תרגיל 4 אלגברה לינארית 1

211747639

מיכאל גרינבאום

1. א. **צ"ל:** פתרו את המשוואות הבאות מעל לשדה F

נתון: $\mathbb{F}=\mathbb{C}\,,(1+i)x_1+(-1+8i)x_2=1,(2+i)x_1+(1+5i)x_2=4-i$

הוכחה:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1+i & -1+8i & 1\\ 2+i & 1+5i & 4-i\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_1}\left[\begin{array}{cc|c}2+i & 1+5i & 4-i\\ 1+i & -1+8i & 1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2-\left(\frac{3}{5}+\frac{i}{5}\right)R_1}\left[\begin{array}{cc|c}2+i & 1+5i & 4-i\\ 0 & -\frac{3}{5}+\frac{24i}{5} & -\frac{8}{5}-\frac{i}{5}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\to\left(\frac{8}{13}-\frac{i}{13}\right)R_2}\left[\begin{array}{cc|c}2+i & 1+5i & 4-i\\ 0 & 3i & -1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to-\frac{i}{3}R_2}\left[\begin{array}{cc|c}2+i & 1+5i & 4-i\\ 0 & \frac{1}{1} & \frac{i}{3}\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to R_1-(1+5i)R_2}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-(1+5i)R_2}\left[\begin{array}{cc|c}2+i & \frac{0}{1} & \frac{17}{3}-\frac{4}{3}i\\ 0 & \frac{1}{1} & \frac{i}{3}\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to\left(\frac{2}{5}-\frac{i}{5}\right)R_1}\left[\begin{array}{cc|c}1 & \frac{0}{1} & 2-\frac{5}{3}i\\ 0 & \frac{1}{1} & \frac{i}{3}\end{array}\right]$$

תשובה: הפתרון למשוואות הבאות הוא $x_1=2-\frac{5}{3}i,x_2=\frac{i}{3}$

מ.ש.ל.א.☺

ב. **צ"ל:** פתרו את המשוואות הבאות מעל לשדה F

נתון: $\mathbb{F}=\mathbb{F}_2\,,x_1+x_2=1,x_1+x_2+x_3=0,x_1+x_3=1$

הוכחה:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&-1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to-R_3]{R_2\to-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

תשובה: הפתרון למשוואות הבאות הוא $x_1=0,x_2=1,x_3=1$

מ.ש.ל.ב.☺

2. א. **צ"ל:** מצאו את המטריצה ההפוכה של המטריצה הבאה

הוכחה:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&3&4&0&1&0\\3&4&6&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-3&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-2&-2&1&0\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2\to R_2+2R_3]{R_1\to R_1-3R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&-2&6&-3\\0&-1&0&0&-3&2\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to-R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&-2&6&-3\\0&1&0&0&3&-2\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&0&1\\0&1&0&0&3&-2\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right]$$

תשובה: המטריצה ההפוכה למטריצה הנתונה היא $\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&3&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}$

מ.ש.ל.א.☺

ב. **צ"ל:** מצאו את המטריצה ההפוכה של המטריצה הבאה

הוכחה:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}-1&1&1&1&1&0&0&0\\-1&-1&1&1&0&1&0&0\\-1&-1&-1&1&0&0&1&0\\-1&-1&-1&-1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\left[\begin{array}{cccc|cccc}-1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-2&0&0&-1&1&0&0\\0&-2&-2&0&-1&0&1&0\\-1&-1&-1&-1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{R_4\to R_4+R_1}\left[\begin{array}{cccc|cccc}-1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-2&0&0&-1&1&0&0\\0&0&-2&0&0&-1&1&0\\-2&0&0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to -\frac{1}{2}R_3]{R_4\to -\frac{1}{2}R_4}\left[\begin{array}{cccc|cccc}-1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-2&0&0&-1&1&0&0\\0&0&\frac{1}{1}&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{1}&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1\to R_1-R_3]{R_2\to -\frac{1}{2}R_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}-\frac{1}{1}&1&0&1&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{1}&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{1}&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{1}&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right]\xrightarrow[R_1\to R_1-R_2]{R_1\to R_1+R_4}\left[\begin{array}{cccc|cccc}0&0&0&\frac{1}{1}&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{1}&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{1}&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{1}&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_4}\left[\begin{array}{cccc|cccc}\frac{1}{1}&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{1}&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{1}&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&\frac{1}{1}&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

