תרגיל 3 אלגברה לינארית 1

211747639

מיכאל גרינבאום

1. א. **צ"ל:** קיימת Q כך ש$QD = A$ כך שQ היא מכפלה של מטריצות אלמנטרית
נתון: D מטריצה מדורגת מצומצמת של A
הוכחה:
נסמן את המטריצות האלמנטריות המתאימות לפעולות השורה שנעשו על A כדי להגיע לD ב$E_1, \dots, E_k$
נשים לב כי $E_k \cdot \dots \cdot E_1 A = D$
נסמן בE_i^{-1} את המטריצה האלמנטרית בעלת הפעולה האלמנטרית ההפוכה לE_i, $1 \le \forall i \le k$
ולכן $E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_1 A = E_k^{-1} D$
נעשה זאת לכל מטריצה אלמנטרית ונקבל $A = E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1} D$
נסמן $Q = E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1}$ ונקבל $QD = A$

מ.ש.ל.א.☺

ב. **צ"ל:** העמודה הlית של A זהה לעמודה הi של Q
נתון: העמודה הlית של D היא e_i
הוכחה:
נסמן $Q = \begin{bmatrix} q_{1,1} & \cdots & q_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m,1} & \cdots & q_{m,m} \end{bmatrix}$
נשים לב כי $Q \cdot \vec{e_i} = \begin{bmatrix} q_{1,i} \\ q_{2,i} \\ \vdots \\ q_{m,i} \end{bmatrix}$

העמודה הl של A מוגדרת להיות העמודה הlית של D כפול Q והיא: $Q \cdot \vec{e_i} = \begin{bmatrix} q_{1,i} \\ q_{2,i} \\ \vdots \\ q_{m,i} \end{bmatrix}$

נשים לב כי העמודה הi של Q היא $\begin{bmatrix} q_{1,i} \\ q_{2,i} \\ \vdots \\ q_{m,i} \end{bmatrix}$
ולכן העמודה של הl של A שווה לעמודה הi של Q

מ.ש.ל.ב.☺

ג. **צ"ל:** המטריצה Q מתקבלת מהמטריצה A על ידי מחיקה של $n - m$ עמודות
נתון: בD אין שורות אפסים
הוכחה:
מהיות ובD אין שורות אפסים, קיימים בD m עמודות סטנדרטיות.
נסתכל על $\widehat{D}$ שהיא המטריצה D לאחר מחיקה של העמודות ללא איבר מוביל.
נסמן ב$\hat{A}$ את המטריצה A לאחר מחיקה של אותן עמודות שנמחקו מD.
נשים לב כי העמודה ה$1 \le \forall i \le m$ של A מוגדרת להיות העמודה הi של $\widehat{D}$ כפול Q.
נשים לב כי העמודה הi של $\widehat{D}$ שווה לe_i
ולכן מסעיף ב מתקיים שהעמודה הi של $\hat{A}$ שווה לעמודה ה i של Q.
נשים לב שהדבר מתקיים לכל $1 \le i \le m$ ולכן $Q = \hat{A}$.
נשים לב שכשמחקנו מA ומD עמודות, מחקנו $n - m$ עמודות כי יש n עמודות וm עם איבר מוביל.

מ.ש.ל.ג.☺

2. א. **צ"ל:** העמודה הl_iית של A זהה לעמודה הi של Q
נתון: D מטריצה מדורגת מצומצמת של A, l_i היא העמודה המכילה את האיבר המוביל בשורה i
הוכחה:
נשים לב כי העמודה הl_i של D היא e_i
ולכן ממה שהוכחנו בשאלה 1 סעיף 2 מתקיים שהעמודה הi של Q זהה לעמודה הl_i ש A.

