פתרון תרגיל מספר 4 ־ כלים מתמטיים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

18 בנובמבר 2020

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\text{Rank}\left(BC\right) \leq \min\left\{\text{Rank}\left(B\right), \text{Rank}\left(C\right)\right\}$

הוכחה:
נסמן $B \in M_{n\times r}\left(\mathbb{F}\right), C \in M_{r\times m}\left(\mathbb{F}\right)$, נגדיר $T_{BC}\left(u\right) = BC \cdot u, T_C\left(u\right) = C \cdot u$ לכל $u \in \mathbb{F}^m$ ו־ $T_B\left(u\right) = B \cdot u$ לכל $u \in \mathbb{F}^r$.
תחילה נשים לב כי

$$\begin{aligned}
w \in \text{Im}\left(T_{BC}\right) &\Rightarrow \exists u \in \mathbb{F}^m \text{ s.t. } w = T_{BC}\left(u\right) \Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}^m \text{ s.t. } w = BC \cdot u \\
&\Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}^m \text{ s.t. } w = B \cdot \left(C \cdot u\right) \Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}^m \text{ s.t. } w = T_B\left(C \cdot u\right) \\
&\overset{v=C\cdot u}{\Rightarrow} \exists v \in \mathbb{F}^r \text{ s.t. } w = T_B\left(v\right) \Rightarrow w \in \text{Im}\left(T_B\right)
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\text{Im}\left(T_{BC}\right) \subseteq \text{Im}\left(T_B\right)$, ולכן מתקיים כי

$$\text{Rank}\left(B \cdot C\right) \overset{\text{def}}{=} \dim\text{Im}\left(B \cdot C\right) = \dim\text{Im}\left(T_{BC}\right) \leq \dim\text{Im}\left(T_B\right) = \dim\text{Im}\left(B\right) \overset{\text{def}}{=} \text{Rank}\left(B\right)$$

ולכן קיבלנו כי $\text{Rank}\left(B \cdot C\right) \leq \text{Rank}\left(B\right)$,
עתה נניח בשלילה כי $\text{Rank}\left(B \cdot C\right) > \text{Rank}\left(C\right)$,
נחלק ל2 מקרים:

i. אם $\text{Rank}\left(C\right) = \infty$ אז $\text{Rank}\left(BC\right) \leq \infty = \text{Rank}\left(C\right)$, וסיימנו

ii. אחרת, נסמן $\text{Rank}\left(C\right) = d$,
נניח בשלילה ש־ $\text{Rank}\left(BC\right) > d$ ולכן קיימת קבוצה בלתי תלוייה של $\text{Im}\left(T_{BC}\right)$ עם יותר מ־ d וקטורים. נסמן ב־ $w_1, \ldots, w_{d+1}$ וקטורים בלתי תלויים ב־ $\text{Im}\left(T_{BC}\right)$.
מהיות $w_1, \ldots, w_{d+1} \in \text{Im}\left(T_{BC}\right)$, קיימים $u_1 \ldots, u_{d+1} \in \mathbb{F}^m$ כך ש־ $T_{BC}\left(u_i\right) = w_i$ לכל $1 \leq i \leq d+1$.
נשים לב כי $T_C\left(u_1\right), \ldots, T_C\left(u_{d+1}\right) \in \text{Im}\left(T_C\right)$ וגם $\dim\text{Im}T_C = d$,
בגלל שזאת קבוצה בגודל $d+1 > \dim\text{Im}T_C$ בהכרח מתקיים שהקבוצה $\left\{T_C\left(u_1\right), \ldots, T_C\left(u_{d+1}\right)\right\}$ ת"ל.
נניח בלי הגבלת הכלליות כי $T_C\left(u_{d+1}\right)$ תלוי לינארית באחרים, כלומר $\exists\alpha_1 \ldots, \alpha_d \in \mathbb{F}$ כך ש־ $T_C\left(u_{d+1}\right) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \cdot T_C\left(u_i\right)$.
לכן נקבל כי

