פתרון תרגיל מספר 2 - דאסט

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

26 במרץ 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \in \Theta(n)$

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה כי $T(n) \le 2n$.

בסיס: $n = 1$,

$$T(1) = 1 \le 2 \cdot 1$$

כלומר הטענה נכונה ל$n = 1$

שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה לכל $k < n$ ונראה שהיא נכונה לn

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \le 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \le n + n = 2n$$

כלומר הטענה נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$, לכן $\forall n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\boxed{n \le T(n) \le 2 \cdot n}$

לכן $\boxed{g(n) = n}$, מקיים את הנדרש של החסם העליון המינימלי ל$T(n)$ כי $T(n) \in \Theta(n)$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $T(n) = 2 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \in \Theta(n \cdot \log_2(n))$

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה כי $T(n) \le 2 \cdot n \cdot \log_2(n)$.

בסיס: $n = 2$,

$$T(2) = 2 + 2 = 4 \le 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot \log_2(2)$$

כלומר הטענה נכונה ל$n = 2$

שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה לכל $k < n$ ונראה שהיא נכונה לn

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \le 2 \cdot 2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \log_2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \le 2n \cdot \left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right) + 1\right)$$
$$= 2n \cdot \log_2(n)$$

כלומר הטענה נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$, לכן $1 < \forall n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\boxed{T(n) \le 2n \cdot \log_2(n)}$

לכן $\boxed{g(n) = n \cdot \log_2(n)}$, מקיים את הנדרש של החסם העליון ל$T(n)$, כלומר $T(n) \in O(n \cdot \log_2(n))$ וגם מתקיים

$$T(n) = \sum_{i=1}^{\log_2(n)} \left[2^i \cdot \frac{n}{2^i}\right] = \sum_{i=1}^{\log_2(n)} n = n \cdot \log_2(n) \ge \frac{1}{2} \cdot n \cdot \log_2(n)$$

לכן $T(n) \in \Theta(n \cdot \log_2(n))$, ולכן זהו החסם העליון המינימלי על $T(n)$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $T(n)=2\cdot T\left(\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor\right)+3\cdot T\left(\left\lfloor\frac{n}{10}\right\rfloor\right)+n\in\Theta(n)$

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה כי $T(n)\le 4\cdot n$,

<u>בסיס:</u> $n=1,2,3,$,

$$T(1)=1\le 4;T(2)=2\le 8;T(3)=3\le 12;T(4)=4\le 16$$

כלומר הטענה נכונה ל$n=1,2,3,4$

<u>שלב האינדוקציה:</u> נניח שהטענה נכונה לכל $k<n$ ונראה שהיא נכונה לn

$$\begin{aligned}T(n)&=2\cdot T\left(\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor\right)+3\cdot T\left(\left\lfloor\frac{n}{10}\right\rfloor\right)+n\le 2\cdot 4\cdot\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor+3\cdot 4\cdot\left\lfloor\frac{n}{10}\right\rfloor+n\\&\le\frac{8}{5}n+\frac{12}{10}n+n=n\cdot\frac{38}{10}\le 4n\end{aligned}$$

כלומר הטענה נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$, לכן $\forall n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\boxed{T(n)\le 4n}$

לכן $\boxed{g(n)=n}$, מקיים את הנדרש של החסם העליון ל$T(n)$, כלומר $T(n)\in O(n)$ וגם מתקיים

$$T(n)=2\cdot T\left(\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor\right)+3\cdot T\left(\left\lfloor\frac{n}{10}\right\rfloor\right)+n\ge n$$

לכן $T(n)\in\Theta(n)$, ולכן זהו החסם העליון המינימלי על $T(n)$

מ.ש.ל.ג.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $T(n)=2T\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)+\sqrt{n}$

הוכחה:

נשים לב כי

$$T(n)=2T\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)+\sqrt{n}=T(n)=2T\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)+n^{\frac{1}{2}}$$

נשים לב כי עבור $a=2,b=4,k=\frac{1}{2}$ מתקיים $T(n)=a\cdot T\left(\frac{n}{b}\right)+\Theta\left(n^k\right)$,