מ.ש.ל.א.☺

ב. **צ"ל:** $P_1 = P_2$
נתון: $P_1, P_2 \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ וגם $r = m$, $D = P_1A = P_2A$
הוכחה:
מהיות P_1 מכפלה של מטריצות אלמנטריות, קיימות $E_1, \dots, E_k$ מטריצות אלמנטריות שעבורם מתקיים ש $P_1 = E_k \cdot \dots \cdot E_1$
מהיות P_2 מכפלה של מטריצות אלמנטריות, קיימות $E_{k+1}, \dots, E_l$ מטריצות אלמנטריות שעבורם מתקיים ש $P_2 = E_{k+1} \cdot \dots \cdot E_l$
נסמן בE_i^{-1} את המטריצה האלמנטרית בעלת הפעולה ההפוכה לE_i, $1 \le \forall i \le k + l$
נשים לב ש $E_k \cdot \dots \cdot E_1\mathrm{A} = D$ ולכן $E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1}D = A$
נסמן $Q_1 = \mathrm{E}_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1}$ ולכן $Q_1D = A$
נשים לב ש $E_{k+1} \cdot \dots \cdot E_l\mathrm{A} = D$ ולכן $E_{k+1}^{-1} \cdot \dots \cdot E_l^{-1}D = A$
נסמן $Q_2 = E_l^{-1} \cdot \dots \cdot E_{k+1}^{-1}$ ולכן $Q_2D = A$
נשים לב מהסעיף הקודם מתקיים כי העמודות הl_i של A שוות לעמודות הi של Q_1 וגם Q_2 לכל $1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{m}$
ולכן העמודות של Q_1 וQ_2 שוות לכל $1 \le i \le m$, כלומר $Q_1 = Q_2$
כלומר $E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1} = E_l^{-1} \cdot \dots \cdot E_{k+1}^{-1}$
ולכן $I_m = E_k \cdot \dots \cdot E_1 \cdot E_l^{-1} \cdot \dots \cdot E_{k+1}^{-1} = P_1 \cdot E_l^{-1} \cdot \dots \cdot E_{k+1}^{-1}$
נכפיל מימין בE_{k+1} ונקבל $E_{k+1} = P_1 \cdot E_l^{-1} \cdot \dots \cdot E_{k+2}^{-1}$
נעשה באופן דומה עד E_l ונקבל $P_2 = E_{k+1} \cdot \dots \cdot E_l = P_1$
ולכן $P_1 = P_2$

מ.ש.ל.ב.☺

3. **צ"ל:** לא תמיד $P_1 = P_2$
נתון: D מטריצה מדורגת מצומצמת של A ו$P_1, P_2 \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ כך ש$D = P_1A = P_2A$
הוכחה:
נבחר $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
נשים לב כי $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ וגם $D = P_1A = P_2A$
וגם מתקיים ש$\mathrm{P}_1 \neq P_2$

מ.ש.ל.☺

4. **צ"ל:** לא קיימת מטריצה T שעבורה מתקיים $\mathrm{TA} = \mathrm{I_n}$
נתון: $A \in M_{m\times n}(F)$ כך ש $\mathrm{m} < \mathrm{n}$. קיימת מטריצה S כך שמתקיים $AS = I_m$
הוכחה:
נשים לב מהיות $\mathrm{m} < \mathrm{n}$ קיימים אינסוף פתרונות למשוואה $\mathrm{A} \cdot \vec{\mathrm{x}} = \vec{0}$
נבחר $\vec{0} \neq \vec{\mathrm{x}}$ פתרון למשוואה.
תהי T מטריצה ולכן מתקיים ש $T \cdot A \cdot \vec{x} = T \cdot \vec{0} = \vec{0}$
נניח בשלילה כי $TA = I_n$ ולכן $\vec{0} = TA \cdot \vec{x} = \vec{x}$
בסתירה להנחה ש $\vec{0} \neq \vec{\mathrm{x}}$ פתרון למשוואה.
ולכן $TA \neq I_n$

