אלגברה לינארית (1) התשע"ח סמסטר ב' - תרגיל 3

20 באפריל 2018

להגשה עד יום ג' ה24 לאפריל, בשעה 22:00

1. תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. נסמן ב–$D$ את המטריצה המדורגת המצומצמת המתקבלת מ–A ע"י ביצוע פעולות אלמנטריות. הוכיחו כי

   (א) קיימת מטריצה $Q \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ שהיא מכפלה של מטריצות אלמנטריות כך ש–$QD = A$.

   (ב) אם העמודה ה–l של D היא e_i, אז העמודה ה–i של Q זהה לעמודה ה–l של A.

   (ג) אם ב–D אין שורות אפסים, אז המטריצה Q מתקבלת מהמטריצה A ע"י מחיקה של $n-m$ עמודות.

2. תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. נסמן ב- D את המטריצה המדורגת המצומצמת המתאימה ל- A וב- r את מספר האיברים המובילים בה. עבור כל $1 \leq i \leq r$ נסמן ב- l_i את מספר העמודה שמכילה את המשבצת המובילה בשורה ה- i (המשבצת המובילה בשורה היא המשבצת השמאלית ביותר שבה מופיע ערך שונה מאפס).

   (א) תהיה Q מכפלה של מטריצות אלמנטריות כך ש- $QD = A$. הוכיחו כי העמודה ה- i של Q זהה לעמודה ה- l_i של A.

   (ב) תהיינה P_1, P_2 מכפלות של מטריצות אלמנטריות כך ש- $D = P_1A = P_2A$. הוכיחו כי אם $r = m$, אז $P_1 = P_2$.

3. הביאו דוגמא למטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ומטריצות P_1, P_2 שהן מכפלות של מטריצות אלמנטריות, שונות זו מזו, כך ש- $D = P_1A = P_2A$ כאשר D היא מטריצה מדורגת מצומצמת.

4. תהי A מטריצה מסדר $m \times n$, כאשר $m < n$. הניחו שקיימת מטריצה S כך ש $AS = I_m$. הוכיחו כי לא קיימת מטריצה T כך ש $TA = I_n$.

5. תהי A מטריצה מסדר $m \times n$ כאשר $m > n$.

   (א) הוכיחו כי קיים וקטור $b \in \mathbb{R}^m$ כך שלמערכת המשוואות

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

   אין פתרון.

(ב) תהי B מטריצה מסדר $n \times k$. הוכיחו כי קיים וקטור $b \in \mathbb{R}^m$ כך שלמערכת המשוואות

$$(AB)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \end{bmatrix} = b$$

אין פתרון.

(ג) האם בהכרח קיימת מטריצה C כך שלכל וקטור b מהסדר המתאים למערכת

$$(CA)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

יש פתרון?

6. עבור כל אחת מהמטריצות A הבאות, מצאו מטריצה ריבועית P, שהיא מכפלה של מטריצות אל-מנטריות, כך ש PA מדורגת מצומצמת.

(א) עבור $n \in \mathbb{N}$

$$A = I_n$$

(ב)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ג)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ד)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$