פתרון תרגיל מספר 11 ־ אלגברה לינארית 1

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

27 ביוני 2018

1. **צ"ל:** $[T]_B^B$, $[T]_C^B$, $[T]_C^C$, $[T]_D^B$

$$T(1) = x \Rightarrow [T(1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = 1 \Rightarrow [T(x)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(x^2\right) = x^2 \Rightarrow \left[T\left(x^2\right)\right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_B^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(1) = x = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}\left(x^2+x\right) \Rightarrow [T(1)]_C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$T(x) = 1 = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\left(x^2+x\right) \Rightarrow [T(x)]_C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$T\left(x^2\right) = x^2 = -\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}\left(x^2+x\right) \Rightarrow \left[T\left(x^2\right)\right]_C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_C^B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(1+x) = 1+x \Rightarrow [T(1+x)]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(1+x^2\right) = x+x^2 \Rightarrow \left[T\left(1+x^2\right)\right]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(x+x^2\right) = 1+x^2 \Rightarrow \left[T\left(x+x^2\right)\right]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_C^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(1)=x\Rightarrow[T(1)]_D=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$T(x)=1\Rightarrow[T(x)]_D=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$T\left(x^2\right)=x^2\Rightarrow\ \left[T\left(x^2\right)\right]_D=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow[T]_D^B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $L=K$
נתון כי L דומה לK ולכן קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש

$$L=P^{-1}KP=P^{-1}cI_nP=cP^{-1}I_nP=cP^{-1}P=cI_n=K$$

(ב) **צ"ל:** $L+I_n$ דומה ל$K+I_n$
נתון כי L דומה לK ולכן קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש$L=P^{-1}KP$

$$P^{-1}(K+I_n)P=P^{-1}KP+P^{-1}I_nP=L+I_n$$

ולכן $L+I_n$ דומה ל$K+I_n$ מההגדרה

(ג) **צ"ל:** L^m דומה לK^m
נתון כי L דומה לK ולכן קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש$L=P^{-1}KP$

$$L^m=\left(P^{-1}KP\right)^m=P^{-1}\cdot K\cdot P\cdot P^{-1}\cdot\ldots\cdot K\cdot P=P^{-1}\cdot K\cdot K\cdot\ldots\cdot KP=P^{-1}K^mP$$

ולכן L^m דומה לK^m מההגדרה

(ד) **צ"ל:** $L=L^2$
נתון כי L דומה לK ולכן קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש$L=P^{-1}KP$

$$L^2=\left(P^{-1}KP\right)^2=P^{-1}K^2P=P^{-1}KP=L$$

3. **צ"ל:** $[T]_B^C$ דומה ל$[T]_C^B$
תחילה נשים לב כי $[id]_C^B\cdot[id]_C^B=I_n$ ולכן $[id]_C^B=\left([id]_C^B\right)^{-1}$
נשים לב כי $[T]_C^B=[id]_C^B\cdot[T]_B^C\cdot[id]_C^B=\left([id]_C^B\right)^{-1}\cdot[T]_B^C\cdot[id]_C^B$
ולכן $[T]_C^B$ ו$[T]_B^C$ דומות מההגדרה

4. **צ"ל:** האם K דומה לL?

(א) לא נכון! נניח בשלילה כי L דומה לK ולכן משאלה 2 סעיף א מתקיים כי $K=L$
אבל זה לא נכון ולכן K לא דומה לL

(ב) לא נכון! נניח בשלילה כי L דומה לK ולכן מטענה שהוכחה בתרגול מתקיים שספאן העמודות שווה
כלומר $\mathbb{R}^2=span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right\}=span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right\}=span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$
אבל מתקיים $\mathbb{R}^2=span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}\notin\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ בסתירה להנחה ולכן K לא דומה לL

(ג) נכון! נחפש $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כך ש$PK = LP$, $\exists a,b,c,d \in \mathbb{R}$ כך ש $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = P\cdot K = L\cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \cdot \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$$

ולכן $c = 0$, וגם מתקיים כי $2b = b + d \Rightarrow b = d$

נציב ונקבל ש $P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix}$,

נבחר $a = b = 1$ ונקבל $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ונשים לב כי $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$P^{-1}LP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = K$$

ולכן L וK דומות!

