פתרון תרגיל מספר 1 ־ פתרון רשתות תקשורת

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

23 בנובמבר 2020

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(\text{C successfully sent message}\right)$

הוכחה:

נסמן ב־ A את המאורע שההודעה של C נשלחה ברשת מלמעלה בהצלחה, נסמן ב־ B את המאורע שההודעה של C ברשת מלמטה בהצלחה.
נשים לב כי

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \underbrace{p}_{\text{C decided to send a message}} \cdot \underbrace{\left(1-q\right)^{n}}_{\text{all } n \text{ X ends points didn't send packets slotted ALOHA}}$$

$$\mathbb{P}\left(B\right) = \underbrace{p}_{\text{C decided to send a message}} \cdot \underbrace{\left[\left(1-q\right)^{2}\right]^{m}}_{\text{all } m \text{ X ends points didn't send packets in pure ALOHA}} = \left(1-q\right)^{2m}$$

נשים לב כי A,B הם מאורעות בלתי תלויים ולכן

$$\mathbb{P}\left(\text{C successfully sent message}\right) = \mathbb{P}\left(A\cup B\right) = \mathbb{P}\left(A\right)+\mathbb{P}\left(B\right)-\mathbb{P}\left(A\cap B\right)$$
$$= p\cdot\left(1-q\right)^{n}+p\cdot\left(1-q\right)^{2m}-\mathbb{P}\left(A\cap B\right) \overset{\text{independent events}}{=} p\cdot\left(1-q\right)^{n}+p\cdot\left(1-q\right)^{2m}-\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)$$
$$= p\cdot\left(1-q\right)^{n}+p\cdot\left(1-q\right)^{2m}-p\cdot\left(1-q\right)^{n}\cdot p\cdot\left(1-q\right)^{2m} = p\cdot\left(1-q\right)^{n}+p\cdot\left(1-q\right)^{2m}-p^{2}\cdot\left(1-q\right)^{n+2m}$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\mathbb{P}\left(\text{C successfully sent message}\right) = p\cdot\left(1-q\right)^{n}+p\cdot\left(1-q\right)^{2m}-p^{2}\cdot\left(1-q\right)^{n+2m}}$, כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** goodput של הרשת העליונה והתחתונה.

הוכחה:

נסמן ב־ A_1 את המאורע ש־ C בחר לשלוח הודעה ושלח אותה בהצלחה ברשת העליונה, ב־ A_2 את המאורע ש־ C בחר לשלוח הודעה ושלח אותה בהצלחה ברשת התחתונה, נסמן ב־ B_1 את המאורע שאחד מה־ X שלח הודעה בהצלחה ברשת העליונה, נסמן ב־ B_2 את המאורע שאחד מה־ X שלח הודעה בהצלחה ברשת התחתונה.
נשים לב ש־ A_1 ו־ B_1 הם מאורעות זרים כי אם C שלח הודעה בהצלחה אז אף אחד מה־ X לא שלח בהצלחה הודעה והפוך. ולכן $\mathbb{P}\left(A_1\cup B_1\right)=\mathbb{P}\left(A_1\right)+\mathbb{P}\left(B_1\right)$, באופן דומה $\mathbb{P}\left(A_2\cup B_2\right)=\mathbb{P}\left(A_2\right)+\mathbb{P}\left(B_2\right)$.

נשים לב כי

$$\mathbb{P}(A_1) = \underbrace{p}_{\text{C sent message}} \cdot \underbrace{(1-q)^n}_{\text{all } n \text{ X ends points didn't send packets in slotted ALOHA}}$$

$$\mathbb{P}(A_2) = \underbrace{p}_{\text{C sent message}} \cdot \underbrace{\left[(1-q)^2\right]^m}_{\text{all } m \text{ X ends points didn't send packets in pure ALOHA}}$$