__תשובה:__ המטריצה ההפוכה למטריצה הנתונה היא $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

__מ.ש.ל.ב.☺__

ג. **__צ"ל:__** מצאו את המטריצה ההפוכה של המטריצה הבאה

__הוכחה:__

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&i&1&0\\1+i&3+2i&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2-(1+i)R_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1&i&1&0\\0&4+i&-1-i&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to\left(\frac{4}{17}-\frac{i}{17}\right)R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&i&1&0\\0&1&-\frac{5}{17}-\frac{3i}{17}&\frac{4}{17}-\frac{i}{17}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-iR_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i&-\frac{1}{17}-\frac{4}{17}i\\0&1&-\frac{5}{17}-\frac{3i}{17}&\frac{4}{17}-\frac{i}{17}\end{array}\right]$$

__תשובה:__ המטריצה ההפוכה למטריצה הנתונה היא $\begin{bmatrix}\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i&-\frac{1}{17}-\frac{4}{17}i\\-\frac{5}{17}-\frac{3}{17}i&\frac{4}{17}-\frac{1}{17}i\end{bmatrix}$

__מ.ש.ל.ג.☺__

3. א. **__צ"ל:__** A הפיכה

__נתון:__ $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ משולשת כך ש$A_{i,i}\neq 0$, $1\leq\forall i\leq n$

__הוכחה:__

נשים לב כי $A=\begin{bmatrix}a_{1,1}&\cdots&a_{1,n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&a_{n,n}\end{bmatrix}$

נשים לב כי $1 \le \forall j \le n-1,\ a_{n,j} = 0$ כי A משולשת

נשים לב כי $a_{n,n} \neq 0$ נתון ולכן נעשה את פעולת השורה $R_n \to \frac{1}{a_{n,n}} R_n$

עתה נעשה $1 \le \forall i < n$, $R_i \to R_i - a_{i,n}R_n$

נקבל שA שקולת שורות למטריצה הבאה $\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

נסמן ב $\mathrm{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$.

נשים לב כי A_1 משולשת ו$A_{i,i} \neq 0$, $1 \le \forall i \le n-1$

נעשה את אותו תהליך שעשינו על A עבור A_1

נקבל שA_1 שקולת שורות למטריצה הבאה $\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

כלומר A שקולת שורות למטריצה $\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

נסמן ב $A_2 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} \end{bmatrix}$..

נחזור על התהליך הזה עד A_{n-1} ונקבל A שקולת שורות למטריצה $\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

נבצע על המטריצה $B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ את הפעולה $R_1 \to \frac{1}{a_{1,1}} R_1$ ($a_{1,1} \neq 0$ נתון)

ונקבל B שקולת שורות לI_n,

מהיות A שקולה לB אנחנו מקבלים ש A שקולה לI_n, כלומר A הפיכה

__מ.ש.ל.א.☺__

ב. **__צ"ל:__** ההופכית של A משולשת

__נתון:__ $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ משולשת כך ש$A_{i,i} \neq 0$, $1 \le \forall i \le n$

__הוכחה:__

נסמן $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$

נעשה לפי האלגוריתם שהוגדר בסעיף הקודם ונקבל

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,n} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{a_{1,n}}{a_{n,n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{a_{n-1,n}}{a_{n,n}} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_{n,n}} \end{array}\right].$$

נשים לב שלא נעשה יותר פעולות שורה על השורה האחרונה ולכן נוכל להתעלם מהשורה האחרונה ומהעמודה האחרונה בבדיקה האם ההפוכה של A משולשת ולכן מספיק להסתכל על ההפוכה של A_1

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}\left|\begin{matrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{matrix}\right] \to \left[\begin{matrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 1 & \dots & 0 & -\frac{a_{1,n-1}}{a_{n-1,n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-1,n-1}} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_{n-1,n-1}} \end{matrix}\right]$$

נשים לב ששוב נוכל להתעלם מהשורה האחרונה ומהעמודה האחרונה בבדיקה מחדש האם ההפוכה של A משולשת ולכן מספיק להסתכל על ההפוכה של A_2

נחזור על התהליך $n-1$ פעמים ונקבל שההפוכה של A היא משולשת אם ההפוכה של המטריצה $[a_{1,1}]$ היא משולשת.

