end{aligned}$$

2. יהא $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ כש־$X_i \sim \mathrm{Ber}(q)$ ב"ת. אז $X \sim bin(n,q)$ ולכן מהנוסחה של החיבור

$$\begin{aligned} M_X(t) &= M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \left(qe^t + 1 - q\right)^n \end{aligned}$$

3. יהי $X \sim geo(q)$. נחשב את $M_X(t)$

$$\begin{aligned} M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn} q (1-q)^{n-1} \\ &= e^t q \sum_{n=1}^{\infty} e^{t(n-1)} (1-q)^{n-1} \\ &= e^t q \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^t(1-q)\right]^{n-1} \\ &= \frac{e^t q}{1 - e^t(1-q)} \end{aligned}$$

שימו לב שכדי שטור החזקות שבחשבון יתכנס, עלינו לדרוש $e^t(1-q) < 1$ (אין צורך בערך מוחלט כי הביטוי משמאל אי־שלילי לכל t ו־$0 \le q \le 1$). לפיכך

$$\begin{aligned} & e^t < (1-q)^{-1} \\ \Leftrightarrow & \ t < -\ln(1-q) \end{aligned}$$

כלומר ל־$M_X(t)$ של המ"מ הגאומטרי יש תחום הגדרה שאינו כל $\mathbb{R}$.

הערה 1.4 כשאתם מתבקשים לחשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של מ"מ כלשהו, תחום ההגדרה הוא חלק אינטגרלי מהתשובה! דהיינו, עליכם לומר עבור אלו ערכי t הפונקציה $M_X(t)$ מוגדרת. בדוגמאות לעיל תחום ההגדרה בכל מקום שלא הזכרנו אותו, היה כל $\mathbb{R}$.

משפט 1.5 (א"ש צ'רנוף) יהי X מ"מ, אזי לכל $a, t > 0$, מתקיים

$$P(X \ge a) \le M_X(t)\, e^{-ta}$$

הוכחה: יהיו $a, t > 0$. נגדיר $Y = e^{tX}$ שזה מ"מ אי־שלילי בעל תוחלת

$$E[Y] = E\left[e^{tX}\right] = M_X(t)$$

מתקיים $X \ge a$ אם ורק אם $Y = e^{tX} \ge e^{ta}$, ולכן

$$\begin{aligned} P(X \ge a) &= P\left(Y \ge e^{ta}\right) \\ \text{(Markov)} \quad &\le E[Y]/e^{ta} \\ &= M_X(t)\, e^{-ta} \end{aligned}$$

■

הערה 1.6 שימו לב שלכל a קיבלנו כאן המון (אינסוף) שיוויונים בבת־אחת, לכל t בתחום ההגדרה. בהינתן אי־השיוויון הזה עלינו עכשיו לחפש t שימזער את אגף ימין כדי לקבל את החסם הטוב ביותר.

דוגמא כזכור ראינו שלמשתנה $X \sim poi(\lambda)$ יש שונות ותוחלת λ ואז בעזרת א"ש צ'בישב הראינו

$$P(|X-\lambda| \ge \lambda) \le \frac{1}{\lambda}$$

עכשיו נשתמש בא"ש צ'רנוף ובחישוב שיש לנו של $M_X(t)$ ונקבל לפי תרגיל הבית

$$\begin{aligned} P(X \ge 2\lambda) &\le e^{\lambda\left(e^t-1\right)} e^{-2t\lambda} \\ &= \exp\left(\lambda e^t - \lambda - 2t\lambda\right) \end{aligned}$$

וכדי למזער את אגף ימין עלינו למצוא נק' מינימום של המעריך. נגדיר

$$\begin{aligned} f(t) &= \lambda e^{t} - \lambda - 2t\lambda \\ f'(t) &= \lambda e^{t} - 2\lambda \\ f''(t) &= \lambda e^{t} > 0 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} f'(t) = 0 &\Leftrightarrow \lambda e^{t} = 2\lambda \\ &\Leftrightarrow t = \ln 2 \end{aligned}$$

וזו תהיה נק' מינימום. נציב ונקבל

$$\begin{aligned} P(X > 2\lambda) &\le \exp\left(\lambda e^{\ln 2} - \lambda - 2\lambda \ln 2\right) \\ &= \exp(2\lambda - \lambda - 2\lambda \ln 2) \\ &= e^{\lambda} e^{-2\lambda \ln 2} = \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda} \end{aligned}$$

.

1.2 א"ש הופדינג

משפט 1.7 יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ מ"מ ב"ת $IM(X_i) \subseteq [-1,1]$ ו־$E[X_i] = 0$ לכל i. אזי

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \ge a\right) \le \exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right)$$

דוגמא שיכור עומד על ציר המספרים השלמים. הוא מטיל מטבע שנופל על ראש בהסתברות $q > \frac{1}{2}$. אם יצא לו ראש הוא הולך צעד ימינה (ואז נוחת על המספר 1), ואם יצא לו פלי הוא הולך צעד אחד שמאלה (ואז נוחת על המספר -1). הוא מבצע n הטלות מטבע כנ"ל באופן ב"ת. יהא X_n מיקומו אחרי n הצעדים הנ"ל. ניעזר במשפט הופדינג על מנת לחסום את $P(X_n = 0)$.

נפרק את $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ כאשר $P(Y_i = 1) = q$ וכן $P(Y_i = -1) = 1 - q$. אז

$$\mathbb{E}(Y_i) = q + (-1)(1-q) = 2q - 1$$

נגדיר כעת מ"מ חדשים, לכל $1 \le i \le n$, ע"י

$$Z_i = \frac{(2q-1) - Y_i}{1 + (2q-1)}$$

וכעת מלינאריות התוחלת

$$\mathbb{E}(Z_i) = 0$$

נשים לב ש־

$$0 < 2q - 1 < 1 \Leftarrow q > \frac{1}{2}$$

ומכיוון ש $Y_i \in \{-1, 1\}$ אז $|Z_i| \leq 1$ כי

$$-1 \leq \frac{(2q-1)-1}{1+(2q-1)} \leq \frac{(2q-1)-Y_i}{1+(2q-1)} \leq \frac{(2q-1)+1}{1+(2q-1)} \leq 1$$

כעת, נבחין ש

$$S = \sum_{i=1}^{n} Z_i = \frac{1}{1+(2q-1)} \sum_{i=1}^{n} ((2q-1) - Y_i) = \frac{1}{1+(2q-1)} (n\,(2q-1) - X_n)$$

ולכן

$$X_n \leq 0 \iff S \geq \frac{n\,(2q-1)}{1+(2q-1)}$$

לבסוף, נבחין ש S והמ"מ Z_i עומדים בתנאי אי־שוויון הופדינג, ולכן

$$P(X_n = 0) \leq P(X_n \leq 0) = P(S \geq \frac{n\,(2q-1)}{1+(2q-1)}) \leq$$
$$\leq \exp\left(\frac{-(\frac{n(2q-1)}{1+(2q-1)})^2}{2n}\right) = \exp\left(-n\frac{(2q-1)^2}{8q^2}\right)$$

למשל, עבור $n = 4$, ו־$q = \frac{3}{4}$ נקבל שההסתברות שהשיכור יחזור להתחלה חסומה ע"י

$$\exp\left(-4 \cdot \frac{(3/2-1)^2}{8 \cdot 9/16}\right) = \exp\left(-4 \cdot \frac{1/4}{9/2}\right) = \exp\left(-\frac{2}{9}\right) \approx 0.8$$

בפועל האפשרויות לחזור הן שבוחרים שתי הטלות שיצאו עץ ושתיים שיצאו פלי, אז ההסתברות היא

$$\binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 6 \cdot \frac{9}{256} \approx \frac{1}{5}$$

2 נוסחת הקונבולוציה

טענה 2.1 יהיו $X, Y : \Omega \to \mathbb{Z}$ מ"מ ב"ת. אז לכל $n \in \mathbb{Z}$

$$p_{X+Y}(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_X(k) p_Y(n-k)$$

הוכחה:

$$p_{X+Y}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(k, n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k) p_Y(n-k)$$

$\blacksquare$

טענה: יהי $X \sim Po(\lambda)$. אם $Y \sim Po(\eta)$ ב"ת ב־X, אז $(X+Y) \sim Po(\lambda+\eta)$

הוכחה:

ראשית נשים לב ש־$IM(X+Y) \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$. נחשב לכל n את ההתפלגות הנקודתית של $X+Y$:

$$\begin{aligned} p_{X+Y}(n) &= \sum_{k=0}^{n} p_{X,Y}(k, n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} p_X(k) p_Y(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \frac{\eta^{n-k} e^{-\eta}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\eta)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \eta^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\eta)} (\lambda+\eta)^n}{n!} \end{aligned}$$

כאשר בשויון השני השתמשנו באי תלות של X ו־Y, ובאי השויון האחרון השתמשנו בנוסחת הבינום.

הסתברות 1 ־ תרגול 10

22 במאי 2019

1 החוק החלש של המספרים הגדולים

משפט 1.1 יהא $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ מ"ה כלשהו, ויהיו $X_1, .., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ מ"מ מקריים ב"ת ש"ה בעלי תוחלת ושונות סופית. אז לכל $\epsilon > 0$

$$\lim_n P(|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - E(X_1)| \geq \epsilon) = 0$$

הוכחה: נובע מאי־שוויון צ'בישב: נבחין ש

$$E(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}) = \frac{1}{n} E(X_1 + ... + X_n) = \frac{1}{n} \cdot nE(X_1) = E(X_1)$$

ולכן לכל $\epsilon > 0$ מתקיים

$$P(|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - E(X_1)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(\frac{X_1 + ... + X_n}{n})}{\epsilon^2} = \frac{V(X_1 + ... + X_n)}{\epsilon^2 n^2} = \frac{nV(X_1)}{\epsilon^2 n^2}$$

כאשר נעזרנו באי התלות בשוויון הלפני אחרון. ■

2 משתנים מקריים רציפים

2.1 הגדרות ותכונות בסיסיות

תזכורת יהא X מ"מ המוגדר על מ"ה כלשהו $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. פונקציית ההתפלגות המצטברת של X היא פונקצייה $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימת, לכל $t \in \mathbb{R}$,

$$F_X(t) = P(X \leq t)$$

בפרט, לכל $a<b$ ממשיים מתקיים ש

$$P(X\in(a,b])=P(a<X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)=F_X(b)-F_X(a).$$

הגדרה יהא X מ"מ. נאמר ש X הוא מ"מ רציף אם קיימת פונקציה $f_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית אי שלילית כך שלכל $t\in\mathbb{R}$

$$F_X(t)=P(X\le t)=P(\{\omega:X(\omega)\le t\})=\int_{-\infty}^{t}f_X(s)ds$$

הפונקציה f_X מכונה פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X.

הערה אם למשתנה המקרי X יש טווח בן מנייה נאמר ש X הוא משתנה מקרי בדיד. נעיר שקיימים משתנים מקריים שאינם רציפים ואינם בדידים.

טענה יהא X משתנה מקרי רציף. אז מתקיים:

1. לכל $a<b\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$P(\{\omega:X(\omega)\in(a,b])=P(a<X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)=\int_a^b f_X(t)dt$$

2. אם $A\subset\mathbb{R}$ היא איחוד של קטעים זרים מהצורה $(a_i,b_i]$ אז

$$P(\{\omega:X(\omega)\in A)=P(X\in A)=\int_A f_X(t)dt$$

3. נרמול:

$$\int_{\mathbb{R}}f_X(t)dt=1$$

4. רציפות: פונקצית ההתפלגות המצטברת F_X היא רציפה. בפרט $P(X=a)=0$ לכל $a\in\mathbb{R}$.

הוכחה נזכר בהוכחה של 4. יהא $a\in\mathbb{R}$,

$$F_X(a)=\int_{-\infty}^{a}f_X(t)dt=\lim_{x\to a}\int_{-\infty}^{x}f_X(t)dt=\lim_{x\to a}F_X(x)$$

כאשר השיווין האמצעי נובע מכך שהפונקציה f_X אינטגרבילית. מכיון שלכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{a\}\subset[a-\epsilon,a]$ עבור כל $\epsilon>0$, הרי שקיבלנו

$$P(X=\{a\})\le\lim_{\epsilon\to 0}P(X\in(a-\epsilon,a])=\lim_{\epsilon\to 0}F_X(a)-F_X(a-\epsilon)=0$$

כנדרש.