$$\mathbb{P}(B_1) = \binom{n}{1} \cdot \underbrace{q}_{\text{X sent message}} \cdot \underbrace{(1-q)^{n-1}}_{\text{all other } n-1 \text{ X ends points didn't send packets in slotted ALOHA}} \cdot \underbrace{(1-p)}_{\text{C didn't send message}}$$

$$\mathbb{P}(B_2) = \binom{m}{1} \cdot \underbrace{q}_{\text{X sent message}} \cdot \underbrace{\left[(1-q)^2\right]^{m-1}}_{\text{all other } m-1 \text{ X ends points didn't send packets in slotted ALOHA}} \cdot \underbrace{(1-p)^2}_{\text{C didn't send message}}$$

לכן נקבל כי

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{someone sent a message successfully thorugh the top network}) &= \mathbb{P}(A_1 \cup B_1) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_1) \\ &= p \cdot (1-q)^n + n \cdot q \cdot (1-q)^{n-1} \cdot (1-p)\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{someone sent a message successfully thorugh the bottom network}) &= \mathbb{P}(A \cup B_2) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B_2) \\ &= p \cdot (1-q)^{2m} + m \cdot q \cdot (1-q)^{2m-2} \cdot (1-p)^2\end{aligned}$$

כלומר חישבנו שה־ goodput של הרשת העליונה הוא $p \cdot (1-q)^n + n \cdot q \cdot (1-q)^{n-1} \cdot (1-p)$,
ושה־ goodput של הרשת התחתונה הוא $p \cdot (1-q)^{2m} + m \cdot q \cdot (1-q)^{2m-2} \cdot (1-p)^2$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** סיכוי הצלחה של C לשלוח הודעה לראשונה בזמן ה־ k
הוכחה:
נסמן ב־ X משתנה מקרי שסופר מתי C לראשונה הצליח לשלוח הודעה.
נסמן $m = p \cdot (1-q)^n$,
בסעיף הקודם חישבנו שסיכוי ההצלחה של C לשלוח הודעה הוא בדיוק m ואין תלות בין ניסיון לניסיון.
לכן $X \sim Geo(m)$, ולכן

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-m)^{k-1} \cdot m = (1 - [p \cdot (1-q)^n])^{k-1} \cdot p \cdot (1-q)^n$$

אז קיבלנו כי סיכוי הצלחה של C לשלוח הודעה לראשונה בזמן ה־ k הוא בדיוק

$$(1-m)^{k-1} \cdot m = (1 - [p \cdot (1-q)^n])^{k-1} \cdot p \cdot (1-q)^n$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** תוחלת סיכוי הצלחה של C לשלוח הודעה לראשונה
הוכחה:
נסמן $m = p \cdot (1-q)^n$, נסמן ב־ X משתנה מקרי כמו בסעיף הקודם ולכן לפי הסעיף הקודם $X \sim Geo(m)$.
לכן

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{m} = \frac{1}{p \cdot (1-q)^n}$$

כלומר קיבלנו כי תוחלת סיכוי הצלחה של C לשלוח הודעה לראשונה הוא בדיוק $\frac{1}{p \cdot (1-q)^n}$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** **goodput** של הרשת העליונה
הוכחה:
נסמן $m = p \cdot (1-q)^n + n \cdot q \cdot (1-q)^{n-1} \cdot (1-p)$,
ראינו בסעיף ב' כי מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\text{someone sent a message successfully thorugh the top network}\right) = m$$

נשים לב שאם ברשת נשלחה הודעה שלוקחת זמן T אז

$$(\text{goodput}|\text{time}{=}\,T) = \frac{\text{number successfully used slots}}{\text{number of slots}} = \mathbb{P}\left(\text{someone sent a message successfully thorugh the top network}\right) = m$$

