פתרון תרגיל מספר 6 ־ אלגוריתמים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639, **שם:** גיא לוי, **ת.ז:** 211744636

10 בדצמבר 2019

1. **שאלה 1 צ"ל:** הצעת בעית תכנון לינארי

הוכחה:

נסמן ב־ $\boxed{x = (x_1, x_2, x_3)}$ את הפתרון שלנו כאשר x_1 זה כמות פולי סויה (יחידה ב־100 גרם), x_2 זה כמות החיטה (יחידה ב־100 גרם) ו־ x_3 זה כמות התבן (יחידה ב־100 גרם).

תחילה נשים לב כי $\boxed{0 \le x_1, x_2, x_3}$ בגלל שאין משמעות לקנות כמות שלילית.

נתון כי כמות החלבון צריכה להיות לפחות 40, וכמות החלבון היא $20 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$, לכן נקבל

$$20x_1 + 5x_2 \ge 40 \Leftrightarrow \boxed{-20x_1 - 5x_2 \le -40}$$

נתון כי כמות הסיבים התזונתיים צריכים להיות בין 10 ל־20, וכמות הסיבים התזונתיים היא $2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3$, לכן נקבל

$$2x_2 + 5x_3 \le 20 \Leftrightarrow \boxed{2x_2 + 5x_3 \le 20}$$

$$10 \le 2x_2 + 5x_3 \Leftrightarrow \boxed{-2x_2 - 5x_3 \le -10}$$

וגם נתון כי הפרה אוכלת פחות מ־2000 קלוריות, וכמות הקלוריות היא $100 \cdot x_1 + 1000 \cdot x_2$, לכן נקבל

$$\boxed{100 \cdot x_1 + 1000 \cdot x_2 \le 2000}$$

כלומר נקבל שהאילוצים הם

$$\begin{bmatrix} -20 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 \\ 100 & 1000 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} -40 \\ 20 \\ -10 \\ 2000 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A = \begin{bmatrix} -20 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 \\ 100 & 1000 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -40 \\ 20 \\ -10 \\ 2000 \end{bmatrix}}$$

ועתה נרצה למזער את המחיר שהוא $25 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3$, שזה שקול למצוא למקסם את

$$-25 \cdot x_1 - 15 \cdot x_2 - 40 \cdot x_3 = \begin{bmatrix} -25 & -15 & -40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ -15 \\ -40 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{c = \begin{bmatrix} -25 \\ -15 \\ -40 \end{bmatrix}}$$

כלומר קיבלנו שהבעיה שלנו היא

$$\max_{x_i \ge 0, A \cdot x \le b} \left\{ c^T \cdot x \right\}$$

כאשר $x = (x_1, x_2, x_3)$ כפי שהגדנו בהתחלה, $A = \begin{bmatrix} -20 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 \\ 100 & 1000 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -40 \\ 20 \\ -10 \\ 2000 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} -25 \\ -15 \\ -40 \end{bmatrix}$

מ.ש.ל.☺

2. **שאלה 2 פתרון:**

(א) נרצה משתנה לכל קודקוד שייצג האם הקודקוד נבחר לקבוצה הבלתי התלויה המקסימלית,
לכן נסמן ב־ $x=\left(x_1,\dots,x_{|V|}\right)$ את המשתנים שלנו כאשר $x_i\geq 1$ ייצג ש־ v_i הוא בקבוצה הבלתי תלויה המקסימלית וגם מתקיים $x\in\mathbb{Z}^n$ בשביל האילוץ בסעיף הבא.

נרצה למצוא קבוצה מגודל מקסימלי ואין העדפה לקודקוד מסוים, ולכן $c=\left(\underbrace{1,\dots,1}_{|V|\text{ times}}\right)$ כדי למקסם את כמות ה־ x_i שאנחנו בוחרים

(ב) תהי $e\in E$, נסמן $e=(v_i,v_j)$, לא נוכל לבחור גם את v_i וגם את v_j, מהיות המספרים טבעיים וקודקוד נבחר אם הוא גדול שווה 1, נקבל ש

$$x_i+x_j\leq 1$$

ולכן האילוצים שלנו הם $x_i+x_j\leq 1$, לכל $(v_i,v_j)=e\in E$

(ג) תהי $e\in E$, נסמן $e=(v_i,v_j)$, נגדיר $\boxed{(a_e)_k=\begin{cases}1 & k=i,j\\ 0 & else\end{cases}}$,
נשים לב כי

$$\langle x,a_e\rangle=\sum_{l=0}^{|V|}x_k\cdot(a_e)_k=x_i+x_j$$

לכן אם נסמן כי $\boxed{s=1}$, נקבל

$$\langle x,a_e\rangle\leq s\Leftrightarrow x_i+x_j\leq 1$$

ונקבל את הדרישה שהתקבלה בסעיף

(ד) נשים לב כי קיימת מטריצה אחת (עד כדי שינוי שורות) שמקיימת

$$A\cdot x=\left(\left(\langle x,a_e\rangle\right)_{e\in E}\right)^T\leq\left(\underbrace{1,\dots,1}_{|E|\text{ times}}\right)^T=b$$

