פתרון תרגיל מספר 4 - חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

1 במאי 2020

שאלה 5

סעיף 1 חלק a

צ"ל: שפת CFG ל- $L = \{w \mid w \neq w^{rev}\}$

הוכחה:

נגדיר $G = \langle \{S, A\}, \{0,1\}, \{S \to 0S0|1S1|0A1|1A0, A \to 0A|1A|\varepsilon\}, S\rangle$

הרעיון הפשוט בבנייה הוא ש:

1. אנחנו נשארים עם משתנה S כל עוד אם נקרא את המילה מההתחלה ומהסוף, נקבל שוויון, כלומר $0S0, 1S1$.
2. ברגע שהשוויון נשבר, נכתב $0A1$ או $1A0$ מותר לנו להוסיף איזה מילה A לרצוננו כי w כבר מקיימת את התנאי ש $w \neq w^{rev}$, ולכן מ- A ניתן להוסיף $0,1$ ולסיים עם טרמינל ε

כלומר $L(G) = L$, כנדרש.

מ.ש.ל.א.1.☺

סעיף 1 חלק b

צ"ל: שפת CFG ל- $L = \{w \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$

הוכחה:

תהי $\varepsilon \neq w \in L$, נניח בלי הגבלת הכלליות כי $w = 0 \cdot \sigma_2 \dots \sigma_n$ כאשר $\sigma_i \in \Sigma$,

נסמן ב- $f_k(w) = \#_0(0\sigma_2 \dots \sigma_k) - \#_1(0\sigma_2 \dots \sigma_k)$ לכל $1 \leq k \leq n$

נשים לב כי $f_n(w) = 0$,

לכן קיים $1 < k \leq n$ מינימלי המקיים $f_k(w) = 0$,

נשים לב כי $f_1(w) > 0$ ומכיוון שב- $f_k(w)$ הפונקציה התאפסה לראשונה, מתקיים כי $f_{k-1}(w) > 0$, ולכן $\sigma_k = 1$,

כלומר $w = 0\sigma_2 \dots \sigma_{k-1} \cdot 1 \cdot \sigma_{k+1} \cdot \sigma_n$, נשים לב כי

$$\begin{aligned}
0 = f_n(w) &= \#_0(0\sigma_2 \dots \sigma_n) - \#_1(0\sigma_2 \dots \sigma_n) \\
&= [\#_0(0\sigma_2 \dots \sigma_k) - \#_1(0\sigma_2 \dots \sigma_k)] + [\#_0(\sigma_{k+1} \dots \sigma_n) - \#_1(\sigma_{k+1} \dots \sigma_n)] \\
&= f_k(w) + [\#_0(\sigma_{k+1} \dots \sigma_n) - \#_1(\sigma_{k+1} \dots \sigma_n)] \\
&= 0 + [\#_0(\sigma_{k+1} \dots \sigma_n) - \#_1(\sigma_{k+1} \dots \sigma_n)] \\
&= f_{n-k}(\sigma_{k+1} \dots \sigma_n)
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\sigma_{k+1} \dots \sigma_n \in L$, וגם נשים לב כי

$$\begin{aligned}
0 = f_k(w) &= \#_0(0\sigma_2 \dots \sigma_{k-1}1) - \#_1(0\sigma_2 \dots \sigma_{k-1}1) \\
&= [1 + \#_0(\sigma_2 \dots \sigma_{k-1}1)] - [1 + \#_1(0\sigma_2 \dots \sigma_{k-1})] \\
&= [1 + \#_0(\sigma_2 \dots \sigma_{k-1})] - [1 + \#_1(\sigma_2 \dots \sigma_{k-1})] \\
&= \#_0(\sigma_2 \dots \sigma_{k-1}) - \#_1(\sigma_2 \dots \sigma_{k-1}) = f_{k-2}(\sigma_2 \dots \sigma_{k-1})
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\sigma_2 \dots \sigma_{k-1} \in L$, כלומר אפשר לכתוב את $w = 0 \cdot w_1 \cdot 1 \cdot w_2$ כאשר $w_1, w_2 \in L$,
אם היינו מניחים ש־w מתחיל ב־1, היינו מקבלים באותו אופן שניתן לכתוב את $w = 1 \cdot w_1 \cdot 0 \cdot w_2$ כאשר $w_1, w_2 \in L$,
לכן נשתמש בהגדרה רקורסבית זאת כדי להגדיר את הCFG,
נגדיר $G = \langle \{S\}, \{0,1\}, \{S \to 0S1S|1S0S|\varepsilon\}, S \rangle$ והנימוק מלעיל נסיק כי $L(G) = L$

מ.ש.ל.א.2.☺

סעיף 1 חלק c

צ"ל: שפת CFG ל־ $L = \{w \mid \text{in every prefix of w there are more 0 than 1}\}$