נשים לב שאם ברשת נשלחה הודעה שלוקחת זמן $\frac{T}{3}$ אז בכל סלוט שניצלנו, ניצלנו רק שליש ממנו, ולכן

$$\left(\text{goodput}|\text{time}{=}\frac{T}{3}\right) = \frac{\frac{\text{number successfully used slots}}{3}}{\text{number of slots}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\text{number successfully used slots}}{\text{number of slots}}$$
$$= \frac{1}{3}\mathbb{P}\left(\text{someone sent a message successfully thorugh the top network}\right) = \frac{1}{3} \cdot m$$

עתה נחשב את ה־ goodput הכולל

$$\begin{aligned}\text{goodput} &= (\text{goodput}|\text{time}{=}\,T) \cdot \mathbb{P}\left(\text{the packet took T time to send}\right) \\ &\quad + \left(\text{goodput}|\text{time}{=}\frac{T}{3}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\text{the packet took } \frac{T}{3} \text{ time to send}\right) \\ &= m \cdot r + \frac{m}{3} \cdot (1-r) = m \cdot \left(r + \frac{1-r}{3}\right) = m \cdot \left(\frac{2r+1}{3}\right) = \left[p \cdot (1-q)^n + n \cdot q \cdot (1-q)^{n-1} \cdot (1-p)\right] \cdot \left(\frac{2r+1}{3}\right)\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\text{goodput} = \left[p \cdot (1-q)^n + n \cdot q \cdot (1-q)^{n-1} \cdot (1-p)\right] \cdot \left(\frac{2r+1}{3}\right)}$

מ.ש.ל.ה.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(\text{success}\right)$
הוכחה:
נשים לב כי

$$\mathbb{P}\left(\text{success}\right) = \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{\text{choose who sends packets}} \cdot \underbrace{p^{n-1}}_{\text{all chosen } n-1 \text{ X ends points sent packet}} \cdot \underbrace{(1-p)}_{\text{the unchosen X didn't send packet}}$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\mathbb{P}\left(\text{success}\right) = \binom{n}{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot (1-p) = n \cdot (1-p) \cdot p^{n-1}}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\text{argmax}_p \mathbb{P}\left(\text{success}\right)$
הוכחה:
בתרגול ראינו כי המקסימום של $n \cdot q \cdot (1-q)^{n-1}$ מתקבל ב־ $q = \frac{1}{n}$ ושסיכוי זה שואף באינסוף ל־ $\frac{1}{e}$.
בעקבות אבחנה זאת, נסמן $q = 1-p$, ונשים לב כי

$$\mathbb{P}\left(\text{success}\right) = n \cdot (1-p) \cdot p^{n-1} = n \cdot q \cdot (1-q)^{n-1}$$

עתה לפי הנאמר בתרגול, נקבל כי המקסימום יתקבל כש־ $q = \frac{1}{n}$, כלומר המקסימום יתקבל ב־ $1 - p = q = \frac{1}{n} \Rightarrow$
$\boxed{p = 1 - \frac{1}{n}}$.

ולכן $\boxed{\text{argmax}_p \mathbb{P}\left(\text{success}\right) = 1 - \frac{1}{n}}$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** goodput
הוכחה:
נציב את מה שמצאנו בסעיף הקודם ש־ $p = 1 - \frac{1}{n}$ ונקבל כי

$$\text{goodput} = \mathbb{P}\left(\text{success}\right) = n \cdot (1 - p) \cdot p^{n-1} = n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{e}$$

כלומר ה־ goodput שואף ל־ $\frac{1}{e}$ בדיוק כמו SLOTED ALOHA
הערה: עקרונית הגדרת ההצלחה החדשה שקולה להצלחה ב־ SLOTED ALOHA מקורי עם הסתברות $1 - p$ וממקסום של זה נצפה לקבל אותו ערך.

