פתרון תרגיל מספר 4 ־ אלגוריתמים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639, **שם:** גיא לוי, **ת.ז:** 211744636

27 בנובמבר 2019

1. **צ"ל:** הצעת אלגוריתם דינאמי ונכונותו
הוכחה:
נסמן ב$S = s_1 \dots s_n$ את ספרות ההודעות (הספרה הi היא s_i),
אוסף תתי הבעיות: מציאת מספר הדרכים שאפשר לפענח את ההודעה $S_i = s_i \dots s_n$ לכל $1 \le i \le n$,
נוסחת הרקורסיה:

(א) אם $i = n+1$, יש רק דרך אחת לפענח את הקידוד הריק

(ב) אם $s_i = 0$, אז אין דרכים לפענח כלומר יש 0 דרכים לקודד

(ג) אחרת אם $i = n$, אז יש רק דרך אחת לפענח את הקידוד כי $s_n \neq 0$ (מהתנאי הקודם)

(ד) אחרת אם $10 \le s_i s_{i+1} \le 26$ אז אפשר לפענח את האותיות בנפרד או ביחד, כלומר $M(i+1) + M(i+2)$

(ה) אחרת יש דרך יחידה לפענח את s_i, לכן מספר האפשרויות הוא פשוט $M(i+1)$

לכן נקבל שנוסחת הרקורסיה היא:

$$M(i) = \begin{cases} 1 & i = n+1 \\ 0 & s_i = 0 \\ 1 & else\ if\ i = n \\ M(i+1) + M(i+2) & else\ if\ 10 \le s_i s_{i+1} \le 26 \\ M(i+1) & else \end{cases}$$

הגדרת הטבלה: נגדיר טבלה M בגודל $n+1$, ונמלא אותה מימין לשמאל מ$n+1$ עד ל1,
אופן חילוץ הפתרון: הפתרון נמצא בתא הראשון (1), ולכן פשוט נחזיר את $M(1)$,
זמן ריצה: גודל הטבלה הוא n וזמן מילוי כל תא בטבלה הוא $O(1)$ ולכן זמן הריצה הוא $O(n)$ (שהוא פולינומיאלי בn),
הוכחת אופטימליות: נוכיח באינדוקציה שלמה שלכל i בין 0 ל־ n ש־ $M(n+1-i)$ מכיל את מספר האפשרויות לפענח את התת הודעה S_{n+1-i}
בסיס האינדוקציה:

(א) עבור $i = 0$, יש רק דרך אחת לפענח את הקידוד הריק ולכן $M(n+1-0) = M(n+1) = 1$ מכיל את מספר האפשרויות לפענח את ההודעה, כנדרש.

(ב) עבור $i = 1$, אם $s_n = 0$, אין דרכים לפענח ולכן $M(n+1-1) = M(n) = 0$ כנדרש. אחרת $s_n \neq 0$, לכן יש דרך אחת לפענח את ההודעה ולכן $M(n+1-1) = M(n) = 1$, כנדרש. לכן $M(n+1-i)$ מכיל את מספר האפשרויות לפענח את ההודעה s_1 כנדרש.

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה לכל $k < i$ ונוכיח לi.
נחלק למקרים:

(א) אם $s_{n+1-i} = 0$, אין דרכים לפענח את ההודעה ולכן $M(n+1-i) = 0$ כנדרש

(ב) אחרת אם מתקיים $10 \le s_{n+1-i} s_{n+1-(i-1)} \le 26$:

i. אז אם נפענח את האותיות $s_{n+1-i}, s_{n+1-(i-1)}$ בנפרד, נפענח את s_{n+1-i} ונשאר לפענח את $S_{n+1-(i-1)}$, ומספר האפשרויות לכך הוא $M\left(n+1-(i-1)\right)$ (מהנחת האינדוקציה השלמה)

ii. אם נפענח את $s_{n+1-i}, s_{n+1-(i-1)}$ כאות אחת, נפענח את $s_{n+1-i}s_{n+1-(i-1)}$ ונשאר לפענח את $S_{n+1-(i-2)}$, ומספר האפשרויות לכך הוא $M\left(n+1-(i-2)\right)$ (מהנחת האינדוקציה השלמה)
ולכן מספר האפשרויות לפענח את S_i הוא סכום שני המקרים שצוינו, כלומר:

$$M\left(n+1-i\right) = M\left(n+1-(i-1)\right) + M\left(n+1-(i-2)\right) = M\left((n+1-i)+1\right) + M\left((n+1-i)+2\right)$$

