# פתרון תרגיל מספר 9 - חישוביות וסיבוכיות

**שם:** מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

6 ביוני 2020

## שאלה 1

**סעיף 1**

**צ"ל:** $\overline{L} \in P$

**הוכחה:**

מהיות $L \in P$ קיימת מ"ט $\mathcal{M}$ דטרמינסטית שמכריעה את $L$ בזמן פולינומי.
מהיות $\mathcal{M}$ רצה בזמן פולינומי קיים פולינום $t(n)$ כך שזמן הריצה של $\mathcal{M}$ חסום על ידי $O(t(n))$.
נבנה $M$ דטרמינסטית באופן הבא:

1. נקבל קלט $x$
2. נריץ את $\mathcal{M}$ על $x$
3. נענה הפוך ממה ש- $\mathcal{M}$ ענה על $x$

תחילה נשים לב ש- $M$ מכריעה כי $\mathcal{M}$ מכריעה וגם מתקיים

$$x \in \overline{L} \iff x \notin L \iff x \notin L(\mathcal{M}) \iff x \in L(M)$$

ולכן מתקיים $\boxed{\overline{L} = L(M)}$
נסמן $n = |x|$,
נשים לב ששלב 1 לוקח $O(1)$, שלב 2 לוקח $O(t(n))$ ושלב 3 לוקח $O(1)$ ולכן זמן הריצה של $M$ הוא

$$O(1) + O(t(n)) + O(1) = O(t(n))$$

כלומר זמן הריצה של $M$ חסום על ידי $O(t(n))$ ו- $t(n)$ פולינומי ולכן $M$ רצה בזמן פולינומי.
כלומר הראנו שקיימת $M$ דטרמניסטית שמכריעה את $\overline{L}$ וגם $M$ רצה בזמן פולינומי.
ולכן $\overline{L} \in P$ מההגדרה, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

**סעיף 2**

**צ"ל:** $L_1 \cap L_2 \in \mathrm{NP}$ (שיניתי שמות כדי שיהיה יותר קל)

**הוכחה:**

מהיות $L_1 \in \mathrm{NP}$ קיימת מ"ט $\mathcal{M}_1$ לא דטרמינסטית שמכריעה את $L_1$ בזמן פולינומי.
מהיות $\mathcal{M}_1$ רצה בזמן פולינומי קיים פולינום $t_1(n)$ כך שזמן הריצה של $\mathcal{M}_1$ חסום על ידי $O(t_1(n))$.
מהיות $L_2 \in \mathrm{NP}$ קיימת מ"ט $\mathcal{M}_2$ לא דטרמינסטית שמכריעה את $L_2$ בזמן פולינומי.
מהיות $\mathcal{M}_2$ רצה בזמן פולינומי קיים פולינום $t_2(n)$ כך שזמן הריצה של $\mathcal{M}_2$ חסום על ידי $O(t_2(n))$.
נבנה $M$ דטרמינסטית באופן הבא:

1. נקבל קלט $x$

2. נשמור את $x$ בסרט שני

3. נריץ את $\mathcal{M}_1$ על $x$

4. אם $\mathcal{M}_1$ דוחה את $x$, נדחה

5. ננקה את תוכן הסרט שנכתב על ידי $\mathcal{M}_2$

6. נכתוב את $x$ על הסרט הראשון

7. נריץ את $\mathcal{M}_2$ על הסרט הראשון

8. נענה כמו $\mathcal{M}_2$ על $x$

תחילה נשים לב ש- $M$ מכריעה כי $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ מכריעות (עוצרות בכל ריצה).
וגם נשים לב ש- $M$ מקבל אס"ם $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ קיבלו את $x$ ולכן

$$\begin{aligned} & x \in L_1 \wedge L_2 \iff x \in L_1 \wedge x \in L_2 \iff x \in L(\mathcal{M}_1) \wedge x \in L(\mathcal{M}_2) \\ & \iff \text{exists an accepting run of } \mathcal{M}_1 \text{ on } x \wedge \text{exists an accepting run of } \mathcal{M}_2 \text{ on } x \\ & \iff \text{exists an accepting run of } M \text{ on } x \iff x \in L(M) \end{aligned}$$

