אלגוריתמים (67504) - פתרון תרגיל 9

שם: גיא לוי, **ת.ז:** 211744636 ; **שם:** מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

8 בינואר 2020

1. פתרון: בוטל
2. פתרון:

(א) **צ"ל:** אלגוריתם שמוציא האם קיימת תמורה חוקית
הוכחה:
ניצור רשת זרימה שתדמה את הבעיה עם קודקוד מקור s, קודקוד בור t, קודקודים שמהווים את הערכים שאיתם נתחיל v_i^{in} והערכים שנרצה להגיע אליהם v_i^{out}

$$V = \left\{v_i^{in} \mid i \in [n]\right\} \cup \left\{v_i^{out} \mid i \in [n]\right\} \cup \{s,t\}$$

עתה נגדיר את הצלעות ואת פונקצית הקיבול

$$E = \left\{\left(v_i^{in}, v_j^{out}\right) \mid (i,j) \in A\right\} \cup \left\{\left(s, v_i^{in}\right) \mid i \in [n]\right\} \cup \left\{\left(v_i^{out}, t\right) \mid i \in [n]\right\}$$
$$\forall e \in E \Rightarrow c(e) = 1$$

ניצור רשת זרימה $N = (V,E,c,s,t)$, נריץ את אלגוריתם אדמונד קארפ שיחזיר זרימה מקסימלית בשלמים, ונחזיר אמת אם"ם $|f| = n$ (טענה שתוכח בסעיף הבא קיימת תמורה חוקית אם"ם $|f| = n$)

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** הוכחת הטענה שנאמרה בסעיף א', קיימת תמורה חוקית אם"ם $|f| = n$ (בשלמים)
הוכחה:
$\Rightarrow$: תהי תמורה חוקית $\pi : [n] \to [n]$ ונוכיח כי השטף המקסימלי הוא n ברשת שהוגדרה בסעיף הקודם:
תחילה נשים לב כי $(i, \pi(i)) \in A$ מההגדרה של התמורה, ולכן $\left(v_i^{in}, v_{\pi(i)}^{out}\right) \in E$, עתה נגדיר זרימה ברשת באופן הבא:

$$\forall i \in [n] \Rightarrow 0 \le f\left(s, v_i^{in}\right) = 1 \le c\left(\left(s, v_i^{in}\right)\right)$$
$$\forall i,j \in [n] \Rightarrow 0 \le f\left(v_i^{in}, v_{\pi(i)}^{out}\right) = 1 \le c\left(\left(v_i^{in}, v_{\pi(i)}^{out}\right)\right)$$
$$\forall i \in [n] \Rightarrow 0 \le f\left(v_i^{out}, t\right) = 1 \le c\left(\left(v_i^{out}, t\right)\right)$$

ונזרים 0 בכל צלע אחרת,
נשים לב שהזרימה מקיימת את דרישת הקיבול, עתה נראה שהיא משמרת את חוק שימור החומר,
יהי $v_i^{in} \in V$, נשים לב כי מההגדרה מתקיים

$$\sum_{v \in V, \left(v, v_i^{in}\right) \in E} f\left(s, v_i^{in}\right) = \sum_{\left(s, v_i^{in}\right) \in E} f\left(s, v_i^{in}\right) = 1$$
$$\sum_{v \in V, \left(v_i^{in}, v\right) \in E} f\left(v_i^{in}, v\right) = \sum_{(i,j) \in A} f\left(v_i^{in}, v_j^{out}\right)$$
$$= f\left(v_i^{in}, v_{\pi(i)}^{out}\right) + \sum_{(i,j) \in A, j \ne \pi(i)} f\left(v_i^{in}, v_j^{out}\right)$$
$$= 1 + \sum_{(i,j) \in A, j \ne \pi(i)} 0 = 1$$

ולכן קיבלנו כי

$$\sum_{v \in V, \left(v, v_i^{in}\right) \in E} f\left(s, v_i^{in}\right) = \sum_{v \in V, \left(v_i^{in}, v\right) \in E} f\left(v_i^{in}, v\right)$$

