תרגיל 8 אלגברה לינארית 1

מיכאל גרינבאום

211747639

1א. **צ"ל:** בסיס ל $U \cap W$

נתונים: $U = span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$, $W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}$

הוכחה:

נדרג את U כדי למצוא הצגה פרמטית לU

$$\left[\begin{array}{cc|cccc}1&1&1&0&0&0\\1&2&0&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{R_4\to R_4-R_1} \left[\begin{array}{cc|cccc}1&1&1&0&0&0\\1&2&0&1&0&0\\0&0&0&-1&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \left[\begin{array}{cc|cccc}1&1&1&0&0&0\\0&1&-1&1&0&0\\0&0&0&-1&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left[\begin{array}{cc|cccc}1&0&2&-1&0&0\\0&1&-1&1&0&0\\0&0&0&-1&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right]$$

ולכן $-x_1 + x_4 = 0$, $-x_2 + x_3 = 0$

ולכן $U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{c} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right\}$

ולכן $U \cap W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{c} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right\}$

נסמן $x_4 = t$ ולכן $x_1 = t$, נציב נקבל $x_2 - x_3 = 0, x_2 + x_3 = 0$

ולכן $U \cap W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{c} x_1 = x_4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} = span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

ולכן $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ בסיס של $U \cap W$

מ.ש.ל.א.☺

1ב. **צ"ל:** בסיס ל$U \cap W$

נתונים: $U = span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, $W = span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$

הוכחה:

נדרג את U כדי למצוא הצגה פרמטית לU

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&1&0&0&0\\1&1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&1&0&0&0\\0&1&1&-1&1&0&0\\0&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&1&0&0&0\\0&1&1&-1&1&0&0\\0&0&0&1&-1&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

ולכן $U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}$

נדרג את W כדי למצוא הצגה פרמטית לW

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1\to R_1+R_3]{R_2\to R_2-R_3} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4-R_2} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4\to R_4+R_3} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

ולכן $W = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid -x_1-x_2+2x_3+x_4=0\right\}$

ולכן $U\cap W = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{c} -x_1-x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{array}\right\}$

נציב $x_1=t$, $x_2=s$ ונקבל $x_3=s-t$, $x_4=t+s-2(s-t)=3t-s$

ולכן $U\cap W = span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$

נשים לב כי $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ בת"ל כי $\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}a\\0\\-a\\3a\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\3\end{bmatrix}$

ולכן $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ בסיס של $U\cap W$

מ.ש.ל.ב.☺

2. **צ"ל:** בסיס לW ולהשלימו ל$\mathbb{R}^5$

נתונים: $W = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 \mid \begin{array}{c} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{array}\right\}$

הוכחה:

נסמן $x_5=t$, $x_4=s$, $x_2=m$

ונקבל $x_3=-s-t$, $x_1=s+t-m$

ולכן $W = span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש, $a\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+b-c\\c\\-a-b\\b\\a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

ולכן ממשוואות $2,4,5$ נקבל $a=b=c=0$ ולכן $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ בתל

ולכן $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ בסיס של W

נסתכל על $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

יהיו $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ כך ש, $a\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+e\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

כלומר $\begin{bmatrix}a+b-c+e\\c\\-a-b+d\\b\\a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ ולכן ממשוואות $2,4,5$ נקבל $a=b=c=0$

נציב חזרה ונקבל $d=0$ ו$e=0$ ולכן $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ בת"ל

מכיוון שהם 5 וקטורים בת"ל ב$\mathbb{R}^5$,

מתקיים $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ בסיס של $\mathbb{R}^5$

