פתרון תרגיל מספר 1 ־ מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

17 במרץ 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $(A\cup B)\setminus B = A\setminus(A\cap B) = A\cap B^C$

הוכחה:

תחילה נוכיח זהות שנשתמש בה בתרגיל

$$\begin{aligned}&x\in A\setminus(A\cap B)\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin(A\cap B)\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin A\vee x\notin B)\\&\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\notin B)\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\Leftrightarrow x\in A\setminus B\end{aligned}$$

כלומר הראנו כי $x\in A\setminus(A\cap B)\Leftrightarrow x\in A\setminus B$ לכן $\boxed{A\setminus(A\cap B)\overset{\star}{=}A\setminus B}$,

עתה נשתמש בזהות

$$\begin{aligned}&x\in(A\cup B)\setminus B\Leftrightarrow(x\in A\cup B)\wedge(x\notin B)\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\notin B)\\&\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin B)\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\Leftrightarrow x\in A\setminus B\overset{\star}{\Leftrightarrow}x\in A\setminus(A\cap B)\end{aligned}$$

כלומר הראנו כי $x\in(A\cup B)\setminus B\Leftrightarrow x\in A\setminus(A\cap B)$ לכן $\boxed{(A\cup B)\setminus B=A\setminus(A\cap B)}$

$$x\in A\cap B^C\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B^C\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\Leftrightarrow x\in A\setminus B\overset{\star}{\Leftrightarrow}x\in A\setminus(A\cap B)$$

כלומר הראנו כי $x\in A\cap B^C\Leftrightarrow x\in A\setminus(A\cap B)$ לכן $\boxed{A\cap B^C=A\setminus(A\cap B)}$,

כלומר

$$\boxed{(A\cup B)\setminus B=A\setminus(A\cap B)=A\cap B^C}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $(A\setminus(A\cap B))\cup B=A\cup B$

הוכחה:

$$\begin{aligned}&x\in(A\setminus(A\cap B))\cup B\Leftrightarrow x\in(A\setminus(A\cap B))\vee x\in B\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin(A\cap B))\vee x\in B\\&\Leftrightarrow(x\in A\wedge(x\notin A\vee x\notin B))\vee x\in B\Leftrightarrow((x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\notin B))\vee x\in B\\&\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\vee x\in B\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in B\vee x\notin B)\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B\Leftrightarrow x\in A\cup B\end{aligned}$$

כלומר הראנו כי $x\in(A\setminus(A\cap B))\cup B\Leftrightarrow x\in A\cup B$ לכן $\boxed{(A\setminus(A\cap B))\cup B=A\cup B}$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(A\cap B)$

הוכחה:

$$\begin{aligned}&x\in(A\cup B)\cap C\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\wedge x\in C\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge x\in C\\&\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in C)\vee(x\in B\vee x\in C)\Leftrightarrow x\in(A\cap C)\vee x\in(B\cap C)\Leftrightarrow x\in(A\cap C)\cup(A\cap B)\end{aligned}$$

כלומר הראנו כי $x\in(A\cup B)\cap C\Leftrightarrow x\in(A\cap C)\cup(A\cap B)$ לכן $\boxed{(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(A\cap B)}$

מ.ש.ל.ג.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** האם $(A \cap C) \cup (B \cup C) \cup (A \cap B) \supseteq A \cap B \cap C$ תמיד מתקיים?

הוכחה:

נכון!

$$x \in A \cap B \cap C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B)$$
$$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup ((B \cup C) \cup (A \cap C)) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (B \cup C) \cup (A \cap C)$$

כלומר הראנו כי $x \in A \cap B \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (B \cup C) \cup (A \cap C)$ לכן

$$\boxed{A \cap B \cap C \subseteq (A \cap B) \cup (B \cup C) \cup (A \cap C)}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם $A \cap B^C \cap C \subseteq A \cap B$ תמיד מתקיים?

הוכחה:

נכון!

$$x \in A \cap B^C \cap C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in (A \cap B)$$

כלומר הראנו כי $x \in A \cap B^C \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B)$ לכן

$$\boxed{A \cap B^C \cap C \subseteq A \cap B}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** האם $(A \cup B)^C \cap C = A^C \cap \left(C \cup B^C\right) \cap C$ תמיד מתקיים?