מ.ש.ל.ג.☺

3. **צ"ל:** מתי משתלם לשלוח $2d - parity$
הוכחה:
תחילה נחשב את התקורה שנוצרת מ־ $2d - parity$, אנחנו יודעים שהגודל של שליחת פקטה $n = i \cdot j$ היא $i \cdot j + i + j + 1$,
נרצה למזערו.
במילים אחרת

$$\max_{i,j \in \mathbb{N} \text{ s.t. } i \cdot j + i + j + 1 \leq 64} i \cdot j$$

נשים לב שהמקסימום מתקבל עבור $i \cdot j = 49$ כאשר $i = j = 7$, כלומר בכל פקטה שנשלח בסלוט נשלח 49 ביטים של מידע ו־ $7 + 7 + 1 = 15$ ביטים של תיקון המידע. ואם תהיה שגיאה בביט אחד, נוכל למצוא אותה ולתקנה בלי לשלוח עוד פקטה.
נשים לב שבפרוטוקול ללא $2d - parity$ אנחנו שולחים 64 ביטים של מידע בהסתברות הצלחה $1 - q$, ולכן נצא שבממוצע בסלוט נעביר $64 \cdot (1 - q)$ ביטים של מידע.
נרצה לדעת מתי $2d - parity$ עדיף, כלומר מתי 49 ביטים בכל סלוט עדיף מ־ $64 \cdot (1 - q)$, נחשב

$$(1 - q) \cdot 64 \leq 49 \iff 1 - q \leq \frac{49}{64} \iff 1 - \frac{49}{64} \leq q \iff \boxed{\frac{15}{64} \leq q}$$

כלומר קיבלנו שמשתלם לנו לשלוח $2d - parity$ כאשר $\boxed{q \geq \frac{15}{64}}$

מ.ש.ל.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** גודל פאקטה מינימלי
הוכחה:
נסמן ב־ p את גודל הפאקטה.
נשים לב שהמרחק הכי גדול ברשת והוא בין A ל־ C שזה $10Km$.
נחשב

$$\tau = \frac{\text{max distance}}{\text{propagation speed}} = \frac{10Km}{6 \cdot 10^7 \frac{m}{s}} = \frac{10 \cdot 1000m}{6 \cdot 10^7 \frac{m}{s}} = \frac{1}{6 \cdot 10^3} s$$

נשים לב ש־ τ מייצג את כמות הזמן שלוקח לביט לעבור את המרחק הכי גדול ברשת, כלומר $\tau = T_{prop}$.
בשביל שהפרוטוקול יעבוד צריך שזמן התעבורה של p יהיה גדול או שווה מ־ $2 \cdot T_{prop}$, ולכן נקבל כי

$$\frac{p}{\text{bandwidth}} \geq 2 \cdot T_{prop} \implies \frac{p}{3 \cdot 10^6 \frac{b}{s}} = \frac{p}{3mbps} \geq 2 \cdot \frac{1}{6 \cdot 10^3} s \implies p \geq \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^3} b = 1000b$$

כלומר קיבלנו שהדרישה היא $\boxed{p \geq 1000b}$, כלומר הגודל המינימלי לפאקטה הוא 1000 ביטים.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** גודל פאקטה מינימלי
הוכחה:
נשים לב שהמרחק המקסימלי לא ישתנה מהסעיף הקודם, ולכן כל החישובים יישארו זהים וגודל הפאקטה המינימלי יישאר 1000 ביטים.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** גודל פאקטה מינימלי
הוכחה:
נסמן ב־ p את גודל הפאקטה.
נשים לב שהמרחק הכי גדול ברשת והוא בין A ל־ D שזה $30Km$.
נחשב

$$\tau = \frac{\text{max distance}}{\text{propagation speed}} = \frac{30Km}{6 \cdot 10^7 \frac{m}{s}} = \frac{30 \cdot 1000m}{6 \cdot 10^7 \frac{m}{s}} = \frac{1}{2 \cdot 10^3} s$$

נשים לב ש־ τ מייצג את כמות הזמן שלוקח לביט לעבור את המרחק הכי גדול ברשת, כלומר $\tau = T_{prop}$.
בשביל שהפרוטוקול יעבוד צריך שזמן התעבורה של p יהיה גדול או שווה מ־ $2 \cdot T_{prop}$, ולכן נקבל כי

$$\frac{p}{\text{bandwidth}} \geq 2 \cdot T_{prop} \implies \frac{p}{3 \cdot 10^6 \frac{b}{s}} = \frac{p}{3mbps} \geq 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^3} s \implies p \geq \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^3} b = 3000b$$

כלומר קיבלנו שהדרישה היא $\boxed{p \geq 3000b}$, כלומר הגודל המינימלי לפאקטה הוא 3000 ביטים.