עתה יהי $v_j^{out} \in V$, מהיות π תמורה היא הפיכה, נסמן ב־ $k = \pi^{-1}(j)$,
נשים לב כי מההגדרה מתקיים

$$\sum_{v \in V, \left(v_i^{out}, v\right) \in E} f\left(v_j^{out}, v\right) = \sum_{\left(v_i^{out}, t\right) \in E} f\left(v_j^{out}, t\right) = 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V, \left(v, v_j^{out}\right) \in E} f\left(v, v_j^{out}\right) &= \sum_{(i,j) \in A} f\left(v_i^{in}, v_j^{out}\right) \\ &= f\left(v_k^{in}, v_{\pi(i)}^{out}\right) + \sum_{(i,j) \in A, k \neq i} f\left(v_i^{in}, v_j^{out}\right) \\ &= 1 + \sum_{(i,j) \in A, k \neq i} 0 = 1 \end{aligned}$$

ולכן קיבלנו כי

$$\sum_{v \in V, \left(v_i^{out}, v\right) \in E} f\left(v_j^{out}, v\right) = \sum_{v \in V, \left(v, v_j^{out}\right) \in E} f\left(v, v_j^{out}\right)$$

כלומר קיבלנו כי חוק שימור החומר מתקיים, ולכן f היא אכן זרימה חוקית.
נשים לב כי

$$|f| = \sum_{v \in V, (s,v) \in E} f(s, v) = \sum_{i=1}^{n} f\left(s, v_i^{in}\right) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

ולכן השטף הוא לפחות n, נשים לב כי סכום הקיבולים היוצאים מs הוא n, ולכן כל שטף הוא לכל היותר n, ומפה נסיק כי השטף המקסימלי הוא בדיוק n, כנדרש.
$\Leftarrow$: תהי f זרימה עם $|f| = n$ ברשת שהוגדרה בסעיף הקודם ונראה שקיימת תמורה חוקית עבור A.
יהי $i \in [n]$, תחילה נשים לב שהשטף הוא n, ולכן מתקיים כי $f\left(s, v_i^{in}\right) = 1$,
מחוק שימור החומר $\exists \left(v_i^{in}, v\right) \in E$ כך ש־ $f\left(v_i^{in}, v\right) > 0$, מהגדרת הרשת $\exists j \in [n]$ כך ש־ $f\left(v_i^{in}, v_j^{out}\right) > 0$ (כי כל הצלעות היוצאות מ־ v_i^{in} הן נכנסות ל־ v_j^{out}),
עתה נשים לב שהזרימה בשלמים ולכן $f\left(v_i^{in}, v_j^{out}\right) \geq 1$, וגם מחוק שימור החומר מתקיים

$$f\left(v_i^{in}, v_j^{out}\right) \leq \sum_{v \in V, \left(v, v_i^{in}\right) \in E} f\left(v, v_i^{in}\right) = f\left(s, v_i^{in}\right) = 1$$

לכן נקבל כי $f\left(v_i^{in}, v_j^{out}\right) = 1$, נגדיר $\pi(i) = j$.
נשים לב כי π היא מוגדרת היטב, אחרת היו $\exists i, j_1, j_2 \in [n]$ כך ש

$$f\left(v_i^{in}, v_{j_1}^{out}\right) = 1 = f\left(v_i^{in}, v_{j_2}^{out}\right)$$

והיינו מקבלים סתירה לחוק שימור החומר כי

$$f\left(v_i^{in}, v_{j_1}^{out}\right) + f\left(v_i^{in}, v_{j_2}^{out}\right) = 1 + 1 > 1 = \sum_{v \in V, \left(v, v_i^{in}\right) \in E} f\left(v, v_i^{in}\right)$$

לכן π מוגדרת היטב, עתה נראה שπ היא חח"ע, נניח בשלילה ש־ $\exists i_1, i_2, j \in [n]$ כך שמתקיים

$$f\left(v_{i_1}^{in}, v_j^{out}\right) = 1 = f\left(v_{i_2}^{in}, v_j^{out}\right)$$

ולכן נשים לב כי מחוק שימור החומר מתקיים

$$\sum_{v \in V, \left(v_j^{out}, v\right) \in E} f\left(v_j^{out}, v\right) = f\left(v_j^{out}, t\right) = 1 < 1 + 1 = f\left(v_{i_1}^{in}, v_j^{out}\right) + f\left(v_{i_2}^{in}, v_j^{out}\right)$$

בסתירה לחוק שימור החומר, ולכן נקבל כי π היא מוגדרת היטב וחח"ע,
מהיות $\pi : [n] \to [n]$ חח"ע וגם $||[n]|| = ||[n]||$, לכן מתקיים π על,
ולכן π אכן תמורה,
יהי $i \in [n]$, נשים לב כי $f\left(v_i^{in}, v_{\pi(i)}^{out}\right) = 1 \leq c\left(v_i^{in}, v_{\pi(i)}^{out}\right)$, ומאיך שהגדרנו את $c\left(v_i^{in}, v_{\pi(i)}^{out}\right)$ מתקיים כי $c\left(v_i^{in}, v_j^{out}\right) \geq 1$ אם"ם $(i,j) \in A$, לכן נסיק כי $(i, \pi(i)) \in A$,
כלומר התמורה π שיצרנו היא אכן חוקית ביחס לA.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** זמן ריצה

הוכחה:

נשים לב כי יש 2 אלגוריתמים לפתרון של זרימה בשלמים, אחד ביעילות $O\left(|E|\cdot|f^*|\right)$ והשני ב- $O\left(|E|^2\cdot|V|\right)$.