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** $V=span(v_1,\dots,v_k)\oplus span(v_{k+1},\dots,v_n)$
נתונים: $(v_1,\dots,v_n)$ בסיס של V
הוכחה:
יהי $v\in V$ אזי $\exists a_1,\dots,a_n\in\mathbb{F}$
כך ש$v=a_1v_1+\dots+a_nv_n=(a_1v_1+\dots+a_kv_k)+(a_{k+1}v_{k+1}+\dots+a_nv_n)$
ולכן $v\in span(v_1,\dots,v_k)+span(v_{k+1},\dots,v_n)$
ולכן $V\subseteq span(v_1,\dots,v_k)+span(v_{k+1},\dots,v_n)$
ברור כי $span(v_1,\dots,v_k)+span(v_{k+1},\dots,v_n)\subseteq V$
ולכן $span(v_1,\dots,v_k)+span(v_{k+1},\dots,v_n)=V$
נראה כי $span(v_1,\dots,v_k)\cap span(v_{k+1},\dots,v_n)=\{0_V\}$ ונסיים
יהי $v\in span(v_1,\dots,v_k)\cap span(v_{k+1},\dots,v_n)$ אזי $\exists a_1,\dots,a_n\in\mathbb{F}$
כך ש$a_1v_1+\dots+a_kv_k=v=a_{k+1}v_{k+1}+\dots+a_nv_n$
ולכן $a_1v_1+\dots+a_kv_k-a_{k+1}v_{k+1}-\dots-a_nv_n=0_V$
ולכן $a_1=\dots=a_k=a_{k+1}=\dots=a_n=0_{\mathbb{F}}$
נציב ונקבל $v=0_v+\dots+0_V=0_V$
ולכן $span(v_1,\dots,v_k)\cap span(v_{k+1},\dots,v_n)=\{0_V\}$
ולכן $V=span(v_1,\dots,v_k)\oplus span(v_{k+1},\dots,v_n)$

מ.ש.ל.☺

4א. **צ"ל:** $\mathcal{O}$, $\mathcal{E}$ תתי מרחבים של V
נתונים:$V=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,
הוכחה:

נשים לב כי עבור $f(x)=0$ מתקיים $f(-x)=0=f(x)$ ולכן $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\in\mathcal{E}$
יהיו $f,g\in\mathcal{E}$, נשים לב כי $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$
ולכן $f+g\in\mathcal{E}$
יהיו $f\in\mathcal{E}$,$\alpha\in\mathbb{R}$ ולכן $(\alpha f)(-x)=\alpha f(-x)=\alpha f(x)=(\alpha f)(x)$
ולכן $\alpha f\in\mathcal{E}$
ולכן $\mathcal{E}$ תת מרחב של V כי מקיים סגירות לחיבור ולכפל בסקלר ווקטור האפס נמצא
נשים לב כי עבור $f(x)=0$ מתקיים $f(-x)=0=-0=f(x)$ ולכן $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\in\mathcal{O}$
יהיו $f,g\in\mathcal{O}$, נשים לב כי $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-(f+g)(x)$
ולכן $f+g\in\mathcal{O}$
יהיו $f\in\mathcal{O}$,$\alpha\in\mathbb{R}$ ולכן $(\alpha f)(-x)=\alpha f(-x)=-\alpha f(x)=-(\alpha f)(x)$
ולכן $\alpha f\in\mathcal{O}$
ולכן $\mathcal{O}$ תת מרחב של V כי מקיים סגירות לחיבור ולכפל בסקלר ווקטור האפס נמצא

מ.ש.ל.א.☺

4ב. **צ"ל:** $\mathcal{O}\oplus\mathcal{E}=V$
נתונים:$V=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,
הוכחה:
יהי $f\in\mathcal{E}\cap\mathcal{O}$ ולכן מכיוון ש$f\in\mathcal{E}$, $f(x)=f(-x)$
וגם $f\in\mathcal{O}$ ולכן $f(x)=-f(-x)$ ולכן $f(-x)=-f(-x)$
ולכן $f(-x)=0$, כלומר $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$
ולכן $\mathcal{E}\cap\mathcal{O}=\{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$
יהי $f\in V$, נגדיר $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$
נשים לב כי $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=g(-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ כלומר $g\in\mathcal{E}$
נשים לב כי $-h(x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=h(-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ כלומר $h\in\mathcal{O}$
ונשים לב כי $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=g(x)+h(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$
ולכן $V\subseteq\mathcal{O}+\mathcal{E}$ וגם ברור כי $\mathcal{O}+\mathcal{E}\subseteq V$
ולכן $\mathcal{O}\oplus\mathcal{E}=V$

מ.ש.ל.ב.☺

5א. **צ"ל:** האם $k\in span\{f,g,h,l\}$?
נתונים:$V=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
הוכחה:
לא נכון! נניח בשלילה כי $k\in span\{f,g,h,l\}$,
ולכן $\exists a,b,c,d\in\mathbb{R}$ כך ש$af+bg+ch+dl=k$, $\forall x\in\mathbb{R}$
ולכן עבור $x=2$, נקבל $a\cdot1+b\cdot1+c\cdot1+d\cdot0=0$
ועבור $x=3$ נקבל $a\cdot1+b\cdot1+c\cdot1+d\cdot0=1$
ולכן $0=a+b+c=1$
סתירה כי $1=0$ ולכן $k\notin span\{f,g,h,l\}$

