אלגברה לינארית (2) תשע`ט - תרגיל 14

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז.** יש לציין **כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל־ **26.6.19 בשעה 21:00**.

1. תהי $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ ויהי $T\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ האופרטור הלינארי המוגדר ע`י $T(v)=Av$ לכל $v\in\mathbb{R}^3$.
נצייד את $\mathbb{R}^3$ במכפלה הסקלרית. הראו ש־ T צמוד לעצמו, ומצאו $O\in M_3(\mathbb{R})$ אורתוגונלית כך ש־ $O^{-1}AO$ אלכסונית.

2. תהי $A=\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$ ויהי $T\colon\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ האופרטור הלינארי המוגדר ע`י $T(v)=Av$ לכל $v\in\mathbb{C}^2$.
נצייד את $\mathbb{C}^2$ במכפלה הסקלרית. הראו ש־ T אוניטרי, ומצאו מטריצה אוניטרית $U\in M_2(\mathbb{C})$ כך ש־ $U^{-1}AU$ אלכסונית.

3. תהי $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$ ויהי $T\colon\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ האופרטור הלינארי המוגדר ע`י $T(v)=Av$ לכל $v\in\mathbb{C}^3$.
נצייד את $\mathbb{C}^3$ במכפלה הסקלרית. הראו ש־ T אוניטרי, ומצאו מטריצה אוניטרית $U\in M_3(\mathbb{C})$ כך ש־ $U^{-1}AU$ אלכסונית.

4. יהי V ממ`פ ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$ ו־ $T\colon V\to V$ אופרטור לינארי כך ש־ $\langle T(v)\mid v\rangle=0$ עבור כל $v\in V$.
הוכיחו כי לכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle T(v)\mid w\rangle=0$ והסיקו כי $T(v)=0$ לכל $v\in V$.

5. יהי V ממ`פ ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$ ו־ $T\colon V\to V$ אופרטור לינארי לכסין כך שכל ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{C}$ של T מקיים $|\lambda|=1$.
הוכיחו או הפריכו : T אוניטרי.

6. יהי V ממ"פ ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$. יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי נורמלי. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
א. הפולינום האופייני של T ושל T^* שווים.
ב. v ו"ע של T אם"ם v ו"ע של T^* .
ג. v ו"ע של T עבור הע"ע λ אם"ם v ו"ע של T^* עבור הע"ע $\overline{\lambda}$.

7. בכל סעיף נתונה פונקציה $g\colon\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, כאשר $\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ו־ $\vec{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.
קבעו אם g מגדירה תבנית בילינארית על $\mathbb{R}^2$. אם כן, קבעו האם g סימטרית או אנטי־סימטרית או לא זה ולא זה.
א) $g(\vec{x},\vec{y})=x_1y_2$ **ב)** $g(\vec{x},\vec{y})=(x_1-y_2)(x_2-y_1)$ **ג)** $g(\vec{x},\vec{y})=(x_1-x_2)(y_2-y_1)$

8. תבנית בילינארית $g\colon\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע`י $g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)=x_1y_1-x_2y_1$.
מהי המטריצה המייצגת של g בבסיס B כאשר **א)** B הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$. **ב)** $B=\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$.

9. תהי $M\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה הפיכה ו־ $A=M^tM$.
הוכיחו כי התבנית הבילינארית $g_A:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע`י $g_A(v,w)=v^tAw$ היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$.