נבחין כי $|f^*|\le n\le|V|$ ולכן האלגוריתם ביעילות $O\left(|E|\cdot|f^*|\right)$ עדיף במקרה שלנו,

נשים לב כי $|E|=3n$, ולכן נקבל כי זמן הריצה של האלגוריתם הוא הכנת הרשת (זמן ריבועי בn^2) ואז הרצת האלגוריתם ב- $O\left(9n^2\cdot n\right)=O\left(n^3\right)$, לכן ריצת האלגוריתם בכללי תיקח $\boxed{O\left(n^3\right)}$

מ.ש.ל.ג.☺

3. פתרון: **צ"ל:** אלגוריתם, נכונותו וזמן ריצה

הוכחה:

ניצור רשת זרימה שתדמה את הבעיה עם קודקוד מקור s, קודקוד בור t, קודקודי זמרים שנסמן ב- u_i, קודקודי ערים שנסמן ב- v_i^{in},v_i^{out}, וקודקודי נגנים שנסמן ב- w_i

$$V=\{u_i\mid i\in[n]\}\cup\left\{v_i^{in}\mid i\in[k]\right\}\cup\left\{v_i^{out}\mid i\in[k]\right\}\cup\{w_j\mid j\in[m]\}\cup\{s,t\}$$

עתה נגדיר את הצלעות ואת פונקצית הקיבול

$$E=\{(s,u_i)\mid i\in[n]\}\cup\left\{\left(u_i,v_j^{in}\right)\mid j\in s_i\right\}\cup\left\{\left(v_i^{in},v_i^{out}\right)\mid i\in[k]\right\}\cup\left\{\left(v_i^{out},w_j\right)\mid i\in p_j\right\}\cup\{(w_j,t)\mid j\in[m]\}$$
$$\forall e\in E\Rightarrow c(e)=1$$

ניצור רשת זרימה $N=(V,E,c,s,t)$, נריץ את אלגוריתם אדמונד קארפ שיחזיר זרימה מקסימלית בשלמים f, ונחזיר את את רשימת הערים:

$$W=\left\{i\in[k]:f\left(v_i^{in},v_i^{out}\right)=1\right\}$$

נכונות האלגוריתם:

טענה: פלט האלגוריתם מחזיר פתרון חוקי ומקסימלי של ערים.

$\Leftarrow$: נסמן ב- W את פלט האלגוריתם וניזכר כי $W=\left\{i\in[k]:f\left(v_i^{in},v_i^{out}\right)=1\right\}$ עבור f זרימה עם שטף מקסימלי ברשת הזרימה שהוגדרה באלגוריתם.

יהי $i\in W$. לכן $f\left(v_i^{in},v_i^{out}\right)=1$. דבר ראשון נשים לב כי $i\in[k]$ מההגדרה של v_i^{in}, ולכן אינדקס העיר מוגדר היטב.

יתרה מזאת הזרימה חוקית ובשלמים ולכן $\left(v_i^{out},v_2'\right)\in E$, $\exists\left(v_1',v_i^{in}\right)$ כך ש- $f\left(v_1',v_i^{in}\right)\ge1$, $f\left(v_i^{out},v_2'\right)\ge1$,

מהגדרת E, $\exists j\in[n]$ כך ש- $v_1'=u_j$ וגם $\exists l\in[m]$ כך ש- $\exists v_2'=w_l$,

נגדיר $h(i)=j,g(i)=l$ כלומר פונקציה שמקבלת עיר ומחזירה מי הזמר ופונקציה שמקבלת עיר ומחזירה מי הנגן,

נראה ש- $h:W\to[n]\,,g:W\to[m]$ מוגדרות היטב וחח"ע ומפה נסיק ש$-W$ היא רשימת ערים חוקית

