פתרון תרגיל מספר 3 ־ דאסט

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

3 באפריל 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** הסתברות לקבל H במטבע הראשון וT בשני
הוכחה:
ההסתברות לקבל H במטבע הראשון היא p,
ההסתברות לקבל T במטבע השני היא $1-q$ (כי q הסתברות לקבל H וזה ההסתברות המשלימה ל1),
לכן הסתברות לקבל H במטבע הראשון וT בשני היא $p\cdot(1-q)$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** הסתברות לקבל H בפעם הראשונה בn
הוכחה:
ההסתברות לקבל T במטבע היא $1-p$ (כי p הסתברות לקבל H וזה ההסתברות המשלימה ל1),
ההסתברות לקבל H בפעם הn פעם הראשונה היא בעצם לקבל את הרצף $\underbrace{TT\dots T}_{\text{n-1 times}}H$,
לכן הסתברות לקבל H בפעם הראשונה בn היא $(1-p)^{n-1}\cdot p$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** הסתברות לקבל T בk הראשונים וH ב$n-k$ האחרונים
הוכחה:
ההסתברות לקבל T במטבע היא $1-p$ (כי p הסתברות לקבל H וזה ההסתברות המשלימה ל1),
ההסתברות לקבל H בפעם הn פעם הראשונה היא בעצם לקבל את הרצף $\underbrace{TT\dots T}_{\text{k times}}\underbrace{HH\dots H}_{\text{n-k times}}$,
לכן סתברות לקבל T בk הראשונים וH ב$n-k$ האחרונים היא $(1-p)^{k}\cdot p^{n-k}$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$
הוכחה:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}((A\setminus B)\cup(A\cap B)) = \mathbb{P}(A\setminus B)+\mathbb{P}(A\cap B)\\
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((B\setminus A)\cup(A\cap B)) = \mathbb{P}(B\setminus A)+\mathbb{P}(A\cap B)\\
\mathbb{P}(A\cup B) &= \mathbb{P}((A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)) = \mathbb{P}(A\setminus B)+\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(B\setminus A)\\
&= (\mathbb{P}(A\setminus B)+\mathbb{P}(A\cap B))+(\mathbb{P}(B\setminus A)+\mathbb{P}(A\cap B))-\mathbb{P}(A\cap B)\\
&=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\\
&\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)}
\end{aligned}
$$

נתון כי $\mathbb{P}(A\cap B)=0$, נציב ונקבל $\boxed{\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)}$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** הסתברות לקבל T בk, H ב$n-k$ בלי חשיבות לסדר

הוכחה:

ההסתברות לקבל T במטבע היא $1-p$ (כי p הסתברות לקבל H וזה ההסתברות המשלימה ל1),
תחילה נבחר את המיקומים של T ברצף, לכך יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות,
עתה, לאחר שבחרנו את המיקומים של T,H הבעיה שקולה להסתברות שהk הראשונים הם T וה$n-k$ האחרונים הם H (כמו שחישבנו בסעיף ג') והסתברות זאת היא $(1-p)^k\cdot p^{n-k}$
לכן ההסתברות לקבל T בk, H ב$n-k$ בלי חשיבות לסדר היא $\binom{n}{k}\cdot(1-p)^k\cdot p^{n-k}$

מ.ש.ל.ה.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{E}(X_A)=\mathbb{P}(A)$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_A) &\overset{\text{def}}{=} \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)\cdot X_A(\omega)=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)\cdot X_A(\omega)+\sum_{\omega\in\Omega\setminus A}\mathbb{P}(\omega)\cdot X_A(\omega)\\ &=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)\cdot 1+\sum_{\omega\in\Omega\setminus A}\mathbb{P}(\omega)\cdot 0=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)\overset{\text{def}}{=}\mathbb{P}(A)\\ &\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}(X_A)=\mathbb{P}(A)}\end{aligned}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{E}(x_1,\dots,x_n)$

הוכחה:

נגדיר $X_i=\begin{cases} i & (x_1,\dots,x_n)\text{ exactly i of them are H}\\ 0 & \text{else}\end{cases}$, נגדיר $X=\sum_{i=0}^{n}X_i$,
ראינו בשאלה 1 כי ההסתברות של $\mathbb{P}(\omega=(x_1,\dots,x_n))=(1-p)^{n-i}\cdot p^i$, כאשר ב$(x_1,\dots,x_n)$ יש בדיוק i פעמים H, וגם ראינו בשאלה 1 כי מספר ה$(x_1,\dots,x_n)$ שמכילים בדיוק i פעמים H הוא $\binom{n}{i}$
אזי

$$\begin{aligned}\mathbb{E}&=\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n}X_i\right)=\sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}(X_i)=\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\cdot\mathbb{P}(\omega)\right]\\ &=\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{\omega=(x_1,\dots,x_n)\text{ exactly i of them are H}}X(\omega)\cdot\mathbb{P}(\omega)\right]\\ &=\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{\omega=(x_1,\dots,x_n)\text{ exactly i of them are H}}i\cdot(1-p)^{n-i}\cdot p^i\right]\\ &=\sum_{i=0}^{n}\left[\binom{n}{i}\cdot i\cdot(1-p)^{n-i}\cdot p^i\right]\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **פתרון:**

i. **צ"ל:** $\mathbb{E}(X\cdot Y)=\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X\cdot Y) &= \sum_{xy\in \mathrm{Im}(X\cdot Y)} xy\cdot \mathbb{P}(X\cdot Y=xy) = \sum_{xy\in\{xy\mid x\in\mathrm{Im}(X),y\in\mathrm{Im}(Y)\}} xy\cdot\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid (X\cdot Y)(\omega)=xy\})\\
&= \sum_{xy\in\{xy\mid x\in\mathrm{Im}(X),y\in\mathrm{Im}(Y)\}} xy\cdot\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=x\}\cap\{\omega\in\Omega\mid Y(\omega)=y\})\\
&= \sum_{x\cdot y, x\in\mathrm{Im}(X),y\in\mathrm{Im}(Y)} [x\cdot y\cdot \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=x\})\cdot\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid Y(\omega)=y\})]\\
&= \sum_{x\cdot y, x\in\mathrm{Im}(X),y\in\mathrm{Im}(Y)} [(x\cdot \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=x\}))\cdot(y\cdot\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid Y(\omega)=y\}))]\\
&= \left[\sum_{x\in\mathrm{Im}(X)}(x\cdot\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=x\}))\right]\cdot\left[\sum_{y\in\mathrm{Im}(Y)}(x\cdot\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid Y(\omega)=y\}))\right]\\
&= \left[\sum_{x\in\mathrm{Im}(X)}(x\cdot\mathbb{P}(X=x))\right]\cdot\left[\sum_{y\in\mathrm{Im}(Y)}(x\cdot\mathbb{P}(Y=y))\right] = \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ג.1.☺

ii. **צ"ל:** $\mathbb{E}(X\cdot Y)\neq\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$

הוכחה:

נבחר את הניסוי של הטלת מטבע פעם אחת ונגדיר $X=Y=\begin{cases}1 & x=H\\ -1 & x=T\end{cases}$, לכן

$$\mathbb{E}(X\cdot Y)=\sum_{w\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)\cdot XY(\omega)=\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+\frac{1}{2}\cdot 1^2=1$$

$$\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)=\left(\sum_{w\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)\cdot X(\omega)\right)\cdot\left(\sum_{w\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)\cdot Y(\omega)\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\boxed{\mathbb{E}(X\cdot Y)=1\neq 0=\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)}$$

מ.ש.ל.ג.2.☺

3. **צ"ל:** הטלת מטבע ובחירת משחק הם בלתי תלויים

הוכחה:

נשים לב כי בתרגול הגדרנו

$$\mathbb{P}(A_{i_0})=\sum_{\omega\in A_{i_0}}\mathbb{P}(\omega)=\sum_{x\in\Omega_1}\mathbb{P}((i_0,x))=\frac{1}{n}\cdot\sum_{x\in\Omega_1}[\mathbb{P}_1(x)]=\frac{1}{n}$$

$$\mathbb{P}(B_{x_0})=\sum_{\omega\in B_{x_0}}\mathbb{P}(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}((i,x_0))=n\cdot\frac{1}{n}\cdot\mathbb{P}_1(x_0)=\mathbb{P}_1(x_0)$$

$$\mathbb{P}(A_{i_0}\cap B_{x_0})=\sum_{\omega\in A_{i_0}\cap B_{x_0}}\mathbb{P}(\omega)=\mathbb{P}((i_0,x_0))=\frac{1}{n}\cdot\mathbb{P}_1(x_0)=\mathbb{P}(A_{i_0})\cdot\mathbb{P}(B_{x_0})$$

אזי $\mathbb{P}(A_{i_0}\cap B_{x_0})=\mathbb{P}(A_{i_0})\cdot\mathbb{P}(B_{x_0})$,

