פתרון תרגיל מספר 4 ־ אינפי 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

19 בנובמבר 2018

1. **הוכחה:**

(א) **צ"ל:** חשבו את האינטגרל הלא מסוים הבא $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$

הוכחה:

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx \overset{u=1+e^x}{\underset{du=e^x dx}{=}} \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{1+e^x} + C$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\int_0^\infty \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ מתכנס וחשבו את גבולו או הראו שאינו מתכנס

הוכחה:

נשים לב שמתקיים ולכן

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{1+e^x}+C\right)|_0^t = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{1+e^t}+\frac{1}{1+e^0}\right] =$$

$$\frac{1}{1+1} - \lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+e^t} \overset{\frac{1}{\infty}=0}{=} \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

מ.ש.ל.ב.☺

2. **צ"ל:** מצאו $C,\beta\in\mathbb{R}$ כך ש $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{C\cdot n^\beta} = 1$

הוכחה:

נשים לב שמתקיים

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha = \sum_{k=1}^n k^\alpha \cdot \frac{n^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{n}\cdot n^{\alpha+1} = n^{\alpha+1}\cdot\sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{n} = n^{\alpha+1}\cdot\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha\cdot\frac{1}{n}$$

נבחר $P_n = \left\{0,\frac{1}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\right\}$, נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{1\le i\le n}\left\{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

נבחר $\xi_i^{(n)} = \frac{i}{n}$, ו $f(x) = x^\alpha$ ולכן מתקיים

$$\varsigma(f,P_n,\xi_n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n f\left(\xi_i^{(n)}\right)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha\cdot\frac{1}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}\varsigma(f,P_n,\xi_n) \overset{\star}{=} \int_0^1 t^\alpha\cdot dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1} - 0 = \frac{1}{\alpha+1}$$

נשים לב ש$\star$ מתקיים ממשפט 9.3 ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}=\lim_{n\to\infty}\varsigma\left(f,P_{n},\xi_{n}\right)=\frac{1}{\alpha+1}$$
$$\Rightarrow 1=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\alpha+1}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}}{\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$$

ולכן עבור $\beta=\alpha+1$, $C=\frac{1}{\alpha+1}$, מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}}{C\cdot n^{\beta}}=1$, כנדרש!

מ.ש.ל.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** גזרו את הפונקציה $A\left(y\right)=\int_{0}^{y}\cos^{100}\left(t\right)dt$

הוכחה:

תחילה נשים לב ש$f\left(t\right)=\cos^{100}\left(t\right)$ רציפה ולכן היא אינטגרבילית וקיימת פונקציה קדומה ונסמנה $F\left(t\right)$ (הערה 7.3 בהרצאה)

ולכן מתקיים $F'\left(t\right)=f\left(t\right)$, לכל $t\in\mathbb{R}$ כי $f\left(t\right)$ רציפה $\forall t\in\mathbb{R}$,

לכן מהמשפט היסודי של האינפי (משפט 7.4) מתקיים

$$A\left(y\right)=\int_{0}^{y}\cos^{100}\left(t\right)dt=F\left(y\right)-F\left(0\right)$$
$$A'\left(y\right)=\left(F\left(y\right)-F\left(0\right)\right)'=\left(F\left(y\right)\right)'-\left(F\left(0\right)\right)'$$
$$=f\left(y\right)-0=\cos^{100}\left(y\right)$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** גזרו את הפונקציה $B\left(x\right)=\int_{0}^{e^{x}}\cos^{100}\left(t\right)dt$

הוכחה:

תחילה נשים לב ש$f\left(t\right)=\cos^{100}\left(t\right)$ רציפה ולכן היא אינטגרבילית וקיימת פונקציה קדומה ונסמנה $F\left(t\right)$ (הערה 7.3 בהרצאה)

ולכן מתקיים $F'\left(t\right)=f\left(t\right)$, לכל $t\in\mathbb{R}$ כי $f\left(t\right)$ רציפה $\forall t\in\mathbb{R}$,