(א) נניח בשלילה ש-h לא מוגדרת היטב, לכן $\exists i,j_1,j_2$ כך ש- $f\left(u_{j_1},v_i^{in}\right)\ge1$ וגם $f\left(u_{j_2},v_i^{in}\right)\ge1$, לכן

$$f\left(u_{j_1},v_i^{in}\right)+f\left(u_{j_2},v_i^{in}\right)>1=c\left(v_i^{in},v_i^{out}\right)\ge f\left(v_i^{in},v_i^{out}\right)=\sum_{v\in V,\left(v_i^{in},v\right)}f\left(v_i^{in},v\right)$$

נקבל סתירה מחוק שימור החומר, לכן h מוגדרת היטב,

נניח בשלילה ש-h לא חח"ע, לכן $\exists i_1\ne i_2\in W$ כך ש- $h(i_1)=h(i_2)$, לכן

$$f\left(u_{h(i_1)},v_{i_1}^{in}\right),f\left(u_{h(i_2)},v_{i_2}^{in}\right)\ge1$$
$$\Rightarrow f\left(u_{h(i_1)},v_{i_1}^{in}\right)+f\left(u_{h(i_2)},v_{i_2}^{in}\right)>1=c\left(s,u_{h(i_1)}\right)\ge f\left(s,u_{h(i_1)}\right)=\sum_{v\in V,\left(v,u_{h(i_1)}\right)}f\left(v,u_{h(i_1)}\right)$$

נקבל סתירה מחוק שימור החומר, לכן h חח"ע

(ב) נניח בשלילה ש-g לא מוגדרת היטב, לכן $\exists i,j_1,j_2$ כך ש- $f\left(v_i^{out},w_{j_1}\right)\ge1$ וגם $f\left(v_i^{out},w_{j_2}\right)\ge1$, לכן

$$f\left(v_i^{out},w_{j_1}\right)+f\left(v_i^{out},w_{j_2}\right)>1=c\left(v_i^{in},v_i^{out}\right)\ge f\left(v_i^{in},v_i^{out}\right)=\sum_{v\in V,\left(v,v_i^{out}\right)}f\left(v,v_i^{out}\right)$$

נקבל סתירה מחוק שימור החומר, לכן g מוגדרת היטב,
נניח בשלילה שg לא חח"ע, לכן $\exists i_1 \neq i_2 \in W$ כך ש- $g(i_1) = g(i_2)$, לכן

$$f\left(v_{i_1}^{out}, w_{g(i_1)}\right), f\left(v_{i_2}^{out}, w_{g(i_1)}\right) \geq 1$$
$$\Rightarrow f\left(v_{i_1}^{out}, w_{g(i_1)}\right) + f\left(v_{i_2}^{out}, w_{g(i_1)}\right) > 1 = c\left(w_{g(i_1)}, t\right) \geq f\left(w_{g(i_1)}, t\right) = \sum_{v \in V, \left(w_{g(i_1)}, v\right)} f\left(w_{g(i_1)}, v\right)$$

נקבל סתירה מחוק שימור החומר, לכן g חח"ע,

כלומר הראנו שלכל עיר שבחרנו יש בדיוק זמר אחד ונגן אחד וגם נשים לב כי

$$|W| = \sum_{i \in W} 1 = \sum_{i \in W} f\left(v_i^{in}, v_i^{out}\right) \overset{f\left(v_i^{in}, v_i^{out}\right) \in \{0,1\}}{=} \sum_{i=1}^{k} f\left(v_i^{in}, v_i^{out}\right) \overset{\star}{=} |f|$$

כאשר המעבר האחרון מתקיים בגלל שברשת כל השטף עובר דרך בדיוק אחד מהצלעות v_i^{in}, v_i^{out}, לכן הראנו שמספר הערים בקבוצה שיצרנו שווה לשטף של הרשת.
$\Leftarrow$: תהי W הערים קבוצה של ערים בהם ניתן לקיים הופעה, לכן קיימים פונקציות $h : W \to [n], g : W \to [m]$ חח"ע שמתאימות לכל עיר זמר ונגן אחד, (h מיפוי לזמרים, g מיפוי לנגנים)
נגדיר את הזרימה ברשת שהוגדרה מקודם באופן הבא:
יהי $i \in [k]$, נגדיר

$$f\left(s, u_{h(i)}\right) = 1, f\left(u_{h(i)}, v_i^{in}\right) = 1, f\left(v_i^{in}, v_i^{out}\right) = 1, f\left(v_i^{out}, w_{g(i)}\right) = 1$$

