פתרון תרגיל מספר 9 - חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

6 ביוני 2020

שאלה 2

סעיף 1

צ"ל: $\text{coNP} = \text{NP}$

הוכחה:

$$L \in \text{NP} \overset{P=\text{NP}}{\Rightarrow} L \in P \Rightarrow \overline{L} \in P \overset{P=\text{NP}}{\Rightarrow} \overline{L} \in \text{NP} \overset{\text{by definition}}{\Rightarrow} L \in \text{coNP}$$

ולכן $\text{NP} \subseteq \text{coNP}$ ואז מהסעיף הבא נקבל כי $\boxed{\text{coNP} = \text{NP}}$

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2

צ"ל: $\text{coNP} = \text{NP}$

הוכחה:

$$L \in \text{coNP} \Rightarrow \overline{L} \in \text{NP} \overset{\text{NP} \subseteq \text{coNP}}{\Rightarrow} \overline{L} \in \text{coNP} \overset{\text{by definition}}{\Rightarrow} \overline{\overline{L}} \in \text{NP} \overset{\overline{\overline{L}}=L}{\Rightarrow} L \in \text{NP}$$

כלומר קיבלנו כי $L \in \text{coNP} \Rightarrow L \in \text{NP}$ ולכן $\text{coNP} \subseteq \text{NP}$
וגם נתון $\text{NP} \subseteq \text{coNP}$ ולכן נקבל $\boxed{\text{coNP} = \text{NP}}$

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3

צ"ל: $\text{coNP} \subseteq \text{EXPTIME}$

הוכחה:

תהי $L \in \text{coNP}$ אזי $\overline{L} \in \text{NP}$, כלומר קיימת מ"ט N לא דטרמניסטית כך ש- $L(N) = \overline{L}$ וגם N רצה בזמן פולינומי.
מהיות N רצה בזמן פולינומי קיים פולינום $t(n)$ כך שזמן הריצה של N חסום על ידי $O(t(n))$.
ראינו בהרצאה שאפשר להמיר מ"ט לא דטרמינסטי N למ"ט דטרמיניסטי $\mathcal{M}$ שזמן הריצה חסום על ידי $2^{O(t(n))}$.
נבנה M דטרמניסטית באופן הבא:

1. נקבל קלט x
2. נריץ את $\mathcal{M}$ על x
3. נענה הפוך מ- $\mathcal{M}$ על x

נשים לב ש- M מכריעה כי $\mathcal{M}$ מכריעה וגם מתקיים

$$x\in L\iff x\notin\overline{L}\iff x\notin L\left(\mathcal{M}\right)\iff x\in L\left(M\right)$$

כלומר קיבלנו כי $L=L\left(M\right)$.
נסמן $|x|=n$,
עתה נשים לב ששלב 1 לוקח $O\left(1\right)$, שלב 2 לוקח $2^{O(t(n))}$ ושלב 3 לוקח $O\left(1\right)$ ולכן זמן הריצה של M הוא

$$O\left(1\right)+2^{O(t(n))}+O\left(1\right)=2^{O(t(n))}$$

ולכן זמן הריצה של M הוא $2^{O(t(n))}$ כאשר $t\left(n\right)$ פולינום.
כלומר הראנו שקיימת M דטרמניסטית שמכריעה את L ורצה בזמן $2^{O(t(n))}$ כאשר $t\left(n\right)$ פולינום. ולכן $L\in\text{EXPTIME}$ מההגדרה.
כלומר הראנו כי $L\in\text{coNP}\Rightarrow L\in\text{EXPTIME}$ ולכן $\text{coNP}\subseteq\text{EXPTIME}$, כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

סעיף 4
צ"ל: $\text{NEXPTIME}=\text{EXPTIME}$
הוכחה:
תהי $L\in\text{NEXPTIME}$ כלומר קיימת מ"ט N לא דטרמניסטית כך ש- $L\left(N\right)=\overline{L}$ וגם N רצה בזמן אקפוננציאלי.
מהיות N רצה בזמן פולינומי קיים $k\in\mathbb{N}$ כך שזמן הריצה של N חסום על ידי $2^{O\left(n^k\right)}$.
נבנה N' לא דטרמניסטית באופן הבא:

1. נקבל קלט x
2. נבדוק האם $x=w\cdot1^{2^{|w|^k}}$, אם לא נדחה (נבדוק האם כמות ה1 היא בדיוק 2^{n^k} פעמים)
3. נריץ את N על w ונענה כמוהו