נשים לב כי ההופכית של $[a_{1,1}]$ היא $\left[\frac{1}{a_{1,1}}\right]$ נתון כי $a_{1,1} \neq 0$ והיא משולשת

ולכן נקבל שA_i משולשת לכל $1 \leq i < n$ ולכן A_1 משולשת

ולכן גם A משולשת

<u>מ.ש.ל.ב.☺</u>

4. א. **<u>צ"ל:</u>** AB הפיכה אם ורק אם A הפיכה וגם B הפיכה

<u>נתון:</u> $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$

<u>הוכחה:</u>

$\Leftarrow$: נניח כי A הפיכה וגם B הפיכה ונוכיח כי AB הפיכה

נשים לב כי $AB \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(B \cdot B^{-1})A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$

וגם $(B^{-1}A^{-1}) \cdot AB = B^{-1}(A^{-1} \cdot A)B = B^{-1} \cdot I_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$

ולכן AB הפיכה וההופכית של AB היא $B^{-1}A^{-1}$

$\Longrightarrow$: נניח כי AB הפיכה ונוכיח כי A הפיכה וגם B הפיכה.

מהיות AB הפיכה קיים $\vec{x}$ יחיד שעבורו מתקיים $AB\vec{x} = 0_n$

נניח בשלילה כי B לא הפיכה ולכן קיימים $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$ כך ש$x_2 \neq x_1$ וגם $B\overrightarrow{x_1} = B\overrightarrow{x_2} = 0$

ולכן $AB\overrightarrow{x_1} = A(B\overrightarrow{x_1}) = A \cdot 0_n = 0_n$ וגם $AB\overrightarrow{x_2} = A(B\overrightarrow{x_2}) = A \cdot 0_n = 0_n$

בסתירה להנחה שקיים פתרון יחיד למערכת המשוואות $AB\vec{x} = 0_n$

ולכן B הפיכה

נניח בשלילה כי A לא הפיכה ולכן קיימים $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$ כך ש$x_2 \neq x_1$ וגם $A\overrightarrow{x_1} = A\overrightarrow{x_2} = 0$

מהיות B הפיכה, נבחר $\overrightarrow{y_1} = B^{-1} \cdot \overrightarrow{x_1}$ ו$\overrightarrow{y_2} = B^{-1} \cdot \overrightarrow{x_2}$

ולכן $AB \cdot \overrightarrow{y_1} = AB \cdot B^{-1} \cdot \overrightarrow{x_1} = A \cdot I_n \cdot \overrightarrow{x_1} = A \cdot \overrightarrow{x_1} = 0$

וגם $AB \cdot \overrightarrow{y_2} = AB \cdot B^{-1} \cdot \overrightarrow{x_2} = A \cdot I_n \cdot \overrightarrow{x_2} = A \cdot \overrightarrow{x_2} = 0$

בסתירה להנחה שקיים פתרון יחיד למערכת המשוואות $AB\vec{x} = 0_n$

ולכן A הפיכה,

כלומר גם A הפיכה וגם B הפיכה

מ.ש.ל.א.☺

ב. **צ"ל:** $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m$ הפיכה

נתון: $A_1, A_2, \ldots, A_m \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכות

הוכחה:

נשים לב כי $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_m \cdot (A_m^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot (A_m \cdot A_m^{-1}) \cdot \ldots \cdot A^{-1}$

$= A_1 \cdot \ldots \cdot A_{m-1} \cdot I_n \cdot A_{m-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_{m-1} \cdot A_{m-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1} = A_1 \cdot A_1^{-1} = I_n$

בנוסף לכך $(A_m^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \cdot A_1 \cdot \ldots \cdot A_m = A_m^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot (A_1^{-1} \cdot A_1) \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m$

$= A_m^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot (A_1^{-1} \cdot A_1) \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m = A_m^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot I_n \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m = A_m^{-1} \cdot A_m$
$= I_n$

ולכן $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m$ הפיכה וההופכית שלה היא $(A_m^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1})$

מ.ש.ל.ב.☺

5. א. **צ"ל:** $-(a-b) = b-a$

נתון: $\mathbb{F}$ שדה ו-$a, b \in \mathbb{F}$

הוכחה:

הוכחנו בתרגול כי $-a = (-1)a$,

נשים לב כי $(-1)a + a \overset{\text{נגדי של } a}{=} 0 \overset{\text{נגדי של } -a}{=} (-1)a - (-1)a \overset{\text{הוכח בכיתה}}{=} (-1)a + (-1)(-1)a$