וכל צלע שלא הוגדרה נגדיר את הזרימה בה להיות 0.
נשים לב שבכל צלע הזרמנו מספר שלם וקטן שווה ל1, ולכן הזרימה עומדת בתנאי הקיבול.
עתה נראה כי הזרימה משמרת את חוק שימור החומר,

(א) יהי $u_j \in V$, אז $j \in [n]$,
אם $\forall i \in [k]$ מתקיים $h(i) \neq j$, אז מתקיים

$$\sum_{v \in V, (v, u_j) \in E} f(v, u_j) = 0 = \sum_{v \in V, (u_j, v) \in E} f(u_j, v)$$

אחרת $\exists i \in [k]$ כך ש- $h(i) = j$, אז מתקיים

$$\sum_{v \in V, (v, u_j) \in E} f(v, u_j) = f(s, u_j) = 1 = f(u_j, v_i) = \sum_{v \in V, (u_j, v) \in E} f(u_j, v)$$

(ב) יהי $v_i^{in} \in V$, אז $i \in [k]$,
אם $i \notin W$ אז מתקיים

$$\sum_{v \in V, \left(v, v_i^{in}\right) \in E} f\left(v, v_i^{in}\right) = 0 = \sum_{v \in V, \left(v_i^{in}, v\right) \in E} f\left(v_i^{in}, v\right)$$

אחרת $i \in W$ ולכן מתקיים

$$\sum_{v \in V, \left(v, v_i^{in}\right) \in E} f\left(v, v_i^{in}\right) = f\left(u_{h(i)}, v_i^{in}\right) = 1 = f\left(v_i^{in}, v_i^{out}\right) = \sum_{v \in V, \left(v_i^{in}, v\right) \in E} f\left(v_i^{in}, v\right)$$

(ג) יהי $v_i^{out} \in V$, אז $i \in [k]$,
אם $i \notin W$ אז מתקיים

$$\sum_{v \in V, \left(v, v_i^{out}\right) \in E} f\left(v, v_i^{out}\right) = 0 = \sum_{v \in V, \left(v_i^{out}, v\right) \in E} f\left(v_i^{out}, v\right)$$

אחרת $i \in W$ ולכן מתקיים

$$\sum_{v \in V, \left(v, v_i^{out}\right) \in E} f\left(v, v_i^{out}\right) = f\left(v_i^{in}, v_i^{out}\right) = 1 = f\left(v_i^{out}, w_{g(i)}\right) = \sum_{v \in V, \left(v_i^{in}, v\right) \in E} f\left(v_i^{out}, v\right)$$

(ד) יהי $w_l \in V$, אז $l \in [m]$,
אם $\forall i \in [k]$ מתקיים $g(i) \neq l$, אז מתקיים

$$\sum_{v \in V, (v, w_l) \in E} f(v, w_l) = 0 = \sum_{v \in V, (w_l, v) \in E} f(w_l, v)$$

אחרת $\exists i \in [k]$ כך ש־ $g(i) = l$, אז מתקיים

$$\sum_{v \in V, (v, w_l) \in E} f(v, w_l) = f(v_i, w_l) = 1 = f(w_l, t) = \sum_{v \in V, (w_l, v) \in E} f(w_l, v)$$

לכן קיבלנו שרשת הזרימה היא חוקית, והשטף ברשת היא בדיוק מספר הצלעות $\left(v_i^{in}, v_i^{out}\right)$ שהזרימה בהם 1 (כי כל הזרימה עוברת בדיוק באחת מהצלעות האלה), ולכן נקבל שהשטף הוא

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(v_i^{in}, v_i^{out}\right) = \sum_{i \in W} 1 = |W|$$

מסקנה: ולכן נשים לב שהראנו שנוכל להמיר כל קבוצת ערים חוקית לזרימה חוקית עם שטף בגודל הקבוצה והפוך, ולכן קבוצת הערים החוקית היא בדיוק השטף המקסימלי ברשת, כנדרש!
זמן ריצה:
נשים לב כי $|V| = O(n + k + m)$, $|E| = O(k(n + m))$ וזמן ההכנה של הרשת הוא לכל היותר $O(|E| + |V|)$, זמן ריצת אלגוריתם מציאת השטף האופטימלי הוא $O\left(|E|^2 |V|\right)$, וזמן יצירת רשימת הערים כפלט לכל היותר $|E|$.
לכן זמן הריצה הכולל הוא $O\left(|E|^2 |V|\right) = O\left((k(n + m))^2 \cdot (k + n + m)\right)$

מ.ש.ל.☺

4. פתרון:

(א) **הוכחה:** יהי $G(V, E)$ גרף מכוון חסר מעגלים. ראשית נשים לב כי מהיות כמות הקודקודים סופית וכן הגרף G חסר מעגלים כי מספר הכיסויים בגרף סופי ולכן קיים כיסוי מינימלי. נסמן ב־ $P = \{P_1, \ldots, P_k\}$ כיסוי מינימלי לגרף. נניח בשלילה כי קיים כיסוי $C = \{C_1, \ldots, C_t\}$ לגרף עם מספר צלעות כולל גדול משל P. נסמן ב־ X את קבוצת כל המסלולים בגרף הנתון ונסמן $w : X \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ פונקציה המחזירה את כמות הצלעות במסלול. נשים לב כי כמות הצלעות במסלול שווה למספר הקודקודים פחות 1 ולכן מתקיים

$$\forall x \in \{P_1, \ldots, P_k\} \cup \{C_1, \ldots, C_t\} : w(x) = |x| - 1$$

נסמן ב־ $w(P), w(C)$ כמות הצלעות הכוללת בקבוצות המסלולים. מהנחת השלילה מתקיים

$$w(P) < w(C)$$

נחשב:

$$w(P) = \sum_{i=1}^{k} w(P_i) = \sum_{i=1}^{k} (|P_i| - 1) = \sum_{i=1}^{k} |P_i| - k = |V| - k$$
$$w(C) = \sum_{i=1}^{t} w(C_i) = \sum_{i=1}^{t} (|C_i| - 1) = \sum_{i=1}^{k} |C_i| - t = |V| - t$$

כאשר השוויון האחרון נובע מהיות המסלולים מכסים את כל קודקודי הגרף. נציב את שקיבלנו באי השוויון לעיל ונקבל:

$$|V| - k = w(P) < w(C) = |V| - t$$

ולכן אנו מקבלים כי $k > t$ בסתירה למינימליות של k ולכן הראינו כי כיסוי מינימלי של הגרף יחזיר מספר צלעות מקסימלי כדרוש. $\blacksquare$

(ב) **פתרון:**
אלגוריתם: בהינתן גרף $G = (V, E)$ כך ש־ $V = [n]$ גרף מכוון חסר מעגלים, למצוא כיסוי מינימלי ל־ G.

1. כבהדרכה נבנה את רשת הזרימה $N=(V',E',c,s,t)$:

$$\begin{aligned} V'&=\{s,t\}\cup\{v_1,\dots,v_n\}\cup\{u_1,\dots,u_n\} \\ E'&=\{(s,v_i):i\in[n]\}\cup\{(u_i,t):i\in[n]\}\cup\{(v_i,u_j):(i,j)\in E\} \\ c&:E'\to\mathbb{R}_{>0} \\ \forall e\in E'&:c(e)=1 \end{aligned}$$

2. בעזרת אלגוריתם EK נמצא זרימה עם שטף מקסימלי f.
3. נתאחל $X=\phi$.
4. לכל $i\in[n]$ כך ש־ $\sum_{j=1}^{n} f(v_j,u_i)=0$:
   (א) נתאחל $P=(i)$, $y=i$.
   (ב) כל עוד קיים $j\in[n]$ כך ש־ $f(v_y,u_j)=1$:
      A. נכניס את j לסוף הרשימה P.
      B. נכניס j לתוך y.
   (ג) נכניס את P לתוך X.
5. נחזיר את X.

עתה נוכיח את נכונות האלגוריתם:

עצירה: נשים לב כי בלולאה החיצונית (שלב 3 באלגוריתם) יש לכל היותר n איטרציות. בלולאה הפנימית ־ אם בשלילה לא נעצור ־ הרי כי מאחר ויש מספר סופי של קודקודים, משובך היונים נסיק כי יהיה קודקוד שנחזור אליו לפחות פעם נוספת ־ מאחר ואחרי האתחול אנו מגיעים רק לקודקודים שקיימת צלע אליהם מהקודקוד הקודם ־ נסיק שניתן לבנות מעגל ־ בסתירה לנתונים על הגרף ולכן נעצור. □

חוקיות: נוכיח כי האלגוריתם מחזיר מסלולים זרים המכסים את כל קודקודי הגרף.

