פתרון תרגיל מספר 8 ־ אינפי 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

18 בדצמבר 2018

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** האם האינטגרל הלא אמיתי $\int_0^1 \frac{1}{e^{x^2}-1}dx$ מתכנס?
הוכחה:
ראינו בהרצאה כי טור טיילור של e^x מסדר 1 סביב $x=0$ הוא $1+x=T_1\exp(x)$,
לכן $\exists h(x)\in\mathbb{R}[x]$ כך ש$e^x=T_1\exp(x)+h(x)$ וגם $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x}=0$ לפי משפט שארית לגרנדז'
לכן $e^{x^2}=T_1\exp\left(x^2\right)+h\left(x^2\right)=1+x^2+h\left(x^2\right)$,
כלומר $e^{x^2}-1=x^2+h\left(x^2\right)$, לכן

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{e^{x^2}-1}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x^2+h\left(x^2\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\frac{h\left(x^2\right)}{x^2}}\overset{t=x^2}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{1+\frac{h(t)}{t}}=\frac{1}{1+0}=1$$

לכן ממבחן ההשוואה הגבולי לאינטגרלים לא מסוימים מתקיים כי $\int_0^1\frac{1}{e^{x^2}-1}dx$ מתכנס אם"ם $\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$ מתכנס,
נשים לב כי

$$\int_0^1\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to 0^+}\int_t^1\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{-1}{x}\right)|_t^1=\lim_{t\to 0^+}\left[-1+\frac{1}{t}\right]=\infty$$

לכן $\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$ מתבדר, לכן $\int_0^1\frac{1}{e^{x^2}-1}dx$ מתבדר

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם הטור $\sum\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$ מתכנס?
הוכחה:
ראינו בהרצאה כי טור טיילור של $\ln(1+x)$ מסדר 4 סביב $x=0$ הוא

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}=T_4\ln(1+x)$$

לכן $\exists h(x)\in\mathbb{R}[x]$ כך ש$\ln(1+x)=T_4\ln(1+x)+h(x)$ וגם $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^4}=0$ לפי משפט שארית לגרנדז'
לכן

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)=T_4\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)+h\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2\sqrt{n}^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{3\sqrt{n}^3}-\frac{1}{2\sqrt{n}^4}+h\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$$

לכן

$$\begin{aligned}\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) &= \sum\left[\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{3\sqrt{n}^3} - \frac{1}{2\sqrt{n}^4} + h\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)\right] \\ &= \sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \sum \frac{1}{2\sqrt{n}^2} + \sum \frac{(-1)^{n+1}}{3\sqrt{n}^3} - \sum \frac{1}{4\sqrt{n}^4} + \sum h\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \sum \frac{1}{2n} + \sum \frac{(-1)^{n+1}}{3\sqrt{n}^3} - \sum \frac{1}{4n^2} + \sum h\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

נשים לב כי $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{3\sqrt{n}^3}$ מונוטויות יורדות ושואפות לאפס, לכן ממשפט לייבניץ $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{3\sqrt{n}^3}, \sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ מתכנסים,
וגם ראינו בהרצאה כי $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס, לכן מתכונת לינאריות הטורים מתקיים כי $\sum \frac{1}{4n^2}$ מתכנס,
לכן נסמן $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = a, \sum \frac{1}{4n^2} = b, \sum \frac{(-1)^{n+1}}{3\sqrt{n}^3} = c$,
נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^4} \overset{\text{heine}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^4} = 0$$

לכן $h(x) \le \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^4 = \frac{1}{n^2}$ כמעט תמיד, וגם מתקיים כי $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס,
לכן ממבחן ההשוואה מתקיים כי $\sum h(x)$ מתכנס ונסמן $\sum h(x) = d$,
לכן

$$\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) = a+b+c+d-\sum \frac{1}{2n}$$