דוגמא נתון X משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות מהצורה הבאה: אם $t \notin [0,2]$ אז $f_X(t) = 0$ ואחרת

$$f_X(t) = 2C(2x - x^2).$$

חשבו את הערך של C, את ההסתברות ש $X > 1$ ואת פונקציית ההתפלגות המצטברת של X.

ראשית, נחשב את C. לשם כך, נעזר בחלק 3 של הטענה למעלה:

$$1 = \int_0^2 2C(2x - x^2) = 2C\int_0^2 (2x - x^2) = 2C(4 - \frac{8}{3}) = \frac{8C}{3}$$

ולכן $C = \frac{3}{8}$. מכאן,

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \int_{-\infty}^1 f_X(t) = \int_1^\infty f_X(t)dt$$

$$= 2C\int_1^2 (2x - x^2)dx = \frac{1}{2}$$

לבסוף, נחשב את $F_X(x) := P(X \leq x)$. עבור $x < 0$ נקבל $F_X(x) = 0$. עבור $0 \leq x \leq 2$ נקבל

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = 2C\int_0^x (2t - t^2)dt = 2C(2x - \frac{x^3}{3}) = \frac{3}{4}(2x - \frac{x^3}{3})$$

ועבור $x \geq 2$ נקבל $F_X(x) = 1$.

הטענה הבאה מאפשרת לנו להגדיר מ"מ באמצעות פונקציית צפיפות נתונה:

טענה תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקצייה אינטגרבילית, אי שלילית, המקיימת $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = 1$. אז קיים מ"מ X כך ש f היא פונקציית הצפיפות שלו.

נעזר בטענה על מנת לבנות מ"מ רציפים.

2.2 ההתפלגות האחידה

הגדרה משתנה מקרי רציף X מתפלג אחיד בקטע $[a,b]$ אם $f_X(t) = 0$ עבור $t \notin [a,b]$ ואחרת

$$f_X(t) = \frac{1}{b-a}$$

במצב הזה נסמן $X \sim U([a,b])$.

דוגמא אוטובוס מגיע לתחנה כל 15 דקות החל משעה עגולה (כולל). אדם מגיע לתחנה בין $7:00$ ל $7:30$, וזמן ההגעה שלו מפולג באופן אחיד. מה ההסתברות שהוא יחכה פחות מ 5 דקות?

יהא X המשתנה המקרי שמתאר את זמן ההגעה של האדם בדקות אחרי 7:00. אז $X \sim U([0,30])$. יהא Y המשתנה המקרי שמתאר את הזמן בו האדם חיכה. אז

$$P(Y \le 5) = P(\{X=0\} \bigcup \{10 \le X \le 15\} \bigcup \{25 \le X \le 30\})$$

$$= P(X=0)+P(10 \le X \le 15)+P(25 \le X \le 30) = 0+\int_{10}^{15} \frac{1}{30}dx+\int_{25}^{30} \frac{1}{30}dx = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

2.3 ההתפלגות המעריכית

הגדרה מ"מ רציף מתפלג מעריכית (או אקספוננציאלית) עם פרמטר λ , מה שנסמן ע"י $X \sim Exp(\lambda)$, אם פונקציית הצפיפות שלו נתונה ע"י $f_X(x) = 0$ לכל $x < 0$ ולכל $x \ge 0$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

לכן, פונקציית ההתפלגות המצטברת של X נתונה ע"י $F_X(x) = 0$ עבור $x \le 0$ ועבור $x > 0$ נקבל

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

דוגמא נניח שזמן שיחת טלפון בדקות הוא מ"מ $X \sim Exp(\frac{1}{10})$. מה ההסתברות ששיחה נתונה תמשך יותר מ 10דקות?

נחשב:

$$P(X > 10) = 1 - P(X \le 10) = 1 - (1 - e^{-\frac{10}{10}}) = e^{-1}$$

נניח כעת שידוע לנו ששיחה נמשכה יותר מ 10 דקות, מה ההסתברות שהיא תמשך יותר מ 20 דקות?

נחשב:

$$P(X > 20 | X > 10) = \frac{P(X > 20, X > 10)}{P(X > 10)} = \frac{P(X > 20)}{e^{-1}}$$

$$= \frac{1 - P(X \le 20)}{e^{-1}} = \frac{1 - (1 - e^{-2})}{e^{-1}} = \frac{e^{-2}}{e^{-1}} = e^{-1}$$

כלומר, $P(X > 20 | X > 10) = P(X > 10)$.

תזכורת יהא X מ"מ, אם לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים שהמ"מ X ו $(X-t|X>t)$ שווי התפלגות, נאמר ש X הוא מ"מ חסר זיכרון. ראינו בעבר שאם $X \sim Geo(p)$ אז X חסר זיכרון.

טענה יהא $X \sim Exp(\lambda)$. אז X חסר זיכרון.

טענה יהא X מ"מ רציף כך ש $P(X \in [0,\infty)) = 1$, המקיים לכל $t > 0$ שהמ"מ X ו $(X-t|X>t)$ שווי התפלגות. אז X מתפלג אקספוננציאלית (עם פרמטר כלשהו).

הערה כיצד טענה זו מתיישבת עם התוצאה שהוכחנו בתרגול, לפיה מ"מ גיאומטרי הוא המ"מ היחיד בעל תכונת חוסר הזיכרון? ובכן, היזכרו ששם השתמשנו בעובדה שהמ"מ היה בדיד, כלומר בעל טווח בן מנייה, ואילו כאן המ"מ רציף. עם זאת, עובדה זו רומזת שיש קשר בין שתי ההתפלגויות הנ"ל, אותו נבין בהמשך הקורס.

2.4 מקרה פרטי של התפלגות קושי

הגדרה נאמר שמ"מ X מתפלג קושי עם פרמטרים 0ו־1 אם פונקציית הצפיפות שלו מקיימת

$$f_X(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(t^2+1)}$$

הערה נוכיח שמדובר בפונקציית צפיפות לגיטימית. מדובר בפונקצייה אי שלילית ולכן נשאר להוכיח רק שהאינטגרל שלה מתכנס ל 1. לשם כך, נבחין ש

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)}dt = \frac{1}{\pi}\arctan(t)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - -\frac{\pi}{2}) = 1.$$

הערה שימו לב שזהו ההתפלגות הרציפה הראשונה שנתקלנו בה שמקיימת ש $f_X(t) \neq 0$ לכל $t \in \mathbb{R}$.

3 מומנטים של מ"מ רציפים

הגדרה יהא X מ"מ רציף בעל צפיפות $f_X(\cdot)$. נגדיר את התוחלת של X להיות

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)dt$$

בכל מקרה שבו האינטגרל מתכנס בהחלט.

דוגמא יהא X מ"מ רציף בעל צפיפות $f_X(t)$ המקיימת ש $f_X(t) = 2t$ עבור $0 \le t \le 1$ ואחרת $f_X(t) = 0$. נמצא את התוחלת של X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)dt = \int_0^1 t \cdot 2tdt = \int_0^1 2t^2dt = 2\frac{t^3}{3}|_0^1 = \frac{2}{3}$$

דוגמא ניזכר שמ"מ X מתפלג קושי עם פרמטרים 0ו־1 אם פונקציית הצפיפות שלו מקיימת

$$f_X(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(t^2+1)}$$

נראה שלמ"מ X לא קיימת תוחלת. ראשית, נזכר שאם האינטגרל של פונקציה $\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)dt$ קיים, אז מתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} t \cdot f_X(t)dt + \int_{0}^{\infty} t \cdot f_X(t)dt$$

ובפרט שני האינטגרלים מימין קיימים. נראה שזה לא קורה:

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{1}{\pi} \frac{t}{(t^2+1)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\pi} \ln(1+x^2)|_0^T = \infty$$

ולכן האינטגרל הנ"ל לא קיים.

טענה (תכונות התוחלת)

1. יהיו X, Y מ"מ רציפים בעלי תוחלת סופית ו $a, b \in \mathbb{R}$ קבועים. אז

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

2. (משפט הסטטיסטיקאי חסר ההכרה) יהא X מ"מ ו$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקצייה מדידה, אז

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$$

אם ורק אם האינטגרל הנ"ל מתכנס.

3. מונוטוניות: אם X, Y מ"מ בעלי תוחלת כך ש $P(X \le Y) = 1$ אז מתקיים

$$E(X) \le E(Y)$$

הגדרה יהא X מ"מ בעל תוחלת. נגדיר את השונות של X להיות

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

למה מתקיים

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

הגדרה יהא X מ"מ. נגדיר את הפונקצייה יוצרת המומנטים של X להיות, לכל $t \in \mathbb{R}$ כך שהביטוי הנ"ל מוגדר,

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

3.1 המומנטים של ההתפלגות המעריכית

טענה יהא $X \sim Exp(\lambda)$. אז מתקיים:

1. $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
2. $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
3. $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ עבור $t < \lambda$.

הוכחה נזכר שמתקיים $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ לכל $t > 0$ ואחרת $f_X(t) = 0$. נחשב:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)dt = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t}dt = [-te^{-\lambda t}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda t}dt$$

כאשר נעזרנו באינטגרציה בחלקים $\int u(t) \cdot v'(t)dt = [u \cdot v] - \int u'(t)v(t)dt$ עם $u = t$ וכן $v' = \lambda e^{-\lambda t}$. נמשיך את החישוב:

$$= 0 + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$$

כאשר נערנו בתכונת הנרמול של פונקציית הצפיפות של מ"מ אקספוננציאלי (שנכונה לכל מ"מ).

לחישוב השונות, נעזר ברעיונות דומים. לפי משפט הסטטיסטיקאי חסר ההכרה,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_X(t)dt = \int_0^{\infty} t^2 \cdot \lambda e^{-\lambda t}dt = [-t^2 e^{-\lambda t}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -2te^{-\lambda t}dt$$

כאשר נעזרנו באינטגרציה בחלקים עם $u = t^2$ וכן $v' = \lambda e^{-\lambda t}$. נמשיך את החישוב:

$$= 0 + 2\int_0^{\infty} te^{-\lambda t}dt = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

כאשר נערנו בכך שהאינטגרל האחרון שקיבלנו הוא פשוט התוחלת של X. לבסוף,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

עבור הפי"מ, מתקיים שעבור $t < \lambda$, לפי משפט הסטטיסטיקאי חסר ההכרה

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \cdot s} f_X(s)ds = \int_0^{\infty} e^{ts}\lambda e^{-\lambda s}ds = \int_0^{\infty} \lambda e^{(t-\lambda)s}ds = \frac{\lambda}{\lambda - t} e^{(t-\lambda)s}|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

עבור $t \geq \lambda$ האינטגרל לא מתכנס (מדוע?).

4 פונקציה של משתנה מקרי רציף

בחלק זה של התרגול נדון בבעיה הבאה: נתון מ"מ רציף X בעל התפלגות ידועה. נתונה פונקציה $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה. אז המ"מ $g(X(\omega))$ הינו מ"מ, ונטען שהוא רציף ושאפשר להסיק את ההתפלגות שלו מההתפלגות של המ"מ X במקרים רבים. הדוגמא הבאה מתארת דרך נפוצה לעשות כן:

דוגמא יהא $X \sim U([0,1])$ ויהא $n \in \mathbb{N}$. מהי ההתפלגות של $Y = X^n$?

