פתרון תרגיל מספר 2 ־ כלים מתמטיים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

2 בנובמבר 2020

1. **צ"ל:** $\left|\ln\left(n!\right)-n\cdot\ln\left(\frac{n}{e}\right)\right|=O\left(\log\left(n\right)\right)$
הוכחה:
תחילה מהרמז בתרגיל נקבל כי

$$\begin{aligned}\ln\left(n!\right)&=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(k\right)\geq\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln\left(x\right)dx=\int_{1}^{n}\ln\left(x\right)dx=\left[x\ln\left(x\right)-x\right]_{1}^{n}\\&=n\ln\left(n\right)-n-\left[1\ln\left(1\right)-1\right]=n\ln\left(n\right)-n+1\geq n\ln\left(n\right)-n\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי

$$\ln\left(n!\right)\geq n\ln\left(n\right)-n=n\left(\ln\left(n\right)-1\right)=n\cdot\left(\ln\left(n\right)-\ln\left(e\right)\right)=n\cdot\ln\left(\frac{n}{e}\right)$$

עתה שוב מהרמז בתרגיל נקבל כי

$$\begin{aligned}&\ln\left(n+1\right)\geq\int_{n}^{n+1}\ln\left(x\right)dx=\left[x\ln\left(x\right)-x\right]_{n}^{n+1}=\left(n+1\right)\ln\left(n+1\right)-n-1-\left[n\ln\left(n\right)-n\right]\\&=\left(n+1\right)\ln\left(n+1\right)-1-n\ln\left(n\right)\\&\Rightarrow\ln\left(n+1\right)\geq\left(n+1\right)\ln\left(n+1\right)-1-n\ln\left(n\right)\\&\Rightarrow1\geq n\cdot\ln\left(n+1\right)-n\ln\left(n\right)=n\cdot\left(\ln\left(n+1\right)-\ln\left(n\right)\right)\\&\Rightarrow\frac{1}{n}\geq\ln\left(n+1\right)-\ln\left(n\right)\Rightarrow\boxed{\ln\left(n+1\right)\leq\ln\left(n\right)+\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\ln\left(n!\right)&=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(k\right)\leq\sum_{k=2}^{n}\int_{k}^{k+1}\ln\left(x\right)dx=\int_{2}^{n+1}\ln\left(x\right)dx=\left[x\ln\left(x\right)-x\right]_{2}^{n+1}\\&=\left(n+1\right)\ln\left(n+1\right)-n-1-\left[2\ln\left(2\right)-2\right]=\\&=n\cdot\ln\left(n+1\right)+\ln\left(n+1\right)-n+1-2\ln\left(2\right)\\&\leq n\cdot\left[\ln\left(n\right)+\frac{1}{n}\right]+\ln\left(n+1\right)-n+1-2\ln\left(2\right)\\&=n\cdot\ln\left(n\right)+1+\ln\left(n+1\right)-n+1-2\ln\left(2\right)\\&\overset{\text{log monotonic and }n\geq1}{\leq}n\cdot\ln\left(n\right)+1+\ln\left(2n\right)-n+1-2\ln\left(2\right)\\&=n\cdot\ln\left(n\right)+1+\ln\left(n\right)+\ln\left(2\right)-n+1-2\ln\left(2\right)\\&=n\cdot\ln\left(n\right)+\ln\left(n\right)-n+2-\ln\left(2\right)\\&=n\cdot\left(\ln\left(n\right)-1\right)+\ln\left(n\right)+2-\ln\left(2\right)=n\cdot\left(\ln\left(n\right)-\ln\left(e\right)\right)+\ln\left(n\right)+2-\ln\left(2\right)\\&=n\cdot\ln\left(\frac{n}{e}\right)+\ln\left(n\right)+2-\ln\left(2\right)\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי

$$\ln(n!) - n\cdot\ln\left(\frac{n}{e}\right) \le \ln(n) + 2 - \ln(2)$$

כלומר הראנו כי $0 \le \ln(n!) - n\cdot\ln\left(\frac{n}{e}\right) \le \ln(n) + 2 - \ln(2)$, כלומר

$$\boxed{\left|\ln(n!) - n\cdot\ln\left(\frac{n}{e}\right)\right| \le \ln(n) + 2 - \ln(2) = O(\ln(n))}$$

כלומר הראנו כי $\left|\ln(n!) - n\cdot\ln\left(\frac{n}{e}\right)\right| = O(\ln(n))$, כנדרש.

