פתרון תרגיל מספר 8 ־ מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

20 במאי 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** התפלגות X היא לא $Bin\left(n-1,\frac{1}{4}\right)$
הוכחה:
נבחר $n=3$, נניח בשלילה כי $X\sim Bin\left(n-1,\frac{1}{4}\right)$, אזי

$$\mathbb{P}\left(X=2\right)=\binom{2}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{0}=\frac{1}{16}$$

נשים לב כי בשביל שהרצף 01 יופיע פעמיים צריך את הרצף 0101, אך האורך הוא 3, ולכן הדבר לא אפשרי, כלומר

$$\mathbb{P}\left(X=2\right)=0\neq\frac{1}{16}$$

כלומר X היא לא $Bin\left(n-1,\frac{1}{4}\right)$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** קיים X בעל תוחלת סופית כך ש $\mathbb{P}\left(X\geq n\right)=\frac{\mathbb{E}[X]}{n}$
הוכחה:
לא נכון! נניח בשלילה שהדבר מתקיים, לכן עבור $k\geq N$ מתקיים

$$\mathbb{P}_X\left(k\right)=\mathbb{P}\left(X\geq k\right)\mathbb{P}\left(X\geq k+1\right)=\frac{\mathbb{E}\left[X\right]}{k}-\frac{\mathbb{E}\left[X\right]}{k+1}=\frac{\mathbb{E}\left[X\right]}{k\cdot\left(k+1\right)}$$

לכן

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\right]&=\sum_{x\in\mathrm{Im}X}x\cdot\mathbb{P}_X\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\mathbb{P}_X\left(k\right)=\sum_{k=n}^{\infty}k\cdot\mathbb{P}_X\left(k\right)+\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\mathbb{P}_X\left(k\right)\\&=\sum_{k=n}^{\infty}k\cdot\frac{\mathbb{E}\left[X\right]}{k\cdot\left(k+1\right)}+\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\mathbb{P}_X\left(k\right)=\mathbb{E}\left[X\right]\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\mathbb{P}_X\left(k\right)\end{aligned}$$

נשים לב כי $\mathbb{E}\left[X\right]\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k+1}$ הוא זנב של הטור ההרמוני ולכן מתבדר וגם $\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\mathbb{P}_X\left(k\right)$ סופי, לכן $\mathbb{E}\left[X\right]$ לא סופי בסתירה להנחה, לכן לא קיים X המקיים את הנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $Cov\left(1_A,1_B\right)>0$ אם"ם $\mathbb{P}\left(A\mid B\right)>\mathbb{P}\left(A\right)$
הוכחה:
נכון! נשים לב כי

$$\begin{aligned}Cov\left(1_A,1_B\right)&=\mathbb{E}\left[1_A\cdot 1_B\right]-\mathbb{E}\left[1_A\right]\cdot\mathbb{E}\left[1_B\right]=\mathbb{E}\left[1_A\cdot 1_B\right]-\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)\\&=\sum_{x\in A,x\in B}1^2\cdot\mathbb{P}\left(x\right)-\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)=\mathbb{P}\left(A\cap B\right)-\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)\end{aligned}$$

נשים לב כי

$$
\begin{aligned}
Cov\left(1_A,1_B\right)>0 &\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(A\cap B\right)-\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)>0\Leftrightarrow\mathbb{P}\left(A\cap B\right)>\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)\\
&\Leftrightarrow\frac{\mathbb{P}\left(A\cap B\right)}{\mathbb{P}\left(B\right)}>\mathbb{P}\left(A\right)\Leftrightarrow\mathbb{P}\left(A\mid B\right)>\mathbb{P}\left(A\right)
\end{aligned}
$$

כלומר קיבלנו כי $Cov\left(1_A,1_B\right)>0\Leftrightarrow\mathbb{P}\left(A\mid B\right)>\mathbb{P}\left(A\right)$, כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

2. **צ"ל:** חסם על הסתברות שיצא בדיוק פעמיים מה שהימר

הוכחה:

תחילה נזכר שבתרגיל 7 הגדרנו לכל מספר $1\leq\forall k\leq 6$, מספר הפעמים שיוצא k הוא משתנה מקרי $X\sim bin\left(3,\frac{1}{6}\right)$ (כי אין חשיבות לסדר הזכיות ו$\frac{1}{6}$ זה הסיכוי לזכות ויש 3 ניסיונות),

עתה נגדיר Y בתור הרווח מזכייה, נשים לב כי $Y=\begin{cases}-c & X=0\\ c\cdot X & 1\leq X\leq 3\end{cases}$,

ראינו כי $\mathbb{E}\left[Y\right]=-\frac{17}{216}\cdot c,\mathrm{Var}\left[Y\right]\sim 1.24c^2$ כאשר הוא הימר על c מטבעות,

עתה נחפש חסם על $\mathbb{P}\left(Y=2c\right)$, נשים לב כי

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Y=3c\right)=\mathbb{P}\left(X=3\right)&=\binom{3}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\\
\mathbb{P}\left(Y=2c\right)+\mathbb{P}\left(Y=3c\right)&=\sum_{k=2}^{3}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-k}\\
&=\sum_{k,\left|\frac{k}{3}-\frac{1}{6}\right|\geq\frac{1}{2}}\binom{3}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-k}\leq\frac{\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)}{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}\\
&=\frac{5}{27}
\end{aligned}
$$

לכן

$$
\boxed{\mathbb{P}\left(Y=2c\right)=\mathbb{P}\left(Y=2c\right)+\mathbb{P}\left(Y=3c\right)-\mathbb{P}\left(Y=3c\right)\leq\frac{5}{27}-\left(\frac{1}{6}\right)^3}
$$

