פתרון תרגיל מספר 6 - אינפי 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

3 בדצמבר 2018

1. **צ"ל:** קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים

(א) **צ"ל:** $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)$ מתכנס

הוכחה:

נשים לב כי

$$\ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)=\ln\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)=\ln\left(\frac{\left(n+1\right)^{2}}{n\left(n+2\right)}\right)$$

וגם מתקיים

$$\forall n\in\mathbb{N};\ln\left(\frac{\left(n+1\right)^{2}}{n\left(n+2\right)}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n\left(n+2\right)}\right)\geq0;\frac{1}{n^{2}}\geq0$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n\left(n+2\right)}\right)=\ln\left(1+0\right)=0$$

נרצה נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם הסדרה $\frac{1}{n^{2}}$ ולכן

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{(n+1)^{2}}{n(n+2)}\right)}{\frac{1}{n^{2}}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\ln\left(n+1\right)-\ln\left(n\right)-\ln\left(n+2\right)}{\frac{1}{n^{2}}}\\&\overset{\text{heine}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\ln\left(x+1\right)-\ln\left(x\right)-\ln\left(x+2\right)}{\frac{1}{x^{2}}}\\&\overset{L\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}}{-2\cdot\frac{1}{x^{3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x(x+2)-(x+1)(x+2)-x(x+1)}{x(x+1)(x+2)}}{-2}\cdot x^{3}\\&=\lim_{x\to\infty}x^{2}\cdot\frac{2x\left(x+2\right)-\left(x+1\right)\left(x+2\right)-x\left(x+1\right)}{-2\left(x+1\right)\left(x+2\right)}\\&=\lim_{x\to\infty}x^{2}\cdot\frac{2x^{2}+4x-\left(x^{2}+3x+2\right)-\left(x^{2}+x\right)}{-2\left(x+1\right)\left(x+2\right)}\\&=\lim_{x\to\infty}x^{2}\cdot\frac{-2}{-2\left(x+1\right)\left(x+2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2}}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}=1\end{aligned}$$

ולכן מבחן ההשוואה הגבולי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{(n+1)^{2}}{n(n+2)}\right)$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ מתכנס,

בהרצאה ראינו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ מתכנס, ולכן $\sum\ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{(n+1)^{2}}{n(n+2)}\right)$ מתכנס

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{n}(n)}$ מתכנס,
הוכחה:
נשים לב כי $0\le\frac{1}{\ln^{n}(n)}$, $\forall n\in\mathbb{N}$,
נרצה נשתמש במבחן השורש ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^{n}(n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln^{n}(n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n)}=0=L$$

ולכן מהיות $0\le L<1$ מתקיים כי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{n}(n)}$ מתכנס ממבחן השורש

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ מתבדר,
הוכחה:
נשים לב כי $0\le\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$,
וגם $0\le\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$
נרצה נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם הסדרה $\frac{1}{n}$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1$$

ולכן מבחן ההשוואה הגבולי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתכנס,
בהרצאה ראינו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ מתבדר

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n^4+n+1)}}$ מתכנס,
הוכחה:
נשים לב כי $0\le\frac{1}{\sqrt[3]{n(n^4+n+1)}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$,
וגם $0\le\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$
נרצה נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם הסדרה $\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n(n^4+n+1)}}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{n\left(n^4+n+1\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{n^5+n^2+n}{n^5}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0+0}}=1$$

ולכן מבחן ההשוואה הגבולי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n^4+n+1)}}$ מתכנס,
בהרצאה ראינו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ מתכנס כי $\frac{5}{3}>1$,
ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n^4+n+1)}}$ מתכנס

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\sin^2(n)$ מתכנס,
הוכחה:
נרצה נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי, נשים לב כי

$$0\le\frac{1}{n^2}\cdot\sin^2(n)\overset{0\le\sin^2(n)\le1}{\le}\frac{1}{n^2}$$

ולכן ממבחן ההשוואה, אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\sin^2(n)$ מתכנס,
בהרצאה ראינו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס כי $2>1$,
ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\sin^2(n)$ מתכנס

מ.ש.ל.ה.☺

(ו) **צ"ל:** $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתבדר,
הוכחה:
נרצה להראות כי הטור לא מקיים תנאי הכרחי להתכנסות ובכך להסיק שהוא לא מתכנס,
נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\overset{t=\frac{1}{n^2}}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\sin(t)}{t}=1$$

ולכן $\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)=1\neq0$,
כלומר הטור לא מקיים תנאי הכרחי להתכנסות,
ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתבדר

מ.ש.ל.ו.☺

(ז) **צ"ל:** $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ מתבדר,
הוכחה:
נרצה להראות כי הטור לא מקיים תנאי הכרחי להתכנסות ובכך להסיק שהוא לא מתכנס,
נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\overset{t=\frac{1}{n}}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\sin^2(t)}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2=1^2=1$$

