פתרון תרגיל מספר 7 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

21 במאי 2020

שאלה 3

סעיף 1

צ"ל: $L = \{(\langle M \rangle, w) \mid M \text{ accepts } w \text{ and uses at most } |w| \text{ cells}\} \in R$

הוכחה:

עתה נשים לב שמספר הקונפיגורציות שמשתמשות לכל היותר ב־ $|w|$ תאים הוא $|Q| \cdot |\Gamma|^{|w|} \cdot |w|$ (מספר האפשרויות לבחור איפה המצביע ($|w|$) כפול מספר המצבים במקום אליו הוא מצביע ($|Q|$) כפול מספר הדברים האפשריים שיכולים להיות כתובים על הסרט באותו רגע ($|\Gamma|^{|w|}$))

נשים לב שלפי ההערה שנאמרה בתרגול, אם M חוזרת על קונפיגורציה אז היא לא עוצרת ובפרט לא מקבלת.

1. ראינו שיש לכל היותר $|Q| \cdot |\Gamma|^{|w|} \cdot |w|$ קונפיגורציות ואם M חוזר על קונפיגורציה אז הוא לא יעצור, ולכן בפרט לא יקבל את w בהנחה ומשתמש לכל היותר ב־ $|w|$ תאים. ולכן

$$M \text{ accepts } w \text{ within } |Q| \cdot |\Gamma|^{|w|} \cdot |w| \text{ steps} \rightarrow M \text{ accepts } w \text{ and uses at most } |w| \text{ cells}$$

2. אם M מקבל את w ומשתמש לכל היותר ב־ $|w|$ תאים, אז הוא לא חזר על אף קונפיגורציה ויש לכל היותר $|Q| \cdot |\Gamma|^{|w|} \cdot |w|$ קונפיגורציות ולכן רץ לכל היותר $|Q| \cdot |\Gamma|^{|w|} \cdot |w|$ צעדים. ולכן

$$M \text{ accepts } w \text{ and uses at most } |w| \text{ cells} \rightarrow M \text{ accepts } w \text{ within } |Q| \cdot |\Gamma|^{|w|} \cdot |w| \text{ steps}$$

ולכן

$$\boxed{M \text{ accepts } w \text{ and uses at most } |w| \text{ cells} \iff M \text{ accepts } w \text{ within } |Q| \cdot |\Gamma|^{|w|} \cdot |w| \text{ steps}}$$

בעקבות אבחנה זאת, נבנה את המ"ט $\mathcal{M}$ הבא:

1. נקבל את $(\langle M \rangle, w)$
2. נחשב את $|Q| \cdot |\Gamma|^{|w|} \cdot |w|$
3. נריץ את M על w מספר הצעדים שחושב בשלב הקודם
4. אם M קיבל, נקבל
5. אחרת נדחה

תחילה נשים לב כי $\mathcal{M}$ עוצר על כל קלט כי הוא רק עושה חישוב ואז מריץ מ"ט מספר סופי של צעדים.
נשים לב כי

$$\begin{aligned}(\langle M\rangle, w) \in L(\mathcal{M}) &\iff \mathcal{M} \text{ accepts } (\langle M\rangle, w) \iff M \text{ accepts } w \text{ within } |Q|\cdot|\Gamma|^{|w|}\cdot|w| \text{ steps} \\ &\iff M \text{ accepts } w \text{ and uses at most } |w| \text{ cells} \iff (\langle M\rangle, w) \in L\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו ש־ $L(\mathcal{M}) = L$ ולכן קיים מ"ט $\mathcal{M}$ כך ש־ $L(\mathcal{M}) = L$ וגם $\mathcal{M}$ עוצר על כל קלט.
לכן $\mathcal{M}$ מכריעה את L, כלומר $\boxed{L \in R}$, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2
צ"ל: $L = \{\langle M\rangle \mid \exists w \in \Sigma^* \text{ s.t } M \text{ accepts } w \text{ and uses at least } |w| \text{ cells}\} \in \mathrm{RE} \setminus R$
הוכחה:
רעיון כללי, אפשר להריץ במקביל הכל ולמצוא אם יש מילה ולכן ב־ RE.
אפשר ליצור המרה של A_{TM} ל־ L על ידי "בזבוז" של $|w|$ צעדים ואז הרצה של M על w ואז $(M', w) \in L$ אם"ם $(M, w) \in A_{TM}$

