פתרון תרגיל מספר 1 ־ אינפי 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

1 בנובמבר 2018

1. **הגדרות:**

(א) **צ"ל:** הגדר f אינטגרבילית ב$[a,b]$

הגדרה חלוקה: יהי $[a,b]\subset\mathbb{R}$ קטע סופי. קבוצה סופית $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ נקראת **חלוקה** של $[a,b]$ כאשר מתקיים

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

הגדרה לאינטגרל: יהי $[a,b]\subset\mathbb{R}$ קטע סופי. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה, $m\le f(x)\le M$, $\forall x\in[a,b]$
תהי $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$. נגדיר

$$m_i\overset{\text{def}}{=}\inf\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}$$
$$M_i\overset{\text{def}}{=}\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}$$

נגדיר את **סכום דרבו התחתון** להיות

$$L(f,P)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$$

ואת **סכום דרבו העליון** להיות

$$U(f,P)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$$

נגדיר את **האינטגרל המסוים לפי דרבו התחתון והעליון** להיות בהתאמה

$$\underline{\int_a^b}f(x)\,dx\overset{\text{def}}{=}\sup\{L(f,P)\mid P\text{ is a partition}\}$$
$$\overline{\int_a^b}f(x)\,dx\overset{\text{def}}{=}\inf\{U(f,P)\mid P\text{ is a partition}\}$$

אם מתקיים

$$\underline{\int_a^b}f(x)\,dx=\overline{\int_a^b}f(x)\,dx$$

אזי נאמר כי f **אינטגרבילית** לפי דרבו בקטע $[a,b]$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **הגדרת אינטגרל מסוים:** אם f אינטגרבילית לפי דרבו בקטע $[a,b]$ אזי

$$\int_a^b f(x)\,dx=\underline{\int_a^b}f(x)\,dx=\overline{\int_a^b}f(x)\,dx$$

ונאמר ש$\int_a^b f(x)\,dx$ הוא **האינטגרל המסוים** של f בקטע $[a,b]$ לפי דרבו.

מ.ש.ל.ב.☺

2. **צ"ל:** נתונה חלוקה $P=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{8}{9},1\right\}$, חשבו את $L\left(f,P\right)$ ו$U\left(f,P\right)$

$$m_1\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{f\left(x\right)\mid x_0\le x\le x_1\right\}=\inf\left\{x^2\mid 0\le x\le\frac{1}{4}\right\}=0$$
$$m_2\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{f\left(x\right)\mid x_1\le x\le x_2\right\}=\inf\left\{x^2\mid \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{3}\right\}=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$
$$m_3\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{f\left(x\right)\mid x_2\le x\le x_3\right\}=\inf\left\{x^2\mid \frac{1}{3}\le x\le\frac{2}{3}\right\}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$
$$m_4\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{f\left(x\right)\mid x_3\le x\le x_4\right\}=\inf\left\{x^2\mid \frac{2}{3}\le x\le\frac{8}{9}\right\}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$
$$m_5\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{f\left(x\right)\mid x_4\le x\le x_5\right\}=\inf\left\{x^2\mid \frac{8}{9}\le x\le 1\right\}=\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{64}{81}$$
$$M_1\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{f\left(x\right)\mid x_0\le x\le x_1\right\}=\sup\left\{x^2\mid 0\le x\le\frac{1}{4}\right\}=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$
$$M_2\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{f\left(x\right)\mid x_1\le x\le x_2\right\}=\sup\left\{x^2\mid \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{3}\right\}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$
$$M_3\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{f\left(x\right)\mid x_2\le x\le x_3\right\}=\sup\left\{x^2\mid \frac{1}{3}\le x\le\frac{2}{3}\right\}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$
$$M_4\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{f\left(x\right)\mid x_3\le x\le x_4\right\}=\sup\left\{x^2\mid \frac{2}{3}\le x\le\frac{8}{9}\right\}=\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{64}{81}$$
$$M_5\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{f\left(x\right)\mid x_4\le x\le x_5\right\}=\sup\left\{x^2\mid \frac{8}{9}\le x\le 1\right\}=1$$

עתה נחשב את $L\left(f,P\right)$ ו$U\left(f,P\right)$

$$L\left(f,P\right)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{5}m_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=0\cdot\left(\frac{1}{4}-0\right)+\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{8}{9}-\frac{2}{3}\right)+\frac{64}{81}\cdot\left(1-\frac{8}{9}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)+\frac{64}{81}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{16\cdot 12}+\frac{1}{27}+\frac{8}{81}+\frac{64}{729}=\frac{10675}{46656}\approx 0.2288$$
$$U\left(f,P\right)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{5}M_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{4}-0\right)+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+\frac{64}{81}\cdot\left(\frac{8}{9}-\frac{2}{3}\right)+1\cdot\left(1-\frac{8}{9}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)+\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{64}{81}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)+1\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{64}+\frac{1}{108}+\frac{4}{27}+\frac{128}{729}+\frac{1}{9}=\frac{21449}{46656}\approx 0.4597$$

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** $D\left(x\right)$ לא אינטגרבילית ב$[a,b]$
תהי $P=\left\{x_0,x_1,\ldots,x_n\right\}$ חלוקה כלשהי של $[a,b]$ אזי מתקיים

$$m_i\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{D\left(x\right)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\right\}=0$$
$$M_i\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{D\left(x\right)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\right\}=1$$