לכן $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$ מתכנס אם"ם $\sum \frac{1}{2n}$ מתכנס (כי השאר הם מספרים ואינם משנים בקביעת התכנסות הטור, ולכן נוכל להתעלם מהם)
בהרצאה ראינו שהטור ההרמוני $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר, לכן מתכונת לינאריות הטורים מתקיים כי $\sum \frac{1}{2n}$ מתבדר,
לכן $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$ מתבדר

מ.ש.ל.ב.☺

2. **צ"ל:** $\sum a_n$ מתכנס אם"ם $\sum b_n$ מתכנס
הוכחה:
$\Leftarrow$: נניח כי $\sum a_n$ ונראה כי $\sum b_n$ מתכנס,
נסמן $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$, מהיות $\sum a_n$ מתכנס, מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} S_n$ קיים במובן הצר.
נסמן $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$, נשים לב כי $T_n = S_{n_k}$, לכן ממשפט הירושה מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} T_n$ קיים במובן הצר.
כלומר מההגדרה מתקיים כי $\sum b_n$ מתכנס
$\Rightarrow$: נניח כי $\sum b_n$ ונראה כי $\sum a_n$ מתכנס
יהי $\varepsilon > 0$,
נסמן בM את החסם העליון של הסדרה החסומה $(n_{k+1} - n_k)_{k=1}^{\infty}$
נסמן $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$, מהיות $\sum b_n$ מתכנס, מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} T_n$ קיים במובן הצר.
מהגדרת הגבול, $\exists N_b \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n \in \mathbb{N} \ge N_b$ מתקיים $|T_n - \sum b_n| \overset{\star\star}{<} \frac{\varepsilon}{2}$,
נשים לב כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, לכן מהגדרת הגבול $\exists N_a \in \mathbb{N}$ כך ש$|a_n| \overset{\star}{<} \frac{\varepsilon}{2M}$,
נשים לב כי $\forall t \in \mathbb{N} \ge \max\{N_a, M\cdot N_b\}$, קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש$n_k \le t < n_{k+1}$ ומתקיים כי $t \ge N_a, k \ge N_b$,
כלומר t, k מקיימים את נתאים $\star, \star\star$

נשים לב ש$\forall t \in \mathbb{N}$, קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש$n_k \le t < n_{k+1}$

$$\begin{aligned}\left|S_t - \sum b_n\right| &= \left|\sum_{n=1}^{t} a_n - \sum b_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{n_k} a_n + \sum_{n=n_k+1}^{t} a_n - \sum b_n\right| \\ &\le \left|\sum_{n=1}^{n_k} a_n - \sum b_n\right| + \left|\sum_{n=n_k+1}^{t} a_n\right| \overset{\star,\star\star}{<} \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon\end{aligned}$$

כלומר S_n מתכנסת ואף לאותו הסכום! כלומר $\sum a_n$ מתכנס ממהגדרה

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** a_n כך ש$\sum a_n$ מתכנס ו $\sum a_n^3$ מתבדר

הוכחה:

נגדיר $a_n = \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{\sqrt[3]{n}}$, נראה כי $\sum a_n$ מתכנס ממבחן דריכלה,

נשים לב כי

$$\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{6\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right), \ldots\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \ldots\right)$$

לכן $\left|\sum_{n=1}^{N} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right| \le 1$, $\forall N \in \mathbb{N}$,

נשים לב כי $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ היא סדרה מונוטונית יורדת ושואפת ל0,

לכן ממבחן דריכלה מתקיים כי $\sum a_n = \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$ מתכנס,

נשים לב כי $a_n^3 = \frac{\cos^3\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{n}$, נזכר בזהות הבאה:

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \Rightarrow \cos^3(x) = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}$$

נציב $x = \frac{2\pi n}{3}$ ונקבל

$$\cos^3\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = \frac{\cos(2\pi n) + 3\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{4} = \frac{1 + 3\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{4}$$

לכן $a_n^3 = \frac{\frac{1+3\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{4}}{n} = \frac{1+3\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{4n} = \frac{1}{4n} + \frac{3\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{4n}$,