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3
צ"ל: $REACH_{TM} = \{\langle\langle M\rangle, q\rangle \mid q \neq q_{acc} \text{ and } M \text{ reaches } q \text{ on every input}\} \in \overline{\mathrm{RE} \cup \mathrm{coRE}}$
הוכחה:
רעיון כללי, לא ב־ RE בגלל שנוכל לעשות המרה של ALL_{TM} ל־ $REACH$ ונסיק כי $REACH$ הוא לא RE וגם לא coRE על ידי הוספת מצב q' לפני שמקבלים כל מילה, ואז ALL_{TM} מקבל את $\mathcal{M}$ אם השפה היא Σ^* רק אם הבניית עזר תקבל כל מילה ותעבור במצב q' שיצרנו.

מ.ש.ל.ג.☺

סעיף 4
צ"ל: $L = \{\langle M\rangle \mid L(M) = A_{TM}\} \in \overline{\mathrm{RE} \cup \mathrm{coRE}}$
הוכחה:
תחילה נבנה בניית עזר $\mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle, w\rangle}$ באופן הבא:

1. נקבל קלט $\langle\langle M'\rangle, w'\rangle$
2. נריץ את M על w
3. נריץ את M' על w'
4. נקבל אם M קיבל את w וגם M' קיבל את w', אחרת נדחה

נחלק ל־2 מקרים:

1. אם M לא מקבל את w אז $L\left(\mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle, w\rangle}\right) = \emptyset$ לפי הגדרה, כי נקבל רק את M מקבל את w, ולכן בפרט $\boxed{L\left(\mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle, w\rangle}\right) \neq A_{TM}}$
2. אם M מקבל את w אז $(M', w') \in L\left(\mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle, w\rangle}\right)$ אם"ם M' קיבל את w' מההגדרה,
כלומר $(\langle M'\rangle, w') \in L\left(\mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle, w\rangle}\right) \iff M' \text{ accepts } w' \iff (\langle M'\rangle, w') \in A_{TM}$, כלומר קיבלנו כי $\boxed{L\left(\mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle, w\rangle}\right) = A_{TM}}$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{L\left(\mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle, w\rangle}\right) = A_{TM} \iff M \text{ accepts } w}$.
עתה נגדיר $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ באופן הבא: $f(\langle\langle M\rangle, w\rangle) = \left\langle \mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle, w\rangle} \right\rangle$

עתה נשים לב כי

$$\langle\langle M\rangle, w\rangle \in A_{TM} \iff M \text{ accepts } w \overset{L\left(\mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right)=A_{TM} \iff M \text{ accepts } w}{\iff} L\left(\mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right) = A_{TM}$$

$$\iff \left\langle \mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle,w\rangle} \right\rangle \in L \overset{f(\langle\langle M\rangle,w\rangle)=\left\langle\mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right\rangle}{\iff} f\left(\langle\langle M\rangle, w\rangle\right) \in L$$

כלומר קיבלנו כי $f\left(\langle\langle M\rangle, w\rangle\right) \in L \iff \langle\langle M\rangle, w\rangle \in A_{TM}$ וגם f ניתנת לחישוב על ידי מכונה אוניברסלית וידיעה של הקידוד של M.

ולכן $A_{TM} \leq_m L$ וגם $A_{TM} \notin \text{coRE}$ מההגדרה ולכן $\boxed{L \notin \text{coRE}}$,

נבנה בניית עזר $\mathcal{M}_2^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}$ באופן הבא:

1. נקבל קלט $\langle\langle M'\rangle, w'\rangle$
2. נריץ את M על w ל־ $|w'|$ צעדים
3. נריץ את M' על w'
4. נקבל אם M לא קיבל את w וגם M' קיבל את w', אחרת נדחה

נחלק ל־ 2 מקרים:

1. אם M מקבל את w, נסמן את מספר הצעדים שלוקח לו לקבל ב־ n.
נשים לב כי $L\left(\mathcal{M}_2^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right) \neq A_{TM}$ כי עבור M' שמקבל כל מילה, עבור מילה $w' = 1^n$ יתקיים ש־ $\mathcal{M}_2^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}$ לא יקבל כי M יקבל את w, על אף ש־ M' יקבל את w'
2. אם M לא מקבל את w אז $(M', w') \in L\left(\mathcal{M}_2^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right)$ אס"ם M' קיבל את w' מההגדרה,
נשים לב שM לא מקבל את w ולכן נקבל את $(\langle M'\rangle, w')$ אם ורק אם $\mathcal{M}'$ accepts w'

כלומר $(\langle M'\rangle, w') \in A_{TM} \iff \mathcal{M}' \text{ accepts } w' \iff (\langle M'\rangle, w') \in L\left(\mathcal{M}_2^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right)$, כלומר קיבלנו כי $\boxed{L\left(\mathcal{M}_2^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right) = A_{TM}}$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{L\left(\mathcal{M}_2^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right) = A_{TM} \iff M \text{ doesn't accepts } w}$.

עתה נגדיר $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ באופן הבא: $f\left(\langle\langle M\rangle, w\rangle\right) = \left\langle \mathcal{M}_2^{\langle\langle M\rangle,w\rangle} \right\rangle$

עתה נשים לב כי

$$\langle\langle M\rangle, w\rangle \in \overline{A_{TM}} \iff M \text{ doesn't accepts } w$$

$$\overset{L\left(\mathcal{M}_2^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right)=A_{TM} \iff M \text{ doesn't accepts } w}{\iff} L\left(\mathcal{M}^{\langle_2\langle M\rangle,w\rangle}\right) = A_{TM}$$

$$\iff \left\langle \mathcal{M}_2^{\langle\langle M\rangle,w\rangle} \right\rangle \in L \overset{f(\langle\langle M\rangle,w\rangle)=\left\langle\mathcal{M}_2^{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right\rangle}{\iff} f\left(\langle\langle M\rangle, w\rangle\right) \in L$$

כלומר קיבלנו כי $f\left(\langle\langle M\rangle, w\rangle\right) \in L \iff \langle\langle M\rangle, w\rangle \in \overline{A_{TM}}$ וגם f ניתנת לחישוב על ידי מכונה אוניברסלית וידיעה של הקידוד של M.

ולכן $\overline{A_{TM}} \leq_m L$ וגם $A_{TM} \notin \text{coRE}$ מההגדרה ולכן $\overline{A_{TM}} \notin \text{RE}$ ולכן $\boxed{L \notin \text{RE}}$

כלומר קיבלנו כי $L \notin \text{RE}$ וגם $L \notin \text{coRE}$ ולכן $\boxed{L \in \overline{\text{RE} \cup \text{coRE}}}$

מ.ש.ל.ד.☺

סעיף 5

צ"ל: $L = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in \text{RE}\} \in R$

הוכחה:

רעיון כללי, כל מילה מזהה את שפתה וראינו שאפשר לזהות האם קידוד של מ"ט הוא תקין ב־ R ולכן השפה שלנו שהיא $L = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is an encoding of Turing Machine}\} \in R$

מ.ש.ל.ה.☺

סעיף 6

צ"ל: $MIN_{TM}=\{\langle\langle M\rangle,k\rangle \mid \text{there exists a TM D s.t. } L(M)=L(D) \text{ and D has less than k states}\}\in\overline{\text{RE}\cup\text{coRE}}$

הוכחה:

תחילה נשים לב שאם ל- $\langle M\rangle$ יש פחות מ- 3 מצבים אם"ם המצבים הם בדיוק q_{acc},q_{rej} (כי 2 המצבים האלה חייבים להיות קיימים) ולכן $q_0=q_{acc},q_{rej}$, כלומר

$$\begin{aligned}
&\{\langle\langle M\rangle,3\rangle \mid \text{there exists a TM D s.t. } L(M)=L(D) \text{ and D has less than 3 states}\}\\
&=\{\langle\langle M\rangle,3\rangle \mid \text{there exists a TM D s.t. } L(M)=L(D) \text{ and D states are } \{q_{acc},q_{rej}\}\}\\
&\overset{q_0\in\{q_{rej},q_{acc}\}}{=}\{\langle\langle M\rangle,3\rangle \mid \text{there exists a TM D s.t. } L(M)=L(D) \text{ and D accepts after 0 step}\}\\
&\overset{\text{must accepts all or reject all}}{=}\{\langle\langle M\rangle,3\rangle \mid \text{there exists a TM D s.t. } L(M)=L(D) \text{ and } L(D)=\Sigma^*\vee L(D)=\emptyset\}\\
&=\{\langle\langle M\rangle,3\rangle \mid L(M)=\Sigma^*\vee L(M)=\emptyset\}
\end{aligned}$$