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** L מרחב וקטורי

תחילה נראה סגירות לחיבור

יהיו $T_1, T_2 \in L$ ו$v \in V$, אזי $\exists a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_k \in \mathbb{F}$ כך ש

$$T_1(v) = a_1w_1 + \cdots + a_kw_k \ , \ T_2(v) = b_1w_1 + \cdots + b_kw_k$$
$$(T_1+T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) = a_1w_1 + \cdots + a_kw_k + b_1w_1 + \cdots + b_kw_k$$
$$= (a_1+b_1)w_1 + \cdots + (a_k+b_k)w_k \in span\{w_1,\ldots,w_k\}$$

ולכן $Im(T_1+T_2) \subseteq span\{w_1,\ldots,w_k\}$, כלומר $T_1 + T_2 \in L$

עתה נראה סגירות לכפל בסקלר

יהי $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{F}$, $T \in L$ אזי $\exists a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{F}$ כך ש $T_1(v) = a_1w_1 + \cdots + a_kw_k$

$$(\alpha T)(v) = \alpha T(v) = \alpha \cdot (a_1w_1 + \cdots + a_kw_k)$$
$$=\alpha a_1w_1 + \cdots + \alpha a_kw_k \in span\{w_1,\ldots,w_k\}$$

ולכן $Im(\alpha T) \subseteq span\{w_1,\ldots,w_k\}$, כלומר $\alpha T \in L$

נראה ש0 שייך ונסיים

יהי $v \in V$, ו$T(v) = 0_W$ לכל $v \in V$

$$T(v) = 0_W = 0_{\mathbb{F}}w_1 + \ldots 0_{\mathbb{F}}w_k \in span\{w_1,\ldots,w_k\}$$

ולכן $ImT \subseteq span\{w_1,\ldots,w_k\}$ כלומר $T \in L$

(ב) **צ"ל:** $\dim L$

נסמן $\dim V = n$ אזי קיים בסיס ונסמנו $(v_1,\ldots,v_n)$

נגדיר $u_j^i(v) = l_i(v)w_j$, נסתכל על הקבוצה $\{u_1^1,\ldots,u_k^1,u_1^2,\ldots,u_k^n\} \subseteq L$

יהיו $a_{1,1},a_{1,2},\ldots,a_{1,k},\ldots,a_{n,k} \in \mathbb{F}$ כך ש$a_{1,1}u_1^1 + \cdots + a_{n,k}u_k^n = 0$

נציב v_i, $1 \leq \forall i \leq n$ ונקבל $a_{i,1}w_1 + \cdots + a_{i,k}w_k = 0_W$

נתון כי $\{w_1,\ldots w_k\}$ בת"ל ולכן $a_{i,1} = \cdots = a_{i,k} = 0_{\mathbb{F}}$, $1 \leq \forall i \leq n$

כלומר $a_{1,1} = \cdots = a_{n,k} = 0_{\mathbb{F}}$ ולכן $\{u_1^1,\ldots,u_k^1,u_1^2,\ldots,u_k^n\}$ בת"ל

נראה שפורשים ונסיים יהי $T \in L$

עבור v_i, $1 \leq \forall i \leq n$ $\exists a_{i,1}\ldots,a_{i,k} \in \mathbb{F}$ כך ש

$$T(v_i) = a_{i,1}w_1 + \cdots + a_{i,k}w_k = a_{i,1}u_1^i + \cdots + a_{i,k}u_k^i$$
$$T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(a_{i,1}u_1^i + \cdots + a_{i,k}u_k^i\right) \in span\left\{u_1^1,\ldots,u_k^1,u_1^2,\ldots,u_k^n\right\}$$

ולכן $\{u_1^1,\ldots,u_k^1,u_1^2,\ldots,u_k^n\}$ פורשים את L,

כלומר $\{u_1^1,\ldots,u_k^1,u_1^2,\ldots,u_k^n\}$ בסיס של L ולכן $\dim L = n \cdot k$

(ג) **צ"ל:** M מרחב וקטורי
תחילה נראה סגירות לחיבור
ראינו כבר כי $Im\left(T_1+T_2\right)\subseteq span\left\{w_1,\ldots,w_k\right\}$
יהיו $T_1,T_2\in M$ ו $v\in span\left\{v_1,\ldots,v_l\right\}$

$$\left(T_1+T_2\right)(v)=T_1(v)+T_2(v)=0_W+0_W=0_W$$

ולכן $span\left\{v_1,\ldots,v_l\right\}\subseteq\ker\left(T_1+T_2\right)$, כלומר $T_1+T_2\in M$
עתה נראה סגירות לכפל בסקלר
ראינו כבר כי $Im\left(\alpha T\right)\subseteq span\left\{w_1,\ldots,w_k\right\}$
יהי $v\in span\left\{v_1,\ldots,v_l\right\}$, $\alpha\in\mathbb{F}$, $T\in M$

$$\left(\alpha T\right)(v)=\alpha T(v)=\alpha\cdot 0_W=0_W$$
$$=\alpha a_1w_1+\cdots+\alpha a_kw_k\in span\left\{w_1,\ldots,w_k\right\}$$