עתה נרצה להראות כי $\sum a_n^3 = \sum \left[\frac{1}{4n} + \frac{3\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{4n}\right] = \sum \frac{1}{4n} + \sum \frac{3\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{4n}$ לא מתכנס,

מהנימוק שהוצג לעיל, מתקיים $\left|\sum_{n=1}^{N} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right| \le 1$, $\forall N \in \mathbb{N}$,

וגם הסדרה $\frac{3}{4n}$ היא סדרה מונוטונית יורדת ושואפת ל0,

לכן ממבחן דריכלה מתקיים כי $\sum \frac{3}{4n} \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$ מתכנס ונסמן $\sum \frac{3}{4n} \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = \alpha$,

לכן $\sum a_n^3 = \sum \frac{1}{4n} + \alpha = \frac{1}{4}\sum \frac{1}{n} + \alpha$,

כלומר $\frac{1}{4}\sum \frac{1}{n}$ מתכנס אם"ם $\sum a_n^3$ מתכנס (כי השאר הם מספרים ואינם משנים בקביעת התכנסות הטור, ולכן נוכל להתעלם מהם)

ראינו בהרצאה כי הטור ההרמוני $\sum \frac{1}{n}$ לא מתכנס, לכן $\frac{1}{4}\sum \frac{1}{n}$ לא מתכנס,

ולכן $\sum a_n^3$ לא מתכנס

מ.ש.ל.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\frac{7}{12} < \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} < \frac{47}{60}$
הוכחה:
בהרצאה, בהוכחה של משפט לייבניץ ראינו כי $\forall n \in \mathbb{N}$ מתקיים $S_{2n} < \sum (-1)^{n+1} a_n < S_{2n+1}$ כאשר a_n סדרה מונוטונית יורדת ושואפת ל0,
נחשב S_4, S_5

$$S_4 = \sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12-6+4-3}{12} = \frac{7}{12}$$
$$S_5 = \sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{(-1)^{5+1}}{5} + S_4 = \frac{1}{5} + \frac{7}{12} = \frac{12+7\cdot 5}{60} = \frac{12+35}{60} = \frac{47}{60}$$

נשים לב כי $\frac{1}{n}$ סדרה מונוטונית יורדת ושואפת ל0,
לכן מהמשפט מתקיים $\frac{47}{60} < \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} < \frac{7}{12}$, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
הוכחה:
נגדיר $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, נגדיר b_n באופן הבא:

$$\underbrace{1}_{b_1} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{b_2} + \underbrace{\left(-\frac{1}{4}\right)}_{b_3} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{b_4} + \underbrace{\left(-\frac{1}{6}\right)}_{b_5} + \underbrace{\left(-\frac{1}{8}\right)}_{b_6} + \ldots$$

נגדיר $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$, $T_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$,
נשים לב כי

$$S_{2k} = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right] = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{2n-(2n-1)}{2n(2n-1)}\right] = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n(2n-1)}$$

וגם מתקיים

$$T_{3k} = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right] = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n}\right]$$
$$= \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n}\right] = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{2n-(2n-1)}{4n(2n-1)}\right] = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{1}{4n(2n-1)}\right]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2} \cdot S_{2k}$$

נשים לב כי $\frac{1}{n}$ מונוטונית יורדת ושואפת ל0, לכן ממשפט לייבניץ' מתקיים $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתכנס,
לכן $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum a_n$ קיים במובן הצר (מהגדרת התכנסות),
לכן ממשפט הירושה מתקיים כי S_{2n} (תת סדרה של S_n) מתכנס ומתקיים $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \sum a_n$,
נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} T_{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot S_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \sum a_n = \frac{1}{2} \cdot \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} T_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} T_{3n} + b_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot S_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{1}{2} \cdot \sum a_n + 0 = \frac{1}{2} \cdot \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} T_{3n+2} = \lim_{n\to\infty} T_{3n} + b_{3n+1} + b_{3n+2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot S_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)}\right] = \frac{1}{2} \cdot \sum a_n + 0 = \frac{1}{2} \cdot \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