לכן מהמשפט היסודי של האינפי (משפט 7.4) מתקיים

$$B\left(x\right)=\int_{0}^{e^{x}}\cos^{100}\left(t\right)dt=F\left(e^{x}\right)-F\left(0\right)$$
$$B'\left(x\right)=\left(F\left(e^{x}\right)-F\left(0\right)\right)'=\left(F\left(e^{x}\right)\right)'-\left(F\left(0\right)\right)'$$
$$\overset{\text{chain rule}}{=}F'\left(e^{x}\right)\cdot\left(e^{x}\right)'-0=f\left(e^{x}\right)\cdot e^{x}=\cos^{100}\left(e^{x}\right)\cdot e^{x}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** גזרו את הפונקציה $C\left(x\right)=\int_{x^{2}}^{0}\cos^{100}\left(t\right)dt$

הוכחה:

תחילה נשים לב ש$f\left(t\right)=\cos^{100}\left(t\right)$ רציפה ולכן היא אינטגרבילית וקיימת פונקציה קדומה ונסמנה $F\left(t\right)$ (הערה 7.3 בהרצאה)

ולכן מתקיים $F'\left(t\right)=f\left(t\right)$, לכל $t\in\mathbb{R}$ כי $f\left(t\right)$ רציפה $\forall t\in\mathbb{R}$,

לכן מהמשפט היסודי של האינפי (משפט 7.4) מתקיים

$$C\left(x\right)=\int_{x^{2}}^{0}\cos^{100}\left(t\right)dt=F\left(0\right)-F\left(x^{2}\right)$$
$$C'\left(x\right)=\left(F\left(0\right)-F\left(x^{2}\right)\right)'=\left(F\left(0\right)\right)'-\left(F\left(x^{2}\right)\right)'$$
$$\overset{\text{chain rule}}{=}0-F'\left(x^{2}\right)\cdot\left(x^{2}\right)'=-f\left(x^{2}\right)\cdot 2x=-\cos^{100}\left(x^{2}\right)\cdot 2x$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** גזרו את הפונקציה $D(x)=\int_{x^2}^{e^x}\cos^{100}(t)\,dt$

הוכחה:

תחילה נשים לב ש$f(t)=\cos^{100}(t)$ רציפה ולכן היא אינטגרבילית וקיימת פונקציה קדומה ונסמנה $F(t)$ (הערה 7.3 בהרצאה)

ולכן מתקיים $F'(t)=f(t)$, לכל $t\in\mathbb{R}$ כי $f(t)$ רציפה $\forall t\in\mathbb{R}$,

לכן מהמשפט היסודי של האינפי (משפט 7.4) מתקיים

$$D(x)=\int_{x^2}^{e^x}\cos^{100}(t)\,dt=F(e^x)-F\left(x^2\right)$$

$$D'(x)=\left(F(e^x)-F\left(x^2\right)\right)'=\left(F(e^x)\right)'-\left(F\left(x^2\right)\right)'$$

$$\overset{\text{chain rule}}{=}F'(e^x)\cdot(e^x)'-F'\left(x^2\right)\cdot\left(x^2\right)'$$

$$=f(e^x)\cdot e^x-f\left(x^2\right)\cdot 2x=\cos^{100}(e^x)\cdot e^x-\cos^{100}\left(x^2\right)\cdot 2x$$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** גזרו את הפונקציה $E(x)=\int_{x}^{x^2}e^{t\cdot\sin(t)}dt$

הוכחה:

תחילה נשים לב ש$f(t)=e^{t\cdot\sin(t)}$ רציפה ולכן היא אינטגרבילית וקיימת פונקציה קדומה ונסמנה $F(t)$ (הערה 7.3 בהרצאה)

ולכן מתקיים $F'(t)=f(t)$, לכל $t\in\mathbb{R}$ כי $f(t)$ רציפה $\forall t\in\mathbb{R}$,