הוכחה:

לא נכון! נבחר $X = B = C = \{1\}$, $A = \emptyset$ אזי

$$(A \cup B)^C \cap C = (\emptyset \cup \{1\})^C \cap \{1\} = \{1\}^C \cap \{1\} = \emptyset \cap \{1\} = \emptyset$$
$$A^C \cap \left(C \cup B^C\right) \cap C = \{\emptyset\}^C \cap \left(\{1\} \cap \{1\}^C\right) \cap \{1\} = \{1\} \cap (\{1\} \cap \emptyset) \cap \{1\} = \{1\}$$

לכן

$$\boxed{(A \cup B)^C \cap C = \emptyset \neq \{1\} = A^C \cap \left(C \cup B^C\right) \cap C}$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** האם $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$ תמיד מתקיים?

הוכחה:

לא נכון! נבחר $X = A = B = C = \{1\}$, אזי

$$(A \cup B) \setminus C = (\{1\} \cup \{1\}) \setminus \{1\} = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset$$
$$A \cup (B \setminus C) = \{1\} \cup (\{1\} \setminus \{1\}) = \{1\} \cup \emptyset = \{1\}$$

לכן

$$\boxed{(A \cup B) \setminus C = \emptyset \neq \{1\} = A \cup (B \setminus C)}$$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** האם $A \cup B \cup C = A \cup [B \setminus A \cap B] \cup [C \setminus A \cap C]$ תמיד מתקיים?
הוכחה:
נכון!
תחילה נשים לב כי

$$x \in B \setminus A \cap B \Leftrightarrow x \in (B \setminus A) \wedge x \in B \Leftrightarrow (x \in B \wedge x \notin A) \wedge x \in B$$
$$\Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin A \Leftrightarrow x \in B \setminus A$$

כלומר הראנו כי $x \in B \setminus A \cap B \Leftrightarrow x \in B \setminus A$ לכן $\boxed{B \setminus A \overset{\star\star}{=} B \setminus A \cap B}$, עתה נוכיח את הנדרש:

$$x \in A \cup [B \setminus A \cap B] \cup [C \setminus A \cap C] \overset{\star\star}{\Leftrightarrow} x \in A \cup [B \setminus A] \cup [C \setminus A]$$
$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin A)$$
$$\Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A)) \vee (x \in C \wedge x \notin A)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee (x \in C \wedge x \notin A)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge (x \in A \vee x \in B \vee x \notin A)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge (x \in A \vee x \notin A)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cup B \cup C$$

כלומר הראנו כי $x \in A \cup B \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup [B \setminus A \cap B] \cup [C \setminus A \cap C]$ לכן

$$\boxed{A \cup [B \setminus A \cap B] \cup [C \setminus A \cap C] = A \cup B \cup C}$$

מ.ש.ל.ה.☺

(ו) **צ"ל:** האם $(A \cup B)^C \cap C = C \setminus (C \cap (A \cup B))$ תמיד מתקיים?
הוכחה:
נכון!

$$x \in (A \cup B)^C \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cup B)^C \wedge x \in C \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \wedge x \in C$$
$$\Leftrightarrow x \in C \setminus (A \cup B) \overset{\star}{\Leftrightarrow} x \in C \setminus (C \cap (A \cup B))$$

כלומר הראנו כי $x \in (A \cup B)^C \cap C \Leftrightarrow x \in C \setminus (C \cap (A \cup B))$ לכן

$$\boxed{(A \cup B)^C \cap C = C \setminus (C \cap (A \cup B))}$$

מ.ש.ל.ו.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** מספר הסדרות באורך k שניתן ליצור מהמספרים $1, 2, \ldots, n$ כך שהסדרה מכילה את 1 לפחות פעם 1
הוכחה:
סה"כ: תחילה נחשב את מספר הסדרות הכולל באורך k,
מספר הסדרות הזה שווה ל

$$|\{(a_1, \ldots, a_k) \mid 1 \leq \forall i \leq k, a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}| = |\{1, 2, \ldots, n\}|^k = \boxed{n^k}$$

רעים: עתה נחשב את מספר הסדרות הכולל באורך k שלא מכילות את הספרה 1,
מספר הסדרות הזה שווה ל

$$|\{(a_1,\ldots,a_k) \mid 1 \le \forall i \le k, a_i \in \{2,\ldots,n\}\}| = |\{2,\ldots,n\}|^k = \boxed{(n-1)^k}$$

