פתרון תרגיל מספר 5 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

12 במאי 2020

שאלה 3

סעיף 1 צ"ל: אם $L_1, L_2 \in coRE$ אזי $L_1 \cdot L_2 \in coRE$

הוכחה:

תחילה מהיות $L_1, L_2 \in coRE$ אזי מתקיים $\overline{L_1}, \overline{L_2} \in RE$, כלומר קיימים $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ שהם TM כך ש־ $L(\mathcal{M}_1) = \overline{L_1}$, $L(\mathcal{M}_2) = \overline{L_2}$.

עתה ניצור $\mathcal{M}$ TM באופן הבא:

1. נחשב את כל הקומבינציות של w להיות מהצורה $u \cdot v$ (יש לכל היותר $|w|$ כאלה) ולכל קומבינציה $w = u \cdot v$, נשמור ברשימה A את $u\#v$ (אפשר פשוט לשמור על סרט חדש שהוא רק הרשימה, ראינו כיצד בתרגול, ולהפריד בין מילים עם $\#\#$, הנחה ש־ $\#$ לא בשפה אחרת נחליף בסימן אחר)
2. לכל $n \in \{1, 2, 3 \ldots\}$ (נשמור את המשתנה n בסרט משלו ונריץ מכונות טיורינג כמו שראינו בתרגול)
   (א) לכל מילה $u\#v$ ב־ A: (כמו שראינו בתרגול, אפשר לדמיין סרט חדש לכל אחד מה־ TM)
      i. נריץ את $\mathcal{M}_1$ על u, n צעדים
      ii. נריץ את $\mathcal{M}_2$ על v, n צעדים
   (ב) אם לכל קומבינציה בשלב הקודם $\mathcal{M}_1$ קיבל את u ש־ $\mathcal{M}_2$ קיבל את v לכל $u\#v \in A$, נקבל את w, אחרת נמשיך לרוץ

נשים לב כי $A = \{w_1\#w_2 \mid w = w_1 \cdot w_2\}$,
נשים לב ש־ $w \in \overline{L_1 \cdot L_2}$ אם"ם לכל חלוקה $w = w_1 \cdot w_2$ מתקיים $w_1 \in \overline{L_1} \vee w_2 \in \overline{L_2}$, כלומר מתקיים

$$
\begin{aligned}
& w \in L(\mathcal{M}) \\
\Leftrightarrow & (\forall (w_1\#w_2) \in A)\,(w_1 \in L(\mathcal{M}_1) \vee w_2 \in L(\mathcal{M}_2)) \\
\Leftrightarrow & (\forall (w_1\#w_2) \in \{w_1\#w_2 \mid w = w_1 \cdot w_2\})\,(w_1 \in L(\mathcal{M}_1) \vee w_2 \in L(\mathcal{M}_2)) \\
\Leftrightarrow & (\forall (w_1\#w_2) \in \{w_1\#w_2 \mid w = w_1 \cdot w_2\})\left(w_1 \in \overline{L_1} \vee w_2 \in \overline{L_2}\right) \\
\Leftrightarrow & w \in \overline{L_1 \cdot L_2}
\end{aligned}
$$

כלומר יצרנו $\mathcal{M}$ שהוא TM וגם מתקיים $L(\mathcal{M}) = \overline{L_1 \cdot L_2}$,
כלומר $\overline{L_1 \cdot L_2} \in RE$ מההגדרה, כלומר $L_1 \cdot L_2 \in coRE$, כנדרש

הערה: נשים לב ש־ $\mathcal{M}$ מזהה את $\overline{L_1 \cdot L_2}$ ולא בהכרח מכריע אותה כי יכול להיות שעבור מילה שהיא לא ב־ $\overline{L_1 \cdot L_2}$, $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ לא יעצרו את ריצם ולכן לעולם לא נסיים את שלב 2

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2 צ"ל: אם $L\in RE$ אזי $L^{*}\in RE$
הוכחה:
תחילה מהיות $L\in RE$, כלומר קיים $\mathcal{M}$ שהוא TM כך ש־ $L\left(\mathcal{M}\right)=L$.
עתה ניצור TM $\mathcal{M}_{helper}$ באופן הבא:

1. נקבל מילה w מהצורה $w_{1}\#w_{2}\#\dots\#w_{k}$
2. נריץ את $\mathcal{M}$ על כל w_{i} (אין צורך במקביליות פה, כי נרצה שיתקיים $w_{i}\in L=L\left(\mathcal{M}\right)$ לכל $i\in[k]$ ולכן $\mathcal{M}$ בכל מקרה יעצור על w_{i})
3. אם בכל הריצות בשלב הקודם $\mathcal{M}$ קיבל את w_{i} לכל $i\in[k]$, נקבל את w
4. אחרת נדחה את w

עתה ניצור TM $\mathcal{M}'$ באופן הבא:

1. נחשב את כל הקומבינציות של w להיות מהצורה $w_{1}\cdot w_{2}\cdot\dots\cdot w_{k}$ לכל $k\in[n]$ (יש לכל היותר $\sum_{l=1}^{|w|}\left|\Sigma\right|^{l}$ כאלה) ולכל קומבינציה $w=w_{1}\cdot w_{2}\cdot\dots\cdot w_{k}$, נשמור ברשימה A את $w_{1}\#w_{2}\#\dots\#w_{k}$ (אפשר פשוט לשמור על סרט חדש שהוא רק הרשימה, ראינו כיצד בתרגול, ולהפריד בין מילים עם $\#\#$, הנחה ש־ $\#$ לא בשפה אחרת נחליף בסימן אחר)
2. לכל $i\in\{1,2,3\dots\}$ (נשמור את המשתנה i בסרט משלו ונריץ מכונות טיורינג כמו שראינו בתרגול)
   (א) נריץ את ה־ i הצעדים הראשונים של $\mathcal{M}_{helper}$ על כל מילה בקבוצה A
   (ב) אם $\mathcal{M}_{helper}$ קיבל מילה ב־ A, נקבל את w, אחרת נמשיך לרוץ

תחילה נשים לב כי

$$\begin{aligned}
 & w_{1}\#w_{2}\#\dots\#w_{k}\in L\left(\mathcal{M}_{helper}\right)\\
\Leftrightarrow & \left(\forall i\in[k]\right)\left(w_{i}\in L\left(\mathcal{M}\right)\right)\\
\Leftrightarrow & \left(\forall i\in[k]\right)\left(w_{i}\in L\right)
\end{aligned}$$

נשים לב כי $A=\left\{ w_{1}\#w_{2}\#\dots\#w_{k}\mid w=w_{1}\cdot w_{2}\cdot\dots\cdot w_{k}\right\}$, לכן מתקיים

$$\begin{aligned}
 & w\in L\left(\mathcal{M}'\right)\\
\Leftrightarrow & \exists w_{1}\#w_{2}\#\dots\#w_{k}\in\left\{ w_{1}\#w_{2}\#\dots\#w_{k}\mid w=w_{1}\cdot w_{2}\cdot\dots\cdot w_{k}\right\} \text{ s.t. }w_{1}\#w_{2}\#\dots\#w_{k}\in L\left(\mathcal{M}_{helper}\right)\\
\Leftrightarrow & \left(\exists w_{1}\#w_{2}\#\dots\#w_{k}\in\left\{ w_{1}\#w_{2}\#\dots\#w_{k}\mid w=w_{1}\cdot w_{2}\cdot\dots\cdot w_{k}\right\} \right)\left(\forall i\in[k]\right)\left(w_{i}\in L\right)\\
\Leftrightarrow & \left(\exists w_{1},w_{2},\dots,w_{k}\text{ s.t. }w_{1}\cdot w_{2}\cdot\dots\cdot w_{k}=w\right)\left(\forall i\in[k]\right)\left(w_{i}\in L\right)\\
 & w\in L^{*}
\end{aligned}$$

כלומר יצרנו $\mathcal{M}'$ שהוא TM וגם מתקיים $L\left(\mathcal{M}'\right)=L^{*}$,
כלומר $L^{*}\in RE$ מההגדרה, כנדרש
הערה: נשים לב ש־ $\mathcal{M}'$ מזהה את L^{*} ולא בהכרח מכריע אותה כי יכול להיות שעבור מילה שהיא לא ב־ L^{*}, $\mathcal{M}_{helper}$ לא יעצור את ריצתו באף חלוקה של w ל־ $w_{1}\cdot\dots w_{k}$ ולכן לעולם לא נסיים לרוץ ב־ $\mathcal{M}'$

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3 צ"ל: אם $L_{1},L_{2}\in RE$ אזי $op\left(L_{1},L_{2}\right)\in RE$
הוכחה:
תחילה נשים לב שהמילים הם בני מנייה ולכן נוכל להגדיר $f:\mathbb{N}\to\Sigma^{*}$ פונקציה חחע"ל.
מהיות $L_{1},L_{2}\in RE$ קיימים $\mathcal{M}_{1},\mathcal{M}_{2}$ שהם TM כך ש־ $L\left(\mathcal{M}_{1}\right)=L_{1}$, $L\left(\mathcal{M}_{2}\right)=L_{2}$
עתה ניצור TM $\mathcal{M}$ באופן הבא:

1. נשמור את w אפשהו בצד

2. לכל $n\in\{1,2,3\ldots\}$ (נשמור את המשתנה n בסרט משלו ונריץ מכונות טיורינג כמו שראינו בתרגול)

(א) נחשב קבוצה $A_n=\{f(i)\mid i\le n\}$ ונשמור את המילים בסרט חדש והמילים יהיו מופרדות על ידי #

