אינפי 2 - סמסטר א' תשע"ט
תרגיל בית 4

להגשה עד יום שישי, 23 בנובמבר, בשעה 10:00 בבוקר, דרך תיבת ההגשה במודל

1. (א) חשבו את האינטגרל הלא־מסוים $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ (כלומר, מצאו פונקציה קדומה). **רמז:** בעזרת אחת מהצורות של אינטגרציה בהצבה, החליפו את $1+e^x$ בביטוי פשוט ככל האפשר.
   (ב) קבעו האם $\int_0^\infty \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ מתכנס. אם כן, חשבו את ערכו.

2. יהי $\alpha > 0$ ממשי. מצאו מספרים ממשיים C, β (אשר יכולים להיות תלויים ב - α) כך ש - $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{C\cdot n^\beta} = 1$.

3. (א) גזרו את הפונקציה $A(y) = \int_0^y (\cos(t))^{100}\,dt$.
   (ב) גזרו את הפונקציה $B(x) = \int_0^{e^x} (\cos(t))^{100}\,dt$ (**רמז:** היעזרו בסעיף הקודם).
   (ג) גזרו את הפונקציה $C(x) = \int_{x^2}^0 (\cos(t))^{100}\,dt$ (**רמז:** כתבו $C(x) = -\int_0^{x^2} (\cos(t))^{100}\,dt$, ואז חקו את הרעיון של שני הסעיפים הקודמים).
   (ד) גזרו את הפונקציה $D(x) = \int_{x^2}^{e^x} (\cos(t))^{100}\,dt$ (**רמז:** היעזרו בסעיפים ב,ג).
   (ה) גזרו את הפונקציה $E(x) = \int_x^{x^2} e^{t\cdot\sin(t)}dt$ (**רמז:** חקו את הרעיון מאחורי ארבעת הסעיפים הקודמים).

4. **בונוס:** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה. נניח ש - f אינטגרבילית ב - $[a+\epsilon,b]$ לכל $0<\epsilon<b-a$. הוכיחו ש - f אינטגרבילית ב - $[a,b]$, ומתקיים $\int_a^b f = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^b f$.

5. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. נגדיר $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ על־ידי $F(x) = \int_a^x f$. נדון בשאלה: "באלו נקודות F גזירה?". היזכרו במשפט 6.4 (סיכום הרצאה 6). תהי $x_0 \in [a,b]$.
   (א) הוכיחו שאם f רציפה ב - x_0, אז F גזירה ב - x_0, וחשבו את $F'(x_0)$ (התשובה קצרה מאוד בהינתן מה שלמדנו).
   (ב) הוכיחו שאם x_0 נקודת אי־רציפות סליקה של f, אז F גזירה ב - x_0.
   (ג) הוכיחו שאם x_0 נקודת אי־רציפות מסוג ראשון של f, אז F לא גזירה ב - x_0 (רמז: מצאו דרך להשתמש במשפט 6.4 כדי לחשב את הנגזרות החד־צדדיות של F ב - x_0).
   (ד) נגדיר $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ על־ידי $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ לכל $n\in\mathbb{N}$, ו- $f(x)=3$ לכל $x\in[-1,1]\setminus\left\{\pm\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$.
      i. הוכיחו ש - $x_0 = 0$ היא נקודת אי־רציפות מסוג שני של f.
      ii. הוכיחו שלכל $0<\epsilon<1$, הפונקציה f אינטגרבילית ב - $[\epsilon,1]$ וב - $[-1,-\epsilon]$ (**רמז:** משפט 4.3). חשבו את $\int_\epsilon^1 f$ ו - $\int_{-1}^{-\epsilon} f$.
      iii. היעזרו בשאלה קודמת מהתרגיל הנוכחי כדי להוכיח ש - f אינטגרבילית ב - $[-1,1]$.
      iv. נגדיר $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ על־ידי $F(x) = \int_{-1}^x f$. תנו נוסחה מפורשת עבור $F(x)$, והוכיחו ש - F גזירה ב - $x_0 = 0$.
   (ה) האם יש פונקציה אינטגרבילית $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ בעלת נקודת אי־רציפות מסוג שני ב - $x_0 = 0$ כך הפונקציה $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ לא גזירה ב - $x_0 = 0$? (כאשר $F(x) = \int_{-1}^x f$).