

הסתברות - תרגיל 13

1. יהיו X, Y בעלי פונקציית צפיפות משותפת

$$f(x, y) = \frac{3}{2}$$

עבור $0 < x < 1$ וכן $x^2 \leq y \leq 1$, ואפס אחרת.

(א) חשבו את הצפיפות המותנית של Y בהנתן X .

(ב) חשבו את התוחלת המותנית $E(Y|X)$.

(ג) חשבו את $E(Y)$.

2. יהיו X, Y בעלי פונקציית צפיפות משותפת

$$f(x, y) = \frac{1}{x}, \quad 0 < y \leq x \leq 1$$

ואפס אחרת.

(א) חשבו את הצפיפות המותנית של Y בהנתן X .

(ב) חשבו את התוחלת המותנית $E(Y|X)$.

(ג) חשבו את $E(Y)$.

3. מבצעים את הניסוי הבא: מגרילים מספר מתוך $\{1, \dots, k\}$ כך שההסתברות להגריל את המספר k הינה p_k (בפרט $\sum p_k = 1$). כעת, חוזרים על הניסוי n פעמים באופן ב"ת. יהא N_i המ"מ שמחזיר כמה מהניסויים נגמרו בתוצאה i , עבור $i \in \{1, \dots, k\}$.

(א) חשבו את ההתפלגות של המ"מ N_i לכל i כנ"ל.

(ב) יהיו $i \neq j$. חשבו את $E(N_j | N_i > 0)$.

(ג) יהיו $i \neq j$. חשבו את $E(N_j | N_i > 1)$.

4. סטודנט אבוד בקמפוס הר הצופים. מולו שלוש דלתות: הדלת הראשונה תיקח אותו ליציאה מהקמפוס תוך 3 שעות. הדלת השנייה תיקח אותו ליציאה מהקמפוס תוך 5 שעות. הדלת השלישית תחזיר אותו בסופו של דבר לאותו המקום לאחר 7 שעות. נניח שהסטודנט בוחר בכל פעם דלת בהסתברות אחידה, מה תוחלת הזמן עד שהוא יצא מהקמפוס?

5. יהיו X_1, X_2, X_3 שלושה מ"מ רציפים ב"ת ש"ה בעלי פונקציית צפיפות f ופונקציית התפלגות מצטברת F .

(א) לכל $j = 1, 2, 3$ הוכיחו שפונקציית הצפיפות של המ"מ $X_{(j)}$ (כמו בטענה 3.1 בסיכום התרגול) מקיימת

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{3!}{(3-j)!(j-1)!} [F(x)]^{j-1} [1-F(x)]^{n-j} f(x)$$

הערה: גם הסבר מתאים מבלי להכנס לכל הפרטים יכול להוות תשובה מתקבלת, כל עוד הוא אכן מסביר את השוויון הנ"ל.

(ב) נניח עכשיו ש $X_i \sim U([0, 1])$. חשבו

$$P\left(\frac{1}{4} < X_{(2)} < \frac{3}{4}\right)$$