כנדרש

(ג) אחרת, $s_{n+1-i}s_{n+1-(i-1)} > 26$ או $s_{n+1-i}s_{n+1-(i-1)} < 10$ וגם $s_{n+1-i} \neq 0$
אז נוכל רק נפענח את האותיות $s_{n+1-i}, s_{n+1-(i-1)}$ בנפרד, נפענח את s_{n+1-i} ונשאר לפענח את $S_{n+1-(i-1)}$, ומספר האפשרויות לכך הוא $M\left(n+1-(i-1)\right)$ (מהנחת האינדוקציה השלמה), לכן

$$M\left(n+1-i\right) = M\left(n+1-(i-1)\right) = M\left((n+1-i)+1\right)$$

כנדרש

כלומר הראנו שלכל המקרים, הנוסחא שהצענו מחשבת בכל המקרים את כמות האפשרויות לפענוח של התת מחרוזת S_{n+1-i}

מ.ש.ל.☺

2. **צ"ל:** הצעת אלגוריתם דינאמי ונכונותו
הוכחה:
<u>אוסף תתי הבעיות:</u> מציאת תת הסדרה העולה הארוכה ביותר ב$a_1 \dots a_i$ לכל $1 \leq i \leq n$,
<u>נוסחת הרקורסיה:</u>

(א) אם $i=1$, נשים לב כי אורך התת סדרה העולה הארוכה ביותר הוא 1, ונגדיר $M\left(1\right)=1$

(ב) אחרת $i \neq 1$, נחפש את התת סדרה העולה הארוכה ביותר כך שהאיבר האחרון קטן שווה מa_i ונשמור את זה ועוד 1 ב$M\left(i\right)$ (אם לא מצאנו, נשמור 1 כי הוא תת סדרה בעצמו)

לכן נוסחת הרקורסיה היא

$$M\left(i\right) = \begin{cases} 1 & i=1 \\ \max\left\{\max_{1\leq j\leq i, a_j \leq a_i}\left\{M\left(j\right)\right\}+1, 1\right\} & i \neq 1 \end{cases}$$

נוסיף לכל איבר חץ לאינדקס הנבחר ב$\max_{1\leq j\leq i, a_j \leq a_i}\left\{M\left(i\right)\right\}$ ואם זה ריק אז חץ לשום דבר.
<u>הגדרת הטבלה:</u> נגדיר טבלה M בגודל n, ונמלא אותה משמאל לימין מ1 עד לn,
<u>אופן חילוץ הפתרון:</u> נרוץ על כל התאים ונחזיר את התא עם האיבר המקסימלי (כלומר שמכיל את אורך התת סדרה העולה המקסימלי), עתה כשמצאנו את התא, נוכל לשמור את כל האינדקסים שמופיעים בחצים ולהחזיר את רשימת האינדקסים שהופיעו בחצים.
<u>זמן ריצה:</u> גודל הטבלה הוא n וזמן מילוי כל תא בטבלה הוא $O\left(i\right)$ ובסוף $O\left(n\right)$ למציאת המקסימלי וריצה על החצים ליצירת התת סדרה, ולכן זמן הריצה הוא

$$\sum_{i=1}^{n} O\left(i\right) + O\left(n\right) = O\left(n^2\right)$$

(שהוא פולינומיאלי בn),
<u>הוכחת אופטימליות:</u> נוכיח באינדוקציה שלמה שלכל i בין 1 ל־ n ש־ $M\left(i\right)$ מכיל את אורך התת סדרה העולה הארוכה ביותר שמסתיימת בa_i
<u>בסיס האינדוקציה:</u>

עבור $i=1$, יש רק תת סדרה עולה אחת והיא בגודל 1 ולכן $M\left(1\right)=1$, כנדרש
<u>צעד האינדוקציה:</u>

נסמן את התת סדרה העולה הארוכה ביותר שמסתיימת ב־ a_i ב־ $a_{i_1},\ldots,a_{i_k}$ כאשר $i_1<\cdots<i_k=i$
נשים לב כי ומהיות $a_{i_1},\ldots,a_{i_k}$ תת סדרה עולה, מהנחת האינדוקציה מתקיים כי $M\left(i_{k-1}\right)$ כי הוא מכיל את התת סדרה העולה הארוכה ביותר עד לi_{k-1} , לכן $M\left(i_{k-1}\right)\geq\left|\left\{i_1,\ldots,i_{k-1}\right\}\right|=k-1$
לכן נשים לב כי הגדרנו את

$$M\left(i\right)=\max\left\{\max_{1\leq j\leq i,a_j\leq a_i}\left\{M\left(j\right)\right\}+1,1\right\}\geq\max\left\{k,1\right\}=k$$

וגם נשים לב כי נוכל לייצר תת סדרה עולה באורך $M\left(i\right)$ אם נרוץ אחורה לפי החצים, ולכן ממקסימליות k מתקיים $M\left(i\right)\leq k$,
לכן $M\left(i\right)=k$, כנדרש