מ.ש.ל.א.☺

5ב. **צ"ל:** האם $m\in span\{f,g,h,l\}$?
נתונים:$V=span\{f,g,h,l\}$
הוכחה:
נכון! נשים לב כי $m=\begin{cases}0 & x<1\\ 1 & 1\le x<2\\ 2 & x\ge2\end{cases}=\begin{cases}0 & x<2\\ 1 & x\ge2\end{cases}+\begin{cases}0 & x<1\\ 1 & x\ge1\end{cases}=g+h$
ולכן $m=g+h$, כלומר $m\in span\{f,g,h,l\}$

מ.ש.ל.ב.☺

5ג. **צ"ל:** בסיס של V
נתונים:$V=span\{f,g,h,l\}$
הוכחה:

תחילה נשים לב כי $l = \begin{cases} 0 & x<1 \\ 1 & 1\le x<2 \\ 0 & x\ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases} - \begin{cases} 0 & x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases} = g-h$

ולכן $l \in span\{f,g,h\}$ ולכן $V = span\{f,g,h,l\} = span\{f,g,h\}$

נראה כי f,g,h בת"ל ונסיק שהם בסיס

יהיו $a,b,c \in \mathbb{R}$ כך ש$af+bg+ch=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

עבור $x=0$, נקבל $a+0+0=a=0$

עבור $x=1$, נקבל $a+b+0=b=0$

עבור $x=2$, נקבל $a+b+c=c=0$

ולכן $a=b=c=0$, כלומר $\{f,g,h\}$ בת"ל ופורשים את V

ולכן $\{f,g,h\}$ בסיס של V

מ.ש.ל.ג.☺

6א. **צ"ל:** U תת מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

נתונים: $U = \{a\cdot\sin(x+b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי $f(x)=0=0\cdot sin(x)\in U$

עתה יהי $v\in U$, $\alpha\in\mathbb{R}$, אזי $\exists a,b\in\mathbb{R}$ כך ש$v=a\cdot\sin(x+b)$

ולכן $\alpha\cdot v=\alpha\cdot a\cdot\sin(x+b)=(\alpha a)\cdot\sin(x+b)\in U$

יהיו $v_1,v_2\in U$, $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $\exists a,b,c,d\in\mathbb{R}$ כך ש$v_1=a\sin(x+b)$

וגם $v_2=c\cdot\sin(x+d)$

אזי $v_1+v_2=a(\sin(x)\cos(b)+\cos(x)\sin(b))+c(\sin(x)\cos(d)+\cos(x)\sin(d))$

$$=(a\cos(b)+c\cos(d))\sin(x)+(a\sin(b)+c\sin(d))\cos(x)$$

נסמן $A=a\cos(b)+c\cos(d)$, $B=a\sin(b)+c\sin(d)$, $tg^{-1}(\frac{B}{A})=\alpha$

נסמן $R=\sqrt{A^2+B^2}$, נשים לב כי $R\cdot\cos(\alpha)=A$, $R\cdot\sin(\alpha)=B$

נשים לב כי $R\cdot\sin(x+\alpha)=R\cdot(\sin(x)\cos(\alpha)+\cos(x)\sin(\alpha))$

$$=(R\cdot\cos(\alpha))\cdot\sin(x)+(R\cdot\sin(\alpha))\cdot\cos(x)=A\cdot\sin(x)+B\cdot\cos(x)$$

ולכן $v_1+v_2=A\cdot\sin(x)+B\cdot\cos(x)=R\cdot\sin(x+\alpha)\in U$

נשים לב כי ברור שU תת קבוצה של $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

ומתקיים U סגור לחיבור, לכפל בסקלר ו0 נמצא בו ולכן הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

מ.ש.ל.א.☺

6ב. **צ"ל:** S קבוצה סופית כך ש$U=span\{S\}$

נתונים: $U = \{a\cdot\sin(x+b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$

הוכחה:

נשים לב כי $\sin(x)=1\cdot\sin(x+0)\in U$

וגם $\cos(x)=1\cdot\sin(x+\frac{\pi}{2})\in U$

יהי $v\in U$, אזי $\exists a,b\in\mathbb{R}$ כך ש$v=a\cdot sin(x+b)$

$$v=a\cdot sin(x+b)=a(\sin(x)\cos(b)+\cos(x)\sin(b))=$$

$$(a\cos(b))\sin(x)+(a\sin(b))\cos(x)\in span\{\sin(x),\cos(x)\}$$

נסמן $S=\{\sin(x),\cos(x)\}$, ברור כי $span\{S\}\subseteq U$ וגם $U\subseteq span\{S\}$

ולכן $U=span\{S\}$

מ.ש.ל.ב.☺

7. **צ"ל:** האם $\{g_0,g_1,g_2,\dots\}$ בת"ל ?

