פתרון תרגיל מספר 8 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

4 ביוני 2020

שאלה 4

סעיף 1

צ"ל: מספר השפות שהן $\text{RE} - hard$ הוא לא בן מנייה

הוכחה:

תחילה נוכיח טענת עזר: $|\text{RE}| = \aleph_0$

ראינו בהרצאה שניתן לקודד כל מכונת טיורינג למילה עם 3 אותיות ולכן $|\{\langle M\rangle\}| \le \left|\{a,b,c\}^*\right| = \aleph_0$

תהי $L \in \text{RE}$ אזי קיימת M מ"ט כך ש־ $L(M) = L$ (לשפות שונות ה־ M שונה)

ולכן $\boxed{|\text{RE}| \le |\{\langle M\rangle\}| = \aleph_0}$

נשים לב כי $L_n = \{0^n1^n\}$ היא שפה ב־ R (נעבור על המילה ונבדוק אם היא מהצורה 0^n1^n)

ולכן $\aleph_0 \ge |\text{RE}| \overset{R\subseteq\text{RE}}{\ge} |R| \ge |\{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0$, ולכן $\boxed{|\text{RE}| = \aleph_0}$

מ.ש.ל.א.עזר.☺

עתה נעזר בטענת עזר כדי להוכיח שמספר השפות שהן $\text{RE} - hard$ הוא לא בן מנייה.

נגדיר תכונה סמנטית $P_{L'} = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in L'\}$ לכל $L' \subseteq \text{RE} \setminus \{\emptyset\}$.

תחילה נוכיח שזה אכן תכונה סמנטית, יהי $L' \subseteq \text{RE} \setminus \{\emptyset\}$, יהיו M_1, M_2 מ"ט כך ש־ $L(M_1) = L(M_2)$ נשים לב כי

$$\langle M_1\rangle \in P_{L'} \iff L(M_1) \in L' \overset{L(M_1)=L(M_2)}{\iff} L(M_2) \in L' \iff \langle M_2\rangle \in P_{L'}$$

עתה יהיו $L_1 \ne L_2 \subseteq \text{RE} \setminus \{\emptyset\}$ ונראה כי $L_{P_{L_1}} \ne L_{P_{L_2}}$,

נשים לב כי $L_1 \ne L_2$ ולכן קיים $l \in \text{RE} \setminus \{\emptyset\}$ כך ש־ $l \in L_1 \wedge l \notin L_2$ (בלי הגבלת הכלליות)

לכן מהיות $l \in \text{RE} \setminus \{\emptyset\}$ קיים M כך ש־ $L(M) = l$ ולכן

$$L(M) = l \in L_1 \Rightarrow \langle M\rangle \in L_{P_{L_1}}$$
$$L(M) = l \notin L_2 \Rightarrow \langle M\rangle \notin L_{P_{L_2}}$$

ולכן $\boxed{L_{P_{L_1}} \ne L_{P_{L_2}}}$. כלומר הראנו שיש תכונה סמנטית $P_{L'}$ כך ששפתו שונה מכל $L'' \subseteq \text{RE} \setminus \{\emptyset\}$.

עתה נזכר במשפט רייס שאומר שכל תכונה סמנטית P כך ש־ $T_\emptyset \notin P$ כאשר $L(T_\emptyset) = \emptyset$ מתקיים כי $A_{TM} \le_m L_P$.

נשים לב כי לכל $\emptyset \ne L' \subseteq \text{RE} \setminus \{\emptyset\}$ מתקיים $T_\emptyset \notin P_{L'}$ בגלל ש־ $\emptyset \notin L'$, וגם $P_{L'}$ לא טריוויאלית ולכן לפי משפט רייס מתקיים $A_{TM} \le_m L_{P_{L'}}$.