לכן נשים לב כי

$$\begin{aligned}
&\langle\langle M\rangle,3\rangle\in\{\langle\langle M\rangle,3\rangle \mid L(M)=\Sigma^*\vee L(M)=\emptyset\}\\
\iff&\langle\langle M\rangle,3\rangle\in\{\langle\langle M\rangle,3\rangle \mid \text{there exists a TM D s.t. } L(M)=L(D) \text{ and D has less than 3 states}\}\\
\iff&\langle\langle M\rangle,3\rangle\in\{\langle\langle M\rangle,k\rangle \mid \text{there exists a TM D s.t. } L(M)=L(D) \text{ and D has less than k states}\}\\
\iff&\langle\langle M\rangle,3\rangle\in MIN_{TM}
\end{aligned}$$

עתה אחרי האבחנה הזאת, נגדיר $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ באופן הבא: $f(\langle M\rangle)=\langle\langle M\rangle,3\rangle$ ונקבל כי

$$\begin{aligned}
&\langle M\rangle\in\overline{NONTRIVIAL_{TM}}\iff L(M)=\Sigma^*\vee L(M)=\emptyset\\
&\iff\langle\langle M\rangle,3\rangle\in\{\langle\langle M\rangle,3\rangle \mid L(M)=\Sigma^*\vee L(M)=\emptyset\}\\
&\iff\langle\langle M\rangle,3\rangle\in MIN_{TM}\iff f(\langle M\rangle)\in MIN_{TM}
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\langle M\rangle\in\overline{NONTRIVIAL_{TM}}\iff f(\langle M\rangle)\in MIN_{TM}$ וגם נשים לב ש- f חשיבה בגלל שהיא רק כותבת 3 לאחר הקידוד של M.

לכן קיבלנו כי $\overline{NONTRIVIAL_{TM}}\leq_m MIN_{TM}$ וגם בסעיף ח' נראה כי $NONTRIVIAL_{TM}\in\overline{\text{RE}\cup\text{coRE}}$,

ולכן $\overline{NONTRIVIAL_{TM}}\in\overline{\text{RE}\cup\text{coRE}}$ (אם $L\notin\text{RE}\wedge L\notin\text{coRE}$ אז $\overline{L}\notin\text{coRE}\wedge\overline{L}\notin\text{RE}$)

ולכן ממשפט הרדוקציה נקבל כי $MIN_{TM}\notin\text{RE}$ וגם $MIN_{TM}\notin\text{coRE}$ ולכן $\boxed{MIN_{TM}\in\overline{\text{RE}\cup\text{coRE}}}$

מ.ש.ל.ו.☺

סעיף 7

צ"ל: $L_7=\{\langle M\rangle \mid \exists w\in\Sigma^* \text{ such that } M \text{ uses unboundably many tape cells}\}\in\overline{\text{RE}\cup\text{coRE}}$

הוכחה:

רעיון כללי, אם נוסיף משתנה i רץ ונריץ את המכונה M על w i צעדים, אז אם היא לא תעצור, היא תשתמש באינסוף תאים, ואם תעצור במספר סופי ולכן מצאנו המרה מ- $\overline{A_{TM}}$ ל- L_7 ולכן $L_7\notin\text{RE}$

רעיון כללי, נקבל קלט x ונריץ את M על w $|x|$ צעדים, ואם הוא קיבל נכנס ללולאה אינסופית עם אינסוף תאים, אחרת אם לא קיבלנו את w בצעדים ההם, נקבל את x. לכן אם המכונה שלנו משתמשת באינסוף תאים, זה אומר ש M קיבל את w, ולכן מצאנו המרה מ- A_{TM} ל- L_7 ולכן $L_7\notin\text{coRE}$