נגדיר $L'=\left\{w\cdot1^{2^{|w|^k}}\mid w\in L\right\}$
נשים לב ש- N' מכריעה כי N מכריעה (עוצרת בכל קלט שלה) וגם מתקיים

$$x\in L'\iff x=w\cdot1^{2^{|w|k}}\wedge x\in L\iff x=w\cdot1^{2^{|w|^k}}\wedge x\in L\left(N\right)\iff x\in L\left(N'\right)$$

כלומר קיבלנו כי $L'=L\left(N'\right)$
נסמן $|w|=n$,
עתה נשים לב ששלב 1 לוקח $O\left(1\right)$, שלב 2 לוקח $O\left(\left|w\cdot1^{2^{n^k}}\right|\right)=O\left(n+2^{n^k}\right)$ ושלב 3 לוקח $O\left(2^{n^k}\right)$ ולכן זמן הריצה של N' הוא

$$O\left(1\right)+O\left(n+2^{n^k}\right)+O\left(2^{n^k}\right)=O\left(n+2^{n^k}\right)=O\left(\left|w\cdot1^{2^{|w|^k}}\right|\right)$$

ולכן זמן הריצה של M הוא פולינומי בקלט!
כלומר הראנו שקיימת N' דטרמינסטית שמכריעה את L' ורצה בזמן פולינומי ולכן $L'\in\text{NP}$.
עתה אנחנו יודעים כי $P=\text{NP}$ (נתון) ולכן $L'\in P$
לכן קיימת מכונה M' שמכריעה את L' ורצה בזמן פולינומי בקלט.
כלומר קיים פולינום $t\left(n\right)$ כך שזמן הריצה של M' חסום על $O\left(t\left(n\right)\right)$
נבנה M דטרמניסטית באופן הבא:

1. נקבל קלט x

2. נכתוב על הסרט $x\cdot 1^{2^{|x|^k}}$

3. נריץ את M' על הקלט $x\cdot 1^{2^{|x|^k}}$ ונענה כמוהו

נשים לב כי

$$x\in L\iff x\cdot 1^{2^{|x|^k}}\in L'\iff x\cdot 1^{2^{|x|^k}}\in L\left(M'\right)\iff x\in L\left(M\right)$$

כלומר קיבלנו כי $L=L\left(M\right)$,
נסמן $|x|=n$,
נשים לב ששלב 1 לוקח $O\left(1\right)$, שלב 2 לוקח $O\left(n+2^{n^k}\right)$, שלב 3 לוקח $O\left(t\left(n+2^{|x|^k}\right)\right)$ ולכן זמן הריצה של M הוא

$$\begin{aligned} O\left(1\right)+O\left(n+2^{n^k}\right)+O\left(t\left(n+2^{n^k}\right)\right)=O\left(t\left(n+2^{n^k}\right)\right)&=O\left(2^{\log\left(t\left(n+2^{n^k}\right)\right)}\right)\\ &\le O\left(2^{n^k\cdot\log(t(n+2))}\right)\le O\left(2^{n^{k+1}}\right)\end{aligned}$$

כלומר M רצה בזמן אקפוננציאלי.
כלומר הראנו שקיימת M דטרמניסטית שמכריעה את L ורצה בזמן $2^{n^{k+1}}$. ולכן $L\in\mathrm{EXPTIME}$ מההגדרה.
כלומר הראנו כי $L\in\mathrm{NEXPTIME}\Rightarrow L\in\mathrm{EXPTIME}$ ולכן $\mathrm{NEXPTIME}\subseteq\mathrm{EXPTIME}$, כנדרש
עתה נשים לב כי $L\in\mathrm{EXPTIME}$ אז קיים מ"ט M דטרמינסטי שמכריע את L בזמן אקפוננציאלי וM הוא בפרט מ"ט לא דטרמינסטי ולכן L כריע בזמן אקפוננציאלי עם מכונה לא דטרמניסטית ולכן $L\in\mathrm{NEXPTIME}$.
כלומר נקבל כי $\mathrm{EXPTIME}\subseteq\mathrm{NEXPTIME}$, ולכן נקבל כי $\boxed{\mathrm{EXPTIME}=\mathrm{NEXPTIME}}$

מ.ש.ל.ד.☺