עתה מספר הסדרות שמכילות 1 לפחות פעם 1 שווה למספר הסדרות הכולל פחות מספר הסדרות שלא מכילות את המספר 1,
מספר סדרות הללו הינו $\boxed{n^k - (n-1)^k}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** מספר האפשרויות לבחירת 5 זוגות המורכבים מחתול וכלב כאשר יש 12 חתולים ו10 כלבים
הוכחה:
תחילה נחשב את מספר האפשרויות לבחור 5 חתולים מתוך 12, מספר זה הוא $\binom{12}{5}$,
לאחר שבחרנו את 5 החתולים, מספר האפשרויות 5 כלבים מתוך 10, מספר זה הוא $\binom{10}{5}$,
עתה כשיש לנו 5 חתולים ו5 כלבים, נמספר את 5 החתולים.
לחתול הראשון יש לנו 5 אפשרויות לבחירת הכלב המתאים לו,
לאחר שבחרנו את הזוג של החתול הראשון, לחתול השני יש 4 אפשרויות לבחירת הכלב המתאים לו,
לאחר שבחרנו את הזוג של החתול השני, לחתול השלישי יש 3 אפשרויות לבחירת הכלב המתאים לו,
לאחר שבחרנו את הזוג של החתול השלישי, לחתול הרביעי יש 2 אפשרויות לבחירת הכלב המתאים לו,
לאחר שבחרנו את הזוג של החתול הרביעי, לחתול החמישי יש 1 אפשרויות לבחירת הכלב המתאים לו.
לכן מספר האפשרויות הכולל הינו $\boxed{\binom{12}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \binom{12}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot 5! = 23{,}950{,}080}$

מ.ש.ל.ב.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
הוכחה:
תהי $S = \{1,2,\ldots,n\}$, נרצה לחשב את מספר תתי הקבוצות של S בגודל k ב2 דרכים שונות:

i. מספר תתי הקבוצות של המספרים בגודל k שאנחנו **רוצים** לבחור מS, ומספר זה הוא $\boxed{\binom{n}{k}}$

ii. מספר תתי הקבוצות של המספרים בגודל $n-k$ שאנחנו **לא רוצים** לבחור מS, ומספר זה הוא $\boxed{\binom{n}{n-k}}$

לכן מכיוון שהחישבנו ב2 דרכים שונות את מספר תתי הקבוצות של S בגודל n, נקבל כי המספרים הללו שווים, כלומר

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
הוכחה:

תהי $S=\{1,2,\dots,n\}$, נרצה לחשב את מספר תתי הקבוצות של S בגודל k ב2 דרכים שונות:

$$\begin{aligned}
|\{A\subseteq S \mid |A|=k, n\in A\}| &= |\{A\subseteq S \mid |A|=k\} \setminus \{A\subseteq S \mid |A|=k, n\notin A\}| \\
&= |\{A\subseteq S \mid |A|=k\} \setminus \{A\subseteq S\setminus\{n\} \mid |A|=k\}| \\
&= \binom{|S|}{k} - \binom{|S\setminus\{n\}|}{k} = \binom{|\{1,2,\dots,n\}|}{k} - \binom{|\{1,2,\dots,n-1\}|}{k} \\
&= \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} \Rightarrow \boxed{|\{A\subseteq S \mid |A|=k, n\in A\}| = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\{A\subseteq S \mid |A|=k, n\in A\}| = |\{B\subseteq S\setminus\{n\} \mid |B|=k-1\}| = \binom{S\setminus\{n\}}{k-1} = \binom{|\{1,2,\dots,n-1\}|}{k} \\
= \binom{n-1}{k-1} \Rightarrow \boxed{|\{A\subseteq S \mid |A|=k, n\in A\}| = \binom{n-1}{k-1}}
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = |\{A\subseteq S \mid |A|=k, n\in A\}| = \binom{n-1}{k-1} \\
\Rightarrow \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1} \Rightarrow \boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

הוכחה:

תהי $S=\{1,2,\dots,2n\}$, נרצה לחשב את מספר תתי הקבוצות של S בגודל n ב2 דרכים שונות:

i. מספר האפשרויות לבחור n מספרים מתוך קבוצה של $2n$ מספרים היא $\boxed{\binom{2n}{n}}$

ii. נגדיר קבוצות $B=\{n+1,\dots,2n\}$, $A=\{1,2,\dots,n\}$, נשים לב כי $A\cup B=S$
מספר האפשרויות לבחירת n מספרים מS הוא כמו מספר האפשרויות
לבחירת j מספרים מA ו$n-j$ איברים מB, $0\le \forall j\le n$, $j\in\mathbb{N}$.
ומספר האפשרויות לבחירת j מספרים מA ו$n-j$ מB הוא $\binom{n}{j}\cdot\binom{n}{n-j}=\binom{n}{j}^2$
לכן, מספר תתי הקבוצות של S בגודל n שווה ל $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2}$

לכן, מכיוון שהחישבנו ב2 דרכים שונות את מספר תתי הקבוצות של S בגודל n, נקבל כי המספרים הללו שווים, כלומר

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

מ.ש.ל.ג.☺