מ.ש.ל.ז.☺

סעיף 8

צ"ל: $NONTRIVIAL_{TM}=\{\langle M\rangle \mid L(M)\neq\emptyset\wedge L(M)\neq\Sigma^*\}\in\overline{\text{RE}\cup\text{coRE}}$

הוכחה:

נשים לב ש- Σ^* היא בת מנייה ולכן קיים סידור של המילים $w_0,w_1,\ldots$

נבנה מכונת עזר $\mathcal{M}^{\langle M\rangle}$ באופן הבא:

1. נקבל קלט w
2. נמצא $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש־ $w_i = w$ (קיים ויימצא בזמן סופי)
3. אם $i = 0$, נקבל
4. אחרת נריץ את M על w_{i-1} ונחזיר כמוהו

נשים לב כי $L\left(\mathcal{M}^{\langle M \rangle}\right) = \{w_0\} \cup \{w_i \mid M \text{ accepts } w_{i-1} \wedge i \in \mathbb{N}\}$ מההגדרה שנקבל את המילה w_0 ואת w_i נקבל אם M קיבל את w_{i-1}.

כלומר $w_0 \in L\left(\mathcal{M}^{\langle M \rangle}\right)$ לכל $\langle M \rangle$ ולכן $\boxed{L\left(\mathcal{M}^{\langle M \rangle}\right) \neq \emptyset}$

נגדיר $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ באופן הבא: $f(\langle M \rangle) = \left\langle \mathcal{M}^{\langle M \rangle} \right\rangle$

$$\begin{aligned}
&\langle M \rangle \in \overline{ALL_{TM}} \iff \exists w \in \Sigma^* \text{ s.t. } M \text{ doesn't accept } w \\
&\iff \exists i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ s.t. } M \text{ doesn't accept } w_i \\
&\iff \exists i \in \mathbb{N} \text{ s.t. } M \text{ doesn't accept } w_{i-1} \\
&\iff \exists i \in \mathbb{N} \text{ s.t. } w_i \notin L\left(\mathcal{M}^{\langle M \rangle}\right) \\
&\overset{w_0 \in L\left(\mathcal{M}^{\langle M \rangle}\right)}{\iff} \exists i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ s.t. } w_i \notin L\left(\mathcal{M}^{\langle M \rangle}\right) \\
&\iff L\left(\mathcal{M}^{\langle M \rangle}\right) \neq \Sigma^* \\
&\overset{L\left(\mathcal{M}^{\langle M \rangle}\right) \neq \emptyset}{\iff} L\left(\mathcal{M}^{\langle M \rangle}\right) \neq \Sigma^* \wedge L\left(\mathcal{M}^{\langle M \rangle}\right) \neq \emptyset \\
&\iff \left\langle \mathcal{M}^{\langle M \rangle} \right\rangle \in NONTRIVIAL_{TM} \iff f\left(\mathcal{M}^{\langle M \rangle}\right) \in NONTRIVIAL_{TM}
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $f\left(\mathcal{M}^{\langle M \rangle}\right) \in NONTRIVIAL_{TM} \iff \langle M \rangle \in \overline{ALL_{TM}}$ וגם f ניתנת לחישוב בגלל שכל מה שליצור את המכונה התוארה לא מסובך על ידי הוספה של קאונטר לזכירה איזו מילה במיון ואז הרצה של M על הw_{i-1} אם צריך.

ולכן קיבלנו כי $\overline{ALL_{TM}} \leq_m NONTRIVIAL_{TM}$ וגם ראינו בתרגול כי $ALL_{TM} \in \overline{\text{RE} \cup \text{coRE}}$ ולכן $\overline{ALL_{TM}} \in \overline{\text{RE} \cup \text{coRE}}$ ולכן ממשפט הרדוקציה נקבל כי $\boxed{NONTRIVIAL_{TM} \in \overline{\text{RE} \cup \text{coRE}}}$

מ.ש.ל.ח.☺

סעיף 9

צ"ל: $L = \{\langle M \rangle \mid \text{there doesn't } \exists w \in \Sigma^* \text{ s.t } M \text{ rejects } w\} \in \text{coRE} \setminus R$

