פתרון תרגיל מספר 4 ־ לינארית 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

6 באפריל 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** ערכים עצמיים, מרחבים עצמיים והאם המטריצה לכסינה
הוכחה:
תחילה נחפש את הערכים העצמיים

$$\det\left[A-\lambda\cdot I\right]=\det\left[\begin{bmatrix}-2&-2&2\\3&3&-2\\-1&-1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}\right]=\det\begin{bmatrix}-2-\lambda&-2&2\\3&3-\lambda&-2\\-1&-1&2-\lambda\end{bmatrix}$$
$$=(-\lambda-2)\cdot(-\lambda+3)\cdot(-\lambda+2)+(-2)\cdot(-2)\cdot(-1)+2\cdot 3\cdot(-1)$$
$$-(-1)\cdot(-\lambda+3)\cdot 2-(-1)\cdot(-2)\cdot(-\lambda-2)-(-\lambda+2)\cdot 3\cdot(-2)$$
$$=\left(-\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda-12\right)-4-6+(6-2\cdot\lambda)+(2\cdot\lambda+4)+(12-6\lambda)$$
$$=\left(-\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda-12\right)+(12-6\lambda)=-\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda=-\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-2)$$

לכן $\det\left[A-\lambda\cdot I\right]=0\Rightarrow\lambda=0,1,2$, נחשב V_0

$$V_0=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{bmatrix}-2&-2&2\\3&3&-2\\-1&-1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{array}{c}-2x-2y+2z=0\\3x+3y-2z=0\\-x-y+2z=0\end{array}\right\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{array}{c}2x+2y=2z\\3x+3y=2z\\x+y=2z\end{array}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{array}{c}x+y=0\\z=0\end{array}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\-x\\0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\right\}=\boxed{\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}}$$

עתה נחשב V_1

$$V_1=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{bmatrix}-2&-2&2\\3&3&-2\\-1&-1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{array}{c}-2x-2y+2z=x\\3x+3y-2z=y\\-x-y+2z=z\end{array}\right\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{array}{c}3x+2y=2z\\3x+2y=2z\\x+y=z\end{array}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{array}{c}3x+2y=2z\\x+y=z\end{array}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}0\\y\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{array}{c}x=0\\y=z\end{array}\right\}$$
$$=\boxed{\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}}$$

עתה נחשב V_2

$$V_2=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix}-2&-2&2\\3&3&-2\\-1&-1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\2y\\2z\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{c}-2x-2y+2z=2x\\3x+3y-2z=2y\\-x-y+2z=2z\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{c}4x+2y=2z\\3x+y=2z\\x+y=0\end{array}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{c}3x+y=2z\\x+y=0\end{array}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\-x\\x\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{c}x=-y\\x=z\end{array}\right\}$$

$$=\boxed{\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}}$$

המטריצה **לכסינה** כי מצאנו 3 וקטורים עצמיים ל־3 ערכים עצמיים שונים, לכן הוקטורים הינם בת"ל ולכן הינם גם בסיס של וקטורים עצמיים כי $\dim V=3$.
הוכחנו כי A לכסינה אם"ם קיים בסיס של וקטורים עצמיים והראנו שקיים בסיס של וקטורים עצמיים, לכן A לכסינה

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** ערכים עצמיים, מרחבים עצמיים והאם המטריצה לכסינה
הוכחה:
תחילה נחפש את הערכים העצמיים

$$\det\left[A-\lambda\cdot I\right]=\det\left[\begin{bmatrix}-1&2&-1\\-2&2&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}\right]=\det\begin{bmatrix}-1-\lambda&2&-1\\-2&2-\lambda&-2\\1&-2&1-\lambda\end{bmatrix}$$
$$=(-\lambda-1)\cdot(-\lambda+2)\cdot(-\lambda+1)+2\cdot(-2)\cdot1+(-2)\cdot(-2)\cdot(-1)$$
$$-(-1)\cdot(-\lambda+2)\cdot1-(-2)\cdot(-2)\cdot(-\lambda-1)-(-\lambda+1)\cdot2\cdot(-2)$$
$$=\left(-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2\right)-8+(2-\lambda)+(4\lambda+4)+(4-4\lambda)$$
$$=\left(-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2\right)+(2-\lambda)=-\lambda^3+2\lambda^2=-\lambda^2(\lambda-2)$$

