פתרון תרגיל מספר 12 - לינארית 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

9 ביוני 2019

1. **צ"ל:** $P_U\left(\left[\begin{array}{cc}1 & 2\\3 & 4\end{array}\right]\right)$

הוכחה:

תחילה נחשב בסיס או"נ לU

$$b_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\1 & 1\end{array}\right]}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\1 & 1\end{array}\right]$$

לכן b_1 הוא בסיס או"נ לU, (כי $\dim U=1$), לכן

$$P_U\left(\left[\begin{array}{cc}1 & 2\\3 & 4\end{array}\right]\right)=\left\langle b_1,\left[\begin{array}{cc}1 & 2\\3 & 4\end{array}\right]\right\rangle b_1=\left\langle\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\1 & 1\end{array}\right],\left[\begin{array}{cc}1 & 2\\3 & 4\end{array}\right]\right\rangle\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\1 & 1\end{array}\right]=\frac{1}{4}\cdot(10)\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\1 & 1\end{array}\right]=\frac{5}{2}\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\1 & 1\end{array}\right]$$

לכן

$$\boxed{P_U\left(\left[\begin{array}{cc}1 & 2\\3 & 4\end{array}\right]\right)=\frac{5}{2}\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\1 & 1\end{array}\right]}$$

מ.ש.ל.☺

2. **צ"ל:** $T(u+v)=T(u)+T(v)$

הוכחה:

יהיו $u,v\in V$, אזי

$$\begin{aligned}\|T(u+v)-T(u)-T(v)\|^2&=\langle T(u+v)-T(u)-T(v),T(u+v)-T(u)-T(v)\rangle\\&=\langle T(u+v),T(u+v)\rangle-\langle T(u+v),T(u)\rangle-\langle T(u+v),T(v)\rangle\\&-\langle T(u),T(u+v)\rangle+\langle T(u),T(u)\rangle+\langle T(u),T(v)\rangle\\&-\langle T(v),T(u+v)\rangle+\langle T(v),T(u)\rangle+\langle T(v),T(v)\rangle\\&=\langle u+v,u+v\rangle-\langle u+v,u\rangle-\langle u+v,v\rangle\\&-\langle u,u+v\rangle+\langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle\\&-\langle v,u+v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle\\&=(\langle u+v,u+v\rangle-\langle u+v,u+v\rangle)-(\langle u,u+v\rangle-\langle u,u+v\rangle)+(\langle v,u+v\rangle-\langle v,u+v\rangle)\\&=0+0+0=0\end{aligned}$$

לכן קיבלנו כי

$$\|T(u+v)-T(u)-T(v)\|^2=0\Rightarrow T(u+v)-T(u)-T(v)=0\Rightarrow\boxed{T(u+v)=T(u)+T(v)}$$

מ.ש.ל.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** T חח"ע
הוכחה:
נכון! יהיו $u,v\in V$ כך ש$T\left(u\right)=T\left(v\right)$ אזי

$$\begin{aligned}0&=\left\|T\left(u\right)-T\left(v\right)\right\|^{2}=\left\langle T\left(u\right)-T\left(v\right),T\left(u\right)-T\left(v\right)\right\rangle\\&=\left\langle T\left(u-v\right),T\left(u-v\right)\right\rangle=\left\langle u-v,u-v\right\rangle=\left\|u-v\right\|^{2}\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\left\|u-v\right\|^{2}=0$, לכן מתכונות הנורמה, נסיק כי $u=v$,
כלומר $\forall u,v\in V$ כך ש$T\left(u\right)=T\left(v\right)$ מתקיים $u=v$, כלומר T חח"ע מהגדרה

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** T הפיכה
הוכחה:
לא נכון! נבחר $V=\mathbb{R}^{2}$, $U=\mathbb{R}$, עבור המכפלות הסטנרטיות, ונגדיר $T\left(u\right)=\left[\begin{array}{c}u\\0\end{array}\right]$,
נשים לב כי T איזומטריה כי $\forall u,v\in U$ מתקיים:

$$\left\langle T\left(u\right),T\left(v\right)\right\rangle_{V}=\left\langle \left[\begin{array}{c}u\\0\end{array}\right],\left[\begin{array}{c}v\\0\end{array}\right]\right\rangle_{V}=u\cdot v+0\cdot0=u\cdot v=\left\langle u,v\right\rangle_{U}$$

