פתרון תרגיל מספר 2 - חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

16 באפריל 2020

שאלה 4:

סעיף 1:

צ"ל: $\text{Pref}(\text{Pref}(L)) = \text{Pref}(L)$

הוכחה:

נוכיח הכלה דו כיוונית:

.1

$$x \in \text{Pref}(L) \overset{x=x\cdot\varepsilon}{\Rightarrow} x\cdot\varepsilon \in \text{Pref}(L) \overset{u=\varepsilon}{\Rightarrow} (\exists u \in \Sigma^* \text{ s.t. } x\cdot u \in \text{Pref}(L)) \Rightarrow x \in \text{Pref}(\text{Pref}(L))$$

כלומר קיבלנו כי $\text{Pref}(L) \subseteq \text{Pref}(\text{Pref}(L))$

.2

$$\begin{aligned}
x \in \text{Pref}(\text{Pref}(L)) &\Rightarrow (\exists u \in \Sigma^* \text{ s.t. } x\cdot u \in \text{Pref}(L)) \\
&\Rightarrow (\exists w \in \Sigma^* \text{ s.t. } [\exists u \in \Sigma^* \text{ s.t. } x\cdot u\cdot w \in L]) \\
&\overset{v=u\cdot w}{\Rightarrow} [\exists v \in \Sigma^* \text{ s.t. } x\cdot v \in L] \Rightarrow x \in \text{Pref}(L)
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\text{Pref}(\text{Pref}(L)) \subseteq \text{Pref}(L)$

לכן מאיחוד 2 הכיוונים נקבל כי $\boxed{\text{Pref}(\text{Pref}(L)) = \text{Pref}(L)}$

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2:

צ"ל: $\text{Pref}(\text{Suff}(L)) = \text{Suff}(\text{Pref}(L))$

הוכחה:

נשים לב כי

$$\begin{aligned}
x \in \text{Pref}(\text{Suff}(L)) &\Leftrightarrow [\exists u \in \Sigma^* \text{ s.t. } x\cdot u \in \text{Suff}(L)] \\
&\Leftrightarrow [\exists u \in \Sigma^* \text{ s.t. } [\exists w \in \Sigma^* \text{ s.t. } w\cdot(x\cdot u) \in L]] \\
&\Leftrightarrow [\exists u, w \in \Sigma^* \text{ s.t. } (w\cdot x\cdot u \in L)] \\
&\Leftrightarrow [\exists w \in \Sigma^* \text{ s.t. } [\exists u \in \Sigma^* \text{ s.t. } (w\cdot x)\cdot u \in L]] \\
&\Leftrightarrow [\exists w \in \Sigma^* \text{ s.t. } w\cdot x \in \text{Pref}(L)] \Leftrightarrow x \in \text{Suff}(\text{Pref}(L))
\end{aligned}$$

לכן נקבל כי $x \in \text{Pref}(\text{Suff}(L)) \Leftrightarrow x \in \text{Suff}(\text{Pref}(L))$ ולכן $\boxed{\text{Pref}(\text{Suff}(L)) = \text{Suff}(\text{Pref}(L))}$ מההגדרה

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3:

צ"ל: אם L רגולרית אז $\mathrm{Pref}\left(L\right)$ רגולרית

הוכחה:

מהיות L רגולרית, קיים אוטומט $\mathcal{A}$ כך ש- $L\left(\mathcal{A}\right)=L$,

יהי $\mathcal{A}=\left\langle Q,\Sigma,\delta,q_0,F\right\rangle$ אוטומט כך ש- $L\left(\mathcal{A}\right)=L$,

נגדיר אוטומט DFA ששפתו תהיה $\mathrm{Pref}\left(L\right)$, נסמן $\mathcal{A}'=\left\langle Q,\Sigma,\delta,q_0,F'\right\rangle$

נגדיר $F'=\left\{q\mid\exists u\in\Sigma^*\text{ s.t. }\delta^*\left(q,u\right)\in F\right\}$,

נשים לב כי

$$\begin{aligned}x\in L\left(\mathcal{A}'\right)&\Leftrightarrow\delta^*\left(q_0,x\right)\in F'\Leftrightarrow\left[\exists u\in\Sigma^*\text{ s.t. }\delta^*\left(\delta^*\left(q_0,x\right),u\right)\in F\right]\\&\overset{\star}{\Leftrightarrow}\left[\exists u\in\Sigma^*\text{ s.t. }\delta^*\left(q_0,x\cdot u\right)\in F\right]\Leftrightarrow\left[\exists u\in\Sigma^*\text{ s.t. }x\cdot u\in L\left(\mathcal{A}\right)\right]\\&\Leftrightarrow\left[\exists u\in\Sigma^*\text{ s.t. }x\cdot u\in L\right]\Leftrightarrow x\in\mathrm{Pref}\left(L\right)\end{aligned}$$

כלומר הראנו כי $x\in\mathrm{Pref}\left(L\right)\Leftrightarrow x\in L\left(\mathcal{A}'\right)$ ולכן $\boxed{L\left(\mathcal{A}'\right)=\mathrm{Pref}\left(L\right)}$

הערה: נשים לב שמעבר $\star$ הוכח בשאלה 3 סעיף 1 שמתקיים $\delta^*\left(q,x\cdot y\right)=\delta^*\left(\delta^*\left(q,x\right),y\right)$ לכל $x,y\in\Sigma^*$, $q\in Q$

מ.ש.ל.ג.☺