לכן $\det\left[A-\lambda\cdot I\right]=0\Rightarrow\lambda=0,2$, נחשב V_0

$$V_0=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix}-1&2&-1\\-2&2&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{c}-x+2y-z=0\\-2x+2y-2z=0\\x-2y+z=0\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{c}-x+2y=z\\-x+y-z=0\\x-2y=-z\end{array}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{c}2y=z+x\\x+z=y\\y=0\end{array}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\0\\-x\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\right\}=\boxed{\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}}$$

עתה נחשב V_2

$$V_2=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix}-1&2&-1\\-2&2&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\2y\\2x\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{c}-x+2y-z=2x\\-2x+2y-2z=2y\\x-2y+z=2z\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{c}-3x+2y-z=0\\2x=-2z\\x-y=-z\end{array}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{c}x=-z\\3z+2y-z=0\end{array}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}-z\\-z\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{c}x=-z\\y=-z\end{array}\right\}$$

$$=\boxed{\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}}$$

המטריצה **לא לכסינה** כי מצאנו **לכל היותר** 2 וקטורים עצמיים בת"ל, ולכן **אין בסיס של וקטורים עצמיים** כי $\dim V=3$.
הוכחנו כי A לכסינה אם"ם קיים בסיס של וקטורים עצמיים והראנו שקיים בסיס של וקטורים עצמיים, לכן A **לא לכסינה**

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** ערכים עצמיים, מרחבים עצמיים והאם המטריצה לכסינה

הוכחה:

תחילה נחפש את הערכים העצמיים

$$\det\left[A-\lambda\cdot I\right]=\det\left[\begin{bmatrix}4&-2&2\\0&0&0\\-4&2&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}\right]=\det\begin{bmatrix}4-\lambda&-2&2\\0&-\lambda&0\\-4&2&-2-\lambda\end{bmatrix}$$
$$=(4-\lambda)\cdot-\lambda\cdot(-2-\lambda)-2\cdot(-\lambda)\cdot(-4)$$
$$=-\lambda\left(\lambda^2-2\lambda-8\right)-8\lambda=-\lambda^3+2\lambda^2=-\lambda^2(\lambda-2)$$

לכן $\det\left[A-\lambda\cdot I\right]=0\Rightarrow\lambda=0,2$, נחשב V_0

$$V_0=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{bmatrix}4&-2&2\\0&0&0\\-4&2&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{matrix}4x-2y+2z=0\\-(4x-2y+2z)=0\end{matrix}\right\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\ 2x+z=y\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\2x+z\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\2x\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\z\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\right\}=\boxed{\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}}$$

עתה נחשב V_2

$$V_2=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{bmatrix}4&-2&2\\0&0&0\\-4&2&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\2y\\2x\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{matrix}4x-2y+2z=2x\\0=2y\\-4x+2y-2z=2z\end{matrix}\right\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\ x=-z\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\0\\-x\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{matrix}x=-z\\3z+2y-z=0\end{matrix}\right\}=\boxed{\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}}$$

המטריצה **לכסינה** כי מצאנו 3 בסיס של וקטורים עצמיים $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ הם בת"ל כי $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\notin\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$ וגם $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\notin\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$.

הוכחנו כי A לכסינה אם"ם קיים בסיס של וקטורים עצמיים והראנו שקיים בסיס של וקטורים עצמיים, לכן A **לכסינה**

מ.ש.ל.ג.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\lambda\in\{0,1,-1\}$

הוכחה:

יהי λ ערך עצמי וv וקטור עצמי של λ אזי

$$\lambda\cdot v=A\cdot v=A^3\cdot v=A^2\cdot\lambda\cdot v=\lambda\cdot A^2\cdot v=\lambda^2\cdot Av=\lambda^3\cdot v$$
$$\Rightarrow\lambda\cdot v=\lambda^3\cdot v\Rightarrow\left(\lambda^3-\lambda\right)\cdot v=0$$

מהיות $v\neq0$, מתקיים כי $\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda+1)=\lambda^3-\lambda=0$, לכן $\lambda=0,1,-1$ (כי אין מחלקי 0), כלומר $\boxed{\lambda\in\{0,1,-1\}}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם בהכרח $A^3=A$?