לכן, נשים לב כי $\lim_{n\to\infty} T_{3n} = \lim_{n\to\infty} T_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} T_{3n+2} = \frac{1}{2}\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$,
לכן $\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{2}\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, כלומר מההגדרה מתקיים

$$\frac{1}{2}\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\dots$$

נשים לב כי $\frac{L}{2}\neq L$ כי ראינו בסעיף אחד $L=\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}>\frac{7}{12}>0$, לכן $\frac{L}{2}\neq L$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\frac{3}{2}\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots$

הוכחה:
נגדיר $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, נגדיר b_n כמו בסעיף הקודם ונגדיר c_n באופן הבא:

$$\underbrace{1}_{c_1}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)}_{c_2}+\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{c_3}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)}_{c_4}+\underbrace{\left(\frac{1}{7}\right)}_{c_5}+\underbrace{\left(-\frac{1}{4}\right)}_{c_6}+\dots$$

נגדיר $S_k=\sum_{n=1}^k a_n$, $T_k=\sum_{n=1}^k c_n$, $Z_k=\sum_{n=1}^k b_n$,
נשים לב כי

$$S_{2k}=\sum_{n=1}^k\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right]=\sum_{n=1}^k\left[\frac{2n-(2n-1)}{2n(2n-1)}\right]=\sum_{n=1}^k\frac{1}{2n(2n-1)}$$

וגם מתקיים

$$\begin{aligned}
T_{3k}+Z_{3k} &= \sum_{n=1}^k\left[\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right]+\sum_{n=1}^k\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right]\\
&=\sum_{n=1}^k\left[\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right]\\
&=\sum_{n=1}^k\left[\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right]+\sum_{n=1}^k\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right]\\
&=S_{4k}+S_{2k}\\
&\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\left[T_{3k}+Z_{3k}\right]=\lim_{k\to\infty}\left[S_{4k}+S_{2k}\right]=\lim_{k\to\infty}S_{4k}+\lim_{k\to\infty}S_{2k}\\
&=\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}=2\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}\\
&\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\left[T_{3k}+Z_{3k}\right]=2\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

נשים לב כי $\frac{1}{n}$ מונוטונית יורדת ושואפת ל0, לכן ממשפט לייבניץ' מתקיים $\sum a_n=\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתכנס,
לכן $\lim_{n\to\infty} S_n=\sum a_n$ קיים במובן הצר (מהגדרת התכנסות),
לכן ממשפט הירושה מתקיים כי S_{2n} (תת סדרה של S_n) מתכנס ומתקיים $\lim_{n\to\infty} S_{2n}=\sum a_n$,
מהסעיף הקודם ראינו כי $\sum b_n=\frac{1}{2}\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, לכן $\lim_{k\to\infty} Z_{3k}=\frac{1}{2}\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

נשים לב כי

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left[T_{3k}+Z_{3k}\right]=\lim_{k\to\infty}\left[S_{4k}+S_{2k}\right]=\lim_{k\to\infty}S_{4k}+\lim_{k\to\infty}S_{2k}\\
&=\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}=2\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}\\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\lim_{k\to\infty}T_{3k}=\lim_{k\to\infty}\left[T_{3k}+Z_{3k}\right]=2\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}\\
&\Rightarrow \lim_{k\to\infty}T_{3k}=\left(2-\frac{1}{2}\right)\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{3}{2}\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

בנוסף לכך נשים לב כי

$$\lim_{k\to\infty}T_{3k+1}=\lim_{k\to\infty}\left[T_{3k}+\frac{1}{4k+1}\right]=\frac{3}{2}\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}+0=\frac{3}{2}\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\lim_{k\to\infty}T_{3k+2}=\lim_{k\to\infty}\left[T_{3k}+\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+3}\right]=\frac{3}{2}\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}+0+0=\frac{3}{2}\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

