פתרון תרגיל מספר 6 ־ תורת המשחקים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

22 במאי 2021

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $minimax$ בטהור

הוכחה:

נשים לב כי

$$\max_{1\leq i\leq n}\min_{1\leq j\leq n}u\left(e_i,e_j\right)=\max\left\{1,0\right\}=1$$

וגם כי

$$\min_{1\leq j\leq n}\max_{1\leq i\leq n}u\left(e_i,e_j\right)=\min\left\{2,3\right\}=2$$

ונשים לב כי

$$\max_{1\leq i\leq n}\min_{1\leq j\leq n}u\left(e_i,e_j\right)=1\neq 2=\min_{1\leq j\leq n}\max_{1\leq i\leq n}u\left(e_i,e_j\right)$$

ולכן אין אסטרטגיה אופטימלית טהורה לשניהם.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** u

הוכחה:

נחשב

$$\begin{aligned}u\left(p,q\right)&=\left[\begin{array}{cc}p & 1-p\end{array}\right]\cdot A\cdot\left[\begin{array}{c}q\\ 1-q\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}p & 1-p\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c}q+2\cdot\left(1-q\right)\\ 3\cdot q\end{array}\right]\\ &=\left[\begin{array}{cc}p & 1-p\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c}2-q\\ 3q\end{array}\right]=p\left(2-q\right)+\left(1-p\right)\cdot 3q\\ &=2p-pq+3q-3pq=2p-4pq+3q\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\max_{0\leq p\leq 1}\min\left\{u\left(p,0\right),u\left(p,1\right)\right\}$

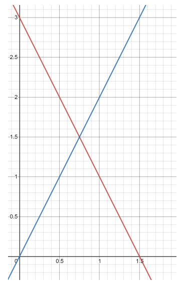
הוכחה:

נשים לב כי $u\left(p,0\right)=2p$ ו־ $u\left(p,1\right)=2p-4p+3=3-2p$,

נחשב את נקודת החיתוך $3-2p=2p\Rightarrow\boxed{p=\frac{3}{4}}$.

ולכן נקבל כי

$$\max_{0\leq p\leq 1}\min\left\{u\left(p,0\right),u\left(p,1\right)\right\}=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$



מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\min_{0\leq q\leq 1}\max\left\{u\left(0,q\right),u\left(1,q\right)\right\}$

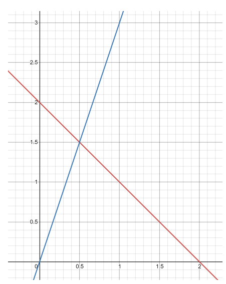
הוכחה:

נשים לב כי $u\left(0,q\right)=3q$ ו־ $u\left(1,q\right)=2-4q+3q=2-q$,

נחשב את נקודת החיתוך $2-q=3q\Rightarrow\boxed{q=\frac{1}{2}}$.

ולכן נקבל כי

$$\max_{0\leq p\leq 1}\min\left\{u\left(p,0\right),u\left(p,1\right)\right\}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$



מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** $val\left(A\right)$ ואסטרטגיות מנצחות

הוכחה:

נשים לב כי לפי 2 הסעיפים הקודמים קיבלנו ש־

$$val\left(A\right)=\max_{x\in\Delta_m}\min_{1\leq i\leq n}u\left(x,e_i\right)=\min_{y\in\Delta_m}\max_{1\leq i\leq m}u\left(e_i,y\right)=1.5$$

וגם חישבנו שהערך מתקבל כשהשחקן הראשון בוחר את האסטרטגיה הראשונה בהסתברות $\frac{3}{4}$.
וגם חישבנו שהערך מתקבל כשהשחקן השני בוחר את האסטרטגיה הראשונה שלו בהסתברות $\frac{1}{2}$.