ראשית, מתקיים ש $P(X \in [0,1]) = 1$ ולכן גם $P(Y \in [0,1]) = 1$. . כעת, לכל $t \in [0,1]$

$$F_Y(t) = P(Y \le t) = P(X^n \le t) = P(X \le t^{\frac{1}{n}}) = F_X(t^{\frac{1}{n}})$$

ניזכר כעת שאם $x \in [0,1]$ אז $F_X(x) = x$, אם $x < 0$ אז $F_X(x) = 0$ ואחרת $F_X(x) = 1.$. על כן ,

$$F_Y(y) = F_X(y^{\frac{1}{n}}) = \begin{matrix} 0 \text{ if } y < 0 \\ y^{\frac{1}{n}} \text{ if } y \in [0,1] \\ 1 \text{ otherwise} \end{matrix}$$

לבסוף, נגזור את $F_Y(y)$ ונקבל את פונקציית הצפיפות של Y:

$$F_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{matrix} \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} \text{ if } y \in [0,1] \\ 0 \text{ otherwise} \end{matrix}$$

אבחנה באילו תכונות של X ושל $g(x) = x^n$ השתמשנו בחישוב הנ"ל? ובכן, נעזרנו בכך ש g מונוטונית עולה על הקטע $[0,1]$ כדי להסיק את השורה הראשונה בחישוב (בה עדיין לא נעזרנו בהגדרה של X). לאחר מכן, הצבנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X ואז גזרנו - כלומר היינו צריכים לדרוש ש g תהיה גזירה. לכן, מאותו נימוק בדיוק, נקבל את הטענה הבאה:

טענה יהא X מ"מ רציף עם פונקציית צפיפות $f_X(x)$. תהא g פונקציה מונוטונית ממש וגזירה. יהא $Y(\omega) = g(X(\omega))$. אז למשתנה המקרי Y פונקציית צפיפות הנתונה ע"י

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1})'(y)| = f_X(x) \cdot |g'(x)|$$

כאשר $x = g^{-1}(y)$.

דוגמא נניח ש $X \sim Exp(\lambda)$. מה התפלגות של המ"מ $Y = \log X$?

נשתמש בשיטות דומות. לכל $y \in \mathbb{R}$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\log X \le y) = P(X \le e^y) = F_X(e^y)$$

$$= 1 - e^{-\lambda e^y}$$

ואם נגזור נקבל את פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי Y :

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy}(1 - e^{-\lambda e^y}) = \lambda e^y e^{-\lambda e^y}$$

הסתברות 1 - תרגול 10

30 במאי 2019

1 המומנטים של ההתפלגות המעריכית

טענה יהא $X \sim Exp(\lambda)$. אז מתקיים:

1. $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
2. $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
3. $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ עבור $t < \lambda$.

הוכחה נזכר שמתקיים $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ לכל $t > 0$ ואחרת $f_X(t) = 0$. נחשב:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)dt = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t}dt = [-te^{-\lambda t}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda t}dt$$

כאשר נעזרנו באינטגרציה בחלקים $\int u(t) \cdot v'(t)dt = [u \cdot v] - \int u'(t)v(t)dt$ עם $u = t$ וכן $v' = \lambda e^{-\lambda t}$. נמשיך את החישוב:

$$= 0 + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$$

כאשר נערנו בתכונת הנרמול של פונקציית הצפיפות של מ"מ אקספוננציאלי (שנכונה לכל מ"מ).

לחישוב השונות, נעזר ברעיונות דומים. לפי משפט הסטטיסטיקאי חסר ההכרה,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_X(t)dt = \int_0^{\infty} t^2 \cdot \lambda e^{-\lambda t}dt = [-t^2 e^{-\lambda t}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -2te^{-\lambda t}dt$$

כאשר נעזרנו באינטגרציה בחלקים עם $u = t^2$ וכן $v' = \lambda e^{-\lambda t}$. נמשיך את החישוב:

$$= 0 + 2\int_0^{\infty} te^{-\lambda t}dt = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

כאשר נערנו בכך שהאינטגרל האחרון שקיבלנו הוא פשוט התוחלת של X. לבסוף,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

עבור הפי"מ, מתקיים שעבור $t < \lambda$, לפי משפט הסטטיסטיקאי חסר ההכרה

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\cdot s} f_X(s)ds = \int_0^{\infty} e^{ts}\lambda e^{-\lambda s}ds = \int_0^{\infty} \lambda e^{(t-\lambda)s}ds = \frac{\lambda}{\lambda - t} e^{(t-\lambda)s}|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

עבור $t \geq \lambda$ האינטגרל לא מתכנס (מדוע?).

2 פונקציה של משתנה מקרי רציף

בחלק זה של התרגול נדון בבעיה הבאה: נתון מ"מ רציף X בעל התפלגות ידועה. נתונה פונקציה $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה. אז המ"מ $g(X(\omega))$ הינו מ"מ, ונטען שהוא רציף ושאפשר להסיק את ההתפלגות שלו מההתפלגות של המ"מ X במקרים רבים. הדוגמא הבאה מתארת דרך נפוצה לעשות כן:

דוגמא יהא $X \sim U([0,1])$ ויהא $n \in \mathbb{N}$. מהי ההתפלגות של $Y = X^n$?

ראשית, מתקיים ש $P(X \in [0,1]) = 1$ ולכן גם $P(Y \in [0,1]) = 1$. . כעת, לכל $t \in [0,1]$

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X^n \leq t) = P(X \leq t^{\frac{1}{n}}) = F_X(t^{\frac{1}{n}})$$

ניזכר כעת שאם $x \in [0,1]$ אז $F_X(x) = x$, אם $x < 0$ אז $F_X(x) = 0$ ואחרת $F_X(x) = 1$. על כן ,

$$F_Y(y) = F_X(y^{\frac{1}{n}}) = \begin{matrix} 0 \text{ if } y < 0 \\ y^{\frac{1}{n}} \text{ if } y \in [0,1] \\ 1 \text{ otherwise} \end{matrix}$$

לבסוף, נגזור את $F_Y(y)$ ונקבל את פונקציית הצפיפות של Y:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{matrix} \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} \text{ if } y \in [0,1] \\ 0 \text{ otherwise} \end{matrix}$$

אבחנה באילו תכונות של X ושל $g(x) = x^n$ השתמשנו בחישוב הנ"ל? ובכן, נעזרנו בכך ש g מונוטונית עולה על הקטע $[0,1]$ כדי להסיק את השורה הראשונה בחישוב (בה עדיין לא נעזרנו בהגדרה של X). לאחר מכן, הצבנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X ואז גזרנו - כלומר היינו צריכים לדרוש ש g תהיה גזירה. לכן, מאותו נימוק בדיוק, נקבל את הטענה הבאה:

טענה יהא X מ"מ רציף עם פונקציית צפיפות $f_X(x)$. תהא g פונקציה מונוטונית ממש וגזירה. יהא $Y(\omega) = g(X(\omega))$. אז למשתנה המקרי Y פונקציית צפיפות הנתונה ע"י

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1})'(y)| = f_X(x) \cdot |g'(x)|$$

כאשר $x = g^{-1}(y)$.

דוגמא נניח ש $X \sim Exp(\lambda)$. מה התפלגות של המ"מ $Y = \log X$?

נשתמש בשיטות דומות. לכל $y \in \mathbb{R}$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\log X \le y) = P(X \le e^y) = F_X(e^y)$$

$$= 1 - e^{-\lambda e^y}$$

ואם נגזור נקבל את פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי Y :

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}(1 - e^{-\lambda e^y}) = \lambda e^y e^{-\lambda e^y}$$

3 ההתפלגות הנורמלית

הגדרה יהא X מ"מ. נאמר ש X בעל התפלגות נורמלית עם פרמטרים (μ, σ^2) אם פונקציית הצפיפות של X נתונה ע"י

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

טענה יהא $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. אז

$$E(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2$$

טענה יהא X מ"מ כך ש $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ כך ש $a>0$. אז

$$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

הוכחה יהא $x \in \mathbb{R}$. אז מתקיים

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(aX + b \le x) = P(X \le \frac{x-b}{a}) = F_X(\frac{x-b}{a})$$

נגזור את הפונקצייה באגף ימין (פונקציית ההתפלגות המצטברת), שגזירה בכל $\mathbb{R}$ (האם תוכלו להסביר מדוע?) ונקבל

$$f_Y(x) = (F_Y(x))' = (F_X(\frac{x-b}{a}))' = \frac{1}{a} f_X(\frac{x-b}{a}) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}\sigma} exp(\frac{-(\frac{x-b}{a} - \mu)^2}{2\sigma^2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} exp(\frac{-(x - b - a\mu)^2}{2(a\sigma^2)}$$

וזו בדיוק פונקציית הצפיפות של מ"מ נורמלי עם פרמטרים $(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

משפט 3.1 משפט הגבול המרכזי
תהי $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מ"מים ב"ת ושווי התפלגות עם תוחלת 0 ושונות 1. אז מתקיים לכל $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+...+X_n}{\sqrt{n}} \le a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}dx$$

סימון : $\Phi\left(a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}dx$
הערה שימו לב ש $\Phi(a) = F_X(a)$ כאשר $X \sim N(0,1)$. במקרה זה נאמר ש־ X הוא משתנה מקרי נורמלי **סטנדרטי.**

טענה
תהי $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מ"מים ב"ת ושווי התפלגות עם תוחלת 0 ושונות 1 ויהיו $a < b$ זוג מספרים ממשיים. מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{X_1+...+X_n}{\sqrt{n}} < b\right) = \Phi\left(b\right) - \Phi\left(a\right)$$

הוכחה
לפי משפט הגבול המרכזי,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{X_1+...+X_n}{\sqrt{n}} < b\right) &= \lim_{n\to\infty}\left[P\left(\frac{X_1+...+X_n}{\sqrt{n}} < b\right) - P\left(\frac{X_1+...+X_n}{\sqrt{n}} < a\right)\right] \\ &= \Phi\left(b\right) - \Phi\left(a\right)\end{aligned}$$

בעזרת הטענה הנ"ל, אנו יכולים להעריך הסתברויות של מאורעות.

דוגמא:
מטילים 100 קוביות הוגנות וב"ת. בקירוב, מהי ההסתברות שסכום ההטלות הוא בין 335 ל־370?

נסמן ב־X_i את תוצאת ההטלה ה־i. ידוע ש־$E[X_i] = \mu = \frac{7}{2}$, $Var[X_i] = \sigma^2 = \frac{35}{12}$. לפי

משפט הגבול המרכזי:

$$\begin{aligned}
P(335 \leq \sum_{i=1}^{100} X_i \leq 370) &= P\left[335 - 100 \cdot \frac{7}{2} \leq \sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \cdot \frac{7}{2} \leq 370 - 100 \cdot \frac{7}{2}\right] \\
&= P\left[-15 \leq \sum_{i=1}^{100} X_i - 100\mu \leq 20\right] \\
&= P\left[\frac{-15}{\sqrt{100} \cdot \sqrt{\frac{35}{12}}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\mu}{\sqrt{100} \cdot \sigma} \leq \frac{20}{\sqrt{100} \cdot \sqrt{\frac{35}{12}}}\right] \\
&= P\left[(-1.5) \cdot \sqrt{\frac{12}{35}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\mu}{\sqrt{100} \cdot \sigma} \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{12}{35}})\right] \\
&\approx \Phi(2 \cdot \sqrt{\frac{12}{35}}) - \Phi(-1.5 \cdot \sqrt{\frac{12}{35}}) \\
&\approx \Phi(1.17) - \Phi(-0.88) \\
&\approx 0.88 - 0.19 = 0.69
\end{aligned}$$

תרגיל

חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{i=0}^{n} \frac{n^i}{i!}$$

פיתרון

נגדיר סדרה של מ"מ ב"ת ש"ה $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, כאשר $X_n \sim Pois\,(1)$. ראינו בעבר שבתנאים האלה־ $\sum_{k=1}^{n} X_k \sim Pois\,(n)$. נסיק ש:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \leq n\right) = \sum_{i=0}^{n} P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = i\right) = \sum_{i=0}^{n} e^{-n}\frac{n^i}{i!}$$

וזה בדיוק הביטוי שאנחנו מעוניינים לחשב את הגבול שלו! ממשפט הגבול המרכזי:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \leq n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} (X_k - 1) \leq 0\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - 1) \leq 0\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2}$$

כאשר השוויון האחרון נובע מכך שפונקציית הצפיפות באינטגרל היא זוגית. בסך הכל קיבלנו

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n^i}{i} = \frac{1}{2}$$

4 התפלגויות משותפות רציפות

הגדרה יהיו X,Y שני מ"מ המוגדרים על אותו מרחב הסתברות. נאמר של(X,Y) יש התפלגות משותפת רציפה אם קיימת פונקציה אינטגרבילית אי שלילית $f_{X,Y}(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, שמכונה פונקציית הצפיפות המשותפת, כך שלכל $A\subset\mathbb{R}^2$

$$P((X,Y)\in A) = P(\{\omega:(X(\omega),Y(\omega))\in A) = \int\int_A f_{X,Y}(x,y)dxdy.$$

הערה 1 נבחין שבפרט מתקיים שפונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת מקיימת

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X\le x, Y\le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(t,s)dtds$$

ולכן מתקיים

$$\frac{d^2}{dxdy}F_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(x,y)$$

לפי המשפט היסודי.