לכן נקבל כי $b=\left(\underbrace{1,\dots,1}_{|E|\text{ times}}\right)^T$ ו־ A היא המטריצה המקיימת $A\cdot x=\left(\left(\langle x,a_e\rangle\right)_{e\in E}\right)^T$,
עתה בשילוב כל הסעיפים נקבל

$$\max_{\substack{A\cdot x\leq b\\ x\geq 0\\ x\in\mathbb{Z}^n}}\left\{c^T\cdot x\right\}=\max_{\substack{\left(\left(\langle x,a_e\rangle\right)_{e\in E}\right)^T\leq\left(\underbrace{1,\dots,1}_{|E|\text{ times}}\right)^T\\ x\geq 0\\ x\in\mathbb{Z}^n}}\left\{\left(\underbrace{1,\dots,1}_{|V|\text{ times}}\right)^T\cdot x\right\}$$

מ.ש.ל.☺

3. **שאלה 5 פתרון:**
הוכחה:
נסמן ב־N את מספר המוצרים שנרצה לייצר, ו־m מספר האנשים במפעל
נרצה להמיר את הבעיה ל־ $CNF-10$ ונפתור בקירוב 2 כמו שראינו בתרגול.
נגדיר $x=(x_1,\ldots,x_N)\in\{\mathbb{F},\mathbb{T}\}^N$, נכין את הגרסא הרגילה של המוצר ה־i אס"ם $x_i=\mathbb{T}$ בפתרון שנמצא.
נגדיר לכל אדם שנסמנו ב־ k את הפסוקית שהוא מביא בעקבות רצונותיו:
האדם ה־k בוחר את המוצרים $x_{i_1}^k,x_{i_2}^k,\ldots,x_{i_5}^k$, לכל מוצר $1\le j\le 5$ בין המוצרים שבחר:

(א) אם הוא מעדיף את הגרסא הרגילה של $x_{i_j}^k$, נוסיף לפסוקית ה־k (עם $\vee$) את המשתנה $x_{i_j}^k$

(ב) אם הוא מעדיף את הגרסא דלת הנתרן של $x_{i_j}^k$, נוסיף לפסוקית ה־k (עם $\vee$) את המשתנה $\neg x_{i_j}^k$,

(ג) אחרת הוא בחר ללא דעה, ולכן נוסיף את $x_{i_j}^k$ וגם את $\neg x_{i_j}^k$ לפסוקית ה־k (עם $\vee$) כי אין לו חשיבות לגבי המוצר

כלומר נקבל שהפסוקית של האדם ה־k נראת לכל היותר מהצורה

$$x_{i_1}^k\vee x_{i_2}^k\vee\cdots\vee x_{i_5}^k\vee\left(\neg x_{i_1}^k\right)\vee\left(\neg x_{i_2}^k\right)\vee\cdots\vee\left(\neg x_{i_5}^k\right)$$

נשים לב שהאילוץ ה־k מתקיים אס"ם לפחות 1 מתוך 5 המוצרים הוא לפי רצונו של האדם הk (מאיך שהגדרנו את הפסוקית)
נשים לב שאם נשלב את דרישות כל האנשים עם $\wedge$, נקבל נוסחא שהיא מצורה של CNF שהיא לכל היותר $CNF-10$

נעשה אלגוריתם דומה למה שעשינו בתרגול עבור $CNF-3$ ל־ $CNF-10$ בכך שנבחר את ה־x שמקיים את המספר המקסימלי של פסוקיות בין $X_{\mathbb{F}}=(\mathbb{F},\ldots,\mathbb{F})$ ל־$X_{\mathbb{T}}=(\mathbb{T},\ldots,\mathbb{T})$.
נסמן ב־f את מספר הפסוקיות ש־ x_f מקיים וב־t את מספר הפסוקיות הפסוקיות שx_t מקיים.
נוכיח שהמקסימלי בינהם נותן קירוב 2 ל־$CNF-10$
נשים לב שלכל פסוקית C_i או ש־ $X_{\mathbb{T}}$ מקיים אותה או ש־ $X_{\mathbb{F}}$ מקיים אותה, לכן $f+t\ge m$, לכן $\max\{f,t\}\ge\frac{m}{2}$.
נסמן ב־opt את הפתרון האופטימלי, נשים לב כי $opt\le m$ כי אפשר לקיים לכל היותר את כל הפסוקיות, לכן נקבל כי

$$\max\{f,t\}\ge\frac{m}{2}\ge opt\cdot\frac{1}{2}$$

כלומר קיבלנו שהאלגוריתם שלנו נותן קירוב 2 לבעיה $CNF-10$, והראנו קודם שאפשר להמיר את הבעיה המקורית ל־ $CNF-10$, לכן בהפעלת האלגוריתם הזה, נקבל קירוב 2 גם לבעיה המקורית.
זמן ריצה: לוקח $O(10\cdot m)$ להכין את הפסוקיות בשביל ה־ $CNF-10$ ולאחר מכן $O(2m)$ לחישוב ה־ $X_{\mathbb{T}},X_{\mathbb{F}}$ ובחירת המקסימלי בינהם. כלומר קיבלנו שזמן הריצה הוא $O(m)$

מ.ש.ל.☺