מבני נתונים 67109
תרגיל 6

להגשה: עד 10:00 בבוקר ב-10/5/2019

שאלה 1 - עצי חיפוש בינאריים

1. הקודם של קודקוד x בעץ חיפוש בינארי הוא הקודקוד עם הערך הגדול ביותר מבין הערכים הקטנים יותר מזה של x בעץ. הציעו אלגוריתם למציאת הקודם של קודקוד בעץ חיפוש בינארי וכתבו פסאודו-קוד עבורו.
2. הוכיחו שעבור קודקוד שיש לו 2 ילדים בעץ חיפוש בינארי, לעוקב שלו אין ילד שמאלי ולקודם שלו אין ילד ימני.
הערה: בתרגול הסתמכנו על נכונות הסעיף הזה בהוכחת נכונות האלגוריתם למחיקה מעץ AVL.

שאלה 2 - פיבונאצ'י וחתך הזהב

1. הוכיחו באינדוקציה את הנוסחה $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ לחישוב מספרי פיבונאצ'י לכל $n \geq 0$.
2. נניח שבאלגוריתם של שאלה 1 מתרגיל 5 הלולאה עוצרת איבר אחד קודם, כלומר האלגוריתם החדש הוא:

```
Calc_a(n):
    if n == 1 or n == 2:
        return 1
    sum = 0
    for i = 1 to n - 2
        sum = sum + calc_a(i)
    return sum
```

כתבו את נוסחאת הרקורסיה לזמן הריצה עבור קלט n (עם קבועים ושוויון, לא באופן אסימפטוטי), ובעזרת הטריק מתרגיל 5 הפכו אותה לנוסחאת רקורסיה שתלויה רק במספר קבוע של איברים קודמים (כלומר בלי סיגמא). אל תשכחו לכתוב גם את בסיס נוסחאת הרקורסיה (כאן יש 2 נוסחאות בסיס זהות).

3. הראו שפתרון אפשרי עבור נוסחאת הרקורסיה הוא $T(n) = c_1F_n + c_2$ כאשר c_1 ו-c_2 נקבעים על ידי נוסחאת הרקורסיה (כולל בסיס נוסחאת הרקורסיה). כתבו מהם לפי הקבועים שבנוסחאת הרקורסיה.

שאלה 3 - עצי שחור-אדום

בהרצאה ובתרגול ראיתם עצי AVL שהם עצי חיפוש בינארי עם תוספת מבנה (לכל קודקוד יש, בנוסף לערך שלו, את גובה תת-העץ שהוא שורשו ונוספה הבטחה שגובה תת-העץ הימני שלו שונה מגובה תת-העץ השמאלי בלכל היותר 1) והפעולות השתנו מעט כדי לשמר את המבנה. זוהי דוגמא אחת מיני רבות למבנה נוסף שגורם לעצי החיפוש הבינאריים להשאר מאוזנים יחסית ובכך - מבטיח זמן ריצה לוגריטמי במספר הקודקודים שבעץ לכל הפעולות. כעת נראה דוגמא נוספת:

עץ אדום-שחור הוא עץ חיפוש בינארי שבכל קודקוד נוסף לו צבע (אדום או שחור), כך שהתכונות הבאות מתקיימות:

1. כל קודקוד הוא או אדום או שחור (ולא שניהם).
2. השורש הוא שחור.
3. העלים הם שחורים והם לא בעלי ערך (כלומר הערך שלהם הוא null והם משמש-ים רק למבנה הנוסף) ולכל קודקוד פנימי (לא עלה) יש 2 ילדים.
4. אם קודקוד הוא אדום אז שני ילדיו שחורים.
5. לכל קודקוד, כל המסלולים הפשוטים (אין קודקוד שמופיע פעמיים) ממנו לצאצאים העלים שלו בעלי מספר קודקודים שחורים זהה.

שימו לב שהמשמעות של תכונה 3 היא שאם נצייר עץ חיפוש בינארי שיש לו קודקוד פנימי עם ילד אחד ונרצה להפוך אותו לעץ אדום-שחור, נוסיף לו ילד שני שיהיה עלה חסר-ערך. כך, כל מסלול פשוט מהשורש יכול להמשיך ימינה או שמאלה עד שהוא מגיע לעלה חסר-ערך.

היות ותכונה 5 מתקיימת, מספר הקודקודים השחורים מקודקוד כלשהו x לצאצא עלה שלו, (לא כולל את הקודקוד עצמו) הוא מספר מוגדר היטב וניתן לסמנו כ"הגובה השחור" שלו, $bh(x)$.

כעת נוכיח כי לכל עץ אדום-שחור עם n קודקודים פנימיים (כלומר לא עלים, קודקודים בעלי ערך שאינו null) גובהו הוא לכל היותר $2log(n+1)$.