ולכן מתקיים,

$$U\left(D,P\right)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}M_{i}\left(x_{i}-x_{i-1}\right)=1\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-x_{i-1}\right)=b-a$$
$$L\left(D,P\right)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}m_{i}\left(x_{i}-x_{i-1}\right)=0\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-x_{i-1}\right)=0$$

ולכן מתקיים,

$$\underline{\int_{a}^{b}}D\left(x\right)dx\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{ L\left(D,P\right)\mid P\right\} =0$$
$$\overline{\int_{a}^{b}}D\left(x\right)dx\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{ U\left(D,P\right)\mid P\right\} =b-a$$

ולכן $\overline{\int_{a}^{b}}D\left(x\right)dx\neq\underline{\int_{a}^{b}}D\left(x\right)dx$, כלומר הפונקציה $D\left(x\right)$ אינה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$

מ.ש.ל.☺

4. **צ"ל:** תהי A קבוצה סופית ב$[0,1]$. תהי $f;[0,1]\to\mathbb{R}$ כך ש $f\left(x\right)=\begin{cases} 0 & x\notin A\\ 1 & x\in A \end{cases}$, הוכיחו ש$f$ אינטגרבילית וחשבו $\int_{0}^{1}f\left(x\right)dx$

הוכחה:

יהי $\varepsilon>0$,

נסמן ב$A=\{y_{1},\ldots,y_{k}\}$, נגדיר סדרת u_{i},v_{i} כך שיתקיים:

1. $y_{i}\in\left(u_{i},v_{i}\right)$
2.

$$\sum_{i=1}^{k}v_{i}-u_{i}<\varepsilon$$

הערה: אם $y_{1}=a$, נגדיר $u_{1}=a$ ואם $y_{k}=b$, נגדיר $v_{k}=b$,

נשים לב כי $P=\{a,u_{1},v_{1},\ldots,u_{k},v_{k},b\}$, עדיין מוגדרת היטב כי יהיו איברים שווים בקבוצה,

ולכן אם $y_{1}=a$ לדוגמא נקבל כי $P=\{a,u_{1},v_{1},\ldots,u_{k},v_{k},b\}=\{a,v_{1},\ldots,u_{k},v_{k},b\}$ ולכן החלוקה מוגדרת היטב

נגדיר חלוקה $P=\{a,u_{1},v_{1},\ldots,u_{k},v_{k},b\}$, ונשים לב שהחלוקה מוגדרת היטב כי נוכל לבחור את u_{i},v_{i} כך ש$v_{i}<u_{i+1}$

נשים לב שעבור $[x_{i-1},x_{i}]$ כך ש$x_{i-1}\neq u_{j}$ מתקיים כי $x\notin A$, $\forall x\in[x_{i-1},x_{i}]$ ולכן $f\left(x\right)=0$, $\forall x\in[x_{i-1},x_{i}]$

עתה נחשב m_{i},M_{i} עבור $x_{i-1}\neq u_{j}$, ונקבל

$$m_{i}\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{ f\left(x\right)\mid x_{i-1}\leq x\leq x_{i}\right\} =\inf\left\{ 0\mid x_{i-1}\leq x\leq x_{i}\right\} =0$$
$$M_{i}\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{ f\left(x\right)\mid x_{i-1}\leq x\leq x_{i}\right\} =\sup\left\{ 0\mid x_{i-1}\leq x\leq x_{i}\right\} =0$$

נשים לב כי $\exists y_{0}\in[u_{i},v_{i}]$ כך ש$f\left(y_{0}\right)=0$,

אחרת קיימות אינסוף נקודות בA בסתירה להנחה שבA יש מספר סופי של נקודות

עתה נחשב m_{i},M_{i} עבור $x_{i-1}=u_{j}$, ונקבל

$$m_{i}\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{ f\left(x\right)\mid x_{i-1}\leq x\leq x_{i}\right\} =\inf\left\{ f\left(x\right)\mid x_{i-1}\leq x\leq x_{i}\right\} =0$$
$$M_{i}\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{ f\left(x\right)\mid x_{i-1}\leq x\leq x_{i}\right\} =\sup\left\{ f\left(x\right)\mid x_{i-1}\leq x\leq x_{i}\right\} =1$$

נסמן את מספר הקטעים בP בN, ולכן מתקיים

$$U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(M_{i}-m_{i}\right)\cdot\left(x_{i}-x_{i-1}\right)$$

$$=\sum_{\substack{i=1\\x_{i}\neq u_{j}}}^{N}\left(M_{i}-m_{i}\right)\cdot\left(x_{i}-x_{i-1}\right)+\sum_{i=1}^{k}\left(M_{i}-m_{i}\right)\cdot\left(v_{i}-u_{i}\right)$$

$$=0\cdot\sum_{\substack{i=1\\x_{i}\neq u_{j}}}^{N}\left(x_{i}-x_{i-1}\right)+\sum_{i=1}^{k}\left(M_{i}-m_{i}\right)\cdot\left(v_{i}-u_{i}\right)$$

$$=0+1\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(v_{i}-u_{i}\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(v_{i}-u_{i}\right)\leq\varepsilon$$