נניח בשלילה שT הפיכה, אזי T על, אבל $e_{2}\in V$ וגם $e_{2}\notin\mathrm{Im}T$, בסתירה לכך שT הפיכה,
לכן T איזומטריה לא הפיכה וגם מתקיים $\dim U=1<\infty$ וגם $\dim V=2<\infty$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** T הפיכה
הוכחה:
לא נכון! אותה דוגמא כמו בסעיף ב'

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** T הפיכה
הוכחה:
נכון! נשים לב כי T חח"ע גם $\dim U=\dim V$ (נתון), לכן

$$\dim V=\dim ImT+\dim\ker T=\dim ImT+0=\dim ImT$$

וגם מתקיים $ImT\subseteq V$, לכן $ImT=V$, כלומר T על, לכן T חח"ע ועל, כלומר T הפיכה

מ.ש.ל.ד.☺

4. **צ"ל:** $\left\|v\right\|^{2}\geq\left\|u\right\|^{2}+\left\|w\right\|^{2}$
הוכחה:

$$\left\|v\right\|^{2}=\left\|u+\left(P_{U}\left(v\right)-u\right)\right\|^{2}\overset{\star}{=}\left\|u\right\|^{2}+\left\|P_{U}\left(v\right)-u\right\|^{2}$$

$\star$ מתקיים מפתיגורס,
נשים לב כי $P_{U}\left(v\right)-u\in U^{\perp}$ מהגדרת הטלה, לכן $P_{U}\left(v\right)-u$ הטלה של v על $U^{\perp}$ (כי $v-\left(v-P_{U}\left(v\right)\right)\in U$ וגם מתקיים $\left\langle v-P_{U}\left(v\right),v-\left(v-P_{U}\left(v\right)\right)\right\rangle=\left\langle v-P_{U}\left(v\right),P_{U}\left(v\right)\right\rangle=0$),
ו$w\in W$ הטלה של v על w וגם $W\subseteq U^{\perp}$,
לכן משאלה 7 תרגיל 11 מתקיים כי

$$\left\|P_{U}\left(v\right)-u\right\|\geq\left\|w\right\|\Rightarrow\left\|P_{U}\left(v\right)-u\right\|^{2}\geq\left\|w\right\|^{2}$$

לכן

$$\boxed{\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|P_U(v) - u\|^2 \geq \|u\|^2 + \|w\|^2}$$

מ.ש.ל.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $r_{U,U^{\perp}} = R_U$

הוכחה:

יהי $v \in V$, אזי $v = P_U(v) + (v - P_U(v))$,

עתה נשים לב כי מתקיים

$$v - P_U(v) = P_{U^{\perp}}(v)$$

כי $v - (v - P_U(v)) \in U$ וגם מתקיים $\langle v - P_U(v), v - (v - P_U(v))\rangle = \langle v - P_U(v), P_U(v)\rangle = 0$,

נשים לב כי $v - P_U(v) \in U^{\perp}$, $P_U(v) \in U$ וגם $P_U(v) + (v - P_U(v)) = v$, לכן

$$r_{U,U^{\perp}}(v) \overset{\text{def}}{=} P_U(v) - (v - P_U(v)) = P_U(v) - P_{U^{\perp}}(v) \overset{\text{def}}{=} R_U(v)$$

כלומר קיבלנו כי $r_{U,U^{\perp}}(v) = R_U(v)$, $\forall v \in V$, לכן $\boxed{r_{U,U^{\perp}} = R_U}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\|R_U(v)\| = \|v\|$

הוכחה:

