פתרון תרגיל מספר 12 - כלים מתמטיים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

15 בינואר 2021

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $Ax \le b$

הוכחה:

יהי $1 \le i \le k$, נשים לב כי

$$\begin{aligned}
\|x - x_0\|_2 \le \|x - x_i\|_2 &\iff \sum_{j=1}^{n} \left([x]_j - [x_0]_j\right)^2 \le \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - [x_i]_j\right)^2 \\
&\iff \sum_{j=1}^{n} \left[[x]_j^2 - 2 \cdot x_j \cdot [x_0]_j + [x_0]_j^2\right] \le \sum_{j=1}^{n} \left[[x]_j^2 - 2 \cdot x_j \cdot [x_i]_j + [x_i]_j^2\right] \\
&\iff \sum_{j=1}^{n} \left[-2 \cdot [x]_j \cdot [x_0]_j + [x_0]_j^2\right] \le \sum_{j=1}^{n} \left[-2 \cdot [x]_j \cdot [x_i]_j + [x_i]_j^2\right] \\
&\iff \sum_{j=1}^{n} \left[-2 \cdot [x]_j \cdot [x_0]_j + 2 \cdot x_j \cdot [x_i]_j\right] \le \sum_{j=1}^{n} \left[[x_i]_j^2 - [x_0]_j^2\right] \\
&\iff \sum_{j=1}^{n} [x]_j \left[2 \cdot [x_i]_j - 2 \cdot [x_0]_j\right] \le \sum_{j=1}^{n} \left[[x_i]_j^2 - [x_0]_j^2\right] \\
&\iff (2 \cdot x_i - 2 \cdot x_0)^T \cdot x \le \sum_{j=1}^{n} \left[[x_i]_j^2 - [x_0]_j^2\right]
\end{aligned}$$

כלומר אם נגדיר $b_i = \sum_{j=1}^{n} \left[[x_i]_j^2 - [x_0]_j^2\right]$ ואת השורה ה- i של A להיות $(2 \cdot x_i - 2 \cdot x_0)^T$,
לכן כאשר $Ax \le b$ נקבל בדיוק את המשוואות $(2 \cdot x_i - 2 \cdot x_0)^T \cdot x_j \le \sum_{j=1}^{n} \left[[x_i]_j^2 - [x_0]_j^2\right]$ לכל $1 \le i \le k$ וממה שהראנו זה בדיוק המשוואות $\|x - x_0\|_2 \le \|x - x_i\|_2$ לכל $1 \le i \le k$.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $Voronoi\ region$ של x_0 ביחס ל- $x_1, \ldots, x_k$

הוכחה:

תחילה נניח כמו ברמז כי $\mathcal{P}$ מוגדר על ידי $hyperplane$ אחד, כלומר $\mathcal{P} = \left\{x : a^T x \le b\right\}$.
מהיות ב- $\mathcal{P}$ יש פנים, נסמן $x_0 \in \mathcal{P}$ כך ש- $a^T x_0 < b$.
נגדיר $y = \operatorname{argmin}_{z : a^T z = b} \left\|a^T \cdot z - x_0\right\|_2$, (כלומר הנקודה הכי קרובה ל- x_0 על הישר $a^T \cdot x - b$),
נסתכל על $x_1 = x_0 + 2 \cdot (y - x_0) = 2 \cdot y - x_0$,

נשים לב מהסעיף הקודם כי מתקיים כי

$$
\begin{aligned}
\|x-x_0\|_2 \le \|x-x_1\|_2 &\iff (2\cdot x_1 - 2\cdot x_0)^T \cdot x \le \sum_{j=1}^{n}\left[[x_1]_j^2 - [x_0]_j^2\right] \\
&\iff (2\cdot(2\cdot y - x_0) - 2\cdot x_0)^T \cdot x \le \sum_{j=1}^{n}\left[(2\cdot y - x_0)_j^2 - [x_0]_j^2\right] \\
&\iff (4y-4x_0)^T \cdot x \le \sum_{j=1}^{n}\left[4\,[y]_j^2 - 4\,[y]_j \cdot [x_0]_j\right] \\
&\iff (y-x_0)^T \cdot x \le \sum_{j=1}^{n}[y]_j \cdot \left[[y]_j - [x_0]_j\right] \\
&\iff (y-x_0)^T \cdot x \le (y-x_0)^T \cdot y \iff (y-x_0)^T\cdot(x-y) \le 0 \\
&\iff (y-x_0)^T \cdot \|a\|_2^2 \cdot (x-y) \le 0 \iff (y-x_0)^T \cdot a \cdot a^T \cdot (x-y) \le 0 \\
&\iff \left(a^T\cdot(y-x_0)\right)^T \cdot \left[a^T\cdot(x-y)\right] \le 0 \iff \left(b - a^T\cdot x_0\right)^T \cdot \left[a^T\cdot(x-y)\right] \le 0 \\
&\xLeftrightarrow{a^T\cdot x_0<b \implies b-a^T\cdot x_0>0} \left[a^T\cdot(x-y)\right] \le 0 \iff a^T\cdot x \le a^T \cdot y = b
\end{aligned}
$$