מ.ש.ל.ג.☺

5. **צ"ל:** ההסתברות ש־ A יצליח לשלוח לפני B
הוכחה:
נסמן ב־ X_A משתנה מקרי ששומר את ההגרלה של A לאחר ההתנגשות עם B בפקטה השנייה, וב־ X_B משתנה מקרי ששומר את ההגרלה של B לאחר ההתנגשות עם הפקטה החדשה של A,
נשים לב כי A חווה התנגשות אחת ולכן יגריל מספר בין $\left\{0, \ldots, 2^1 - 1\right\}$ ו־ B חווה 2 התנגשויות ולכן יגריל מספר בין $\left\{0, \ldots, 2^{2-1} - 1\right\}$.
נשים לב כי

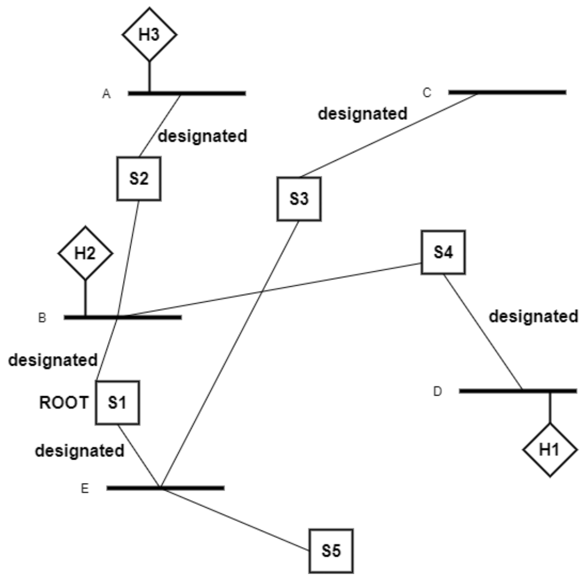
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\text{A sends before B}\right) &= \mathbb{P}\left(X_A < X_b\right) = \mathbb{P}\left(\left(X_A = 0 \cap X_B = \{1,2,3\}\right) \cup \left(X_A = 1 \cap X_B = \{2,3\}\right)\right) \\
&\overset{\text{disjointed events}}{=} \mathbb{P}\left(X_A = 0 \cap X_B = \{1,2,3\}\right) + \mathbb{P}\left(X_A = 1 \cap X_B = \{2,3\}\right) \\
&\overset{\text{independent events}}{=} \mathbb{P}\left(X_A = 0\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_B = \{1,2,3\}\right) + \mathbb{P}\left(X_A = 1\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_B = \{2,3\}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{5}{4}\right] = \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

כלומר ההסתברות ש־ A ישלח לפני B מייד לאחר ההתנגשות היא $\frac{5}{8}$.