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** הצעת אלגוריתם דינאמי ונכונותו
הוכחה:
אוסף תתי הבעיות: מציאת המרחק המקסימלי של כל קודקוד מt,
נסמן ב־ $\left(v_1,\ldots,v_n,v_{n+1},\ldots,v_k\right)$ מיון טופולוגי של הקודקודים כך ש־ $v_n=t$. (קיים כזה מהיות t בור)
נוסחת הרקורסיה:

$$M\left(i\right)=\begin{cases}0 & i=n\\ \max_{j>i,\left(v_i,v_j\right)\in E}\left\{w\left(v_i,v_j\right)+M\left(j\right)\right\} & i<n\text{ and }\exists j>i\text{ s.t. }\left(v_i,v_j\right)\in E\\ -\infty & else\end{cases}$$

הגדרת הטבלה: נגדיר טבלה M בגודל n, ונמלא אותה מימין לשמאל מn עד ל1,
אופן חילוץ הפתרון: נרוץ על כל הטבלה ונשמור את המרחק המקסימלי מהטבלה ונחזיר אותו
זמן ריצה: בהתחלה נעשה מיון טופולוגי שלוקח $O\left(n^2\right)$ לכלכל היותר, גודל הטבלה הוא n וזמן מילוי כל תא בטבלה הוא $O\left(n-i\right)$ ובסוף $O\left(n\right)$ למציאת ההמרחק מקסימלי, ולכן זמן הריצה הוא

$$\sum_{i=1}^{n}O\left(n-i\right)+O\left(n\right)+O\left(n^2\right)=O\left(n^2\right)$$

(שהוא פולינומיאלי בn),
הוכחת אופטימליות: נוכיח באינדוקציה שלמה שלכל i בין 1 ל־ n ש־ $M\left(n-i\right)$ מכיל את המרחק המקסימלי של הקודקוד הi מt
בסיס האינדוקציה:

עבור $i=0$, מתקיים כי המרחק של t מעצמו הוא 0 ולכן $M\left(n-0\right)=0$, כנדרש
צעד האינדוקציה:

(א) אם v_{n-i} הוא בעצמו בור ־ המרחק שלו מt הוא $-\infty$ בגלל שאין מסלול בין 2 בורות בגרף חסר מעגלים. וגם מתקיים של־ v_{n-i} אין צלעות שיוצאות ממנו, לכן $\forall j>i\rightarrow\left(v_{n-i},v_j\right)\notin E$, לכן מההגדרה מתקיים $M\left(n-i\right)=-\infty$, כנדרש

(ב) אחרת, v_i הוא לא בור,

i. אם לא קיים מסלול מv_{n-i} לt אז לכל $\forall j>n-i\text{ s.t. }\left(v_{n-i},v_j\right)\in E\Rightarrow M\left(j\right)=-\infty$, לכן מההגדרה מתקיים כי

$$M\left(n-i\right)=\max_{j>n-i,\left(v_{n-i},v_j\right)\in E}\left\{w\left(v_{n-i},v_j\right)+M\left(j\right)\right\}=\max_{j>n-i,\left(v_{n-i},v_j\right)\in E}\left\{w\left(v_{n-i},v_j\right)+-\infty\right\}=-\infty$$

כלומר $M\left(n-i\right)=-\infty$ כנדרש.

ii. אחרת קיים מסלול עם מרחק מקסימלי בין v_{n-i} לt ונסמנו $v_{n-i},v_{i_1},\dots,v_{i_k},v_n$ כאשר $n-i<i_1\dots<i_k<n$
ונסמן את המרחק של המסלול בD,
עתה נשים לב כי

$$M\left(i\right)=\max_{j>n-i,\left(v_{n-i},v_j\right)\in E}\left\{w\left(v_{n-i},v_j\right)+M\left(j\right)\right\}\overset{\left(v_i,v_{i_1}\right)\in E}{\geq}w\left(v_{n-i},v_{i_1}\right)+M\left(i_1\right)$$

ועתה מהיות $i_1>n-i$ מהנחת האינדוקציה מתקיים $M\left(i_1\right)\geq D-w\left(v_{n-i},v_{i_1}\right)$ (ממקסימליות המרחק עבור i_1), לכן נקבל כי $M\left(n-i\right)\geq D$,
עתה נוכל לשחזר את המסלול שנעשה בחישוב בטבלה (עם הסופת חצים) וממקסימליות D יתקיים $M\left(n-i\right)\leq D$ (כי $M\left(n-i\right)$ מרחק כלשהו של מסלול וD הוא מרחק מקסימלי),
לכן קיבלנו כי $\boxed{M\left(n-i\right)=D}$, כנדרש

כלומר הראנו ש־ $M\left(i\right)$ מכיל את המרחק המקסימלי מקודקוד v_i לt עבור $1\leq i\leq n$,

עתה נשים לב שעבור $n<i\leq k$ אין מסלול מהגדרת מיון טופולוגי ובגלל שt בור, ולכן $M\left(i\right)=-\infty$ כנדרש, לכן $1\leq\forall i\leq k$ מכיל את המרחק המקסימלי בין v_i לt כנדרש!