נשים לב כי $\boxed{q=1}\Rightarrow q=\frac{a}{b^k}=\frac{2}{\sqrt{4}}=1$, לכן ממשפט האב הפשוט מתקיים כי

$$T(n)=a\cdot T\left(\frac{n}{b}\right)+\Theta\left(n^k\right)\in\Theta\left(n^k\cdot\log(n)\right)=\Theta\left(\sqrt{n}\cdot\log(n)\right)$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $T(n)=2T\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)+n^{0.51}$

הוכחה:

נשים לב כי עבור $a=2,b=4,k=0.51$ מתקיים $T(n)=a\cdot T\left(\frac{n}{b}\right)+\Theta\left(n^k\right)$,

נשים לב כי $\boxed{q<1}\Rightarrow q=\frac{a}{b^k}<\frac{2}{\sqrt{4}}=1$, לכן ממשפט האב הפשוט מתקיים כי

$$T(n)=a\cdot T\left(\frac{n}{b}\right)+\Theta\left(n^k\right)\in\Theta\left(n^k\right)=\Theta\left(n^{0.51}\right)$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $T(n)=\sqrt{2}T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+\log(n)$

הוכחה:

נסמן $T(n)=aT\left(\frac{n}{b}\right)+f(n)$, נסמן $p=\log_b(a)$, נשים לב כי $f(n)=\log(n)\in O\left(n^{\frac{1}{4}}\right)$,

נשים לב כי $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(n)\le 5\cdot n^{\frac{1}{4}}=5\cdot n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=5\cdot n^{\log_b(a)-\frac{1}{4}}$ (להסתכל על ההפרש, לגזור, לראות שמונוטוני עולה וחיובי ב0)

לכן ממשפט האב הכללי מתקיים $T(n)\in\Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)=\Theta\left(n^{\frac{1}{2}}\right)=\Theta\left(\sqrt{n}\right)$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $T(n) = 16T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n!$

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה כי $T(n) \leq 3 \cdot n!$

<u>בסיס:</u> $n = 1, 2, 3$

$$T(1) = 1! \leq 3 \cdot 1!$$
$$T(2) = 2! \leq 3 \cdot 2!$$
$$T(3) = 3! \leq 3 \cdot 3!$$

<u>שלב:</u> נניח שהטענה נכונה לכל $k < n$ ונראה שהיא נכונה לn

$$T(n) = 16T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n! \leq 16 \cdot 3 \cdot \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor ! + n! \leq \frac{16 \cdot 3 \cdot n!}{4!} + n! = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot n! + n! = 3 \cdot n!$$

לכן $T(n) \leq 3 \cdot n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, כלומר $T(n) \in O(n!)$

וגם מתקיים $T(n) \geq n!$ לכן $T(n) \in \Omega(n!)$, לכן $\boxed{T(n) \in \Theta(n!)}$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** $T(n) = 14T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 50n^3 + 4n^2 - 1$

הוכחה:

נשים לב כי $4n^2 - 1 \in o\left(n^3\right)$ וגם $50n^3 \in \Theta\left(n^3\right)$,

לכן ממשפט שראינו בכיתה מתקיים כי $50n^3 + \left(4n^2 - 1\right) \in \Theta\left(n^3\right)$,

לכן $T(n) = 14T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \Theta\left(n^3\right)$,

נשים לב כי עבור $a = 14, b = 2, k = 3$ מתקיים $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta\left(n^k\right)$,

נשים לב כי $\boxed{q > 1}$ $q = \frac{a}{b^k} = \frac{14}{8} > 1 \Rightarrow$, לכן ממשפט האב הפשוט מתקיים כי

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta\left(n^k\right) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right) = \Theta\left(n^{\log_2(14)}\right)$$

מ.ש.ל.ה.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $10 \log n + 10 \in \Theta(\log(n))$

הוכחה:

נכון! נשים לב כי $10 \in o(\log(n))$ וגם $10 \cdot \log(n) \in \Theta(\log(n))$,

לכן ממשפט שראינו בכיתה מתקיים כי $\boxed{10 \log n + 10 \in \Theta(\log(n))}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $(\exists c > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq c \cdot g(n))$