$$\begin{aligned}
w_{d+1} &= T_{BC}\left(u_{d+1}\right) = B \cdot C \cdot u_{d+1} = B \cdot T_C\left(u_{d+1}\right) = B \cdot \left[\sum_{i=1}^{d} \alpha_i \cdot T_C\left(u_i\right)\right] \\
&= B \cdot \left[\sum_{i=1}^{d} \alpha_i \cdot C \cdot u_i\right] = \left[\sum_{i=1}^{d} \alpha_i \cdot B \cdot C \cdot u_i\right] = \left[\sum_{i=1}^{d} \alpha_i \cdot T_{BC}\left(u_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \cdot w_i
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי w_{d+1} תלוי לינארית ב־ $w_1, \ldots, w_d$ בסתירה להנחה ש־ $w_1, \ldots, w_{d+1}$ קבוצה בלתי תלוייה. ולכן $\text{Rank}\left(BC\right) \leq d = \text{Rank}\left(C\right)$.

כלומר הראנו כי $\mathrm{Rank}\left(BC\right)\leq\mathrm{Rank}\left(B\right)$ וגם $\mathrm{Rank}\left(BC\right)\leq\mathrm{Rank}\left(C\right)$ ולכן $\mathrm{Rank}\left(BC\right)\leq\min\left\{\mathrm{Rank}\left(B\right),\mathrm{Rank}\left(C\right)\right\}$, כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbf{Rank}\left(A\right)$ הוא הגודל המינימלי כך ש־ $B\in M_{n\times k}\left(\mathbb{F}\right),C\in M_{k\times m}\left(\mathbb{F}\right)$ כך ש־ $A=BC$

הוכחה:

תחילה נניח בשלילה ש־ $k<\mathrm{Rank}\left(A\right)$, לכן נקבל לפי הסעיף הקודם כי $\mathrm{Rank}\left(A\right)\leq\min\left\{\mathrm{Rank}\left(B\right),\mathrm{Rank}\left(C\right)\right\}$,
נשים לב כי $\mathrm{Im}\left(C\right)\subseteq\mathbb{F}^{k}$ ולכן $\mathrm{Rank}\left(C\right)=\dim\mathrm{Im}\left(C\right)\leq k$,
משילוב הטענות נקבל כי

$$\mathrm{Rank}\left(A\right)\leq\min\left\{\mathrm{Rank}\left(B\right),\mathrm{Rank}\left(C\right)\right\}\leq\mathrm{Rank}\left(C\right)\leq k<\mathrm{Rank}\left(A\right)$$

קיבלנו סתירה כי מספר לא יכול להיות קטן מעצמו!
לכן $k\geq\mathrm{Rank}\left(A\right)$, עתה נראה כי ניתן להגיע ל־ $k=\mathrm{Rank}\left(A\right)$,
נסמן ב־ $d=\mathrm{Rank}\left(A\right)$, יהיו $v_{1},\ldots,v_{d}$ בסיס של $\mathrm{Im}\left(A\right)$.
נסמן $\mathcal{B}=\left(v_{1},\ldots,v_{d}\right)$, נגדיר את $T_{A}\left(x\right)=A\cdot x$ לכל $x\in\mathbb{F}^{m}$, ואת $T_{B}\left(x\right)=B\cdot x$ לכל $x\in\mathbb{R}^{d}$.
נגדיר $B=\begin{bmatrix}\vdots & \cdots & \vdots\\ v_{1} & \cdots & v_{d}\\ \vdots & \cdots & \vdots\end{bmatrix}$, ונגדיר העתקה $T_{C}\left(x\right):\mathbb{F}^{m}\to\mathbb{F}^{k}$ באופן הבא $T_{C}\left(x\right)=\left[A\cdot x\right]_{\mathcal{B}}$ (נשים לב כי $T_{A}:\mathbb{F}^{m}\to\mathrm{Im}\left(A\right)$ שנפרש על ידי $\mathcal{B}$).
נגדיר את $C=\left[T_{C}\right]_{E}^{E}$,
יהי $x\in\mathbb{F}^{m}$, קיימים $a_{1},\ldots,a_{d}\in\mathbb{F}$ כך ש־ $A\cdot x=\sum_{i=1}^{d}v_{i}\cdot a_{i}$ ונקבל כי

$$T_{A}\left(x\right)=A\cdot x=\sum_{i=1}^{d}v_{i}\cdot a_{i}=\begin{bmatrix}\vdots & \cdots & \vdots\\ v_{1} & \cdots & v_{d}\\ \vdots & \cdots & \vdots\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_{1}\\ \vdots\\ a_{d}\end{bmatrix}=B\cdot\begin{bmatrix}a_{1}\\ \vdots\\ a_{d}\end{bmatrix}=B\cdot\left[A\cdot x\right]_{\mathcal{B}}=B\cdot T_{C}\left(x\right)=T_{B}\left(T_{C}\left(x\right)\right)=T_{B\cdot C}\left(x\right)$$