לכן מהמשפט היסודי של האינפי (משפט 7.4) מתקיים

$$E(x)=\int_{x}^{x^2}e^{t\cdot\sin(t)}dt=F\left(x^2\right)-F(x)$$

$$E'(x)=\left(F\left(x^2\right)-F(x)\right)'=\left(F\left(x^2\right)\right)'-\left(F(x)\right)'$$

$$\overset{\text{chain rule}}{=}F'\left(x^2\right)\cdot\left(x^2\right)'-F'(x)\cdot(x)'$$

$$=f\left(x^2\right)\cdot 2x-f(x)=e^{x^2\cdot\sin\left(x^2\right)}\cdot 2x-e^{x\cdot\sin(x)}$$

מ.ש.ל.ה.☺

4. **צ"ל:** f חסומה ואינטגרבילית בכל $[a+\varepsilon,b]$, לכל $0<\varepsilon<b-a$ אזי f אינטגרבילית ב$[a,b]$ ו

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

הוכחה:

יהי $\varepsilon>0$,

מהיות $f(x)$ חסומה ב$[a,b]$, אזי $\exists M\in\mathbb{R}$ כך ש$|f(x)|\le M$, $\forall x\in[a,b]$,

נסמן $r=\min\left\{\frac{\varepsilon}{4M},b-a\right\}$, ומהנתון ש$f$ אינטגרבילית בכל $[a+\varepsilon,b]$, לכל $0<\varepsilon<b-a$ מתקיים ש$f(x)$ אינטגרבילית ב$[a+r,b]$,

לכן קיימת חלוקה Q של $[a+r,b]$ כך שמתקיים

$$U(f,Q)-L(f,Q)\le\frac{\varepsilon}{2}$$

נגדיר $P=Q\cup\{a\}$ חלוקה של $[a,b]$
נשים לב שמתקיים,

$$\sup\{f(x)\mid a\le x\le a+r\}-\inf\{f(x)\mid a\le x\le a+r\}\le 2\cdot M$$

אזי מההגדרה מתקיים

$$U(f,P)-L(f,P)\le U(f,Q)-L(f,Q)+2\cdot M((a+r)-a)\le\frac{\varepsilon}{2}+2\cdot M\cdot(r)$$
$$\le\frac{\varepsilon}{2}+2\cdot M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

לכן, מהמשפט שהתנאים הבאים שקולים מתקיים שf אינטגרבילית ב$[a,b]$ וגם מתקיים

$$0\le\lim_{\varepsilon\to0^+}\left|\int_a^b f(x)\,dx-\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right|=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left|\left(\int_a^{a+\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right)-\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right|$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left|\int_a^{a+\varepsilon} f(x)\,dx\right|\le\lim_{\varepsilon\to0^+}M\cdot\varepsilon=0$$
$$\Rightarrow 0\le\lim_{\varepsilon\to0^+}\left|\int_a^b f(x)\,dx-\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right|\le 0$$

כלומר, ממשפט סנדוויץ' מתקיים כי

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

מ.ש.ל.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** f רציפה ואינטגרבילית ב$[a,b]$, אזי $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ גזירה ב$[a,b]$ ו$F'(x)=f(x)$

הוכחה:

בכיתה הוכחנו שאם f רציפה ב$x_0\in[a,b]$ אזי מתקיים כיF גזירה בx_0 וגם $F'(x_0)=f(x)$, (משפט 6.4)

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** f בעלת אי רציפות סליקה ב$x_0\in[a,b]$ ואינטגרבילית ב$[a,b]$, אזי $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ גזירה ב$[a,b]$ ו$F'(x)=f(x)$

הוכחה:

נשים לב שמהיות f בעלת אי רציפות סליקה אזי מתקיים $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=L=\lim_{x\to x_0^+}f(x)$, וגם $f(x_0)\ne L$,

נגדיר $g(x)=\begin{cases}L-f(x_0) & x=x_0\\ 0 & x\ne x_0\end{cases}$, נשים לב כי g אינטגרבילית כי היא פונקצית האפס עד כדי שינוי נקודה,