הוכחה:

נכון! מהיות לA יש 2 ערכים עצמיים שונים, אז לA יש לפחות 2 וקטורים עצמיים שונים (בת"ל כי מייצגים ערכים עצמיים שונים), נובע כי לA יש בסיס של וקטורים עצמיים. לכן A לכסינה (כי לA יש בסיס שלוקטורים עצמיים)

מהיות A לכסינה, קיימת מטריצה הפיכה P כך שמתקיים $A=P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{bmatrix}\cdot P$ כאשר $a_1,a_2\in\{0,-1\}$ אזי

$$A^3=\left(P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{bmatrix}\cdot P\right)\cdot\left(P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{bmatrix}\cdot P\right)\cdot\left(P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{bmatrix}\cdot P\right)=P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{bmatrix}^3\cdot P$$
$$=P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a_1^3&0\\0&a_2^3\end{bmatrix}\cdot P\overset{a_i^3=a_i}{=}P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{bmatrix}\cdot P=A$$

כלומר קיבלנו כי $A^3=A$, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** האם בהכרח $A^3=A$?

הוכחה:

לא נכון! נבחר $A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}$, נשים לב כי $\det(\lambda I-A)=\det\begin{bmatrix}-1-\lambda&0&0\\0&-\lambda&0\\0&2&-\lambda\end{bmatrix}=-\lambda^2(1+\lambda)$,

לכן הערכים העצמיים הם $-1,0$, נשים לב כי

$$A^3=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}=A$$

כלומר הראנו כי לא בהכרח מתקיים $A=A^3$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** האם בהכרח $A^3=A$?

הוכחה:

נכון! מהיות A לכסינה, קיימת מטריצה הפיכה P כך שמתקיים $A=P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{bmatrix}\cdot P$ כאשר $a_1,a_2,a_3\in$ $\{0,-1\}$ אזי

$$A^3=\left(P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{bmatrix}\cdot P\right)\cdot\left(P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{bmatrix}\cdot P\right)\cdot\left(P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{bmatrix}\cdot P\right)=P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{bmatrix}^3\cdot P$$
$$=P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a_1^3&0&0\\0&a_2^3&0\\0&0&a_3^3\end{bmatrix}\cdot P\overset{a_i^3=a_i}{=}P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{bmatrix}\cdot P=A$$

כלומר קיבלנו כי $A^3=A$, כנדרש

מ.ש.ל.ד.☺

3. **צ"ל:** $\exists i$ כך שλ הוא ערך עצמי של v_i

הוכחה:

מהיות $v_1,\ldots,v_n$ בסיס של V מתקיים כי $\exists a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ כך ש$v=a_1v_1+\cdots+a_nv_n$, לכן

$$\lambda\cdot\left(\sum_{i=1}^n a_i\cdot v_i\right)=\lambda\cdot v=T(v)=T\left(\sum_{i=1}^n a_i\cdot v_i\right)=\sum_{i=1}^n a_i\cdot T(v_i)=\sum_{i=1}^n a_i\cdot\lambda_i\cdot v_i$$
$$\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^n\lambda\cdot a_i\cdot v_i\right)=\sum_{i=1}^n a_i\cdot\lambda_i\cdot v_i\Rightarrow\sum_{i=1}^n a_i\cdot(\lambda_i-\lambda)\cdot v_i=0$$

מהיות $v_1,\dots,v_n$ בסיס מתקיים כי $a_i\cdot(\lambda_i-\lambda)=0$, $1\le i\le n$,
מהיות $v\neq 0$, $\exists i\le n\ge 1$ כך ש$a_i\neq 0$ (אחרת $v=\sum_{i=1}^n a_i\cdot v_i=\sum_{i=1}^n 0\cdot v_i=0$) אזי

$$a_i\cdot(\lambda_i-\lambda)=0\Rightarrow\lambda_i-\lambda=0\Rightarrow\lambda_i=\lambda$$