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** $Cov\left(X,Y\right)$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי $X+Y$ הוא משתנה מקרי של ההסתברות לקבל 2 או 3 ויש חשיבות לסדר, לכן $X+Y\sim Bin\left(n,\frac{1}{3}\right)$,

לכן $\mathrm{Var}\left[X+Y\right]=n\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)$, נשים לב כי גם מתקיים $X\sim Y\sim Bin\left(n,\frac{1}{6}\right)$,

בתרגיל הקודם ראינו כי

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[X+Y\right]&=\mathrm{Var}\left[X\right]+\mathrm{Var}\left[Y\right]+2Cov\left[X,Y\right]\\
2Cov\left[X,Y\right]&=\mathrm{Var}\left[X+Y\right]-\mathrm{Var}\left[X\right]-\mathrm{Var}\left[Y\right]\\
&=n\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)-2\cdot n\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\\
&=\frac{2}{9}n-\frac{5}{18}\cdot n=\frac{-n}{18}\\
&\Rightarrow\boxed{Cov\left[X,Y\right]=-\frac{n}{36}}
\end{aligned}
$$

מ.ש.ל.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{E}\left[X\right]$

הוכחה:

נגדיר $X_{i,j}$ להיות 2 אם לi,j יש אותו יום הולדת אחרת 0, נשים לב כי $\mathbb{P}\left(X_{i,j}\right)=\frac{1}{365}$, עתה

$$\mathbb{E}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{30}\sum_{j=i+1}^{30}X_{i,j}\right]=\sum_{i=1}^{30}\sum_{j=i+1}^{30}\mathbb{E}\left[X_{i,j}\right]=\sum_{i=1}^{30}\sum_{j=i+1}^{30}\left[0\cdot\frac{364}{365}+2\cdot\frac{1}{365}\right]=$$
$$=\binom{30}{2}\cdot\frac{2}{365}\sim 2.383561643835616438356$$

לכן

$$\boxed{\mathbb{E}\left[X\right]=\binom{30}{2}\cdot\frac{2}{365}\sim 2.383561643835616438356}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathrm{Var}\left[X\right]$

הוכחה:

$$\mathrm{Var}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\left(\binom{30}{2}\cdot\frac{2}{365}\right)^2$$

נחשב את $\mathbb{E}\left[X^2\right]$, תחילה נעשה חישובי עזר

$$\mathbb{E}\left[X_{i,j}^2\right]=\frac{4}{365}$$
$$\mathbb{E}\left[X_{i,j}\cdot X_{i,k}\right]=\mathbb{E}\left[X_{i,j}\cdot X_{k,j}\right]=\frac{1}{365\cdot 364}\cdot 4=\frac{4}{364\cdot 365}$$
$$\mathbb{E}\left[X_{i,j}\cdot X_{k,l}\right]=\frac{1}{365}\cdot\frac{1}{364}\cdot 4=\frac{4}{364\cdot 365}$$

לכן

$$\mathbb{E}\left[X^2\right]=\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{30}\sum_{j=i+1}^{30}X_{i,j}\right)^2\right]=\binom{30}{2}\mathbb{E}\left[X_{i,j}^2\right]+\binom{30}{3}\mathbb{E}\left[X_{i,j,k}^2\right]+\binom{30}{4}\mathbb{E}\left[X_{i,j}\cdot X_{k,l}\right]$$
$$=\binom{30}{2}\cdot\frac{4}{365}+\binom{30}{3}\cdot\frac{4}{364\cdot 365}+\binom{30}{4}\cdot\frac{4}{364\cdot 365}$$
$$=\frac{4}{365}\cdot\left[\binom{30}{2}+\binom{30}{3}\cdot\frac{1}{364}+\binom{30}{4}\cdot\frac{1}{364}\right]\sim 5.7144362486828240$$

לכן

$$\boxed{\mathrm{Var}\left[X\right]=5.7144362486828240-\left(2.383561643835616438356\right)^2\sim 0.03307013871847}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(X \geq 11 \cdot \mathbb{E}\left[X\right]\right)$
הוכחה:
בדומה למה שראינו בתרגול מתקיים כי

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \geq 11 \cdot \mathbb{E}\left[X\right]\right) &\leq \mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}\left[X\right]\right| \geq 10 \cdot \mathbb{E}\left[X\right]\right) \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}\left[X\right]}{\left(10 \cdot \mathbb{E}\left[X\right]\right)^2} \sim 6.9906489562 \times 10^{-9}\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ג.☺

5. **צ"ל:** טווח
הוכחה:
נשים לב שאנחנו עובדים עם $X \sim Geo\left(q\right)$, נחפש r כך ש

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}\left[X\right]\right| > r\right) < 0.1$$

לפי אי שוויון צ'בישב מתקיים $\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}\left[X\right]\right| > r\right) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{r^2}$, נחפש מתי $\frac{\mathrm{Var}[X]}{r^2} < 0.1$,
בתרגיל הקודם ראינו כי $\mathrm{Var}\left[X\right] = \frac{1-q}{q^2}$, לכן

$$\frac{1-q}{q^2 r^2} < 0.1 \Leftrightarrow 10 \cdot \frac{1-q}{q^2} < r^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{10 \cdot \left(1-q\right)}{q^2}} < r$$

כלומר מצאנו כי

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}\left[X\right]\right| \leq r\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}\left[X\right]\right| > r\right) = 1 - 0.1 = 0.9$$

כלומר 90% נמצאים בטווח $\left[\mathbb{E}\left[X\right] - \sqrt{\frac{10 \cdot (1-q)}{q^2}}, \mathbb{E}\left[X\right] + \sqrt{\frac{10 \cdot (1-q)}{q^2}}\right]$, כנדרש

מ.ש.ל.☺