כלומר קיבלנו כי $a^T\cdot x \le b \iff \|x-x_0\|_2 \le \|x-x_1\|_2$, ולכן מצאנו $Voronoi\ region$ של x_0 ביחס ל־ x_1.
נשים לב שעבור $\mathcal{P}$ שהוא חיתוך של k $hyperplanes$ נוכל לעשות אותו טיעון, כלומר ל־ $hyperplane$ ה־ i ולהחליף את האילוץ $a_i^T\cdot x \le b_i$ ב־ $\|x-x_0\|_2 \le \|x-x_i\|_2$ כש־ x_i מחושב באותה צורה שעשינו למקרה הפרטי.
כלומר $Voronoi\ region$ של x_0 ביחס ל־ $x_1,\dots,x_k$ כאשר $x_i = 2\cdot y_i - x_0$ כאשר $y_i = \operatorname{argmin}_{z:a_i^T z=b_i}\left\|a_i^T\cdot z - x_0\right\|_2$.

מ.ש.ל.ב.☺

2. **צ"ל:** LP

הוכחה:

בהינתן a,b המקיימים את הנדרש, נסמן $t=\|a\|_1$, נרצה להראות שקיים פתרון בו מתקיים $\|a\|_1 \ge 1$,
אם $\|a\|_1 \ge 1$, סיימנו, אחרת נראה שיש פתרון אחר המקיים $\|a\|_1 \ge 1$,
נגדיר $a' = \frac{1}{t}\cdot a, b' = \frac{1}{t}\cdot b$. (הערה: $t>0$ כי נתון ש־ a לא וקטור 0).
נשים לב כי $\|a'\|_1 = \frac{\|a\|_1}{\|a\|_1} = 1 \ge 1$ ולכל $1\le i\le K$ נשים לב כי

$$
a'^T\cdot x_i = \frac{1}{t}\cdot a_i^T\cdot x_i \ge \frac{1}{t}\cdot b = b'
$$

ולכל $1\le j\le L$ נשים לב כי

$$
a'^T\cdot y_i = \frac{1}{t}\cdot a_i^T\cdot y_i \le \frac{1}{t}\cdot b = b'
$$

ולכן a',b' הוא פתרון וגם $\|a'\|_1 \ge 1$,
נגדיר משתנים a',b,c, נגדיר $a=a'-c$, נרצה ש־

$$
\begin{aligned}
&\forall 1\le i\le K, a^T\cdot x_i \ge b \\
&\forall 1\le j\le L, a^T\cdot y_i \le b \\
&\quad 0\le a', c \\
&\quad \sum_{i=1}^{n} a'_i + \sum_{i=1}^{n} c_i \ge 1
\end{aligned}
$$

ונרצה למקסם את $-1\cdot\begin{bmatrix} a \\ c\end{bmatrix}$,

בצורה קנונית נרצה ש־

$$
\begin{aligned}
&\max_{a',b,c} -1\cdot\begin{bmatrix} a' \\ c \end{bmatrix}\\
&\text{s.t.}\\
&\forall 1\le i\le K, -(a'-c)^T\cdot x_i \le -b\\
&\forall 1\le j\le L, (a'-c)^T\cdot y_i \le b\\
&\forall 1\le i\le n, -a'_i\le 0, -c_i\le 0\\
&-\left(\sum_{i=1}^n a'_i+\sum_{i=1}^n c_i\right)\le -1
\end{aligned}
$$

