

## הסתברות 1 - תרגיל 5

1. ניזכר בבעיה הבאה, בה דנתם בכיתה: בידי מהמר בקזינו  $k$  שקלים. הקזינו מספק למהמר מטבע שנופל על ראש בהסתברות  $p$ , כאשר  $p < \frac{1}{2}$ . המהמר מטיל את המטבע. אם יצא ראש, הוא מרוויח שקל, ואחרת הוא מפסיד שקל. יהא  $K > k$ . כללי המשחק הם שאם המהמר מרוויח לפחות  $K$  שקלים הקזינו לא נותן לו לשחק יותר, ואם המהמר מפסיד את כל כספו אז מצפוניו מאלץ אותו להפסיק לשחק. בהנחה וההטלות ב"ת, מה ההסתברות שהמהמר יפסיד את כל כספו? **הדרכה** נסמן ב  $p_k$  את ההסתברות שהמהמר יפסיד כל כספו בהנחה והוא התחיל עם  $0 < k < K$  שקלים. הוכיחו שמתקיים

$$p_k = p \cdot p_{k+1} + (1 - p) \cdot p_{k-1}$$

חשבו גם את הגדלים  $p_0$  וכן  $p_K$ . כעת, מצאו נוסחא כללית לגודל  $p_k$ .

2. יהי  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ .

(א) איזה ערך (או ערכים) של  $p$  ממקסם את  $P(X = k)$ , עבור  $0 \leq k \leq n$  טבעי? הוכיחו את טענתכם.  
(ב) יהי  $Y \sim \text{Bin}(n, 1 - p)$ . נסמן  $F_Y(k) = P(Y \leq k)$ ,  $F_X(k) = P(X \leq k)$ . הראו ש-  
 $F_X(i) = 1 - F_Y(n - i - 1)$ .

3. יהא  $X \sim \text{Geo}(p)$ .

(א) הראו שלכל  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P(X > k) = (1 - p)^k$ .  
(ב) הוכיחו את תכונת חוסר הזיכרון של  $X$ , כלומר שלכל  $n, k \in \mathbb{N}$   
 $P(X = n + k | X > k) = P(X = n)$

(ג) הראו כי משתנה מקרי המקבל ערכים בקבוצה  $\mathbb{N}$  ומקיים את תכונת חוסר הזיכרון שהוגדרה בסעיף (ב) מתפלג גיאומטרי. (כלומר: הראו שקיים  $p$  כלשהו כך שפונקציית ההתפלגות האטומית של  $X$  שווה לפונקציית ההתפלגות האטומית של  $(X \sim \text{Geo}(p))$ ).

4. אדם שיכור חוזר לביתו ובידו צרור של  $n$  מפתחות. הוא שולף מפתח באקראי ומנסה לפתוח עמו את הדלת. כאשר המפתח אינו מתאים הוא מחזיר אותו לצרור וכמקודם שולף מפתח באקראי. נסמן את המשתנה המקרי  $X$  להיות מספר הנסיונות של השיכור עד שהצליח לפתוח את דלתו.

(א) מהי התפלגות  $X$ ?

(ב) מה היתה התפלגות, אילו השיכור היה זורק את המפתחות שלא התאימו במקום להחזיר אותם לצרור?

5. במשפט עם מושבעים יש 12 מושבעים. יש צורך ב-9 מושבעים שיצביעו "אשם" ע"מ להרשיע נאשם. נניח שהמושבעים מצביעים באופן ב"ת אחד בשני. עוד נניח שההסתברות שמושבע ירשיע אדם חף מפשע היא 0.1 וההסתברות שמושבע יזכה אדם אשם היא 0.2.  
לבסוף, נניח ש-65% מהנאשמים הם אכן אשמים.  
מהי ההסתברות שפסק הדין שיתנו המושבעים הוא נכון?

6. פתרו את הסעיפים הבאים. בכל אחד מהם הגדירו משתנה מקרי מתאים והשתמשו בו בפתרון.

(א) ההסתברות שמחשב יתקלקל ביום כלשהו היא קבועה וב"ת בין הימים, ושווה ל  $\frac{1}{10}$ . מה ההסתברות שהמחשב יפעל לפחות 7 ימים מלאים?

(ב) בכד ישנם  $N$  כדורים לבנים ו- $M$  כדורים שחורים. בכל שלב מוצאים כדור אחד, בוחנים אותו, ואז מחזירים אותו לכד. מפסיקים את הניסוי כאשר מקבלים כדור שחור. עבור  $k$  נתון, חשבו את ההסתברות שהיינו זקוקים ל- $k$  ניסיונות בדיוק. עבור  $n$  נתון, חשבו גם את ההסתברות שהיינו זקוקים לפחות  $n$  ניסיונות.

(ג) אריק ובנץ משחקים בסידרת המשחקים הבאה: יש קופה עם מספר סופי  $N$  של מטבעות. בכל משחק כל שחקן מטיל קובייה הוגנת. אם אחד מהם קיבל יותר מהשני - הוא מקבל מטבע אחד מהקופה. אם שניהם קיבלו את אותה התוצאה, אף אחד לא מקבל כלום. המשחק נגמר כשהקופה ריקה. יהא  $X$  הרווח של אריק מהמשחק. חשבו את התפלגות  $X$ . אם בנוסף נתון שבקופה יש 9 מטבעות, חשבו את ההסתברות שהם לא יספיקו לשחק 10 משחקים.