הסתברות 1 - תרגיל 11

5 ביוני 2019

1. חשבו את פונקצית הצפיפות של המ"מ הבאים:

   (א) $X \sim U([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ויהא $Y = \tan(X)$. מצאו את התפלגות Y.

   (ב) יהא $X \sim U([0,1])$ ו $\lambda > 0$. מצאו את התפלגות המ"מ Y המוגדר ע"י
   $$Y = -\frac{1}{\lambda}\log(X)$$

   (ג) יהא $X \sim Exp(1)$ יהא $Y = e^X$, מצאו את התפלגות Y.

   (ד) יהא $X \sim U([-1,1])$ ויהא $Y = X^2$. מצאו את התפלגות Y.

   (ה) יהא $X \sim U([-1,1])$ ויהא $Y = |X|$. מצאו את התפלגות Y.

   (ו) $X \sim exp(1)$. מצאו התפלגות המ"מ e^{-X}. האם זו התפלגות מוכרת?

2. במשחק הרולטה יש 38 חריצים, 18 אדומים, 18 שחורים, ו-2 לבנים, וכדור נוחת באחד החריצים בהתפלגות אחידה. בכל סבב, ניתן להמר שהכדור ינחת בחריץ האדום (או השחור). אם ההימור היה נכון, האדם זוכה ב-1 שקל, אחרת הוא מפסיד 1 שקל.

   (א) יהי X_i תוצאת הרווח\הפסד בסבב ה-i ($Supp(X_i) = \{-1,1\}$). חשבו את התוחלת והשונות של X_i.

   (ב) יהי $S_n = X_1 + ... + X_n$ סך הרווח\הפסד של המהמר אחרי n סבבים (אנו מניחים שהסבבים בלתי תלויים). השתמשו במשפט הגבול המרכזי על מנת להעריך את ההסתברות של המאורע $\{S_n \geq 0\}$, עבור $n = 19^2$. על מנת לתת תוצאה מספרית, הגיעו להערכה מהצורה-
   $$\mathbb{P}(S_n \geq 0) \approx \mathbb{P}(Z \in A)$$
   עבור $Z \sim N(0,1)$ וקבוצה ממשית A.

3.

בשאלה זו נראה שקיום מומנט שני גורר קיום מומנט ראשון עבור מ"מ בדידים ורציפים.

   (א) הראו שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים
   $$|x| < 1 + x^2$$

(ב) הסיקו מהסעיף הקודם שאם מ"מ X הינו רציף או בדיד, ואם $E(X^2) < \infty$ אז $E(X)$ קיימת.

(ג) מצאו דוגמא למ"מ רציף כך ש $E(X)$ קיימת אבל $E(X^2)$ לא קיימת.

.4

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתי תלויים המתפלגים $X_i \sim Ber(\frac{1}{2})$.
נגדיר $Y_i = \max(X_i, X_{i+1})$ ו־$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

(א) חשבו את תוחלת ושונות Z_n.

(ב) הוכיחו כי $P(Z_n = \frac{n}{2})$ שואפת לאפס, כאשר n שואף לאינסוף.