הוכחה: נסמן $X=\{P_1,\dots,P_k\}$ פלט האלגוריתם (X קבוצה סופית שכן מוכנסים אליה איברים כמספר u_i שאין אליהם זרימה וזה חסום על־ידי n).

i. נוכיח שהפלט מחזיר מסלולים: יהי $P\in X$ ונסמן $P=(x_1,\dots,x_l)$. כאשר $x_1,\dots,x_l\in V$. אם בשלילה P לא מסלול הרי כי קיימים $(x_i,x_{i+1})\subseteq P$ כך ש־ $(x_i,x_{i+1})\notin E$ ־ בסתירה לדרך פעולת האלגוריתם שכן x_{i+1} נכנס למסלול אס"ם $f\left(v_{x_i},u_{x_{i+1}}\right)=1$ ־ כלומר בפרט הקיבול של הצלע היה גדול מ־ 0 בגרף ולכן מהגדרת הצלעות בגרף $(x_i,x_{i+1})\in E$ כדרוש.

ii. נוכיח שהפלט מחזיר מסלולים זרים: בשלילה קיימים $P_i,P_j\in X$ כך ש־ $P_i\cap P_j\neq\phi\wedge i\neq j$. בין היתר מתקיים $P_i\neq P_j$ (שכן איברים שונים בקבוצה) לכן בפרט קיימים בה"כ $x,y\in P_i$ כך ש־ $x\in P_j$ ו־ $y\notin P_j$ וקיימת צלע בין x ל־ y במסלול P_i (x,y קיימים איפשהו במסלולים, בפרט קיימים כאלה שיש ביניהם צלע). נחלק למקרים:

א'. אם $(x,y)\in P_i$ הרי כי מדרך פעולת האלגוריתם $f(v_x,u_y)=1$ ולכן מאחר ו־ EK מחזיר זרימה בשלמים עבור קיבול בשלמים וקיבול כל הצלעות ברשת הוא 1, (v_x,u_y) זוהי הצלע היחידה היוצאת מ־ v_x עם זרימה ולכן מדרך פעולת האלגוריתם, אחרי ש־ x נכנס ל־ P_j, y ייכנס אחריו בסתירה לכך ש־ $y\notin P_j$. ולכן סיימנו בסתירה.

ב'. $(y,x)\in P_i$ הרי כי מדרך פעולת האלגוריתם $f(v_y,u_x)=1$ ולכן $\sum_{j=1}^{n} f(v_j,u_x)>0$ ולכן x לא מקור של P_j ־ לכן ב־ P_j יש צלע שנכנסת ל־ x, נראה שזו חייבת להיות y. מאחר והקיבול של (u_x,t) הוא 1, הרי כי הזרימה של f ב־ (v_y,u_x) מנצלת את כל החומר הנכנס בצלע ולכן זו הצלע היחידה עם זרימה שווה ל־ 1 ולכן מדרך פעולת האלגוריתם y חייב להופיע לפני x ב־ P_j כדי ש־ x יהיה ב־ P_j ־ בסתירה לכך ש־ $y\notin P_j$. לכן סיימנו בסתירה.

לכן בכל המקרים קיבלנו סתירה ולכן נסיק כי $i\neq j\Rightarrow P_i\cap P_j=\phi$ כדרוש.

iii. נוכיח שהפלט מחזיר כיסוי לכל הקודקודים: יהי $i\in V$. אם $\sum_{j=1}^{n} f(v_j,u_i)=0$ הרי כי מדרך פעולת האלגוריתם ניצור מסלול שמתחיל ב־ i ו־ i קודקוד ב־ V היכוסה על ידי המסלולים שמחוזרים בפלט. אחרת קיים $j_1\in[n]$ כך ש־ $f(v_{j_1},u_i)=1$ ־ אם $\sum_{j=1}^{n} f(v_j,u_{j_1})=0$ הרי כי האלגוריתם יפתח מסלול ב־ j_1 לאחריו i ייכנס. אחרת קיים $j_2\in[n]$ כך ש־ $f(v_{j_2},u_{j_1})=1$ וכו'. נניח שזה נמשך t איטרציות ־ אז נראה כי $j_t\notin\{i,j_1,\dots,j_{t-1}\}$. אם בשלילה $j_t\in\{i,j_1,\dots,j_{t-1}\}$ קיים מעגל ב־ j_t (שכן בין כל קודקודים סמוכים ברשימה קיים צלע ־ איפשהו j_t היה קודקוד שיצא ממנו צלע, ועכשיו אנחנו מכניסים צלע ל־ j_t ולכן יש מעגל) וזוהי סתירה להיות G גרף חסר מעגלים. לכן אם התהליך מתמשך בשלילה n פעמים נגיע לכך ש־

$$\forall i\in[n]:\exists j\in[n]\ \text{such that}\ f(v_j,u_i)=1$$

וגם פה באותו אופן קיים מעגל בגרף המקורי ולכן סתירה ולכן התהליך יסתיים תוך פחות מ־ n איטרציות ונגיע ל־ $\{i, j_1, \ldots, j_t\}$ כך ש־ $\sum_{j=1}^{n} f\left(v_j, u_{j_t}\right) = 0$ ולכן האלגוריתם ייצור מסלול שהרישא שלו היא $(j_t, j_{t-1}, \ldots, j_1, i)$ ולכן קיים מסלול ש־ i נמצא בו כדרוש. $\square$