מ.ש.ל.☺

5. א. **צ"ל:** קיים b שעבורו למערכת $A \cdot \overrightarrow{x} = b$ אין פתרון
נתון: $A \in M_{m\times n}(F)$ כך ש$n < m$
הוכחה:
נסמן בD את המטריצה המדורגת המצומצמת של A.
לכן קיימות מטריצות אלמנטריות $E_1, \dots, E_k$ שעבורן מתקיים $D = E_k \cdot \dots \cdot E_1 A$
נשים לב שיש פחות m איברים מובילים ולכן בD יש שורת אפסים לפחות.
ולכן נבחר $\hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, נשים לב שלמשוואה $D \cdot \overrightarrow{x} = \hat{b}$ אין פתרון
ולכן ל$E_k \cdot \dots E_1 A \cdot \overrightarrow{x} = \hat{b}$ אין פתרון
נסמן בE_i^{-1} את המטריצה האלמנטרית בעלת הפעולה האלמנטרית ההפוכה לE_i, $1 \le \forall i \le k$
ולכן $A \cdot \overrightarrow{x} = \hat{b} \cdot E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1}$ אין פתרון
נסמן $b = \hat{b} \cdot E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1}$ ונקבל של$A \cdot \overrightarrow{x} = b$ אין פתרון

מ.ש.ל.א.☺

ב. **צ"ל:** קיים b שעבורו למערכת $AB \cdot \overrightarrow{x} = b$ אין פתרון
נתון: $A \in M_{m\times n}(F)$ כך ש$n < m$ ו$B \in M_{n\times k}(F)$
הוכחה:
נסמן בD את המטריצה המדורגת המצומצמת של A.
לכן קיימות מטריצות אלמנטריות $E_1, \dots, E_k$ שעבורן מתקיים $D = E_k \cdot \dots \cdot E_1 A$
נשים לב שיש פחות m איברים מובילים ולכן בD יש שורת אפסים לפחות.
בנוסף לכך אם לD יש שורת אפסים אז למטריצה $D \cdot B$ יש שורת אפסים לכל מטריצה B בסדר מתאים. (מההגדרה של מכפלת מטריצות, נשים לב שהאיבר האחרון בכל שורה ייצא 0 ולכן תצא שורת אפסים, בהנחה ששורת האפסים היא בשורה האחרונה)
ולכן נסמן ב$D \cdot B = C$, נשים לב שלC יש שורת אפסים
ולכן נבחר $\hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, נשים לב שלמשוואה $C \cdot \overrightarrow{x} = \hat{b}$ אין פתרון
ולכן ל$E_k \cdot \dots E_1 AB \cdot \overrightarrow{x} = \hat{b}$ אין פתרון
נסמן בE_i^{-1} את המטריצה האלמנטרית בעלת הפעולה האלמנטרית ההפוכה לE_i, $1 \le \forall i \le k$
ולכן $AB \cdot \overrightarrow{x} = \hat{b} \cdot E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1}$ אין פתרון
נסמן $b = \hat{b} \cdot E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1}$ ונקבל של$AB \cdot \overrightarrow{x} = b$ אין פתרון

מ.ש.ל.ב.☺

ג. **צ"ל:** לא בהכרח קיימת מטריצה C כך שלכל b קיים פתרון ל$(CA) \cdot \overrightarrow{x} = b$
נתון: $A \in M_{m\times n}(F)$ כך ש$n < m$
הוכחה:
נבחר $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, נשים לב כי$n = 1, m = 2$ ולכן $n < m$
נסמן C מסדר $r \times 2$ ונקבל ש$CA = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$
ולכן לכל $x \in \mathbb{R}^r$ מתקיים כי $(CA) \cdot x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

ולכן ל $b = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ אין פתרון.