כלומר $(-1)(-1)a + (-1)a = a + (-1)a$, נוסיף a לשני האגפים ונקבל $(-1)(-1)a = a$

לכן $-(a-b) \overset{\text{הוכח בכיתה}}{=} (-1)(a-b) \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=} -a-(-1)b \overset{\text{ראינו למעלה}}{=} -a+b \overset{\text{קומוטטיביות}}{=} b-a$

מ.ש.ל.א.☺

ב. **צ"ל:** $(a \cdot b^{-1})^{-1} = a^{-1}b$

נתון: $\mathbb{F}$ שדה ו-$0 \neq a, b \in \mathbb{F}$

הוכחה:

תחילה נראה את יחידות ההופכי

נניח כי $c, d \in \mathbb{F}$ הופכיים של $0 \neq e \in \mathbb{F}$

ולכן $c = c \cdot 1 \overset{d \text{ הופכי ל} e}{=} c \cdot e \cdot d \overset{\text{אסוציאטיביות}}{=} (c \cdot e) \cdot d \overset{c \text{ הופכי ל} e}{=} 1 \cdot d = d$

כלומר $c = d$

כלומר נראה כי $(a \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1}b = 1$ ונסיים

$$(a \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1}b \overset{\text{קומוטטיביות לכפל}}{=} a \cdot a^{-1} \cdot b \cdot b^{-1} \overset{\text{אסוציאטיביות לכפל}}{=} (a \cdot a^{-1}) \cdot (b \cdot b^{-1})$$

$$\overset{a^{-1} \text{ הופכי ל} a}{=} 1 \cdot (b \cdot b^{-1}) \overset{b^{-1} \text{ הופכי ל} b}{=} 1 \cdot 1 = 1$$

כלומר $(a\cdot b^{-1})\cdot a^{-1}b=1$ ולכן $(a\cdot b^{-1})^{-1}=a^{-1}b$

<u>מ.ש.ל.ב.☺</u>

ג. **<u>צ"ל:</u>** $a\cdot b^{-1}+c\cdot d^{-1}=(a\cdot d+c\cdot b)\cdot(b\cdot d)^{-1}$

<u>נתון:</u> $\mathbb{F}$ שדה ו$a,b,c,d\in\mathbb{F}$ כך ש$b,d\neq 0$

<u>הוכחה:</u>

תחילה נראה ש$d=(d^{-1})^{-1}$

נשים לב ש$d^{-1}\cdot {d^{-1}}^{-1} \overset{d^{-1}\text{ הופכי ל}d^{-1^{-1}}}{=} 1 \overset{d^{-1}\text{ הופכי ל}d}{=} d\cdot d^{-1}$

ולכן $d\cdot d^{-1}={d^{-1}}\cdot {d^{-1}}^{-1}$, נכפיל ב$d$ את שני האגפים ונקבל $d=(d^{-1})^{-1}$

מסעיף קודם נקבל ש$(b\cdot d)^{-1}=(b\cdot(d^{-1})^{-1})^{-1}=b^{-1}\cdot d^{-1}$

$$(a\cdot d+c\cdot b)(b\cdot d)^{-1}$$
$$=(a\cdot d+c\cdot b)(b^{-1}\cdot d^{-1}) \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=} a\cdot d\cdot b^{-1}\cdot d^{-1}+c\cdot b\cdot b^{-1}\cdot d^{-1}$$
$$\overset{\text{אסוציאטיביות לכפל}}{=} a\cdot b^{-1}\cdot(d\cdot d^{-1})+c\cdot(b\cdot b^{-1})\cdot d^{-1} \overset{d^{-1}\text{ הופכי ל}d}{=} 1\cdot a\cdot b^{-1}+c(b\cdot b^{-1})d^{-1}$$
$$\overset{b^{-1}\text{ הופכי ל}b}{=} a\cdot b^{-1}+c\cdot 1\cdot d^{-1}=a\cdot b^{-1}+c\cdot d^{-1}$$

<u>מ.ש.ל.ג.☺</u>

ד. **<u>צ"ל:</u>** $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

<u>נתון:</u> $\mathbb{F}$ שדה ו$a,b\in\mathbb{F}$

<u>הוכחה:</u>

נשים לב כי $a^2+ba+ \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=} (a+b)\cdot a+(a+b)\cdot b \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=} (a+b)^2=(a+b)(a+b)$
$a^2+(1+1)ab+b^2 \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=} a^2+ab+ab+b^2 \overset{\text{קומוטטיביות לכפל}}{=} ab+b^2$