ולכן $span\left\{v_1,\ldots,v_l\right\}\subseteq\ker\left(\alpha T\right)$, כלומר $\alpha T\in M$
נראה ש0 שייך ונסיים
יהי $v\in span\left\{v_1,\ldots,v_l\right\}$, ו$T(v)=0_W$ לכל $v\in V$
ראינו כבר כי $Im(T)\subseteq span\left\{w_1,\ldots,w_k\right\}$

$$T(v)=0_W$$

ולכן $span\left\{v_1,\ldots,v_l\right\}\subseteq\ker(T)$, כלומר $T\in M$

(ד) **צ"ל:** $\dim M$
נסמן $\dim V=n$ אזי קיים בסיס ונסמנו $\left(v_1,\ldots,v_n\right)$
נשים לב כי $\left\{u_1^{l+1},\ldots,u_k^{l+1},u_1^{l+2},\ldots,u_k^n\right\}\subseteq M$
ראינו בסעיף ב' כי $\left\{u_1^{l+1},\ldots,u_k^{l+1},u_1^{l+2},\ldots,u_k^n\right\}$ בת"ל
נראה שהם פורשים את M ונסיים
עבור v_i, $l+1\leq\forall i\leq n$ $\exists a_{i,1}\ldots,a_{i,k}\in\mathbb{F}$ כך ש

$$T\left(v_i\right)=a_{i,1}w_1+\cdots+a_{i,k}w_k=a_{i,1}u_1^i+\cdots+a_{i,k}u_k^i$$

ולכן יהי $v\in V$ אזי $\exists b_1,\ldots,b_n\in\mathbb{F}$ כך ש$v=b_1v_1+\cdots+b_nv_n$

$$T=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^k\left(a_{i,1}u_1^i+\cdots+a_{i,k}u_k^i\right)\in span\left\{u_1^{l+1},\ldots,u_k^{l+1},u_1^{l+2},\ldots,u_k^n\right\}$$

ולכן $\left\{u_1^{l+1},\ldots,u_k^{l+1},u_1^{l+2},\ldots,u_k^n\right\}$ פורשים את M,
כלומר $\left\{u_1^{l+1},\ldots,u_k^{l+1},u_1^{l+2},\ldots,u_k^n\right\}$ בסיס של M ולכן $\dim M=(n-l)\cdot k$

6. **צ"ל:** $[T]_E^B$

$$T\left(E_{1,1}\right)=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\12\end{bmatrix}\Rightarrow\left[T\left(E_{1,1}\right)\right]_B=\begin{bmatrix}24\\12\end{bmatrix}$$
$$T\left(E_{1,2}\right)=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\10\end{bmatrix}\Rightarrow\left[T\left(E_{1,2}\right)\right]_B=\begin{bmatrix}20\\10\end{bmatrix}$$
$$T\left(E_{2,1}\right)=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18\\6\end{bmatrix}\Rightarrow\left[T\left(E_{2,1}\right)\right]_B=\begin{bmatrix}18\\6\end{bmatrix}$$
$$T\left(E_{2,2}\right)=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\5\end{bmatrix}\Rightarrow\left[T\left(E_{2,2}\right)\right]_B=\begin{bmatrix}15\\5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow[T]_E^B=\begin{bmatrix}24&20&18&15\\12&10&6&5\end{bmatrix}$$

7. **צ"ל:** $[T]_B^B$

$$T\left(E_{1,1}\right)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\left[T\left(E_{1,1}\right)\right]_B=\begin{bmatrix}4\\3\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$T\left(E_{1,2}\right)=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\left[T\left(E_{1,2}\right)\right]_B=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$T\left(E_{1,2}\right)=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\4&3\end{bmatrix}\Rightarrow\left[T\left(E_{1,2}\right)\right]_B=\begin{bmatrix}0\\0\\4\\3\end{bmatrix}$$

$$T\left(E_{1,2}\right)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\2&1\end{bmatrix}\Rightarrow\left[T\left(E_{1,2}\right)\right]_B=\begin{bmatrix}0\\0\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow[T]_B^B=\begin{bmatrix}4&2&0&0\\3&1&0&0\\0&0&4&2\\0&0&3&1\end{bmatrix}$$