נסמן ב־ S_1 את מרחב הפתרונות של הבעיה הלינארית ונסמן ב־ $S_2=\left\{(a,b)\mid a^T\cdot x_i\ge b\wedge a^T\cdot y_i\le b\wedge \|a\|_1\ge 1\right\}$,
יהי $(a',b,c)\in S_1$, נשים לב מהאילוץ הרביעי והשלישי שמתקיים כי $\|a'-c\|_1=\sum_{i=1}^n a'_i+\sum_{i=1}^n c_i\ge 1$,
עתה נשים לב ש־ $a=(a'-c)\,,b$ גם מקיימים את התנאים ממקודם ולכן הם מפרידים וגם $a\neq 0$ כי $\|a\|\ge 1$,
ולכן $(a'-c)\,,b\in S_2$,
יהי $(a,b)\in S_2$, נגדיר $c=\begin{cases}-a_i & a_i\le 0\\ 0 & else\end{cases}$, $a'=\begin{cases}a_i & a_i\ge 0\\ 0 & else\end{cases}$,
נשים לב כי $a',c\ge 0$, וגם כי $\sum_{i=1}^n a'_i+\sum_{i=1}^n c_i=\|a\|_1\ge 1$ והאילוצים מתקיימים כי $a'-c=a$, ולכן $(a',b,c)\in S_1$.
כלומר מצאנו דרך למצוא פתרון בקבוצה אחת בהינתן פתרון בקבוצה השנייה.
עתה, בהינתן שקיים פתרון לבעיה המקורית, הראנו שקיים פתרון ל־ S_2, נוכל לפתור את הבעיה הלינארית ואז להחזיר $a'-c,b$ שהוכחנו שהוא פתרון חוקי של S_2 ולכן גם פתרון חוקי של הבעיה המקורית (וגם $a\neq 0$).
בהינתן שאין פתרון לבעיה המקורית, אין פתרון ל־ S_2, אם נפתור את הבעיה שיצרנו וקיים פתרון, היינו יכולים לייצר פתרון ב־ S_2 בסתירה לכך שלא קיים. ולכן גם הבעיה שיצרנו תהיה ללא פתרון.
כלומר מצאנו בעיה שקולה שצריך להחזיר בה את $a'-c,b$ כשקיים פתרון אחרת להחזיר שלא קיים.

מ.ש.ל.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** LP
הוכחה:
נשים לב כי

$$
\begin{aligned}
\|x\|_\infty\le 1 &\iff \max_{1\le i\le n}|x_i|\le 1\iff \forall 1\le i\le n\to |x_i|\le 1\iff \forall 1\le i\le n\to -1\le x_i\le 1\\
&\iff \forall 1\le i\le n\to x_i\le 1\wedge -x_i\le 1\iff \forall 1\le i\le n\to e_i^T\cdot x\le 1\wedge -e_i^T\cdot x\le 1
\end{aligned}
$$

כלומר קיבלנו שאם נגדיר את A להיות השורות $e_i^T,-e_i^T$ ואת $b=(1,\ldots,1)$ נקבל בדיוק את האילוץ $\|x\|_\infty\le 1$.
כלומר $\max c^T\cdot x\ \text{s.t.}\ \|x\|_\infty\le 1$ שקול ל־ $\max c^T\cdot x\ \text{s.t.}\ Ax\le b$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** בעית ה־ $duality$ מתקבלת עם $\|c\|_1$
הוכחה:
תחילה נשים לב שהבעיה הדואלית היא $\min b^T\cdot y\ \text{s.t.}\ A^T\cdot y=c\wedge y\ge 0$.
נשים לב כי $\left[A^T\cdot y\right]_i=y_i-y_{i+n}=c_i$.
נשים לב כי

$$
b^T\cdot y=\sum_{i=1}^{2n}y_i=\sum_{i=1}^n\left[y_i+y_{i+n}\right]\overset{\star}{\ge}\sum_{i=1}^n|c_i|=\|c\|_1
$$

$\star$ - נתון כי $y_i - y_{i+n} = c_i$ וגם שניהם חיוביים ולכן סכום הוא לפחות $|c_i|$,
ולכן

$$\min b^T \cdot y \text{ s.t. } A^T \cdot y = c \wedge y \geq 0 \geq \|c\|_1$$

עתה נשים לב כי עבור $y_i = \begin{cases} 1_{c_i \geq 0} & 1 \leq i \leq n \\ 1_{c_i \leq 0} & else \end{cases}$, נשים לב כי $y_i - y_{i+n} = c_i$ לכל $1 \leq i \leq n$ וגם $y \geq 0$ וגם מתקיים

$$b^T \cdot y = \sum_{i=1}^{n} [y_i + y_{i+n}] = \sum_{i=1}^{n} |c_i| = \|c\|_1$$

ולכן $\min b^T \cdot y \text{ s.t. } A^T \cdot y = c \wedge y \geq 0 \leq \|c\|_1$, ולכן $\boxed{\min b^T \cdot y \text{ s.t. } A^T \cdot y = c \wedge y \geq 0 = \|c\|_1}$

מ.ש.ל.ב.☺

4. **צ"ל:** $bounded$ אם"ם $\text{cone}(a_1, \ldots, a_m) = \mathbb{R}^n$.
הוכחה:
$\Leftarrow$: נניח כי $\mathcal{P}$ הוא $bounded$, נניח בשלילה ש- $\text{cone}(a_1, \ldots, a_m) \neq \mathbb{R}^n$, אזי קיים v כך ש- $\langle a_i, v \rangle \leq 0$ לכל $1 \leq i \leq m$.
יהי $x \in \mathcal{P}$, נשים לב $a_i^T \cdot x \leq b_i$ וגם נשים לב שלכל $c \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$a_i^T \cdot (x + c \cdot v) = a_i^T \cdot x + c \cdot a_i^T \cdot v \leq a_i^T \cdot x \leq b_i$$