לכן $T(v_i)=\lambda_i\cdot v_i=\lambda\cdot v_i$, כלומר הראנו כי עבור i מתקיים כי λ ערך עצמי של v_i, כנדרש

מ.ש.ל.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** K^{-1} לכסינה

הוכחה:

נכון! תחילה מהיות K לכסינה, קיים בסיס של וקטורים עצמיים שנסמנם $(v_1,\dots,v_n)$ והערך העצמי של v_i בλ_i,
נשים לב כי $\lambda_i\neq 0$, אחרת $\det(K)=0$, בסתירה להנחה שK הפיכה,
ונשים לב כי

$$v_i=I\cdot v_i=\left(K^{-1}\cdot K\right)\cdot v_i=K^{-1}\cdot(K\cdot v_i)=K^{-1}(\lambda_i\cdot v_i)=\lambda_i\cdot\left(K^{-1}\cdot v_i\right)$$
$$\Rightarrow K^{-1}\cdot v_i=\frac{1}{\lambda_i}\cdot v_i$$

לכן v_i הוא גם וקטור עצמי של K^{-1},$1\le i\le n$,
לכן $(v_1,\dots,v_n)$ הוא גם בסיס של וקטורים עצמיים של K^{-1},
וכחנו כי A לכסינה אם"ם קיים בסיס של וקטורים עצמיים והראנו שקיים בסיס של וקטורים עצמיים, לכן K^{-1} **לכסינה**

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $K+K^{-1}$ לכסינה

הוכחה:

נכון! תחילה מהיות K לכסינה, קיים בסיס של וקטורים עצמיים שנסמנם $(v_1,\dots,v_n)$ והערך העצמי של v_i בλ_i,
מהסעיף הקודם אנחנו יודעים כי $K\cdot v_i=\lambda_i\cdot v_i, K^{-1}\cdot v_i=\frac{1}{\lambda_i}\cdot v_i$
ונשים לב כי

$$\left(K+K^{-1}\right)\cdot(v_i)=K\cdot v_i+K^{-1}\cdot v_i=\lambda_i\cdot v_i+\frac{1}{\lambda_i}\cdot v_i=\left(\lambda_i+\frac{1}{\lambda_i}\right)\cdot v_i$$

לכן v_i הוא גם וקטור עצמי של $K+K^{-1}$, $1\le i\le n$,
לכן $(v_1,\dots,v_n)$ הוא גם בסיס של וקטורים עצמיים של $K+K^{-1}$,
וכחנו כי A לכסינה אם"ם קיים בסיס של וקטורים עצמיים והראנו שקיים בסיס של וקטורים עצמיים, לכן $K+K^{-1}$ **לכסינה**

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** K לכסינה

הוכחה:

לא נכון! נבחר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $K=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$, נשים לב כי $K^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ וגם

$$K+K^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

לכן $K+K^{-1}$ היא מטריצת האפס והיא לכסינה, עתה נשים לב כי

$$\det(\lambda\cdot I-K)=\det\begin{bmatrix}\lambda&1\\-1&\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2+1$$

לכן אין ערכים עצמיים לK, כלומר K לא לכסין (כי אין בסיס של וקטורים עצמיים), כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

5. **פתרון:**

(א) **פתרון:**

i. **צ"ל:** $S\circ T=T\circ S$

הוכחה:

נסמן את הבסיס של הוקטורים העצמיים המלכסנים את T,S באותו הזמן ב$\mathcal{B}=(v_1,\ldots,v_n)$,

נסמן $T(v_i)=\lambda_i\cdot v_i$, $S(v_i)=\omega_i\cdot v_i$ לכן

$$\begin{aligned}S\circ T(v_i)&=S(T(v_i))=S(\lambda_i\cdot v_i)=\lambda_i\cdot S(v_i)=\lambda_i\cdot\omega_i\cdot v_i=\omega_i\cdot\lambda_i\cdot v_i=\omega_i\cdot T(v_i)\\&=T(\omega_i\cdot v_i)=T(S(v_i))=T\circ S(v_i)\end{aligned}$$

לכן $S\circ T(v_i)=T\circ S(v_i)$, $1\le\forall i\le n$,

ראינו בלינארית 1 כי קיימת רק העתקה לינארית יחידה המקיימת $T(v_i)=w_i$, $1\le\forall i\le n$,

לכן $\boxed{S\circ T=T\circ S}$ (ניתן להראות זאת בקלות על ידי פתיחת הסכום ל$v\in V$ ולראות שמתקיים שוויון לכל וקטור)

מ.ש.ל.א.1.☺

ii. **צ"ל:** האם אפשרי כי T לכסין וS לא?

