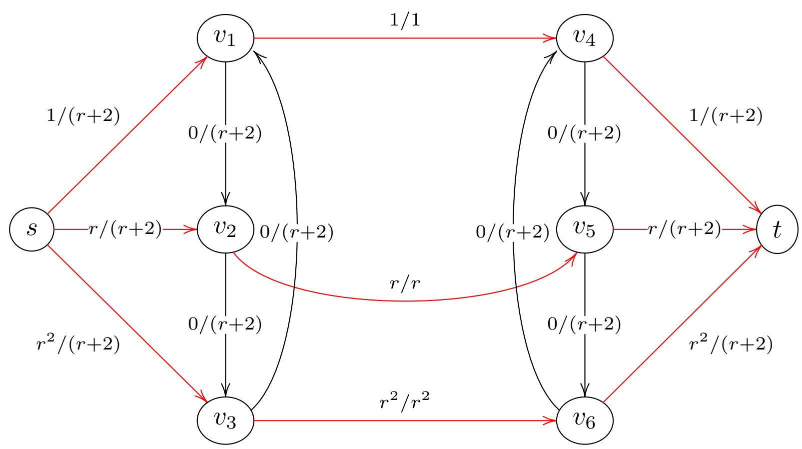
אלגוריתמים (67504) - פתרון תרגיל 10

שם: גיא לוי, **ת.ז:** 211744636 ; **שם:** מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

16 בינואר 2020

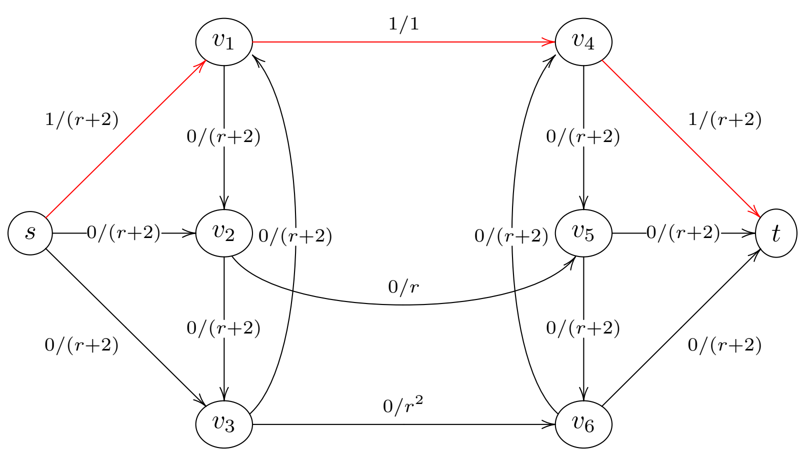
1. פתרון:

(א) **צ"ל:** זרימה מקסימלית
הוכחה:
עתה נשים לב שאם נבחר רק את הקודקודים שנכנסים לצלעות $1, r, r^2$ נקבל חתך שקיבולו הוא 2.
אם נבחר חתך אחר, אז תהיה צלע מהצורה $r+2$ מוכלת בחתך, ונשים לב כי $r+2 > 2 = 1 + r + r^2$,
לכן ממינימליות החתך המינימלי נקבל שהחתך המינימלי ברשת זאת מכיל רק את הקודקודים שנכנסים לצלעות $1, r, r^2$.
והזרימה המקסימלית היא:

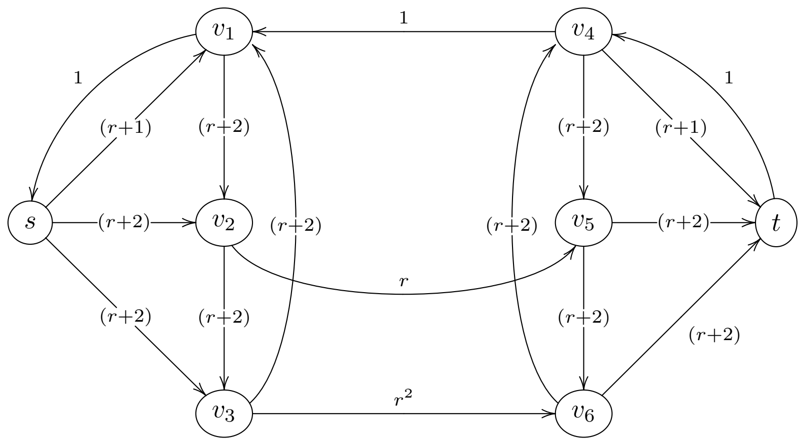


מ.ש.ל.א.☺

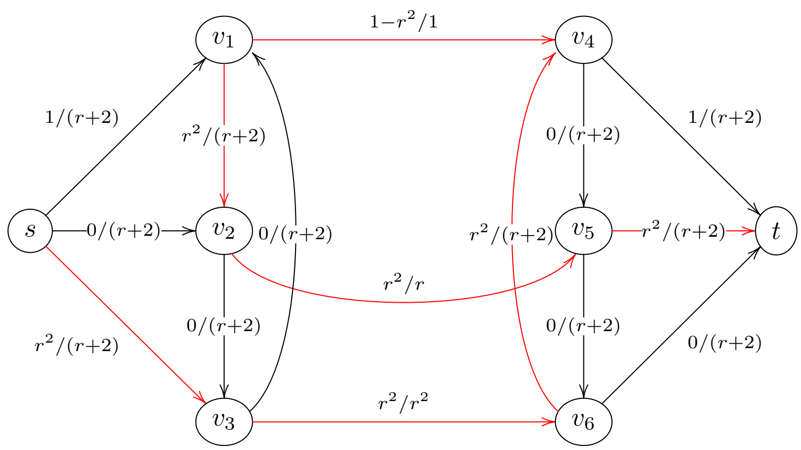
ב. **צ"ל:** הרצת האלגוריתם
הוכחה:
נעבוד עם אותם סימונים מהסעיף הקודם.
איטרציה 1:



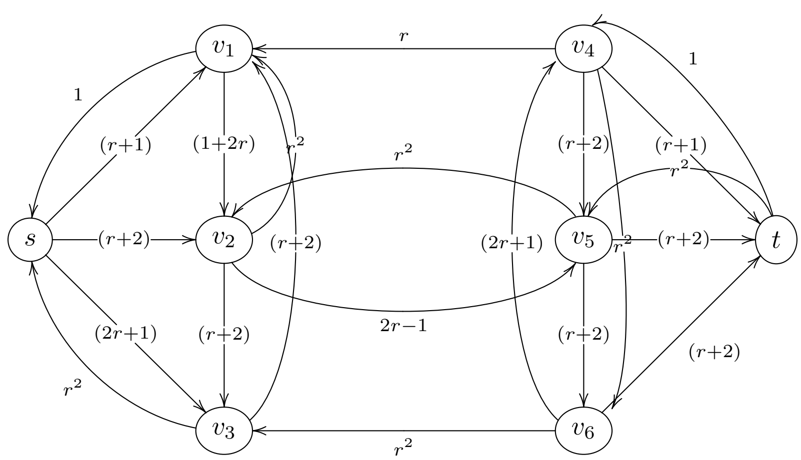
גרף שיורי:



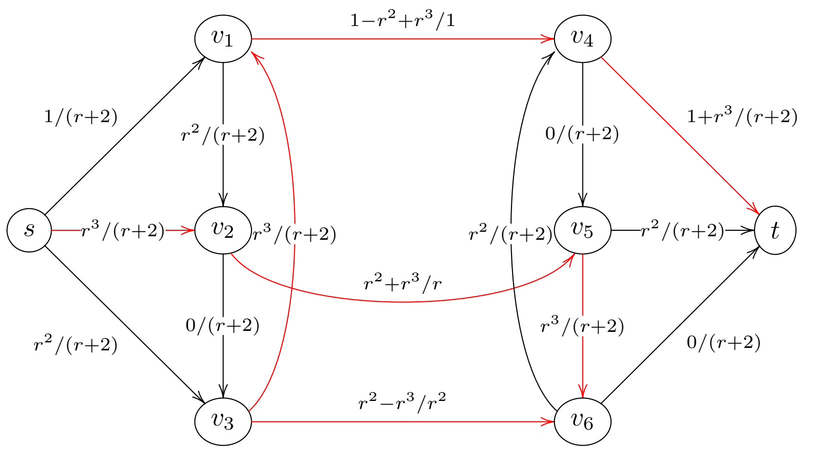
איטרציה 2: נבחר את הזרימה $s, v_3, v_6, v_4, v_1, v_2, v_5, t$:



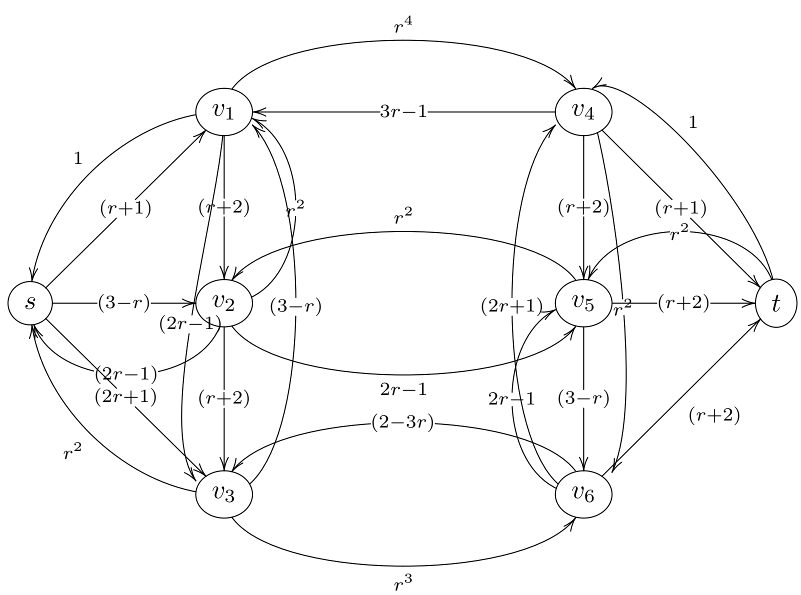
גרף שיורי: נשים לב כי $1-r^2=r$



איטרציה 3: נבחר את הזרימה $s, v_2, v_5, v_6, v_3, v_1, v_4, t$:



גרף שיורי: נשים לב כי $1-r^2=r$



מ.ש.ל.ב.☺

ג. **צ"ל:** האלגוריתם לא עוצר

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה כי הצלעות $(v_1,v_4),(v_2,v_5),(v_3,v_6)$ יהיו בקיבולים $0, r^{n+1}, r^{n+2}$ בגרף השיורי והשטף ברשת יהיה $1+\sum_{i=2}^{n} r^i$

<u>בסיס:</u> אפשר לראות מהסעיף הקודם שזה מתקיים אוטומטית מההגדרה של המסלול ושל הקיבולים בתחילת האיטרציות על הרשת.

<u>צעד:</u> נניח שהטענה מתקיימת בהרצה ה־ n ונוכיח שהטענה מתקיימת עבור $n+1$:

נסמן בלי הגבלת הכלליות את הצלע עם קיבול 0 ב־ (u_1,v_1), את הצלע עם קיבול r^{n+1} ב־ (u_2,v_2) ואת הצלע עם קיבול r^{n+2} ב־ (u_3,v_3).

עתה מהגדרת המסלול נשים לב כי הזרימה בגרף השיורי בקודקודים אלה בהרצה ה־ $n+1$ תהיה:

$$f'(v_1,u_1)=f'(u_2,v_2)=f'(u_3,v_3)=\min\left\{c_{f\uparrow f'}(v_1,u_1), r^{n+1}, r^{n+2}\right\} \overset{0<r<1}{=} r^{n+2}$$

נשים לב שזה לא סותר את שאר הצלעות במסלול כי הזרימה בהן היא לכל היותר $1+\sum_{i=2}^{n+1} r^i \leq \sum_{i=0}^{n+1} r^i < \sum_{i=0}^{\infty} r^i = r+2$, ולכן ניתן להזרים בהן כמה שאנחנו רוצים, והאילוץ על הזרימה במסלול מתקבל מהצלע (u_3,v_3).

נחשב את הקיבולים החדשים ברשת השיורית:

$$\begin{aligned}c_{f\uparrow f'}(u_1,v_1) &\overset{(u_1,v_1)\in E}{=} c_f(u_1,v_1)-\left[f(u_1,v_1)+f'(u_1,v_1)-f'(v_1,u_1)\right]\\ &= c_f(u_1,v_1)-f(u_1,v_1)+f'(v_1,u_1)\\ &= \left[c_f(u_1,v_1)-f(u_1,v_1)\right]+f'(v_1,u_1)\\ &\overset{c_{f'}(u_1,v_1)=0\Rightarrow c_f(u_1,v_1)=f(u_1,v_1)}{=} 0+r^{n+2}=r^{n+2}\end{aligned}$$

עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}c_{f\uparrow f'}(u_2,v_2) &\overset{(u_2,v_2)\in E}{=} c_f(u_2,v_2)-\left[f(u_2,v_2)+f'(u_2,v_2)-f'(v_2,u_2)\right]\\ &= \left[c_f(u_2,v_2)-f(u_2,v_2)\right]-f'(u_2,v_2)=c_{f'}(u_2,v_2)-f'(u_2,v_2)\\ &= r^{n+1}-r^{n+2}=r^{n+1}(1-r)=r^{n+1}\cdot r^2=r^{n+3}\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}c_{f\uparrow f'}(u_3,v_3) &\overset{(u_3,v_3)\in E}{=} c_f(u_3,v_3)-\left[f(u_3,v_3)+f'(u_3,v_3)-f'(v_3,u_3)\right]\\ &= \left[c_f(u_3,v_3)-f(u_3,v_3)\right]-f'(u_3,v_3)=c_{f'}(u_3,v_3)-f'(u_3,v_3)\\ &= r^{n+2}-r^{n+2}=0\end{aligned}$$

כלומר הראנו שהקיבולים החדשים יהיו מה שטענו באינדוקציה וגם מתקיים כי השטף החדש הוא $|f\uparrow f'|=|f|+|f'|=1+\sum_{i=2}^{n}r^i+r^{n+1}=1+\sum_{i=2}^{n+1}r^i$, כנדרש.
לכן האלגוריתם לעולם לא יעצור, כי הראנו שאם הייתה האיטרציה ה־ n אז תהיה גם האיטרציה ה־ $n+1$.
הערה: נשים לב כי $1+\sum_{i=2}^{\infty}r^i=\sum_{i=0}^{\infty}r^i-r=2+r-r=2$, כלומר השטף שואף לשטף המקסימלי.

מ.ש.ל.ג.☺

ד. **צ"ל:** לא בהכרח שואף לשטף המקסימלי
הוכחה:
נשים לב שהצלע בין s ל־ t מוכלת בכל חתך שנבחר, ולכן אפשר לא להתייחס אליה בחיפוש החתך המינימלי. באופן דומה כמו בסעיף הראשון נקבל כי קיבול החתך המינימלי הוא $3=1+2$.
נשים לב שריצת האלגוריתם נשארת זהה כמו בסעיף הקודם ודבר לא משתנה, והראנו שהזרימה שואפת ל־ 2 באינסוף, ולכן היא אפילו לא תשאף לזרימה המקסימלית ברשת זו, כי הזרימה המקסימלית ברשת היא 3 והאלגוריתם שואף ל־ 2.

מ.ש.ל.ד.☺

.2

1. הטענה נכונה. **הוכחה:** נניח בשלילה שהצלע (u,v) אינה רוויה. יהי (S,T) חתך מינימלי ולכן ממשפט השטף והחתך מתקיים $|f|=c(S,T)$. אם בשלילה הצלעות בחתך (S,T) לא כוללות את (u,v) הרי כי נתון שקיבולי הצלעות בחתך זוגיים ולכן יתקיים:

$$\forall(x,y)\in(S,T):2\mid c(x,y)$$

ולכן:

$$2\mid\sum_{\substack{x\in S\\ y\in T}}c(x,y)=c(S,T)=|f|$$

בסתירה לנתון ש־ $2\nmid|f|$. ולכן (u,v) בחתך, אבל מאחר ואינה רוויה מתקיים $f(u,v)<c(u,v)$ ולכן נקבל

$$|f|=f(S,T)=\sum_{\substack{x\in S\\ y\in T}}f(x,y)=f(u,v)+\sum_{\substack{x\in S\\ y\in T\\ (x,y)\neq(u,v)}}f(x,y)<c(u,v)+\sum_{\substack{x\in S\\ y\in T\\ (x,y)\neq(u,v)}}c(x,y)$$
$$=c(S,T)$$

בסתירה למשפט השטף והחתך ולכן נסיק כי (u,v) רוויה כדרוש. ■

2. הטענה אינה נכונה. **הפרכה:** נניח בשלילה שקיימת רשת זרימה כבטענה. יהי (S,T) חתך מינימלי. נשים לב כי מהנתון קיים מסלול $(v_0,\ldots,v_k)$ ברשת כך ש־ $v_0=s, v_k=t$ וגם $\forall 1\le i\le k: c(v_{i-1},v_i)=\sqrt{2}$. נשים לב כי $v_0\in S$ וכן $v_k\in T$ ולכן קיימת צלע במסלול $(v_{i-1},v_i)\in(S,T)$ (אחרת כל המסלול מוכל ב־ S או T בסתירה למה שנכתב לעיל). יהי f שטף מקסימלי ולכן ממשפט השטף והחתך מתקיים $|f|=c(S,T)$, מאחר ו־ $c(v_{i-1},v_i)=\sqrt{2}$ הרי כי מתקיים

$$10=|f|=c(S,T)=\sum_{\substack{x\in S\\ y\in T}}c(x,y)=m\cdot 1+n\cdot\sqrt{2},n\ge 1$$