כלומר קיבלנו כי $T_{A}=T_{B\cdot C}$ ולכן מתקיים כי $\boxed{A=B\cdot C}$ כאשר $B\in M_{n\times\mathrm{Rank}(A)}\left(\mathbb{F}\right),C\in M_{\mathrm{Rank}(A)\times m}\left(\mathbb{F}\right)$,
כלומר הראנו ש־ $k\geq\mathrm{Rank}\left(A\right)$ וגם ניתן להציג כמכפלה עבור $k=\mathrm{Rank}\left(A\right)$ ולכן המינימלי הוא אכן $k=\mathrm{Rank}\left(A\right)$, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\mathbf{Rank}\left(G\right)\leq d$

הוכחה:

נסמן ב־ $Z=\begin{bmatrix}\vdots & \cdots & \vdots\\ z_{1} & \cdots & z_{n}\\ \vdots & \cdots & \vdots\end{bmatrix}\in M_{d\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, נשים לב כי $X=\begin{bmatrix}\vdots & \cdots & \vdots\\ x_{1} & \cdots & x_{n}\\ \vdots & \cdots & \vdots\end{bmatrix}=B\cdot Z$ (ממכפלה של שורה בעמודה),
עתה נשים לב כי $G=X^{T}\cdot X=\left(B\cdot Z\right)^{T}\cdot B\cdot Z=\left[\left(B\cdot Z\right)^{T}\cdot B\right]\cdot Z$,
נשים לב כי $\mathrm{Rank}\left(Z\right)\leq d$ בגלל שיש לכל היותר d שורות במטריצה Z.
עתה לפי סעיף א', נקבל כי

$$\mathrm{Rank}\left(G\right)\leq\min\left\{\mathrm{Rank}\left(\left(B\cdot Z\right)^{T}\cdot B\right),\mathrm{Rank}\left(Z\right)\right\}\leq d$$

כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

2. **צ"ל:** קיימות Q,R כאשר Q אורתוגונלית ו־ R משולשת עליונה ומתקיים $A=Q\cdot R$

הוכחה:

נסמן את העמודות של A ב־ $a_1,\ldots,a_n$. נבצע את תהליך גראם שמידט על $a_1,\ldots,a_n$ ונקבל $b_1,\ldots,b_n$ (נשים לב שחלק מהוקטורים הם תלויים באחרים ואז ייצא שהם 0), מסיבה זאת נסמן $b_1,\ldots,b_k$ את הוקטורים לאחר תהליך גראם שמידט ללא הוקטורים שהם תלויים באחרים.

נשלים את $b_1,\ldots,b_k$ לבסיס אורתונורמלי שנסמנו $b_1,\ldots,b_k,c_1,\ldots,c_{n-k}$.

תחילה מתהליך גרהם שמידט מתקיים כי $a_i\in\operatorname{span}\{a_1,\ldots,a_i\}\subseteq\operatorname{span}\{b_1,\ldots,b_i\}$ לכל $i\le k$, הסיבה להכלה ולא שוויון היא בגלל שאם היה וקטור תלוי בקודמיו אז הוא לא מופיע ב־ $b_1,\ldots,b_i$ ואולי יהיה שם וקטור אחר.

נשים לב שבמקרה זה מתקיים $a_i=\sum_{j=1}^{i}\langle a_i,b_j\rangle\cdot b_j$,

וגם נשים לב שמתקיים כי $a_i\in\operatorname{span}\{a_1,\ldots,a_i\}\subseteq\operatorname{Im}(A)=\operatorname{span}\{b_1,\ldots,b_k\}$ ולכן במקרה זה מתקיים $a_i=\sum_{j=1}^{k}\langle a_i,b_j\rangle\cdot b_j$.