ולכן מתקיים ממשפט 2.3 שהתנאים שקולים כי f אינטגרבילית בקטע $[0,1]$,
תהי $P=\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה של $[0,1]$, יהי $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ אזי $\exists y_0\in[x_{i-1},x_i]$ כך ש$f\left(y_0\right)=0$
אחרת קיימות אינסוף נקודות בA בסתירה להנחה שבA יש מספר סופי של נקודות
ולכן לכל חלוקה P ולכל $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ מתקיים $m_i=0$,
ולכן $L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{N}m_i\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)=0\cdot\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x_{i-1}\right)=0$
ומהיות f אינטגרבילית מתקיים כי

$$\underline{\int_{0}^{1}}f\left(x\right)dx\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{L\left(P,f\right)\mid P\right\}=0=\int_{0}^{1}f\left(x\right)dx$$

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:** חשבו את האינטגרלים הבאים

(א) **צ"ל:** חשבו $\int_a^b x^{100}dx$

i. **טענת עזר:** עבור $N>0$, x^N אינטגרבילית וגם $\int_a^b x^N dx=\frac{1}{N+1}\cdot\left(b^{N+1}-a^{N+1}\right)$

נגדיר סדרת חלוקות $\left(P_n\right)_{n=1}^{\infty}$ אופן הבא: $P_n=\left\{a,a\cdot q,a\cdot q^2,\ldots,a\cdot q^n\right\}$, כאשר $q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$,
נשים לב כי הנוסחא לאיבר x_i היא: $x_i=a\cdot q^i$,
נחשב m_i,M_i, נשים לב כי x^N פונקציה מונוטונית עולה עבור $N>0$ בקטע $[a,b]$ כאשר $a>0$, ולכן

$$m_i\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{f\left(x\right)\mid x_{i-1}\leq x\leq x_i\right\}=\inf\left\{x^N\mid a\cdot q^{i-1}\leq x\leq a\cdot q^i\right\}=\left(a\cdot q^{i-1}\right)^N$$

$$M_i\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{f\left(x\right)\mid x_{i-1}\leq x\leq x_i\right\}=\sup\left\{x^N\mid a\cdot q^{i-1}\leq x\leq a\cdot q^i\right\}=\left(a\cdot q^i\right)^N$$

עתה נחשב את $L\left(f,P_n\right)$

$$L\left(f,P_n\right)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot q^{i-1}\right)^N\cdot\left(a\cdot q^i-a\cdot q^{i-1}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot q^{i-1}\right)^N\cdot a\left(q-1\right)\cdot q^{i-1}=a^{N+1}\cdot\left(q-1\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(q^{i-1}\right)^N\cdot q^{i-1}$$
$$=a^N\cdot\left(q-1\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(q^{i-1}\right)^{N+1}=a^{N+1}\cdot\left(q-1\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(q^{N+1}\right)^{i-1}$$
$$=a^{N+1}\cdot\left(q-1\right)\cdot\frac{\left(q^{N+1}\right)^n-1}{q^{N+1}-1}=a^{N+1}\cdot\left(\left(q^{N+1}\right)^n-1\right)\cdot\frac{q-1}{q^{N+1}-1}$$
$$=a^{N+1}\cdot\left(\left(q^n\right)^{N+1}-1\right)\cdot\frac{q-1}{q^{N+1}-1}=a^{N+1}\cdot\left(\frac{b^{N+1}}{a^{N+1}}-1\right)\cdot\frac{q-1}{q^{N+1}-1}=$$
$$\overset{\star}{=}\left(b^{N+1}-a^{N+1}\right)\cdot\frac{q-1}{q^{N+1}-1}=\left(b^{N+1}-a^{N+1}\right)\cdot\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{N+1}{n}}-1}$$

עתה נחשב $U\left(f,P_n\right)$

$$U\left(f,P_n\right)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}M_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot q^{i}\right)^N\cdot\left(a\cdot q^i-a\cdot q^{i-1}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot q^{i}\right)^N\cdot a\left(q-1\right)\cdot q^{i-1}=q^N\cdot a^{N+1}\cdot\left(q-1\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(q^{i-1}\right)^{N+1}\cdot q^{i-1}$$
$$=q^N\cdot L\left(f,P_n\right)\overset{\star\star}{=}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{N}{n}}\cdot L\left(f,P_n\right)$$

נסמן $\alpha=\frac{b}{a}$, תחילה נחשב את גבול $\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha^x-1}{\alpha^{(N+1)x}-1}$ שהינו גבול עזר בחישובינו

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha^x-1}{\alpha^{(N+1)x}-1}\overset{L\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha^x\cdot\ln\left(\alpha\right)}{\alpha^{(N+1)x}\cdot\ln\left(\alpha^{N+1}\right)}$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(\alpha\right)}{\alpha^{Nx}\cdot\left(N+1\right)\cdot\ln\left(\alpha\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\alpha^{Nx}\cdot\left(N+1\right)}$$
$$=\frac{1}{N+1}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\alpha^{Nx}}=\frac{1}{N+1}\cdot\frac{1}{1}\overset{\star\star\star}{=}\frac{1}{N+1}$$

