פתרון תרגיל מספר 10 - לינארית 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

23 במאי 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathcal{P}$ סגורה לחיבור ובכפל בסקלר חיובי

הוכחה:

תחילה נראה סגירות לחיבור, יהיו $f,g\in\mathcal{P}$:

i. יהיו $u,v\in V$, נראה תכונת סימטריה

$$(f+g)(u,v)=f(u,v)+g(u,v)=\overline{f(v,u)}+\overline{g(v,u)}=\left(\overline{f+g}\right)(v,u)$$

ii. יהיו $u,v,w\in V$ ו-$\alpha\in\mathbb{F}$, נראה תכונת לינאריות

$$\begin{aligned}(f+g)(u,v+\alpha w)&=f(u,v+\alpha w)+g(u,v+\alpha w)\\&=f(u,v)+\alpha\cdot f(u,w)+g(u,v)+\alpha\cdot g(u,w)\\&=(f+g)(u,v)+\alpha\cdot(f+g)(u,w)\end{aligned}$$

iii. יהי $v\in V$, נראה תכונת חיוביות

$$(f+g)(v,v)=f(v,v)+g(v,v)\geq 0$$

נשים לב כי $(f+g)(v,v)=0$ אם"ם $f(v,v)=g(v,v)=0$ (שניהם חיוביים) אם"ם $v=0$

לכן $\boxed{f+g\in\mathcal{P}}$, עתה נראה סגירות לכפל בסקלר a:

i. יהיו $u,v\in V$, נראה תכונת סימטריה

$$(af)(u,v)=af(u,v)=a\overline{f(v,u)}\overset{a\in\mathbb{R}}{=}\overline{af(v,u)}=\left(\overline{af}\right)(v,u)$$

ii. יהיו $u,v,w\in V$ ו-$\alpha\in\mathbb{F}$, נראה תכונת לינאריות

$$\begin{aligned}(af)(u,v+\alpha w)&=af(u,v+\alpha w)\\&=af(u,v)+a\cdot\alpha\cdot f(u,w)\\&=(af)(u,v)+\alpha\cdot(af)(u,w)\end{aligned}$$

iii. יהי $v\in V$, נראה תכונת חיוביות

$$(af)(v,v)=af(v,v)\geq 0$$

נשים לב כי $(af)(v,v)=0$ אם"ם $f(v,v)$ ($a>0$) אם"ם $v=0$

לכן $\boxed{af\in\mathcal{P}}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathcal{P}$ לא מרחב וקטורי

הוכחה:

נשים לב כי $0 \notin \mathcal{P}$, אחרת ל$u \neq 0$ היה מתקיים $(u,u) = 0$ 0 בסתירה לתכונת החיובית שמתקיימת במכפלה פנימית

מ.ש.ל.ב.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $S \subseteq \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$

הוכחה:

יהי $s \in S$, אזי

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid \forall s \in S \Rightarrow \langle v, s\rangle = 0\}$$
$$\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \left\{v \in V \mid \forall s^{\perp} \in S^{\perp} \Rightarrow \left\langle v, s^{\perp}\right\rangle = 0\right\}$$

עתה נשים לב כי מההגדרה של $S^{\perp}$ מתקיים כי $\forall s^{\perp} \in S^{\perp}$

$$0 = \left\langle s^{\perp}, s\right\rangle = \left\langle s, s^{\perp}\right\rangle$$

כלומר s מקיים את התנאי של $\left(S^{\perp}\right)^{\perp}$, לכן $s \in \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$,

כלומר הראנו כי $\forall s \in S$ מתקיים $s \in \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$, לכן $\boxed{S \subseteq \left(S^{\perp}\right)^{\perp}}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $T^{\perp} \subseteq S^{\perp}$,

הוכחה:

יהי $t^{\perp} \in T^{\perp}$, אזי $\forall t \in T$ מתקיים

$$0 = \left\langle t^{\perp}, t\right\rangle$$

נשים לב כי $S \subseteq T$, לכן $\forall s \in T$ מתקיים

$$0 = \left\langle t^{\perp}, s\right\rangle$$

לכן מההגדרה מתקיים $t^{\perp} \in S^{\perp}$,

כלומר הראנו כי $\forall t^{\perp} \in T^{\perp}$ מתקיים $t^{\perp} \in S^{\perp}$, לכן $\boxed{T^{\perp} \subseteq S^{\perp}}$

מ.ש.ל.ב.☺

3. **צ"ל:** בסיס ל $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1+i\\1-i\\-1+i\\-1-i\end{bmatrix}\right\}^{\perp}$

הוכחה:

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1+i\\1-i\\-1+i\\-1-i\end{bmatrix}\right\}^{\perp}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^4\mid\left\langle\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle=0\wedge\left\langle\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1+i\\1-i\\-1+i\\-1-i\end{bmatrix}\right\rangle=0\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^4\mid\begin{array}{c}x+y+z+t=0\\(1+i)\,x+(1-i)\,y+(-1+i)\,z+(-1-i)\,t=0\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^4\mid\begin{array}{c}x+y+z+t=0\\-2i\cdot y+-2\cdot z+(-2-2i)\cdot t=0\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^4\mid\begin{array}{c}x=-y-z-t\\y=\frac{z+(2+2i)\cdot t}{i}\end{array}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^4\mid\begin{array}{c}x=-y-z-t\\y=-i\cdot z+(1-i)\cdot t\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^4\mid\begin{array}{c}x=(-1+i)\cdot z+i\cdot t\\y=-i\cdot z+(1-i)\cdot t\end{array}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}-1+i\\-i\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}i\\1-i\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

נשים לב כי זהו בסיס כי הוקטורים בת"ל $\boxed{\left\{\begin{bmatrix}-1+i\\-i\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}i\\1-i\\0\\1\end{bmatrix}\right\}}$ הוא הבסיס שחיפשנו

מ.ש.ל.☺

4. **צ"ל:** בסיס ל $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}^{\perp}$

הוכחה:

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}^{\perp}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2\mid\left\langle\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\rangle=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2\mid x-2\,(x+y)+5y=0\right\}=$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2\mid 3y-x=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2\mid x=3y\right\}=\left\{\begin{bmatrix}3y\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathbf{span}\left\{\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right\}$$

כלומר הבסיס שחיפשנו הוא $\boxed{\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}}$

מ.ש.ל.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** המכפלה היא פנימית

הוכחה:

i. תחילה נראה חיוביות

$$\langle A,A\rangle=\operatorname{tr}\left(\overline{A^t}\cdot A\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\overline{A^t}\cdot A\right]_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{i,j}^t}\cdot a_{j,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{j,i}\cdot\overline{a_{j,i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{j,i}|^2$$

נשים לב כי $\langle A,A\rangle \geq 0$ כי זה סכום של איברים לא שליליים וגם $\langle A,A\rangle = 0$ אם"ם כל איבר בסכום הוא 0, כלומר $a_{j,i}=0$ לכל i,j, כלומר המטריצה היא מטריצת ה0. לכן תכונת החיוביות מתקיימת

ii. עתה נראה סימטריות

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\left(\overline{A^t}\cdot B\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\overline{A^t}\cdot B\right]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{a^t_{i,j}}\cdot b_{j,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{j,i}}\cdot b_{j,i}$$

וגם

$$\overline{\langle B,A\rangle} = \overline{\mathrm{tr}\left(\overline{B^t}\cdot A\right)} = \overline{\sum_{i=1}^{n}\left[\overline{B^t}\cdot A\right]_{i,i}} = \overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{b^t_{i,j}}\cdot a_{j,i}} = \overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{b_{j,i}}\cdot a_{j,i}}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{j,i}}\cdot b_{j,i} = \langle A,B\rangle$$

לכן תכונת הסימטריות מתקיימת

iii. עתה נראה לינאריות במשתנה השני

$$\langle A,B+\alpha\cdot C\rangle = \mathrm{tr}\left(\overline{A^t}\cdot(B+\alpha\cdot C)\right) = \mathrm{tr}\left(\overline{A^t}\cdot B+\overline{A^t}\cdot\alpha\cdot C\right)$$
$$= \mathrm{tr}\left(\overline{A^t}\cdot B\right)+\mathrm{tr}\left(\overline{A^t}\cdot\alpha\cdot C\right) = \langle A,B\rangle+\alpha\cdot\mathrm{tr}\left(\overline{A^t}\cdot C\right) = \langle A,B\rangle+\alpha\cdot\langle A,C\rangle$$

כלומר המכפלה מקיימת את תכונת הלינאריות

מהיות המכסלה מקיימת את כל התכונות, המכפלה היא מכפלה פנימית

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** בסיס ל $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}^{\perp}$

הוכחה:

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}^{\perp} = \left\{\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{C}) \mid \left\langle\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\right\rangle = 0 = \left\langle\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\right\rangle\right\}$$
$$= \left\{\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{C}) \mid \overline{x+t}=0=\overline{y+z}\right\}$$
$$= \left\{\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{C}) \mid \begin{matrix}x=-t\\y=-z\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x&y\\-y&-x\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{C})\right\}$$
$$= \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right\}$$

לכן $\boxed{\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right\}}$ הוא הבסיס שחיפשנו כי הוקטורים הם בת"ל ופורשים

מ.ש.ל.ב.☺

6. **צ"ל:** $\langle f_n,f_m\rangle = 0$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\langle f_n, f_m\rangle &= \int_0^{2\pi} f_n(x)\cdot f_m(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cdot\sin(mx)\cdot dx\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cdot(\cos(nx-mx)-\cos(nx+mx))\cdot dx\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left[\int_0^{2\pi}\cos((n-m)x)\cdot dx - \int_0^{2\pi}\cos((n+m)\cdot x)\cdot dx\right]\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin((n-m)\cdot x)}{n-m}\,|_0^{2\pi} - \frac{\sin((n+m)\cdot x)}{n+m}\,|_0^{2\pi}\right]\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{0-0}{n-m}-\frac{0-0}{n+m}\right] = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