(ב) נריץ את ה־ n הצעדים הראשונים של $\mathcal{M}_1$ על כל מילה בקבוצה A_n ונשמור את כל המילים שהתקבלו על ידי $\mathcal{M}_1$ ב־ B_n ונשמור את המילים בסרט חדש והמילים יהיו מופרדות על ידי #

(ג) נחשב את $C_n=\{x\cdot b\cdot z\mid (x\cdot z=w)\wedge(b\in B_n)\}$ (נשים לב שיש לכל היותר $|B_n|\cdot|w|$ קומבינציות כנ"ל ולכן סופי כי $|B_n|\le|A_n|\le n$) ונשמור את המילים בסרט חדש והמילים יהיו מופרדות על ידי #

(ד) נריץ את ה־ n הצעדים הראשונים של $\mathcal{M}_2$ על כל מילה בקבוצה C_n

(ה) נקבל את w אם הייתה ריצה מקבלת של $\mathcal{M}_2$ על אחת המילים ב־ C_n, אחרת נמשיך לרוץ

תחילה נשים לב כי $B_n=\{f(i)\mid (i\le n)\wedge\mathcal{M}_1 \text{ accepts } f(i) \text{ within n steps or less}\}$
וגם כי

$$C_n=\{x\cdot f(i)\cdot z\mid f(i)\in B_n\wedge x\cdot z=w\}$$

נשים לב כי $\mathcal{M}$ מקבל את w אם"ם עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו הייתה מילה $c\in C_n$ כך ש־ $\mathcal{M}_2$ קיבל אותה (התנאי האחרון בהגדרה)
לכן נקבל כי

$$\begin{aligned}
& w\in L(\mathcal{M})\\
\Leftrightarrow & (\exists n\in\mathbb{N})(\exists c\in C_n)(c\in L(\mathcal{M}_2))\\
\Leftrightarrow & (\exists n\in\mathbb{N})(\exists c\in\{x\cdot f(i)\cdot z\mid f(i)\in B_n\wedge x\cdot z=w\})(c\in L(\mathcal{M}_2))\\
\Leftrightarrow & (\exists n\in\mathbb{N})((\exists w_f\in B_n)\wedge(\exists x,z\in\Sigma^* \text{ s.t. } w=x\cdot z))(x\cdot w_f\cdot z\in L(\mathcal{M}_2))\\
\Leftrightarrow & (\exists x,z\in\Sigma^* \text{ s.t. } w=x\cdot z)(\exists n\in\mathbb{N})(\exists w_f\in B_n)(x\cdot w_f\cdot z\in L(\mathcal{M}_2))\\
\Leftrightarrow & (\exists x,z\in\Sigma^* \text{ s.t. } w=x\cdot z)(\exists n\in\mathbb{N})\\
& (\exists w_f\in\{f(i)\mid (i\le n)\wedge\mathcal{M}_1 \text{ accepts } f(i) \text{ within n steps or less}\})(x\cdot w_f\cdot z\in L_2)\\
\Leftrightarrow & (\exists x,z\in\Sigma^* \text{ s.t. } w=x\cdot z)(\exists n\in\mathbb{N})(\exists i\in[n] \text{ s.t. } i\le n\wedge f(i)\in L(\mathcal{M}_1))(x\cdot f(i)\cdot z\in L_2)\\
\Leftrightarrow & (\exists x,z\in\Sigma^* \text{ s.t. } w=x\cdot z)(\exists n\in\mathbb{N})(f(n)\in L(\mathcal{M}_1))(x\cdot f(n)\cdot z\in L_2)\\
\Leftrightarrow & (\exists x,z\in\Sigma^* \text{ s.t. } w=x\cdot z)(\exists w_f\in L(\mathcal{M}_1))(x\cdot w_f\cdot z\in L_2)\\
\Leftrightarrow & w\in op(L_1,L_2)
\end{aligned}$$

כלומר יצרנו $\mathcal{M}$ שהוא TM וגם מתקיים $\boxed{L(\mathcal{M}')=op(L_1,L_2)}$,
כלומר $op(L_1,L_2)\in RE$ מההגדרה, כנדרש

הערה: נשים לב ש־ $\mathcal{M}$ מזהה את $op(L_1,L_2)$ ולא בהכרח מכריע אותה כי יכול להיות שעבור מילה שהיא לא ב־ $op(L_1,L_2)$, $\mathcal{M}$ לא יעצור את ריצתו כי הוא יחפש מילה המקיימת את הנדרש ללא תנאי עצירה ולעולם לא יימצא.

הערה2: במבט לאחור, אפשר היה לעשות אנומרטור במקום להגדיר את f ואת A_n ולהריץ על n המילים הראשונות שמודפסות, להבא אעשה בדרך היותר פשוטה לקריאה :)

מ.ש.ל.ג.☺