הערה 2 אם (X,Y) משתנה מקרי בעל התפלגות משותפת רציפה אז הן X והן Y הם משתנים רציפים בעצמם. אכן, לכל $A\subset\mathbb{R}$ מתקיים

$$P(X\in A) = P((X,Y)\in A\times\mathbb{R}) = \int_A[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t,s)dsdt]$$

שמהווה פונקציה גזירה לפי משפט פוביני. נסיק מכאן שפונקציית הצפיפות של X נתונה ע"י, לכל $x\in Im(X)$,

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy$$

וכמובן שיש ביטוי אנלוגי ל $f_Y(y)$.

דוגמא נניח של X,Y יש התפלגות רציפה משותפת הנתונה ע"י פונקציית הצפיפות

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{matrix} 4xy \text{ if } (x,y)\in[0,1]^2 \\ 0 \text{ otherwise}\end{matrix}$$

וודאו שזו פונקציית צפיפות לגיטימית, חשבו את $P(Y<X)$ וחשבו את ההתפלגות השולית של X.

כדי לוודא שזו פונקציית צפיפות לגיטימית עלינו להראות שמתקיימת תכונת הנרמול (כי אינטגרביליות ואי שליליות נובעות באופן מיידי). ובכן,

$$\int_0^1\int_0^1 4xydydx = 4\int_0^1 x(\int_0^1 ydy)dx = 4\int_0^1 xdx\cdot(\frac{1}{2}) = 2\int_0^1 xdx = 1$$

נחשב כעת את $P(Y<X)$:

$$\int_0^1\int_0^x 4xydydx = \int_0^1 4x(\int_0^x ydy)dx = \int_0^1 4x\cdot\frac{x^2}{2}dx = \int_0^1 2x^3 = 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

נחשב לבסוף את ההתפלגות השולית של X. עבור $x\in[0,1]$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^1 4xydy = 2x$$

ולכן

$$F_x(x) = \int_0^x f_X(t)dt = \int_0^x 2tdt = x^2$$

לכל $x\in[0,1]$, כאשר עבור $x<0$ נקבל $F_X(x)=0$ ועבור $x>1$ נקבל $F_X(x)=1$.

דוגמא נתונים שני מ"מ X,Y בעלי צפיפות משותפת מהצורה

$$f(x,y) = e^{-(x+y)}$$

עבור $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ ואחרת $f(x,y)=0$. חשבו את ההתפלגות של המ"מ $\frac{X}{Y}$.

יהא $a<0$. אז מתקיים

$$P(X<a) = P(X<a, Y\in\mathbb{R}) = \int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = \int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} 0dydx = 0$$

ומכאן נסיק ש

$$P(X\geq 0) = P(Y\geq 0) = 1$$

ולכן

$$F_{\frac{X}{Y}}(a) = P(\frac{X}{Y}\leq a) \leq P(\frac{X}{Y}\leq 0) = P(X\leq 0) = 0$$

כאשר נעזרנו בכך ש $P(Y>0)=1$ במעבר הלפני אחרון (כי זה אומר שכפל ב Y לא משפיע על כיוון האי שוויון).

יהא כעת $a>0$. אז

$$F_{\frac{X}{Y}}(a) = P(\frac{X}{Y}\leq a) = \int\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x}{y}\leq a\}} f(x,y)dxdy = \int\int_{\{(x,y)\in(0,\infty)^2:\frac{x}{y}\leq a\}} e^{-x-y}dxdy$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{ay} e^{-x-y}dxdy = \int_0^{\infty}(1-e^{-ay})e^{-y}dy = (-e^{-y}+\frac{e^{-(a+1)y}}{a+1})|_0^{\infty} = 1-\frac{1}{a+1}$$

על מנת לקבל את פונקציית הצפיפות של $\frac{X}{Y}$ נגזור את הצפיפות לפי a ונקבל

$$f_{\frac{X}{Y}}(a) = (F_{\frac{X}{Y}}(a))' = (1-\frac{1}{a+1})' = \frac{1}{(a+1)^2}$$

ולכן הצפיפות מקיימת שהיא 0 עבור $a<0$ ואחרת שווה לערך שחישבנו.

הגדרה תהא $D\subset\mathbb{R}^2$ תת קבוצה המקיימת

$$\lambda(D) = \int_D dxdy < \infty$$

בפרט, כך שהאינטגרל למעלה מוגדר. נאמר שלזוג מ"מ (X,Y) התפלגות משותפת אחידה ב D אם

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{array}{c} \frac{1}{\lambda(D)} \text{ if } (x,y)\in D \\ 0 \text{ otherwise} \end{array}$$

דוגמא נניח של X ו Y התפלגות אחידה בעיגול ברדיוס 1 סביב 0(כלומר בעיגול היחידה). אז פונקציית הצפיפות שלהם מקיימת

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{array}{c} C \text{ if } x^2+y^2\le 1 \\ 0 \text{ otherwise} \end{array}$$

נחשב את C , את ההתפלגות השולית של X , ואת ההסתברות שהנורמה האוקלידית של (X,Y) קטנה מ $\frac{1}{2}$.

ראשית, ניזכר ששטח עיגול היחידה הוא π . מכאן, $C=\frac{1}{\pi}$.

נחשב כעת את ההסתברות השולית של המ"מ X: היא נתונה ע"י, עבור $|x|\le 1$,

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{\{y:x^2+y^2\le 1\}} f_{X,Y}(x,y)dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

לבסוף,

$$P(X^2+Y^2\le\frac{1}{2}) = \int\int_{\{(x,y):y^2\le\frac{1}{2},x^2\le\frac{1}{2}-y^2} = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{1/2-y^2}}^{\sqrt{1/2-y^2}}\frac{1}{\pi}dxdy$$

נתבונן בביטוי שקיבלנו באגף ימין. נבחין שזו בדיוק הביטוי שמתאר את שטח העיגול ברדיוס $\frac{1}{2}$ סביב 0 לחלק לπ. אנחנו יודעים שנפח כדור כזה הוא $\pi\cdot(\frac{1}{2})^2$. לכן

$$P(X^2+Y^2\le\frac{1}{2}) \le \frac{(\frac{1}{2})^2\pi}{\pi} = \frac{1}{4}.$$

5 אי תלות של מ"מ רציפים

הגדרה 5.1 נאמר ששני משתנים רציפים X, Y הם ב"ת אם לכל שתי קבוצות $A, B \subset \mathbb{R}$ מדידות (כלומר מספיק יפות) מתקיים

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$$

נתאר את התנאי הנ"ל באמצעות פונקציות ההתפלגות המצטברות. יהיו $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. אז

$$F_{\mathrm{X,Y}}(x, y) = P(X \le x, Y \le y) = P(X \in (-\infty, x), Y \in (-\infty, y)) = P(X \in (-\infty, x)) P(Y \in (-\infty, y))$$

כלומר קיבלנו

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. ע"י גזירה של שני הצדדים (פעם אחת לפי x ופעם אחת לפי y) נקבל

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) .$$

נטענה יהיו X, Y שני מ"מ רציפים. אז X, Y ב"ת אם ורק אם

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

דוגמא קודם לכן חישבנו את ההתפלגויות השוליות של המ"מ X, Y בעלי פונקציית ההתפלגות המשותפת

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4xy & (x, y) \in [0, 1]^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

קיבלנו ש

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & y \in [0, 1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ומכאן

$$f_X(x) f_Y(y) = (2x)(2y) = 4xy = f_{X,Y}(x, y)$$

ולכן במקרה הזה X, Y הם אכן ב"ת.

דוגמא 2 קודם לכן גם חישבנו את ההתפלגויות השוליות של המ"מ X, Y המתפלגים בצורה אחידה על עיגול ברדיוס 1 סביב הראשית:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & |y| < 1 \\ 0 & |y| > 1 \end{cases}$$

במקרה זה קיימים (x,y) בכדור היחידה המקיימים $f_X(x) f_Y(y) = \frac{4\sqrt{(1-y^2)(1-x^2)}}{(\pi)^2} \neq$ $\frac{1}{\pi}$. זה למשל לא נכון עבור $x = y = \frac{1}{2}$.

הסתברות 1 - תרגול 12

9 ביוני 2019

1 התפלגויות משותפות רציפות

הגדרה יהיו X,Y שני מ"מ המוגדרים על אותו מרחב הסתברות. נאמר של(X,Y) יש התפלגות משותפת רציפה אם קיימת פונקציה אינטגרבילית אי שלילית $f_{X,Y}(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, שמכונה פונקציית הצפיפות המשותפת, כך שלכל $A\subset\mathbb{R}^2$

$$P((X,Y)\in A)=P(\{\omega:(X(\omega),Y(\omega))\in A)=\int\int_A f_{X,Y}(x,y)dxdy.$$

הערה 1 נבחין שבפרט מתקיים שפונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת מקיימת

$$F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{X,Y}(t,s)dtds$$

ולכן מתקיים

$$\frac{d^2}{dxdy}F_{X,Y}(x,y)=f_{X,Y}(x,y)$$

לפי המשפט היסודי.

הערה 2 אם (X,Y) משתנה מקרי בעל התפלגות משותפת רציפה אז הן X והן Y הם משתנים רציפים בעצמם. אכן, לכל $A\subset\mathbb{R}$ מתקיים

$$P(X\in A)=P((X,Y)\in A\times\mathbb{R})=\int_A[\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(t,s)dsdt]$$

שמהווה פונקציה גזירה לפי משפט פוביני. נסיק מכאן שפונקציית הצפיפות של X נתונה ע"י, לכל $x\in Im(X)$,

$$f_X(x)=\int_{\mathbb{R}}f_{X,Y}(x,y)dy$$

וכמובן שיש ביטוי אנלוגי ל $f_Y(y)$.

הערה 3 עבור X,Y מ"מים עם צפיפות משותפת $f_{X,Y}$, נרצה לדעת כיצד לחשב הסתברות של מאורעות מהצורה $\{(X,Y)\in A\}$, כש־A היא קבוצה ב־$\mathbb{R}^2$. באופן כללי נתעניין בקבוצות A שניתנות לתיאור באופן הבא:

$$A=\{(x,y)\,|a\le x\le b,\ g(x)\le y\le h(x)\}$$

באשר $a\le b$ מספרים כלשהם ב־$\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, ו־ $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ פונקציות המקיימות לכל $x\in[a,b]$

$$g(x)\le h(x)$$

במקרה זה ניתן לחשב את $\mathbb{P}((X,Y)\in A)$ לפי הנוסחה:

טענה 1.1 (חישוב הסתברות של מ"מים בעלי צפיפות משותפת) מתקיים:

$$\mathbb{P}((X,Y)\in A)=\int_a^b\left(\int_{g(x)}^{h(x)}f_{X,Y}(x,y)\,dy\right)dx$$

בפרט, לכל $a\le b,c\le d$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a\le X\le b,c\le Y\le d)&=\int_a^b\left(\int_c^d f_{X,Y}(x,y)\,dy\right)dx\\&=\int_c^d\left(\int_a^b f_{X,Y}(x,y)\,dx\right)dy\end{aligned}$$

דוגמה 1 : יהיו X,Y מ"מים עם פונקציית צפיפות משותפת

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{6}{7}(x+y)^2\,\mathbf{1}_{[0,1]^2}(x,y)$$

1. ודאו שזוהי אכן פונקציית צפיפות. **הוכחה:** - עלינו לבדוק ש־$f_{X,Y}$ אי־שלילית, אינטגרבילית ב־$\mathbb{R}^2$, עם אינטגרל על כל $\mathbb{R}^2$ שווה ל־1. מכיוון ש־$\frac{6}{7}(x+y)^2\ge 0$ לכל x,y, וכן הפונקציה רציפה בקבוצה החסומה $[0,1]^2$, ושווה ל־0 בשאר $\mathbb{R}^2$, שני התנאים הראשונים מתקיימים. נחשב:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}f_{X,Y}(x,y)\,d(x,y)&=\frac{6}{7}\int_0^1\int_0^1(x+y)^2\,dxdy\\&=\frac{6}{7}\frac{1}{3}\int_0^1(y+1)^3-y^3dy\\&=\frac{6}{7}\frac{1}{12}\left((2)^4-1-1\right)\\&=1\end{aligned}$$

■

2. חשבו את ההתפלגות השולית $f_X\left(x\right)$.