ולכן $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a^2+(1+1)ab+b^2)(a+b)$

נפתח סוגריים

$$(a+b)^3=(a^2+(1+1)ab+b^2)(a+b) \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=} (a^2+(1+1)ab+b^2)a$$
$$+(a^2+(1+1)ab+b^2)b \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=} a^3+(1+1)a^2b+b^2a+a^2b+(1+1)ab^2+b^3$$
$$\overset{\text{קומוטטיביות לכפל}}{=} a^3+(1+1)a^2b+ab^2+a^2b+(1+1)ab^2+b^3 \overset{\text{קומוטטיביות לחיבור}}{=}$$
$$a^3+(1+1)a^2b+a^2b+(1+1)ab^2+ab^2+b^3 \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=}$$
$$a^3+(1+1+1)a^2b+(1+1+1)ab^2+b^3 \overset{1+1+1=3}{=} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

<u>מ.ש.ל.ד.☺</u>

ה. **<u>צ"ל:</u>** $a=0$ או $b=0$

<u>נתון:</u> $\mathbb{F}$ שדה ו$a,b\in\mathbb{F}$ כך ש$a\cdot b=0$

הוכחה:

נניח ש$a \neq 0$ ולכן קיים לa הופכי שנסמנו $a^{-1} \in \mathbb{F}$

אזי $0 \overset{\text{הוכח בהרצאה}}{=} a^{-1} \cdot 0 = a^{-1}(ab) \overset{\text{אסוציאטיביות לכפל}}{=} (a^{-1} \cdot a) \cdot b \overset{a \text{ ההופכי של } a^{-1}}{=} 1 \cdot b = b$

ולכן אם $a \neq 0$ מתקיים ש$b = 0$

כלומר $a = 0$ או $b = 0$

מ.ש.ל.ה.☺

ו. **צ״ל:** $a = b$ או $a = -b$

נתון: $\mathbb{F}$ שדה ו$a, b \in \mathbb{F}$ כך ש$a^2 = b^2$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי $(a-b)(a+b) \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=} (a-b)a + (a-b)b = a^2 - ba + ab - b^2$

$\overset{\text{קומוטטיביות לכפל}}{=} a^2 - ab + ab - b^2 \overset{ab \text{ הנגדי של } -ab}{=} a^2 + 0 - b^2 = a^2 - b^2$

נחסר מהשוויון $a^2 = b^2$ b^2 משני האגפים ונקבל $0 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

נניח ש$a \neq b$ ולכן קיים ל$a - b$ הופכי שנסמנו ב$(a-b)^{-1} \in \mathbb{F}$

$(a+b) = 1 \cdot (a+b) \overset{(a-b) \text{ ההופכי של } (a-b)^{-1}}{=} \left((a-b)^{-1} \cdot (a-b)\right) \cdot (a+b) \overset{\text{אסוציאטיביות לכפל}}{=}$

$(a-b)^{-1}((a-b)(a+b)) = (a-b)^{-1} \cdot 0 \overset{\text{הוכח בהרצאה}}{=} 0$

ולכן אם $a \neq 0$ מתקיים ש$a + b = 0$, נחבר ל2 האגפים $-b$ ונקבל $a = -b$

כלומר $a = b$ או $a = -b$

מ.ש.ל.ו.☺

ז. **צ״ל:** $a = 0$ או $a = 1$ או $a = -1$

נתון: $\mathbb{F}$ שדה ו$a \in \mathbb{F}$ כך ש$a^3 = a$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי $(a-1)(a+1) \overset{\text{נוסחא הוכחה סעיף קודם}}{=} a^2 - 1^2 = a^2 - 1 \cdot 1 = a^2 - 1$

ולכן $a^3 - a \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=} a(a^2 - 1) \overset{\text{אסוציאטיביות לכפל}}{=} a \cdot (a-1) \cdot (a+1)$

נחסר משני האגפים של המשוואה $a^3 = a$ את a ונקבל $a^3 - a = 0$

נניח ש$a \neq 0$ ולכן קיים לa הופכי שנסמנו $a^{-1} \in \mathbb{F}$

נניח כי $a \neq 1$ ולכן קיים ל$a - 1$ הופכי שנסמנו ב$b \in \mathbb{F}$

$(a+1) = 1 \cdot (a+1) \overset{a \text{ ההופכי של } a^{-1}}{=} (a^{-1} \cdot a) \cdot (a+1) = (a^{-1} \cdot a) \cdot 1 \cdot (a+1)$