מ.ש.ל.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$

הוכחה:

נשים לב כי

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot\ldots\cdot(n+1-k)}{k!}, \binom{n}{k+1} = \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!}$$

לכן

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} &= \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!} - \frac{n\cdot\ldots\cdot(n+1-k)}{k!} \\
&= \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k)}{k!}\cdot\left[\frac{n-k}{k+1} - 1\right] \\
&= \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k)}{k!}\cdot\left[\frac{n-k-k-1}{k+1}\right] \\
&= \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!}\cdot[n-k-k-1] \\
&> \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!}\cdot[n-k-1-k-1] \\
&\overset{\frac{n}{2}\ge k+1}{\ge} \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!}\cdot\left[n-\frac{n}{2}-\frac{n}{2}\right] \\
&= \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!}\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$, כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k$

הוכחה:

נוכיח שלכל $1 < y \le x$ מתקיים כי $\frac{x}{y} \le \frac{x-1}{y-1}$, נשים לב כי

$$\frac{x}{y} \le \frac{x-1}{y-1} \iff xy - x \le xy - y \iff y \le x$$

נעזר באבחנת עזר ונסיק כי $\frac{n}{k} < \frac{n-i}{k-i}$ לכל $0 < i < k$, כלומר

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot\ldots\cdot(n+1-k)}{k!} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1-k}{1} \ge \left(\frac{n}{k}\right)^k$$

כלומר הראנו כי $\boxed{\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k}}$. בנוסף לכך נשים לב כי

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot\ldots\cdot(n+1-k)}{k!} \le \frac{n^k}{k!} = \frac{k^k}{k^k}\cdot\frac{e^k}{e^k}\cdot\frac{n^k}{k!} = \left(\frac{e^k n^k}{k^k}\right)\cdot\left(\frac{k^k}{k!}\cdot\frac{1}{e^k}\right)$$
$$= \left(\frac{en}{k}\right)^k\cdot\left(\frac{k^k}{k!}\cdot\frac{1}{e^k}\right) \overset{\text{taylor series of } e^k \text{ is bigget than one term}}{\le} \left(\frac{en}{k}\right)^k\left(\frac{1}{e^k}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k^l}{l!}\right)$$
$$= \left(\frac{en}{k}\right)^k\left(\frac{1}{e^k}\cdot e^k\right) = \left(\frac{en}{k}\right)^k\cdot 1 = \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

כלומר הראנו כי $\boxed{\binom{n}{k} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k}$, בשילוב עם הטענה הקודמת נקבל כי $\boxed{\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k}$, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) צ"ל: $\binom{n}{\lfloor\delta n\rfloor} = e^{n(h(\delta)+o(1))}$

הוכחה:

$$\binom{n}{\lfloor\delta n\rfloor} = \frac{n!}{\lfloor\delta n\rfloor!\cdot(n-\lfloor\delta n\rfloor)!} \overset{\text{Stirling's approximation}}{=} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\lfloor\delta n\rfloor}}\cdot\left(\frac{\lfloor\delta n\rfloor}{e}\right)^{\lfloor\delta n\rfloor}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi(n-\lfloor\delta n\rfloor)}}\cdot\left(\frac{n-\lfloor\delta n\rfloor}{e}\right)^{n-\lfloor\delta n\rfloor}}$$
$$=\sqrt{\frac{2\pi\lfloor\delta n\rfloor(n-\lfloor\delta n\rfloor)}{n}}\left(\frac{n}{\lfloor\delta n\rfloor}\right)^{\lfloor\delta n\rfloor}\cdot\left(\frac{n}{n-\lfloor\delta n\rfloor}\right)^{n-\lfloor\delta n\rfloor} = e^{\ln\left(\sqrt{\frac{2\pi\lfloor\delta n\rfloor(n-\lfloor\delta n\rfloor)}{n}}\left(\frac{n}{\lfloor\delta n\rfloor}\right)^{\lfloor\delta n\rfloor}\cdot\left(\frac{n}{n-\lfloor\delta n\rfloor}\right)^{n-\lfloor\delta n\rfloor}\right)}$$
$$=e^{\ln\left(\sqrt{\frac{2\pi\lfloor\delta n\rfloor(n-\lfloor\delta n\rfloor)}{n}}\right)+\ln\left(\left(\frac{n}{\lfloor\delta n\rfloor}\right)^{\lfloor\delta n\rfloor}\right)+\ln\left(\left(\frac{n}{n-\lfloor\delta n\rfloor}\right)^{n-\lfloor\delta n\rfloor}\right)} = e^{\ln\left(\sqrt{\frac{2\pi\lfloor\delta n\rfloor(n-\lfloor\delta n\rfloor)}{n}}\right)+\lfloor\delta n\rfloor\cdot\ln\left(\frac{n}{\lfloor\delta n\rfloor}\right)+(n-\lfloor\delta n\rfloor)\cdot\ln\left(\frac{n}{n-\lfloor\delta n\rfloor}\right)}$$
$$\sim e^{\ln\left(\sqrt{\frac{2\pi\delta n(n-\delta n)}{n}}\right)+\delta n\cdot\ln\left(\frac{n}{\delta n}\right)+(n-\delta n)\cdot\ln\left(\frac{n}{n-\delta n}\right)} = e^{n\left(\delta\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)+(1-\delta)\ln\left(\frac{1}{1-\delta}\right)\right)+\ln\left(\sqrt{2\pi\delta(n-\delta n)}\right)}$$
$$=e^{n\left(\delta\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)+(1-\delta)\ln\left(\frac{1}{1-\delta}\right)\right)+\frac{1}{2}\ln(2\pi\delta(n-\delta n))} = e^{n\left(h(\delta)+\frac{1}{2n}\ln(2\pi\delta(n-\delta n))\right)} = e^{n(h(\delta)+o(1))}$$

כלומר קיבלנו כי $\binom{n}{\lfloor\delta n\rfloor} \overset{n\to\infty}{\sim} e^{n(h(\delta)+o(1))}$, **הערה:** $\frac{1}{2n}\ln\left(2\pi\delta\left(n-\delta n\right)\right) = o\left(1\right)$ בגלל ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n} = 0$.

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) צ"ל: $\binom{n}{\lfloor\delta n\rfloor} = e^{n(h(\delta)+o(1))}$

הוכחה:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\delta n\rfloor}\binom{n}{k} \overset{\text{from part a in the question}}{\le} \sum_{k=0}^{\lfloor\delta n\rfloor}\binom{n}{\lfloor\delta n\rfloor} = \lfloor\delta n\rfloor\cdot\binom{n}{\lfloor\delta n\rfloor}$$
$$\overset{\text{from part c in the question}}{=} \lfloor\delta n\rfloor\cdot e^{n(h(\delta)+o(1))}$$
$$=e^{\log(\lfloor\delta n\rfloor)}\cdot e^{n(h(\delta)+o(1))}$$
$$\le e^{\log(\delta n)}\cdot e^{n(h(\delta)+o(1))}$$
$$=e^{n\left(h(\delta)+o(1)+\frac{\log(n)}{n}\right)}$$

נשים לב כי $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n)}{n} = 0$ ולכן $\frac{\log(n)}{n} = o\left(1\right)$ ולכן

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\delta n\rfloor}\binom{n}{k} \le e^{n(h(\delta)+o(1)+o(1))} = e^{n(h(\delta)+o(1))}$$

ועתה לכיוון השני נשים לב כי

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \delta n \rfloor} \binom{n}{k} \geq \binom{n}{\lfloor \delta n \rfloor} = e^{n(h(\delta)+o(1))}$$

ומחיבור 2 האי שוויונות נקבל כי

$$e^{n(h(\delta)+o(1))} \leq \sum_{k=0}^{\lfloor \delta n \rfloor} \binom{n}{k} \leq e^{n(h(\delta)+o(1))}$$

וממשפט סנדוויץ' נוכל להסיק כי $\boxed{\sum_{k=0}^{\lfloor \delta n \rfloor} \binom{n}{k} = e^{n(h(\delta)+o(1))}}$

מ.ש.ל.ד.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{E}[Y] = \lambda$
הוכחה:

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$
$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \overset{\text{taylor series of } e^x \text{ when } x=\lambda}{=} e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda}$$
$$= 1 \cdot \lambda = \lambda$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathrm{Var}[Y] = \lambda$
הוכחה:

$$\mathbb{E}\left[Y^2\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda}$$
$$= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}$$
$$= \lambda \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}\right]$$
$$= \lambda \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\right] = \lambda \cdot \left[\mathbb{E}[Y] + e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right]$$
$$\overset{\text{taylor series of } e^x \text{ when } x=\lambda}{=} \lambda \cdot \left[\mathbb{E}[Y] + e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda}\right] = \lambda \cdot [\mathbb{E}[Y] + 1]$$
$$= \lambda \cdot [\lambda + 1] = \lambda^2 + \lambda$$

עתה נשים לב כי

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}\left[Y^2\right] - (\mathbb{E}[Y])^2 = \left(\lambda^2 + \lambda\right) - (\lambda)^2 = \lambda$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(S_n=k\right)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$

הוכחה:

נשים לב כי

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S_n=k\right)&=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\\&=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\&=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\&=\frac{1}{k!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\cdot\lambda^k\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\&=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\cdot e^{(n-k)\cdot\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}\\&\overset{\ln(1+x)\overset{x\approx 0}{\approx}x}{\sim}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\cdot e^{(n-k)\cdot\left(-\frac{\lambda}{n}\right)}\\&=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\cdot e^{-\lambda+\frac{\lambda k}{n}}\end{aligned}$$

עתה נשים לב כי בגלל ש־ k קבוע יתקיים כי $1=\left(\frac{n}{n}\right)^k\le\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\le\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^k$ וגם $\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^k\to 1$ אז מסנדוויץ' נסיק כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}=1$$

עתה גם נסיק כי

$$\lim_{n\to\infty}e^{-\lambda+\frac{\lambda k}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{-\lambda}+e^{\frac{\lambda k}{n}}=e^{-\lambda}+0=e^{-\lambda}$$

נשתמש בכל החישוב שלנו ונקבל כי

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(S_n=k\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\cdot e^{-\lambda+\frac{\lambda k}{n}}\\&=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\cdot e^{-\lambda+\frac{\lambda k}{n}}\\&=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\right]\cdot\left[\lim_{n\to\infty}e^{-\lambda+\frac{\lambda k}{n}}\right]\\&=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1\cdot e^{-\lambda}=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ג.☺

.4 **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}\left[X\right]|\ge\varepsilon_n\cdot\mathbb{E}\left[X\right]\right)=0$

הוכחה:

נסמן X_T משתנה אינדיקטור שמקבל את הערך 1 אם T מכילה את K_4 ו־ 0 אחרת.

נשים לב כי $X=\sum_{T\subseteq V\wedge|T|=4}X_T$.

תחילה נשים לב כי $\mathbb{E}\left[X_T\right]=p^{\binom{4}{2}}=p^6$ כי X_T משתנה אינדיקטור שמקבל את הערך 1 רק אם כל הצלעות של K_4 מופיעות

ב־ T.

עתה נשים לב כי

$$\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}\left[\sum_{T\subseteq V\wedge|T|=4}X_T\right]=\sum_{T\subseteq V\wedge|T|=4}\mathbb{E}[X_T]=\binom{n}{4}\cdot\mathbb{E}[X_T]=\binom{n}{4}\cdot p^6$$

בהרצאה ראינו כי

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X]&=\binom{n}{4}\cdot\left(p^6-p^{12}\right)+\binom{n}{4}\cdot\left[\binom{4}{2}\cdot\binom{n-4}{2}\cdot\left(p^{11}-p^{12}\right)+\binom{4}{1}\cdot\binom{n-4}{1}\cdot\left(p^9-p^{12}\right)\right]\\&\leq\mathbb{E}[X]+O\left(n^6p^{11}\right)+O\left(n^5p^9\right)\end{aligned}$$

נשים לב כי $\mathbb{E}[X]=O\left(n^4p^6\right)$ ולכן נקבל כי

$$\mathrm{Var}[X]\leq\mathbb{E}[X]+O\left(n^6p^{11}\right)+O\left(n^5p^9\right)\leq\mathbb{E}[X]\cdot\left(1+O\left(n^2p^5\right)+O\left(np^3\right)\right)$$

עתה נשים לב כי $\varepsilon_n\cdot\mathbb{E}[X]\geq 0$ ולכן נוכל לעלות בריבוע,

נבחר $\varepsilon_n=\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}p^{\frac{3}{8}}}$, נשים לב שבגלל $p=\omega\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)$ מתקיים $n^{\frac{1}{4}}p^{\frac{3}{8}}\overset{n\to\infty}{\to}\infty$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$, נשים לב כי