ולכן

$$G(x)=\int_a^x g(x)\,dx=\int_a^x 0\cdot dx=0$$

לכן $h(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}L & x=x_0\\ f(x) & x\ne x_0\end{cases}$

אזי h אינטגרבילית ב$[a,b]$ כי היא התקבלה מסכום של אינטגרביליות וגם

$$F(x)=F(x)+G(x)=\int_a^x f(x)\,dx+\int_a^x g(x)\,dx=\int_a^x h(x)\,dx=H(x)$$

וגם מתקיים כי h רציפה בx_0 מההגדרה כי $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = L = h(x_0)$,
לכן ממשפט 6.4 מתקיים $h(x_0) = H'(x_0) = F'(x_0)$,
לכן $F(x)$ גזירה בx_0 וגם

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = F'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** f בעלת אי רציפות מסוג 1 ב$x_0 \in [a,b]$ ואינטגרבילית ב$[a,b]$, אזי $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ לא גזירה ב$[a,b]$
הוכחה:
נשים לב שמהיות f בעלת אי רציפות מסוג 1 אזי מתקיים $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_1 \neq L_2 = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$,
נגדיר $g_2(x) = \begin{cases} L_2 - f(x_0) & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases}$, $g_1(x) = \begin{cases} L_1 - f(x_0) & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases}$, נשים לב כי g_1, g_2 אינטגרביליות
כי הן פונקצית האפס עד כדי שינוי נקודה,
ולכן

$$G_1(x) = \int_a^x g_1(x)\,dx = \int_a^x 0 \cdot dx = 0 = \int_a^x g_2(x)\,dx = G_2(x)$$

לכן $h_1(x) = f(x) + g_1(x) = \begin{cases} L_1 & x = x_0 \\ f(x) & x \neq x_0 \end{cases}$, $h_2(x) = f(x) + g_2(x) = \begin{cases} L_2 & x = x_0 \\ f(x) & x \neq x_0 \end{cases}$
אזי h_1, h_2 אינטגרביליות ב$[a,b]$ כי היא התקבלה מסכום של אינטגרביליות וגם

$$F(x) = F(x) + G_1(x) = \int_a^x f(x)\,dx + \int_a^x g_1(x)\,dx = \int_a^x h_1(x)\,dx = H_1(x)$$
$$\lim_{x\to x_0^-} h_1(x)\,dx = \lim_{x\to x_0^-} [f(x) + g_1(x)]\,dx = L_1 = h_1(x_0)$$

וגם מתקיים כי h_1 רציפה משמאל בx_0 מההגדרה, לכן ממשפט 6.4 מתקיים

$$L_1 = h_1(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{H_1(x_0+h) - H_1(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$$

באופן דומה לh_2, נקבל כי

$$F(x) = F(x) + G_2(x) = \int_a^x f(x)\,dx + \int_a^x g_2(x)\,dx = \int_a^x h_2(x)\,dx = H_2(x)$$
$$\lim_{x\to x_0^+} h_2(x)\,dx = \lim_{x\to x_0^+} [f(x) + g_2(x)]\,dx = L_2 = h_2(x_0)$$

וגם מתקיים כי h_2 רציפה מימין בx_0 מההגדרה, לכן ממשפט 6.4 מתקיים

$$L_2 = h_2(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{H_2(x_0+h) - H_2(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$$

לכן,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = L_2 \neq L_1 = \lim_{h\to 0^-} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$$

כלומר F לא גזירה בx_0

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **פתרון:**

i. **צ"ל:** $x_0 = 0$ היא נקודה אי רציפות מסוג שני של f
הוכחה:
נניח בשלילה שf היא לא בעלת אי רציפות מסוג שני, אזי $\lim_{x\to 0^+} f\left(x\right)$ קיים במובן הרחב.
נגדיר $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{2}{2n+1}$, נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 = \lim_{n\to\infty} x_n$$

אזי מהיינה מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} f\left(y_n\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{2n+1}\right) \underset{\frac{2}{2n+1}\neq\pm\frac{1}{m}}{\overset{\text{def}}{=}} \lim_{n\to\infty} 3 = 3$$