ולכן $\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)=1\neq0$,
כלומר הטור לא מקיים תנאי הכרחי להתכנסות,
ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ מתבדר

מ.ש.ל.ז.☺

(ח) **צ"ל:** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ מתכנס,
הוכחה:
נשים לב כי $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ כי $\sqrt[n]{n}\geq1$
נרצה נשתמש במבחן השורש ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=1-1=0=L$$

ולכן מהיות $0\leq L<1$ מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ מתכנס ממבחן השורש

מ.ש.ל.ח.☺

(ט) **צ"ל:** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$ מתכנס,
הוכחה:
נשים לב כי $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq\frac{e^{\frac{1}{n}}\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$, כי $e^n, \frac{1}{\sqrt{n}}\geq0$ וגם $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sin\left(\frac{1}{n}\right)\geq0$
וגם $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$
נרצה נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם הסדרה $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{\frac{1}{n}}\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot n\right)$$
$$\overset{t=\frac{1}{n}}{=}\lim_{t\to0^+}\left(e^t\cdot\frac{\sin(t)}{t}\right)=1$$

ולכן מבחן ההשוואה הגבולי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס,
בהרצאה ראינו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס כי $\frac{3}{2} > 1$,
ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$ מתכנס

מ.ש.ל.ט.☺

(י) **צ"ל:** $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ מתכנס אם"ם $x < 1$,
הוכחה:
נחלק למקרים:

i. אם $x \geq 1$,
נשים לב שמתקיים $n \cdot x^n \geq n \cdot 1^n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
ולכן ממשפט טוסט נובע כי $\lim_{n\to\infty} n \cdot x^n = \infty$ כי $\lim_{n\to\infty} n \cdot = \infty$
ולכן $\lim_{n\to\infty} n \cdot x^n \neq 0$,
כלומר הטור לא מקיים תנאי הכרחי להתכנסות,
ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ מתבדר

ii. אם $x < 1$,
נשים לב כי $0 \leq n \cdot x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
נרצה נשתמש במבחן המנה ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot x^{n+1}}{n \cdot x^n} = \lim_{n\to\infty} x \cdot \frac{n+1}{n} = x \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= x \cdot 1 = x = L$$

נשים לב כי $0 \leq L = x < 1$ (ההנחה) ולכן מבחן המנה הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ מתכנס

מ.ש.ל.י.☺

(יא) **צ"ל:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ מתכנס
הוכחה:
נשים לב כי $0 \leq \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
נרצה נשתמש במבחן המנה ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{2^n \cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot (n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = 2 \cdot \frac{e^{-1}}{1-0} = \frac{2}{e} = L$$

נשים לב כי $0 \leq L = \frac{2}{e} \overset{3 \leq e}{\leq} \frac{2}{3} < 1$ (ההנחה) ולכן מבחן המנה הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ מתכנס

מ.ש.ל.יא.☺

2. **צ"ל:** אי שוויון הממוצעים $0 < \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים $\sqrt{\alpha \cdot \beta} \leq \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$
התבקש שלא לצרף הוכחה

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** הוכיחו את הדברים הבאים:

(א) **צ"ל:** אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס

הוכחה:

נשים לב שבהרצאה ראינו שאם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז כל זנב שלו מתכנס,
ובפרט מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ מתכנס,
מתכונת הלינאריות לטורים מתקיים כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + a_{n+1}\right)$ מתכנס $(\star)$ ו

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + a_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$$

נשים לב שמאי שוויון הממוצעים מתקיים

$$0 \leq \sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}\left(a_n + a_{n+1}\right) \leq a_n + a_{n+1}$$

לכן מתקיים $0 \leq \sqrt{a_n a_{n+1}} \leq a_n + a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
מ$\star$ מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + a_{n+1}\right)$ מתכנס,
לכן ממשפט ההשוואה מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** אם $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} = S$ וa_n מונוטונית יורדת אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס

הוכחה:

נשים לב שa_n מונוטונית יורדת, לכן $\forall n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq a_{n+1}$,
ולכן מתקיים

$$0 \leq a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}^2} \leq \sqrt{a_n a_{n+1}}$$

לכן מתקיים $0 \leq a_{n+1} \leq \sqrt{a_n a_{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
מההנחה מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס,
לכן ממשפט ההשוואה מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ מתכנס,
נשים לב כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ מתכנס ולכן ממשפט הזנבות מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** אם $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} = S$ אזי לא בהכרח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס

הוכחה:

נבחר $a_n = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \mod 2 \\ \frac{1}{n^4} & n \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$,
נשים לב כי $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
נשים לב כי $a_n \cdot a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)^4} & n \equiv 0 \mod 2 \\ \frac{1}{n^4} & n \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$,
לכן

$$0 \leq a_n \cdot a_{n+1} \leq \max\left\{\frac{1}{n^4}, \frac{1}{(n+1)^4}\right\} = \frac{1}{n^4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}} \leq \sqrt{\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{n^2}$$

