פתרון תרגיל מספר 11 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

19 ביוני 2020

שאלה 3

סעיף 1

צ"ל: $2-DS \in \mathrm{NP}-COMPLETE$

הוכחה:

לא להגשה

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2

צ"ל: $SPATH \in P$

הוכחה:

נראה מכונה M שמכריעה את $SPATH$ בזמן פולינומי:

1. נסמן את הקלט כ־ $\langle G=\langle V,E\rangle ,s,t,k\rangle$
2. נריץ את $Floyd-Warshall$ כשהפונקצית משקל היא 1 לכל קודקוד ונשמור את התוצאה בטבלה T
3. נבדוק האם בתא ה־ $T\left[s,t,|V|\right]$ כתוב מספר שקטן מ־ k ואם כן נקבל אחרת נדחה

ראינו באלגו ש־ $Floyd-Warshall$ מחשב בזמן פולינומי בגרף את המרחק המינימלי של כל קודקוד מכל קודקוד אחר עם פונקצית משקל בהנחה ואין מעגלים שליליים (שלא קיימים אצלנו כי הפונקצית משקל אי שלילית)

זמן הריצה של M הוא פולינומי בגלל שזמן הריצה של $Floyd-Warshall$ פולינומי בקלט וגם מתקיים

$$\begin{aligned}\langle G=\langle V,E\rangle ,s,t,k\rangle \in SPATH &\iff \text{there exist a path from s to t with at most k length}\\ &\overset{\text{Floyd-Warshall is correct}}{\iff} T\left[s,t,|V|\right]\le k\\ &\iff \langle G=\langle V,E\rangle ,s,t,k\rangle \in L\left(M\right)\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $L\left(M\right)=SPATH$,

כלומר הראנו שקיימת מכונה M שמכריעה את $SPATH$ בזמן פולינומי ולכן $\boxed{SPATH\in P}$, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3

צ"ל: $U-ST-HAMPATH^{\le} \in \mathrm{coNP}-COMPLETE$

הוכחה:

בסעיף הבא נראה כי $\overline{U-ST-HAMPATH^{\le}\in \mathrm{coNP}}$,

נראה כי $\overline{U-ST-HAMPATH^{\le}} \in \mathrm{NP}$ (שפה שיש לפחות $k+1$ מסלולי המילטון) בעזרת מוודא פולינומי המקבל $\langle G,s,t,1^k\rangle \#S_1,\dots,S_{k+1}$ כאשר S_i הוא מסלול המילטון שונה לכל $i\in[k+1]$

המכונה תעשה:

1. לכל $i\in[k+1]$, נבדוק ש־ S_i הוא מסלול המילטון ב־ G מ־ s ל־ t, אם לא נדחה

2. לכל $i \neq j \in [k+1]$, נבדוק ש S_i, S_j לא אותו המסלול, אם לא נדחה

3. נקבל

נשים לב כי $|S_i| \leq |V|$ לכל $i \in [k+1]$,
נשים לב שזמן הריצה של בדיקה של קבוצה היא מסלול המילטון היא פולינומית ב־ G (ראינו בתרגול), לכן שלב 1 לוקח $O(k \cdot \text{time to check hamilton})$, שלב 2 לוקח $O\left((k+1)^2 \cdot |V|^2\right)$, לכן זמן הריצה של המכונה פולינומי

כלומר הראנו מכונה דטרמניסטית שהיא מוודא פולינומי לשפה $\overline{U-ST-HAMPATH^{\leq}}$, ולכן $\boxed{\overline{U-ST-HAMPATH^{\leq}} \in \text{NP}}$,
לכן קיבלנו כי $\boxed{U-ST-HAMPATH^{\leq} \in \text{coNP}}$,
עתה נשים לב כי $f(\langle G,s,t\rangle) = \langle G,s,t,1^0\rangle$ חשיבה בזמן פולינומי ואף לינארי ומתקיים

$$\begin{aligned}\langle G,s,t\rangle \in \overline{U-ST-HAMPATH} &\iff \text{there doesn't exists a hamilton path from s to t}\\ &\iff \text{there doesn't exists more than 0 Hamilton paths from s to t}\\ &f\langle G,s,t\rangle \in U-ST-HAMPATH^{\leq}\end{aligned}$$