כלומר מההגדרה מתקיים כי המאורעות זרים, כנדרש

מ.ש.ל.☺

4. **פתרון:**

(א) **פתרון:**

i. **צ"ל:** $\log(n) \in o(n^{\varepsilon})$

הוכחה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n)}{n^{\varepsilon}} \overset{\textbf{heine}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x)}{x^{\varepsilon}} \overset{L\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln(a)}{x^{\varepsilon-1}\cdot\varepsilon} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(a)}{x^{\varepsilon}\cdot\varepsilon} \overset{\frac{1}{\infty}}{=} 0$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{\log(n) \in o(n^{\varepsilon})}$

מ.ש.ל.א.1.☺

ii. **צ"ל:** $k_1^n \in o(k_2^n)$

הוכחה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_1^n}{k_2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^n \overset{q=\frac{k_1}{k_2}<1}{=} \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{k_1^n \in o(k_2^n)}$

מ.ש.ל.א.2.☺

(ב) **צ"ל:** לסדר לפי סדר אסימפטוטי את הפונקציות

הוכחה:

$\log_4(\log_2(n))$	$\log_2(n)$ $\log_3(n)$	$n^{\frac{1}{3}}$	n	n^4 $n^4 - n^{3.6}$	2^n 2^{n+2}

מ.ש.ל.ב.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** הרצה של האלגוריתם עבור המערך

7	2	3	0	5	6	1	4

הוכחה:

7	2	3	0	5	6	1	4
2	7	3	0	5	6	1	4
2	3	7	0	5	6	1	4
2	3	0	7	5	6	1	4
2	3	0	1	5	6	7	4
2	3	0	1	4	6	7	5
0	3	2	1	4	6	7	5
0	1	2	3	4	6	7	5

האלגוריתם מחזיר 3 שהוא האיבר הרביעי במערך לאחר שהוא ממוין

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** מה האלגוריתם עושה ומה הוא מחזיר

הוכחה:

האלגוריתם מחזיר את האיבר ה-k במערך לאחר שהוא ממוין. תוך כדי שהוא ממיין חלקית את המערך כדי למצוא את האיבר ה-k.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** להוכיח נכונות אלגוריתם

הוכחה:

תחילה נוכיח את נכונות אלגרותים $partition$ עם שמורת לולאה

שמורת הלולאה היא $\max_{l\leq i}\{arr[l]\} \leq x < \min_{i<l<j}\{arr[l]\}$

נשים לב שעבור $j = left, i = left$ תנאי מתקיים באופן ריק,

נניח שהטענה נכונה למערך עד i, j כלשהו ונראה שהיא נכונה ל$j + 1$:

- אם $arr[j] \leq x$, אז $i++$ ומתקיים משמורת הלולאה כי $\max_{l\leq i-1}\{arr[l]\} \leq x < \min_{i-1<l<j-1}\{arr[l]\}$, לכן נשים לב כי $x < arr[j]$, נסמן ב$arr[i] = y \leq x$ (התנאי במקרה זה לאחר ההחלפה בין $arr[i], arr[j]$) וב$arr[j] = z > x$ (משמורת הלולאה), לכן

$$\max_{l\leq i}\{arr[l]\} = \max_{l\leq i-1}\{arr[l], y\} \leq x < \min_{i<l<j-1}\{arr[l], z\} = \min_{i<l<j}\{arr[l]\}$$

כנדרש

- אחרת $arr[j] > x$, לכן משמורת הלולאה מתקיים

$$\max_{l\leq i}\{arr[l]\} \leq x < \min_{i<l<j-1}\{arr[l], arr[j]\} = \min_{i<l<j}\{arr[l]\}$$

כנדרש

לכן $partition$ מחזיר בסופו של דבר מערך מהצורה $\max_{i<q}\{arr[i]\} \leq arr[q] \leq \min_{q<i}\{arr[i]\}$

עתה, נוכיח באינדוקציה את נכונות האלגוריתם ביחס לגודל המערך arr.

<u>בסיס:</u> <u>$n = 1$</u>, נשים לב כי $left = right$, לכן האלגוריתם מחזיר את $arr[left]$ כי המערך ממוין ובהנחה וk תקין הוא גם האיבר הk במערך הממוין.

<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה לכל גודל מערך $l < n$ ונראה שהטענה נכונה לn

בהרצאה ראינו כי $q = partition(arr, left, right)$ מחלק את המערך ל3 חלקים המקיימים $\max_{i<q}\{arr[i]\} \leq arr[q] \leq \min_{q<i}\{arr[i]\}$.

