פתרון תרגיל מספר 1 ־ כלים מתמטיים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

28 באוקטובר 2020

1. **צ"ל:**

$$\mathbb{P}(X=x \wedge Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y) \iff \mathbb{E}[f(X)\cdot g(Y)]=\mathbb{E}[f(X)]\cdot\mathbb{E}[g(Y)]$$

הוכחה:
$\Leftarrow$: נניח ש־ $\mathbb{P}(X=x \wedge Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y)$ לכל $x\in\mathcal{X}$ ולכל $y\in\mathcal{Y}$,
תהי $f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ ו־ $g:\mathcal{Y}\to\mathbb{R}$.
נשים לב כי

$$f(X)\cdot g(Y)=\sum_{x\in\mathrm{Im}X}\sum_{y\in\mathrm{Im}Y} f(x)\cdot g(y)\cdot I_{X=x\wedge Y=y}$$

לכן

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X)\cdot g(Y)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{x\in\mathrm{Im}X}\sum_{y\in\mathrm{Im}Y} f(x)\cdot g(y)\cdot I_{X=x\wedge Y=y}\right]\\
&\overset{\text{linearity}}{=} \sum_{x\in\mathrm{Im}X}\sum_{y\in\mathrm{Im}Y} f(x)\cdot g(y)\cdot \mathbb{E}[I_{X=x\wedge Y=y}]\\
&\overset{\mathbb{E}[I_A]=\mathbb{P}(A)}{=} \sum_{x\in\mathrm{Im}X}\sum_{y\in\mathrm{Im}Y} f(x)\cdot g(y)\cdot \mathbb{P}(X=x\wedge Y=y)\\
&\overset{\text{assumption}}{=} \sum_{x\in\mathrm{Im}X}\sum_{y\in\mathrm{Im}Y} f(x)\cdot g(y)\cdot \mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y)\\
&= \left[\sum_{x\in\mathrm{Im}X} f(x)\cdot\mathbb{P}(X=x)\right]\cdot\left[\sum_{y\in\mathrm{Im}Y} g(y)\cdot\mathbb{P}(Y=y)\right]\\
&= \left[\sum_{\omega\in\Omega} f(X(\omega))\cdot\mathbb{P}(\omega)\right]\cdot\left[\sum_{\omega\in\Omega} g(Y(\omega))\cdot\mathbb{P}(\omega)\right]\\
&= \mathbb{E}[f(X)]\cdot\mathbb{E}[g(Y)]
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\mathbb{E}[f(X)\cdot g(Y)]=\mathbb{E}[f(X)]\cdot\mathbb{E}[g(Y)]$ לכל $f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ ולכל $g:\mathcal{Y}\to\mathbb{R}$, כנדרש.
$\Rightarrow$: נניח ש־ $\mathbb{E}[f(X)\cdot g(Y)]=\mathbb{E}[f(X)]\cdot\mathbb{E}[g(Y)]$ לכל $f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ ולכל $g:\mathcal{Y}\to\mathbb{R}$.
יהיו $x\in\mathcal{X}$ ו־ $y\in\mathcal{Y}$.
נבחר $f_1(\omega)=I_{X=x}$ ו־ $g_1(\omega)=I_{Y=y}$, נשים לב כי

$$\mathbb{E}[f_1(X)\cdot g_1(Y)]=\mathbb{E}[I_{X=x}\cdot I_{Y=y}]=\mathbb{E}[I_{X=x\wedge Y=y}]\overset{\mathbb{E}[I_A]=\mathbb{P}(A)}{=}\mathbb{P}(X=x\wedge Y=y)$$

וגם

$$\mathbb{E}[f_1(X)]\cdot\mathbb{E}[g_1(Y)]=\mathbb{E}[I_{X=x}]\cdot\mathbb{E}[I_{Y=y}]\overset{\mathbb{E}[I_A]=\mathbb{P}(A)}{=}\mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y)$$

ומהנתון נקבל כי

$$\mathbb{P}\left(X=x\wedge Y=y\right)=\mathbb{E}\left[f_{1}\left(X\right)\cdot g_{1}\left(Y\right)\right]=\mathbb{E}\left[f_{1}\left(X\right)\right]\cdot\mathbb{E}\left[g_{1}\left(Y\right)\right]=\mathbb{P}\left(X=x\right)\cdot\mathbb{P}\left(Y=y\right)$$

כלומר קיבלנו כי $\mathbb{P}\left(X=x\wedge Y=y\right)=\mathbb{P}\left(X=x\right)\cdot\mathbb{P}\left(Y=y\right)$ לכל $x\in\mathcal{X}$ ולכל $y\in\mathcal{Y}$, כנדרש.

