

## פתרון תרגיל מספר 11 - חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, ת.ז: 211747639

19 ביוני 2020

### שאלה 2

צ"ל:  $L \in \text{NP-COMplete}$

הוכחה:

תחילה נראה ש-  $L \in \text{NP}$  עם מודא פולינומי שהן החלוקה של הקודקודים לקבוצות של קליקות. נקבל  $\langle V, E \rangle \# V_1, V_2, V_3$  כאשר  $V_1, V_2, V_3$  תתי קבוצות של  $V$ . מה שהמכונה הדטרמיניטית תעשה זה:

1. נבדוק ש-  $V_1, V_2, V_3$  תתי קבוצות של  $V$ , ואם לא נדחה

2. נבדוק ש-  $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V$ , ואם לא נדחה

3. לכל  $i \in [3]$  לבדוק ש-  $V_i$  היא קליקה בגרף  $G = \langle V, E \rangle$ , אם לא נדחה

4. נקבל

נשים לב כי  $|V_1|, |V_2|, |V_3| \leq |V|$  אחרת נדחה בשלב הראשון בזמן פולינומי ב-  $V$ , לכן נסתכל על החסם מלעיל שצוין פה. נשים לב שהשלב הראשון לוקח לכל היותר  $O(|V|^2)$ , השלב השני  $O(|V|^2)$ , השלב השלישי לוקח  $O(|V|^2 \cdot |E|)$  והרביעי לוקח  $O(1)$ , ולכן זמן הריצה של המכונה  $O(|V|^2 \cdot |E|)$ .

כלומר הראנו מכונה דטרמיניסטית שהיא מודא פולינומי לשפה  $L$ , ולכן  $L \in \text{NP}$ . עתה נראה ש-  $L \in \text{NP-HARD}$ , נגדיר  $f(\langle V, E \rangle) = \langle V, \bar{E} \rangle$ , נשים לב ש-  $f$  חשיבה בזמן פולינומי כי לחשב את  $\bar{E}$  לוקח לכל היותר  $O(|V|^2 \cdot |E|)$  זמן וזה פולינומי וגם מתקיים

$$\langle V, E \rangle \in 3-COLOR \iff \exists V_1, V_2, V_3 \subseteq V \text{ s.t. } \left( \bigcup_{i=1}^3 V_i = V \right) \wedge \forall i \in [3] (\forall u, v \in V_i \rightarrow (u, v) \notin E)$$

$$\iff \exists V_1, V_2, V_3 \subseteq V \text{ s.t. } \left( \bigcup_{i=1}^3 V_i = V \right) \wedge \forall i \in [3] (\forall u, v \in V_i \rightarrow (u, v) \in \bar{E})$$

$$\iff \exists V_1, V_2, V_3 \subseteq V \text{ s.t. } \left( \bigcup_{i=1}^3 V_i = V \right) \wedge \forall i \in [3] (V_i \text{ is a clique})$$

$$\iff \exists V_1, V_2, V_3 \subseteq V \text{ s.t. } (V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V) \wedge \forall i \in [3] (V_i \text{ is a clique})$$

$$\iff \langle V, \bar{E} \rangle \in L \iff f(\langle V, E \rangle) \in L$$

כלומר הראנו שקיימת פונקציה  $f$  חשיבה בזמן פולינומי המקיימת

$$\langle V, E \rangle \in 3-COLOR \iff f(\langle V, E \rangle) \in L$$

כלומר  $3-COLOR \leq_p L$  ובשאלה 4 מוכיחים ש-  $3-COLOR \in \text{NP-COMplete}$  ולכן מתקיים כי  $3-COLOR \in \text{NP-COMplete}$   
 $\boxed{L \in \text{NP-HARD}}$  ולכן מטרנזיביות נקבל ש-  
 כלומר הראנו ש-  $L \in \text{NP}$  וגם כי  $L \in \text{NP-HARD}$  ולכן  $\boxed{L \in \text{NP-COMplete}}$  כנדרש  
 מ.ש.ל. ☺