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}[X]|\geq\varepsilon_n\cdot\mathbb{E}[X]\right)&=\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}[X]|^2\geq\varepsilon_n^2\cdot\mathbb{E}^2[X]\right)\\&\overset{\text{markov's inequality}}{\leq}\frac{\mathbb{E}\left[|X-\mathbb{E}[X]|^2\right]}{\varepsilon_n^2\cdot\mathbb{E}^2[X]}=\frac{\mathrm{Var}[X]}{\varepsilon_n^2\cdot\mathbb{E}^2[X]}\\&\leq\frac{\mathbb{E}[X]\cdot\left(1+O\left(n^2p^5\right)+O\left(np^3\right)\right)}{\varepsilon_n^2\cdot\mathbb{E}^2[X]}=\frac{\left(1+O\left(n^2p^5\right)+O\left(np^3\right)\right)}{\varepsilon_n^2\cdot\mathbb{E}[X]}\\&=\frac{\left(1+O\left(n^2p^5\right)+O\left(np^3\right)\right)}{\varepsilon_n^2\cdot O\left(n^4p^6\right)}=\frac{\left(1+O\left(n^2p^5\right)+O\left(np^3\right)\right)}{O\left(n^{-\frac{1}{2}}p^{-\frac{3}{4}}\right)\cdot O\left(n^4p^6\right)}=\frac{\left(1+O\left(n^2p^5\right)+O\left(np^3\right)\right)}{O\left(n^{3.5}p^{5.25}\right)}\end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^{3.5}p^{5.25}}\overset{n\to\infty}{\to}0\iff n^{3.5}p^{5.25}\overset{n\to\infty}{\to}\infty\iff p^{5.25}=\omega\left(n^{-3.5}\right)\iff p=\omega\left(n^{-\frac{3.5}{5.25}}\right)=\omega\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)\\&\frac{n^2p^5}{n^{3.5}p^{5.25}}\overset{n\to\infty}{\to}0\iff n^{1.5}p^{0.25}\overset{n\to\infty}{\to}\infty\iff p^{0.25}=\omega\left(n^{-1.5}\right)\iff p=\omega\left(n^{-6}\right)\\&\frac{np^3}{n^{3.5}p^{5.25}}\overset{n\to\infty}{\to}0\iff n^{2.5}p^{2.25}\overset{n\to\infty}{\to}\infty\iff p^{2.25}=\omega\left(n^{-2.5}\right)\iff p=\omega\left(n^{-\frac{10}{9}}\right)\end{aligned}$$

נשים לב שכל אגפי ימין מתקיימים ולכן כל אחד מהביטויים שואף ל־0. לכן $\frac{\left(1+O\left(n^2p^5\right)+O\left(np^3\right)\right)}{O\left(n^{3.5}p^{5.25}\right)}\overset{n\to\infty}{\to}0$,

לכן נקבל כי

$$0\leq\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}[X]|\geq\varepsilon_n\cdot\mathbb{E}[X]\right)\leq\frac{\left(1+O\left(n^2p^5\right)+O\left(np^3\right)\right)}{O\left(n^{3.5}p^{5.25}\right)}\overset{n\to\infty}{\to}0$$

ולכן ממשפט סנדוויץ', נקבל כי $\boxed{\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}[X]|\geq\varepsilon_n\cdot\mathbb{E}[X]\right)=0}$, כנדרש

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(G\sim G(n,p)\text{ for every }\{i,j\}\text{ edge in G there exists a triangle}\right)=1$ כאשר $p=\alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}$

הוכחה:

נגדיר X להיות משתנה מקרי שסופר כמה צלעות יש שאין להם משולשים,
נגדיר $X_{i,j}$ להיות משתנה אינדיקטור של האם v_i, v_j צלע וגם אין משולש משולש. נשים לב כי

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_{i,j}\right] = \mathbb{P}\left(X_{i,j}=1\right) &= \underbrace{p}_{\{v_i,v_j\} \text{ is an edge in the graph}} \cdot \underbrace{\left(1-p^2\right)^{|[n]\setminus\{i,j\}|}}_{\forall k\in[n]\setminus\{i,j\}\to\{v_j,v_k\}\vee\{v_i,v_k\} \text{ is not an edge in the graph}} \\ &= p\cdot\left(1-p^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