מ.ש.ל.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(X+Y\geq t\right)\leq\mathbb{P}\left(X\geq a\right)+\mathbb{P}\left(Y\geq t-a\right)$

הוכחה:

יהיו $\alpha,t\in\mathbb{R}$,

יהי $\omega\in X+Y\geq t$, כלומר מתקיים $X\left(\omega\right)+Y\left(\omega\right)\geq t$, נחלק ל2 מקרים:

i. אם $X\left(\omega\right)\geq a$ אז $\omega\in\left(X\geq a\right)\cup\left(Y\geq t-a\right)$

ii. אחרת $X\left(\omega\right)<a$ ולכן

$$X\left(\omega\right)+Y\left(\omega\right)\geq t\Rightarrow Y\left(\omega\right)\geq t-X\left(\omega\right)\geq t-a$$

ולכן $\omega\in\left(X\geq a\right)\cup\left(Y\geq t-a\right)$

כלומר קיבלנו שתמיד מתקיים $\omega\in X+Y\geq t\rightarrow\omega\in\left(X\geq a\right)\cup\left(Y\geq t-a\right)$ ולכן $X+Y\geq t\subseteq\left(X\geq a\right)\cup\left(Y\geq t-a\right)$.

נשים לב כי

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X+Y\geq t\right) & \overset{E_{1}\subseteq E_{2}\rightarrow\mathbb{P}(E_{1})\leq\mathbb{P}(E_{2})}{\leq}\mathbb{P}\left(\left(X\geq a\right)\cup\left(Y\geq t-a\right)\right)\\ & \overset{\mathbb{P}(A\cup B)\leq\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)}{\leq}\mathbb{P}\left(X\geq a\right)+\mathbb{P}\left(Y\geq t-a\right)\end{aligned}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(XY\geq t\right)\leq\mathbb{P}\left(X\geq a\right)+\mathbb{P}\left(Y\geq\frac{t}{a}\right)$

הוכחה:

יהיו $\alpha,t>0$,

יהי $\omega\in XY\geq t$, כלומר מתקיים $X\left(\omega\right)\cdot Y\left(\omega\right)\geq t$, נחלק ל2 מקרים:

i. אם $X\left(\omega\right)\geq a$ אז $\omega\in\left(X\geq a\right)\cup\left(Y\geq\frac{t}{a}\right)$

ii. אחרת $0<X\left(\omega\right)<a$ ולכן

$$X\left(\omega\right)\cdot Y\left(\omega\right)\geq t\Rightarrow Y\left(\omega\right)\geq\frac{t}{X\left(\omega\right)}\geq\frac{t}{a}$$

ולכן $\omega\in\left(X\geq a\right)\cup\left(Y\geq\frac{t}{a}\right)$

כלומר קיבלנו שתמיד מתקיים $\omega\in XY\geq t\rightarrow\omega\in\left(X\geq a\right)\cup\left(Y\geq\frac{t}{a}\right)$ ולכן $XY\geq t\subseteq\left(X\geq a\right)\cup\left(Y\geq\frac{t}{a}\right)$.

נשים לב כי

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(XY\geq t\right) & \overset{E_{1}\subseteq E_{2}\rightarrow\mathbb{P}(E_{1})\leq\mathbb{P}(E_{2})}{\leq}\mathbb{P}\left(\left(X\geq a\right)\cup\left(Y\geq\frac{t}{a}\right)\right)\\ & \overset{\mathbb{P}(A\cup B)\leq\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)}{\leq}\mathbb{P}\left(X\geq a\right)+\mathbb{P}\left(Y\geq\frac{t}{a}\right)\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ב.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{P}(X>0)\leq\mathbb{E}[X]$
הוכחה:
נשים לב כי