לכן מתקיים $0 \leq \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}} \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
בהרצאה ראינו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס כי $2 > 1$,
לכן ממשפט ההשוואה מתקיים כי $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$ מתכנס,
עתה נשים לב כי

$$\sum_{i=1}^{k} a_k \overset{a_i \geq 0}{\geq} \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} a_{2 \cdot k} = \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} 1 = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$$

לכן ממשפט טוסט מתקיים כי

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} a_k = \lim_{k\to\infty}\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor = \infty$$

כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לא מתכנס

מ.ש.ל.ג.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** הראו ש$\forall l\in\mathbb{N}$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+l}$ מתכנס ל$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{l} a_n$

הוכחה:

נגדיר $t_k = a_{l+1}+\cdots+a_{l+k}$, $\forall k\in\mathbb{N}$

נשים לב כי $\forall k\in\mathbb{N}$ מתקיים $t_k = S_{l+k}-S_l$

נסמן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ כי נתון ש$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ונראה כי $\sum_{n=l+1}^{\infty} a_n$ מתכנס

לכן $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, ולכן לפי משפט הירושה (S_{l+k}) מתכנסת לs

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \lim_{k\to\infty}\left[S_{l+k}-S_l\right] = \lim_{k\to\infty}\left[S_{l+k}\right]-S_l = S-S_l = S-\sum_{n=1}^{l} a_n$$

כלומר מההגדרה נובע כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+l}$ מתכנס ו

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+l} = \lim_{k\to\infty} t_k = S-\sum_{n=1}^{l} a_n$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:**

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+l} = 0$$

הוכחה:

מהסעיף הקודם אנחנו יודעים כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+l} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{l} a_n$,

נסמן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ כי נתון ש$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס,

לכן

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+l} = \lim_{l\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{l} a_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \lim_{l\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{l} a_n\right] = S-\lim_{l\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{l} a_n\right]$$
$$= S-S = 0$$

מ.ש.ל.ב.☺

5. **צ"ל:** הראו כי $1\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\le 2$

הוכחה:

נגדיר $b_k = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{n^2}$, $\forall k\in\mathbb{N}$,

מהיות $\frac{1}{n^2}$ סדרה מונוטונית יורדת מתקיים כי

$$b_k = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{\left(2^{k-1}\right)^2}\cdot\left(2^{k-1}-1\right) \le \frac{1}{\left(2^{k-1}\right)^2}\cdot\left(2^{k-1}\right) = \frac{2^{k-1}}{2^{2k-2}} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

יהי $i \in \mathbb{N}$, $\exists k \in \mathbb{N}$ כך ש$2^{k-1} \leq i < 2^k$, לכן

$$\sum_{n=1}^{i} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{2^k-1} \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{n=2^{i-1}}^{2^i-1} \frac{1}{n^2} \right] = \sum_{i=1}^{k} b_i \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^i}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \leq 2$$

כלומר $\sum_{n=1}^{i} \frac{1}{n^2} \leq 2$, $\forall i \in \mathbb{N}$ ולכן גם כן מתקיים ממונוטוניות הגבול

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{i} \frac{1}{n^2} \overset{\star}{\leq} \lim_{i\to\infty} 2 = 2$$

נשים לב כי $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \geq 0$ קיים כי הוא זנב של $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ וזה מתקיים כי זהו סכום של מספרים אי שליליים,
לכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \overset{\star\star}{\geq} 1 + 0 = 1$$

לכן קיבלנו מ$\star$ ו$\star\star$

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

מ.ש.ל.☺

6. **צ"ל:** סדרה a_n כך ש $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לא קיים וגם $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ קיים ושונה מ1

הוכחה:

נבחר $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & n \equiv 0 \mod 2 \\ \frac{1}{2^{n-1}} & n \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$, לכן

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{2n}}}{\frac{1}{2^{2n-1-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{2n+1-1}}}{\frac{1}{2^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$$

ולכן

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{4} < 1 \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
$$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \neq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

לכן $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לא קיים,
וגם

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} & n \equiv 0 \mod 2 \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n-1}}} & n \equiv 1 \mod 2 \end{cases} = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} \frac{1}{2} & n \equiv 0 \mod 2 \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \cdot 2} & n \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \begin{cases} \frac{1}{2} & n \equiv 0 \mod 2 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{2} & n \equiv 1 \mod 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} & n \equiv 0 \mod 2 \\ \frac{1}{2} & n \equiv 1 \mod 2 \end{cases} = \frac{1}{2}$$

ולכן ממשפט שהוכח באינפי 1 מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ קיים ו$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$,
כלומר הטור מתכנס ממבחן השורש על אף שממבחן המנה לא ניתן לדעת

מסקנה:

זה שאחד המבחנים להתכנסות טורים לא עובד על הטור הספציפי הזה,
אינו גורר ששאר המבחנים להתכנסות טורים לא יעבדו

מ.ש.ל.☺