הוכחה:

אפשרי! נבחר $T=0$, $S\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$, ברור כי T לכסין כי T הוא העתקת ה0,

נשים לב כי $\forall v\in\mathbb{R}^2$ מתקיים

$$S\circ T(v)=S(T(v))=S(0)=0=T(S(v))=T\circ S(v)$$

לכן $S\circ T=T\circ S$, וגם $[S]_E=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ וראינו בשאלה 4 סעיף ג' כי $[S]_E$ לא לכסין, כלומר S לא לכסין. כנדרש

מ.ש.ל.א.2.☺

(ב) **פתרון:**

i. **צ"ל:** $V_{T,\lambda}$ הוא S איוואריאנטי

הוכחה:

יהי $v\in V_{T,\lambda}$ ונראה כי $S(v)\in V_{T,\lambda}$, נחלק למקרים:

- נשים לב כי אם $\lambda\neq 0$

$$\begin{aligned}&S(v)=S\left(\frac{v}{\lambda}\cdot\lambda\right)=S\left(T\left(\frac{v}{\lambda}\right)\right)=(S\circ T)\left(\frac{v}{\lambda}\right)=(T\circ S)\left(\frac{v}{\lambda}\right)=T\left(S\left(\frac{v}{\lambda}\right)\right)=\frac{1}{\lambda}T(S(v))\\&\Rightarrow T(S(v))=\lambda\cdot S(v)\end{aligned}$$

כלומר מתקיים כי $S(v)\in V_{T,\lambda}$ אם $\lambda\neq 0$

- אחרת $\lambda=0$ אזי

$$\begin{aligned}&0=S(0)=S(T(v))=(S\circ T)(v)=(T\circ S)(v)=T(S(v))\\&\Rightarrow T(S(v))=0=0\cdot S(v)\end{aligned}$$

כלומר מתקיים כי $S(v)\in V_{T,\lambda}$ אם $\lambda=0$,

לכן $S(v)\in V_{T,\lambda}$, לכל λ ולכל $v\in V_{T,\lambda}$, כלומר $V_{T,\lambda}$ הוא S אינווריאנטי מההגדרה, כנדרש

מ.ש.ל.ב.1.☺

ii. **צ"ל:** האם בהכרח v וקטור עצמי של S?

הוכחה:

אפשרי! נבחר $V=\mathbb{R}^2$, $T=0$, $S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$, ברור כי T לכסין כי T הוא העתקת ה0,
נשים לב כי $\forall v\in\mathbb{R}^2$ מתקיים

$$S\circ T\left(v\right)=S\left(T\left(v\right)\right)=S\left(0\right)=0=T\left(S\left(v\right)\right)=T\circ S\left(v\right)$$

לכן $S\circ T=T\circ S$, וגם $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ הוא וקטור עצמי של T עם ערך עצמי 0 וגם

$$S\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\notin \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

כלומר $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ הוא לא וקטור עצמי של S, כנדרש

מ.ש.ל.ב.2.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** ערכים עצמיים של A

הוכחה:

נגדיר $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, נוכיח באינדוקציה כי מתקיים $\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}=A^n\cdot\begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$,

<u>בסיס:</u> $n=1$ מתקיים כי

$$A\cdot\begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_0+F_1 \\ F_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix}$$

כלומר הטענה נכונה ל$n=1$

<u>שלב:</u> נניח שהטענה נכונה לn ונראה שהיא נכונה ל$n+1$

$$A^{n+1}\cdot\begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}=A\cdot A^n\cdot\begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}\overset{\text{induction}}{=}A\cdot\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_n+F_{n+1} \\ F_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

כלומר הטענה נכונה ל$n+1$,
כן מצאנו את המטריצה של סדרת פיבונאצ'י, עתה נחשב את הערכים העצמיים

$$\det\left(\lambda\cdot I-A\right)=\det\begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}=\lambda\cdot\left(\lambda-1\right)-1=\lambda^2-\lambda-1$$

