פתרון תרגיל מספר 7 - אלגוריתמים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639 ; **שם:** גיא לוי, **ת.ז:** 211744636

18 בדצמבר 2019

1. **פתרון:**

(א) עיבוד מוקדם: נמיין את המשקלים בסדר עולה $a_1 \leq \cdots \leq a_n$.

(ב) אתחול: נתאחל x קבוצה ריקה שתכיל את האריזות. נתאחל $j = 0$.

(ג) איטרציה: לכל i בין 1 ל - n:

i. אם לא אתחלנו אריזה x_j נתאחל להיות קבוצה ריקה.

ii. אם משקל האריזה ה- x_j (ששווה לסכום משקלי הפריטים באריזה) ועוד משקל הפריט a_i גדול מ - 1:

א'. נכניס x_j לתוך x.

ב'. נבצע $j \leftarrow j + 1$.

iii. אחרת נכניס a_i לתוך x_j.

(ד) סיום: נחזיר את x.

חוקיות:
נשים לב כי:

(א) הוספנו איבר לאריזה הנוכחית רק אם היה שם מקום, ולכן מקיים את התנאי על גודל האריזה

(ב) אחרת הוספנו לאריזה חדשה (שאפשר להוסיף אליה כי יש $a_i \leq 1$ וגודל האריזה הוא 1), ולכן מקיים את התנאי על גודל האריזה

ולכן הפתרון שלנו הוא פתרון חוקי.
סיום: נשים לב כי האלגוריתם מסתיים לאחר n איטרציות ומחזיר פלט.
הוכחה שהאלגוריתם 2 מקרב:
נסמן ב- x את הפתרון שהאלגוריתם שלנו מחזיר. נסמן W משקל אריזה, במקרה שלנו $W = 1$. נסמן ב- S_i את סכום האיברים באריזה ה- i, $1 \leq \forall i \leq |x|$
עתה נשים לב שבפתרון אופטימלי מספר האריזות חסום מלמטה על ידי $\left\lceil \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{W} \right\rceil$ לכן, אם נראה שכל אריזה מלאה לפחות עד ה- $\frac{1}{2}W$ או שהיא חלק מזוג שביחד מלא יותר מ- W. נוכל להסיק שמספר האריזות בהן השתמשנו הוא לכל היותר כפול ממינימום האריזות האפשרי ולכן 2-מקרב.

(א) אם מילאנו רק אריזה אחת, אז הפתרון שלנו אופטימלי ובפרט 2 - מקרב.

(ב) אחרת, יש לפחות 2 אריזות:

i. אם בכל אריזה יש לפחות $\frac{1}{2}W$, הרי כי כמות האריזות שהאלגוריתם יחזיר היא לכל היותר $\left\lceil \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\frac{1}{2}W} \right\rceil \leq 2 \cdot \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{W} \right\rceil$ ונקבל כי הפתרון הוא 2 - מקרב.

ii. נסמן ב- k את האינדקס הראשון שבו מתקיים $S_k < \frac{1}{2}W$, נסמן ב- a_j את האיבר הראשון שנכנס לאריזה ה- k:

א'. אם $k=|x|$ (כלומר האריזה האחרונה), אז הסיבה שפתחנו את האריזה ה־ k היא בגלל ש־ $S_{k-1}+a_j>W$ ולכן בפרט $S_k+S_{k-1}\geq a_j+S_{k-1}>W$. ולפי הגדרת האינדקס k, כל האריזות עד ל־ $k-2$ כולל הן מכילות לפחות $\frac{1}{2}W$ ולכן מספר האריזות הוא לכל היותר 2 כפול המשקל הכולל שב־ $|x|-2$ האריזות הראשונות ועוד 2 (לאריזות $x_{|x|},x_{|x|-1}$) וכן מתקיים $S_{|x|}+S_{|x|-1}>W$ לכן נקבל

$$
\begin{aligned}
|x| &\leq 2\cdot\sum_{i=1}^{|x|-2}S_i+2\leq 2\cdot\frac{1}{W}\sum_{i=1}^{|x|-2}S_i+2\cdot\frac{1}{W}\left(S_{|x|-1}+S_{|x|}\right)\\
&\leq 2\cdot\frac{1}{W}\cdot\left(\sum_{i=1}^{|x|}S_i\right)=2\cdot\frac{1}{W}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i\leq 2\cdot\left\lceil\frac{\sum_{i=1}^{n-2}a_i}{W}\right\rceil
\end{aligned}
$$

.ונקבל כי הפתרון הוא 2 ־ מקרב.