הוכחה:

נכון! מהיות $f \in O(g)$, $\exists c > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n \in \mathbb{N} > n_0$ מתקיים $f(n) \leq c \cdot g(n)$,

נגדיר $c' = \max\left\{\frac{f(1)}{g(1)}, \ldots, \frac{f(n_0)}{g(n_0)}, c\right\}$,

יהי $n \in \mathbb{N}$, אם $n > n_0$ אזי $f(n) \leq c \cdot g(n) \leq c' \cdot g(n)$,

אחרת $f(n) = \frac{f(n)}{g(n)} \cdot g(n) \leq c' \cdot g(n)$,

לכן $(\exists c > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq c \cdot g(n))$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $f \in o(g) \Rightarrow f \notin \Theta(g)$
הוכחה:
נכון! נניח בשלילה כי $f \in \Theta(g)$, אזי $f \in \Omega(g)$,
לכן $\exists c > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n \in \mathbb{N} > n_0$ מתקיים $c \cdot g(n) \leq f(n)$,
לכן $c \leq \frac{f(n)}{g(n)}$ כמעט תמיד, וממונוטוניות הגבול נובע כי $0 < c \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$,
לכן $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0$, לכן $f \notin o(g)$ בסתירה להנחה, לכן $\boxed{f \notin \Theta(g)}$
מ.ש.ל.ג.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** יעילות אלגוריתם מינימום ו$T(n)$
הוכחה:
נשים לב כי $T(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ T(n-1) + 2 & n \neq 1 \end{cases}$,
נוכיח באינדוקציה כי $T(n) = 2n$,
<u>בסיס:</u>

$$T(1) = 2 = 2 \cdot 1$$

<u>שלב:</u> נניח שהטענה נכונה לn ונראה שהיא נכונה ל$n+1$

$$T(n+1) = T(n) + 2 = 2 \cdot n + 2 = 2(n+1)$$

לכן $T(n) = 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, לכן $\boxed{T(n) \in \Theta(n)}$
מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $T(n)$ אלגוריתם מקסימום
הוכחה:
נשים לב כי

$$T(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 2 & n \neq 1 \end{cases}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $T(n)$ אלגוריתם פיבונאצ'י וO
הוכחה:
נשים לב כי

$$T(n) = \begin{cases} 3 & n = 1 \\ 3 & n = 2 \\ T(n-1) + T(n-2) + 2 & n \neq 1, 2 \end{cases}$$

נוכיח באינדוקציה כי $T(n) \leq 8 \cdot 2^n$
<u>בסיס:</u> $n = 1, 2$

$$T(1) = 3 \leq 8$$
$$T(2) = 3 \leq 16$$

<u>שלב:</u> נניח שהטענה נכונה לכל $k < n$ ונראה שהיא נכונה לn

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 2 = 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2 \leq \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+3} = 8 \cdot 2^n$$

לכן $T(n) \leq 8 \cdot 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, לכן $T(n) \in O(2^n)$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $T(n)$ אלגוריתם חזקה 1
הוכחה:
נשים לב כי

$$T(n)=\begin{cases}2 & n=1\\ 2+T(n-1) & n\neq 1\end{cases}$$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** $T(n)$ אלגוריתם חזקה 1
הוכחה:
נשים לב כי

$$T(n)=\begin{cases}2 & n=1\\ 3+T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) & n\neq 1\end{cases}$$

מ.ש.ל.ה.☺

5. **צ"ל:** נכונות אלגוריתם $merge, mergesort$
הוכחה:
תחילה נוכיח את נכונות אלגוריתם $merge$,
נרצה להראות כי לכל הרצה של הלולאה בפעם הn:

- המערך $result[0:n-1]$ ממוין
- לכל $i\leq i'$, $j\leq j'$ מתקיים $result[n-1]\leq arr1[i]\leq arr1[i']$ וגם $result[n-1]\leq arr2[j]\leq arr2[j']$

נסמן $n_1=arr1.length$, $n2=arr2.length$, נראה את שמורת הלולאה באינדוקציה:
בסיס: $n=0$, נחלק למקרים:

- אם $i=n1$, אז $result[0]=arr2[0]$, הוא ממוין כי מכיל רק איבר אחד, וגם מתקיים $arr2[0]\leq arr2[j']$ כי $arr2$ ממוין, וגם ב$arr1$ אין איברים כי $i=0=n1$.
- אחרת, אם $arr1[0]\leq arr2[0]$ or $j=n2$, אז $result[0]=arr1[0]$, הוא ממוין כי מכיל רק איבר אחד, וגם מתקיים $arr1[0]\leq arr1[i']$ כי $arr1$ ממוין, וגם $result[0]=arr1[0]\leq arr2[0]\leq arr2[j']$ כי $arr1$ ממוין או שאין איברים ב$arr2$ ואז התנאי מתקיים באופן ריק.
- אחרת מתקיים $arr2[0]<arr1[0]$, הוא ממוין כי מכיל רק איבר אחד, וגם מתקיים $arr2[0]\leq arr2[j']$ כי $arr2$ ממוין, וגם $result[0]=arr2[0]<arr1[0]\leq arr1[i']$ כי $arr2$ ממוין

שלב: נניח שהטענה נכונה לn ונראה שהיא נכונה ל$n+1$

- אם $i=n1$, אז $result[n]=arr2[j]$, הוא ממוין כי מהנחת האינדוקציה המערך $result[0:n-1]$ ממוין וגם מהנחה השנייה מתקיים $result[n-1]\leq arr2[j]=result[n]$, כלומר המערך ממוין, וגם מתקיים $result[n]=arr2[j]\leq arr2[j']$ כי $arr2$ ממוין, והתנאי על $arr1$ מתקיים באופן ריק
- אחרת, אם $arr1[i]\leq arr2[j]$ or $j=n2$, אז $result[n]=arr1[i]$, הוא ממוין כי מהנחת האינדוקציה המערך $result[0:n-1]$ ממוין וגם מהנחה השנייה מתקיים $result[n-1]\leq arr1[i]=result[n]$, וגם מתקיים $result[n]=arr1[i]\leq arr1[i']$ כי $arr1$ ממוין, וגם $result[n]=arr1[i]\leq arr2[j]\leq arr2[j']$ כי $arr1$ ממוין או שאין איברים ב$arr2$ ואז התנאי מתקיים באופן ריק.
- אחרת מתקיים $arr2[j]<arr1[i]$, הוא ממוין כי מהנחת האינדוקציה המערך $result[0:n-1]$ ממוין וגם מתקיים וגם מתקיים $result[n]=arr2[j]\leq arr2[j']$ כי $arr2$ ממוין, וגם $result[n]=arr2[j]<arr1[i]\leq arr1[i']$ כי $arr1$ ממוין

לכן, בכל שלב בלולאה המערך נשאר ממוין ומכיוון שבכל פעם אחד האינדקסים מתקדם, אף איבר לא מופיע פעמיים, ונעשות $n_1 + n_2$ השמות אז המערך מכיל כל איבר ב$arr1, arr2$ פעם אחת בלבד.
לכן המערך $result$ המוחזר בסוף הריצה, מכיל את איברי $arr1, arr2$ באופן ממוין.

עתה נוכיח את נכונות אלגוריתם $mergesort$,
נוכיח באינדוקציה על גודל המערך:
<u>בסיס:</u> אם $n = 1$, אז האאלגוריתם מחזיר את המערך עצמו שהוא כבר ממוין כנדרש
<u>שלב:</u> נניח שהאלגוריתם נכון לכל $k < n$ ונראה שהוא נכון לn.
מהנחת האינדוקציה first_half,second_half מכילים את חלקי המערך ממוינים כי גודלם קטן מn ואת כל איברי המערך המקורי.
האלגוריתם מחזיר את $merge\left(first\_half, second\_half\right)$.
הראנו לעיל שהאלגוריתם $merge$ מחזיר מערך ממוין של שני המערכים הממוינים שקיבל.
לכן $merge$ מחזיר את המערך הנדרש באורך n כי first_half,second_half מכילים ביחד את כל המערך שהתבקל בקריאה לפונקציה.

מ.ש.ל.☺