ולכן $x + c \cdot v \in \mathcal{P}$.
לכן נשים לב כי $\mathcal{P}$ לא $bounded$ כי $\|x + c \cdot v\|_2$ יכול להיות גדול כרצוננו כי זה נכון לכל $c \in \mathbb{R}$ בסתירה לכך ש- $\mathcal{P}$ $bounded$.
ולכן $\text{cone}(a_1, \ldots, a_m) = \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow$: נניח כי $\text{cone}(a_1, \ldots, a_m) = \mathbb{R}^n$, נניח ש- $\mathcal{P}$ לא $bounded$ אז קיים c כך ש- $\max c^T \cdot x = \infty$.
עתה מהיות $\text{cone}(a_1, \ldots, a_m) = \mathbb{R}^n \ni c$ קיימים $\alpha_1, \ldots, \alpha_m > 0$ כך ש- $c = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot a_i$.
נשים לב כי

$$\infty = \max c^T \cdot x = \max \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot a_i \right)^T \cdot x = \max \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot a_i^T \cdot x \right) \leq \max \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot b_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot b_i$$

ולכן קיבלנו כי $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot b_i = \infty$ סתירה ולכן $\mathcal{P}$ הוא אכן $bounded$.

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:** $\{x : Ax = b\} = \emptyset$
הוכחה:
תחילה יהי כך ש- $A^T y \geq 0$ ו- $b^T \cdot y < 0$,
יהי $c > 0$, נשים לב כי $A^T \cdot (cy) = c \cdot A^T \cdot y \geq 0$
כלומר $c \cdot y$ הוא גם פתרון לכל $c > 0$,
נשים לב כי

$$\max_{y' \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } A^T y' \leq 0} b^T \cdot y' = \max_{y' \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } A^T(-y') \geq 0} b^T \cdot y' = \max_{y' \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } A^T(y') \geq 0} b^T \cdot (-y') = \min_{y' \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } A^T y' \geq 0} b^T \cdot y'$$
$$\leq \min_{c>0} b^T \cdot (c \cdot y) = \min_{c>0} c \cdot \left(b^T \cdot y\right)$$

נשים לב כי $\min_{c>0} c \cdot \left(b^T \cdot y\right) = -\infty$ כי הביטוי $b^T \cdot y < 0$, ולכן קיבלנו כי $\max_{y' \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } A^T y \geq 0} -b^T \cdot y' \leq -\infty$,
ולכן $\max_{y' \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } A^T y' \leq 0} b^T \cdot y' = -\infty$,
נניח בשלילה ש- $\exists x_0 \in \{x : Ax = b, x \geq 0\}$,
נשים לב שהבעיה הדואלית לבעיה שתוארה היא בדיוק $\min_{x \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } Ax = b \wedge x \geq 0} 0 \cdot x = \min_{x \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } Ax = b \wedge x \geq 0} 0$,
מההנחה שקיים פתרון נקבל כי $\min_{x \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } Ax = b \wedge x \geq 0} 0 \cdot x = \min_{x \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } Ax = b \wedge x \geq 0} 0 = 0$,
ראינו בתרגול שפתרון של הבעיה הדואלית גורר שיש פתרון של הבעיה המקורית שנסמנה ב- y_0 ונקבל כי $-\infty = \max_{y' \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } A^T y' \leq 0} b^T \cdot y' \geq b^T \cdot y_0$,
בסתירה לכך ש- $b^T \cdot y_0$ הוא מספר ולא $-\infty$ ולכן $\{x : Ax = b, x \geq 0\} = \emptyset$, כנדרש.

מ.ש.ל.☺

6. **צ"ל:** $(A\cdot x)_i = b_i$ או ש־ $y_i = 0$

הוכחה:

נסמן את הפתרון האופטימלי של הבעיה הדואלית ב־ y ואת הפתרון של הבעיה המקורית ב־ x,
לכן $c^T\cdot x = b^T\cdot y$ וגם נשים לב כי $A^T\cdot y = c$, ולכן

$$\begin{aligned} b^T\cdot y &= c^T\cdot x = \left(A^T\cdot y\right)^T\cdot x = y^T\cdot Ax = (Ax)^T\cdot y \\ \Rightarrow 0 &= \left((Ax)^T - b^T\right)\cdot y = (Ax-b)^T\cdot y = \sum_{i=1}^{n} y_i\cdot (Ax-b)_i \end{aligned}$$

ולכן מהיות $y_i \geq 0$ לכל $1 \leq i \leq n$ נקבל כי הביטוי מתאפס אם"ם לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $y_i = 0$ או ש־ $(Ax-b)_i = 0 \Rightarrow (Ax)_i = b_i$, כנדרש.

מ.ש.ל.☺