עתה נחשב את $\lim_{n\to\infty}L\left(f,P_n\right)$

$$\lim_{n\to\infty}L\left(f,P_n\right)\overset{\star}{=}\lim_{n\to\infty}\left(b^{N+1}-a^{N+1}\right)\cdot\frac{\alpha^{\frac{1}{n}}-1}{\alpha^{\frac{N+1}{n}}-1}=\left(b^{N+1}-a^{N+1}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{\frac{1}{n}}-1}{\alpha^{\frac{N+1}{n}}-1}$$
$$\overset{\text{Heine}}{=}\left(b^{N+1}-a^{N+1}\right)\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha^x-1}{\alpha^{(N+1)x}-1}\overset{\star\star\star}{=}\frac{\left(b^{N+1}-a^{N+1}\right)}{N+1}$$

עתה נחשב את $\lim_{n\to\infty}U\left(f,P_n\right)$, נשים לב כי $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{N}{n}}=1$, ולכן:

$$\lim_{n\to\infty}U\left(f,P_n\right)\overset{\star\star}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{N}{n}}\cdot L\left(f,P_n\right)=\frac{\left(b^{N+1}-a^{N+1}\right)}{N+1}\cdot1=\frac{\left(b^{N+1}-a^{N+1}\right)}{N+1}$$

ולכן קיבלנו כי $\lim_{n\to\infty}L\left(f,P_n\right)=\frac{\left(b^{N+1}-a^{N+1}\right)}{N+1}=\lim_{n\to\infty}U\left(f,P_n\right)$,
ולכן מהמשפט שהתנאים שקולים נקבל x^N אינטגרבילית כאשר $N>0$ והאינטגרל שווה לגבול ולכן

$$\int_a^b x^Ndx=\frac{1}{N+1}\cdot\left(b^{N+1}-a^{N+1}\right)$$

מ.ש.ל.☺טענת עזר

ולכן נציב בטענת העזר $N=100$, ונקבל כי x^{100} אינטגרבילית וגם מתקיים

$$\int_a^b x^{100}dx=\frac{\left(b^{101}-a^{101}\right)}{101}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** חשבו $\int_a^b 3^x dx$
נגדיר סדרת חלוקות $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ אופן הבא: $P_n=\left\{a,a+\frac{b-a}{n},a+\frac{b-a}{n}\cdot 2,\dots,b\right\}$,
נשים לב כי הנוסחא לאיבר x_i היא: $x_i=a+\frac{b-a}{n}\cdot i$,
נחשב m_i,M_i, נשים לב כי 3^x פונקציה מונוטונית עולה בקטע $[a,b]$ עבור $a>0$ ולכן

$$m_i\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{f\left(x\right)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\right\}=\inf\left\{3^x\mid a+\frac{b-a}{n}\cdot(i-1)\le x\le a+\frac{b-a}{n}\cdot i\right\}=3^{a+\frac{b-a}{n}\cdot(i-1)}$$

$$M_i\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{f\left(x\right)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\right\}=\sup\left\{3^x\mid a+\frac{b-a}{n}\cdot(i-1)\le x\le a+\frac{b-a}{n}\cdot i\right\}=3^{a+\frac{b-a}{n}\cdot i}$$

עתה נחשב את $L\left(f,P_n\right)$

$$\begin{aligned}L\left(f,P_n\right)&\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}3^{a+\frac{b-a}{n}\cdot(i-1)}\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)\\&=\left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}3^{a+\frac{b-a}{n}\cdot(i-1)}=\left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot 3^a\sum_{i=1}^{n}3^{\frac{b-a}{n}\cdot(i-1)}\\&=\left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot 3^a\cdot\frac{\left(3^{\frac{b-a}{n}}\right)^n-1}{3^{\frac{b-a}{n}}-1}=3^a\cdot\left(3^{b-a}-1\right)\cdot\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{3^{\frac{b-a}{n}}-1}\overset{\star}{=}\left(3^b-3^a\right)\cdot\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{3^{\frac{b-a}{n}}-1}\end{aligned}$$

עתה נחשב את $U\left(f,P_n\right)$

$$\begin{aligned}U\left(f,P_n\right)&\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}3^{a+\frac{b-a}{n}\cdot(i)}\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)\\&=\left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}3^{a+\frac{b-a}{n}\cdot(i)}=\left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot 3^a\sum_{i=1}^{n}3^{\frac{b-a}{n}\cdot(i)}\\&=\left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot 3^a\cdot\frac{\left(3^{\frac{b-a}{n}}\right)^{n+1}-1}{3^{\frac{b-a}{n}}-1}=3^a\cdot\left(3^{b-a}-1\right)\cdot\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot 3^{\frac{b-a}{n}}}{3^{\frac{b-a}{n}}-1}=\left(3^b-3^a\right)\cdot\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot 3^{\frac{b-a}{n}}}{3^{\frac{b-a}{n}}-1}\\&\overset{\star\star}{=}3^{\frac{b-a}{n}}\cdot L\left(f,P_n\right)\end{aligned}$$

נסמן $\alpha=b-a$, תחילה נחשב את גבול $\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha x}{3^{\alpha x}-1}$ שהינו גבול עזר בחישובינו

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha x}{3^{\alpha x}-1}\overset{L\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha}{\alpha\cdot3^{\alpha x}\cdot\ln\left(3\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{3^{\alpha x}\cdot\ln\left(3\right)}\overset{\star\star\star}{=}\frac{1}{3^0\cdot\ln\left(3\right)}=\frac{1}{\ln\left(3\right)}$$