ב'. אחרת, k לא האריזה האחרונה, נסמן ב־ a_j את האיבר הראשון של האריזה ה־ $k+1$. הסיבה שפתחנו את האריזה ה־ $k+1$ היא בגלל ש־ $S_k+a_j\geq W$, ואנחנו יודעים כי $S_k<\frac{1}{2}W$, ולכן $a_j\geq W-S_k>W-\frac{1}{2}W=\frac{1}{2}W$, כלומר $S_{k+1}\geq a_j>\frac{1}{2}W$, בגלל שכל האיברים ממוינים נקבל כי $a_i>\frac{1}{2}W$, $j\leq\forall i\leq n$ ובפרט נקבל $S_i>\frac{1}{2}W$: $k+1\leq i\leq|x|$. בנוסף מבחירת k מתקיים $S_i\geq\frac{1}{2}W$, $1\leq\forall i\leq k-1$ כלומר כל האריזות שהם לא k מכילות לפחות משקל $\frac{1}{2}W$ וכן מתקיים $S_k+S_{k+1}\geq W$ ולכן כמו במקרה הקודם נקבל כי מספר האריזות הוא לכל היותר

$$
\begin{aligned}
|x| &\leq 2\cdot\frac{1}{W}\sum_{i=1}^{k-1}S_i+2+2\cdot\frac{1}{W}\sum_{i=k+2}^{|x|}S_i\leq 2\cdot\frac{1}{W}\sum_{i=1}^{|x|}S_i=2\cdot\frac{1}{W}\sum_{i=1}^{n}a_i\\
&\leq 2\cdot\left\lceil\frac{\sum_{i=1}^{n-2}a_i}{W}\right\rceil
\end{aligned}
$$

ולכן קיבלנו כי האלגוריתם 2 ־ מקרב כדרוש.

לכן בכל המקרים האלגוריתם שלנו מחזיר פתרון 2 ־ מקרב כדרוש.

זמן ריצה:

נשים לב שזמן מיון הוא $O(n\log(n))$ ולאחר מכן אנחנו מבצעים $O(1)$ פעולות לכל איבר, ולכן עושים $O(n)$ פעולות ולכן היעילות בכללי היא $O(n\log(n))$.

הערה: נשים לב שבהוכחת אופטימליות רק השתמשנו בכך שאם־ $a_j>\frac{1}{2}W$, אז $a_{j+l}>\frac{1}{2}W$ לכל $0\leq l\leq n-j$, כלומר במקום למיין אפשר לחלק את איברים לגדולים מ־ $\frac{1}{2}W$ ולאיברים שקטנים שווים ל־ $\frac{1}{2}W$, שניתן לעשות ב־ $O(n)$ ולקבל זמן ריצה של $O(n)$ לאלגוריתם.

מ.ש.ל.☺

2. **צ"ל:** הצעת אלגוריתם $d+1$ מקרב ולהוכיח נכונות

הוכחה:

אלגוריתם:

(א) תחילה נאתחל $A=V$, $B=\emptyset$

(ב) כל עוד $A\neq\emptyset$, נבחר $v\in A$, ונעשה $B=B\cup\{v\}$, $A=A\setminus(\{v\}\cup\{w\mid(w,v)\in E\})$

(ג) נחזיר את B

חוקיות:

נשים לב שבכל שלב הוצאנו מ־ A את כל השכנים של v ואת v עצמו, לכן בעת בחירת קודקוד מ־ A, נבחר קודקוד ששכניו לא נבחרו עד כה ולכן זה תקין להוסיפו ל־ B. כלומר בכל ריצה של האלגוריתם B נשארת קבוצה בלתי תלויה ולכן בסיום האלגוריתם B עדיין תהיה בלתי תלויה.