$\overset{a-1 \text{ ההופכי של } b}{=} (a^{-1} \cdot a)\left(b \cdot (a-1)\right) \cdot (a+1) \overset{\text{אסוציאטיביות לכפל}}{=} (a-1) \cdot a \cdot (a+1) \cdot a^{-1} \cdot b$

$$= 0 \cdot a^{-1} \cdot b \overset{\text{הוכח בהרצאה}}{=} 0$$

ולכן אם $a \neq 0,1$ מתקיים $a + 1 = 0$ נחבר -1 לשני האגפים ונקבל $a = -1$

ולכן $a = 1$ או $a = 0$ או $a = -1$

<u>מ.ש.ל.ז.☺</u>

6א. **<u>צ"ל:</u>** $(a+b)^2 = a^2 - b^2$

<u>נתון:</u> $\mathbb{F}$ שדה ו$a,b \in \mathbb{F}$ כך ש$1 + 1 = 0$

<u>הוכחה:</u>

תחילה נשים לב שהוכחנו בסעיף ד של שאלה 6 שמתקיים $(a+b)^2 = a^2 + (1+1)ab + b^2$

נשים לב כי $1 + 1 = 0$ ולכן $(1+1)ab = 0 \cdot ab \overset{\text{הוכח בהרצאה}}{=} 0$

נציב ונקבל $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

נשים לב שמתקיים $-(1+1)b^2 = -1 \cdot 0 \cdot b^2 \overset{\text{הוכח בהרצאה}}{=} 0$

ולכן $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 0 = a^2 + b^2 - (1+1)b^2 \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=} a^2 + b^2 - b^2 - b^2$

$$\overset{\text{הנגדי של } b^2 - b^2}{=} a^2 + 0 - b^2 = a^2 - b^2$$

כלומר $(a+b)^2 = a^2 - b^2$

<u>מ.ש.ל.א.☺</u>

ב. **<u>צ"ל:</u>** $a + b = a - b$

<u>נתון:</u> $\mathbb{F}$ שדה ו$a,b \in \mathbb{F}$ כך ש$1 + 1 = 0$

<u>הוכחה:</u>

תחילה נשים לב ש$b = 0,1$

<u>אם $b = 0$:</u>

נשים לב ש$-0 = 0$, נוסיף לשני האגפים a ונקבל $a + b = a + 0 = a - 0 = a - b$

<u>אם $b = 1$:</u>

נשים לב ש$-1 = 1$ מכיוון שמתקיים $1 + 1 = 0$

נוסיף לשני האגפים של המשוואה a ונקבל $a + b = a + 0 = a - 0 = a - b$

<u>מ.ש.ל.ב.☺</u>

7א. **<u>צ"ל:</u>** $a \cdot 0_V = 0_V$

<u>נתון:</u> $\mathbb{F}$ שדה וV מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ו$a \in \mathbb{F}$

<u>הוכחה:</u>

$$a0_V \overset{\text{ניטרלי לחיבור}}{=} a(0_V + 0_V) \overset{\text{אסוציאטיביות לכפל}}{=} a0_V + a0_V$$

קיים ל$a0_V$ נגדי ונסמנו בb

ולכן $a0_V \overset{\text{ניטרלי לחיבור}}{=} a0_V + 0_V \overset{b\ \text{נגדי של}\ a0_V}{=} a0_V + a0_V + b \overset{\text{מתקיים מלמעלה}}{=} a0_V + b \overset{b\ \text{נגדי של}\ a0_V}{=} 0_V$

ולכן $0_V = a0_V$

<u>מ.ש.ל.א.☺</u>

ב. **<u>צ"ל:</u>** $0_F v = 0_V$

<u>נתון:</u> $\mathbb{F}$ שדה ו-V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ו-$a \in \mathbb{F}$ ו-$v \in V$

<u>הוכחה:</u>

$$0_F v \overset{\text{ניטרלי לחיבור}}{=} (0_F + 0_F)v \overset{\text{אסוציאטיביות לכפל}}{=} 0_F v + 0_F v$$