לפי הנוסחה בהערה ??, נקבל:

$$\begin{aligned}
f_X\left(x\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(x,y\right)dy \\
&= \frac{6}{7}\int_0^1 \left(x+y\right)^2 \mathbf{1}_{[0,1]}\left(x\right)dy \\
&= \frac{6}{7}\mathbf{1}_{[0,1]}\left(x\right)\left[\left(x+y\right)^3/3\right]|_0^1 \\
&= \frac{6}{21}\mathbf{1}_{[0,1]}\left(x\right)\left(\left(x+1\right)^3-x^3\right)
\end{aligned}$$

3. חשבו את ההסתברות של המאורע $\{X\le Y+1/2\}$. בהתחשב בכך ש־

$$P\left(X\le Y+\frac{1}{2}\right)=P\left(X\le Y+\frac{1}{2},\left(X,Y\right)\in\left[0,1\right]^2\right)$$

נחשב את ההסתברות של המאורע שמופיע באגף ימין. נכתוב את המאורע כפי שהצגנו את A בטענה 1.1 לעיל:

$$\begin{aligned}
\left\{X\le Y+\frac{1}{2},\left(X,Y\right)\in\left[0,1\right]^2\right\} &= \left\{0\le X\le 1,\max\left\{0,X-\frac{1}{2}\right\}\le Y\le 1\right\} \\
&= \{0\le X\le\frac{1}{2}\}\cup\{\frac{1}{2}\le X\le 1,X-\frac{1}{2}\le Y\le 1\}
\end{aligned}$$

וכעת נוכל לחשב לפי טענה 1:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X \leq Y+\frac{1}{2}\right) &= \mathbb{P}\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right)+\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1, X-\frac{1}{2} \leq Y \leq 1\right) \\
&= \int_0^{1/2} f_X(x)\, dx+\int_{1/2}^1 \int_{x-1/2}^1 f_{X,Y}(x,y)\, dydx \\
&= \int_0^{1/2} \frac{6}{7\cdot 3}(x+1)^3-x^3 dx+\int_{1/2}^1 \int_{x-1/2}^1 \frac{6}{7}(x+y)^2 dydx \\
&= \frac{6}{7\cdot 3\cdot 4}[(x+1)^4-x^4]|_0^{1/2}+\frac{6}{7\cdot 3}\int_{1/2}^1 [(x+y)^3]|_{y=x-\frac{1}{2}}^{y=1} dx \\
&= \frac{6(3^4-1)}{7\cdot 3\cdot 4\cdot 2^4}+\frac{6}{7\cdot 3}\int_{1/2}^1 (x+1)^3-(2x-\frac{1}{2})^3 dx \\
&= \frac{6(3^4-1)}{7\cdot 3\cdot 4\cdot 2^4}+\frac{6}{7\cdot 3\cdot 4}[(x+1)^4-\frac{1}{2}(2x-\frac{1}{2})^4]|_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{6(3^4-1)}{7\cdot 3\cdot 4\cdot 2^4}+\frac{6}{7\cdot 3\cdot 4}(2^4-(3/2)^4-\frac{1}{2}(3/2)^4+\frac{1}{2}(1/2)^4) \\
&= \frac{6(3^4-1)+6(2^8-1.5\cdot 3^4+0.5)}{7\cdot 3\cdot 4\cdot 2^4} \\
&= \frac{3^4-1+2^8-1.5\cdot 3^4+0.5}{7\cdot 2^5} \\
&= \frac{2^8-\frac{1}{2}\cdot 3^4-\frac{1}{2}}{7\cdot 2^5}=\frac{2^9-3^4-1}{7\cdot 2^6} \\
&= \frac{430}{7\cdot 2^6}
\end{aligned}$$

דוגמה 2 נניח של X,Y יש התפלגות רציפה משותפת הנתונה ע"י פונקציית הצפיפות

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 4xy & (x,y)\in[0,1]^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

וודאו שזו פונקציית צפיפות , חשבו את $P(XY \leq 1/2)$ וחשבו את ההתפלגות השולית של X.
הוכחה: ■

1. כדי לוודא שזו פונקציית צפיפות לגיטימית עלינו להראות שמתקיימת תכונת הנרמול (כי אינטגרביליות ואי שליליות נובעות באופן מיידי). ובכן,

$$\int_0^1 \int_0^1 4xydydx=4\int_0^1 x\left(\int_0^1 ydy\right)dx=4\int_0^1 xdx\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^1 xdx=1$$

2. נחשב כעת את $P\left(XY\leq 1/2\right)$ בהתחשב בכך ש $\left(X,Y\right)\in\left[0,1\right]^{2}$ בהסתברות 1, מתקיים

$$P\left(XY\leq 1/2\right)=P\left(0\leq X\leq 1,0\leq Y\leq\min\left\{\frac{1}{2X},1\right\}\right)$$

נכתוב את המאורע כפי שהצגנו את A בטענה 1 לעיל, :

$$\left\{0\leq X\leq 1,0\leq Y\leq\min\{\frac{1}{2X},1\}\right\}=\left\{0\leq X\leq\frac{1}{2}\right\}\bigcup\left\{\frac{1}{2}\leq X\leq 1,0\leq Y\leq\frac{1}{2X}\right\}$$

ולכן ההסתברות היא:

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\int_{0}^{1}4xydy\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{0}^{\frac{1}{2X}}4xydy\right)dx=$$

$$4\int_{0}^{\frac{1}{2}}xdx\int_{0}^{1}ydy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}4x\left(\int_{0}^{\frac{1}{2X}}ydy\right)dx=$$

$$4\cdot\frac{(1/2)^{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{4x}{8x^{2}}dx=$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log\left(x\right)|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{\log 2}{2}$$

נחשב לבסוף את ההתפלגות השולית של X. עבור $x\in\left[0,1\right]$

$$f_{X}\left(x\right)=\int_{\mathbb{R}}f_{X,Y}\left(x,y\right)dy=\int_{0}^{1}4xydy=2x$$

ולכן

$$F_{X}\left(x\right)=\int_{0}^{x}f_{X}\left(t\right)dt=\int_{0}^{x}2tdt=x^{2}$$

לכל $x\in\left[0,1\right]$, כאשר עבור $x<0$ נקבל $F_{X}\left(x\right)=0$ ועבור $x>1$ נקבל $F_{X}\left(x\right)=1$.

דוגמא 3 נתונים שני מ"מ X,Y בעלי צפיפות משותפת מהצורה

$$f(x,y)=e^{-(x+y)}$$

עבור $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ ואחרת $f(x,y)=0$. חשבו את ההתפלגות של המ"מ $\frac{X}{Y}$.

יהא $a<0$. אז מתקיים

$$P(X<a)=P(X<a,Y\in\mathbb{R})=\int_{0}^{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dydx=\int_{0}^{a}\int_{-\infty}^{\infty}0dydx=0$$

ומכאן נסיק ש

$$P(X \geq 0) = P(Y \geq 0) = 1$$

ולכן

$$F_{\frac{X}{Y}}(a) = P(\frac{X}{Y} \leq a) \leq P(\frac{X}{Y} \leq 0) = P(X \leq 0) = 0$$

כאשר נעזרנו בכך ש $P(Y > 0) = 1$ במעבר הלפני אחרון (כי זה אומר שכפל ב Y לא משפיע על כיוון האי שוויון).

יהא כעת a>0. אז

$$F_{\frac{X}{Y}}(a) = P(\frac{X}{Y} \leq a) = \int\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x}{y} \leq a\}} f(x,y)dxdy = \int\int_{\{(x,y)\in(0,\infty)^2 : \frac{x}{y} \leq a\}} e^{-x-y}dxdy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{ay} e^{-x-y}dxdy = \int_0^\infty (1-e^{-ay})e^{-y}dy = (-e^{-y} + \frac{e^{-(a+1)y}}{a+1})|_0^\infty = 1 - \frac{1}{a+1}$$

על מנת לקבל את פונקציית הצפיפות של $\frac{X}{Y}$ נגזור את הצפיפות לפי a ונקבל

$$f_{\frac{X}{Y}}(a) = (F_{\frac{X}{Y}}(a))' = (1 - \frac{1}{a+1})' = \frac{1}{(a+1)^2}$$

ולכן הצפיפות מקיימת שהיא 0 עבור $a < 0$ ואחרת שווה לערך שחישבנו.

הגדרה תהא $D \subset \mathbb{R}^2$ תת קבוצה המקיימת

$$\lambda(D) = \int_D dxdy < \infty$$

בפרט, כך שהאינטגרל למעלה מוגדר. נאמר שלזוג מ"מ (X,Y) התפלגות משותפת אחידה ב D אם

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{matrix} \frac{1}{\lambda(D)} \text{ if } (x,y) \in D \\ 0 \text{ otherwise} \end{matrix}$$

דוגמא נניח של X ו Y התפלגות אחידה בעיגול ברדיוס 1 סביב 0(כלומר בעיגול היחידה). אז פונקציית הצפיפות שלהם מקיימת

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{matrix} C \text{ if } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 \text{ otherwise} \end{matrix}$$

נחשב את C , את ההתפלגות השולית של X , ואת ההסתברות שהנורמה האוקלידית של (X,Y) קטנה מ $\frac{1}{2}$.

ראשית, ניזכר ששטח עיגול היחידה הוא π . מכאן, $C = \frac{1}{\pi}$.

נחשב כעת את ההסתברות השולית של המ"מ X: היא נתונה ע"י, עבור $|x| \leq 1$,

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{\{y:x^2+y^2\leq 1\}} f_{X,Y}(x,y)dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

לבסוף,

$$P(X^2+Y^2\leq\frac{1}{2})=\int\int_{\{(x,y):y^2\leq\frac{1}{2},x^2\leq\frac{1}{2}-y^2}=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{1/2-y^2}}^{\sqrt{1/2-y^2}}\frac{1}{\pi}dxdy$$

נתבונן בביטוי שקיבלנו באגף ימין. נבחין שזו בדיוק הביטוי שמתאר את שטח העיגול ברדיוס $\frac{1}{2}$ סביב 0 לחלק לπ. אנחנו יודעים שנפח כדור כזה הוא $\pi\cdot(\frac{1}{2})^2$. לכן

$$P(X^2+Y^2\leq\frac{1}{2})\leq\frac{(\frac{1}{2})^2\pi}{\pi}=\frac{1}{4}.$$

2 אי תלות של מ"מ רציפים

הגדרה 2.1 נאמר ששני משתנים רציפים X,Y הם ב"ת אם לכל שתי קבוצות $A,B\subset\mathbb{R}$ שכל אחת מהן היא איחוד סופי של קטעים ב־$\mathbb{R}$, מתקיים

$$P\left(X\in A,Y\in B\right)=P\left(X\in A\right)P\left(Y\in B\right)$$

בהרצאה ראיתם תנאי שקול לאי תלות:

טענה 2.2 יהיו X,Y שני מ"מ רציפים. אז X,Y ב"ת אם ורק אם

$$f_{X,Y}\left(x,y\right)=f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$$

לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, פרט לקבוצה ממידה אפס.

הגדרה 2.3 הערה: אם לפונקציות הצפיפות $f_X,f_Y,f_{X,Y}$ יש לכל היותר מספר בן מניה של נקודות אי רציפות (בקורס זה נדון רק בפונקציות צפיפות מסוג זה), ניתן להחליף בטענה 2.2 את הביטוי "פרט לקבוצה ממידה אפס" בביטוי "פרט למספר (לכל היותר) בן מניה של נקודות" (ועדיין תתקיים הטענה).