עתה נשים לב כי עתה נשים לב כי $X=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}X_{i,j}$ ולכן , נבחר $\alpha=\sqrt{2}$ ונשים לב כי

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}X_{i,j}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\mathbb{E}\left[X_{i,j}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}p\cdot\left(1-p^2\right)^{n-2} = \binom{n}{2}\cdot p\cdot\left(1-p^2\right)^{n-2} \\ &\leq n^2\cdot p\cdot\left(1-p^2\right)^{n-2} \overset{1+x\leq e^x}{\leq} n^2\cdot p\cdot\left[e^{-p^2}\right]^{n-2} = n^2\cdot p\cdot\left[e^{-\alpha^2\frac{\log(n)}{n}}\right]^{n-2} = \\ &= n^2\cdot p\cdot e^{-\alpha^2\frac{\log(n)}{n}\cdot(n-2)} = n^2\cdot\alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\cdot e^{-\alpha^2\frac{\log(n)}{n}\cdot(n-2)} = e^{\log\left(n^2\right)}\cdot\alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\cdot e^{-\alpha^2\frac{\log(n)}{n}\cdot(n-2)} \\ &= \alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\cdot e^{2\cdot\log(n)-\alpha^2\frac{\log(n)}{n}\cdot(n-2)} = \alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\cdot e^{2\cdot\log(n)-\alpha^2\cdot2\log(n)+\alpha^2\frac{4}{n}\cdot\log(n)} \\ &= \alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\cdot e^{2\cdot\log(n)-\alpha^2\cdot2\log(n)+\alpha^2\frac{4}{n}\cdot\log(n)} = \alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\cdot e^{\log(n)\left[2-\alpha^2+\alpha^2\frac{4}{n}\right]} \\ &\overset{n\geq2}{\leq} \alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\cdot e^{\log(n)\left[2-\alpha^2+\alpha^2\frac{4}{2}\right]} = \alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\cdot e^{\log(n)\left[4-\alpha^2\right]} = \alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\cdot e^{\log(n)[4-4]} \\ &= \alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\cdot e^0 = \alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו שלכל $n\geq2$ מתקיים $\mathbb{E}\left[X\right]\leq\alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}$,
ונשים לב כי $\lim_{n\to\infty}\alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}=0$ וגם X משתנה אי שלילי ולכן לכל $n\geq2$ מתקיים

$$0\leq\mathbb{E}\left[X\right]\leq\alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}$$

ולכן מסנדוויץ' נקבל כי $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[X\right]=0$, ולכן

$$0\leq\mathbb{P}\left(X>0\right)\overset{\text{proved in the last ex}}{\leq}\mathbb{E}\left[X\right]$$

ולכן מסנדוויץ' נקבל כי $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X>0\right)=0$, כלומר נקבל כי

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(G\sim G\left(n,p\right)\ \text{for every } \{i,j\} \text{ edge in G there exists a triangle}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X=0\right) = \lim_{n\to\infty}1-\mathbb{P}\left(X>0\right) = 1-0 = 1\end{aligned}$$

כלומר הראנו כי $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(G\sim G\left(n,p\right)\ \text{for every } \{i,j\} \text{ edge in G there exists a triangle}\right)=1$, כנדרש

מ.ש.ל.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(G\sim G\left(n,p\right)\ \text{contains } H\right)=0$ כאשר $p=o\left(n^{-\frac{1}{d}}\right)$
הוכחה:

נסמן ב־ X את מספר המופעים של H ב־ G.
נסמן ב־ X_S משתנה אינדיקטור שמקבל 1 אם $|S|=v$ וגם הגרף שנוצר על ידי הקודקודים של S הוא H.
ונקבל כי $X=\sum_{S\subseteq V,|S|=v}X_S$, נשים לב כי ההסתברות להופעת הגרף H ב־ X_S עם מיפוי ספציפי לצאת הוא בדיוק $p^e\cdot(1-p)^{\binom{v}{2}-e}$, לכן

