פתרון תרגיל מספר 13 - דאסט

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

23 ביוני 2019

1. **צ"ל:** $O(n)$ במשעורין

הוכחה:

נשים מבנה זה בכך ש$increment$ ו$reset$ ייזכרו את הביט הכי גדול שאינו 0, $incerement$ יעדכן אותו ו$reset$ ירוץ ממנו עד 1 וייקבע הכל ל0,

עתה נרצה להראות שזה $O(n)$ במשעורין,

בתרגול נומק מדוע $increment$ הוא $O(n)$ במשעורין, אנחנו רק צריכים להראות שזה נשמר באיחוד עם $reset$,

נשים לב כי $reset$ מבצע $O(k)$ פעולות לאחר ש$increment$ נקרא 2^k פעמים ברציפות.

נגדיר סדרה של פעולות a_i כאשר $a_1+\dots+a_t=n$ וגם a_i הוא מספר הקריאות ל$increment$ ברצף ואז ל$reset$,

לכן היעילות במשעורין היא

$$\begin{aligned}
O\left(\sum_{i=1}^{t}\left[\text{increment}\left(a_i-1\right)+\text{reset}\left(a_i\right)\right]\right) &= O\left(\sum_{i=1}^{t}\text{increment}\left(a_i-1\right)\right)+O\left(\sum_{i=1}^{t}\text{reset}\left(a_i\right)\right)\\
&= O\left(n-t\right)+\sum_{i=1}^{t}O\left(\text{reset}\left(a_i\right)\right)\\
&= O\left(n-t\right)+\sum_{i=1}^{t}O\left(a_i\right)\\
&= O\left(n-t\right)+O\left(n\right)=O\left(n\right)
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** ערכי $dist$

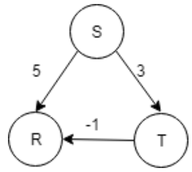
הוכחה:

s	t	x	y	z
∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	∞	∞	∞
0	3	∞	5	∞
0	3	9	5	∞
0	3	9	5	11
0	3	9	5	11

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** ערכי $dist$

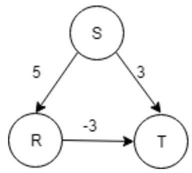
הוכחה:



נריץ מs ונקבל את התשובה הנכונה, האלגוריתם עובד בסדר כי ההנחה שברגע שהוצאנו ה$dist$ שלו לא משתנה, נשמרת ולכן הטענה שניסחנו עדיין נכונה

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** ערכי $dist$
הוכחה:



נריץ מs ולא נקבל את התשובה הנכונה, כי המרחק לt הוא 2 אבל בריצה הוא יהיה 3

מ.ש.ל.ג.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** משקל קטן מ2 המקורי
הוכחה:
יהי G' הMST של w אזי

$$2\cdot\sum_{e\in E'} w\left(e\right)=\sum_{e\in E'} 2\cdot w\left(e\right)\geq\sum_{e\in E'} w'\left(e\right)$$

כלומר G' הוא עץ ממשוקלל של w' עם סכום קטן מ$2\cdot\sum_{e\in E'} w\left(e\right)$, לכן ה$MST$ של w' יהיה קטן או שווה $2\cdot\sum_{e\in E'} w\left(e\right)$, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** יש גרף פורש מינימלי יחיד
הוכחה:
נכון! נניח בשלילה שיש 2 עצים פורשים מינימלים לגרף G, נסמנם T_1, T_2,
נבחר e להיות הצלע עם המשקל המינימלי שנמצאת בT_1 או בT_2 ולא בשניהם (יש כזאת אחרת העצים זהים),
נניח בלי הגבלת הכלליות כי $e\in T_1$, עתה נוסיף אותה לT_2 ונקבל מעגל שנסמנו בA,
עתה מההנחה יש צלע אחת במעגל A שנסמנה בe' כך ש$e'\in T_2$ וגם $e'\notin T_1$,
לכן $w\left(e\right)\leq w\left(e'\right)$, עתה אם נחליף את e' בe נקבל עץ פורש שמשקלו קטן מT_2 בסתירה למינימליות T_2,
לכן יש בדיוק עץ פורש מינימלי יחיד!

מ.ש.ל.ב.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** שינוי מרחק ל$-\infty = v.dist$
הוכחה:
במקום להחזיר $false$ בסוף הריצה של אלגוריתם $Ford$, אם מצאנו מעגל שלילי, כל מה שנעשה הוא שנקרא ל$explore$ שישנה את כל הקודקודים הקשורים למעגל השלילי להיות במרחק $-\infty$.
הדבר הזה עובד מכיוון שהמרחק הוא $-\infty$ אס"ם v באותו רכיב קשירות כמו המעגל, לכן אם נקרא ל$explore$ על המעגל, נגיע גם כן לv!

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** שינוי מרחק ל$v.dist=-\infty$
הוכחה:
במקום להחזיר $false$ בסוף הריצה של אלגוריתם $Ford$, כשמצאנו קודקוד v של מעגל שלילי, נחזור לקודמיו (כך ש(u,v) צלע היא זאת שהפרה את השוויון) וכל עוד לא נפגוש קודקוד שפגשנו פעם, נמשיך באופן רקורסיבי לחזור לקודמים, נזכור את כל הצלעות האלה ונסיים.
תחילה נשים לב שהאלגוריתם מוצא מעגל, כי הוא מסיים כשמצא נקודה שכבר נמצאת במסלול, יתרה מזאת, מנכונות $Ford$, הוא מכיל קודקוד של מעגל שלילי וכל קודקוד במעגל מפר את השווין של מסלול באורך n, לכן המסלול כולו הוא שלילי, כלומר המעגל הוא שלילי

מ.ש.ל.ב.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** אלגוריתם ל$Prim$
הוכחה:
במקום להשתמש ב$MinHeap$ נשתמש ברשימה של W רשימות, שכל רשימה זוכרת את כל האלה שמספרם W,
נשים לב שיצירה לוקחת $O\left(n\right)$, הורדת מפתח לוקח $O\left(1\right)$ (פשוט מעבירים מi לj), והוצאת מינימום לעבור על הרשימות ולהוציא איבר מהרשימה הראשונה שלא ריקה $O\left(W\right)$.
עתה אם נציב את זה באלגוריתם, נקבל שהיעילות היא

$$O\left(|V|\cdot W+|E|\right)$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** אלגוריתם ל$Prim$
הוכחה:
אם $W=|V|$, נקבל כי היעילות היא

$$O\left(|V|^2+|E|\right)$$

וזה פחות טוב מלהשתמש ב$MinHeap$

מ.ש.ל.ב.☺