<u>מ.ש.ל.ג.☺</u>

6. א. **<u>צ"ל:</u>** מצאו P ריבועית שהיא מכפלה של מטריצות אלמנטריות כך שPA מדורגת מצומצמת
<u>נתון:</u> $A = I_n$
<u>הוכחה:</u>
נבחר $P = I_n$ ולכן $PA = I_n$ שהיא מדורגת מצומצמת.
נשים לב כי P היא אלמנטרית המתקבלת על ידי החלפת 2 שורות פעמיים (לדוגמא)

<u>מ.ש.ל.א.☺</u>

ב. **<u>צ"ל:</u>** מצאו P ריבועית שהיא מכפלה של מטריצות אלמנטריות כך שPA מדורגת מצומצמת
<u>נתון:</u> $A = \begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{bmatrix}$
<u>הוכחה:</u>

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}0&1&1&1&1&0&0\\1&0&1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&1&0&0\\0&1&-1&0&0&-1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&1&0&0\\0&0&-2&-1&-1&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{2}R_3}\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2\to R_2-R_3]{R_1\to R_1-R_3}\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

ולכן $P = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$ ומתקיים כי $PA = \begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ כאשר P מכפלה של מטריצות אלמנטריות

<u>מ.ש.ל.ב.☺</u>

ג. **<u>צ"ל:</u>** מצאו P ריבועית שהיא מכפלה של מטריצות אלמנטריות כך שPA מדורגת מצומצמת
<u>נתון:</u> $A = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$
<u>הוכחה:</u>

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc}0&0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_4\to R_4-R_3]{R_2\to R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|cccc}0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&-1&1&0&0\\1&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&-1&1&0&0\\0&0&0&0&0&-1&1\end{array}\right]$$

ולכן $P=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$ ומתקיים כי $PA=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ כאשר P מכפלה של מטריצות אלמנטריות

__מ.ש.ל.ג.☺__

ד. **__צ"ל:__** מצאו P ריבועית שהיא מכפלה של מטריצות אלמנטריות כך שPA מדורגת מצומצמת

__נתון:__ $A=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\3&1&2&4\\4&3&1&2\\2&4&3&1\end{bmatrix}$

__הוכחה:__

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&4&3&1&0&0&0\\3&1&2&4&0&1&0&0\\4&3&1&2&0&0&1&0\\2&4&3&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3-4R_1]{R_2\to R_2-3R_1}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&4&3&1&0&0&0\\0&-5&-10&-5&-3&1&0&0\\0&-5&-15&-10&-4&0&1&0\\2&4&3&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2\to -\frac{1}{5}R_2]{R_4\to R_4-2R_1}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&4&3&1&0&0&0\\0&\frac{1}{1}&2&1&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&0&0\\0&-5&-15&-10&-4&0&1&0\\0&0&-5&-5&-2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_4\to -\frac{1}{5}R_4]{R_3\to -\frac{1}{5}R_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&4&3&1&0&0&0\\0&\frac{1}{1}&2&1&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&0&0\\0&\frac{1}{1}&3&2&\frac{4}{5}&0&-\frac{1}{5}&0\\0&0&\frac{1}{1}&1&\frac{2}{5}&0&0&-\frac{1}{5}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&4&3&1&0&0&0\\0&\frac{1}{1}&2&1&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&0&0\\0&0&\frac{1}{1}&1&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&0\\0&0&\frac{1}{1}&1&\frac{2}{5}&0&0&-\frac{1}{5}\end{array}\right]\xrightarrow[R_1\to R_1-2R_2]{R_4\to R_4-R_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&0&0\\0&\frac{1}{1}&2&1&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&0&0\\0&0&\frac{1}{1}&1&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&0\\0&0&\frac{0}{1}&0&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&0&0\\0&\frac{1}{1}&0&-1&\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}&0\\0&0&\frac{1}{1}&1&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&0\\0&0&\frac{0}{1}&0&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}\end{array}\right]$$

ולכן $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1&2&0&0\\1&-3&2&0\\1&1&-1&0\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&0&0\\\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}&0\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&0\\\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}\end{bmatrix}= P$ ומתקיים

כי $PA=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ כאשר P מכפלה של מטריצות אלמנטריות

מ.ש.ל.ד.☺