קיים ל-$0_F v$ נגדי ונסמנו ב-b

$$0_F v \overset{\text{ניטרלי לחיבור}}{=} 0_F v + 0_V \overset{b\ \text{נגדי של}\ a0_V}{=} 0_F v + 0_F v + b \overset{\text{מתקיים מלמעלה}}{=} 0_F v + b \overset{b\ \text{נגדי של}\ 0_F v}{=} 0_V$$

ולכן $0_F v = 0_V$

<u>מ.ש.ל.ב.☺</u>

ג. **<u>צ"ל:</u>** $a = 0_F$ או $v = 0_V$

<u>נתון:</u> $\mathbb{F}$ שדה ו-V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ו-$a \in \mathbb{F}$ ו-$v \in V$ שעבורם מתקיים $av = 0_V$

<u>הוכחה:</u>

נניח ש-$a \neq 0_F$ ולכן קיים ל-a הופכי ונסמנו ב-a^{-1}

ולכן $0_V \overset{\text{הוכח בסעיף א}}{=} a^{-1} \cdot 0_V = a^{-1}(a \cdot v) \overset{\text{אסוציאטיביות לכפל בסקלר}}{=} a^{-1} \cdot a \cdot v \overset{a^{-1}\ \text{ההופכי של}\ a}{=} 1 \cdot v = v$

כלומר אם $a \neq 0_F$ מתקיים ש-$v = 0_V$

ולכן $a = 0_F$ או $v = 0_V$

<u>מ.ש.ל.ג.☺</u>

ד. **<u>צ"ל:</u>** $(-1)v = -v$

<u>נתון:</u> $\mathbb{F}$ שדה ו-V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ו-$v \in V$

<u>הוכחה:</u>

נשים לב כי $v + (-1_F)v = 1_F v + (-1_F)v \overset{\text{אסוציאטיביות לכפל בסקלר}}{=} (1_F - 1_F)v \overset{1\ \text{נגדי של}\ -1}{=} 0_F v \overset{\text{הוכח בסעיף ב}}{=} 0_V$

בנוסף לכך מתקיים $v - v = 0_V$ ולכן $v + (-1_F)v = 0_V = v - v$

נוסיף $-v$ ל-2 האגפים ונקבל $\mathrm{v} + (-1_F)\mathrm{v} - \mathrm{v} = \mathrm{v} - \mathrm{v} - \mathrm{v}$

$$v - v + (-1_F)v \overset{\text{קומוטטיביות לחיבור}}{=} v + (-1_F)v - v = v - v - v \overset{v\ \text{נגדי של}\ -v}{=} 0_V - v \overset{\text{ניטרלי לחיבור}}{=} -v$$

$$(-1_F)v \overset{\text{ניטרלי לחיבור}}{=} 0_V + (-1_F)v \overset{v\ \text{נגדי של}\ -v}{=}$$

ולכן $(-1_F)v = -v$

<u>מ.ש.ל.ד.☺</u>

ה. **<u>צ"ל:</u>** קיים $\mathrm{x} \in \mathrm{V}$ יחיד המקיים את הדרוש

נתון: $\mathbb{F}$ שדה וV מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ו$0 \neq a \in \mathbb{F}$, $u,v \in V$ כך ש$ax+u=v$

הוכחה:

תחילה נראה קיום ואז יחידות

נשים לב כי $a \neq 0$ ולכן קיים לa הופכי ונסמנו a^{-1}

נשים לב כי עבור $x=a^{-1}(v-u)$ מתקיים ש:

$$ax+u=a\cdot a^{-1}(v-u)+u=1(v-u)+u \overset{\text{אסוציאטיביות לכפל}}{=} v-u+u \overset{u\text{ הנגדי של }-u}{=} v+0_V \overset{\text{ניטרלי לחיבור}}{=} v$$

ולכן $ax+u=v$.

עתה נראה יחידות ונסיים

יהי $x \in V$ פתרון אזי $ax+u=v$, נחבר לשני האגפים את הנגדי לu ונקבל

$$ax \overset{\text{ניטרלי לחיבור}}{=} ax+0_V \overset{u\text{ הנגדי של }-u}{=} ax+u-u=v-u$$

עתה נכפיל את 2 האגפים בa^{-1} ונקבל

$$x=1\cdot x \overset{a\text{ ההופכי של }a^{-1}}{=} a^{-1}ax=a^{-1}(v-u)$$

ולכן פתרון למשוואה הוא רק $x=a^{-1}(v-u)$

מ.ש.ל.ה.☺