נשים לב לפי נוסחת השורשים כי $\lambda=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\lambda^2-\lambda-1=0$,

לכן קיבלנו כנדרש כי הערכים העצמיים הם $\boxed{\lambda=\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, $\boxed{\lambda=\psi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\psi+\phi=1,\phi-\psi=\sqrt{5},\psi\cdot\phi=-1$

הוכחה:

$$\psi+\phi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1+1+\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{2}=1$$
$$\phi-\psi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1-1+\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$
$$\psi\cdot\phi=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{5}{4}=\frac{1-5}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $F_n = \frac{\phi^n+\psi^n}{\sqrt{5}}$

הוכחה:

תחילה נלכסן את A שמצאנו בסעיף א'. תחילה נשים לב כי $\boxed{\phi^2 = \phi+1} \Leftarrow \phi^2-\phi-1=0$, ובאופן דומה $\boxed{\psi^2 = \psi+1}$

נחפש בסיס של וקטורים עצמיים, נשים לב כי

$$A\cdot\begin{bmatrix}\phi\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\phi\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+\phi\\\phi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi^2\\\phi\end{bmatrix} = \phi\cdot\begin{bmatrix}\phi\\1\end{bmatrix}$$

כלומר $\begin{bmatrix}\phi\\1\end{bmatrix}$ הוא וקטור עצמי של ϕ, וגם

$$A\cdot\begin{bmatrix}\psi\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\psi\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+\psi\\\psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi^2\\\psi\end{bmatrix} = \psi\cdot\begin{bmatrix}\psi\\1\end{bmatrix}$$

כלומר $\begin{bmatrix}\psi\\1\end{bmatrix}$ הוא וקטור עצמי של ψ,

לכן $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}\phi\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\psi\\1\end{bmatrix}\right\}$ הוא בסיס של וקטורים עצמיים וממה שראינו בהרצאה ובתרגול מתקיים

$$A = \begin{bmatrix}\phi&\psi\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\phi&0\\0&\psi\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\phi&\psi\\1&1\end{bmatrix}^{-1}$$

נחשב

$$\begin{bmatrix}\phi&\psi\\1&1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix}\phi&\psi\\1&1\end{bmatrix}}\cdot\begin{bmatrix}1&-\psi\\-1&\phi\end{bmatrix} = \frac{1}{\phi-\psi}\cdot\begin{bmatrix}1&-\psi\\-1&\phi\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{bmatrix}1&-\psi\\-1&\phi\end{bmatrix}$$

בתירגול ראינו כי

$$\begin{aligned}A^n &= \begin{bmatrix}\phi&\psi\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\phi&0\\0&\psi\end{bmatrix}^n\cdot\begin{bmatrix}\phi&\psi\\1&1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\phi&\psi\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\phi^n&0\\0&\psi^n\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{bmatrix}1&-\psi\\-1&\phi\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{bmatrix}\phi&\psi\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\phi^n&0\\0&\psi^n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-\psi\\-1&\phi\end{bmatrix}\end{aligned}$$

נרצה לחשב את F_n, ראינו כי $A^n\cdot\begin{bmatrix}F_1\\F_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{bmatrix}$, (נגדיר $F_0=0$ והתנאי עדיין יתקיים כנדרש) לכן

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{bmatrix} &= A^n\cdot\begin{bmatrix}F_1\\F_0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{bmatrix}\phi&\psi\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\phi^n&0\\0&\psi^n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-\psi\\-1&\phi\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{bmatrix}\phi&\psi\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\phi^n&0\\0&\psi^n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{bmatrix}\phi&\psi\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\phi^n\\-\psi^n\end{bmatrix}\\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{bmatrix}\phi&\psi\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\phi^n\\-\psi^n\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{bmatrix}\phi^{n+1}-\phi^{n+1}\\\phi^n-\psi^n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

לכן משוויון נקבל כי

$$\boxed{F_n = \frac{\phi^n-\psi^n}{\sqrt{5}} = \frac{\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}}$$

מ.ש.ל.ג.☺