פתרון תרגיל מספר 11 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

19 ביוני 2020

שאלה 3

צ"ל: $set - cover \in \text{NP-COMPLETE}$

הוכחה:

תחילה נראה ש־ $set - cover \in \text{NP}$ עם מוודא פולינומי שהן הקבוצות שמחסות.

נקבל $\langle \{S_1, \ldots, S_n\}, U, k\rangle \# I$ כאשר $I \subseteq [m]$ תתי קבוצות של V.

מה שהמכונה הדטרמניטית תעשה זה:

1. נבדוק ש־ $|I| = k$, ואם לא נדחה
2. נבדוק ש־ $I \subseteq [m]$, ואם לא נדחה
3. נבדוק ש־ $\bigcup_{i \in I} S_i = U$, ואם לא נדחה
4. נקבל

נשים לב כי $|I| \leq |U|$ אחרת נדחה בשלב הראשון בזמן פולינומי ב־ U וגם k הוא לכל היותר $|S|$ אחרת נקבל מייד, לכן נסתכל על החסם מלעיל שצוין פה.

נשים לב שהשלב הראשון לוקח לכל היותר $O(|S|) = O(k)$, השלב השני $O(|S| \cdot k) = O\left(|S|^2\right)$, השלב השלישי לוקח $O\left(|U|^2 \cdot |S|\right)$ והרביעי לוקח $O(1)$, ולכן זמן הריצה של המכונה $O\left(|U|^2 \cdot |S|\right)$.

כלומר הראנו מכונה דטרמניסטית שהיא מוודא פולינומי לשפה L, ולכן $\boxed{set - cover \in \text{NP}}$

עתה נראה ש־ $set - cover \in \text{NP} - HARD$,

נגדיר $f(\langle\langle V = \{v_1, \ldots, v_n\}, E\rangle, k\rangle) = \langle \{S_1, \ldots, S_n\}, E, k\rangle$ כאשר $S_i = \{\{u, v_i\} \mid u \in U \wedge \{u, v_i\} \in E\}$ לכל $i \in [n]$

נשים לב ש־ f חשיבה בזמן פולינומי כי לחשב את S_i לוקח לכל היותר $O\left(|V|^2 \cdot |E|\right)$ זמן ולכן חישוב של הרדוקציה לוקח

וזה פולינומי וגם מתקיים $O\left(|V|^3\cdot|E|\right)$

$$\begin{aligned}
&\langle\langle V=\{v_1,\dots,v_n\},E\rangle,k\rangle\in vertex-cover\\
&\iff \exists V'\subseteq V \text{ s.t. } [\forall\{u,v\}\in E\rightarrow(u\in V'\vee v\in V')]\wedge|V'|=k\\
&\iff \exists I\subseteq[|V|] \text{ s.t. } [\forall\{u,v\}\in E\rightarrow(u\in\{v_i\mid i\in I\}\vee v\in\{v_i\mid i\in I\})]\wedge|I|=k\\
&\iff \exists I\subseteq[|V|] \text{ s.t. } [\forall\{u,v\}\in E\rightarrow[\exists j\in I \text{ s.t. } (v=v_j\vee u=u_j)]]\wedge|I|=k\\
&\iff \exists I\subseteq[|V|] \text{ s.t. } [\forall\{u,v\}\in E\rightarrow[\exists j\in I \text{ s.t. } (\{u,v\}\in S_j\vee\{v,u\}\in S_j)]]\wedge|I|=k\\
&\iff \exists I\subseteq[|V|] \text{ s.t. } [\forall\{u,v\}\in E\rightarrow[\exists j\in I \text{ s.t. } \{u,v\}\in S_j]]\wedge|I|=k\\
&\iff \exists I\subseteq[|V|] \text{ s.t. } \left[\forall\{u,v\}\in E\rightarrow\{u,v\}\in\bigcup_{i\in I}S_i\right]\wedge|I|=k\\
&\overset{\bigcup_{i\in I}S_i\subseteq E}{\iff} \exists I\subseteq[|V|] \text{ s.t. } \left[E=\bigcup_{i\in I}S_i\right]\wedge|I|=k\\
&\overset{U=E,|S|=|V|}{\iff} \exists I\subseteq[|S|] \text{ s.t. } \left[U=\bigcup_{i\in I}S_i\right]\wedge|I|=k\\
&\iff \langle\{S_1,\dots,S_n\},E,k\rangle\in set-cover \iff f(\langle\langle V=\{v_1,\dots,v_n\},E\rangle,k\rangle)\in set-cover
\end{aligned}$$

כלומר הראנו שקיימת פונקציה f חשיבה בזמן פולינומי המקיימת

$$\langle V,E\rangle\in vertex-cover \iff f(\langle\langle V=\{v_1,\dots,v_n\},E\rangle,k\rangle)\in set-cover$$

כלומר $vertex-cover\leq_p set-cover$ ובתרגול הוכחנו ש־ $vertex-cove\in \text{NP-COMPLETE}$ ולכן מתקיים כי $vertex-cove\in \text{NP}-HARD$ ולכן מטרנזיטיביות נקבל ש־ $\boxed{set-cover\in \text{NP}-HARD}$.
כלומר הראנו ש־ $set-cover\in \text{NP}$ וגם כי $set-cover\in \text{NP}-HARD$ ולכן $\boxed{set-cover\in \text{NP-COMPLETE}}$, כנדרש

מ.ש.ל.☺