עתה נחשב את $\lim_{n\to\infty}L\left(f,P_n\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}L\left(f,P_n\right)&\overset{\star}{=}\lim_{n\to\infty}\left(3^b-3^a\right)\cdot\frac{\left(\frac{\alpha}{n}\right)}{3^{\frac{\alpha}{n}}-1}=\left(3^b-3^a\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\alpha}{n}\right)}{3^{\frac{\alpha}{n}}-1}\\&\overset{\text{Heine}}{=}\left(3^b-3^a\right)\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha x}{3^{\alpha x}-1}\overset{\star\star\star}{=}\frac{\left(3^b-3^a\right)}{\ln\left(3\right)}\end{aligned}$$

עתה נחשב את $\lim_{n\to\infty} U(f,P_n)$, נשים לב כי $\lim_{x\to 0^+} 3^{\frac{\alpha}{n}} = 1$, ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) \overset{\star\star}{=} \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{\alpha}{n}} \cdot L(f,P_n) = \frac{\left(3^b-3^a\right)}{\ln(3)} \cdot 1 = \frac{\left(3^b-3^a\right)}{\ln(3)}$$

ולכן קיבלנו כי $\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \frac{\left(3^b-3^a\right)}{\ln(3)} = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n)$,
ולכן מהמשפט שהתנאים שקולים נקבל 3^x אינטגרבילית והאינטגרל שווה לגבול ולכן

$$\int_a^b 3^x dx = \frac{\left(3^b-3^a\right)}{\ln(3)}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** חשבו $\int_a^b \sqrt[3]{x}dx$
ולכן נציב בטענת העזר מסעיף א' $N=\frac{1}{3}$, ונקבל כי $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ אינטגרבילית וגם מתקיים

$$\int_a^b \sqrt[3]{x}dx = \frac{\left(b^{\frac{1}{3}+1} - a^{\frac{1}{3}+1}\right)}{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{4}\cdot\left(b^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{4}{3}}\right)$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** חשבו $\int_a^b \frac{1}{x}dx$
נגדיר סדרת חלוקות $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ אופן הבא: $P_n = \left\{a, a\cdot q, a\cdot q^2, \ldots, a\cdot q^n\right\}$, כאשר $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$,
נשים לב כי הנוסחא לאיבר x_i היא: $x_i = a\cdot q^i$,
נחשב m_i, M_i

$$m_i \overset{\text{def}}{=} \inf\{f(x) \mid x_{i-1}\le x\le x_i\} = \inf\left\{x^N \mid a\cdot q^{i-1} \le x \le a\cdot q^i\right\} = \frac{1}{a\cdot q^i}$$

$$M_i \overset{\text{def}}{=} \sup\{f(x) \mid x_{i-1}\le x\le x_i\} = \sup\left\{x^N \mid a\cdot q^{i-1} \le x \le a\cdot q^i\right\} = \frac{1}{a\cdot q^{i-1}}$$

עתה נחשב $U(f,P_n)$

$$U(f,P_n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a\cdot q^{i-1}}\cdot\left(a\cdot q^i - a\cdot q^{i-1}\right)$$
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a\cdot q^{i-1}}\cdot a(q-1)\cdot q^{i-1} = \sum_{i=1}^n (q-1) = n\cdot(q-1)$$
$$\overset{\star\star}{=} n\cdot\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

עתה נחשב את $L(f,P_n)$

$$L(f,P_n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a\cdot q^i}\cdot\left(a\cdot q^i - a\cdot q^{i-1}\right)$$
$$= \frac{1}{q}\cdot\sum_{i=1}^n \frac{1}{a\cdot q^{i-1}}\cdot a(q-1)\cdot q^{i-1} = \frac{1}{q}\cdot U(f,P_n)$$
$$\overset{\star}{=} \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\cdot U(f,P_n)$$

נסמן $\alpha=\frac{b}{a}$, תחילה נחשב את גבול $\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha^x-1}{x}$ שהינו גבול עזר בחישובינו

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha^x-1}{x}\overset{L\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha^x\cdot\ln(\alpha)}{1}$$
$$=\ln(\alpha)\lim_{x\to0^+}\alpha^x=\ln(\alpha)\cdot\frac{1}{1}\overset{\star\star\star}{=}\ln\left(\frac{b}{a}\right)=\ln(b)-\ln(a)$$

עתה נחשב את $\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)$

$$\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)\overset{\star\star}{=}\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)\overset{\text{Heine}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha^x-1}{x}\overset{\star\star\star}{=}\ln(b)-\ln(a)$$

עתה נחשב את $\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)$ וגם נשים לב שמתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}=1$ ולכן:

$$\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)\overset{\star}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\cdot U(f,P_n)=(\ln(b)-\ln(a))\cdot1=(\ln(b)-\ln(a))$$

