אלגברה לינארית (2) תשע`ט 2018-2019 - סמסטר ב' - תרגיל 7

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז.** יש לציין **כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 8.5.19 בשעה 21:00.

אלא אם נאמר אחרת, בכל התרגיל V מסמן מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ו- $T : V \to V$ אופרטור לינארי.

1. (א) יהי $P \in \mathbb{F}[X]$ פולינום. הוכיחו: אם λ ערך עצמי של T, אז $P(\lambda)$ ערך עצמי של $P(T)$.
   (ב) נסמן ב- m_T את הפולינום המינימלי של T. יהי λ ערך עצמי של T. הוכיחו: $m_T(\lambda) = 0$.
   (ג) יהי $P \in \mathbb{F}[X]$ פולינום. הוכיחו או הפריכו: אם $P(\lambda)$ ערך עצמי של $P(T)$ אז λ ערך עצמי של T.

2. יהיו $A \in M_n(\mathbb{F})$ ו-$B \in M_q(\mathbb{F})$ שתי מטריצות.
   נניח שהפולינום המינימלי של A הוא $m_A(X) = (X-\lambda_1)^{k_1}(X-\lambda_2)^{k_2}\cdots(X-\lambda_r)^{k_r}$ עם $k_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.
   ונניח שהפולינום המינימלי של B הוא $m_B(X) = (X-\lambda_1)^{l_1}(X-\lambda_2)^{l_2}\cdots(X-\lambda_r)^{l_r}$ עם $l_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.
   (כאשר החזקה $l_i = 0$, הגורם $(X-\lambda_i)^{l_i}$ אינו נמצא במכפלה).
   נסמן $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ את מטריצת הבלוקים מגודל $(n+q)\times(n+q)$.
   הוכיחו שהפולינום המינימלי של C הוא $m_C(X) = (X-\lambda_1)^{s_1}(X-\lambda_2)^{s_2}\cdots(X-\lambda_r)^{s_r}$ עבור $s_i = \max\{k_i, l_i\}$.
   כלומר, הראו שהפולינום m_C מאפס את C, ושהוא הפולינום המתוקן מהמעלה המינימלית שמאפס את C.

3. בשאלה זו V לאו דווקא נוצר סופית. יהי $P \in \mathbb{F}[X]$ פולינום. הוכיחו כי $\ker P(T)$ ו- $\operatorname{Im} P(T)$ הם T-אינווריאנטיים.

4. בשאלה זו V לאו דווקא נוצר סופית.
   (א) הוכיחו: $\ker T^i \subseteq \ker T^{i+1}$ לכל $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.
   (ב) $\operatorname{Im} T^{i+1} \subseteq \operatorname{Im} T^i$ לכל $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

5. הסבירו מדוע קיים $i \in \mathbb{N}$ כך ש- $\ker T^i = \ker T^{i+1}$, והוכיחו כי
   (א) $\operatorname{Im}\, T^i = \operatorname{Im}\, T^{i+1}$
   (ב) $\ker T^{i+1} = \ker T^{i+2}$
   (ג) $\ker T^i = \ker T^{i+j}$ לכל $j \in \mathbb{N}$.
   (ד) $\operatorname{Im} T^i = \operatorname{Im} T^{i+j}$ לכל $j \in \mathbb{N}$.

6. יהיו $P, Q, R \in \mathbb{F}[X]$ כך ש- $P = Q\cdot R$ וגם $\gcd(Q,R) = 1$. הוכיחו כי אם $P(T) = 0$ אז $\ker R(T) = \operatorname{Im} Q(T)$.

7. יהיו $\lambda, \lambda' \in \mathbb{F}$ עם $\lambda \neq \lambda'$, ונניח שהפולינום האופייני של T הינו $\chi_T = (X-\lambda)^l (X-\lambda')^{l'}$, עם $l, l' \in \mathbb{N}$.
   (א) הוכיחו ש- $(X-\lambda)^l$ ו- $(X-\lambda')^{l'}$ הם פולינומים זרים.
   (ב) העזרו בסעיף א' בכדי להוכיח: $\operatorname{Im}(T-\lambda Id_V)^l = \ker(T-\lambda' Id_V)^{l'}$.
   (ג) הוכיחו: $\ker(T-\lambda Id_V)^l = \ker(T-\lambda Id_V)^{l+1}$.
   (ד) יהי $g(X) = (X-\lambda)^h (X-\lambda')^{h'}$, כאשר $h = \min\{\, i\in\mathbb{N} \mid \ker(T-\lambda Id_V)^i = \ker(T-\lambda Id_V)^{i+1}\}$,
   ו- $h' = \min\{\, i\in\mathbb{N} \mid \ker(T-\lambda' Id_V)^i = \ker(T-\lambda' Id_V)^{i+1}\}$. הוכיחו כי $g(T) = 0$.

8. אופרטור לינארי $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ מוגדר על ידי $T(e_i) = e_{i+1}$ לכל $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $T(e_n) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.
   (א) הוכיחו כי $\ker(T^k) = \operatorname{Span}(e_{n-k+1}, e_{n-k+2}, \ldots, e_n)$.
   (ב) מצאו בסיס של $\operatorname{Im}(T^k)$.

9. אופרטור לינארי $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ מוגדר על ידי $T(x) = Ax$ לכל $x \in \mathbb{R}^n$, כאשר $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$
   וגם מתקיים $a_{ij} = 0$ לכל $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. הוכיחו כי $T^n = 0$, ללא שימוש במשפט קיילי-המילטון.