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X]&=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot\mathbb{P}(X=n)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\mathbb{P}(X=n)\overset{n\geq1}{\geq}\sum_{n=1}^{\infty}1\cdot\mathbb{P}(X=n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=n)\overset{\text{sums over all options bigger than 0}}{=}\mathbb{P}(X>0)\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\mathbb{P}(X>0)\leq\mathbb{E}[X]$, כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{P}(X=0)\leq\frac{\text{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}$
הוכחה:
נשים לב כי

$$\begin{aligned}&\omega\in X=0\rightarrow X(\omega)=0\\&\rightarrow X(\omega)-\mathbb{E}[X]=-\mathbb{E}[X]\rightarrow|X(\omega)-\mathbb{E}[X]|=|\mathbb{E}[X]|\\&\rightarrow|X(\omega)-\mathbb{E}[X]|\geq|\mathbb{E}[X]|\rightarrow\omega\in|X-\mathbb{E}[X]|\geq|\mathbb{E}[X]|\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\omega\in X=0\rightarrow\omega\in|X-\mathbb{E}[X]|\geq|\mathbb{E}[X]|$ ולכן $X=0\subseteq|X-\mathbb{E}[X]|\geq|\mathbb{E}[X]|$.
עתה נשים לב כי $\mathbb{E}[X]\neq0$ ולכן $|\mathbb{E}[X]|>0$ ולכן נוכל להשתמש בצ'בישב, לכן,

$$\mathbb{P}(X=0)\overset{E_1\subseteq E_2\rightarrow\mathbb{P}(E_1)\leq\mathbb{P}(E_2)}{\leq}\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|\geq|\mathbb{E}[X]|)\overset{\text{chebyshev inequality}}{\leq}\frac{\text{Var}[X]}{|\mathbb{E}[X]|^2}=\frac{\text{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}$$

כלומר קיבלנו כי $\mathbb{P}(X=0)\leq\frac{\text{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}$, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

4. **צ"ל:** $|\mathbb{E}[X\cdot Y]|\leq\mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbb{E}\left[Y^2\right]^{\frac{1}{2}}$
הוכחה:
תחילה נראה כי $\mathbb{E}[X\cdot Y]\leq\mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbb{E}\left[Y^2\right]^{\frac{1}{2}}$, נחלק ל2 מקרים:

(א) אם $\mathbb{E}\left[Y^2\right]\neq0$, נשים לב כי X^2,Y^2 משתנים מקריים אי שליליים ולכן $\mathbb{E}\left[Y^2\right]>0$ וגם $\frac{\mathbb{E}[X\cdot Y]}{\mathbb{E}[Y^2]}$ מוגדר היטב, לכן

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(X-\alpha Y)^2\right]&=\mathbb{E}\left[X^2-2\alpha XY+\alpha^2Y^2\right]=\mathbb{E}\left[X^2\right]-2\alpha\mathbb{E}[XY]+\alpha^2\mathbb{E}\left[Y^2\right]\\&\overset{\alpha=\frac{\mathbb{E}[X\cdot Y]}{\mathbb{E}[Y^2]}}{=}\mathbb{E}\left[X^2\right]-2\frac{\mathbb{E}[X\cdot Y]}{\mathbb{E}[Y^2]}\mathbb{E}[XY]+\left(\frac{\mathbb{E}[X\cdot Y]}{\mathbb{E}[Y^2]}\right)^2\cdot\mathbb{E}\left[Y^2\right]\\&=\mathbb{E}\left[X^2\right]-2\frac{\mathbb{E}[XY]^2}{\mathbb{E}[Y^2]}+\frac{\mathbb{E}[X\cdot Y]^2}{\mathbb{E}[Y^2]^2}\cdot\mathbb{E}\left[Y^2\right]\\&=\mathbb{E}\left[X^2\right]-2\frac{\mathbb{E}[XY]^2}{\mathbb{E}[Y^2]}+\frac{\mathbb{E}[XY]^2}{\mathbb{E}[Y^2]}=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\frac{\mathbb{E}[XY]^2}{\mathbb{E}[Y^2]}\end{aligned}$$

נשים לב כי $(X-\alpha Y)^2$ הוא משתנה מקרי אי שלילי ולכן $\mathbb{E}\left[(X-\alpha Y)^2\right]\geq0$,