לכן, נשים לב כי $\lim_{n\to\infty}T_{3n}=\lim_{n\to\infty}T_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}T_{3n+2}=\frac{3}{2}\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$,
לכן $\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{3}{2}\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, כלומר מההגדרה מתקיים

$$\frac{3}{2}\cdot\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots$$

נשים לב כי $\frac{3L}{2}\neq L$ כי ראינו בסעיף אחד $L=\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}>\frac{7}{12}>0$, לכן $\frac{3L}{2}\neq L$
מ.ש.ל.ג.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$ סדרה מונוטונית יורדת וחסומה
הוכחה:
נשים לב שבהוכחה של מבחן האינטגרל, קיבלנו שעבור פונקציה מונוטונית מתקיים

$$\int_1^n f(x)\,dx\le\sum_{i=1}^{n}f(i)\le f(1)+\int_1^n f(x)\,dx$$

נבחר $f(x)=\frac{1}{x}$, לכן

$$\sum_{i=1}^{n}f(i)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ge\int_1^n f(x)\,dx=\int_1^n\frac{1}{x}dx=\ln(x)\mid_1^n=\ln(n)-\ln(1)=\ln(n)-0=\ln(n)$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ge\ln(n)\Rightarrow a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\ge0\Rightarrow a_n\ge0$$

כלומר a_n חסומה מלרע על ידי 0, נשים לב כי

$$\begin{aligned}
a_n-a_{n+1}&=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right]-\left[\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right]\\
&=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\overset{\frac{n+1}{n}>1}{\ge}\frac{1}{n+1}>0\\
\Rightarrow\ & a_n-a_{n+1}>0\Rightarrow a_n>a_{n+1}
\end{aligned}$$

לכן a_n מונוטונית יורדת וחסומה מלרע, לכן a_n מתכנסת ונסמן $\lim_{n\to\infty}a_n=\gamma$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $a_n - a_m < \frac{1}{n}$

הוכחה:

נשים לב שבהוכחה של מבחן האינטגרל, קיבלנו שעבור פונקציה מונוטונית מתקיים

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \sum_{i=a}^{b} f(i) \le f(a) + \int_a^b f(x)\,dx$$

לכן

$$a_n - a_m = \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right] - \left[\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \ln(m)\right] = \sum_{k=n+1}^{m}\frac{-1}{k} + \ln(m) - \ln(n)$$
$$< \sum_{k=n+1}^{m}\frac{-1}{k} + \int_n^m \frac{1}{x}\cdot dx \le \sum_{k=n+1}^{m}\frac{-1}{k} + \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k} = \frac{1}{n}$$

כלומר $a_n - a_m < \frac{1}{n}$, כנדרש!

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\gamma + \ln(n) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \le \ln(n) + \gamma + \frac{1}{n}$

הוכחה:

תחילה נשים לב שמהסעיף הקודם אנחנו יודעים כי $a_n - a_m < \frac{1}{n}$, $1 \le n \le m \in \mathbb{N}$,
אנחנו יודעים מסעיף א שמתקיים כי a_n סדרה מונוטונית יורדת,
נשים לב כי

$$a_n - \gamma = \lim_{m\to\infty}(a_n - a_m) \overset{\star}{\le} \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

נשים לב ש$\star$ מתקיים ממונוטוניות הגבול,
לכן נוע כי $a_n - \gamma \le \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, כלומר

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma \le \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \le \ln(n) + \gamma + \frac{1}{n}$$

נשים לב כי a_n מונוטונית יורדת ממש (סעיף א) ושואפת לγ,
ולכן $\gamma = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, לכן

$$\gamma < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) \Rightarrow \gamma + \ln(n) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

נבחר את 2 האי שוויונות שקיבלנו ונקבל

$$\gamma + \ln(n) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \le \ln(n) + \gamma + \frac{1}{n}$$

מ.ש.ל.ג.☺