ומההנחה שלנו f היא לא בעלת אי רציפות מסוג שני, מתקיים כי $0 = \lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(y_n\right) = 3$,
סתירה כי $0 \neq 3$,
ולכן $x_0 = 0$ היא נקודה אי רציפות מסוג שני של f

מ.ש.ל.ד.1.☺

ii. **צ"ל:** f אינטגרבילית ב$[\varepsilon, 1]$, $[-1, \varepsilon]$, $0 < \forall\varepsilon < 1$
הוכחה:
נרצה להראות כי f רציפה ב$[\varepsilon, 1]$ עד כדי מספר סופי של נקודות,
נראה כי קיים מספר סופי של נקודות בהם f לא מקבלת את הערך 3 בקטע $[\varepsilon, 1]$,
יהי $n \in \mathbb{N}$ כך ש$\frac{1}{n} \in [\varepsilon, 1]$, אזי

$$\varepsilon \leq \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq n \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

נשים לב שקיימים רק $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ נקודות בהם f לא מקבלת 3 אלא 0,
נסמן $A = \left\{1, \ldots, \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor}\right\}$ (הנקודות שבהם הפונקציה מחזירה 0),
נשים לב כי f רציפה ב$[\varepsilon, 1] \setminus A$,
ולכן ממשפט של רציפה עד כדי מספר סופי של נקודות מתקיים כי f אינטגרבילית ב$[\varepsilon, 1]$ וגם

$$\int_{\varepsilon}^{1} f\left(x\right) dx = \int_{\varepsilon}^{1} 3 \cdot dx = 3 \cdot (1 - \varepsilon)$$

באופן דומה נראה עתה לקטע $[-1, -\varepsilon]$, יהי $n \in \mathbb{N}$ כך ש$-\frac{1}{n} \in [-1, -\varepsilon]$, אזי

$$-1 \leq -\frac{1}{n} \leq -\varepsilon \Rightarrow 1 \leq n \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

נשים לב שקיימים רק $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ נקודות בהם f לא מקבלת 3 אלא 0,
נסמן $A = \left\{-1, \ldots, -\frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor}\right\}$ (הנקודות שבהם הפונקציה מחזירה 0),
נשים לב כי f רציפה ב$[-1, -\varepsilon] \setminus A$,
ולכן ממשפט של רציפה עד כדי מספר סופי של נקודות מתקיים כי f אינטגרבילית ב$[-1, -\varepsilon]$ וגם

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} f\left(x\right) dx = \int_{-1}^{-\varepsilon} 3 \cdot dx = 3 \cdot (-\varepsilon + 1)$$

מ.ש.ל.ד.2.☺

iii. **צ"ל:** f אינטגרבילית ב $[-1,1]$

הוכחה:

נשים לב כי f אינטגרבילית לכל $[0+\varepsilon,1]$, $0<\forall\varepsilon<1$ וגם $|f(x)|\le 3$ מההגדרה,
ולכן מתקיים כי f אינטגרבילית ב$[0,1]$ משאלה 4 וגם

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{0+\varepsilon}^1 f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}3\cdot(1-\varepsilon)=3$$

נשים לב ששאלה 4 מתקיימת גם ל$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,dx$
(פשוט נבחר $g(x)=f((b+a)-x)$ ונשתמש בשאלה 4 ונקבל את הנכתב פה)
וגם נשים לב כי f אינטגרבילית ב$[-1,-\varepsilon]$, $0<\forall\varepsilon<1$,
לכן $f(x)$ אינטגרבילית ב$[-1,-\varepsilon]$ וגם $|f(x)|\le 3$ מההגדרה,
ולכן מתקיים כי $f(x)$ אינטגרבילית ב$[-1,0]$ משאלה 4 וגם

$$\int_{-1}^0 f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1}^{0-\varepsilon}f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}3\cdot(1-\varepsilon)=3$$