נציב את הפיתוח שלנו ונקבל

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X^2\right]-\frac{\mathbb{E}\left[XY\right]^2}{\mathbb{E}\left[Y^2\right]}=\mathbb{E}\left[\left(X-\frac{\mathbb{E}\left[X\cdot Y\right]}{\mathbb{E}\left[Y^2\right]}\cdot Y\right)^2\right]\geq 0\\ &\Rightarrow \mathbb{E}\left[X^2\right]-\frac{\mathbb{E}\left[XY\right]^2}{\mathbb{E}\left[Y^2\right]}\geq 0\\ &\Rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[XY\right]^2}{\mathbb{E}\left[Y^2\right]}\leq \mathbb{E}\left[X^2\right]\\ &\Rightarrow \mathbb{E}\left[XY\right]^2\overset{\mathbb{E}\left[Y^2\right]>0}{\leq}\mathbb{E}\left[X^2\right]\cdot\mathbb{E}\left[Y^2\right]\\ &\Rightarrow \left|\mathbb{E}\left[XY\right]\right|\overset{\text{sqrt both sides}}{\leq}\sqrt{\mathbb{E}\left[X^2\right]\cdot\mathbb{E}\left[Y^2\right]}=\mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbb{E}\left[Y^2\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\left|\mathbb{E}\left[XY\right]\right|\leq\mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbb{E}\left[Y^2\right]^{\frac{1}{2}}}$

(ב) עתה נשאר המקרה ש־ $\mathbb{E}\left[Y^2\right]=0$,
נשים לב כי

$$0=\mathbb{E}\left[Y^2\right]=\sum_{y\in\mathrm{Im}Y}y^2\cdot\mathbb{P}\left(Y=y\right)$$

נניח בשלילה ש־ $Y\neq 0$, כלומר $\exists y_1\in\mathrm{Im}Y\neq 0$ ונשים לב כי

$$\sum_{y\in\mathrm{Im}Y}y^2\cdot\mathbb{P}\left(Y=y\right)\geq y_1^2\cdot\mathbb{P}\left(Y=y\right)>0$$

קיבלנו סתירה כי $0=\sum_{y\in\mathrm{Im}Y}y^2\cdot\mathbb{P}\left(Y=y\right)>0$ ולכן $\boxed{Y=0}$,
ולכן נקבל כי

$$\mathbb{E}\left[X\cdot Y\right]=\mathbb{E}\left[X\cdot 0\right]=0$$

וגם X^2 משתנה מקרי אי שלילי ולכן $\mathbb{E}\left[X^2\right]\geq 0$ ולכן

$$\left|\mathbb{E}\left[X\cdot Y\right]\right|=0\leq 0\cdot\mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}}=\mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbb{E}\left[Y^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

כלומר גם במקרה זה נקבל ש־ $\boxed{\left|\mathbb{E}\left[XY\right]\right|\leq\mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbb{E}\left[Y^2\right]^{\frac{1}{2}}}$

כלומר הראנו שתמיד מתקיים $\boxed{\left|\mathbb{E}\left[XY\right]\right|\leq\mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbb{E}\left[Y^2\right]^{\frac{1}{2}}}$, כנדרש

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(X>\theta\mathbb{E}\left[X\right]\right)\geq\left(1-\theta\right)^2\frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}$
הוכחה:
נשים לב כי ממונוטוניות התוחלת מתקיים

$$\mathbb{E}\left[X\cdot I_{X\leq\theta\mathbb{E}[X]}\right]\leq\theta\mathbb{E}\left[X\right]$$

וגם מאי שוויון קושי שוורץ (שאלה 4 בתרגיל) מתקיים כי

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\cdot I_{X>\theta\mathbb{E}[X]}\right]&\leq\mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbb{E}\left[I_{X>\theta\mathbb{E}[X]}^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ &=\mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbb{E}\left[I_{X>\theta\mathbb{E}[X]}\right]^{\frac{1}{2}}\overset{\mathbb{E}[I_A]=\mathbb{P}(A)}{=}\mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbb{P}\left(X>\theta\mathbb{E}\left[X\right]\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