תהי $L'' \in \text{RE}$, ראינו ש־ A_{TM} היא $\text{RE} - hard$ ולכן $L'' \le_m A_{TM} \le_m L_{P_{L'}}$

ולכן $L_{P_{L'}}$ היא $\text{RE} - hard$ לכל $L' \subseteq \text{RE} \setminus \{\emptyset\}$, $\star$

לכן

$$|\{L \mid L \text{ is RE hard}\}| \overset{\star}{\ge} \left|\left\{L_{P_{L'}} \mid \emptyset \ne L' \subseteq \text{RE} \setminus \{\emptyset\}\right\}\right| \overset{\star\star}{=} |\{\emptyset \ne L' \subseteq \text{RE} \setminus \{\emptyset\}\}| = 2^{|\text{RE}\setminus\{\emptyset\}|} - 1 = 2^{\aleph_0}$$

נשים לב ש־ $\star\star$ מתקיים כי הראנו שכל 2 שפות שונות אחת מהשנייה לפי הגדרת התכונה שיצרנו.

ולכן קיבלנו כי $|\{L \mid L \text{ is RE hard}\}| \ge 2^{\aleph_0} > \aleph_0$ ולכן מספר השפות שהן $\text{RE} - hard$ הן לא בנות מנייה.

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2

צ"ל: אין שפה שהיא $\overline{\mathrm{RE}\cup\mathrm{coRE}}-hard$

הוכחה:

טענת עזר: $\left|\overline{\mathrm{RE}\cup\mathrm{coRE}}\right|>\aleph_0$

נשים לב כי $f:2^{\Sigma^*}\to 2^{\Sigma^*}$ המוגדרת באופן הבא $f(L)=\overline{L}$ מתקיים כי

$$L\in\mathrm{coRE}\iff\overline{L}\in\mathrm{RE}\iff f(L)\in\mathrm{RE}$$

וגם f היא חחע"ל ולכן $|\mathrm{RE}|=|\mathrm{coRE}|$ ומטענת העזר בסעיף הקודם נקבל כי $|\mathrm{RE}|=|\mathrm{coRE}|=\aleph_0$

עתה נניח בשלילה ש־ $\left|\overline{\mathrm{RE}\cup\mathrm{coRE}}\right|\le\aleph_0$ ונשים לב כי

$$\{L\mid L\subseteq\Sigma^*\}=\{L\mid L\in\mathrm{RE}\}\cup\{L\mid L\in\mathrm{coRE}\}\cup\left\{L\mid L\in\overline{\mathrm{RE}\cup\mathrm{coRE}}\right\}$$

ולכן $\{L\mid L\subseteq\Sigma^*\}$ הוא איחוד סופי של קבוצות בנות מנייה ולכן בן מנייה, ולכן $|\{L\mid L\subseteq\Sigma^*\}|=\aleph_0$ אבל אנחנו יודעים כי $2^{\aleph_0}=|\{L\mid L\subseteq\Sigma^*\}|=\aleph_0$, סתירה.

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\left|\overline{\mathrm{RE}\cup\mathrm{coRE}}\right|>\aleph_0}$

מ.ש.ל.ב.עזר.☺

נניח בשלילה שיש שפה L שהיא $\overline{\mathrm{RE}\cup\mathrm{coRE}}-hard$,

כלומר לכל $L'\in\overline{\mathrm{RE}\cup\mathrm{coRE}}$ מתקיים $L'\le_m L$.

נשים לב שלכל רדוקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ מ־ L' ל־ L קיימת מ"ט M שמתאימה לרדוקציה זאת (ל־ 2 רדוקצית שונות צריך 2 מ"ט שונים כי אחרת נקבל נקבל כי $L_1'=L_2'$ כי $x\in L_2'\iff f(x)\in L\iff x\in L_1'$) ולכן

$$|\{f:\Sigma^*\to\Sigma^*\mid f\text{ is a reduction to L}\}|\le|\{\langle M\rangle\}|\le\left|\{a,b,c\}^*\right|=\aleph_0$$

עתה נשים לב כי $\left|\overline{\mathrm{RE}\cup\mathrm{coRE}}\right|>\aleph_0$ וגם $|\{f:\Sigma^*\to\Sigma^*\mid f\text{ is a reduction to L}\}|\le\aleph_0$ ולכן מעיקרון שובך היונים קיימות $L_1\neq L_2\in\overline{\mathrm{RE}\cup\mathrm{coRE}}$ שיש להם אותה רדוקציה f.

