אינפי 2 - סמסטר א' תשע"ט
תרגיל בית 13

להגשה עד יום חמישי, 27 בינואר, בשעה 23:45, דרך תיבת ההגשה במודל

1. עבור כל אחת מבין הפונקציות: $f(x)=\sin^2(x)$ ו- $f(x)=\log(1+\sin(x))$, פתחו את f לטור חזקות סביב 0. כלומר, מצאו טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ המתכנס לפונקציה f באיזשהו קטע $(-\delta,\delta)$ עם $0<\delta$. כתבו את δ במפורש (לאו דווקא δ הגדול ביותר האפשרי).

2. יהי $\delta>0$ ותהי $f:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על-ידי טור חזקות $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$ (משתמע מכך שאנחנו מניחים שרדיוס ההתכנסות של הטור הוא לפחות δ). הוכיחו שאם $f(0)=0$, אז מתקיים בדיוק אחד מהתנאים הבאים:
   (א) $a_n=0$ לכל $n\geq 0$.
   (ב) קיים $0<\delta_0\leq\delta$ כך שלכל $x\in(-\delta_0,\delta_0)\setminus\{0\}$ מתקיים $f(x)\neq 0$.

הדרכה: נניח שלא מתקיים תנאי (א). הוכיחו ש- $f(x)=A\cdot x^k\cdot(1+h(x))$ כאשר $0\neq A\in\mathbb{R}$, $k\geq 1$ שלם, ו- $h:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $h(0)=0$. הסיקו מכך שתנאי (ב) מתקיים.

3. יהי $\delta>0$ ויהיו $f_1:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$ ו- $f_2:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$ פונקציות המוגדרות על-ידי טורי חזקות $f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$ ו- $f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cdot x^n$.
   (א) תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים ממשיים ב- $(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. נניח ש- $f_1(x_n)=f_2(x_n)$ לכל $n\geq 1$. הוכיחו ש- $a_n=b_n$ לכל $n\geq 0$.
   רמז: היעזרו בשאלה 2.
   (ב) יהי $0<\delta_0\leq\delta$. נניח ש- $f_1(x)=f_2(x)$ לכל $x\in(-\delta_0,\delta_0)$. הסיקו מהסעיף הקודם ש- $a_n=b_n$ לכל $n\geq 0$.
   הערה: את סעיף ב' ראיתם כבר בשיעור עם הוכחה אחרת. סעיף א' דורש פחות מאשר סעיף ב' ונותן את אותה המסקנה. בסעיף ב', עליכם להראות שהתנאי בסעיף ב' מאפשר להשתמש בסעיף א'.

4. (א) האם קיימת סדרה שקבוצת הגבולות החלקיים שלה שווה ל-$\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$? נמקו את תשובתכם.
   (ב) **לא להגשה:** האם קיימת סדרה שקבוצת הגבולות החלקיים שלה שווה ל-$\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$?

5. בכל סעיף, נתונה סדרה חסומה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. נסמן: $u_k=\sup\{a_n\,|\,n\geqslant k\}$, $d_k=\inf\{a_n\,|\,n\geqslant k\}$. כתבו בכל סעיף נוסחה מפורשת ל- u_k ו- d_k והשתמשו בהן על מנת לחשב את הגבול העליון והתחתון של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
   (א) $a_n=(-1)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
   (ב) $a_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$.

6. (א) **לא להגשה (משפט מאינפי 1, ראו למה 5.4.12 בספר של הוכמן):** תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים חיוביים כך ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$ כאשר L הוא מספר ממשי או ∞. הוכיחו ש- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$.
   (ב) **נוסחת ד'אלמבר לרדיוס ההתכנסות:** נתון $x_0\in\mathbb{R}$ ונתונה סדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ כך ש- $a_n\neq 0$ לכל n . נניח שקיים הגבול (במובן הרחב) : $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=L$. הוכיחו כי רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ הינו $R=\frac{1}{L}$ (כאשר מוסכם בהקשר זה כי $\frac{1}{0}=\infty$ וכן $\frac{1}{\infty}=0$).