במקרה הכללי נקבל כי $a_i=\sum_{j=1}^{\min\{i,k\}}\langle a_i,b_j\rangle\cdot b_j$,

נגדיר $Q=\begin{bmatrix}\vdots & \cdots\vdots & \vdots & \cdots\vdots\\ b_1 & \cdots b_n & c_1 & \cdots c_{n-k}\\ \vdots & \cdots\vdots & \vdots & \cdots\vdots\end{bmatrix}$ ונגדיר $[R]_{i,j}=\begin{cases}0 & i>j\vee(i>k)\\ \langle b_i,a_j\rangle & else\end{cases}$.

נשים לב כי Q היא אורתוגולית כי העמודות שלה הן בסיס אורתונורמלי ומההגדרה מתקיים כ R הוא משולשת עליונה.

נשים לב כי

$$Q\cdot R=\begin{bmatrix}\vdots & \cdots\vdots & \vdots & \cdots\vdots\\ b_1 & \cdots b_n & c_1 & \cdots c_{n-k}\\ \vdots & \cdots\vdots & \vdots & \cdots\vdots\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\langle b_1,a_1\rangle & \langle b_1,a_2\rangle & \cdots & \langle b_1,a_k\rangle & \cdots & \langle b_1,a_n\rangle\\ 0 & \langle b_2,a_2\rangle & \cdots & \langle b_2,a_k\rangle & \cdots & \langle b_2,a_n\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \langle b_k,a_k\rangle & \cdots & \langle b_k,a_n\rangle\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

עתה נשים לב שמההגדרה של מכפלת מטריצות נקבל בדיוק כי $[Q\cdot R]_i=\sum_{j=1}^{\min\{i,k\}}\langle a_i,b_j\rangle\cdot b_j=a_i$,
כלומר העמודה ה־ i של QR היא בדיוק העמודה ה־ i של A לכל $1\le i\le n$ ולכן $A=Q\cdot R$, כנדרש

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** קיים פולינום ממעלה $n-1$ המקיים $p(x_i)=y_i$ לכל i

הוכחה:

נסתכל על

$$p(x)=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot\frac{\prod_{i\neq j}(x-x_j)}{\prod_{i\neq j}(x_i-x_j)}$$

נשים לב כי הפולינום ממעלה $n-1$ כי הוא סכום של פולינום שכל אחד מהם הוא מדרגה $n-1$ (במכפלה יש $n-1$ איברים).

נשים לב שהפולינום מוגדר היטב כי המכנה לא מתאפס מההנחה ש־ $x_i\neq x_j$ לכל $i\neq j$.

עתה יהי $1\le k\le n$ ונראה כי

$$\begin{aligned}p(x_k)&=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot\frac{\prod_{i\neq j}(x_k-x_j)}{\prod_{i\neq j}(x_i-x_j)}=\sum_{i\in[n]\backslash\{k\}}\left[y_i\cdot\frac{\prod_{i\neq j}(x_k-x_j)}{\prod_{i\neq j}(x_i-x_j)}\right]+y_k\cdot\frac{\prod_{k\neq j}(x_k-x_j)}{\prod_{k\neq j}(x_i-x_j)}\\&=\sum_{i\in[n]\backslash\{k\}}\left[y_i\cdot\frac{(x_k-x_k)\cdot\prod_{j\neq i,k}(x_k-x_j)}{\prod_{i\neq j}(x_i-x_j)}\right]+y_k\cdot 1\\&=\sum_{i\in[n]\backslash\{k\}}\left[y_i\cdot\frac{0\cdot\prod_{j\neq i,k}(x_k-x_j)}{\prod_{i\neq j}(x_i-x_j)}\right]+y_k=\sum_{i\in[n]\backslash\{k\}}[y_i\cdot 0]+y_k=\sum_{i\in[n]\backslash\{k\}}[0]+y_k\\&=y_k\end{aligned}$$

כלומר הראנו שלכל $1\le k\le n$ מתקיים $p(x_k)=y_k$ כנדרש.

מ.ש.ל.☺

4. **צ"ל:** $|\det(A)| = \left|\prod_{i<j}(x_i - x_j)\right|$

הוכחה:

נוכיח את הטענה $\det(A) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$, באינדוקציה על גודל המטריצה:

<u>בסיס:</u> $n=1$, נשים לב כי $\det(A) = \det([1]) = 1$, נכון באופן ריק כי אין גורמים במכפלה.