ולכן קיבלנו כי $\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=\ln(b)-\ln(a)=\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)$,
ולכן מהמשפט שהתנאים שקולים נקבל $\frac{1}{x}$ אינטגרבילית והאינטגרל שווה לגבול ולכן

$$\int_a^b\frac{1}{x}dx=\ln(b)-\ln(a)$$

מ.ש.ל.ד.☺

6. **צ"ל:** הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות

(א) **צ"ל:** אם f^2 אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$

לא נכון! נבחר $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, נשים לב כי $f^2(x)=1$ ולכן לפי מה שראינו בכיתה מתקיים

$$\int_a^b f^2(x)\,dx=1\cdot(b-a)=b-a$$

תהי $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ חלוקה כלשהי של $[a,b]$ אזי מתקיים

$$m_i\overset{\text{def}}{=}\inf\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}=-1$$
$$M_i\overset{\text{def}}{=}\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}=1$$

ולכן מתקיים,

$$U(f,P)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})=1\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=b-a$$
$$L(f,P)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=-1\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=a-b$$

ולכן מתקיים,

$$\underline{\int_a^b}f(x)\,dx\overset{\text{def}}{=}\sup\{L(f,P)\mid P\}=a-b$$
$$\overline{\int_a^b}f(x)\,dx\overset{\text{def}}{=}\inf\{U(f,P)\mid P\}=b-a$$

ולכן $\underline{\int_a^b}f(x)\,dx\neq\overline{\int_a^b}f(x)\,dx$,
כלומר הפונקציה $f(x)$ אינה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ וגם f^2 אינטגרבילית ב$[a,b]$ בסתירה לטענה

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** אם f^3 אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$
נכון! בהרצאה הוכחנו משפט שעבור כל פונקציה $g:[a,b]\to[m,M]$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$
ועבור כל פונקציה רציפה ϕ בקטע $[m,M]$ מתקיים כי $h=\phi\circ g$ אינטגרבילית ב$[a,b]$
נבחר $\phi(x)=\sqrt[3]{x}$, נשים לב כי ϕ רציפה בכל קטע $[m,M]$ ונבחר $g=f^3$, נשים לב כי

$$h=\phi\circ g=\sqrt[3]{f^3}=f$$

אזי מהמשפט מתקיים כי $h=f$ אינטגרבילית ב$[a,b]$!

מ.ש.ל.ב.☺

7. **הוכחה:**

(א) **צ"ל:**

$$\int_a^b f(x+c)\,dx=\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$$

הוכחה:
תחילה נראה ש$f(x)$ אינטגרבילית ב$[a+c,b+c]$ אם"ם $f(x+c)$ אינטגרבילית ב$[a,b]$
$\Rightarrow$: נניח כי $f(x)$ אינטגרבילית ב$[a+c,b+c]$ ונראה כי $f(x+c)$ אינטגרבילית ב$[a,b]$
יהי $\varepsilon>0$, מהיות $f(x)$ אינטגרבילית ב$[a+c,b+c]$ קיימת חלוקה $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ של $[a+c,b+c]$ כך ש

$$U(f(x),P)-L(f(x),P)\le\varepsilon$$

נגדיר:

$$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\},x_i^*\overset{\text{def}}{=}x_i-c$$
$$P^*\overset{\text{def}}{=}\{x_0^*,x_1^*,\ldots,x_n^*\}$$

נשים לב ש$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$ מתקיים כי

$$m_i^*\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{f(x+c)\mid x_{i-1}^*\le x\le x_i^*\right\}=\inf\{f(x+c)\mid x_{i-1}-c\le x\le x_i-c\}=\inf\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}=m_i$$
$$M_i^*\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{f(x+c)\mid x_{i-1}^*\le x\le x_i^*\right\}=\sup\{f(x+c)\mid x_{i-1}-c\le x\le x_i-c\}=\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}=M_i$$

ולכן מתקיים:

$$L(f(x+c),P^*)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^n m_i^*\left(x_i^*-x_{i-1}^*\right)=\sum_{i=1}^n m_i((x_i-c)-(x_{i-1}-c))=\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1})=L(f(x),P)$$
$$U(f(x+c),P^*)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^n M_i^*\left(x_i^*-x_{i-1}^*\right)=\sum_{i=1}^n M_i((x_i-c)-(x_{i-1}-c))=\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})=U(f(x),P)$$

ולכן מתקיים:

$$U(f(x+c),P^*)-L(f(x+c),P^*)=U(f(x),P)-L(f(x),P)\le\varepsilon$$

כלומר ממשפט 2.3 שהתנאים הבאים שקולים מתקיים ש $f(x+c)$ אינטגרבילית ב$[a,b]$
$\Leftarrow$:נניח כי $f(x+c)$ אינטגרבילית ב$[a,b]$ ונראה כי $f(x)$ אינטגרבילית ב$[a+c,b+c]$
יהי $\varepsilon>0$, מהיות $f(x+c)$ אינטגרבילית ב$[a,b]$ קיימת חלוקה $P^*=\{x_0^*,x_1^*,\ldots,x_n^*\}$ כך ש

$$U(f(x+c),P^*)-L(f(x+c),P^*)\le\varepsilon$$

נגדיר :

$$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\},x_i\overset{\text{def}}{=}x_i^*+c$$
$$P\overset{\text{def}}{=}\{x_o,x_1,\ldots,x_n\}$$