מ.ש.ל.☺

7. **צ"ל:** בסיס ל$S^\perp$

הוכחה:

$$\begin{aligned}S^\perp &= \{P\in\mathbb{R}_{\le 2}[X] \mid \langle P,x\rangle = 0\} = \left\{P = ax^2+bx+c \mid \int_0^1 P(x)\cdot x = 0\right\}\\ &= \left\{P = ax^2+bx+c \mid \int_0^1 \left(ax^2+bx+c\right)\cdot x = 0\right\}\\ &= \left\{P = ax^2+bx+c \mid \left(\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}\cdot x^2\right)|_0^1 = 0\right\}\\ &= \left\{P = ax^2+bx+c \mid \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2} = 0\right\}\\ &= \left\{P = ax^2+bx+c \mid c = -\frac{a}{2}-\frac{2b}{3}\right\}\\ &= \left\{P = a\cdot\left(x^2-\frac{1}{2}\right)+b\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)\right\} = \operatorname{span}\left\{x^2-\frac{1}{2}, x-\frac{2}{3}\right\}\end{aligned}$$

לכן מהיות $x^2-\frac{1}{2}, x-\frac{2}{3}$ בת"ל ופורשים, מתקיים כי $\boxed{\left\{x^2-\frac{1}{2}, x-\frac{2}{3}\right\}}$ הוא הבסיס שחיפשנו

מ.ש.ל.☺

8. **צ"ל:** נוסחת פולריזציה מרוכבת

הוכחה:

$$\frac{1}{4}\cdot\left[\|u+v\|^2-\|u-v\|^2-i\|u+iv\|^2+i\|u-iv\|^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\cdot[\langle u+v,u+v\rangle-\langle u-v,u-v\rangle-i\langle u+iv,u+iv\rangle+i\langle u-iv,u-iv\rangle]$$

נעבוד בחלקים כי יש הרבה אלגברה

$$\begin{aligned}&\langle u+v,u+v\rangle-\langle u-v,u-v\rangle\\ &=(\langle u,u\rangle+\langle v,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle)-(\langle u,u\rangle+\langle -v,u\rangle+\langle u,-v\rangle+\langle -v,-v\rangle)\\ &=\langle v,u\rangle+\langle u,v\rangle-\langle -v,u\rangle-\langle u,-v\rangle=\langle v,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle u,v\rangle\\ &=2\cdot(\langle v,u\rangle+\langle u,v\rangle)\end{aligned}$$

עתה נפרק את החלק שנשאר

$$
\begin{aligned}
&-i\left\langle u+iv,u+iv\right\rangle+i\left\langle u-iv,u-iv\right\rangle\\
&=-i\cdot\left(\left\langle u,u\right\rangle+\left\langle iv,u\right\rangle+\left\langle u,iv\right\rangle+\left\langle iv,iv\right\rangle\right)+i\cdot\left(\left\langle u,u\right\rangle+\left\langle -iv,u\right\rangle+\left\langle u,-iv\right\rangle+\left\langle -iv,-iv\right\rangle\right)\\
&=-i\left\langle u,u\right\rangle-i\cdot\left\langle iv,u\right\rangle-i\cdot\left\langle u,iv\right\rangle-i\cdot\left\langle v,v\right\rangle+i\cdot\left\langle u,u\right\rangle+i\cdot\left\langle -iv,u\right\rangle+i\cdot\left\langle u,-iv\right\rangle+i\cdot\left\langle v,v\right\rangle\\
&=-i\cdot\left\langle iv,u\right\rangle-i\cdot\left\langle u,iv\right\rangle+i\cdot\left\langle -iv,u\right\rangle+i\cdot\left\langle u,-iv\right\rangle\\
&=-\left\langle v,u\right\rangle+\left\langle u,v\right\rangle-\left\langle v,u\right\rangle+\left\langle u,v\right\rangle=2\left\langle u,v\right\rangle-2\left\langle v,u\right\rangle
\end{aligned}
$$

לכן

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\cdot\left[\left\|u+v\right\|^2-\left\|u-v\right\|^2-i\left\|u+iv\right\|^2+i\left\|u-iv\right\|^2\right]\\
=&\frac{1}{4}\cdot\left[\left\langle u+v,u+v\right\rangle-\left\langle u-v,u-v\right\rangle-i\left\langle u+iv,u+iv\right\rangle+i\left\langle u-iv,u-iv\right\rangle\right]\\
=&\frac{1}{4}\cdot\left[2\cdot\left\langle v,u\right\rangle+2\cdot\left\langle u,v\right\rangle+2\left\langle u,v\right\rangle-2\left\langle v,u\right\rangle\right]=\frac{1}{4}\cdot 4\left\langle u,v\right\rangle=\left\langle u,v\right\rangle
\end{aligned}
$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\frac{1}{4}\cdot\left[\left\|u+v\right\|^2-\left\|u-v\right\|^2-i\left\|u+iv\right\|^2+i\left\|u-iv\right\|^2\right]=\left\langle u,v\right\rangle}$, כנדרש

מ.ש.ל.☺