נתונים: $f(x)=\begin{cases} 1 & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$, $g_n(x)=f(x-n)$

הוכחה:

נכון! נראה כי $\{g_0,\dots,g_n\}$ בת"ל $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ונסיים

יהיו $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ כך ש$a_0g_0+\cdots+a_ng_n=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

נראה באינדוקציה על i כי $a_i = 0$,
בסיס אינדוקציה: נראה שהטענה נכונה ל$i = 0$
נציב $x = 0$, נשים לב כי $g_n(0) = 0$, $0 < \forall n \in \mathbb{N}$
ולכן נקבל $0 = a_0 g_0(0) + 0 + \cdots + 0 = a_0 g_0(0) = a_0$
ולכן $a_0 = 0$
צעד אינדוקציה: נניח שהטענה נכונה לכל מספר קטן שווה לi ונוכיח אותה ל$i + 1$
נשים לב כי מתקיים $0 = a_{i+1}g_{i+1} + \cdots + a_n g_n$, $\forall x \in \mathbb{R}$
נציב $x = i + 1$, נשים לב כי $g_n(i + 1) = 0$, $i + 1 < \forall n \in \mathbb{N}$
ולכן נקבל $0 = a_{i+1}g_{i+1}(i + 1) + 0 + \cdots + 0 = a_{i+1}g_{i+1}(i + 1) = a_{i+1}$
ולכן $a_{i+1} = 0$
ולכן $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
כלומר $\{g_0, \ldots, g_n\}$ בת"ל $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
ולכן $\{g_0, g_1, g_2, \ldots\}$ בת"ל

מ.ש.ל.☺

8. **צ"ל:** בסיס ל$U \cap W$
נתונים: $U = span\{f, g, l\}, W = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = f(1)\}$
הוכחה:
נשים לב ש$g(0) = (0 - 1)(0 + 1) = -1 \neq 0 = (1 - 1)(1 + 1) = g(1)$
ולכן $g \notin W$
נשים לב כי $\dim U = 3$ מכיוון שלכל וקטור יש דרגה שונה ולכן בת"ל
ולכן $\dim U \cap W \leq \dim U = 3$
אם $\dim U \cap W = \dim U$ אז מהיות $U \cap W \subseteq U$ מתקיים $U = U \cap W$
אך $g \in U$ וגם $g \notin U \cap W$ ולכן $U \neq U \cap W$
כלומר $\dim U \cap W \leq 2$
נשים לב כי $f(x) = 1 \in W$
וגם מתקיים $-2g(x) + l(x) = -2(x - 1)(x + 1) + x^2(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 2x + 2)$
ומתקיים $(0 + 1)(0 - 0 + 2) = (1 + 1)(1 - 2 + 2)$
ולכן $-2g + l \in W$
נשים לב שהדרגה של $\{f, -2g + l\}$שונות ולכן הם בת"ל
ולכן מכיוון ש$\{f, -2g + l\} \in U \cap W$ וקטורים בת"ל במרחב וקטורי שעבורו
מתקיים $\dim U \cap W \leq 2$
נסיק כי $\dim U \cap W = 2$, וכל 2 וקטורים בת"ל ב$U \cap W$ הם בסיס
ולכן $\{f, -2g + l\}$ בסיס של $U \cap W$

מ.ש.ל.☺

9א. **צ"ל:** U תת מרחב של $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
נתונים: $U = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = f(x + 2), \forall x \in \mathbb{R}\right\}$
הוכחה:
תחילה נשים לב שעבור $f(x) = 0$ מתקיים $f(x) = 0 = f(x + 2)$
ולכן $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in U$
יהיו $f, g \in U$ אזי $(f + g)(x + 2) = f(x + 2) + g(x + 2) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$
ולכן $f + g \in U$
יהי $f \in U$ ו$\alpha \in \mathbb{R}$ אזי $(\alpha f)(x + 2) = \alpha f(x + 2) = \alpha f(x) = (\alpha f)(x)$
ולכן $\alpha f \in U$
U תת קבוצה של $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת סגירות לחיבור, כפל בסקלר
ומכילה את וקטור האפס מתקיים שU תת מרחב של $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