אופטימליות: נוכיח כי האלגוריתם מחזיר כיסוי של קודקודי הגרף עם מספר מינימלי של מסלולים.

הוכחה: נסמן ב־ $X = \{P_1, \ldots, P_k\}$ פלט האלגוריתם ויהי $C = \{C_1, \ldots, C_t\}$ כיסוי מינימלי של קודקודי הגרף. נניח בשלילה כי $t < k$. מטענה 4.א' יש יותר צלעות ב־ C (יש $|V| - t$ צלעות כשב־ X יש $|V| - k$ ומאי השוויון החזק של הנחת השלילה נקבל גם אי שוויון חזק עבור כמות הצלעות בכיסויים). תהי N רשת הזרימה שבנינו בשלב הראשוני של האלגוריתם ונבנה את הזרימה f' הבאה:

$$\forall (i,j) \in E : f\left(v_i, u_j\right) = \begin{cases} 1 & \exists c \in C \text{ such that } e \in c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\forall i \in [n] : f\left(s, v_i\right) = \begin{cases} 1 & \exists j \in [n] \text{ such that } f\left(v_i, u_j\right) = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\forall j \in [n] : f\left(u_j, t\right) = \begin{cases} 1 & \exists i \in [n] \text{ such that } f\left(v_i, u_j\right) = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

קרי נגדיר את הזרימה להיות 1 עבור צלע הקיימת באחד המסלולים ב־ C, אם הצלע לא מופיעה באף מסלול נגדיר זרימה 0. נראה את חוקיות הזרימה:

א'. אילוץ הקיבול: קיבול כל הצלעות הוא 1, והזרימה היא לכל היותר 1 ולכן אילוץ הקיבול נשמר כדרוש.

ב'. שימור החומר: יהי $v \in V' \setminus \{s, t\}$ ־ אם $v \in \{v_1, \ldots, v_n\}$ הרי כי מהגדרת הזרימה אם אנחנו מוציאים זרימה בגודל 1, אנחנו גם מכניסים דרך s זרימה בגודל 1 בדיוק ־ נשים לב כי מהיות C כיסוי, v מופיעה לכל היותר במסלול אחד ואין אליו עוד זרימות, אחרת הזרימה מהקודקוד היא 0 וגם הזרימה מ־ s ל־ v תהיה 0. באותו אופן אם $v \in \{u_1, \ldots, u_n\}$ אם מכניסים זרימה בגודל 1 ל־ v אנחנו גם מוציאים דרכו זרימה ל־ t בגודל 1 ־ באותו אופן אין אליו עוד זרימות, אחרת הזרימה לקודקוד היא 0 וגם הגדרנו את היציאה מהקודקוד להיות זרימה 0. לכן בכל המקרים שימור החומר נשמר כדרוש.

נשים לב כי שטף הזרימה הוא כמות הצלעות בכיסוי: לכל צלע בכיסוי ־ הגדרנו זרימה 1 ברשת ־ ולכן למעשה הזרימה בחתך $(\{s, v_1, \ldots, v_n\}, \{u_1, \ldots, u_n, t\})$ תהיה בדיוק כמות הצלעות בכיסוי ־ כמו כן הזרימה בחתך שווה לשטף של הזרימה ולכן $|f'|$ זו כמות הצלעות בכיסוי. נסמן ב־ f את השטף שהתקבל עבור רשת הזרימה באלגוריתם ־ הרי כי מדרך פעולת האלגוריתם ־ לכל זרימה 1 ברשת הכנסנו את הצלע לכיסוי ולכן באותו אופן נקבל שהשטף של הזרימה f שווה לכמות הצלעות בכיסוי P ולכן מהניתוח הקודם של הנחת השלילה נקבל $|f| < |f'|$ אך f זהו הפתרון לשטף בעל זרימה מקסימלית ברשת הזרימה ולכן סתירה. לכן פלט האלגוריתם מחזיר כיסוי מינימלי כדרוש.

$\blacksquare$