ולכן מתקיים $\boxed{L_1 \cap L_2 = L(M)}$
נסמן $|x| = n$,
נשים לב ששלב 1 לוקח $O(1)$, שלב 2 לוקח $O(|x|)$, שלב 3 לוקח $O(t_1(n))$, שלב 4 לוקח $O(1)$, שלב 5 לוקח לכל היותר $O(t_1(n))$ בגלל שהוא עשה לכל היותר $O(t_1(n))$ פעולות, שלב 6 לוקח $O(|x|)$, שלב 7 לוקח $O(t_2(n))$ ושלב 8 לוקח $O(1)$ ולכן זמן הריצה של $M$ הוא

$$\begin{aligned} & O(1) + O(|x|) + O(t_1(n)) + O(t_1(n)) + O(1) + O(|x|) + O(t_2(n)) + O(1) \\ = & O(|x| + t_1(n) + t_2(n)) \end{aligned}$$

כלומר זמן הריצה של $M$ חסום על ידי $O(|x| + t_1(n) + t_2(n))$ ולכן מהיות $|x|, t_1(n), t_2(n)$ פולינומיים, סכומם פולינומי ולכן $M$ רצה בזמן פולינומי.
כלומר הראנו שקיימת $M$ לא דטרמיניסטית שמכריעה את $L_1 \cap L_2$ וגם $M$ רצה בזמן פולינומי.
ולכן $L_1 \cap L_2 \in \mathrm{NP}$ מההגדרה, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

**סעיף 3**
**צ"ל:** $L_1 \cdot L_2 \in P$
**הוכחה:**
מהיות $L_1 \in P$ קיימת מ"ט $\mathcal{M}_1$ דטרמינסטית שמכריעה את $L_1$ בזמן פולינומי.
מהיות $\mathcal{M}_1$ רצה בזמן פולינומי קיים פולינום $t_1(n)$ כך שזמן הריצה של $\mathcal{M}_1$ חסום על ידי $O(t_1(n))$.
מהיות $L_2 \in P$ קיימת מ"ט $\mathcal{M}_2$ דטרמינסטית שמכריעה את $L_2$ בזמן פולינומי.
מהיות $\mathcal{M}_2$ רצה בזמן פולינומי קיים פולינום $t_2(n)$ כך שזמן הריצה של $\mathcal{M}_2$ חסום על ידי $O(t_2(n))$.
נבנה $M$ דטרמינסטית באופן הבא:

1. נקבל קלט $x$

2. לכל $i \in [|x|]$:

   (א) נחשב את $x = u \cdot v$ כאשר $|u| = i$, נכתוב את $u$ בסרט שני

   (ב) נריץ את $\mathcal{M}_1$ על $u$ בסרט השני

   (ג) נכתוב את $v$ בסרט השלישי

(ד) נריץ את $\mathcal{M}_2$ על $v$ בסרט השלישי

(ה) אם $\mathcal{M}_1$ קיבל את $u$ וגם $\mathcal{M}_2$ קיבל את $v$, נקבל

3. נדחה

תחילה נשים לב ש־ $M$ מכריעה כי $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ מכריעות.
וגם נשים לב ש־ $M$ מקבל קיים $i$ עבורו $\mathcal{M}_1$ מקבל את $u$ וגם $\mathcal{M}_2$ מקבל את $v$, כלומר

