עבודה ראשונה במקורות המדעים | מיכאל גרינבאום

במשך דורות רבים, מתמטיקאים הוכיחו משפטים מתמטיים והאוניברסיטה מצפה מאיתנו גם כן להוכיח משפטים מתמטיים. אך מדוע אנחנו בכלל מוכיחים משפטים מתמטיים ולא מסתפקים רק בנכונותם? בעבודה זאת אנסה לסכם את הסיבות לכך שיהודה רב מציג במאמרו.

הסיבה הראשונה היא שיש קשר הדוק בין ההוכחה לבין היכולת ליצירת טענות מתמטיות חדשות. לשם הצגת נקודה זאת, יהודה רב הניח שיש מחשב חכם שבהינתן טענה יכול להגיד האם הטענה נכונה או איננה נכונה. בשימוש במחשב זה, מתמטיקאים לא יוכלו לראות את שלבי ההוכחה של הטענה ולשאול שאלות על השלבים במטרה ליצור טענות חדשות.

לעומת דעתו של יהודה רב, יש רבים שטוענים שאפשר באופן הסתברותי להוכיח טענות על ידי בדיקה של הרבה מקרים ולדעת שהטענה נכונה בהסתברות גבוהה. יהודה רב סותר עמדה זאת בכך שגם אם נוכל להוכיח משפט אחד בצורה כזאת שהוא נכון בהסתברות גבוהה, האם נוכל להשתמש בו כבסיס למשפטים אחרים? ואם כן, ההסתברות של השגיאה עלולה להתחיל להצטבר ומתישהו נגיע לטענות שאינן נכונות ולא נוכל לדעת איפה שגינו.

טענה נוספת שיהודה רב הציג היא שהוכחות מהוות ביסוס לנכונותה של הטענה. הוא מנמק זאת באמצעות משל, שהמטרה של הוכחה היא לבנות חללית שבנויה מהרבה חלקים קטנים. כל חלק קטן מנומק על ידי טענות קודמות שכבר הוכחו או אקסיומות ועצם חיבור החלקים בעזרת שימוש בכלים שכבר עובדים ייצור משהו שהוא עובד גם הוא. מסיבה זאת, זה נותן יציבות להוכחה המתמטית הנוכחית ולמתמטיקה ככלל. בנוסף לכך, יהודה רב טוען שהמתמטיקה כולה בנויה ביחד עם האקסיומות בצורה שכל משפט מהווה ביסוס של שאר המשפטים במתמטיקה.

יתרה מכך, יהודה רב טען שיש חשיבות אפיסטימולוגית של הוכחות. הוא טען שניסיון ההוכחה של טענה, גם אם שגוי, גם הוא יכול לקדם את המתמטיקה כתחום בכך שייצר כלים נוספים שנוכל להעזר בהם בעתיד. כדוגמא לכך, הוא נתן את השערת גולדבאך שטוענת שכל מספר טבעי גדול מ3 אפשר לבטא כסכום של 2 מספרים ראשוניים. במשך דורות רבים מתמטיקאים ניסו להוכיח טענה זאת ולא הצליחו. אך הכלים שיצרו כדי לנסות לפתור בעיה זאת, קידמו תחומים רבים אחרים במתמטיקה. יתרה מזאת, גם אם ההשערה תתגלה כלא נכונה, הכלים שפותחו בעקבות ההשערה עדיין יהיו נכונים.

בנוסף לכך שיהודה רב הסביר במאמרו את חשיבות ההוכחה של המשפטים, הוא הציג דוגמאות רבות לנימוקיו. אציג פה 2 דוגמאות ממאמרו ואציין כיצד הוא משתמש בהם כדי להציג את עמדתו.

1. הדוגמא הראשונה היא ההוכחה שיש אינסוף ראשוניים, הוא ציין ששיטה אחת להוכחה יכולה להיות לבנות את המספר $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ ולטעון שאף ראשוני לא מחלק אותו. שיטה אחרת של הוכחה היא להראות כי $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + C + O\left(\frac{1}{\log(x)}\right)$ ולהסיק מהתבדרות הטור שיש אינסוף ראשוניים. הדבר החשוב הוא שכל שיטה של הוכחה נותנת כלי הרבה יותר חשוב מהטענה עצמה. השיטה הראשונה מאפשרת להוכיח בעזרת בנייה דומה הרבה טענות כמו שיש אינסוף ראשוניים מהצורה $4n + 3$ שלא היינו יכולים להסיק ללא לקרוא את ההוכחה. והשיטה השנייה מראה לא רק כמה מספרים ראשוניים יש אלא נותנת גם יחס על כמה בערך מופיעים שזאת טענה הרבה יותר חזקה מהטענה שיש אינסוף ראשוניים. בכך הוא מראה שלהוכחות יש אפשרות לפתח כלים וטענות נוספות שלא היינו יכולים להשיג רק מנכונות הטענה המקורית עצמה.

2. הדוגמא השנייה היא ההוכחה של משפט פרמה האחרון. במשך דורות רבים הרבה ניסו להוכיחו בהרבה דרכים שונות שהובילו להתפתחות בתחומים רבים ואף יצירה של תחומים חדשים: נוצרה התיאוריה של אידאלים של קרמר, פיתוח רב בתורת המספרים האלגברית, פיתוחים באלגברה גאומטרית, פיתוח של הטענה של Shimura-Taniyama ועוד רבים. בכך יהודה רב מראה שוב שעצם חוסר הידיעה של נכונות הטענה הובילה להתפתחות בתחומים רבים בניסיון להוכיח את הטענה ושפיתוח התחומים לא יהיה מושפע מנכונות או אי נכונות משפט פרמה האחרון.