$$\mathbb{E}\left[X_S\right]=\mathbb{P}\left(X_S=1\right)\leq \#\text{number of mappings}\cdot p^e\cdot(1-p)^{\binom{v}{2}-e}\leq v!\cdot p^e\cdot(1-p)^{\binom{v}{2}-e}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\right]&=\mathbb{E}\left[\sum_{S\subseteq V,|S|=v}X_S\right]=\sum_{S\subseteq V,|S|=v}\mathbb{E}\left[X_S\right]\leq\sum_{S\subseteq V,|S|=v}v!p^e\cdot(1-p)^{\binom{v}{2}-e}\\&=\binom{n}{v}\cdot v!\cdot p^e\cdot(1-p)^{\binom{v}{2}-e}\leq v!\cdot n^v\cdot p^e\cdot(1-p)^{\binom{v}{2}-e}\\&\overset{1-p\leq 1\wedge v^2-e\geq 0}{\leq} v!\cdot n^v\cdot p^e\cdot 1^{v^2-e}=v!\cdot n^v\cdot p^e=v!\cdot n^{\frac{v}{e}\cdot e}\cdot p^e\\&=v!\cdot\left(n^{\frac{v}{e}}\cdot p\right)^e=v!\cdot\left(n^{\frac{1}{d}}\cdot p\right)^e\end{aligned}$$

נתון כי $p_n=o\left(n^{-\frac{1}{d}}\right)$ ולכן $\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{d}}\cdot p_n=0$ ולכן $\lim_{n\to\infty}v!\cdot\left(n^{\frac{1}{d}}\cdot p_n\right)^e=0$,
נשים לב ש־ X אי שלילי ולכן נקבל כי

$$0\leq\mathbb{E}\left[X\right]\leq v!\cdot\left(n^{\frac{1}{d}}\cdot p\right)^e\overset{n\to\infty}{\to}0$$

לכן מסנדוויץ' מתקיים $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[X\right]=0$,
וראינו בתרגיל הראשון כי מתקיים $0\leq\mathbb{P}\left(X>0\right)\leq\mathbb{E}\left[X\right]$,
לכן מסנדוויץ' מתקיים $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X>0\right)=0$, כלומר

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(G\sim G\left(n,p\right)\ \text{contains}\ H\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X>0\right)=0$$

כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** דוגמא נגדית ש־ לא מתקיים $\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(G\sim G\left(n,p\right)\ \text{contains}\ H\right)=1$ כאשר $p=\omega\left(n^{-\frac{1}{d}}\right)$
הוכחה:
נגדיר $V=\{v_1,\ldots,v_5\}$, $E=\{\{v_i,v_j\}:i,j\in[4]\}$ ונגדיר $H=\langle V,E\rangle$. (כלומר H היא K_4 עם קודקוד שלא מחובר לאחרים).
נבחר $p_n=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. נשים לב ש־ $d=\frac{e}{v}=\frac{4}{5}$ וגם $p_n=\omega\left(n^{-\frac{5}{4}}\right)$ כי $\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{5}{4}}=0$.
עתה נשים לב כי

$$\mathbb{P}\left(G\sim G\left(n,p_n=1\right)\ \text{contains}\ H\right)\overset{\text{every edge exists with probability 1}}{=}\mathbb{P}\left(K_n\ \text{contains}\ H\right)$$

יהי $n\geq 5$, נניח בשלילה כי K_n contains H,
כלומר $\exists i_1,\ldots,i_5:[n]$ ו־ $\exists\phi:\{i_1,\ldots,i_5\}\to\{v_1,\ldots,v_5\}$ כך ש־ $\{i_k,i_j\}\in G_E$ אם"ם $\{\phi\left(i_k\right),\phi\left(i_j\right)\}\in H_E$ לכל $j,k\in[5]$.
נניח בלי הגבלת הכלליות כי $\phi\left(i_5\right)=v_5$. עתה נשים לב כי $\{i_1,i_5\}\in G_E$ כי G הוא K_n שכל הקודקודים מחוברים אחד לשני.
לכן מההנחה מתקיים כי $\{\phi\left(i_1\right),\phi\left(i_5\right)\}=\{\phi\left(i_1\right),v_5\}\in H_E$ בסתירה לכך שב־ H אין אף צלע שמשתמשת בקודקוד v_5.
כלומר קיבלנו כי לכל $n\geq 5$ מתקיים כי K_n doesn't contain H ולכן לכל $n\geq 5$

$$\mathbb{P}\left(K_n\ \text{contains}\ H\right)=1-\mathbb{P}\left(K_n\ \text{doesn't contain}\ H\right)=1-1=0$$