ולכן f אינטגרבילית ב$[-1,1]$ כי f אינטגרבילית ב$[-1,0]$ וגם ב$[0,1]$ ובנוסף לכך מתקיים:

$$6=\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 f(x)\,dx$$

מ.ש.ל.ד.3.☺

iv. **צ"ל:** $\int_{-1}^x f(x)\,dx$ וF גזירה ב$x_0=0$

הוכחה:

נשים לב שלפני 2 סעיפים מצאנו כי $\forall x\in[-1,0]$ מתקיים

$$\int_{-1}^x f(x)\,dx=3\cdot(1+x)$$

נשים לב כי שלפני סעיף גילינו כי $\forall x\in[0,1]$ מתקיים

$$\int_{-1}^x f(x)\,dx=\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^x f(x)\,dx=3+\int_0^x f(x)\,dx$$
$$=3+\left[\int_0^1 f(x)\,dx-\int_x^1 f(x)\,dx\right]=3+3-3(1-x)=3+3\cdot x=3(1+x)$$

נשים לב קיבלנו אותה נוסחא ל$x\in[0,1]$ ול$x\in[-1,0]$ עבור $F(x)$,
ולכן $F(x)=3(1+x)$, $\forall x\in[-,1,1]$,
וגם מתקיים $F'(x)=3$, ולכן $F'(0)=3$

מ.ש.ל.ד.4.☺

(ה) **צ"ל:** האם קיימת $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בעלת אי רציפות מסדר שני ב$x_0=0$ ו$F=\int_{-1}^x f(x)\,dx$ לא גזירה ב$x_0=0$?

הוכחה:

נסמן ב$g(x)$ את הפונקציה שהוגדרה בסעיף הקודם,

נגדיר $h(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$, אזי מהיות h רציפה עד כדי נקודה אחת מתקיים כי h אינטגרבילית ב$[-1,1]$,

נגדיר $f(x)=g(x)+h(x)=\begin{cases}0 & \exists n\in\mathbb{N},\frac{1}{n}=x\\ 4 & x\ge 0;\forall n\in\mathbb{N},\frac{1}{n}\ne x\\ 3 & x<0;\forall n\in\mathbb{N},\frac{1}{n}\ne x\end{cases}$,

נניח בשלילה שf היא לא בעלת אי רציפות מסוג שני, אזי $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ קיים במובן הרחב.
נגדיר $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{2}{2n+1}$, נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 = \lim_{n\to\infty} x_n$$

אזי מהיינה מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{2n+1}\right) \underset{\frac{2}{2n+1}\neq\pm\frac{1}{m}}{\overset{\text{def}}{=}} \lim_{n\to\infty} 4 = 4$$

ומההנחה שלנו f היא לא בעלת אי רציפות מסוג שני, מתקיים כי $0 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = 4$,
סתירה כי $0 \neq 4$,
ולכן $x_0 = 0$ היא נקודה אי רציפות מסוג שני של f,
נראה שF לא גזירה ב$x_0 = 0$ ושf אינטגרבילית ונסיים.
נשים לב ש f אינטגרבילית ב$[-1,1]$ מסכום של אינטגרביליות,
ולכן

$$\int_{-1}^{x} h(x)\,dx = \begin{cases} \int_{-1}^{0} h(x)\,dx + \int_{0}^{x} h(x)\,dx & x \geq 0 \\ \int_{-1}^{x} h(x)\,dx & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \int_{-1}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{x} 1\cdot dx & x \geq 0 \\ \int_{-1}^{x} 0\cdot dx & x < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 + x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ולכן

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(x)\,dx = \int_{-1}^{x} [g(x) + h(x)]\,dx = \int_{-1}^{x} g(x)\,dx + \int_{-1}^{x} h(x)\,dx$$
$$= 3(1+x) + \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3+4x & x \geq 0 \\ 3+3x & x < 0 \end{cases}$$

ולכן

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3+3x-3}{x} = 3$$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3+4x-3}{x} = 4$$

ולכן $F(x)$ לא גזירה ב$x_0 = 0$ כי הנגזרות הצדדיות שלה שונות

מ.ש.ל.ה.☺