יהיו $v_1, v_2 \in V$

$$\begin{aligned}\langle R_U(v_1), R_U(v_2)\rangle &\overset{\text{def}}{=} \langle P_U(v_1) - P_{U^{\perp}}(v_1), P_U(v_2) - P_{U^{\perp}}(v_2)\rangle \\ &= \langle P_U(v_1), P_U(v_2)\rangle - \langle P_U(v_1), P_{U^{\perp}}(v_2)\rangle - \langle P_{U^{\perp}}(v_1), P_U(v_2)\rangle + \langle P_{U^{\perp}}(v_1), P_{U^{\perp}}(v_2)\rangle\end{aligned}$$

עתה נשים לב כי $\langle P_U(v_1), P_{U^{\perp}}(v_2)\rangle = 0 = \langle P_{U^{\perp}}(v_1), P_U(v_2)\rangle$ כי $u \perp v$ לכל $u \in U$, $v \in U^{\perp}$, לכן נקבל כי

$$\begin{aligned}\langle R_U(v_1), R_U(v_2)\rangle &= \langle P_U(v_1), P_U(v_2)\rangle + \langle P_{U^{\perp}}(v_1), P_{U^{\perp}}(v_2)\rangle \\ &\overset{\star}{=} \langle P_U(v_1), P_U(v_2)\rangle + \langle v_1 - P_U(v_1), v_2 - P_U(v_2)\rangle \\ &= \langle P_U(v_1) + v_1 - P_U(v_1), P_U(v_2) + v_2 - P_U(v_2)\rangle \\ &= \langle v_1, v_2\rangle\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\langle R_U(v_1), R_U(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle}$, $\forall v_1, v_2 \in V$,

$\star$ - נשים לב כי נימקנו בסעיף הקודם כי $v - P_U(v) = P_{U^{\perp}}(v)$,

עתה נשים לב שאם נציב $v_1 = v_2 = v$ נקבל כי

$$\begin{aligned}\|R_U(v)\|^2 = \langle R_U(v), R_U(v)\rangle = \langle R_U(v_1), R_U(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2 \\ \Rightarrow \boxed{\|R_U(v)\| = \|v\|}\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\langle R_U(v_1), R_U(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$

הוכחה:

הטענה הוכחה בסעיף הקודם

מ.ש.ל.ג.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $-T$ אורתוגונלי
הוכחה:
נכון! יהיו $v_1, v_2 \in V$ אזי

$$\langle -T(v_1), -T(v_2)\rangle = (-1)^2 \cdot \langle T(v_1), T(v_2)\rangle = \langle T(v_1), T(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$$

כלומר $\forall v_1, v_2 \in V$ מתקיים $\langle -T(v_1), -T(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$, כלומר T אורתוגונלי

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $c \cdot T$ אורתוגונלי
הוכחה:
לא נכון! נבחר $V = \mathbb{R}^2$, $T = Id$, $c = 2$, עבור המכפלה הסטנדרטית, ברור שT אורתוגונלי ועתה נשים לב כי

$$1 = \left\|\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\| \neq \left\|2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right\| = \left\|\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\| = \sqrt{2 \cdot 2} = 4$$

כלומר $c \cdot T$ לא בהכרח אורתוגונלי (לדוגמא $2Id$)

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $S + T$ אורתוגונלי
הוכחה:
לא נכון! נבחר $V = \mathbb{R}^2$, $T = S = Id$, עבור המכפלה הסטנדרטית, ברור שT, S אורתוגונלי,
עתה נשים לב כי $T + S = 2 \cdot Id$, בסעיף הקודם ראינו ש$2Id$ לא אורתוגונלי במקרה זה,
לכן $S + T$ לא בהכרח אורתוגונלי (לדוגמא $T = S = Id$)

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $S \circ T$ אורתוגונלי
הוכחה:
נכון! יהיו $v_1, v_2 \in V$ אזי

$$\langle (S \circ T)(v_1), (S \circ T)(v_2)\rangle = \langle S(T(v_1)), S(T(v_2))\rangle = \langle T(v_1), T(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$$

כלומר $\forall v_1, v_2 \in V$ מתקיים $\langle (S \circ T)(v_1), (S \circ T)(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$, כלומר $S \circ T$ אורתוגונלי

