אלגברה לינארית (2) תשע"ט 2018-2019 - סמסטר ב' - תרגיל 4

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז.** יש לציין **כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 10.4.19 בשעה 21:00.

1. עבור כל אחת מהמטריצות הבאות מצאו את הערכים העצמיים, בסיסים של המרחבים העצמיים וקבעו האם המטריצה לכסינה.

א) $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ב) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ג) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

2. (א) נתונה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כך ש- $A^3 = A$ ויהי λ ערך עצמי של A . הוכיחו או הפריכו: $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$.
(ב) נתונה $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ כך שהערכים העצמיים שלה הם 0 ו- -1 . האם בהכרח $A^3 = A$?
(ג) נתונה $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ שהערכים העצמיים שלה הם $0, -1$. האם בהכרח $A^3 = A$?
(ד) נתונה $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ לכסינה כך שהערכים העצמיים שלה הם $0, -1$. האם בהכרח $A^3 = A$?

3. יהיו V מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F}$ ו- $T : V \to V$ אופרטור לינארי. יהי $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ בסיס של V המורכב מוקטורים עצמיים של T , כלומר $\vec{v}_i$ וקטור עצמי של T לכל $1 \leqslant i \leqslant n$. הוכיחו כי אם λ ערך עצמי של T , אז קיים $1 \leqslant i \leqslant n$ כך ש- $\vec{v}_i$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי λ .

4. נתונה מטריצה <u>הפיכה</u> $K \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. הוכיחו או הפריכו מהטענות הבאות:
א) אם K לכסינה, אז K^{-1} לכסינה.
ב) אם K לכסינה, אז $K + K^{-1}$ לכסינה.
ג) אם $K + K^{-1}$ לכסינה, אז K לכסינה.

5. (א) יהי V מ"ו נוצר סופית , ויהיו $T, S\colon V \to V$ אופרטורים לינאריים.
i. נניח שקיים ל- V בסיס $\mathcal{B}$ המלכסן בו־זמנית את T ו- S , כלומר $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ו- $[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ שתיהן אלכסוניות. הוכיחו ש- $S \circ T = T \circ S$.
ii. נניח ש- $S \circ T = T \circ S$. האם יתכן ש- T לכסין ו- S לא לכסין?
(ב) יהי V מ"ו (לאו דווקא נוצר סופית), ויהיו $T, S\colon V \to V$ אופרטורים לינאריים כך ש- $S \circ T = T \circ S$.
i. יהי λ ערך עצמי של T ונסמן ב- $V_{T,\lambda}$ את תת המרחב העצמי השייך לו. הוכיחו ש- $V_{T,\lambda}$ הוא S-אינווריאנטי.
ii. יהי $\vec{v} \in V$ וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי λ . האם $\vec{v}$ בהכרח וקטור עצמי של S ?

6. נגדיר סדרה $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ של מספרים טבעיים באופן רקורסיבי על ידי הכללים הבאים:

$$F_0 = 0 \ , \ F_1 = 1 \ , \ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

הסדרה הזו תוארה לראשונה בספר "Liber Abaci" ("ספר החישובים") משנת 1202 שכתב לאונרדו מפיזה הידוע בכינוי "פיבונאצ'י", ונקראת לרוב "סדרת פיבונאצ'י". האיברים הראשונים של הסדרה הם:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

בתרגיל זה נמצא נוסחה מפורשת עבור F_n:
(א) הגדירו את המטריצה המתאימה לסדרה F_n, והראו שהערכים העצמיים שלה הם $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ו- $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
(ב) הראו שהמספרים ϕ ו- ψ מקיימים את היחסים הבאים: $\psi = 1 - \phi$, $\phi - \psi = \sqrt{5}$ ו- $\phi\psi = -1$.
(ג) הראו ש- $F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.