כאשר זה נובע מהיות כל הקיבולים הם 1 או $\sqrt{2}$ וכן $n\ge 1$ מאחר והראינו שאחת הצלעות בחתך עם קיבול $\sqrt{2}$. ולכן נקבל $10-m=n\cdot\sqrt{2}$ - מאחר שטבעי (לא כולל 0) כפול אי רציונלי שווה אי־רציונלי - וכן $10-m\in\mathbb{N}$ הרי כי נקבל שאין פתרון למשוואה ולכן סתירה ולכן לא קיימת רשת זרימה כבטענה כדרוש. $\blacksquare$

.3

1. פתרון: נבנה אלגוריתם על סמך אלגוריתם לפתרון בעיית המשקיעים והשחקנים שראינו בתרגול 10. ניזכר בניסוח:

קלט:
$A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ קבוצת שחקנים, לכל שחקן נתונה משכורת s_i. $B=\{b_1,\ldots,b_k\}$ קבוצת משקיעים. לכל משקיע b_i נתונה תת־קבוצה $A_i\subseteq A$ של השחקנים שהוא אוהב, ואם כל השחקנים ב־ A_i ישחקו בסרט אז הוא ישקיע סכום d_i.
פלט: תתי קבוצות $A'\subseteq A$ ו־ $B'\subseteq B$. שחוקיות אם $\forall b_i\in B': A_i\subseteq A'$ ואופטימליות כאשר הרווח של A',B' מקסימלי והרווח מוגדר להיות $p(A',B')=\sum\limits_{b_i\in B'}d_i-\sum\limits_{a_i\in A'}s_i$.

אלגוריתם:

2. עבור המקרה שלנו נגדיר קלט $A=\{v_i^1\}_{i=1}^n$ ו־ $B=\{v_i^2\}_{i=1}^n$ כאשר המשכורת לשחקן ה־ i היא q_i ולכל $v_i^2\in B$ נתונה תת־קבוצה $A_i\subseteq A$ כאשר

$$A_i=\left\{v_j^1:\exists j_0,\ldots,j_k\in[n],j_0=i,j_k=j\text{ such that }j_l\in D_{l+1}\vee j_l=j_{l+1}\text{ for all }0\le l<k\right\}$$

שאם כל השחקנים ב־ A_i ישחקו בסרט הוא ישקיע סכום m_i. נשתמש באלגוריתם מהתרגול ונקבל תתי־קבוצות $A'\subseteq A$ ו־ $B'\subseteq B$ כך ש־ $\forall v_i^2\in B': A_i\subseteq A'$ וגם הרווח של A',B' מקסימלי כאשר הרווח מוגדר להיות $p(A',B')=\sum\limits_{v_i^2\in B'}m_i-\sum\limits_{v_i^1\in A'}q_i$.

3. נחזיר את $\{i:v_i^2\in B'\}$ כפלט האלגוריתם.

נכונות: כדי להוכיח נכונות האלגוריתם נוכיח חוקיות ואופטימליות.

1. **טענת עזר:** עבור A',B' המתקבלים בשלב הראשון באלגוריתם נגדיר $A''=\{i:v_i^1\in A'\},B''=\{i:v_i^2\in B'\}$ אזי $A''=B''$.
הוכחה: נראה הכלה משני הכיוונים:

(א) יהי $i\in B''$ הרי כי $v_i^1\in A_i\subseteq A'$ מחוקיות האלגוריתם "שחקנים ומשקיעים" ולכן $i\in A''$ ולכן $B''\subseteq A''$.

(ב) יהי $i\in A''$ הרי כי קיים $j\in B''$ כך ש־ $v_i^1\in A_j$ - אחרת בשלילה לכל $v_j^2\in B$ כך ש־ $v_i^1\in A_j$ מתקיים $v_j^2\notin S$ כאשר (S,T) זו הבחירה של החתך המינימלי באלגוריתם העזר בו השתמשנו - ולכן $v_j^2\in V\setminus S=T$. נגדיר חתך חדש: $\left(S\setminus\{v_i^1\},T\cup\{v_i^1\}\right)$ הרי כי

$$\begin{aligned}c\left(S\setminus\{v_i^1\},T\cup\{v_i^1\}\right)&=c(S,T)-\sum_{(v_i^1,x),x\in T}c\left(v_i^1,x\right)+\sum_{(x,v_i^1),x\in S}c\left(x,v_i^1\right)=c(S,T)-q_i+0\\&<c(S,T)\end{aligned}$$