מ.ש.ל.ד.☺

7. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** T אורתוגונלי
הוכחה:
לא נכון! נסתכל על $V = \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ עבור המכפלה הסטנדרטית, נשים לב כי

$$\|T(e_1)\| = \|e_1\| = 1$$
$$\|T(e_2)\| = \|e_1\| = 1$$

כלומר T מקיים את הנתונים, עתה נשים לב כי

$$\langle T(e_1), T(e_2)\rangle = \langle e_1, e_1\rangle = 1 \neq 0 = \langle e_1, e_2\rangle$$

כלומר T לא מקיים $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, $\forall u, v \in V$, כלומר T לא אורתוגונלי, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** T אורתוגונלי
הוכחה:
לא נכון! נסתכל על $V=\mathbb{R}^2$, $T(v)=0$, $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ עבור המכפלה הסטנדרטית,
נשים לב כי $\forall v_1,v_2\in V$ כך ש$\langle v_1,v_2\rangle=0$ מתקיים

$$\langle T(v_1),T(v_2)\rangle=\langle 0,0\rangle=0$$

כלומר T מקיים את הנתונים, עתה נשים לב כי

$$\langle T(e_1),T(e_1)\rangle=\langle 0,0\rangle=0\neq\langle e_2,e_2\rangle=1$$

כלומר T לא מקיים $\langle T(u),T(v)\rangle=\langle u,v\rangle$, $\forall u,v\in V$, כלומר T לא אורתוגונלי, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** T אורתוגונלי
הוכחה:
נכון! תחילה יהי $1<i\leq n$, נשים לב כי

$$\langle b_i-b_1,b_i+b_1\rangle=\|b_i\|^2-\langle b_i,b_1\rangle-\langle b_1,b_i\rangle-\|b_1\|^2=1-1=0$$

כלומר $\langle b_i-b_1,b_i+b_1\rangle=0$, נשתמש בנתון על T ונקבל

$$\begin{aligned}0=\langle T(b_i-b_1),T(b_i+b_1)\rangle&=\langle T(b_i)-T(b_1),T(b_i)+T(b_1)\rangle\\&=\|T(b_i)\|^2-\langle T(b_i),T(b_1)\rangle-\langle T(b_1),T(b_i)\rangle-\|T(b_1)\|^2\\&\overset{\langle b_1,b_i\rangle=0}{=}\|T(b_i)\|^2-\|T(b_1)\|^2=\|T(b_i)\|^2-1\\&\Rightarrow\|T(b_i)\|^2=1\Rightarrow\boxed{\|T(b_i)\|=1}\end{aligned}$$

עתה יהיו $u,v\in V$ אזי $\exists a_1,\ldots,a_n,c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{F}$ כך ש$u=\sum_{i=1}^n a_i\cdot b_i$ וגם $v=\sum_{i=1}^n c_i\cdot b_i$, לכן

$$\begin{aligned}\langle T(u),T(v)\rangle&=\left\langle T\left(\sum_{i=1}^n a_i\cdot b_i\right),T\left(\sum_{i=1}^n c_i\cdot b_i\right)\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n a_i\cdot T(b_i),\sum_{i=1}^n c_i\cdot T(b_i)\right\rangle\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i\cdot c_j\cdot\langle T(b_i),T(b_j)\rangle=\sum_{i=1}^n a_i\cdot c_i\cdot\langle T(b_i),T(b_i)\rangle\\&=\sum_{i=1}^n a_i\cdot c_i\cdot 1=\sum_{i=1}^n a_i\cdot c_i\cdot\langle b_i,b_i\rangle=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i\cdot c_j\cdot\langle b_i,b_j\rangle\\&=\left\langle\sum_{i=1}^n a_i\cdot b_i,\sum_{i=1}^n c_i\cdot b_i\right\rangle=\langle u,v\rangle\end{aligned}$$

כלומר $\forall v_1,v_2\in V$ מתקיים $\langle T(v_1),T(v_2)\rangle=\langle v_1,v_2\rangle$, כלומר T אורתוגונלי

