אלגברה לינארית (2) תשע"ט 2018-2019 - סמסטר ב׳ - תרגיל 10

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז. יש לציין כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל. סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 27.5.19 בשעה 21:00.

בתרגיל זה, אלא אם צויין אחרת, $\mathbb{F}$ מציין את אחד השדות $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, ו- $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ מציין מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$.

1. בהינתן קבוצה X , נסמן ב- $\mathbb{F}^X$ את הקבוצה של כל הפונקציות מ- X ל- $\mathbb{F}$. זכרו כי ל- $\mathbb{F}^X$ יש מבנה טבעי של מרחב וקטורי.

   תהי $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{F}^{V \times V}$ קבוצת הפונקציות מ-$V \times V$ ל- $\mathbb{F}$ שהן מכפלה פנימית על V .

   (א) הראו כי $\mathcal{P}$ סגורה לחיבור ולכפל בסקלר חיובי (כלומר לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ ולכל $f \in \mathcal{P}$, גם $af \in \mathcal{P}$).

   (ב) האם $\mathcal{P}$ היא תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{F}^{V \times V}$?

2. יהיו $S, T \subseteq V$.

   (א) הוכיחו כי $S \subseteq \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$.

   (ב) הראו כי אם $S \subseteq T$, אז $T^{\perp} \subseteq S^{\perp}$.

3. נתבונן ב-$\mathbb{C}^4$ עם המכפלה הסקלרית. מצאו בסיס לתת-המרחב $\left\{ \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -1+i \\ -1-i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^{\perp}$.

4. יהי $V = \mathbb{R}^2$, ונגדיר $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 - 2\left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right) + 5 x_2 y_2$.

   זכרו כי על פי טענה מהתרגול זוהי מכפלה פנימית על V . מצאו בסיס לתת-מרחב $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^{\perp}$.

5. בתרגול ראיתם את המרחב $V = M_n(\mathbb{C})$ עם המכפלה הפנימית $\langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr}\left(\overline{A}^t B\right)$.

   (א) הראו כי הפונקציה $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ היא אכן מכפלה פנימית.

   (ב) הניחו כי $n = 2$, ומצאו בסיס לתת-מרחב $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{\perp}$.

6. יהי $V = C([0, 2\pi])$ מרחב הפונקציות הרציפות על הקטע $[0, 2\pi]$, עם המכפלה הפנימית $\langle f \mid g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx$.

   לכל $n \in \mathbb{N}$, תהי $f_n \in V$ הפונקציה $f_n(x) = \sin(nx)$.

   הוכיחו כי לכל $m, n \in \mathbb{N}$ כך ש- $n \neq m$ מתקיים $\langle f_n \mid f_m \rangle = 0$, כלומר כל איבר ב- $\{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$ ניצב לכל איבר אחר בה.

   רמז: השתמשו בזהות $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$.

7. יהי $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ מרחב הפולינומים הממשיים מדרגה לכל היותר 2.

   תהי $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ הפונקציה $\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(x) Q(x)\, dx$. תהי $S = \{X\}$. מצאו בסיס ל-$S^{\perp}$.

8. יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו את נוסחת הפולריזציה המרוכבת:

$$\forall u, v \in V \quad \langle u \mid v \rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 - i\,\|u+i\,v\|^2 + i\,\|u-i\,v\|^2\right)$$