הוכחה שהאלגוריתם $d+1$ מקרב:

נשים לב שאנחנו מחזירים קבוצה מגודל $\frac{|V|}{d+1}$ לכל הפחות כי בכל שלב נפטר לכל היותר מ־$d+1$ קודקודים (הקודקוד עצמו

ולכל היותר d שכניו). והפתרון האופטימלי הוא לכל היותר $|V|$, ולכן נקבל שהפתרון הוא $d+1$ מקרב כדרוש.
זמן ריצה:
נשים לב כי בכל איטרציה נוציא לפחות איבר אחד מהקבוצה ולכן יש לכל היותר $|V|$ איטרציות ובכל איטרציה אנחנו רצים על כל השכנים שיש לקודקוד שבחרנו, ויש לכל היותר d כאלה, ולכן היעילות היא $O\left(d\cdot|V|\right)$

מ.ש.ל.☺

3. **פתרון:**

(א) **פתרון:**
נסמן ב־ n את מספר המשתנים בפסוקית

i. $\frac{32}{31}$ - נשים לב כי הקירוב שלנו הוא $\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}}=\frac{2^n}{2^n-1}$ (אחד חלקי (אחד פחות ההסתברות לא להצליח)
ii. $\frac{31}{32}m$ - יש לנו 2^n אפשרויות להשמה של משתנים בפסוקית, ורק אחת מהן לא תצא $True$, ולכן ההסתברות להצלחה במקרה הבסיס הוא $1-\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$
iii. $k\cdot(m+1)$ - כמו שראינו בתרגול, ה־ $\frac{1}{2^n}$ מתבטל בחישוב ונקבל שעבור $k\cdot(m+1)$ איטרציות הסיכוי לכישלון חסום על ידי e^{-k}

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** הצעת אלגוריתם הסתברותי 4 מקרב ולהוכיח נכונות
הוכחה:
אלגוריתם בסיסי:

i. נאתחל $L=R=\emptyset$
ii. לכל $v\in V$, בהסתברות 0.5 נכניס את v ל־ L, אחרת נכניס את v ל־ R (הטלת מטבע הוגן לבחירה)
iii. נחזיר את L,R

אלגוריתם:

i. נריץ את האלגוריתם הבסיסי, נספור את כמות הצלעות, אם יש לפחות $\frac{|E|}{4}$ מהצלעות נחזיר את החלוקה ונסיים
ii. נחזור על שלב 1, $k\cdot(|E|+1)$ פעמים
iii. אם הגענו לשלב זה נחזיר $fail$

חוקיות:
נשים לב שאם לא חזר $fail$, הקבוצות L,R הם כאלה ש־ $L\cup R=V$ כי כל איבר הוכנס ל־ L או ל־ R וגם $L\cap R=\emptyset$ כי הכנסנו כל איבר רק לאחת מהקבוצות, ולכן L,R הוא פתרון חוקי.
האלגוריתם 4 מקרב:
נסמן ב$w:2^V\times 2^V\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ פונקציה שסופרת את כמות הצלעות בחתך של הפתרון החוקי (0 אם לא חוקי).
נשים לב כי $w\left(OPT\right)\leq|E|$ בגלל שיש לכל היותר $|E|$ צלעות לספור בחתך, נסמן את הפתרון של האלגוריתם בS, לכן אם $S\neq fail$ מתקיים

$$w\left(S\right)\geq\frac{|E|}{4}=\frac{1}{4}\cdot|E|\geq\frac{1}{4}w\left(OPT\right)$$

ולכן S הוא 4 מקרב.
הסיכוי לכישלון בסיסי:
נסמן בX משתנה מקרי של גודל החתך, ונשים לב כי $X=\sum_{e\in E}X_e$ כש־ X_e הוא משתנה מקרי שמייצג האם e נספרת כצלע בחתך או לא, כלומר

$$X_e=\begin{cases}1 & e.start\in L\wedge e.end\in R\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