מ.ש.ל.ג.☺

8. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $A_i(\theta)=A_1(\alpha)^n$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי

$$\begin{aligned}A_1(\theta_1)\cdot A_1(\theta_2)&=\begin{bmatrix}\cos(\theta_1)&-\sin(\theta_1)\\\sin(\theta_1)&\cos(\theta_1)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos(\theta_2)&-\sin(\theta_2)\\\sin(\theta_2)&\cos(\theta_2)\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos(\theta_1)\cdot\cos(\theta_2)-\sin(\theta_1)\cdot\sin(\theta_2)&-(\sin(\theta_1)\cdot\cos(\theta_2)+\sin(\theta_2)\cdot\cos(\theta_1))\\\sin(\theta_1)\cdot\cos(\theta_2)+\sin(\theta_2)\cdot\cos(\theta_1)&\cos(\theta_1)\cdot\cos(\theta_2)-\sin(\theta_1)\cdot\sin(\theta_2)\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2)&-\sin(\theta_1+\theta_2)\\\sin(\theta_1+\theta_2)&\cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}=A_1(\theta_1+\theta_2)\end{aligned}$$

לכן באינדוקציה נקבל כי $A_1(\alpha)^n = A_1(n\alpha)$, לכן

$$\boxed{A_1(\alpha)^n = A_1(n\alpha)}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $A_2(\theta) = A_2(\alpha)^n$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי

$$\begin{aligned} A_2(\alpha)\cdot A_2(\alpha) &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha) & \cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) & \cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= I_2 = A_1(0) \end{aligned}$$

לכן

$$A_2(\alpha)^3 = A_2(\alpha)\cdot A_2(\alpha)^2 = A_2(\alpha)\cdot I_2 = A_2(\alpha)$$

לכן באינדוקציה נקבל כי

$$\boxed{A_2(\alpha)^n = \begin{cases} A_2(\alpha) & n\equiv 1 \mod 2 \\ I_2 = A_1(0) & n \equiv 0 \mod 2 \end{cases}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $A_1(\alpha)\cdot A_2(\alpha)$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי

$$\begin{aligned} A_1(\alpha)\cdot A_2(0) &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \sin(0) & -\cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix} = A_2(\alpha) \\ A_2(\alpha)\cdot A_2(0) &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \sin(0) & -\cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = A_1(\alpha) \\ A_2(0)\cdot A_2(\alpha) &= \begin{bmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \sin(0) & -\cos(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = A_1(-\alpha) \end{aligned}$$

נשתמש בנוסחאות אלה $\boxed{A_1(\alpha)\cdot A_2(0) = A_2(\alpha)}$, $\boxed{A_2(0)\cdot A_2(\alpha) = A_1(-\alpha)}$, $\boxed{A_2(\alpha)\cdot A_2(0) = A_1(\alpha)}$,
עתה

$$A_1(\alpha)\cdot A_2(\alpha) = A_1(\alpha)\cdot A_1(\alpha)\cdot A_2(0) = (A_1(\alpha)\cdot A_1(\alpha))\cdot A_2(0) = A_1(2\alpha)\cdot A_2(0) = A_2(2\alpha)$$

לכן

$$\boxed{A_1(\alpha)\cdot A_2(\alpha) = A_2(2\alpha)}$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $A_2(\alpha)\cdot A_1(\alpha)$
הוכחה:
נעזר בנוסחאות מסעיף ג'

$$A_2(\alpha)\cdot A_1(\alpha)=A_2(\alpha)\cdot A_2(\alpha)\cdot A_2(0)=(A_2(\alpha)\cdot A_2(\alpha))\cdot A_2(0)=I_2\cdot A_2(0)=A_2(0)$$

