

## אלגברה לינארית (1) תשע"ח - תרגיל (6)

11 במאי 2018

### שאלה 1

בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתון מרחב וקטורי  $V$  מעל שדה  $\mathbb{F}$ ,  $S$  תת-קבוצה של  $V$  ו- $v \in V$ . האם  $v \in \text{Span}(S)$  כאשר

א'  $V = \mathbb{R}^3$  מעל  $\mathbb{R}$ ,  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$  ו- $v = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$  ?

ב'  $V = \mathbb{C}^2$  מעל  $\mathbb{C}$ ,  $S = \left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1+3i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3+i \end{bmatrix} \right\}$  ו- $v = \begin{bmatrix} 3+2i \\ 3-2i \end{bmatrix}$  ?

ג'  $V = \mathbb{R}[x]$  מעל  $\mathbb{R}$ ,  $S = \{1, 1-x, 1-x-x^2\}$  ו- $v = 3+4x+5x^2$  ?

### שאלה 2

נתון מרחב וקטורי  $V$  מעל שדה  $\mathbb{F}$ , ותת-קבוצות  $S_1, S_2$  של  $V$  כך ש- $\text{Span}(S_1) = V$  ו- $S_2$  בת"ל. אילו מבין הטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

א'  $\text{Span}(S_1 \cap S_2) = V$

ב'  $S_1 \cap S_2$  בת"ל.

### שאלה 3

נתון מרחב וקטורי  $V$  מעל השדה  $\mathbb{R}$ ,  $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ ,  $S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,  $S_2 = \{3v_1, v_3, v_1 - 2v_4\}$ . אילו מבין הטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

א' אם  $S_1$  בת"ל, אז  $S_2$  בת"ל.

ב' אם  $S_1$  ת"ל, אז  $S_2$  ת"ל.

### שאלה 4

נתון מרחב וקטורי  $V$  מעל שדה  $\mathbb{F}$ ,  $v_1, v_2, v_3 \in V$ ,  $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $S_2 = \{v_1 + 2v_2, v_2 + 2v_3, v_1 + 2v_3\}$ . אילו מבין הטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

א' אם  $S_1$  בת"ל, אז  $S_2$  בת"ל.

ב' אם  $S_1$  ת"ל, אז  $S_2$  ת"ל.

### שאלה 5

יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{R}$ ,  $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$  כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:  $\{v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$  קבוצה תלויה לינארית, וכן  $\{v_1, v_2, v_4\}$  קבוצה בלתי תלויה לינארית. האם בהכרח  $v_3 \in \text{Span}(\{v_1, v_2, v_4\})$  ?

## שאלה 6

נתון מרחב וקטורי  $V$  מעל  $\mathbb{F}$ ,  $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$  כך שכל אחת מארבע הקבוצות הבאות

- $\{v_1, v_2, v_3\}$
- $\{v_1, v_2, v_4\}$
- $\{v_1, v_3, v_4\}$
- $\{v_2, v_3, v_4\}$

היא בלתי תלויה לינארית. האם  $\{v_1 - v_4, v_2 - v_4, v_3 - v_4\}$  בהכרח בלתי תלויה לינארית? אם כן, הוכיחו. אחרת, הביאו דוגמה נגדית.

## שאלה 7

נתון מרחב וקטורי  $V$  מעל שדה  $\mathbb{F}$ ,  $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$  כך שכל אחת מארבע הקבוצות הבאות

- $\{v_1, v_2, v_3\}$
- $\{v_1, v_2, v_4\}$
- $\{v_1, v_3, v_4\}$
- $\{v_2, v_3, v_4\}$

היא בלתי תלויה לינארית.

**א'** האם בהכרח  $\text{Span}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \text{Span}(\{v_1, v_2, v_4\})$ ? אם כן, הוכיחו. אחרת, הביאו דוגמה נגדית.

**ב'** האם בהכרח מתקיים  $\text{Span}(\{v_2, v_3\}) \neq \text{Span}(\{v_2, v_4\})$ ? אם כן, הוכיחו. אחרת, הביאו דוגמה נגדית.

## שאלה 8

נתון מרחב וקטורי  $V$  מעל שדה  $\mathbb{F}$ ,  $v_1, \dots, v_k, \dots, v_l \in V$ ,  $k < l$ . אילו מבין הטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אחרת, הביאו דוגמה נגדית.

**א'** אם  $\{v_1, \dots, v_k\}$  בת"ל, אז  $\{v_1, v_2 + v_1, \dots, v_k + v_1\}$  בת"ל.

**ב'** אם  $\{v_1, \dots, v_k\}$  ת"ל, אז  $\{v_1, v_2 + v_1, \dots, v_k + v_1\}$  ת"ל.

**ג'** אם  $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_l\}$  ת"ל, אז  $\{v_1, \dots, v_k\}$  ת"ל או  $\{v_{k+1}, \dots, v_l\}$  ת"ל.

**ד'** אם  $\{v_1, \dots, v_k\}$  בת"ל,  $v_{k+1} \notin \text{Span}(\{v_1, \dots, v_k\})$ , אז  $\{v_1 - v_{k+1}, \dots, v_k - v_{k+1}\}$  בת"ל.

## שאלה 9

נתבונן ב-  $\mathbb{F}^3$  כמרחב וקטורי מעל  $\mathbb{F}$ . האם הקבוצה  $\{v_1, v_2\}$  בת"ל כאשר:

**א'**  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

**ב'**  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_5$ ,  $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  (לא להגשה)

**ג'**  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ,  $v_1 = \begin{bmatrix} -1 + i \\ 0 \\ 1 + 2i \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 2 + 2i \\ 0 \\ 4 - 2i \end{bmatrix}$