פתרון תרגיל מספר 10 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

16 ביוני 2020

שאלה 1

סעיף 1

צ"ל: $L_1 \in \mathrm{NP}$

הוכחה:

תחילה מהיות $L_2 \in \mathrm{NP}$ קיימת N_2 לא דטרמניסטית שמכריעה את L_2 בזמן פולינומי.
עתה מהיות $L_1 \le_p L_2$ קיימת $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ שחשיבה בזמן פולינומי המקיימת $f(x) \in L_2 \iff x \in L_1$.
נסמן את המכונה שמחשבת את f בזמן פולינומי ב־ M_f.
נבנה מכונה N_1 לא דטרמניסטית באופן הבא:

1. נקבל קלט x
2. נחשב את $f(x)$ בעזרת M_f
3. נריץ את N_2 על $f(x)$ ונענה כמוה

תחילה נשים לב שזמן הריצה של N_1 הוא $O(1) + O(M_f \text{ run time on } x) + O(N_2 \text{ run time on } f(x))$, עתה נשים לב כי $O(M_f \text{ run time on } x)$ פולינומי מההנחה וגם $|f(x)|$ פולינומי (כי M_f רץ לכל היותר בזמן פולינומי) ולכן גם מתקיים כי $O(N_2 \text{ run time on } f(x))$ פולינומי כי הרכבת פולינומים היא פולינומית. ולכן נקבל שזמן הריצה של N_1 פולינומי.
עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned} x \in L(N_1) &\iff \text{exists an accepting run of } N_1 \text{ on } x \\ &\iff \text{exists an accepting run of } N_2 \text{ on } f(x) \\ &\iff f(x) \in L_2 \iff x \in L_1 \end{aligned}$$

כלומר הראנו כי $L(N_1) = L_1$,
כלומר הראנו שקיימת N_1 לא דטרמניסטית שמכריעה את L_1 בזמן פולינומי ולכן $L_1 \in \mathrm{NP}$, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2

צ"ל: $L_1 \le_p L_3$

הוכחה:

תחילה מהיות $L_1 \le_p L_2$ קיימת $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ שחשיבה בזמן פולינומי המקיימת $f(x) \in L_2 \iff x \in L_1$.
נסמן את המכונה שמחשבת את f בזמן פולינומי ב־ M_f.
עתה מהיות $L_2 \le_p L_3$ קיימת $g : \Sigma^* \to \Sigma^*$ שחשיבה בזמן פולינומי המקיימת $g(x) \in L_3 \iff x \in L_2$.
נסמן את המכונה שמחשבת את g בזמן פולינומי ב־ M_g.
נשים לב כי

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2 \iff g(f(x)) \in L_3 \iff (g \circ f)(x) \in L_3$$

עתה נוכיח ש־ $g \circ f$ חשיבה בזמן פולינומי.
נבנה מכונה M באופן הבא:

1. נקבל קלט x
2. נחשב את $f(x)$ בעזרת M_f
3. נחשב את $g(f(x))$ בעזרת M_g
4. נכתוב את $g(f(x))$ על הסרט
5. נקבל

תחילה נשים לב כי $M(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ ולכן M אכן מחשבת את $g \circ f$
עתה נשים לב כי זמן הריצה הכולל הוא $O(1) + O(M_f \text{ run time on } x) + O(M_g \text{ run time on } f(x)) + O(|g(f(x))|)$,
עתה נשים לב כי $O(M_f \text{ run time on } x)$ פולינומי מההנחה וגם $|f(x)|$ פולינומי (כי M_f רץ לכל היותר בזמן פולינומי) ולכן גם מתקיים כי $O(M_g \text{ run time on } f(x))$ פולינומי כי הרכבת פולינומים היא פולינומית. גם נשים לב כי $|g(f(x))|$ פולינומי (כי M_g רץ לכל היותר בזמן פולינומי) ולכן נקבל כי $O(|g(f(x))|)$ פולינומי, ולכן נקבל שזמן הריצה של M פולינומי.
כלומר קיימת מכונה M שמחשבת את $g \circ f$ בזמן פולינומי ולכן $h = g \circ f$ חשיבה בזמן פולינומי.
כלומר הראנו שקיימת פונקציה $h = g \circ f$ חשיבה בזמן פולינומי המקיימת $h(x) \in L_3 \iff x \in L_1$,
ולכן $L_1 \leq_p L_3$, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3
צ"ל: A_{TM} היא $\text{NP} - HARD$
הוכחה:
תהי $L \in \text{NP}$ אזי קיימת מכונה N לא דטרמניסטית שמכריעה את L בזמן פולינומי.
נעשה דטרמניזציה למכונה N ונקבל מכונה M דטרמניסטית שמכריעה את $L(N)$ בזמן אקפוננציאלי
ניצור את הרדוקציה הבאה: $f(x) = \langle\langle M\rangle, x\rangle$,
נשים לב ש־ f חשיבה בזמן פולינומי כי היא כותבת על הסרט מכונה קבועה M ואז את הקלט, אז זמן הריצה הוא $O(1)+O(|x|)$ שהוא פולינומי.
עתה נשים לב כי

$$x \in L \iff x \in L(N) \iff x \in L(M) \iff M \text{ accepts } x$$
$$\iff \langle\langle M\rangle, x\rangle \in A_{TM} \iff f(x) \in A_{TM}$$

כלומר הראנו שקיימת פונקציה f חשיבה בזמן פולינומי כך ש־ $f(x) \in A_{TM} \iff x \in L$, ולכן $L \leq_p A_{TM}$.
כלומר הראנו שלכל $L \in \text{NP}$ מתקיים $L \leq_p A_{TM}$ ולכן A_{TM} היא $\text{NP} - HARD$ מההגדרה.

מ.ש.ל.ג.☺

סעיף 4
צ"ל: L היא $P - HARD$
הוכחה:
תהי $K \in P$, עתה מהיות K ב־ P קיימת M דטרמניסטית שמכריעה את K בזמן פולינומי.
יהיו $w_1 \notin L, w_2 \in L$ (קיימים בגלל ש־ L לא טריוויאלית)
נבנה רדוקציה $f(x) = \begin{cases} w_2 & M \text{ accepts } x \\ w_1 & else \end{cases}$, נשים לב כי

$$M \text{ accepts } x \Rightarrow f(x) = w_2 \in L$$
$$M \text{ doesn't accept } x \Rightarrow f(x) = w_1 \notin L$$

כלומר קיבלנו כי $M \text{ accepts } x \iff f(x) \in L$ ולכן

$$x \in K \iff x \in L(M) \iff M \text{ accepts } x \iff f(x) \in L$$

עתה נשים לב שניתן לחשב את f על ידי הרצה של M על x ואז כתיבה של w_1, w_2 על הסרט. זה ייקח $O\left(M \text{ runtime on } x\right) +$ $O\left(\max\left\{M \text{ runtime on } x, w_1, w_2\right\}\right)$.

נשים לב ש־ w_1, w_2 קבועים ולכן נקבל כי זמן הריצה הוא $O\left(M \text{ runtime on } x\right)$ וזה פולינומי בגלל ש־ M מכריעה בזמן פולינומי.

ולכן מצאנו f חשיבה בזמן פולינומי המקיימת $f\left(x\right) \in L \iff x \in K$, ולכן $K \leq_p L$.

כלומר הראנו שלכל $K \in P$ מתקיים $K \leq_p L$, כלומר L היא $P - HARD$

מ.ש.ל.ד.☺