כאשר מתקיים $\sum_{(x,v_i^1),x\in S}c\left(x,v_i^1\right)=0$ מאחר שהראינו כי הסכום נסכם על 0 איברים מהנחת השלילה. ולכן נקבל חתך עם קיבול קטן של החתך עם הקיבול המינימלי ולכן סתירה! ולכן כפי שנכתב לעיל, קיים $j\in B''$ כך ש־ $v_i^1\in A_j$ ולכן $A_i\subseteq A_j$ (שכן A_i מוגדר להיות קבוצת כל השאלות שהכרחי לפתור כדי לפתור את שאלה i, אז אם j נמצא ב־ A_i, גם כל השאלות שהכרחי לפתור בשביל j, הכרחי לפתור אותם בשביל i). לכן אם בשלילה $i\notin B''$, קרי $v_i^2\notin B'$ הרי כי ניתן להגדיר $A',B'\cup\{v_i^2\}$ פתרון חוקי של אלגוריתם העזר ($A_i\subseteq A_j\subseteq A'$ ולכן חוקי) כאשר מתקיים

$$p\left(A',B'\cup\{v_i^2\}\right)=p(A',B')+m_i>p(A',B')$$

בסתירה להיות אלגוריתם העזר מחזיר פתרון עם רווח מקסימלי ולכן $i\in B''$ ולכן $A''\subseteq B''$.

ולכן נסיק כי $A''=B''$ כדרוש. $\square$

2. **חוקיות:** נסמן ב־ $X=\{x_1,\ldots,x_k\}$ פלט האלגוריתם וצ"ל כי לכל $v_i\in X$ מתקיים $D_i\subseteq X$.
הוכחה: יהי $v_i\in X$. נשים לב כי עבור אותם סימונים של טענת העזר מתקיים מהשלב האחרון של האלגוריתם $B''=X$ וכן מטענת העזר מתקיים $A''=B''$. מחוקיות אלגוריתם הפתרון לבעיית המשקיעים והשחקנים מתקיים לכל $x_i\in B''$ ש־ $A_{x_i}\subseteq A'$ ולכן מטענת העזר מתקיים $\{x_j : x_j\in A_{x_i}\}\subseteq A''=B''=X$ כדרוש. $\square$

3. **אופטימליות:** נסמן ב־ $X=\{x_1,\ldots,x_k\}$ פלט האלגוריתם וצ"ל כי הרווח מקסימלי.
הוכחה: אם בשלילה הרווח אינו מקסימלי קיים פתרון $C=(c_1,\ldots,c_l)$ עבורו הרווח גבוה משל X, קרי $p(X)<p(C)$. נבנה מ־ C פתרון לבעיית השחקנים והמשקיעים $A'_c=\left\{v_i^1 : i\in C\right\}, B'_c=\left\{v_i^2 : i\in C\right\}$ הרי כי

$$p\left(A'_c,B'_c\right)=p\left(C\right)$$

מהגדרת הרווח.נשים לב כי האלגוריתם החזיר רווח מקסימלי עבור הבעיה עם פלט A',B' בו השתמשנו באלגוריתם שלנו ולכן יתקיים

$$p\left(X\right)=p\left(A',B'\right)\geq p\left(A'_c,B'_c\right)=p\left(C\right)$$

בסתירה לכך ש־ $p(X)<p(C)$ ולכן סתירה להנחת השלילה ולכן הפתרון אופטימלי כדרוש. $\blacksquare$

4. **ניתוח זמן ריצה:** כדי למצוא את A_i צריך למצוא את כל שאלות ש־ i תלוי בהם ־ לכן אם נבנה גרף שהקודקודים הם השאלות, והצלעות מעידות על תלות בין השאלות, A_i זה קבוצת כל הקודקודים שיש אליהם מסלול מ־ i ־ ניתן למצוא אותם על־ידי BFS בעלות $O\left(n+n^2\right)$ ואת זה לעשות על כל n הקודקודים ־ סך הכל עלות $O\left(n^3\right)$. עלות האלגוריתם מהכיתה היא $O\left(n^2k^2\left(n+k\right)\right)$ כאשר $n=|A|, k=|B|$ ולכן לאחר הרדוקציה באלגוריתם שלנו נקבל זמן ריצה $O\left(n^2n^2\left(n+n\right)\right)=O\left(n^5\right)$. זמן הרכבת הפלט הוא לכל היותר $O(n)$ (ב־ B' יש לכל היותר n קודקודים) ־ סך הכל עלות האלגוריתם הינה $\boxed{O\left(n^5\right)}$.