מ.ש.ל.א.☺

9ב. **צ"ל:** האם U נוצר סופית?
נתונים: $U = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = f(x + 2), \forall x \in \mathbb{R}\right\}$
הוכחה:
לא נכון! $\forall m \in \mathbb{N}$ נגדיר f_m באופן הבא: $f_m = (x - \lfloor x \rfloor)^m$
נשים לב כי מתקיים $f_m(x+1) = (x+1-\lfloor x+1 \rfloor)^m = (x+1-\lfloor x \rfloor+1)^m = (x-\lfloor x \rfloor)^m = f_m(x)$
ולכן $f_m(x + 2) = f_m(x + 1) = f_m(x)$ ולכן $f_m \in U$

נשים לב כי $\{f_1, f_2, f_3, \dots\} \in U$

נניח בשלילה כי U נוצר סופית ונסמן $\dim U = n$

נסתכל על $\{f_1, \dots, f_{n+1}\} \in U$ הם חייבים להיות ת"ל כי כל $n+1$ וקטורים הם ת"ל

נראה שהם בת"ל ונקבל סתירה

קיימים $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ כך ש$a_1 f_1 + \dots + a_{n+1} f_{n+1} = 0$

נסתכל על f_m בקטע $[0,1)$ ונשים לב כי $f_m = x^m$

בקטע $[0,1)$ נקבל כי $0 = a_1 x + \dots + a_{n+1} x^{n+1}$

ולכן $a_1 = \dots = a_{n+1} = 0$ כי $\{x, \dots, x^{n+1}\}$ בת"ל

כלומר $\{f_1, \dots, f_{n+1}\}$ בת"ל בסתירה לכך שהם חייבים להיות ת"ל

ולכן U לא נוצר סופית

מ.ש.ל.ב.☺

10א. **צ"ל:** U תת מרחב של $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

נתונים: $U = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(n) = f(n+2), \forall n \in \mathbb{N}\right\}$

הוכחה:

תחילה נשים לב שעבור $f(x) = 0$ מתקיים $f(n) = 0 = f(n+2)$

ולכן $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in U$

יהיו $f, g \in U$ אזי $(f+g)(n+2) = f(n+2) + g(n+2) = f(n) + g(n) = (f+g)(n)$

ולכן $f + g \in U$

יהי $f \in U$ ו$\alpha \in \mathbb{R}$ אזי $(\alpha f)(n+2) = \alpha f(n+2) = \alpha f(n) = (\alpha f)(n)$

ולכן $\alpha f \in U$

U תת קבוצה של $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המקיימת סגירות לחיבור, כפל בסקלר

ומכילה את וקטור האפס מתקיים שU תת מרחב של $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

מ.ש.ל.א.☺

10ב. **צ"ל:** U נוצר סופית

נתונים: $U = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(n) = f(n+2), \forall n \in \mathbb{N}\right\}$

הוכחה:

תחילה נסמן $g(n) = \begin{cases} 1 & 2 \mid n \\ 0 & 2 \nmid n \end{cases}$ וגם $h(n) = \begin{cases} 0 & 2 \mid n \\ 1 & 2 \nmid n \end{cases}$

יהי $f \in U$, נשים לב שעבור n זוגי מתקיים ש$f(n) = \dots = f(4) = f(2)$

וגם $f(n) = f(2) = f(2) \cdot 1 = f(2) \cdot g(n) + 0 = f(2) \cdot g(n) + f(1) \cdot h(n)$

נשים לב שעבור n אי זוגי מתקיים ש$f(n) = \dots = f(3) = f(1)$

וגם $f(n) = f(1) = f(1) \cdot 1 = f(1) \cdot h(n) + 0 = f(2) \cdot g(n) + f(1) \cdot h(n)$

ולכן $\forall n \in \mathbb{N}$,$f(n) = f(2) \cdot g(n) + f(1) \cdot h(n) \in span\{g, h\}$

ולכן $U \subseteq span\{g, h\}$ וברור כי $span\{g, h\} \subseteq U$

ולכן $span\{g, h\} = U$

נראה כי $\{g, h\}$ בת"ל ונסיים

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש$a \cdot g + b \cdot h = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

נציב $n = 1$ ונקבל $0 + b = 0$ ולכן $b = 0$

נציב $n = 2$ ונקבל $a + 0 = 0$ ולכן $a = 0$

ולכן $a = b = 0$, כלומר $\{g, h\}$ בת"ל

ולכן $\{g, h\}$ בת"ל ופורשים את U

ולכן $\{g, h\}$ בסיס של U ולכן U נוצר סופית ואף מתקיים $\dim U = 2$

מ.ש.ל.ב.☺