

הסתברות 1 - תרגיל 8

1. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- (א) יהא $(\{0, 1\}^n, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות אחיד, כאשר $n \in \mathbb{N}$. יהא X המ"מ שסופר את כמות הפעמים שקיבלנו את הרצף 01. אז X מתפלג בינומית עם פרמטרים $\text{bin}(n-1, \frac{1}{4})$.
 (ב) קיים משתנה מקרי X שמקבל ערכים ב- \mathbb{N} , בעל תוחלת סופית, כך שמתקיים:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, P(X \geq n) = \frac{E(X)}{n}$$

(ג) יהא (Ω, \mathcal{F}, P) מ"ה ויהיו $A, B \in \mathcal{F}$ מאורעות מהסתברות חיובית. אז $\text{COV}(1_A, 1_B) > 0$ אם ורק אם $P(A|B) > P(A)$.

2. במשחק מטילים 3 קוביות הוגנות. השחקן מהמר על מספר בין 1 ל-6. הוא מרוויח את ההימור שלו כפול מספר הקוביות שמראות את המספר שבוחר (כך שאם אף קוביה לא מראה את המספר, הוא מפסיד את סכום ההימור, ואם שתיים מראות אז הוא מקבל פי שניים ממה שהימר, וכד'). חסום מלעיל את ההסתברות שהשחקן יזכה בפי שתיים ממה שהימר.

3. מגלגלים קוביה הוגנת n פעמים. יהי X מס' הפעמים שיצא 2 ו- Y מס' הפעמים שיצא 3. חשבו את השונות המשותפת של X ו- Y .

4. בחדר נמצאים 30 תלמידים. יהא X המ"מ שמחזיר את כמות התלמידים שיש להם יום הולדת באותו יום.

(א) חשבו את $E(X)$.

(ב) חשבו את $V(X)$.

(ג) מצאו חסם לא טריוויאלי על ההסתברות שיש יותר מ- $11 \cdot E(X)$ זוגות של תלמידים עם אותו יום הולדת.

5. מטילים מטבע בעל הסתברות q ל- H , עד שיוצא H $k \geq 1$ פעמים. יהי X מ"מ המייצג את מספר ההטלות שנדרש. מצאו טווח שבו יימצא X בסבירות של 90%.