. יהי $e\in E$, נסמן $e=(v_i,v_j)$, נשים לב כי

$$\mathbb{E}\left[X_e\right]=0\cdot\mathbb{P}\left(X_e=0\right)+1\cdot\mathbb{P}\left(X_e=1\right)=\mathbb{P}\left(X_e=1\right)\underset{v_j\in R}{\overset{v_i\in L}{=}}\frac{1}{4}$$

לכן נקבל כי

$$\mathbb{E}\left[X\right]=\sum_{e\in E}\mathbb{E}\left[X_e\right]=\sum_{e\in E}\frac{1}{4}=\frac{|E|}{4}$$

עתה נסמן $Y=|E|-X$ מספר הצלעות שלא בחתך לכן

$$\mathbb{E}\left[Y\right]=\mathbb{E}\left[|E|-X\right]=|E|-\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{3}{4}\cdot|E|$$

וגם

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\text{basis algorithm fail}\right)&=\mathbb{P}\left(X<\frac{|E|}{4}\right)=\mathbb{P}\left(Y>\frac{3\cdot|E|}{4}\right)=\mathbb{P}\left(Y\geq\frac{3}{4}\left(|E|+1\right)\right)\\&=\mathbb{P}\left(Y\geq\frac{3\left|E\right|}{4}\left(1+\frac{1}{|E|}\right)\right)=\mathbb{P}\left(Y\geq\mathbb{E}\left[Y\right]\left(1+\frac{1}{|E|}\right)\right)\\&\overset{markov}{\leq}\frac{\mathbb{E}\left[Y\right]}{\mathbb{E}\left[Y\right]\left(1+\frac{1}{|E|}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{|E|}}=\frac{|E|}{1+|E|}=1-\frac{1}{|E|+1}\end{aligned}$$

כאשר השוויון השלישי נובע מטענה בתרגול. כלומר קיבלנו כי $\boxed{\mathbb{P}\left(\text{basis algorithm fail}\right)\leq1-\frac{1}{|E|+1}}$

הסיכוי להצלחה:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\text{algorithm success}\right)\boldsymbol{=1-}\mathbb{P}\left(\text{algorithm fail}\right)&\boldsymbol{=1-\left(1-\frac{1}{|E|+1}\right)^{k\cdot(|E|+1)}}\\&=1-\left(\left(1-\frac{1}{|E|+1}\right)^{(|E|+1)}\right)^{k}\overset{\text{saw in tirgul}}{\geq}1-e^{-k}\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי הסיכוי להצלחה גדול כרצוננו וגם $\boxed{\mathbb{P}\left(\text{algorithm success}\right)\geq1-e^{-k}}$

זמן ריצה:

כל ריצה בסיסית לוקחת $O\left(|V|\right)$ זמן ואנחנו רצים לכל היותר $k\cdot\left(|E|+1\right)$ פעמים, לכן זמן הריצה הוא $O\left(k\cdot|V|\cdot|E|\right)$

מ.ש.ל.☺

4. **צ"ל:** הצעת אלגוריתם 2 מקרב ולהוכיח נכונות

הוכחה:

אלגוריתם:

תחילה נמספר את הקודקודים ונסמן את הקודקודים הממוספרים ב־ $v_1,\ldots,v_n$.

נגדיר

$$\begin{aligned}E_1&=\left\{(v_i,v_j)\in E\mid i<j\right\}\\E_2&=\left\{(v_i,v_j)\in E\mid i>j\right\}\end{aligned}$$

נבחר את הקבוצה שמכילה יותר איברים (צלעות) בין E_1,E_2 ונחזיר אותה

חוקיות:

נשים לב ש־ E_1 לא מכילה מעגלים בגלל שניתן לעבור מ־ v_i ל־ v_j רק אם $i<j$ וגם $(v_i,v_j)\in E$, ולכן לא נוכל ללכת לחזור לאינדקס קטן יותר, כלומר לא ניתן לסגור מעגל.