נשים לב ש$\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$ מתקיים כי

$$m_i \overset{\text{def}}{=} \inf\{f(x) \mid x_{i-1}\le x\le x_i\} = \inf\left\{f(x) \mid x^*_{i-1}+c\le x\le x^*_i+c\right\} = \inf\left\{f(x+c) \mid x^*_{i-1}\le x\le x^*_i\right\} = m^*_i$$
$$M_i \overset{\text{def}}{=} \sup\{f(x) \mid x_{i-1}\le x\le x_i\} = \sup\left\{f(x) \mid x^*_{i-1}+c\le x\le x^*_i+c\right\} = \sup\left\{f(x+c) \mid x^*_{i-1}\le x\le x^*_i\right\} = M^*_i$$

ולכן מתקיים

$$L(f(x),P) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i\left((x^*_i+c)-\left(x^*_{i-1}+c\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*_i\left(x^*_i-x^*_{i-1}\right) = L(f(x+c),P^*)$$
$$U(f(x),P) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i\left((x^*_i+c)-\left(x^*_{i-1}+c\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} M^*_i\left(x^*_i-x^*_{i-1}\right) = U(f(x+c),P^*)$$

ולכן מתקיים

$$U(f(x),P)-L(f(x),P) = U(f(x+c),P^*)-L(f(x+c),P^*)\le\varepsilon$$

כלומר ממשפט 2.3 שהתנאים הבאים שקולים מתקיים ש $f(x)$ אינטגרבילית ב$[a+c,b+c]$
עתה נראה שערכי האינטגרלים שווים אם אחת מהן אינטגרבילית,
ראינו שלכל חלוקה P של $[a+c,b+c]$ קיימת חלוקה P^* של $[a,b]$ כך ש$L(f(x),P)=L(f(x+c),P^*)$
לכן, מתקיים כי

$$\underline{\int_{a+c}^{b+c}} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \sup\{L(f(x),P) \mid P\} \le \sup\{L(f(x+c),P^*) \mid P^*\} \overset{\text{def}}{=} \underline{\int_{a}^{b}} f(x+c)\,dx$$

באופן דומה ראינו שלכל חלוקה P^* של $[a,b]$ קיימת חלוקה P של $[a+c,b+c]$ כך ש$L(f(x),P)=L(f(x+c),P^*)$
לכן, מתקיים כי

$$\underline{\int_{a}^{b}} f(x+c)\,dx \overset{\text{def}}{=} \sup\{L(f(x+c),P^*) \mid P^*\} \le \sup\{L(f(x),P) \mid P\} \overset{\text{def}}{=} \underline{\int_{a+c}^{b+c}} f(x)\,dx$$

ולכן,

$$\underline{\int_{a+c}^{b+c}} f(x)\,dx = \underline{\int_{a}^{b}} f(x+c)\,dx$$

ולכן מהיות הפונקציות אינטגרביליות מתקיים כי:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx = \underline{\int_{a+c}^{b+c}} f(x)\,dx = \underline{\int_{a}^{b}} f(x+c)\,dx = \int_{a}^{b} f(x+c)\,dx$$

ולכן $\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx = \int_a^b f(x+c)\,dx$, כנדרש!

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:**

$$\int_a^b f(cx)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\,dx$$

הוכחה:
תחילה נראה ש$f(cx)$ אינטגרבילית ב$[a,b]$ אם"ם $f(x)$ אינטגרבילית ב$[ca,cb]$
$\Leftarrow$: נניח כי $f(x)$ אינטגרבילית ב$[ac,bc]$ ונראה כי $f(xc)$ אינטגרבילית ב$[a,b]$
יהי $\varepsilon>0$, מהיות $f(x)$ אינטגרבילית ב$[ac,bc]$ קיימת חלוקה $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ של $[ac,bc]$ כך ש

$$U(f(x),P)-L(f(x),P)\le\varepsilon\cdot c$$

נגדיר:

$$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\},x_i^*\overset{\text{def}}{=}\frac{x_i}{c}$$
$$P^*\overset{\text{def}}{=}\{x_0^*,x_1^*,\ldots,x_n^*\}$$

נשים לב ש$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$ מתקיים כי

$$m_i^*\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{f(xc)\mid x_{i-1}^*\le x\le x_i^*\right\}=\inf\left\{f(xc)\mid \frac{x_{i-1}}{c}\le x\le\frac{x_i}{c}\right\}=\inf\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}=m_i$$
$$M_i^*\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{f(xc)\mid x_{i-1}^*\le x\le x_i^*\right\}=\sup\left\{f(xc)\mid \frac{x_{i-1}}{c}\le x\le\frac{x_i}{c}\right\}=\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}=M_i$$

ולכן מתקיים:

$$L(f(xc),P^*)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^n m_i^*\left(x_i^*-x_{i-1}^*\right)=\sum_{i=1}^n m_i\left(\frac{x_i}{c}-\frac{x_{i-1}}{c}\right)=\frac{1}{c}\cdot\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1})=\frac{1}{c}\cdot L(f(x),P)$$
$$U(f(xc),P^*)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^n M_i^*\left(x_i^*-x_{i-1}^*\right)=\sum_{i=1}^n M_i\left(\frac{x_i}{c}-\frac{x_{i-1}}{c}\right)=\frac{1}{c}\cdot\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})=\frac{1}{c}\cdot U(f(x),P)$$