מ.ש.ל.ה.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** A

הוכחה:

נשים לב שאם 2 השחקנים בוחרים 2 אז השחקן השני ינצח וירוויח $2\cdot 2=4$ ולכן הראשון ירוויח -4.
נשים לב שאם אחד השחקנים בוחר 2 והשני 3, אז השחקן הראשון ינצח וירוויח $2\cdot 3=6$.
נשים לב שאם 2 השחקנים בוחרים 3 אז השחקן השני ינצח וירוויח $3\cdot 3=9$ ולכן הראשון ירוויח -9.
ולכן נקבל ש־ A זאת המטריצה $\begin{bmatrix}-4 & 6\\ 6 & -9\end{bmatrix}$.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $minimax$ בטהור
הוכחה:
נשים לב כי

$$\max_{1\leq i\leq m}\min_{1\leq j\leq n}u\left(e_i,e_j\right)=\max\left\{-4,-9\right\}=-4$$

וגם כי

$$\min_{1\leq j\leq n}\max_{1\leq i\leq m}u\left(e_i,e_j\right)=\min\left\{6,6\right\}=6$$

ונשים לב כי

$$\max_{1\leq i\leq m}\min_{1\leq j\leq n}u\left(e_i,e_j\right)=-4\neq 6=\min_{1\leq j\leq n}\max_{1\leq i\leq m}u\left(e_i,e_j\right)$$

ולכן אין אסטרטגיה אופטימלית טהורה.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $minimax$
הוכחה:
נגדיר

$$\begin{aligned}u\left(p,q\right)&=\left[\begin{array}{cc}p & 1-p\end{array}\right]\cdot A\cdot\left[\begin{array}{c}q\\ 1-q\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}p & 1-p\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c}-4\cdot q+6\cdot\left(1-q\right)\\ 6\cdot q-9\cdot\left(1-q\right)\end{array}\right]\\ &=\left[\begin{array}{cc}p & 1-p\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c}6-10\cdot q\\ 15\cdot q-9\end{array}\right]=p\cdot\left(6-10\cdot q\right)+\left(1-p\right)\cdot\left(15\cdot q-9\right)\\ &=6\cdot p-10\cdot p\cdot q+15\cdot q-9-15\cdot p\cdot q+9\cdot p\\ &=-25\cdot p\cdot q+15\cdot p+15\cdot q-9\end{aligned}$$

ראינו בשאלה הראשונה כי

$$\begin{aligned}val\left(A\right)&=\max_{0\leq p\leq 1}\min\left(u\left(p,0\right),u\left(p,1\right)\right)\\ &=\max_{0\leq p\leq 1}\min\left(15p-9,15p-25\cdot p+15-9\right)\\ &=\max_{0\leq p\leq 1}\min\left(15p-9,-10\cdot p+6\right)\end{aligned}$$

נחשב את נקודת החיתוך של 2 הישרים

$$15p-9=-10\cdot p+6\implies 25p=15\implies\boxed{p=\frac{3}{5}}$$

ולכן נקבל כי

$$val\left(A\right)=\max_{0\leq p\leq 1}\min\left(15p-9,-10\cdot p+6\right)\overset{\star}{=}15\cdot\frac{3}{5}-9=9-9=0$$

המעבר של $\star$ זה כי המקסימום של המינימום של הקווים הוא בנקודת החיתוך שלהם שהיא ב־ $\frac{3}{5}$.
עתה נחשב גם

$$\begin{aligned}val\left(A\right)&=\min_{0\leq q\leq 1}\max\left(u\left(0,q\right),u\left(1,q\right)\right)\\ &=\min_{0\leq q\leq 1}\max\left(15q-9,15q-25\cdot q+15-9\right)\\ &=\min_{0\leq q\leq 1}\max\left(15q-9,-10\cdot q+6\right)\overset{\star}{=}15\cdot\frac{3}{5}-9=0\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו שהאסטרטגיה האופטימלית ל־ 2 השחקנים היא לשחק את האסטרטגיה הראשונה בהסתברות $\frac{3}{5}$ ואת השנייה בהסתברות $\frac{2}{5}$.