.4

1. פתרון: נוכיח טענת עזר:
2. **טענת עזר:** בהינתן רשת זרימה $N=(V,E,c,s,t)$ חתך (S,T) וזרימה עם שטף מקסימלי ברשת f. אזי (S,T) חתך מינימלי ברשת אם"ם f מרווה כל צלע בחתך.
הוכחה:

(א) $\Rightarrow$: מתקיים

$$c\left(S,T\right)=\sum_{\substack{x\in S\\ y\in T}}c\left(x,y\right)=\sum_{\substack{x\in S\\ y\in T}}f\left(x,y\right)=f\left(S,T\right)=|f|$$

כאשר השוויון השני נובע מהיות f מרווה את כל הצלעות בחתך (והסכימה היא על כל צלעות החתך) והשוויון האחרון נובע מטענה שהוכחה בכיתה. ולכן ממשפט השטף והחתך נקבל כי (S,T) חתך מינימלי כדרוש.

(ב) $\Leftarrow$: אם בשלילה f אינה מרווה כל צלע בחתך קיים $(u,v)\in(S,T)$ עבורו $f(u,v)<c(u,v)$ ולכן

$$|f|=f\left(S,T\right)=\sum_{\substack{x\in S\\ y\in T}}f\left(x,y\right)<\sum_{\substack{x\in S\\ y\in T}}c\left(x,y\right)=c\left(S,T\right)$$

בסתירה להיות (S,T) חתך מינימלי ו־ f זרימה עם שטף מקסימלי שכן לפי משפט השטף והחתך צריך להתקיים שוויון ביניהם ולכן f מרווה את כל צלעות החתך כדרוש.

הוכחה: עתה נוכיח את הטענה. מאלגוריתם EK קיימת זרימה f ברשת בעלת שטף מקסימלי. תהי $(u,v)\in(S'\cap S'',T'\cup T'')$ הרי כי בה"כ $v\in T'$ ובהכרח מתקיים $u\in S'$ ולכן $(u,v)\in(S',T')$ ולכן מטענת העזר ש־ f מרווה את (u,v). לכן הראינו כי כל צלע בחתך $(S'\cap S'',T'\cup T'')$ מרווה על־ידי זרימה עם שטף מקסימלי f ולכן מטענת העזר החתך מינימלי ברשת הנתונה כדרוש. $\blacksquare$

.5 פתרון: **הוכחה:**
אלגוריתם:

1. נגדיר רשת זרימה חדשה $N=(V,E,c',s,t)$ כאשר $c'(e)=c(e)\cdot(|E|+1)+1$, $\forall e\in E$, נשים לב כי $\forall e\in E$, $c'(e)\geq c(e)\geq 0$

2. נחזיר את החתך המינימלי ברשת החדשה ונסיים

נכונות: כדי להוכיח נכונות האלגוריתם נוכיח חוקיות ואופטימליות.

1. **חוקיות:**
נשים לב שלא שינינו את הקודקודים והצלעות בגרף ולכן כל חתך חוקי ברשת החדשה הוא גם חתך חוקי ברשת המקורית.
ולכן בגלל שהאלגוריתם למציאת חתך מינימלי מחזיר חתך חוקי ברשת החדשה, נקבל כי החתך שאנחנו מחזירים הוא חוקי ברשת המקורית $\blacksquare$

2. **אופטימליות:** נסמן בS',T' את החתך שאנחנו מקבלים מהאלגוריתם, נסמן ב־ k את מספר הצלעות בחתך S',T'
הוכחה:

(א) תחילה נניח בשלילה ש־ S',T' אינו חתך מינימלי ברשת המקורית, לכן קיים חתך S,T כך ש־ $c\left(S,T\right)<c\left(S',T'\right)$,
נשים לב שהקיבולים הם שלמים ולכן $c\left(S,T\right),c\left(S',T'\right)\in\mathbb{Z}$, לכן $1+c\left(S,T\right)\leq c\left(S',T'\right)$, לכן

$$\begin{aligned}
c'\left(S,T\right) &= \sum_{x\in S,y\in T,(x,y)\in E} c'\left(x,y\right)=\sum_{x\in S,y\in T,(x,y)\in E}\left[c\left(x,y\right)\cdot\left(\left|E\right|+1\right)+1\right]\\
&=\left[\sum_{x\in S,y\in T,(x,y)\in E} c\left(x,y\right)\right]\cdot\left(\left|E\right|+1\right)+\left[\sum_{x\in S,y\in T,(x,y)\in E}1\right]=c\left(S,T\right)\cdot\left(\left|E\right|+1\right)+\left[\sum_{x\in S,y\in T,(x,y)\in E}1\right]\\
&\overset{\star}{\leq} c\left(S,T\right)\cdot\left(\left|E\right|+1\right)+\left|E\right|=\left(c\left(S,T\right)+1\right)\cdot\left(\left|E\right|+1\right)-1\\
&\leq c\left(S',T'\right)\cdot\left(\left|E\right|+1\right)-1=\left[\sum_{x\in S',y\in T',(x,y)\in E}c\left(e\right)\right]\cdot\left(\left|E\right|+1\right)-1\\
&<\left[\sum_{x\in S',y\in T',(x,y)\in E}c\left(e\right)\right]\cdot\left(\left|E\right|+1\right)\leq\left[\sum_{x\in S',y\in T',(x,y)\in E}c\left(e\right)\right]\cdot\left(\left|E\right|+1\right)+\left[\sum_{x\in S',y\in T',(x,y)\in E}1\right]\\
&=\sum_{x\in S',y\in T',(x,y)\in E}\left[c\left(x,y\right)\cdot\left(\left|E\right|+1\right)+1\right]=\sum_{x\in S',y\in T',(x,y)\in E}c'\left(x,y\right)=c'\left(S',T'\right)
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $c'\left(S,T\right)<c'\left(S',T'\right)$ ברשת החדשה, בסתירה לכך ש־ S',T' הוא חתך מינימלי ברשת החדשה שיצרנו.
הערה: נשים לב כי $\star$ מתקיים כי יש לכל היותר $|E|$ בכל חתך שנבחר $\blacksquare$

(ב) לכן אנחנו יודעים כי S',T' הוא חתך גם ברשת המקורית,
עתה נניח בשלילה כי קיים חתך מינימלי S,T ברשת המקורית שמספר הצלעות בחתך קטן מ־ k ונסמנו ב־ l, לכן

$$\begin{aligned}
c'\left(S,T\right) &= \sum_{x\in S,y\in T,(x,y)\in E} c'\left(x,y\right)=\sum_{x\in S,y\in T,(x,y)\in E}\left[c\left(x,y\right)\cdot\left(\left|E\right|+1\right)+1\right]\\
&=\left[\sum_{x\in S,y\in T,(x,y)\in E} c\left(x,y\right)\right]\cdot\left(\left|E\right|+1\right)+\left[\sum_{x\in S,y\in T,(x,y)\in E}1\right]=c\left(S,T\right)\cdot\left(\left|E\right|+1\right)+l\\
&=c\left(S',T'\right)\cdot\left(\left|E\right|+1\right)+l<c\left(S',T'\right)\cdot\left(\left|E\right|+1\right)+k=\left[\sum_{x\in S',y\in T',(x,y)\in E}c\left(x,y\right)\right]\cdot\left(\left|E\right|+1\right)+\left[\sum_{x\in S',y\in T',(x,y)\in E}1\right]\\
&=\sum_{x\in S',y\in T',(x,y)\in E}\left[c\left(x,y\right)\cdot\left(\left|E\right|+1\right)+1\right]=\sum_{x\in S',y\in T',(x,y)\in E}c'\left(x,y\right)=c'\left(S',T'\right)
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $c'\left(S,T\right)<c'\left(S',T'\right)$ ברשת החדשה, בסתירה לכך ש־ S',T' הוא חתך מינימלי ברשת החדשה שיצרנו, כלומר S',T' הוא חתך מינימלי ברשת המקורית וגם מספר הצלעות בתוך החתך הוא מינימלי. $\blacksquare$

(ג) **ניתוח זמן ריצה:** לחישוב הרשת החדשה נצטרך לעדכן את c לכל צלע שייקח $O\left(\left|E\right|\right)$, ואז להריץ את אלגוריתם אדמונדס קארפ על הרשת החדשה שייקח $O\left(\left|V\right|\cdot\left|E\right|^{2}\right)$ ולכן זמן הריצה הכולל הוא $\boxed{O\left(\left|V\right|\cdot\left|E\right|^{2}\right)}$. $\blacksquare$