הוכחה:

תהי $\varepsilon \neq w \in L$, כאשר $w = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \dots \sigma_n$ כאשר $\sigma_i \in \Sigma$,
נסמן ב־ $f_k(w) = \#_0(\sigma_1 \dots \sigma_k) - \#_1(\sigma_1 \dots \sigma_k)$ לכל $1 \leq k \leq n$
נשים לב כי $f_i(w) \geq 0$ לכל $1 \leq i \leq n$
נחלק למקרים:

1. $f_i(w) > 0$ לכל $1 \leq i \leq n$, לכן ניתן לכתוב את $w = 0 \cdot \sigma_2 \dots \sigma_n$,
נשים לב כי $u = \sigma_2 \dots \sigma_n$ מקיים $f_i(u) = f_{i+1}(w) - 1 \geq 1 - 1 = 0$ לכל $1 \leq i \leq n-1$, ולכן $u \in L$ כלומר ניתן לכתוב את $w = 0 \cdot u$ כאשר $u \in L$

2. אם $1 < \exists k < n$ כך ש־ $f_k(w) = 0$, נגדיר $x = \sigma_1 \dots \sigma_k, y = \sigma_{k+1} \dots \sigma_n$,
נשים לב כי $w = x \cdot y$ וגם $f_i(x) = f_i(w) \geq 0$ לכל $1 \leq i \leq k$ ולכן $x \in L$,
וגם $f_i(y) = f_{i+k}(w) - f_k(w) = f_{i+k}(w) - 0 = f_{i+k}(w) \geq 0$ לכל $1 \leq i \leq n-k$ ולכן $y \in L$,
כלומר ניתן לכתוב את $w = x \cdot y$ כאשר $x, y \in L$

3. אחרת הפונקציה מתאפסת רק ב־ $f_n(w) = 0$, כלומר $\sigma_n = 1$ (כי ירדנו ממספר חיובי) וגם $\sigma_1 = 0$ (כי ההתחלה חייבת להתחיל ב0) ולכן נגדיר $x = \sigma_2 \dots \sigma_n$, כלומר $w = 0 \cdot x \cdot 1$,
נשים לב ש־ $f_i(w) > 0$ לכל $2 \leq i \leq n-1$ ולכן $f_i(x) = f_{i+1}(w) - f_1(w) = f_{i+1}(w) - 1 \geq 0$, לכל $1 \leq i \leq n-2$ ולכן $x \in L$,
כלומר ניתן לכתוב את $w = 0 \cdot x \cdot 1$

לכן נשתמש בהגדרה רקורסבית זאת כדי להגדיר את הCFG,
נגדיר $G = \langle \{S\}, \{0,1\}, \{S \to 0S1|SS|0S|\varepsilon\}, S \rangle$ והנימוק מלעיל נסיק כי $L(G) = L$

מ.ש.ל.א.3.☺

סעיף 2 חלק a

צ"ל: מה השפה?

הוכחה:

נשים לב ש־ S זה משתנה שיוצר רצפים מהצורה $a^n \cdot A \cdot c^n$, ל־ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, (כאשר A הוא משתנה)
בשלב כלשהו נעבור ל־ A, נשים לב ש־ A יוצר את השפה $a^k \cdot b^k$ ל־ $k \in \mathbb{N} \cup [0]$
לכן מחיבור שלהם נקבל שהשפה של ה־ CFG היא $\left\{a^n \cdot a^k \cdot b^k \cdot c^n \mid k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$

מ.ש.ל.ב.1.☺

סעיף 2 חלק b

צ"ל: מה השפה?

הוכחה:

נשים לב ש־ S זה משתנה שיוצר רצפים מהצורה מהצורה $\{0,1\}^n A \{0,1\}^n$ ל־ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
נשים לב ש־ B יוצר רצפים מהצורה $\{0,1\}^l$ עבור $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
ועתה נשים לב כי A יוצר רצפים מהצורה $1 \{0,1\}^k 0$ או $0 \{0,1\}^k 1$ ל־ $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
משילוב של רצף S ו־ A נקבל כי

$$\left\{\{0,1\}^n 0 \{0,1\}^k 1 \{0,1\}^n \mid k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \cup \left\{\{0,1\}^n 1 \{0,1\}^k 0 \{0,1\}^n \mid k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$$

נשים לב שזה בעצם כל המילים שמתקיימים עבורם $w \neq w^{rev}$ כי מצד אחד האות ה־ $n+1$ היא 0 ומהצד השני היא 1 (או הפוך) ולכן ניתן לכתוב את השפה בתור

$$\left\{w \in \{0,1\}^* \mid w \neq w^{rev}\right\}$$

מ.ש.ל.ב.2.☺