ולכן מתקיים:

$$U(f(xc),P^*)-L(f(xc),P^*)=\frac{1}{c}\cdot(U(f(x),P)-L(f(x),P))\le\frac{1}{c}\cdot\varepsilon\cdot c=\varepsilon$$

כלומר ממשפט 2.3 שהתנאים הבאים שקולים מתקיים ש $f(xc)$ אינטגרבילית ב$[a,b]$
$\Leftarrow$:נניח כי $f(xc)$ אינטגרבילית ב$[a,b]$ ונראה כי $f(x)$ אינטגרבילית ב$[ac,bc]$
יהי $\varepsilon>0$, מהיות $f(xc)$ אינטגרבילית ב$[a,b]$ קיימת חלוקה $P^*=\{x_0^*,x_1^*,\ldots,x_n^*\}$ כך ש

$$U(f(xc),P^*)-L(f(xc),P^*)\le\frac{\varepsilon}{c}$$

נגדיר :

$$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\},x_i\overset{\text{def}}{=}x_i^*\cdot c$$
$$P\overset{\text{def}}{=}\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$$

נשים לב ש$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$ מתקיים כי

$$m_i\overset{\text{def}}{=}\inf\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}=\inf\left\{f(x)\mid x_{i-1}^*\cdot c\le x\le x_i^*\cdot c\right\}=\inf\left\{f(xc)\mid x_{i-1}^*\le x\le x_i^*\right\}=m_i^*$$
$$M_i\overset{\text{def}}{=}\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}=\sup\left\{f(x)\mid x_{i-1}^*\cdot c\le x\le x_i^*\cdot c\right\}=\sup\left\{f(xc)\mid x_{i-1}^*\le x\le x_i^*\right\}=M_i^*$$

ולכן מתקיים

$$L(f(x),P)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n m_i\left((x_i^*\cdot c)-\left(x_{i-1}^*\cdot c\right)\right)=c\cdot\sum_{i=1}^n m_i^*\left(x_i^*-x_{i-1}^*\right)=c\cdot L(f(xc),P^*)$$
$$U(f(x),P)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n M_i\left((x_i^*\cdot c)-\left(x_{i-1}^*\cdot c\right)\right)=c\cdot\sum_{i=1}^n M_i^*\left(x_i^*-x_{i-1}^*\right)=c\cdot U(f(xc),P^*)$$

ולכן מתקיים

$$U(f(x),P)-L(f(x),P)=c\cdot(U(f(xc),P^*)-L(f(xc),P^*))\le c\cdot\frac{\varepsilon}{c}=\varepsilon$$

כלומר ממשפט 2.3 שהתנאים הבאים שקולים מתקיים ש $f(x)$ אינטגרבילית ב$[ac,bc]$
עתה נראה שערכי האינטגרלים שווים אם אחת מהן אינטגרבילית,

ראינו שלכל חלוקה P של $[ac,bc]$ קיימת חלוקה P^* של $[a,b]$ כך ש$L\left(f\left(x\right),P\right)=c\cdot L\left(f\left(xc\right),P^*\right)$
לכן, מתקיים כי

$$\underline{\int_{ac}^{bc}}f\left(x\right)dx\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{L\left(f\left(x\right),P\right)\mid P\right\}\leq\sup\left\{c\cdot L\left(f\left(xc\right),P^*\right)\mid P^*\right\}$$

$$=c\cdot\sup\left\{L\left(f\left(xc\right),P^*\right)\mid P^*\right\}\overset{\text{def}}{=}c\cdot\underline{\int_{a}^{b}}f\left(xc\right)dx$$

ולכן $\underline{\int_a^b}f\left(xc\right)dx\geq\frac{1}{c}\cdot\underline{\int_{ac}^{bc}}f\left(x\right)dx$
באופן דומה ראינו שלכל חלוקה P^* של $[a,b]$ קיימת חלוקה P של $[ac,bc]$ כך ש$\frac{1}{c}L\left(f\left(x\right),P\right)=L\left(f\left(xc\right),P^*\right)$
לכן, מתקיים כי

$$\underline{\int_{a}^{b}}f\left(xc\right)dx\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{L\left(f\left(xc\right),P^*\right)\mid P^*\right\}\leq\sup\left\{\frac{1}{c}\cdot L\left(f\left(x\right),P\right)\mid P\right\}$$

$$=\frac{1}{c}\cdot\sup\left\{L\left(f\left(x\right),P\right)\mid P\right\}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{c}\cdot\underline{\int_{ac}^{bc}}f\left(x\right)dx$$

ולכן,

$$\frac{1}{c}\cdot\underline{\int_{ac}^{bc}}f\left(x\right)dx=\underline{\int_{a}^{b}}f\left(xc\right)dx$$

ולכן מהיות הפונקציות אינטגרביליות מתקיים כי:

$$\frac{1}{c}\cdot\int_{ac}^{bc}f\left(x\right)dx=\frac{1}{c}\cdot\underline{\int_{ac}^{bc}}f\left(x\right)dx=\underline{\int_{a}^{b}}f\left(xc\right)dx=\int_{a}^{b}f\left(xc\right)dx$$

ולכן $\frac{1}{c}\cdot\int_{ac}^{bc}f\left(x\right)dx=\int_a^b f\left(xc\right)dx$, כנדרש!

מ.ש.ל.ב.☺