המשך דוגמאות 1 ו־2: קודם לכן חישבנו את ההתפלגויות השוליות של המ"מ X,Y בעלי פונקציית ההתפלגות המשותפת

$$f_{X,Y}\left(x,y\right)=\begin{cases}4xy & (x,y)\in[0,1]^2\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

קיבלנו ש

$$f_X\left(x\right)=\begin{cases}2x & x\in[0,1]\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}2y & y\in[0,1]\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

ומכאן

$$f_X(x)\,f_Y(y)=(2x)(2y)=4xy=f_{X,Y}(x,y)$$

ולכן במקרה הזה X,Y הם אכן ב"ת. לעומת זאת, בדוגמה 1 ראינו את ההתפלגות המשותפת

$$f_{X,Y}(x,y)=(x+y)^2\,\mathbf{1}_{[0,b]^2}(x,y)$$

והצפיפות השולית f_X היתה:

$$f_X(x)=\mathbf{1}_{[0,b]}(x)\,\frac{1}{3}\left((x+b)^3-x^3\right)$$

מכיוון ש$f_{X,Y}(x,y)=f_{X,Y}(y,x)$, נקבל שזוהי גם פונקציית הצפיפות השולית של Y,

$$f_Y(y)=\mathbf{1}_{[0,b]}(y)\,\frac{1}{3}\left((y+b)^3-y^3\right)$$

מכיוון ש־$f_{X,Y}(x,y)$ ו־$f_X(x)\,f_Y(y)$ רציפות ב־$[0,b]^2$, מספיק למצוא נקודה אחת $(x_0,y_0)\in[0,b]^2$ בה $f_{X,Y}(x_0,y_0)\neq f_X(x_0)f_Y(y_0)$, ומיד ינבע שקיימת סביבה של נקודה זו בה הפונקציות לא שוות, ולכן המ"מים אינם ב"ת. נקודה (x_0,y_0) כזו היא לדוגמה $(0,0)$.

3 סטטיסטיקות סדר

טענה 3.1 יהיו $X_1,...,X_n$ סידרת מ"מ רציפים ב"ת ש"ה בעלי פונקציית צפיפות f. נגדיר $X_{(1)}$ המ"מ שהוא המינימום שלהם, $X_{(2)}$ המ"מ שהוא הערך השני הכי קטן,..., $X_{(n)}$ המ"מ שהוא המקסימום שלהם. כלומר, המ"מ $X_{(1)},...,X_{(n)}$ הינם סידור הערכים של $X_1,..,X_n$ לפי סדר עולה. אז הצפיפות המשותפת של המ"מ הנ"ל נתונה ע"י

$$f_{X_{(1)},...,X_{(n)}}(x_1,...x_n)=n!f(x_1)\cdots f(x_n),\quad x_1<x_2<..<x_n$$

דוגמא לאורך כביש באורך קילומטר ישנם שלושה פועלים, ומיקומיהם מפולגים באופן אחיד. יהא $d\le\frac{1}{2}$. מצאו את ההסתברות שאין שני פועלים במרחק פחות מ d קילומטר זה מזה.

יהא X_i מיקומו של הפועל ה i. אז במונחים של הטענה למעלה, אנו נדרשים לחשב את ההסתברות

$$P(X_{(i)}>X_{(i-1)}+d,\quad i=2,3)$$

לפי הנוסחא שפיתחנו

$$f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x_1,x_2,x_3)=3!,\quad x_1<x_2<x_3<1$$

ולפיכך

$$P(X_{(i)}>X_{(i-1)}+d,\quad i=2,3)=\int\int\int_{x_i>x_{i-1}+d} f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3$$

$$=3!\int_1^{1-2d}\int_{x_1+d}^{1-d}\int_{x_2+d}^{1}1dx_3dx_2dx_1$$

$$=6\int_1^{1-2d}\int_{x_1+d}^{1-d}(1-d-x_2)dx_2dx_1$$

$$=3\int_1^{1-2d}(1-2d-x_1)^2dx_1=(1-2d)^3$$

הסתברות 1 ־ תרגול 13

13 ביוני 2019

1 צפיפות מותנית

הגדרה: (צפיפות מותנית) יהיו X,Y מ"מים בעלי התפלגות משותפת רציפה. נסמן את הצפיפות של Y בהנתן $X=x$, עבור $f_X(x)>0$, על ידי

$$f_{Y|X=x}\left(x,y\right)=\frac{f_{X,Y}\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)}$$

אנו נשתמש בסימון זה גם כאשר ידועה לנו פונקציית הצפיפות המותנית, אך אחד המרכיבים באגף ימין לא ידוע.

דוגמא בוחרים באקראי $X\sim U\left(\left[0,1\right]\right)$, ואח"כ בוחרים $Y\sim \mathrm{Exp}\left(x\right)$. חשבו את התפלגות Y.

מתקיים

$$\begin{aligned} f_{X,Y}\left(x,y\right) &= f_{Y|X=x}\left(x,y\right)f_X\left(x\right) \\ &= \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\infty)}(y)xe^{-xy}\mathbf{1}_{[0,1]}\left(x\right) \end{aligned}$$

ולכן לכל y ־

$$f_Y(y)=\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\infty)}(y)\int_0^1 xe^{-xy}dx$$

עבור $y<0$ נקבל ש־$f_Y(y)=0$. עבור $y>0$, נקבל־

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 xe^{-xy}dx \\ &= -\frac{e^{-yx}(yx+1)}{y^2}|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1-e^{-y}(y+1)}{y^2} \end{aligned}$$

הערה: התוחלת של Y לא קיימת.

דוגמא יהיו X, Y בעלי התפלגות משותפת עם צפיפות

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{15}{2}x(2-x-y) \quad x,y \in [0,1], \quad f_{X,Y} = 0 \quad \text{else}$$

נחשב את הצפיפות המותנית של X בהנתן $y = Y$ עבור $0 < y < 1$. נחשב אם כך את הצפיפות של Y

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = \int_0^1 x(2-x-y)dx = \frac{2}{3} - \frac{y}{2}$$

ולכן

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{x(2-x-y)}{\frac{2}{3}-\frac{y}{2}} = \frac{6x(2-x-y)}{4-3y}$$

עבור $x, y \in [0,1]$.

דוגמא יהיו X, Y מ"מ בעלי צפיפות משותפת

$$f(x,y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y} \quad x,y \in (0,\infty), \quad f(x,y) = 0 \quad \text{else}$$

חשבו את $P(X > 1|Y = y)$, עבור $y > 0$. ראשית, נחשב את הצפיפות המותנית של X בהנתן ש $Y = y$,

$$f_Y(y) = e^{-y}\int_0^\infty \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx = e^{-y}$$

ולכן

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}}{e^{-y}} = \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$$

ולבסוף

$$P(X > 1|Y = y) = \int_1^\infty \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx = -e^{-\frac{x}{y}}|_1^\infty = e^{-\frac{1}{y}}$$

2 תוחלת מותנית

תזכורת עבור מ"מ X בדיד ומאורע $A \in \mathcal{F}$, התוחלת של X בהנתן A בעל הסתברות חיובית מוגדרת להיות הערך

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|A) &:= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\}|A) \\ &= \sum_{s\in Im(X)} sP(X = s|A) \\ &= \end{aligned}$$

במילים אחרות, $\mathbb{E}(X|A)$ היא התוחלת של X ביחס לפונקציית ההסתברות $P(\cdot|A)$.

הגדרה 2.1 יהא X מ"מ בדיד. התוחלת המותנית של X בהנתן מ"מ Y הינה המ"מ שמחזיר לכל $y \in Im(Y)$

$$E(X|Y=y)=\sum_x x\cdot P(X=x|Y=y)$$

בהסתברות $P(Y=y)$.

דוגמה 1: מטילים קוביה, $\Omega=\{1,...,6\}$. X הוא מ"מ המחזיר את ערך הקוביה, Y הוא מ"מ המחזיר 1 אם הערך מתחלק ב־3, ו־0 אחרת . נחשב את $\mathbb{E}(X|Y)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|Y)(\omega) &= \begin{cases}\mathbb{E}(X|Y=1) & 3|\omega\\ \mathbb{E}(X|Y=0) & 3\nmid\omega\end{cases}\\
&= \begin{cases}\frac{3+6}{2} & 3|\omega\\ \frac{1+2+4+5}{4} & 3\nmid\omega\end{cases}\\
&= \begin{cases}4.5 & 3|\omega\\ 3 & 3\nmid\omega\end{cases}
\end{aligned}$$

וההתפלגות של המ"מ $\mathbb{E}(X|Y)$ היא:

$$\begin{aligned}
P(\mathbb{E}(X|Y)=4.5)=&\frac{1}{3}\\
P(\mathbb{E}(X|Y)=3)=&\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

טענה יהיו X,Y שני מ"מ המוגדרים על אותו מרחב הסתברות. אז מתקיים

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))=\mathbb{E}(X)$$

בזכות טענה זו, ניתן להעזר בתוחלת המותנית על מנת לחשב את התוחלת עצמה. נראה שתי דוגמאות לשימוש מסוג זה:

דוגמא 2 מטילים קוביה הוגנת עד שמקבלים 6 . יהא X המשתנה המקרי שסופר את מספר ה 1ים שהתקבלו עד הופעת 6. נחשב את התוחלת $\mathbb{E}(X)$ בשתי דרכים:

דרך א': יהא Y המשתנה המקרי שנותן את מספר ההטלות עד להופעת 6. נחשב את $\mathbb{E}(X|Y)$, ומהטענה הנ"ל נוכל לחשב את $\mathbb{E}(X)$. יהא $y\in Im(Y)$. המאורע $Y=y$ משמעותו שבהטלה הy קיבלנו 6 ושלפני ההטלה ה y לא קיבלנו 6. ההתפלגות של X ביחס לפונקציית ההסתברות $P(\cdot|Y=y)$ היא התפלגות בינומית: $X \overset{P(\cdot|Y=y)}{\sim} bin(y-1,\frac{1}{5})$, ומכאן

$$\mathbb{E}(X|Y=y)=\frac{1}{5}(y-1)$$

כלומר, לכל $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \frac{1}{5}(Y(\omega) - 1)$$

או באופן שקול, ניתן לכתוב:

$$\mathbb{E}(X|Y) = \frac{1}{5}(Y - 1)$$

ומכאן:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{5}(Y-1)\Big) = \frac{\mathbb{E}(Y)-1}{5} = \frac{6-1}{5} = 1$$

דרך ב': יהא Y_j המ"מ שנותן את הערך בהטלה ה־j. מהטענה לעיל נוכל לכתוב:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y_1)) \\ &= \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6}\mathbb{E}(X|Y_1 = k)\end{aligned}$$

מתכונת חוסר הזיכרון, ומאי התלות של ההטלות זו בזו, נקבל ש־

$$\mathbb{E}(X|Y_1 = k) = \begin{cases} 1 + \mathbb{E}(X) & k = 1 \\ \mathbb{E}(X) & 2 \le k \le 5 \\ 0 & k = 6 \end{cases}$$

ולכן:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}(1 + \mathbb{E}(X)) + \frac{4}{6}\mathbb{E}(X) + \frac{1}{6} \cdot 0$$

מכאן נקבל, בהנחה שהתוחלת סופית, ש־$\mathbb{E}(X) = 1$.

הגדרה 2.2 יהיו X, Y מ"מ רציפים. התוחלת המותנית של X בהנתן ש $Y = y$ נתונה ע"י

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx$$

בהנחה ש $f_Y(y) > 0$.