8. **צ"ל:** $\exists l\in V^*$ כך ש$l\left(u\right)=m\left(u\right)$, $\forall u\in U$
תחילה נשים לב כי U תת מרחב של V נוצר סופית לכן U נוצר סופית
נסמן $\dim U=k=\dim U^*$, אזי קיים בסיס שנסמנו ב$\{v_1,\ldots,v_k\}$
נסמן $\dim V=n=\dim V^*$, ונשלים את $\{v_1,\ldots,v_k\}$ לבסיס של V, $\{v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_n\}$
אזי $\exists l_1,\ldots,l_n\in V^*$ כך ש$\{l_1,\ldots,l_n\}$ הבסיס הדואלי של V^*
כך ש$l_i\left(v_j\right)=\delta_j^i$, $1\leq\forall i,j\leq n$
נשים לב כי $l_1,\ldots,l_k\in U^*$ ובת"ל
קבוצה בת"ל בעלת n וקטורים במימד n היא בסיס ולכן $\{l_1,\ldots,l_k\}$ בסיס של U^*
לכן $\exists a_1,\ldots a_k\in\mathbb{F}$ כך ש

$$m=\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot l_i\in span\left\{l_1,\ldots,l_n\right\}=V^*$$

ולכן $\exists l\in V^*$ כך ש$l\left(u\right)=m\left(u\right)$, $\forall u\in U$

9. **צ"ל:** $\{l_1,\ldots,l_n\}$ בסיס של V^*
נשים לב כי $\dim V=n=\dim V^*$ ולכן קיים בסיס דואלי שנסמנו $\{f_1,\ldots,f_n\}$
כך ש$f_i\left(v_j\right)=\delta_j^i$, $1\leq\forall i,j\leq n$
מהנתון A הפיכה ולכן $A^{-1}=\left(b_{i,j}\right)$ ומתקיים $A\cdot A^{-1}=I_n$

$$\left[A\cdot A^{-1}\right]_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}l_i\left(v_j\right)b_{k,j}=\delta_j^i$$

ולכן $f_1,\ldots f_n\in span\left\{l_1,\ldots,l_n\right\}$, כלומר $\{l_1,\ldots,l_n\}$ פורשת את V^*
קבוצה פורשת בעלת n וקטורים במימד n היא בסיס ולכן $\{l_1,\ldots,l_n\}$ בסיס של V^*

10. **צ"ל:** B^* בסיס של V^*

$$\left[\begin{array}{cc|cc}3&2&1&0\\2&3&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{3}R_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\2&3&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&\frac{5}{3}&\frac{-2}{3}&1\end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{R_2\to\frac{3}{5}R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&1&\frac{-2}{5}&\frac{3}{5}\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{2}{3}R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}\\0&1&\frac{-2}{5}&\frac{3}{5}\end{array}\right]$$

נגדיר $l_1\left(\left[\begin{array}{c}x_1\\x_2\end{array}\right]\right)=\frac{3}{5}x_1-\frac{2}{5}x_2$, $l_2\left(\left[\begin{array}{c}x_1\\x_2\end{array}\right]\right)=-\frac{2}{5}x_1+\frac{3}{5}x_2$
ולכן $B^*=(l_1,l_2)$ בסיס של V^*

11. **צ"ל:** $\{v_1,\ldots,v_n\}$ ו $\{l_1,\ldots,l_n\}$ בת"ל
יהיו $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ כך ש $a_1v_1+\cdots+a_nv_n=0_V$
יהי $1\leq j\leq n$,

$$0_{\mathbb{F}}=l_j\left(0_V\right)=l_j\left(\sum_{i=1}^{n}a_iv_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_il_j\left(v_i\right)=a_j$$

ולכן $a_j=0_{\mathbb{F}}$, $1\leq\forall j\leq n$ כלומר $a_1=\cdots=a_n=0_{\mathbb{F}}$ ולכן $\{v_1,\ldots,v_n\}$ בת"ל
יהיו $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ כך ש $a_1l_i+\cdots+a_nl_n=0_V$
יהי $1\leq j\leq n$, נציב v_j ונקבל $a_j=0_{\mathbb{F}}$
ולכן $a_j=0_{\mathbb{F}}$, $1\leq\forall j\leq n$ כלומר $a_1=\cdots=a_n=0_{\mathbb{F}}$ ולכן $\{l_1,\ldots,l_n\}$ בת"ל

12. **צ"ל:** $v=l_1\left(v\right)v_1+\cdots+l_n\left(v\right)v_n$
$\exists a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ כך ש $a_1v_1+\cdots+a_nv_n=v$ ויהי $1\leq j\leq n$

$$l_j\left(v\right)=l_j\left(a_1v_1+\cdots+a_nv_n\right)=a_1l_j\left(v_1\right)+\cdots+a_nl_j\left(v_n\right)=a_j$$

כלומר $l_j\left(v\right)=a_j$, $1\leq\forall j\leq n$

$$v=a_1v_1+\cdots+a_nv_n=l_1\left(v\right)v_1+\cdots+l_n\left(v\right)v_n$$