<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל־ $n-1$ ונוכיח ל־ n.

נזכר כי פעולות שורה או עמודה מהצורה $R_i \to R_i + c \cdot R_j$ לא משפיעות על הדטרמיננטה והוצאה של קבוע משורה או עמודה מכפילה את הdet.

לכן

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}\right) \overset{\forall i>1, C_i \to C_i - C_1}{=} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & (x_2 - x_1)\cdot\sum_{i=0}^{n-2} x_1^i x_2^{(n-2)-i} & \dots & (x_n - x_1)\cdot\sum_{i=0}^{n-2} x_1^i x_n^{(n-2)-i} \end{bmatrix}\right)$$

$$\overset{\text{take constant } (x_i - x_1) \text{ from col i}}{=} \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1)\cdot\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \sum_{i=0}^{n-2} x_1^i x_2^{(n-2)-i} & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_1^i x_n^{(n-2)-i} \end{bmatrix}\right)$$

נשים לב כי במטריצה שקיבלנו $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \sum_{i=0}^{n-2} x_1^i x_2^{(n-2)-i} & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_1^i x_n^{(n-2)-i} \end{bmatrix}\right)$, מתקיים כי לכל $1 < i \le n$ וגם לכל $1 \le j \le n$ מתקיים כי

$$\begin{aligned} a_{i,j} - x_1 \cdot a_{i-1,j} &= \sum_{k=0}^{i-2} x_1^i \cdot x_j^{i-2-k} - x_1 \cdot \sum_{k=0}^{i-3} x_1^i \cdot x_j^{i-3-k} \\ &= \left(x_1^{i-2} + x_1 x_j^{i-3} + \dots + x_1 \cdot x_j^{i-3} + x_j^{i-2}\right) - \left(x_1^{i-2} + x_1 x_j^{i-3} + \dots + x_1 \cdot x_j^{i-3}\right) \\ &= x_j^{i-2} \end{aligned}$$

כלומר

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \sum_{i=0}^{n-2} x_1^i x_2^{(n-2)-i} & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_1^i x_n^{(n-2)-i} \end{bmatrix}\right) \overset{\forall i>1 \text{ from n to } 2\ R_i \to R_i - x_1 \cdot R_{i-1}}{=} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{bmatrix}\right)$$

$$\overset{\text{take det by definition using the first row}}{=} 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{bmatrix}\right)$$

$$\overset{\text{induction}}{=} \prod_{i>j\ge 2}(x_i - x_j)$$

ולכן נקבל כי

$$\det(A) = \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \cdot \prod_{i>j\geq 2}(x_i - x_j) = \prod_{i>j\wedge j=1}(x_i - x_1) \cdot \prod_{i>j\geq 2}(x_i - x_j)$$
$$= \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

כלומר הוכחנו באינדוקציה כי $\det(A) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$, ולכן

$$|\det(A)| = \left|\prod_{i>j}(x_i - x_j)\right| = \prod_{i>j}|x_i - x_j| = \prod_{i<j}|-(x_i - x_j)| = \prod_{i<j}|x_i - x_j|$$

כנדרש

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:** קיימים בסיסים $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ו- $T: V \to V$ כך ש- $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}, B = [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$
הוכחה:
נבחר $V = \mathbb{F}^n$, ונבחר $T(x) = Ax$ לכל $x \in V$. (הערה: נשים לב כי $T: V \to V$).
נשים לב כי $A = [T]_E^E$ מההגדרה כי $T(e_i) = A \cdot e_i$ ששווה לעמודה ה- i של A והיא תשמר בעמודה הראשונה של $[T]_E^E$.
לכן נבחר $\mathcal{B} = E$, ונקבל כי $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$
מהיות B דומה ל- A קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $A = PBP^{-1}$.
נסמן את העמודות של P להיות $p_1, \ldots, p_n$. נשים לב ש- $p_1, \ldots, p_n$ בלתי תלויות כי P הפיכה.
מהיות $p_1, \ldots, p_n$ קבוצה בלתי תלויה בגודל n במרחב V שמימדו הוא n, נקבל כי $p_1, \ldots, p_n$ הוא גם בסיס של V.
עתה נוכל להגדיר $\mathcal{B}' = (p_1, \ldots, p_n)$, נשים לב כי

$$[Id]_{\mathcal{B}'}^{E} = \begin{bmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ [p_1]_E & \cdots & [p_n]_E \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ p_1 & \cdots & p_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} = P$$