הוכחה:

תחילה נראה ש־ $L \in \text{coRE}$

נשים לב ש־ Σ^* היא בת מנייה ולכן קיים סידור של המילים $w_0, w_1, \ldots$

נבנה את המ"ט $\mathcal{M}$ הבאה:

1. נקבל קלט $\langle M \rangle$
2. לכל $n \in \{1, 2, \ldots\}$:
   (א) לכל המילים $\{w_0, \ldots, w_n\}$, נריץ את M על כל אחת מהן, n צעדים ואם M דחתה אחת מהן, נקבל

נחלק ל־ 2 מקרים:

1. אם $\langle M \rangle \in \overline{L}$, אזי $\exists w \in \Sigma^*$ כך ש־ M עוצרת על w.
   לכן קיים $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש־M עוצרת על w_i.
   נסמן את מספר הצעדים ש־ M רצה על w_i ב־ $n \in \mathbb{N}$ (מספר סופי כי מתישהו מגיעים ל q_{rej})
   נשים לב שבאיטרציה ה־ n כשנריץ את M על w_i, n צעדים אז M תדחה את w_i ולכן $\mathcal{M}$ תקבל את $\langle M \rangle$, כלומר $\langle M \rangle \in L(\mathcal{M})$

2. אם $\langle M\rangle \in L(\mathcal{M})$ אז קיימת איטרציה $n \in \mathbb{N}$ שבו $\mathcal{M}$ הגיעה למצב מקבל.
כלומר כשהרצנו את M על המילים $\{w_0, \ldots, w_n\}$, n צעדים, M דחתה אחת מהן.
נסמן את המילה ש־ M דחתה ב־ w_i, ולכן M דוחה את w_i, כלומר $\langle M\rangle \in \overline{L}$ מההגדרה.

כלומר הראנו ש־ $\langle M\rangle \in \overline{L} \iff \langle M\rangle \in L(\mathcal{M})$, כלומר $\overline{L} \in \mathrm{RE}$, כלומר $\boxed{L \in \mathrm{coRE}}$.
נבנה מ"ט עזר $\mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle, w\rangle}$ באופן הבא:

1. נקבל קלט x
2. נריץ את M על w
3. נדחה (נשים לב שאם הגענו לפה אז M עצר על w)

עתה נגדיר $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ באופן הבא: $f(\langle\langle M\rangle, w\rangle) = \left\langle \mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle, w\rangle} \right\rangle$
עתה נשים לב כי אין תלות בקלט של x,
אז או שנדחה כל x אם M עוצרת על w או שנתקע בלולאה אינסופית על כל x אם M לא עוצרת על w
ולכן

$$\begin{aligned}
\langle\langle M\rangle, w\rangle \in \overline{HALT_{TM}} &\iff M \text{ doesn't halt } w \iff \forall x \in \Sigma^* \to \mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle, w\rangle} \text{ doesn't reject x} \\
&\iff \text{there doesn't } \exists x \in \Sigma^* \text{ s.t } \mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle, w\rangle} \text{ rejects } x \iff \mathcal{M}^{\langle\langle M\rangle, w\rangle} \in L \\
&\iff f(\langle\langle M\rangle, w\rangle) \in L
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $f(\langle\langle M\rangle, w\rangle) \in L \iff \langle\langle M\rangle, w\rangle \in \overline{HALT_{TM}}$ וגם נשים לב ש־ f חשיבה כי היא רק יוצרת מכונה שמריצה את M על w (ניתן לדוגמא על ידי מכונה אוניברסלית לדוגמא)
ולכן $\overline{HALT_{TM}} \leq_m L$ וגם ראינו בהרצאה כי $HALT_{TM} \notin \mathrm{coRE}$ ולכן $\overline{HALT_{TM}} \notin \mathrm{RE}$ ולכן ממשפט הרדוקציה נקבל כי $\boxed{L \notin \mathrm{RE}}$.

כלומר קיבלנו כי $L \in \mathrm{coRE}$ וגם $L \notin \mathrm{RE}$ ולכן $\boxed{L \in \mathrm{coRE} \setminus R}$

מ.ש.ל.ט.☺