

פתרון בעיות באלגוריתמים - תרגיל 3

להגשה ב-2 בינואר ב-23:59

1. פיצוץ גשרים:

במדינה שמפת עריה והגשרים המחברים ביניהן צורתה עץ, פועלת מחתרת האחראית על פיצוץ הגשרים בה. המחתרת מעוניינת ליצור מבנה נתונים, כך שלאחר פיצוץ חלק מהגשרים, מכריע ביעילות האם קיים מסלול בין זוג ערים נתונות. כמו כן, המחתרת מעוניינת לפוצץ את כל הגשרים בסיום התהליך, ומעוניינת בתחזוקה יעילה של המבנה.

פורמלית, עליכם לתאר אלגוריתם המקבל כקלט עץ בעל n קודקודים, כך שבמהלך ריצתו מתקבלות $n - 1$ שאילתות מהצורה "הסר את הקשת בין u ל- v " עבור זוג קודקודים u ו- v בגרף, ובנוסף מתקבלות m שאילתות מהצורה "האם קיים מסלול בין u ל- v ביער, לאחר שהוסרו חלק מהקשתות בו עד לאותו שלב?" עבור זוג קודקודים u ו- v בו. על האלגוריתם לפעול בזמן ריצה $O(n^2 + m)$. הסבירו בקצרה נכונותו וזמן ריצתו.

בנוסף: לאחר שיפור התשתיות, הוחלפה מערכת הגשרים במערכת עמידה יותר. בכל עיר הוקמה נקודת בקרה האחראית על כל הגשרים היוצאים מהעיר, וכדי לפוצץ גשר יש לפוצץ את שתי נקודות הבקרה שבשני קצותיו.

שניים מהחברים במחתרת סיכמו על סידור של הגשרים. הם מתחרים בתורות לסירוגין, כך שבתור ה- k , המתמודד שזהו תורו יכול לפוצץ את אחת מנקודות הבקרה של הגשר ה- k לפי סידור זה. אם בתור זה, שתי הנקודות כבר פוצצו, השחקן שזהו תורו מפסיד. אם כעבור $n - 1$ תורות אף מתמודד לא הפסיד, מוכרז שוויון.

הניחו כי שני השחקנים משחקים ללא טעויות, כך שעבור סידור נתון, אם לאחד השחקנים יש אסטרטגיה מנצחת הוא ישאף לנצח בתור המוקדם ביותר ויריבו ינסה לדחות את הפסדו ככל שיוכל. תארו אלגוריתם אשר בהינתן העץ וסידור הגשרים בו, מחזיר את התור בו המשחק מסתיים. פתרונות שזמן ריצתם הוא $2^{O(n)}$ יזכו ב-10 נקודות בונים ופתרונות שזמן ריצתם הוא $O(n^2)$ יזכו ב-40 נקודות. הסבירו נכונות וזמן ריצה.

2. קודקודים מרכזיים בגרף:

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קודקוד בגרף ייקרא **מרכזי** אם הסרתו יחד עם כל צלעותיו מהגרף מגדילה את מספר רכיבי הקשירות בו. תארו אלגוריתם המקבל כקלט גרף לא מכוון, ומחזיר את מספר הקודקודים המרכזיים בו. על האלגוריתם לפעול בזמן ריצה $O(|V| + |E|)$. הסבירו נכונות וזמן ריצה.