$$\begin{aligned}
& x \in L_1 \cdot L_2 \iff x = u \cdot v \text{ s.t. } u \in L_1 \wedge v \in L_2 \iff x = u \cdot v \text{ s.t. } u \in L(\mathcal{M}_1) \wedge v \in L(\mathcal{M}_2) \\
& \iff x = u \cdot v \text{ s.t. } \mathcal{M}_1 \text{ accepts } u \wedge \mathcal{M}_2 \text{ accepts } v \\
& \iff \exists i \in [|x|] \text{ s.t. } x = u \cdot v \wedge |u| = i \text{ s.t. } \mathcal{M}_1 \text{ accepts } u \wedge \mathcal{M}_2 \text{ accepts } v \\
& \iff M \text{ accepts } x = u \cdot v \iff u \cdot v \in L(M) \iff x \in L(M)
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $L(M) = L_1 \cdot L_2$
נסמן $|x| = n$,
נשים לב

1. ששלב 1 לוקח $O(1)$,
2. שלב 2 נעשה $O(|x|)$ פעמים ובכל פעם מחשבים:
   (א) חישוב של $u, v$ לוקח $O(|x|)$ (כי $u$ הוא פשוט ה־ $i$ האותיות הראשונות ב־ $x$)
   (ב) כתיבה של $u, v$ על הסרט לוקח $O(|x|)$
   (ג) הרצה של $\mathcal{M}_1$ על $u$ לוקח $O(t_1(|u|)) = O(t_1(i))$
   (ד) הרצה של $\mathcal{M}_1$ על $u$ לוקח $O(t_2(|v|)) = O(t_2(n-i))$
   (ה) החלטה לוקחת $O(1)$
3. שלב 1 לוקח $O(1)$

ולכן זמן הריצה של $M$ הוא

$$\begin{aligned}
& O(1) + \sum_{i=0}^{|x|} \left( O(|x|) + O(t_1(i)) + O(t_2(n-i)) + O(1) \right) \\
= & O\left(|x|^2\right) + \sum_{i=0}^{|x|} O(t_1(i) + t_2(n-i)) = O\left(n^2\right) + \sum_{i=0}^{|x|} O(t_1(i) + t_2(i))
\end{aligned}$$

כלומר זמן הריצה של $M$ חסום על ידי $O\left(n^2\right) + \sum_{i=0}^{n} O(t_1(i) + t_2(i))$ ולכן מהיות $n, t_1(n), t_2(n)$ פולינומיים, סכומם מספר פולינומי של פעמים הינו פולינומי ולכן $M$ רץ בזמן פולינומי.
כלומר הראנו שקיימת $M$ דטרמיניסטית שמכריעה את $L_1 \cdot L_2$ וגם $M$ רצה בזמן פולינומי.
ולכן $L_1 \cdot L_2 \in P$ מההגדרה, כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

**סעיף 4**
**צ"ל:** $L_1 \cdot L_2 \in \mathrm{NP}$ (שיניתי את מספרי השפות כדי לא להתבלבל עם מספרים $3, 4$)
**הוכחה:**
מהיות $L_1 \in \mathrm{NP}$ קיימת מ"ט $\mathcal{M}_1$ לא דטרמיניסטית שמכריעה את $L_1$ בזמן פולינומי.
מהיות $\mathcal{M}_1$ רצה בזמן פולינומי קיים פולינום $t_1(n)$ כך שזמן הריצה של $\mathcal{M}_1$ חסום על ידי $O(t_1(n))$.
מהיות $L_2 \in \mathrm{NP}$ קיימת מ"ט $\mathcal{M}_2$ לא דטרמיניסטית שמכריעה את $L_2$ בזמן פולינומי.
מהיות $\mathcal{M}_2$ רצה בזמן פולינומי קיים פולינום $t_2(n)$ כך שזמן הריצה של $\mathcal{M}_2$ חסום על ידי $O(t_2(n))$.
נבנה $M$ דטרמינסטית באופן הבא:

1. נקבל קלט $x$
2. לכל $i \in [|x|]$:
   (א) נחשב את $x = u \cdot v$ כאשר $|u| = i$, נכתוב את $u$ בסרט שני
   (ב) נריץ את $\mathcal{M}_1$ על $u$ בסרט השני
   (ג) נכתוב את $v$ בסרט השלישי
   (ד) נריץ את $\mathcal{M}_2$ על $v$ בסרט השלישי
   (ה) אם $\mathcal{M}_1$ קיבל את $u$ וגם $\mathcal{M}_2$ קיבל את $v$, נקבל
3. נדחה

תחילה נשים לב ש־ $M$ מכריעה כי $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ מכריעות (עוצרות בכל ריצה).
וגם נשים לב ש־ $M$ מקבל קיים $i$ עבורו $\mathcal{M}_1$ מקבל את $u$ וגם $\mathcal{M}_2$ מקבל את $v$,
ולכן קיימת ריצה מקבלת של $M$ על $x$ אם קיימת ריצה מקבלת של $\mathcal{M}_1$ על $u$ וגם ריצה מקבלת של $\mathcal{M}_2$ על $v$ כלומר

$$\begin{aligned}
x \in L_1 \cdot L_2 &\iff x = u \cdot v \text{ s.t. } u \in L_1 \wedge v \in L_2 \iff x = u \cdot v \text{ s.t. } u \in L(\mathcal{M}_1) \wedge v \in L(\mathcal{M}_2) \\
&\iff x = u \cdot v \text{ s.t. exists accepting run of } \mathcal{M}_1 \text{ on } u \wedge \text{exists accepting run of } \mathcal{M}_2 \text{ on } v \\
&\iff \exists i \in [|x|] \text{ s.t. } x = u \cdot v \wedge |u| = i \text{ s.t. exists accepting run of } \mathcal{M}_1 \text{ on } u \wedge \text{exists accepting run of } \mathcal{M}_2 \text{ on } v \\
&\iff \text{exists accepting run of } M \text{ on } x = u \cdot v \iff u \cdot v \in L(M) \iff x \in L(M)
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $L(M) = L_1 \cdot L_2$
נסמן $|x| = n$,
נשים לב

1. ששלב 1 לוקח $O(1)$,
2. שלב 2 נעשה $O(|x|)$ פעמים ובכל פעם מחשבים:
   (א) חישוב של $u, v$ לוקח $O(|x|)$ (כי $u$ הוא פשוט ה־ $i$ האותיות הראשונות ב־ $x$)
   (ב) כתיבה של $u, v$ על הסרט לוקח $O(|x|)$
   (ג) הרצה של $\mathcal{M}_1$ על $u$ לוקח $O(t_1(|u|)) = O(t_1(i))$
   (ד) הרצה של $\mathcal{M}_1$ על $u$ לוקח $O(t_2(|v|)) = O(t_2(n-i))$
   (ה) החלטה לוקחת $O(1)$
3. שלב 1 וקח $O(1)$

ולכן זמן הריצה של $M$ הוא

$$\begin{aligned}
&O(1) + \sum_{i=0}^{|x|} \left(O(|x|) + O(t_1(i)) + O(t_2(n-i)) + O(1)\right) \\
=&O\left(|x|^2\right) + \sum_{i=0}^{|x|} O(t_1(i) + t_2(n-i)) = O\left(n^2\right) + \sum_{i=0}^{|x|} O(t_1(i) + t_2(i))
\end{aligned}$$

כלומר זמן הריצה של $M$ חסום על ידי $O\left(n^2\right) + \sum_{i=0}^{n} O(t_1(i) + t_2(i))$ ולכן מהיות $n, t_1(n), t_2(n)$ פולינומיים, סכומם מספר פולינומי של פעמים הינו פולינומי ולכן $M$ רץ בזמן פולינומי.
כלומר הראנו שקיימת $M$ לא דטרמניסטית שמכריעה את $L_1 \cdot L_2$ וגם $M$ רצה בזמן פולינומי.
ולכן $L_1 \cdot L_2 \in \text{NP}$ מההגדרה, כנדרש

מ.ש.ל.ד.☺