לכן

$$\boxed{A_2(\alpha)\cdot A_1(\alpha)=A_2(0)}$$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** $A_2(\alpha)\cdot A_1(\alpha)\cdot A_2(\alpha)^{-1}$
הוכחה:
נעזר בנוסחאות מסעיף ג', וגם בכך ש $A_2(\alpha)^2=I_n$, לכן $A_2(\alpha)^{-1}=A_2(\alpha)$

$$A_2(\alpha)\cdot A_1(\alpha)\cdot A_2(\alpha)^{-1}=(A_2(\alpha)\cdot A_1(\alpha))\cdot A_2(\alpha)^{-1}=(A_2(0))\cdot A_2(\alpha)^{-1}=A_2(0)\cdot A_2(\alpha)=-A_1(\alpha)$$

לכן

$$\boxed{A_2(\alpha)\cdot A_1(\alpha)\cdot A_2(\alpha)^{-1}=-A_1(\alpha)}$$

מ.ש.ל.ה.☺

(ו) **צ"ל:** $A_1(\alpha)\cdot A_2(\alpha)\cdot A_1(\alpha)^{-1}$
הוכחה:
נעזר בנוסחאות מסעיף ג', וגם בכך ש $A_1(\alpha)\cdot A_1(-\alpha)=A_1(0)=I_2$, לכן $A_1(\alpha)^{-1}=A_1(-\alpha)$

$$\begin{aligned}A_1(\alpha)\cdot A_2(\alpha)\cdot A_1(\alpha)^{-1}&=(A_1(\alpha)\cdot A_2(\alpha))\cdot A_1(-\alpha)=A_2(2\alpha)\cdot A_1(-\alpha)\\&=A_2(2\alpha)\cdot A_2(0)\cdot A_2(\alpha)=(A_2(2\alpha)\cdot A_2(0))\cdot A_2(\alpha)\\&=A_1(2\alpha)\cdot A_2(\alpha)=A_1(2\alpha)\cdot A_1(\alpha)\cdot A_2(0)\\&=A_1(3\alpha)\cdot A_2(0)=A_2(3\alpha)\end{aligned}$$

לכן

$$\boxed{A_1(\alpha)\cdot A_2(\alpha)\cdot A_1(\alpha)^{-1}=A_2(3\alpha)}$$

מ.ש.ל.ו.☺

9. **צ"ל:** -1 ערך עצמי
הוכחה:
נשים לב כי χ_T הוא פולינום ממעלה שלישית ולכן יש לו שורש. אנחנו יודעים כי $\lambda=\pm1$ כי T אורתוגונלית,
לכן אם $\lambda=-1$ סיימנו, אחרת $\lambda=1$,
יהי $0\neq v\in V$ וקטור עצמי של $\lambda=1$, נגדיר $U=\operatorname{span}\{v\}$,
נשים לב כי U הוא T אינווראינטי, וראינו כי $U^\perp$ הוא גם T אינווראינטי,
נשים לב כי $V=U\oplus U^\perp$ וגם שניהם ה T אינווראינטים ולכן

$$-1=\det T=\det(T|_U)\cdot\det(T|_{U^\perp})$$

נשים לב כי $T\mid_U = Id\mid_U$, לכן $\det\left(T\mid_U\right)=1$, נציב ונקבל

$$\det\left(T\mid_{U^\perp}\right)=-1$$

צמצום של העתקה אורתוגונלית היא עדיין העתקה אורתוגונלית, לכן $T\mid_{U^\perp}$ היא העתקה אורתוגונלית וגם מתקיים

$$\dim U^\perp=\dim V-\dim U=3-1=2$$

כלומר $T\mid_{U^\perp}$ היא העתקה אורתוגונלית והיא מטריצה בגודל 2×2, לכן לפי מה שראינו בהרצאה ובתרגול מתקיים כי $T\mid_{U^\perp}$ ניתנת להצגה על ידי מטריצה מהצורה $A_2\left(\theta\right)$ (כי $\det T\mid_{U^\perp}=-1$).
וגם ראינו -1 הוא ערך עצמי של $A_2\left(\theta\right)$, לכן -1 הוא ערך עצמי של $T\mid_{U^\perp}$, ומהיות $T\mid_{U^\perp}$ הוא צמצום של T אז נובע כי -1 הוא גם ערך עצמי של T

מ.ש.ל.☺