נזכר שראינו באלגברה לינארית כי $\left([Id]_{\mathcal{B}'}^{E}\right)^{-1} = [Id]_{E}^{\mathcal{B}'}$ וגם כי $[S \circ T]_A^C = [S]_B^C \cdot [T]_A^B$ ונקבל כי

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P = \left([Id]_{\mathcal{B}'}^{E}\right)^{-1} \cdot [T]_E^E \cdot [Id]_{\mathcal{B}'}^{E} = \left([Id]_{\mathcal{B}'}^{E}\right)^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{B}'}^{E} = [Id]_{E}^{\mathcal{B}'} \cdot [T]_{\mathcal{B}'}^{E} = [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$$

כלומר מצאנו סיסים $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ו- $T: V \to V$ כך ש- $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}, B = [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$, כנדרש

מ.ש.ל.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\|\cdot\|$ היא נורמה
הוכחה:
בשביל להראות ש- $\|\cdot\|$ היא נורמה צריך להראות 3 תכונות:
i. <u>חיוביות:</u> תחילה יהי $v \in V$, נשים לב כי

$$\|v\| = \alpha\|v\|_1 + \beta \cdot \|v\|_2 \overset{\|v\|_1 \geq 0 \text{ because } \|\cdot\|_1 \text{ is a norm}}{\geq} \beta \cdot \|v\|_2 \overset{\|v\|_2 \geq 0 \text{ because } \|\cdot\|_2 \text{ is a norm}}{\geq} 0$$

נשים לב שאם $v \neq 0$, אז מתקיים האי שוויון $\beta \cdot \|v\|_2 > 0$ מתכונות הנורמה ונקבל כי $\|v\| = \beta \cdot \|v\|_2 > 0$,
אם $v = 0$, אז מתכונות נורמה נקבל כי $\|v\|_1 = \|v\|_2 = 0$ ולכן

$$\|v\| = \alpha\|v\|_1 + \beta \cdot \|v\|_2 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

כלומר הראנו כי לכל $v \in V$ מתקיים כי $\|v\| \geq 0$ וגם מתקיים שוויון אם ורק אם $v = 0$.

ii. <u>מכפלה בסקלר:</u>
יהי $v \in V$, ויהי $c \in \mathbb{F}$ אז נשים לב כי

$$\|cv\| = \alpha \|cv\|_1 + \beta \cdot \|cv\|_2 \overset{c\cdot\|v\|_1=\|cv\|_1 \text{ because } \|\cdot\|_1 \text{ is a norm}}{=} c\cdot\alpha\|v\|_1 + \beta\cdot\|cv\|_2 \overset{c\cdot\|v\|_2=\|cv\|_2 \text{ because } \|\cdot\|_2 \text{ is a norm}}{=} c\cdot\alpha\|v\|_1 + c\cdot\beta\cdot\|v\|_2 = c\cdot[\alpha\|v\|_1 + \beta\cdot\|v\|_2] = c\cdot\|v\|$$

ולכן הראנו שלכל $v \in V$ ולכל $c \in \mathbb{F}$ מתקיים כי $\|cv\| = c \cdot \|v\|$

iii. <u>אי שוויון המשולש:</u>
יהיו $u, v \in V$, נשים לב כי

$$\|u+v\| = \alpha\|u+v\|_1 + \beta\cdot\|u+v\|_2 \overset{\|u+v\|_1 \le \|u\|_1+\|v\|_1 \text{ because } \|\cdot\|_1 \text{ is a norm}}{\le} \alpha(\|u\|_1+\|v\|_1) + \beta\cdot\|cv\|_2 \overset{\|u+v\|_2 \le \|u\|_2+\|v\|_2 \text{ because } \|\cdot\|_2 \text{ is a norm}}{\le} \alpha(\|u\|_1+\|v\|_1) + \beta\cdot(\|u\|_2+\|v\|_2) = [\alpha\|u\|_1+\beta\cdot\|u\|_2] + [\alpha\|v\|_1+\beta\cdot\|v\|_2] = \|u\|+\|v\|$$