קיים איבר $x\in L_1$ וגם $x\notin L_2$ (בלי הגבלת הכלליות)

ולכן $f(x)\in L\iff x\in L_1$ ולכן $f(x)\in L$

מצד שני $f(x)\notin L\iff x\notin L_2$ ולכן $f(x)\notin L$

כלומר קיבלנו כי $f(x)\in L$ וגם $f(x)\notin L$, סתירה.

כלומר לא קיימת שפה L שהיא $\overline{\mathrm{RE}\cup\mathrm{coRE}}-hard$, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3 חלק a

צ"ל: $L_{\le n}=\{\langle M\rangle\mid|L(M)|\le n\}\in\mathrm{coRE}\setminus R$

הוכחה:

נגדיר יחס $P=\{\langle M\rangle\mid|L(M)|\le n\}$ נוכיח שהוא תכונה סמנטית,

יהיו M_1,M_2 מ"ט כך ש־ $L(M_1)=L(M_2)$, נשים לב כי

$$\langle M_1\rangle\in P\iff|L(M_1)|\le n\overset{L(M_1)=L(M_2)}{\iff}|L(M_2)|\le n\iff\langle M_2\rangle\in P$$

נסמן ב־ M_{empty} מכונה שדוחה הכל בשלב הראשון בריצתה. נשים לב כי $\langle M_{empty}\rangle\in P$ כי $L(M_{empty})=\emptyset$ ולכן $|L(M_{empty})|=0\le n$.

לכן P תכונה סמנטית לא טריוויאלית וגם מתקיים $\langle T_\emptyset\rangle\in P$ כאשר $L(T_\emptyset)=\emptyset$ ולכן לפי משפט רייס $L_P\notin\mathrm{RE}$,

נשים לב כי $L_{\le n}=\{\langle M\rangle\mid|L(M)|\le n\}=\{\langle M\rangle\mid\langle M\rangle\in P\}=L_P\notin\mathrm{RE}$, כלומר $\boxed{L_{\le n}\notin\mathrm{RE}}$

נגדיר סדר על המילים $w_1,w_2,\ldots$ (אפשר לעשות כי Σ^* בת מנייה)

עתה נראה כי $L_{\le n}\in\mathrm{coRE}$, נבנה $\mathcal{M}$ באופן הבא:

1. נקבל קלט $\langle M\rangle$
2. נריץ במקביל את M על כל המילים ב־ Σ^*, אם יותר מ־ n מילים התקבלו על ידי M, נקבל

עתה נשים לב כי:

1. אם $\langle M\rangle \in L(\mathcal{M})$ אז M קיבל יותר מ־ n מילים ולכן $\langle M\rangle \notin L_{\leq n}$, כלומר $\langle M\rangle \in \overline{L_{\leq n}}$
2. אם $\langle M\rangle \in \overline{L_{\leq n}}$ אז הוא מקבל יותר מ־ n מילים,
נסמן את ה־ $n+1$ הראשונות שהתקבלו $w_{i_1},\dots,w_{i_n},w_{i_{n+1}}$, לפי הסדר שהגדרנו מלעיל כאשר $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1}$.
נסמן ב־ m את מספר השלבים המקסימלי שייקח ל־ M לקבל את המילים האלה, נשים לב שלאחר $\max\{i_{n+1},m\}$ אירטציות ב־ $\mathcal{M}$ נריץ את M על $w_{i_1},\dots,w_{i_n},w_{i_{n+1}}$ יותר מ־ m צעדים, ולכן M תקבל את $w_{i_1},\dots,w_{i_n},w_{i_{n+1}}$, לכן יתקבלו יותר מ־ n מילים ולכן $\mathcal{M}$ תקבל את M. כלומר $\langle M\rangle \in L(\mathcal{M})$