באופן דומה, E_2 לא מכילה מעגלים בגלל שניתן לעבור מ־ v_i ל־ v_j רק אם $i>j$ וגם $(v_i,v_j)\in E$, ולכן לא נוכל ללכת לחזור לאינדקס גדול יותר, כלומר לא ניתן לסגור מעגל.

הוכחה שהאלגוריתם 2 מקרב:

נסמן ב־ E^* את הפתרון האופטימלי, ו־ $E'=\left\{(v_i,v_j)\in E\mid i\neq j\right\}$.

נשים לב כי $E^* \subseteq E'$ כי E^* לא מכיל מעגלים ולכן לא יכול להכיל צלע מקודקוד לעצמו.
נשים לב כי $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1 \cup E_2 = E'$, ולכן

$$\max\left\{\left|E_1\right|, \left|E_2\right|\right\} \geq \frac{\left|E_1\right| + \left|E_2\right|}{2} = \frac{\left|E_1 \cup E_2\right|}{2} \geq \frac{\left|E'\right|}{2} \geq \frac{\left|E^*\right|}{2}$$

כלומר הפתרון שלנו הוא 2 מקרב לפתרון האופטימלי, כנדרש.
זמן ריצה:
מספר הקודקודים הוא $O\left(|V|\right)$, יצירת הקבוצות הוא $O\left(|E|\right)$ והמקסימלי הוא $O\left(1\right)$, ולכן היעילות היא $O\left(|V| + |E|\right)$

מ.ש.ל.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** הצעת אלגוריתם 2 מקרב ולהוכיח נכונות
הוכחה:
אלגוריתם:

i. תחילה נמספר את הקודקודים ב־ $v_1, \ldots, v_n$ ונגדיר $A = B = \emptyset$
ii. לכל $1 \leq i \leq n$, אם יש ל־ v_i יותר שכנים ב־ A, נוסיף את v_i ל־ B, אחרת נוסיף את v_i ל־ A (כלומר נוסיף כמה שיותר שכנים לחתך)
iii. נחזיר את A, B

חוקיות:
נשים לב כי בסוף נקבל כי $A \cap B = \emptyset$ וגם $A \cup B = V$, כי הוספנו כל איבר רק לאחת מהקבוצות, ולכן A, B הוא פתרון חוקי.
האלגוריתם 2 מקרב:
נשים לב כי באיטרציה ה־ i, כמות הצלעות שאנו מוסיפים לחתך זה לפחות חצי מכמות השכנים של הקודקוד v_i עם אינדקס קטן מ־ i ־ ה"לפחות חצי" נובע מההתניה בשלב האיטרציה, לכן נסמן כמות צלעות זו בm_i ומתקיים

$$m_i \geq \frac{1}{2}\left|\left\{\{v_i, v_j\} \in E : 1 \leq j < i\right\}\right|$$

עתה נשים לב כי בכל איטרציה אנחנו לא מזיזים קודקודים או משהו ולכן לא מורידים צלעות אלא רק מוסיפים. נשים לב כי מתקיים

$$\forall i \neq k : \left\{\{v_i, v_j\} \in E : 1 \leq j < i\right\} \cap \left\{\{v_k, v_j\} \in E : 1 \leq j < i\right\} = \phi$$

שכן הקבוצה כוללת רק צלעות שכוללות את הקודקוד החדש, אז הצלעות לא הופיעו לפני כן. בנוסף נשים לב כי

$$\bigcup_{i=1}^{n}\left\{\{v_i, v_j\} \in E : 1 \leq j < i\right\} = |E|$$

כל צלע תיווסף לקבוצה כאשר נכניס את הקודקוד עם האינדקס הגדול יותר ולכן קיבלנו משני הטענות לעיל

$$|E| = \left|\bigcup_{i=1}^{n}\left\{\{v_i, v_j\} \in E : 1 \leq j < i\right\}\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|\left\{\{v_i, v_j\} \in E : 1 \leq j < i\right\}\right|$$

ולכן נסיק בטרנזטיביות

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|\left\{\{v_i, v_j\} \in E : 1 \leq j < i\right\}\right| = \frac{1}{2}|E|$$

