אלגברה ליניארית 1 תשע"ח סמסטר ב - תרגיל 10

14 ביוני 2018

1. יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n \in \mathbb{N}$. תהי $T : \mathbb{F}^{n+1} \to \mathbb{F}^n$ ה"ל. נניח ש$v_1, v_2 \in \mathbb{F}^{n+1}$ בת"ל וכי מתקיים: $Tv_1 = Tv_2 = 0$. הוכיחו כי T אינה על.

2. יהי $n \in \mathbb{N}$. נתונים מרחבים וקטוריים V, W ותת-מרחב U של V כך ש- $\dim V = n + 4$, $\dim U = n$. כמו כן נתונות העתקות לינאריות, $S\colon V \to W$, $T\colon V \to W$ כך ש- $S(u) = T(u)$ לכל $u \in U$. הוכיחו כי $\dim(\mathrm{Im}S + \mathrm{Im}T) \leq n + 8$.

3. יהי $\mathbb{F}[[x]]$ מרחב הטורים הפורמליים מעל השדה $\mathbb{F}$. תנו דוגמא להעתקה $T : \mathbb{F}[[x]] \to \mathbb{F}[[x]]$ שהיא חח"ע אך לא על.
רמז: התבוננו בדוגמאות של ההעתקות הלינאריות שראיתם בכיתה.

4. נתבונן ב $\mathbb{R}^2$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, בבסיס הסטנדרטי $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ של $\mathbb{R}^2$, בבסיס $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ של $\mathbb{R}^2$, ובמטריצה $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. חשבו את $[T_A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$, $[T_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$, ואת $[T_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

5. נתונים מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$, בסיס $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ של V וה"ל $T : V \to \mathbb{R}^2$ כך ש

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

כאשר $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ בסיס של $\mathbb{R}^2$. בנוסף, נתון $v \in V$ כך ש $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. מצאו את Tv.

6. תהי $T : V \to W$ ה"ל, $(v_1, \ldots, v_k)$ בסיס של $\ker T$, $v_{k+1}, \ldots, v_n$ הם כך ש $(T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n))$ מהוה בסיס של ImT.
   א. הוכיחו כי $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ מהווה בסיס של V.
   ב. הניחו כי W נוצרת סופית. הוכיחו כי קיימים $w_1, \ldots, w_\ell \in W$ כך ש $\mathcal{C} = (T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n), w_1, \ldots, w_\ell)$ מהווה בסיס של W.
   ג. מצאו את $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

7. תת-מרחב U של $\mathbb{R}^3$ מוגדר ע"י $U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$. נגדיר $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ע"י $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_3 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$ לכל $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

א. הראו כי $\mathcal{B}=\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ מהווה בסיס של U.

ב. הוכיחו כי לכל $u\in U$ מתקיים $T(u)\in U$.

ג. הסיקו כי ההעתקה $T_U\colon U\to U$ שמוגדרת ע"י $T_U(u)=T(u)$ הנה העתקה לינארית.

ד. חשבו את $[T_U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

8. נתבונן ב- $\mathbb{R}^2$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, בבסיס $\mathcal{B}=\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\right)$ של $\mathbb{R}^2$ ובמטריצה $A=\begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix}$.
חשבו את $[T_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

9. נתבונן ב- $\mathbb{R}^2$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, בבסיס הסטנדרטי $\mathcal{E}$ של $\mathbb{R}^3$ ובבסיס $\mathcal{B}=\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right)$ של $\mathbb{R}^2$. נתונה העתקה לינארית $T\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ כך ש- $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}=\begin{bmatrix}-2&5&0\\1&0&-2\end{bmatrix}$. מצאו מטריצה A כך ש- $T=T_A$.

10. נתונים מרחב וקטורי W מעל $\mathbb{R}$, בסיס $\mathcal{C}=(w_1,w_2)$ של W, וגם העתקה לינארית $T\colon\mathbb{R}^2\to W$ כך ש-

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$$

כאשר $\mathcal{B}=\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right)$ בסיס של $\mathbb{R}^2$. בנוסף נתון $v\in\mathbb{R}^2$ כך ש- $[T(v)]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$. מצאו את v.

11. נתבונן ב- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ובהעתקה הלינארית $T\colon\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המוגדרת על ידי:

$$\forall f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}},x\in\mathbb{R},(Tf)(x)=f(x+1)$$

בתרגיל הקודם הוכחתם שאכן מדובר בהעתקה לינארית. בכל אחד מהסעיפים הבאים הראו כי $\mathcal{B}$ מהווה בסיס של $U=\operatorname{Span}(\mathcal{B})$, הוכיחו כי לכל $u\in U$ מתקיים $T(u)\in U$, כלומר $T_U\colon U\to U$ שמוגדר ע"י $T_U(u)=T(u)$ הנה העתקה לינארית, וחשבו את $[T_U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

א) $\mathcal{B}=(f,g,h,l)$, $f(x)=1$, $g(x)=x$, $h(x)=x^2$, $l(x)=x^3$

ב) $\mathcal{B}=(f,g,h)$, $f(x)=1$, $g(x)=2^x$, $h(x)=3^x$

ג) $\mathcal{B}=(f,g)$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$

12. יהיו V,W,Z מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהינה $S:W\to Z$, $T:V\to W$ ה"ל. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $\ker(S\circ T)\subseteq\ker T$.

ב. $\ker T\subseteq\ker(S\circ T)$.

ג. אם S היא חח"ע אז $\ker T=\ker(S\circ T)$.

13. יהי V מ"ו ממימד 3. האם קיימת ה"ל $T:V\to V$ כך ש $T\circ T\neq 0$ אך $T\circ T\circ T=0$?

רמז: האם קיימת העתקה $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ כך ש $f\circ f$ אינה הפוקנציה הקבועה אפס אך $f\circ f\circ f$ היא הפונקציה הקבועה אפס?