ולכן קיבלנו כי $\langle M\rangle \in \overline{L_{\leq n}} \iff \langle M\rangle \in L(\mathcal{M})$, כלומר $L(\mathcal{M}) = \overline{L_{\leq n}}$
כלומר מצאנו $\mathcal{M}$ מ"ט כך ש־ $L(\mathcal{M}) = \overline{L_{\leq n}}$ ולכן $\overline{L_{\leq n}} \in \mathrm{RE}$ ולכן $\boxed{L_{\leq n} \in \mathrm{coRE}}$.
כלומר קיבלנו כי $L_{\leq n} \in \mathrm{coRE}$ וגם $L_{\leq n} \notin \mathrm{RE}$ ולכן $\boxed{L_{\leq n} \in \mathrm{coRE} \setminus R}$, כנדרש

מ.ש.ל.ג.1.☺

סעיף 3 חלק b
צ"ל: $L_{=n} = \{\langle M\rangle \mid |L(M)| = n\}$
הוכחה:
תחילה נשים לב שאם $n=0$ אז

$$L_{=0} = \{\langle M\rangle \mid |L(M)| = n\} = \{\langle M\rangle \mid |L(M)| \leq n\} = L_{\leq 0} \in \mathrm{coRE} \setminus R$$

כלומר $\boxed{L_{=0} \in \mathrm{coRE} \setminus R}$, להמשך השאלה נניח כי $n>0$
נגדיר יחס $P = \{\langle M\rangle \mid |L(M)| = n\}$ נוכיח שהוא תכונה סמנטית,
יהיו M_1, M_2 מ"ט כך ש־ $L(M_1) = L(M_2)$, נשים לב כי

$$\langle M_1\rangle \in P \iff |L(M_1)| = n \overset{L(M_1)=L(M_2)}{\iff} |L(M_2)| = n \iff \langle M_2\rangle \in P$$

נסמן ב־ M_n מכונה שמקבלת רק את $\{1^m \mid 1 \leq m \leq n\}$ השפה רגולרית ולכן ב־ R ולכן קיימת מכונה כזו. נשים לב כי $\langle M_{empty}\rangle \in P$ כי $|L(M_n)| = |\{1^m \mid 1 \leq m \leq n\}| = n$.
לכן P תכונה סמנטית לא טריוויאלית וגם מתקיים $\langle T_\emptyset\rangle \notin P$ כאשר $L(T_\emptyset) = \emptyset$ (בגלל ש־ $n>0$) ולכן לפי משפט רייס $L_P \notin \mathrm{coRE}$,
נשים לב כי $L_{=n} = \{\langle M\rangle \mid |L(M)| = n\} = \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \in P\} = L_P \notin \mathrm{coRE}$, כלומר $\boxed{L_{=n} \notin \mathrm{coRE}}$
נגדיר סדר על המילים $w_1, w_2, \dots$ (אפשר לעשות כי Σ^* בת מנייה)
נבנה $\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}$ באופן הבא:

1. נקבל קלט x
2. נמצא i כך ש־ $x = w_i$
3. נריץ את M על w ל־ $|x|$ צעדים ונקבל אם $m \leq n$ או ש־ M קיבל את w

נחלק ל־ 2 מקרים:

1. אם $\langle\langle M\rangle, w\rangle \notin A_{TM}$, כלומר אם M לא מקבלת את w אז $\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}$ תקבל רק את $w_1,\dots,w_n$ מהגדרתה ולכן $L(\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}) = \{w_1,\dots,w_n\}$, ולכן $n = |\{w_1,\dots,w_n\}| = |L(\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle})|$, ולכן $\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle} \in L_{=n}$