ולכן הראנו שלכל $u, v \in V$ מתקיים $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$

הראנו את 3 התכונות של הנורמה ולכן $\|\cdot\|$ היא אכן נורמה.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** d_* היא מטריקה
הוכחה:
בשביל להוכיח ש־ d_* היא מטריקה צריך להוכיח 3 תכונות:

i. <u>חיוביות:</u>
יהיו $x, y \in X$, נשים לב כי $d(x,y) \ge 0$ מהיות d היא מטריקה.
וגם נשים לב כי $1 + d(x,y) \ge 1 + 0 = 1 > 0$ מהיות d מטריקה.
לכן מהיות $d_*(x,y)$ הוא מנה של ביטוי אי שלילי בביטוי חיובי הוא בעצמו חיובי תמיד (ומוגדר היטב כי המכנה לא מתאפס).
כלומר $d_*(x,y) \ge 0$ לכל $x, y \in X$.
נשים לב כי $d_*(x,y) = 0 \iff \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \iff d(x,y) = 0 \overset{d(x,y)=0 \iff x=y \text{ because d is a metric}}{\iff} x = y$.
כלומר הראנו כי $d_*(x,y) \ge 0$ לכל $x, y \in X$ וגם שוויון מתקיים אם ורק אם $x = y$.

ii. <u>סימטריות:</u>
יהיו $x, y \in X$, נשים לב כי

$$d_*(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \overset{d(x,y)=d(y,x) \text{ because d is a metric}}{=} \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d_*(y,x)$$

ולכן $d_*(x,y) = d_*(y,x)$ לכל $x, y \in X$.

iii. <u>אי שוויון המשולש:</u>
יהיו $x, y, z \in X$, תחילה נשים לב ש־ $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ בגלל ש־ d היא מטריקה.
וגם נשים לב כי $d(x,y), d(y,z) > 0$ בגלל ש־ d היא מטריקה.
ולכן $d(x,y) \cdot d(y,z) > 0$, נשלב ונקבל

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \le d(x,y) + d(y,z) + d(x,y)\cdot d(y,z)$$

עתה נשתמש באבחנה זאת

$$
\begin{aligned}
d_*(x,z) &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} = \frac{1+d(x,z)-1}{1+d(x,z)} = 1-\frac{1}{1+d(x,z)} \\
&\overset{d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)+d(x,y)\cdot d(y,z)}{\le} 1-\frac{1}{1+d(x,y)+d(y,z)+d(x,y)\cdot d(y,z)} \\
&= \frac{1+d(x,y)+d(y,z)+d(x,y)\cdot d(y,z)-1}{1+d(x,y)+d(y,z)+d(x,y)\cdot d(y,z)} \\
&= \frac{d(x,y)+d(y,z)+d(x,y)\cdot d(y,z)}{[1+d(x,y)]\cdot[1+d(y,z)]} \overset{d(x,y)\cdot d(y,z)>0}{\le} \frac{d(x,y)+d(y,z)+2\cdot d(x,y)\cdot d(y,z)}{[1+d(x,y)]\cdot[1+d(y,z)]} \\
&= \frac{d(x,y)+d(x,y)\cdot d(y,z)}{[1+d(x,y)]\cdot[1+d(y,z)]} + \frac{d(y,z)+d(x,y)\cdot d(y,z)}{[1+d(x,y)]\cdot[1+d(y,z)]} \\
&= \frac{d(x,y)\cdot[1+d(y,z)]}{[1+d(x,y)]\cdot[1+d(y,z)]} + \frac{d(y,z)\cdot[1+d(x,y)]}{[1+d(x,y)]\cdot[1+d(y,z)]} = \frac{d(x,y)}{[1+d(x,y)]} + \frac{d(y,z)}{[1+d(y,z)]} \\
&= d_*(x,y)+d_*(y,z)
\end{aligned}
$$

כלומר הראנו שלכל $x,y,z\in X$ מתקיים $d_*(x,z)\le d_*(x,y)+d_*(y,z)$, כנדרש.

הראנו את 3 התכונות של המטריקה ולכן d_* היא אכן מטריקה.

מ.ש.ל.ב.☺