מ.ש.ל.☺

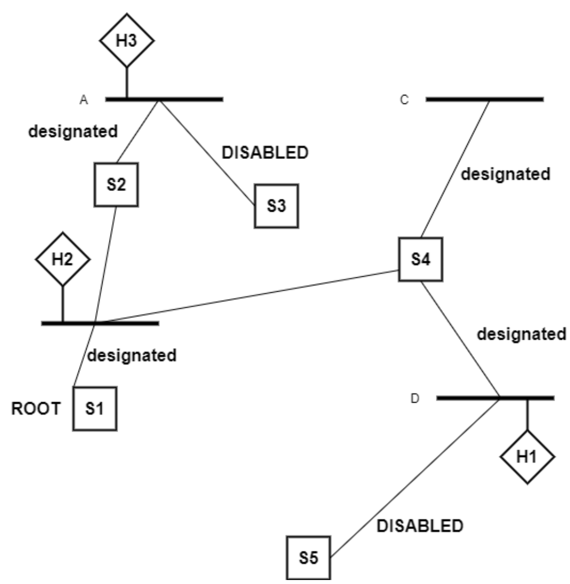
6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** איך נראה הגרף
הוכחה:
תחילה נשים לב שלפי הפרוטוקול S_1 אמור להיות השורש,
עתה נריץ את בלמן פורד ונמצא את העץ הפורש של ה־ $Switches$,
ובסוף נשאיר רק את החיבורים שהם או מכוונים לשורש או $designated$ ונקבל



מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** איך נראה הגרף
הוכחה:
תחילה נשים לב שלפי הפרוטוקול S_1 אמור להיות השורש,
עתה נריץ את בלמן פורד ונמצא את העץ הפורש של ה־ $Switches$,
ובסוף נשאיר רק את החיבורים שהם או מכוונים לשורש או $designated$ ונקבל



הערה: נשאיר ב־ $disabled$ חיבורים של $SWITCH$ים שלא מעבירים מידע בגרף אבל מהווים תזכורת שהרשת היא דינאמית ואם משהו ישתנה עדיין אפשר לשנות את המצב של ה־ $SWITCH$ים גם אלה שכרגע לא אמורים להעביר מידע.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **פתרון:** הערה: לאורך כל השאלה אני אניח שה Ethernet המקומי ששולח את ההודעה גם שומע אותה בגלל שיש end user ששולח את ההודעה וה broadcast domain שלו מעביר אותו תמיד בחיבור שלו.

i. **צ"ל:** מי ישמע את ההודעה

הוכחה:

בהתחלה אף $SWITCH$ לא יודע איפה H_3 (מהנתון שהטבלאות ריקות) אז כולם יעשו $flood$ וההודעה תשמע בכל ה־ Ethernet המקומיים כלומר תשמע ב־ A, B, C, D

מ.ש.ל.ג.1.☺

ii. **צ"ל:** מי ישמע את ההודעה

הוכחה:

אף $SWITCH$ עדיין לא יודע איפה H_3 (מהסעיף הקודם הם רק יודעים איפה H_1) אז כולם יעשו $flood$ וההודעה תשמע בכל ה־ Ethernet המקומיים, כלומר תשמע ב־ A, B, C, D

מ.ש.ל.ג.2.☺

iii. **צ"ל:** מי ישמע את ההודעה

הוכחה:

אף $SWITCH$ עדיין לא יודע איפה H_3 (מהסעיף הקודם הם רק יודעים איפה H_1) אז כולם יעשו $flood$ וההודעה תשמע בכל ה־ Ethernet המקומיים, כלומר תשמע ב־ A, B, C, D

מ.ש.ל.ג.3.☺

iv. **צ"ל:** מי ישמע את ההודעה

הוכחה:

הפעם זה תלוי בכמה זמן לקח להודעה להשלח, כלומר האם ה$SWITCH$ים כבר מחקו את הרשומה של H_1 מהטבלה או לא, אז נחלק למקרים.

א'. אם ה־ $SWITCH$ים כבר מחקו את הרשומה של H_1 מהטבלה: הם לא יודעים איפה H_1 אז יעשה $flood$ וההודעה תשמע בכל ה־ Ethernet המקומיים, כלומר תשמע ב־ A, B, C, D

ב'. אחרת: כל $SWITCH$ יודע למי להעביר לפי הגרף המצויר בסעיף ב' כדי להעביר את ההודעה ל־ H_1, והיא תשמע רק במסלול הזה. במסלול הזה נמצאים ה־ Ethernet המקומיים של A, B, D.

מ.ש.ל.ג.4.☺