דוגמא יהיו X, Y מ"מ בעלי צפיפות משותפת

$$f(x,y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y} \quad x, y \in (0,\infty), \quad f(x,y) = 0 \quad \text{else}$$

ראינו כבר

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}}{e^{-y}} = \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$$

כלומר, ההתפלגות המותנת של X בהנתן ש $Y = y$ הינה $exp(\frac{1}{y})$ ולכן

$$E(X|Y=y) = \int_0^\infty \frac{x}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx = y$$

טענה 2.3 יהיו X, Y מ"מ רציפים. אז $E(X) = E(E(X|Y))$. כלומר, מתקיים

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y=y)f_Y(y)dy$$

דוגמא יהיו $U_1, U_2, ...$ סידרה של מ"מ ב"ת ש"ה $U_i \sim U([0,1])$. חשבו את $E(N)$ כאשר

$$N = \min\{n : \sum_{i=1}^{n} U_i > 1\}$$

נגדיר לכל $x \in [0,1]$

$$N(x) := \min\{n | \sum_{i=1}^{n} U_i > x\}$$

ונגדיר מ"מ $m(x) = E(N(x))$. על סמך הטענה הקודמת,

$$m(x) = E(E(N(x)|U_1)) = \int E(N(x)|U_1 = y)f_{U_1}(y)dy = \int_0^1 E(N(x)|U_1 = y)dy$$

כעת, נבחין שמתקיים, אם $x < y$ אז

$$E(N(x)|U_1 = y) = 1$$

ואחרת

$$E(N(x)|U_1 = y) = 1 + m(x-y)$$

אכן, אם $U_1 = y < x$ אז עלינו להוסיף עוד מ"מ כמו שהיינו צריכים אם היינו דורשים שסכומם יעבור את $x - y$. לפיכך,

$$m(x) = 1 + \int_0^x m(x-y)dy = 1 + \int_0^x m(u)du$$

כעת, נגזור את המשוואה הזו, ונקבל

$$m'(x) = m(x) \Rightarrow \frac{m'(x)}{m(x)} = 1$$

וע"י אינטגרציה נקבל

$$\log m(x) = x + c$$

כלומר

$$m(x) = ke^x$$

לבסוף, נחשב את k. היות ו $m(0)=1$ אז $k=1$ ולכן $m(x)=e^x$. נציב $x=1$ ונקבל e.

3 סטטיסטיקות סדר

טענה 3.1 יהיו $X_1, ..., X_n$ סידרת מ"מ רציפים ב"ת ש"ה בעלי פונקציית צפיפות f. נגדיר $X_{(1)}$ המ"מ שהוא המינימום שלהם, $X_{(2)}$ המ"מ שהוא הערך השני הכי קטן,..., $X_{(n)}$ המ"מ שהוא המקסימום שלהם. כלומר, המ"מ $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ הינם סידור הערכים של $X_1, .., X_n$ לפי סדר עולה. הצפיפות המשותפת של המ"מ הנ"ל נתונה ע"י

$$f_{X_{(1)},...,X_{(n)}}(x_1, ...x_n) = n! f(x_1) \cdots f(x_n), \quad x_1 < x_2 < .. < x_n$$

דוגמא לאורך כביש באורך קילומטר ישנם שלושה פועלים, ומיקומיהם מפולגים באופן אחיד. יהא $d \leq \frac{1}{2}$. מצאו את ההסתברות שאין שני פועלים במרחק פחות מ d קילומטר זה מזה.

יהא X_i מיקומו של הפועל ה i. אז במונחים של הטענה למעלה, אנו נדרשים לחשב את ההסתברות

$$P(X_{(i)} > X_{(i-1)} + d, \quad i = 2, 3)$$

לפי הנוסחא שפיתחנו

$$f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x_1, x_2, x_3) = 3!, \quad x_1 < x_2 < x_3 < 1$$

ולפיכך

$$P(X_{(i)} > X_{(i-1)} + d, \quad i = 2, 3) = \int\int\int_{x_i > x_{i-1}+d} f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= 3! \int_0^{1-2d} \int_{x_1+d}^{1-d} \int_{x_2+d}^{1} 1 dx_3 dx_2 dx_1$$

$$= 6 \int_0^{1-2d} \int_{x_1+d}^{1-d} (1 - d - x_2) dx_2 dx_1$$

$$= 3 \int_0^{1-2d} (1 - 2d - x_1)^2 dx_1 = (1-2d)^3$$

4 סכום של מ"מ רציפים ב"ת

טענה 4.1 יהיו X,Y שני מ"מ רציפים וב"ת. אז פונקציית הצפיפות של המ"מ $X+Y$ נתונה ע"י, לכל $z\in\mathbb{R}$,

$$f_{X+Y}\left(z\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X}\left(z-y\right)f_{Y}\left(y\right)dy$$

נוסחא זו מכונת נוסחת הקונבולוציה.

דוגמא 3 הזמן שלוקח לאכול המבורגר מתפלג באופן אחיד בין 0 לדקה. מה התפלגות הזמן שלוקח לאכול שני המבורגרים?

יהיו $X,Y\sim U\left(\left[0,1\right]\right)$. נמצא את התפלגות המ"מ $X+Y$ בהנחה ו X,Y הם ב"ת. יהא $z\in\mathbb{R}$. לפי נוסחת הקונבולוציה נקבל

$$f_{X+Y}\left(z\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X}\left(z-y\right)f_{Y}\left(y\right)dy.$$

אם $z<0$ אז $f_{X}\left(z-y\right)\neq0$ רק אם $y<0$, אבל אז $f_{Y}\left(y\right)=0$. אם $z>2$ אז $f_{X}\left(z-y\right)\neq0$ רק אם $y>1$ ואז $f_{Y}\left(y\right)=0$. מכאן, אפשר להניח ש $z\in\left[0,2\right]$. עלינו לפצל לתחומים:

($z\in\left[0,1\right]$**)** y לא יכול להיות גדול מ־z, כי אז $f_{X}\left(z-y\right)=0$ ולכן:

$$=\int_{0}^{z}f_{X}\left(z-y\right)f_{Y}\left(y\right)dy=\int_{0}^{z}1dy=z$$

($z\in\left[1,2\right]$**)** y לא יכול להיות קטן מ־$z-1$, כי אז $z-y>1$ ולכן $f_{X}\left(z-y\right)=0$. לפיכך:

$$\int_{z-1}^{1}f_{X}\left(z-y\right)f_{Y}\left(y\right)dy=\int_{z-1}^{1}1dy=1-\left(z-1\right)=2-z$$

ובסה"כ קיבלנו

$$f_{X+Y}\left(z\right)=\begin{cases}z & z\in\left[0,1\right]\\2-z & z\in\left[1,2\right]\\0 & otherwise\end{cases}$$

דוגמה 4: עבור X,Y מ"מים עם פונקציית צפיפות משותפת $f_{X,Y}=\mathbf{1}_{(0,1]^{2}}\left(xy+\frac{3}{4}\right)$, חשבו את פונקציית הצפיפות של המ"מ $W=X/Y$

פתרון: עבור $t < 0$ ברור שפונקציית ההצטברות היא 0, ולכן גם פונקציית הצפיפות תהיה 0 עבור $w < 0$. עבור $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_W(t) &= \mathbb{P}(X/Y \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X \leq tY, 0 < Y \leq 1) \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{ty} f_{X,Y}\left(x,y\right) dx \right) dy \end{aligned}$$

עבור $y \in (0,1]$ קבוע, נבצע החלפת משתנים -

$$\begin{aligned} w &:= \frac{x}{y} \\ dw &= \frac{dx}{y} \\ t &\hookleftarrow ty \\ -\infty &\hookleftarrow -\infty \end{aligned}$$

ונקבל -

$$\begin{aligned} F_W(t) &= \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{t} y f_{X,Y}\left(wy,y\right) dw \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{t} \left(\int_0^1 y f_{X,Y}\left(wy,y\right) dy \right) dw \end{aligned}$$

וקיבלנו שעבור

$$\begin{aligned} f_w(w) &= \int_0^1 y f_{X,Y}\left(wy,y\right) dy \\ &= \int_0^1 \mathbf{1}_{(0,1]^2}\left(wy,y\right)\ y(wy^2 + \frac{3}{4})dy \\ &= \int_0^{\min\{\frac{1}{w},1\}} wy^3 + \frac{3}{4}ydy \\ &= \left[\frac{wy^4}{4} + \frac{3y^2}{8} \right]_{y=0}^{y=\min\{\frac{1}{w},1\}} \\ &= \begin{cases} \frac{w}{4} + \frac{3}{8} & 0 < w \leq 1 \\ \frac{1}{4w^3} + \frac{3}{8w^2} & 1 < w \end{cases} \end{aligned}$$

5 פונקציה של שני מ"מים

טענה 5.1 יהיו X, Y מ"מים בעלי צפיפות משותפת $f_{X,Y}$ ותהי $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. אזי $Z = g\left(X,Y\right)$ הוא מ"מ המקיים:

$$E(Z) = \int \int g\left(x,y\right) f_{X,Y}\left(x,y\right) dxdy$$

דוגמה 5: שני קווים מגיעים לתחנה, באשר זמן ההגעה של כל אחד מהם מתפלג בהתפלגות אחידה על $[0,10]$, באופן ב"ת. אדם עולה על הקו הראשון שמגיע. מה תוחלת הזמן שעליו לחכות?

אם נסמן בX,Y את זמני ההגעה של האוטובוסים השונים, אזי הזמן שעל האדם לחכות הוא

$$Z=\min\{X,Y\}$$

נתון לנו ש$X,Y\sim U([0,10])$ ב"ת, ולכן פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם היא

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)=\frac{1}{100}\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\mathbf{10}]^{\mathbf{2}}}(x,y)$$

ע"פ הטענה מתקיים

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\min\{x,y\}\,f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \\
&= \frac{1}{100}\int_0^{10}\left(\int_0^x ydy+\int_x^{10} xdy\right)dx \\
&= \frac{1}{100}\int_0^{10}\frac{x^2}{2}+x(10-x)dx \\
&= \frac{1}{100}\int_0^{10}10x-x^2/2dx \\
&= \frac{20}{6}
\end{aligned}$$

הסתברות 1 - תרגול 14

20 ביוני 2019

1 סטטיסטיקות סדר

טענה 1.1 יהיו $X_1, ..., X_n$ סידרת מ"מ רציפים ב"ת ש"ה בעלי פונקציית צפיפות f. נגדיר $X_{(1)}$ המ"מ שהוא המינימום שלהם, $X_{(2)}$ המ"מ שהוא הערך השני הכי קטן,..., $X_{(n)}$ המ"מ שהוא המקסימום שלהם. כלומר, המ"מ $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ הינם סידור הערכים של $X_1, .., X_n$ לפי סדר עולה. אז הצפיפות המשותפת של המ"מ הנ"ל נתונה ע"י

$$f_{X_{(1)},...,X_{(n)}}(x_1, ...x_n) = n! f(x_1) \cdots f(x_n), \quad x_1 < x_2 < .. < x_n$$

הערה באופן אינטואיטיבי (ולחלוטין לא פורמלי!), ניתן להסביר את המשוואה הזו כך: תנאי מספיק והכרחי על מנת שהוקטור הסדור יקיים

$$(X_{(1)}, ..., X_{(n)}) = (x_1, .., x_n)$$

לאיזה $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ כך ש $x_1 < x_2 .... < x_n$, הינו שהוקטור המקרי המקורי $(X_1, .., X_n)$ יהיה שווה לאחת מה $n!$ תמורות של הוקטור $(x_1, ..., x_n)$. היות וה"הסתברות" של שוויון כנ"ל הינה $f(x_1) \cdots f(x_n)$, זה מסביר (לפחות באופן רעיוני) את הטענה הנ"ל.

דוגמא לאורך כביש באורך קילומטר ישנם שלושה פועלים, ומיקומיהם מפולגים באופן אחיד. יהא $d \le \frac{1}{2}$. מצאו את ההסתברות שאין שני פועלים במרחק פחות מ d קילומטר זה מזה.

יהא X_i מיקומו של הפועל ה i. אז במונחים של הטענה למעלה, אנו נדרשים לחשב את ההסתברות

$$P(X_{(i)} > X_{(i-1)} + d, \quad i = 2, 3)$$

לפי הנוסחא שפיתחנו

$$f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x_1, x_2, x_3) = 3!, \quad 0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$$

ולפיכך

$$P(X_{(i)} > X_{(i-1)} + d, \quad i = 2, 3) = \int\int\int_{x_i > x_{i-1}+d} f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= 3! \int_0^{1-2d} \int_{x_1+d}^{1-d} \int_{x_2+d}^{1} 1 dx_3 dx_2 dx_1$$

$$= 6 \int_1^{1-2d} \int_{x_1+d}^{1-d} (1-d-x_2) dx_2 dx_1$$

$$= 3 \int_1^{1-2d} (1-2d-x_1)^2 dx_1 = (1-2d)^3$$

2 מבוא לשרשראות מרקוב

הגדרה 2.1 נאמר שסידרת מ"מ (סופית או אינסופית) $\{X_n\}$ היא תהליך מקרי אם המ"מ מוגדרים על מרחב הסתברות (X,P).