1. הוכיחו כי בתת-עץ ששורשו קודקוד x יש לפחות $2^{bh(x)}-1$ קודקודים פנימיים. הדרכה: הוכיחו באינדוקציה על גובה הקודקוד, כאשר הגובה הוא המרחק שלו מצאצא-עלה רחוק ביותר שלו. מקרה הבסיס הוא עבור קודקוד שהוא עלה (עם גובה 0). בצעד האינדוקציה שימו לב שהגובה השחור של ילדים של הקודקוד לא יכול להיות קטן בהרבה מהגובה השחור של הקודקוד עצמו, ובעזרת הגובה השחור הקטן ביותר שיכול להיות להם, והעובדה שלכל קודקוד פנימי יש 2 ילדים - אפשר להשתמש בהנחת האינדוקציה כדי להגיע לחסם שבטענה.
2. עבור עץ אדום-שחור בגובה h, הראו שבכל מסלול פשוט מהשורש לעלה לפחות חצי מהקודקודים (לא כולל השורש) שחורים. הסיקו חסם תחתון על הגובה השחור של שורש העץ.

3. הסיקו, בעזרת הטענה מסעיף 1 והחסם מסעיף 2, חסם על מספר הקודקודים הפנימיים בעץ בגובה h, כלומר כתבו אי-שוויון עבור מספר הקודקודים הפנימי-ים. ארגנו מחדש את אי-השוויון (כולל לקיחת לוגריתם) כדי לקבל את התוצאה שרצינו - החסם על הגובה בעזרת מספר הקודקודים הפנימיים n.

שאלה 4

יהי T עץ חיפוש בינארי, הקוטר של T, מסומן כ$D(T)$ מוגדר להיות אורך המסלול הפשוט (אין קודקוד או שמופיע פעמיים) הארוך ביותר ב-T (כלומר בין שני קודקודים השייכים לT). כאשר בT ישנו קודקוד בודד $D(T) = 0$, וכאשר T הוא ריק $D(T) = -1$.

1. הוכיחי או הפריכי: יהי T עץ חיפוש בינארי עם יותר מחמישה קודקודים, אזי כל מסלול פשוט באורך $D(T)$ מתחיל ונגמר בעלה.
2. הוכח או הפרך: יהי T עץ AVL עם יותר מחמישה קודקודים, אזי כל מסלול פשוט באורך $D(T)$ מתחיל ונגמר בעלה.
3. הוכיחו או הפריכו: יהי T עץ חיפוש בינארי עם יותר מחמישה קודקודים, אזי כל מסלול פשוט באורך $D(T)$ כולל את שורש העץ.
4. הוכחנה או הפרכנה: יהי T עץ AVL עם יותר מחמישה קודקודים, אזי כל מסלול פשוט באורך $D(T)$ כולל את שורש העץ.
5. על מנת לחשב את $D(T)$ ביעילות ניתן להוסיף שדה מידע נוסף לכל קודקוד (כמו שהוספנו את שדה ה"גובה" כדי לשמר איזון בעץ AVL)

   (א) חשבו על שדה/ות מידע נוסף/ים כזה/כאלה ותארו אותו/ם.

   (ב) תארו איך פעולות המחיקה וההכנסה של ה-BST צריכות להשתנות על מנת לתחזק את השדה הנוסף שהצעתם.

   (ג) הראו שזמן הריצה של הפעולות החדשות (כלומר עם עדכון השדות) זהה (אסימפטוטית) לזמן הריצה של הפעולות המקוריות (הכנסה והוצאה) של BST.

   (ד) הציעו אלגוריתם לחישוב $D(T)$ (T הוא BST) באופן אופטימלי בעזרת השדה שהצעתם (כלומר בהנתן T בעל השדה הנוסף האלגוריתם מחשב את $D(T)$).

   (ה) הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם.

   (ו) כתבו את זמן הריצה האסימפטוטי של האלגוריתם שהצעתם והסבירו למה זהו זמן הריצה.

   (ז) באופן כללי, זה יכול להיות שימושי אם יהיה לנו קריטריון עבור שדה מידע נוסף, שמבטיח שניתן לתחזק אותו מבלי להוסיף זמן ריצה אסימפטוטי לה-כנסה והוצאה של איברים מעץ חיפוש בינארי. הציעו קריטריון למידע שר-וצים להוסיף בשדה נוסף, שיהיה קריטריון מספק כדי להבטיח שאכן ניתן לתחזק את השדה מבלי להוסיף זמן ריצה אסימפטוטי להכנסה/הוצאה.

שאלה 5

CUT_BST היא פונקציה שמקבלת כקלט T, עץ AVL ומפתח k, אם k לא ערך של קודקוד בעץ T CUT_BST מחזיר את T עצמו. אם k מופיע בעץ נחזיר שלושה עצים:

- T_1 - עץ חיפוש בינארי שמכיל את כל הקודקודים בעלי ערכים קטנים מk
- T_2- עץ חיפוש בינארי שמכיל את כל הקודקודים בעלי ערכים גדולים מk
- T_3- הקודקוד בעל הערך k

הציעו אלגוריתם המממש את $CUT\_BST(T,k)$, ב $O(log(n))$

שימו לב, אין דרישה לכתוב פסאודו קוד של האלגוריתם, תיאור מילולי של האלגוריתם וניתוח זמן ריצה מספיקים במקרה זה, ניתן להשתמש ולהניח נכונות וזמני ריצה של כל אלגוריתם שראיתם בכיתה.