מ.ש.ל.ב.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $val\left(B\right)=c\cdot val\left(A\right)+d$

הוכחה:

נשים לב כי

$$\begin{aligned}val\left(B\right) &= \max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_n}u_B\left(x,y\right)=\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_n}\left[c\cdot u_A\left(x,y\right)+d\right]\\ &= \max_{x\in\Delta_m}\left[\min_{y\in\Delta_n}\left[c\cdot u_A\left(x,y\right)\right]+d\right]=\left(\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_n}\left[c\cdot u_A\left(x,y\right)\right]\right)+d\\ &= \left(\max_{x\in\Delta_m}c\cdot\left[\min_{y\in\Delta_n}u_A\left(x,y\right)\right]\right)+d=c\cdot\left(\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_n}u_A\left(x,y\right)\right)+d\\ &= c\cdot\left(\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_m}u_A\left(x,y\right)\right)+d=c\cdot val\left(A\right)+d\end{aligned}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** מה הקשר של האסטרטגיות האופטימליות

הוכחה:

נשים לב כי האסטרטגיות האופטימליות לא השתנו כי רק ה- d,c יצאו מהמקסימום והמינימום בלי לשנותו.

מ.ש.ל.ב.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $val\left(A\right)=0$ וכל אסטרטגיה אופטימלית של השחקן הראשון היא אסטרגטיה אופטימלית של השחקן השני

הוכחה:

נשים לב כי

$$\begin{aligned}&\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_m}u\left(x,y\right)=\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_m}x^T\cdot A\cdot y=\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_m}\left(x^T\cdot A\cdot y\right)^T\\ &=\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_m}\left(y^T\cdot A^T\cdot x\right)=\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_m}\left(y^T\cdot -A\cdot x\right)=\max_{x\in\Delta_m}\left(-\max_{y\in\Delta_m}\left(y^T\cdot A\cdot x\right)\right)\\ &=-\min_{x\in\Delta_m}\left(\max_{y\in\Delta_m}\left(y^T\cdot A\cdot x\right)\right)=-\min_{x\in\Delta_m}\max_{y\in\Delta_m}u\left(y,x\right)=-\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_m}u\left(x,y\right)\end{aligned}$$

ולכן

$$\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_m}u\left(x,y\right)=-\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_m}u\left(x,y\right)\Rightarrow\boxed{\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_m}u\left(x,y\right)=0}$$

כלומר קיבלנו כי $\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_m}u\left(x,y\right)=0=Val\left(A\right)$,

תהי x^* אסטרטגיה אופטימלית של השחקן הראשון, נשים לב ש- $Val\left(A\right)=0$ אזי לכל y אסטרטגיה של השחקן השני מתקיים $\left(x^*\right)^T\cdot A\cdot y\geq 0$.

נשים לב כי

$$0=0^T\leq\left(\left(x^*\right)^T\cdot A\cdot y\right)^T=y^T\cdot A^T\cdot x^*=y^T\cdot -A\cdot x^*=-y^T\cdot A\cdot x^*$$

ולכן $y^T\cdot A\cdot x^*\leq 0$.

נשים לב שלכל אסטרטגיה של y של השחקן הראשון מתקיים $y^T\cdot A\cdot x^*\leq 0$,

ולכן x^* היא אסטרגטיה אופטימלית של השחקן השני (כי לכל אסטרטגיה של השחקן הראשון הניקוד המתקבל הוא אי חיובי וערך המינימקס הוא 0).

כלומר הראנו שכל אסטרטגיה אופטימלית x^* של השחקן הראשון היא אסטרטגיה אופטימלית של השחקן השני.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) צ"ל: $val\left(A\right)=0$

הוכחה:

נשים לב כי $A=\left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$, נשים לב כי $A^{T}=-A$ ולכן לפי הסעיף הקודם מתקיים $val\left(A\right)=0$.

מ.ש.ל.ב.☺