מה שחשוב בהגדרה הנ"ל זו העובדה שכל המ"מ מוגדרים על **אותו** המרחב. לכן, אפשר לדבר על ההתפלגויות המשותפות של המ"מ.

דוגמא יהיו $\{X_n\}$ מ"מ ב"ת. אז אוסף המ"מ הנ"ל הינו תהליך מקרי.

מוסכמה לעת עתה בהנתן תהליך מקרי אנו נניח לעת עתה שהמ"מ X_n הם מ"מ דיסקרטיים בעלי תומך משותף $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$ כאשר $n \in \mathbb{N}$. בדרך כלל, נוח לחשוב על Ω פשוט בתור הקבוצה $\{0, ..., n-1\}$. אנו נקרא ל Ω מרחב המצבים של התהליך X_n. בכיתה דנתם גם במקרה שבו Ω הינו אינסופי, ואנו נזכיר זאת בהמשך.

הגדרה תהא $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצה. נאמר ש P היא מטריצה סטוכסטית אם כל הכניסות של P הן אי שליליות, וכן סכום כל שורה של P הוא 1.

הערה אם P מטריצה סטוכסטית אז כל שורה שלה מגדירה התפלגות על Ω: אכן, אם נקבע שורה x, אז היות ו P מטריצה סטוכסטית, נקבל שלכל $y \in \Omega$

$$Q_x(\{y\}) = P(x,y)$$

מגדירה פונקציית הסתברות אטומית על Ω.

הגדרה נאמר שתהליך מקרי $\{X_n\}$ מהווה שרשרת מרקוב עם מרחב מצבים Ω ומטריצת מעבר $P \in M_{|\Omega|\times|\Omega|}(\mathbb{R})$ אם כל המ"מ נתמכים על Ω, P מטריצה סטוכסטית, ומתקיימת תכונת מרקוב:

לכל $x, y \in \Omega$ לכל $t \geq 1$, ולכל $(x_0, ..., x_{t-1}) \in \Omega^{t-1}$ מתקיים

$$P(X_{t+1} = y | X_0 = x_0, ..., X_{t-2} = x_{t-1}, X_t = x) = P(X_{t+1} = y | X_t = x) = P(x,y)$$

כאשר $P(x,y)$= הכניסה ה (x,y) של המטריצה P.

הערה ניתן לתאר שרשרת מרקוב גם באופן הבא: לכל $x \in \Omega$, ההתפלגות של המ"מ X_{n+1} בהנתן ש $X_n = x$ נתונה ע"י ההתפלגות המתוארת ע"י השורה ה x של המטריצה P.

דוגמאות

1. יהיו $\{X_n\}$ סידרת מ"מ ב"ת ש"ה כך ש $X_n \sim U(\{0,..,n-1\})$. אז X_n מהווה שרשרת מרקוב עם מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots\cdot & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

אכן, לכל $t \geq 1$ מתקיים, לכל $y \in \Omega$ ולכל $(x_0, ..., x_t) \in \Omega^t$

$$\frac{1}{n} = P(X_{t+1} = y) = P(X_{t+1} = y | X_t = x_t) = P(X_{t+1} = y | X_0 = x_0, ..., X_{t-2} = x_{t-1}, X_t = x)$$

כאשר נעזרנו כמובן באי התלות.

2. תהא $\Omega = \{0,1,2,3\}$. נגדיר הילוך מקרי על Ω באופן הבא: נניח שאנחנו מתחילים מהנקודה 0 , כלומר נגדיר מ"מ X_0 בעל תומך ב Ω כך ש $P(X_0 = 1) = 1$. בכל יחידת זמן n, כדי להחליט להיכן לעבור, נטיל מטבע הוגן, שנסמן את התוצאה שלו ב Z_n , כאשר $Z_n \sim U(\{-1,1\})$ ב"ת וש"ה. בזמן 0' אם יצא לנו ראש, נעבור ל$0+1$ $\mod 4$ ואחרת נעבור ל $0-1 \mod 4 = 3$. כלומר, יהא X_1 הוא המ"מ שמתאר את המיקום שלנו אחרי יחידת זמן אחת, אז $X = X_0 + Z_1 \mod 1$. באופן מפורש,

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 3) = \frac{1}{2}$$

באופן דומה, המיקום שלנו בזמן n, כלומר לאחר n הטלות, אף הוא מהווה מ"מ. כדי להחליט להיכן לעבור בצעד הבא, שוב נטיל את המטבע ההוגן שברשותנו, ונעבור למיקום אחר על Ω על פי התוצאה: $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1} \mod 1$. כלומר, בהנתן שאנחנו נמצאים בנקודה $j \in \Omega$ אנחנו נעבור לנקודה $j+1 \mod 1$ בהסתברות $\frac{1}{2}$ ול $j-1 \mod 1$ בהסתברות $\frac{1}{2}$, כלומר

$$P(X_{n+1} = j+1 \mod | X_n = j) = P(X_{n+1} = j-1 \mod 1 | X_n = j) = \frac{1}{2}$$

נבחין שכל המ"מ X_n מוגדרים על מרחב הסתברות משותף (המרחב עליו מוגדרות הטלות המטבע החוזרות). את התהליך הנ"ל אפשר לתאר בקלות ע"י מטריצת מעבר מתאימה:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

לא קשה לראות שהתהליך הנ"ל מקיים את תכונת מרקוב, היות ו $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1} \mod 1$, ולכן המיקום בזמן $n+1$ תלוי רק במיקום בזמן n. הדוגמא הנ"ל נקראת הילוך מקרי על מעגל באורך 4.

עבור המשך הדיון, נקבע תהליך מרקובי X_n עם מטריצת מעבר P המוגדר על מרחב מצבים Ω. מטריצת המעבר P מאפשרת לנו לחשב את ההתפלגות של המ"מ X_t לכל t, בהנתן שידועה ההתפלגות ההתחלתית. כלומר:

הגדרה ההתפלגות ההתחלתית של שרשרת מרקוב X_t היא ההתפלגות של X_0, שמסומנת ע"י μ_0.

בדוגמא 2 שלמעלה, $\mu_0(0) = 1$ ולכל $j \in \{1,2,3\}$ מתקיים $\mu_0(j) = 0$

סימוןלכל $t \geq 0$ נסמן את ההתפלגות של המ"מ X_t ע"י

$$\mu_t(x) = P(X_t = x), \quad x \in \Omega$$

.

טענה 2.2 לכל $t \geq 0$ מתקיים

$$\mu_t = \mu_0 P^t$$

את הטענה הוכחתם בכיתה, והיא נובעת בקלות באינדוקציה באמצעות התנייה על הזמן הקודם. למשל, עבור $t = 1$ נקבל

$$\mu_1(x) = P(X_1 = x) = \sum_{y \in \Omega} P(X_1 = x | X_0 = y) P(X_0 = y) = (\mu_0 \cdot P)(x)$$

סימון פעמים רבות אנו נעבוד עם תהליכים שמוגדרים באמצעות אותה מטריצת מעבר אבל עם התפלגויות התחלתיות שונות. במצב הזה, נסמן ב P_μ וב $\mathbb{E}_\mu$ את ההסתברות והתוחלת בהנתן ש $\mu_0 = \mu$. במקרה המיוחד שבו אנחנו מתחילים מנקודה מסויימת $x \in \Omega$ כמו בדוגמא 2 למעלה, אז ההתפלגות μ_0 היא זו שנותנת את כל המסה ל x , כלומר

$$\mu_0(y) = \delta_x(y) = \begin{matrix} 1 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{matrix}$$

ונסמן פשוט $P_x := P_{\delta_x}$ ו $\mathbb{E}_x$ בהתאם.

למה 2.3 לכל $x, y \in \Omega$ מתקיים

$$P_x(X_t = y) := P(X_t = y | X_0 = x) = (\delta_x P^t)(y) = P^t(x, y)$$

כלומר - ההסתברות לעבור מx אל y תוך t צעדים נתונה ע"י הקואורדינטה ה (x, y) של המטריצה P^t .

3 חולפות של ההילוך השיכור המוטה במימד אחד

הגדרה 3.1 יהא $\{X_n\}$ תהליך מרקובי עם מרחב מצבים $\Omega \subseteq \mathbb{Z}$ (לא בהכרח סופי). נאמר ש $i \in \Omega$ הינו מצב נשנה אם

$$P_i(X_n = i \quad \text{for infnitely many } n) = 1$$

ונאמר שהמצב i הינו חולף אם

$$P_i(X_n = i \quad \text{for infnitely many } n) = 0$$

תזכורת - הילוך שיכור שיכור עומד על ציר המספרים השלמים בנקודה 0. הוא מטיל מטבע שנופל על ראש בהסתברות $q > \frac{1}{2}$. אם יצא לו ראש הוא הולך צעד ימינה (ואז נוחת על המספר 1), ואם יצא לו פלי הוא הולך צעד אחד שמאלה (ואז נוחת על המספר -1). נגדיר תהליך מרקובי באופן הבא: לכל $n \in \mathbb{N}$ יהא X_n מיקומו אחרי n הטלות ב"ת כנ"ל, ונסמן ב Z_n את תוצאת ההטלה ה n, כך ש $Z_1, Z_2, ...$ מהווה סידרה של מ"מ ב"ת ש"ה עם

$$P(Z_1 = 1) = q, \quad P(Z_1 = -1) = 1 - q$$

אז

$$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$$

ובפרט רואים שהתהליך $\{X_n\}$ הינו מרקובי.

משפט 3.2 המצב 0 הינו חולף עבור ההילוך המקרי $\{X_n\}$.

על מנת להוכיח את המשפט הנ"ל, ניזכר בטענה שהוכחנו בתרגול 9:

טענה 3.3 (מסקנה מאי שוויון הופדינג) לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_n = 0) \leq \exp\left(-n\frac{(2q-1)^2}{8q^2}\right) = e^{-n} \cdot C$$

אנחנו גם זקוקים לאי שוויון בול. ניזכר בו ובהוכחה שלו:

טענה 3.4 (אי שוויון בול) יהא (Ω, P) מ"ה. אז לכל סידרת מאורעות $A_1, A_2, ...$ מתקיים

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

הוכחה: נגדיר סידרת מאורעות חדשים

$$B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$$

אז מתקיים:

א. המאורעות $\{B_i\}$ זרים בזוגות.

ב. מתקיים $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

ג. לכל i מתקיים $B_i \subseteq A_i$.

לפיכך

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

כנדרש. ■

כעת אנחנו מוכנים להוכיח את המשפט. יהא (Ω, P) מ"ה שעליו מוגדר התהליך $\{X_n\}$. לכל n נגדיר מאורע A_n ע"י

$$A_n = \{\omega | \quad X_n(\omega) = 0\}$$

כלומר, המאורע A_n הינו המאורע "בזמן n השיכור חזר לנקודה 0". נתבונן במאורע

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

נטען ש A הינו בדיוק המאורע "השיכור חזר לאפס אינסוף פעמים". אכן, נניח $\omega \in A$. אז לכל n קיים $k \ge n$ כך ש $\omega \in A_k$. כלומר, לכל n קיים $k \ge n$ עבורו $X_k(\omega) = 0$, כלומר בזמן k השיכור חזר לאפס. לא קשה להווכח שזה אומר שהשיכור חזר לאפס אינסוף פעמים. בכיוון ההפוך, יהא ω כך שקיימת סידרה $\{n_k\}$ של זמנים אינסופית עבורה $X_{n_k}(\omega) = 0$ לכל k. אז לכל n ניקח k כך ש $n_k \ge n$ ואז $\omega \in A_{n_k}$ ולכן $\omega \in A$.

עכשיו, כדי להוכיח את המשפט נראה ש $P(A) = 0$. לשם כך, נבחין ראשית שמהמסקנה מאי שוויון הופדינג,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \le C \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} < \infty.$$

יהא $\epsilon > 0$. אז היות והטור הנ"ל מתכנס, ניתן להסיק מקריטריון קושי להתכנסות טורים שקיים N כך ש

$$\sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) < \epsilon.$$

בנוסף, נבחין ש

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subsetneq \bigcap_{n=N}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subsetneq \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$$

ולכן מאי שוויון בול נקבל

$$P(A) \leq P(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k) \leq \sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) < \epsilon.$$

מכאן נסיק ש $P(A) = 0$, כנדרש.