מ.ש.ל.☺

4. **צ"ל:** הצעת אלגוריתם דינאמי ונכונותו
הוכחה:
אוסף תתי הבעיות: האם ניתן להגיע בזמן t לנתיב i מההתחלה
נוסחת הרקורסיה:

$$T\left(i=place,t=time\right)=\begin{cases}1 & i=1\\0 & else\ if\ \exists m\in\left\{1,\dots,N\right\}\text{ s.t. }\left(l_m=i\right)\wedge t\in\left[s_m,f_m\right]\\1 & else\ if\ \left(T\left(i-1,t-1\right)=1\right)\vee\left(T\left(i,t-1\right)=1\right)\vee\left(T\left(i+1,t-1\right)=1\right)\\0 & else\end{cases}$$

הגדרת הטבלה: נגדיר טבלה T בגודל $n\times\left(M+1\right)$, נרוץ על כל התאים ה־ $\left(i,j\right)$ כנרוץ קודם על ה־ i מ־1עד ל־n , ואז נקדם את ה־ j ונאתחל את ה־ i להיות 1 שוב עד ש־ $j>M$ ואז נסיים את הריצה. (לרוץ עמודה עמודה על הטבלה)
אופן חילוץ הפתרון: נרוץ באינדקס i על $T\left(n,i\right)$, אם נמצא 1, (כלומר $i=\min_{T(n,k)=1}\left\{k\right\}$), נחזיר את i וסיימנו.
אחרת לא הספקנו להגיע לנתיב ה־ n ב־ M זמן, נמצא את הנתיב המקסימלי שהצלחנו להגיע אליו בזמן ־ M (כלומר $j=\max_{T(k,M)=1}\left\{k\right\}$), ונסמנו ב־ j, כלומר נשאר לנו ללכת $n-j$ נתיבים ואין מכוניות, לכן נוכל להתקדם נתיב אחד בכל רגע זמן, לכן נחזיר $M+n-j$
זמן ריצה: גודל הטבלה הוא $n\times\left(M+1\right)$ וזמן מילוי כל תא בטבלה הוא $O\left(N\right)$ ובסוף $O\left(n\right)+O\left(M\right)$ ללמציאת זמן מינימלי, ולכן זמן הריצה הוא

$$O\left(nN\left(M+1\right)\right)+O\left(n\right)+O\left(M\right)=O\left(nNM\right)$$

סיבוכיות זיכרון: $O\left(nM\right)$ כי $O\left(nM\right)+O\left(n\right)=O\left(nM\right)$
הוכחת אופטימליות: נוכיח באינדוקציה שלמה שלכל j בין 0 ל־ M ש־ $M\left(i,j\right)$ מכיל 1 אם אפשר להגיע לתא בזמן הנתון, אחרת 0, לכל $1\leq i\leq n$
צעד האינדוקציה:

(א) אם בזמן j בנתיב ה־ i יש מכונית, אז $M\left(i,j\right)=0$ כנדרש כי אי אפשר להיות בזמן j בנתיב i

(ב) אחרת בזמן j בנתיב ה־ i אין מכונית, אם אפשר להגיע בזמן ה־ j לנתיב ה־ i אז הגענו אליו מהנתיבים $i-1,i,i+1$ בזמן $j-1$, ולכן מהנחת האינדוקציה מתקיים

$$\left(T\left(i-1,j-1\right)=1\right)\vee\left(T\left(i,j-1\right)=1\right)\vee\left(T\left(i+1,j-1\right)=1\right)=1$$

ולכן מההגדרה מתקיים $T\left(i,j\right)=1$ כנדרש

(ג) אחרת, אי אפשר להגיע בזמן ה־ j לנתיב ה־ i ואין בו מכונית אי אפשר להגיע לנתיבים $i-1, i, i+1$ בזמן $j-1$, ולכן מהנחת האינדוקציה מתקיים

$$(T(i-1, j-1) = 1) \vee (T(i, j-1) = 1) \vee (T(i+1, j-1) = 1) = 0$$

ולכן מההגדרה מתקיים $T(i,j) = 0$ כנדרש

מ.ש.ל.☺