נשים לב כי

$$X = X \cdot I_{X \leq \theta \mathbb{E}[X]} + X \cdot I_{X > \theta \mathbb{E}[X]}$$

נפעיל תוחלת על 2 האגפים ונעזר בחסמים שמצאנו קודם ונקבל

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}\left[X \cdot I_{X \leq \theta \mathbb{E}[X]} + X \cdot I_{X > \theta \mathbb{E}[X]}\right] = \mathbb{E}\left[X \cdot I_{X \leq \theta \mathbb{E}[X]}\right] + \mathbb{E}\left[X \cdot I_{X > \theta \mathbb{E}[X]}\right] \\ &\leq \theta \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{P}(X > \theta \mathbb{E}[X])^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &\leq \theta \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{P}(X > \theta \mathbb{E}[X])^{\frac{1}{2}} \\ (1-\theta) \cdot \mathbb{E}[X] &\leq \mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{P}(X > \theta \mathbb{E}[X])^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

נשים לב ש2 האגפים חיוביים (כי $0 \leq \theta \leq 1$ וגם כי X משתנה אי שלילי) לכן האי שוויון יישמר כשנעלה בחזקה ונקבל כי

$$(1-\theta)^2 \cdot \mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2\right] \cdot \mathbb{P}(X > \theta \mathbb{E}[X])$$

נשים לב כי X^2 משתנה מקרי אי שלילי ולכן $\mathbb{E}\left[X^2\right] \geq 0$
נניח ש־ $\mathbb{E}\left[X^2\right] \neq 0$ על אף שזה לא צוין בתרגיל כשנמצא במכנה של ביטוי ולכן $\mathbb{E}\left[X^2\right] > 0$, נחלק בו ונקבל

$$(1-\theta)^2 \cdot \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]} \leq \mathbb{P}(X > \theta \mathbb{E}[X])$$

כלומר הראנו ש־ $(1-\theta)^2 \cdot \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]} \leq \mathbb{P}(X > \theta \mathbb{E}[X])$, כנדרש.

מ.ש.ל.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$
הוכחה:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}[X]$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq t)\, dt$
הוכחה:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq t)\, dt &= \int_0^{\infty} \left[\int_t^{\infty} \mathbb{P}(X = s)\, ds\right] dt = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{s} \mathbb{P}(X = s)\, dt\right] ds \\ &= \int_0^{\infty} \left[x|_0^s \cdot \mathbb{P}(X = s)\right] ds = \int_0^{\infty} \left[s \cdot \mathbb{P}(X = s)\right] ds = \mathbb{E}[X]\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ב.☺

7. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(|X_i| \geq t\right) \leq \frac{m_p}{t^p}$
הוכחה:

$$\mathbb{P}\left(|X_i| \geq t\right) = \mathbb{P}\left(|X_i|^p \geq t^p\right) \overset{\textbf{markov inequality}}{\leq} \frac{\mathbb{E}\left[|X_i|^p\right]}{t^p} = \frac{m_p}{t^p}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |X_i| \geq a_n \cdot n^{\frac{1}{p}}\right) = 0$
הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |X_i| \geq a_n \cdot n^{\frac{1}{p}}\right) &= \mathbb{P}\left(\exists i \in [n] \text{ s.t. } |X_i| \geq a_n \cdot n^{\frac{1}{p}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \left(|X_i| \geq a_n \cdot n^{\frac{1}{p}}\right)\right) \\ &\overset{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\leq\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(|X_i| \geq a_n \cdot n^{\frac{1}{p}}\right) \\ &\overset{\text{from the previous question}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_p}{\left(a_n \cdot n^{\frac{1}{p}}\right)^p} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{m_p}{a_n^p \cdot n} = n \cdot \frac{m_p}{a_n^p \cdot n} = \frac{m_p}{a_n^p}\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |X_i| \geq a_n \cdot n^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{m_p}{a_n^p}$$

נשים לב כי $\lim_{n\to\infty} a_n^p = \infty$ כי נתון ש־ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ וגם $p > 0$.

ולכן נקבל כי $0 \overset{\frac{1}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{m_p}{a_n^p}$ ולכן מסנדוויץ' נקבל כי $\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |X_i| \geq a_n \cdot n^{\frac{1}{p}}\right) = 0}$, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