2. אם $\langle\langle M\rangle, w\rangle \in A_{TM}$, נסמן ב־ N את מספר הצעדים שלוקח ל־ M לקבל את w. לכן נשים לב שלכל x המקיים $|x| \geq N$, כשנריץ את $\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}$ על x יתקיים כי M תקבל את w ולכן $\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}$ תקבל את x.
לכן $\{x \in \Sigma^* \mid |x| \geq N\} \subseteq L\left(\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right)$ ולכן $\left|L\left(\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right)\right| \geq |\{x \in \Sigma^* \mid |x| \geq N\}| = \aleph_0$ ולכן $\left|L\left(\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right)\right| \geq n \neq$ $\aleph_0$ ולכן $\left\langle\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right\rangle \notin L_{=n}$

כלומר הראנו כי $\left\langle\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right\rangle \in L_{=n} \iff \langle\langle M\rangle, w\rangle \notin A_{TM}$
נסתכל על $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ הבאה: $f(\langle\langle M\rangle, w\rangle) = \left\langle\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right\rangle$,
נשים לב ש־ f חשיבה בעזרת מכונה אוניברסלית שתריץ את M על w ותבדוק אורך קלט.
ולכן נקבל כי

$$\langle\langle M\rangle, w\rangle \in \overline{A_{TM}} \iff \langle\langle M\rangle, w\rangle \notin A_{TM} \iff \left\langle\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\right\rangle \in L_{=n} \iff f(\langle\langle M\rangle, w\rangle) \in L_{=n}$$

כלומר קיבלנו שקיימת $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ חשיבה כך ש־ $\langle\langle M\rangle, w\rangle \in \overline{A_{TM}} \iff f(\langle\langle M\rangle, w\rangle) \in L_{=n}$,
כלומר $\overline{A_{TM}} \leq_m L_{=n}$ וגם $\overline{A_{TM}} \notin \mathrm{RE}$ (ראינו בהרצאה)
ולכן $\boxed{L_{=n} \notin \mathrm{RE}}$

כלומר קיבלנו כי $L \notin \mathrm{coRE}$ וגם $L \notin \mathrm{RE}$ ולכן $\boxed{L_{=n} \in \overline{\mathrm{RE} \cup \mathrm{coRE}}}$ כנדרש.
לסיכום אם $n = 0$ אז $L_{=0} \in \mathrm{coRE} \setminus R$,
אחרת $L_{=n} \in \overline{\mathrm{RE} \cup \mathrm{coRE}}$

מ.ש.ל.ג.2.☺

סעיף 3 חלק c
צ"ל: $L_{\geq n} = \{\langle M\rangle \mid |L(M)| \geq n\}$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי $L_{\geq 0} = \{\langle M\rangle \mid |L(M)| \geq 0\} = \{\langle M\rangle\}$ וראינו בהרצאה ששפת כל הקידודים התקינים היא ב־ R. לכן נקבל כי $L_{\geq 0} = \{\langle M\rangle\} \in R$
עתה נניח כי $n > 0$ ונקבל כי

$$L_{\geq n} = \{\langle M\rangle \mid |L(M)| \geq n\} = \overline{\{\langle M\rangle \mid |L(M)| < n\}} = \overline{\{\langle M\rangle \mid |L(M)| \leq n-1\}} = \overline{L_{\leq n-1}}$$

הוכחנו בסעיף א' כי $L_{\leq n} \in \mathrm{coRE} \setminus R$ ולכן $L_{\leq n} \in \mathrm{coRE}$ וגם $L_{\leq n} \notin \mathrm{RE}$
ולכן $\overline{L_{\leq n}} \in \mathrm{RE}$ וגם $\overline{L_{\leq n}} \notin \mathrm{coRE}$ ולכן $\overline{L_{\leq n}} \in \mathrm{RE} \setminus R$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן נקבל כי

$$\boxed{L_{\geq n} = \overline{L_{\leq n-1}} \in \mathrm{RE} \setminus R}$$

לסיכום אם $n = 0$ אז $L_{\geq 0} \in R$ אחרת $L_{\geq n} \in \mathrm{RE} \setminus R$

מ.ש.ל.ג.3.☺