נחלק למקרים:

- אם $k = q$, האלגוריתם יחזיר את $arr[q]$ כי במערך הממוין עדיין יתקיים השוויון $\max_{i<k}\{arr[i]\} \leq arr[q = k] \leq \min_{k<i}\{arr[i]\}$, כלומר יהיו $k - 1$ איברים לפני האיבר הזה ויהיו $n - k - 1$ אחרי האיבר הזה כשהמערך יהיה ממוין. לכן האיבר במקום הk יישאר בו גם לאחר מיון המערך, לכן כשנחזיר אותו נחזיר בעצם את האיבר הk במערך הממוין, כנדרש.
- אם $k < q$, הפונקציה קוראת לאלגוריתם עם מערך קטן יותר ולכן תקבל את האיבר הk במערך $arr[left : q - 1]$, נשים לב כי $\max_{i<k}\{arr[i]\} \leq arr[k] \leq \min_{k<i<q}\{arr[i]\}$ מהנחת האינדוקציה וגם $arr[k] \leq \min_{k<i<q}\{arr[i]\} \leq arr[q] \leq \min_{q<i}\{arr[i]\}$, מהתנאי שהתקבל כשקראנו ל$partition$,
לכן האלגוריתם מקיים $\max_{i<k}\{arr[i]\} \leq arr[k] \leq \min_{k<i}\{arr[i]\}$, מאותו הנימוק שניתן למקרה $k = q$, נסיק כי $arr[k]$ הוא עצם את האיבר הk במערך הממוין, כנדרש.
- אם $k > q$, הפונקציה קוראת לאלגוריתם עם מערך קטן יותר ולכן תקבל את האיבר הk במערך $arr[q+1 : right]$, נשים לב כי $\max_{q<i<k}\{arr[i]\} \leq arr[k] \leq \min_{k<i}\{arr[i]\}$ מהנחת האינדוקציה וגם $\max_{i<q}\{arr[i]\} \leq arr[q] \leq \max_{q<i<k} \leq arr[k]$, מהתנאי שהתקבל כשקראנו ל$partition$,
לכן האלגוריתם מקיים $\max_{i<k}\{arr[i]\} \leq arr[k] \leq \min_{k<i}\{arr[i]\}$, מאותו הנימוק שניתן למקרה $k = q$, נסיק כי $arr[k]$ הוא עצם את האיבר הk במערך הממוין, כנדרש.

כלומר האלגוריתם מחזיר את האיבר הk במערך הממוין בכל אחד מהמקרים, כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** האם מקרה גרוע באותה יעילות כמו מקרה ממוצע?

הוכחה:

לא, נימוק מחשבתי, בממוצע כמו $quicksort$, המערך ייחצה כל פעם ולכן יהיה ביעילות n אבל במקרה הגרוע כמו $quicksort$ הוא יבצע n^2

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** לכתוב נוסחא רקורסיבית למקרה הגרוע

הוכחה:

בכל קריאה הגודל של המערך קטן לפחות ב1, לכן במקרה הגרוע ביותר כל פעם הקריאה תקטין את המערך ב1 ולכן יתקיים $\boxed{T\left(n\right)=\Theta\left(n\right)+T\left(n-1\right)+\Theta\left(1\right)=\Theta\left(n\right)+T\left(n-1\right)}$

מ.ש.ל.ה.☺

(ו) **צ"ל:** לחשב יעילות למקרה הגרוע

הוכחה:

בסעיף הקודם ראינו כי $T\left(n\right)=\Theta\left(n\right)+T\left(n-1\right)$,

ראינו כי $\boxed{T\left(n\right)\in\Theta\left(n^{2}\right)}$ (אותה נוסחא כמו $bubblesort$)

מ.ש.ל.ו.☺

(ז) **צ"ל:** לחשב יעילות למקרה הממוצע

הוכחה:

נשים לב כי בכל פעם נקבל בממוצע אינדקס במרכז המערך (הערכים יהיו בין $\frac{1}{4}$ ל$\frac{3}{4}$),

הנוסחא הממוצעת שנקבל היא $T\left(n\right)=\Theta\left(n\right)+T\left(\frac{n}{2}\right)$, כי כל פעם הולכים לחצי מערך מהקודם.

נשים לב כי עבור $k=1,a=1,b=2$ מתקיים $T\left(n\right)=a\cdot T\left(\frac{n}{b}\right)+\Theta\left(n^{k}\right)$,

וגם מתקיים $\boxed{q=\frac{a}{b^{k}}\leq\frac{3}{4}<1}$, לכן ממשפט האב הפשוט מתקיים $\boxed{T\left(n\right)\in\Theta\left(n^{k}\right)=\Theta\left(n\right)}$

מ.ש.ל.ז.☺