נשים לב כי $\sum_{i=1}^{n} m_i$ זה כמות הצלעות בחתך בסוף האלגוריתם וכמות הצלעות בפתרון האופטימלי היא לכל היותר כמות הצלעות בגרף ולכן הראינו כי האלגוריתם הוא 2 ־ מקרב כדרוש.
זמן ריצה:
מספר הקודקודים הוא $O\left(|V|\right)$, ספירת כמות הקודקודים היא לכל היותר $O\left(|V|\right)$ ולכן זמן הריצה הוא $O\left(|V|^2\right)$

מ.ש.ל.☺

(ב) **צ"ל:** הצעת אלגוריתם $1+\frac{1}{k-1}$ מקרב ולהוכיח נכונות

הוכחה:

אלגוריתם:

i. תחילה נמספר את הקודקודים ב־ $v_1,\ldots,v_n$ ונגדיר $V_1=V, V_2=V_3=\cdots=V_k=\emptyset$

ii. נעבור על כל הקבוצות שהגדרנו (k קבוצות), לכל איבר נבדוק אם העברתו לקבוצה אחרת, מגדילה את הצלעות בחתך, אם כן, נעביר אותו לקבוצה שמגדילה את הצלעות בחתך.

iii. נחזור על שלב 2 כל עוד העברנו לפחות איבר אחד באיטרציה האחרונה.

iv. נחזיר את $V_1,\ldots,V_k$

חוקיות:

נשים לב כי בסוף נקבל כי $V_i\cap V_j=\emptyset$ (כי בכל שלב באלגוריתם, כל איבר שייך בדיוק לקבוצה אחת) וגם $\bigcup_{i=1}^{k}V_i=V$, כי לא הוצאנו אף איבר והתחלנו מהקבוצה V, ולכן $V_1,\ldots,V_k$ הוא פתרון חוקי.

האלגוריתם $1+\frac{1}{k-1}$ מקרב:

נסמן ב־ $V_1,\ldots,V_k$ את הקבוצות בסוף ריצת האלגוריתם.

יהי $1\le i\le n$, ויהי $v\in V_i$, נניח בשלילה של־ v יש יותר מ־ $\frac{d(v)}{k}$ שכנים ב־ V_i, לכן מעיקרון שובך היונים, קיימת $1\le\exists j\ne i\le n$ כך שבקבוצה V_j יש פחות מ־ $\frac{d(v)}{k}$ שכנים של v. לכן היינו מעבירים את v מ־ V_i ל־ V_j במקום לסיים את ריצת האלגוריתם, בסתירה לכך ש־ $v\in V_i$.

לכן קיבלנו כי לכל $v\in V$, מספר השכנים בקבוצה איתו הוא לכל היותר $\frac{1}{k}\cdot d(v)$ מכל שכניו , לכן יש לו לפחות $\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot d(v)$ שכנים בקבוצות שונות משלו שייספרו בחתך ־ כלומר כמות הצלעות בחתך היא לפחות

$$\frac{1}{2}\sum_{v\in V}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot d(v)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot 2|E|=\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot|E|$$

. לכן נקבל כי האלגוריתם משיג $1+\frac{1}{k-1}=\frac{k}{k-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{k}}$ קירוב.

זמן ריצה ועצירה:

נשים לב שבכל ריצה מספר הצלעות בחתך גדל לפחות ב־ 1 ויש $|E|$ צלעות, ולכן נחזור על שלב 2 לכל היותר $|E|+1$ פעמים.

מספר הקודקודים הוא $O(|V|)$, בדיקה האם משתלם להעביר קודקוד מקבוצה אחת לאחרת לוקח $O(|V|)$ פעולות, ואנחנו מבצעים פעולה זאת על כל הקבוצות ובכל קבוצה על כל איבריה, כלומר אנחנו מבצעים פעולה זאת $O(k\cdot|V|)$, לכן נקבל כי זמן הריצה הוא $O\left(k\cdot|V|^2\cdot|E|\right)$

מ.ש.ל.☺