ולכן נקבל כי $\boxed{\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(K_n\ \text{contains}\ H\right)=0}$ ובפרט $\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(K_n\ \text{contains}\ H\right)=0<1$, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

7. **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(G\sim G\left(n,p_1\right)\text{ satisfies }\mathcal{P}\right)\leq\mathbb{P}\left(G_2\sim G\left(n,p_2\right)\text{ satisfies }\mathcal{P}\right)$
הוכחה:
נחלק ל2 מקרים:

(א) אם $p_1=0$: אז $\mathbb{P}\left(G\sim G\left(n,p_1\right)\text{ satisfies }\mathcal{P}\right)=\mathbb{P}\left(\text{empty graph satisfies }\mathcal{P}\right)$,

i. אם $\mathbb{P}\left(\text{empty graph satisfies }\mathcal{P}\right)=0$ אז

$$\mathbb{P}\left(G\sim G\left(n,p_1\right)\text{ satisfies }\mathcal{P}\right)=0\leq\mathbb{P}\left(G_2\sim G\left(n,p_2\right)\text{ satisfies }\mathcal{P}\right)$$

וסיימנו.

ii. אחרת $\mathbb{P}\left(\text{empty graph satisfies }\mathcal{P}\right)=1$, מהיות $\mathcal{P}$ תכונה מונוטונית, נובע שכל גרף מקיים את הדרישה ולכן בפרט $\mathbb{P}\left(G_2\sim G\left(n,p_2\right)\text{ satisfies }\mathcal{P}\right)=1$ ולכן

$$\mathbb{P}\left(G\sim G\left(n,p_1\right)\text{ satisfies }\mathcal{P}\right)=1\leq\mathbb{P}\left(G_2\sim G\left(n,p_2\right)\text{ satisfies }\mathcal{P}\right)$$

כנדרש.

(ב) אחרת $p_1\neq0$, נסמן $\boxed{q=\dfrac{1-p_2}{p_1}}$, תחילה נשים לב כי

$$\mathbb{P}\left(G_1\sim G\left(n,p_1\right)\text{ satisfies }\mathcal{P}\right)\leq\mathbb{P}\left(G_1\sim G\left(n,p_1\right),G_2\sim G\left(n,q\right),G=G_1\cup G_2,\text{then }G\text{ satisfies }\mathcal{P}\right)$$

זאת מפני שאם G_1 מספק את $\mathcal{P}$ אז $G\supseteq G_1$ מספק את $\mathcal{P}$ לכל G_2 ולכן ההסתברות הראשונה היא קטנה שווה מההסתברות השנייה.
עתה נשים לב שמההגדרה, יהיו u,v קודקודים ב־ G, נסתכל על הצלע $e=\{u,v\}$.
לפי ההגדרה

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(e\in G\right)&=\mathbb{P}\left(e\in G_1\vee e\in G_2\right)=1-\mathbb{P}\left(e\notin G_1\wedge e\notin G_2\right)\\&\overset{\text{disjoint events}}{=}1-\mathbb{P}\left(e\notin G_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(e\notin G_2\right)=1-p_1\cdot q\\&=1-p_1\cdot\frac{1-p_2}{p_1}=1-\left(1-p_2\right)=p_2\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\mathbb{P}\left(e\in G\right)=p_2$ לכל צלע $e\in G$ ולכן מההגדרה של $G\left(n,p\right)$ מתקיים כי $G\sim G\left(n,p_2\right)$, כלומר

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(G_1\sim G\left(n,p_1\right)\text{ satisfies }\mathcal{P}\right)&\leq\mathbb{P}\left(G_1\sim G\left(n,p_1\right),G_2\sim G\left(n,q\right),G=G_1\cup G_2,\text{then }G\text{ satisfies }\mathcal{P}\right)\\&=\mathbb{P}\left(G_1\sim G\left(n,p_2\right)\text{ satisfies }\mathcal{P}\right)\end{aligned}$$

וקיבלנו כי $\boxed{\mathbb{P}\left(G_1\sim G\left(n,p_1\right)\text{ satisfies }\mathcal{P}\right)\leq\mathbb{P}\left(G_1\sim G\left(n,p_2\right)\text{ satisfies }\mathcal{P}\right)}$, כנדרש.

מ.ש.ל.☺