כלומר הראנו שקיימת f חשיבה בזמן פולינומי המקיימת

$$\langle G,s,t\rangle \in \overline{U-ST-HAMPATH} \iff f(\langle G,s,t\rangle) \in U-ST-HAMPATH^{\leq}$$

ולכן $\overline{U-ST-HAMPATH} \leq_p U-ST-HAMPATH^{\leq}$, בתרגול ראינו כי $U-ST-HAMPATH \in \text{NP}-HARD$
ולכן $\overline{U-ST-HAMPATH} \in \text{coNP}-HARD$, ומטרנזטיביות נובע כי $\boxed{U-ST-HAMPATH^{\leq} \in \text{coNP}-HARD}$.
עתה, נשים לב שהראנו ש־ $U-ST-HAMPATH^{\leq} \in \text{coNP}$ וגם $U-ST-HAMPATH^{\leq} \in \text{coNP}-HARD$ ולכן מההגדרה $\boxed{U-ST-HAMPATH^{\leq} \in \text{coNP}-COMPLETE}$

מ.ש.ל.ג.☺

סעיף 4
צ"ל: $U-ST-HAMPATH^{\geq k} \in \text{NP}-COMPLETE$
הוכחה:
נראה כי $U-ST-HAMPATH^{\geq k} \in \text{NP}$ (שפה שיש לפחות k מסלולי המילטון) בעזרת מוודא פולינומי המקבל $\langle G,s,t\rangle \#S_1,\ldots,S_k$
כאשר S_i הוא מסלול המילטון שונה לכל $i \in [k]$
המכונה תעשה:

1. לכל $i \in [k]$, נבדוק ש־ S_i הוא מסלול המילטון ב־ G מ־ s ל־ t, אם לא נדחה

2. לכל $i \neq j \in [k]$, נבדוק ש S_i, S_j לא אותו המסלול, אם לא נדחה

3. נקבל

נשים לב כי $|S_i| \leq |V|$ לכל $i \in [k]$,
נשים לב שזמן הריצה של בדיקה של קבוצה היא מסלול המילטון היא פולינומית ב־ G (ראינו בתרגול), לכן שלב 1 לוקח $O(k \cdot \text{time to check hamilton})$, שלב 2 לוקח $O\left(k^2 \cdot |V|^2\right)$, נשים לב ש־ k הוא קבוע ולכן הוא לא משנה את זמן הריצה ולכן זמן הריצה הוא $O\left(|V|^2 + \text{time to check hamilton}\right)$, לכן זמן הריצה של המכונה פולינומי

כלומר הראנו מכונה דטרמניסטית שהיא מוודא פולינומי לשפה $U-ST-HAMPATH^{\geq k}$, ולכן $\boxed{U-ST-HAMPATH^{\geq k} \in \text{NP}}$,
עתה נשים לב כי $f(\langle G = \langle V,E\rangle, s,t\rangle) = \langle G' = \langle V',E'\rangle, x_0, t\rangle$ כאשר

$$\begin{aligned}&V \cap \{x_0,\ldots,x_k\} = \emptyset\\ &V' = V \cup \{x_0,\ldots,x_k\}\\ &E' = E \cup \{\{x_i,s\} \mid 1 \leq i \leq k\} \cup \{\{x_0,x_i\} \mid 1 \leq i \leq k\} \cup \{\{x_0,x_i\} \mid 1 \leq i \leq k\} \cup \{\{x_i,x_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq k\} \cup \{\{x_k,x_1\}\}\end{aligned}$$

נשים לב שלמצוא קבוצה $\{x_0,\dots,x_k\}$ שמקיימת את תנאי 1 לוקח לכל היותר $O(|V|\cdot k)$, לעדכן את V' לוקח לכל היותר $O(|V|+k)$, לעדכן את E' לוקח $O(|E|+k)$ ומיות k קבוע נקבל שזמן הריצה הוא $O(|V|+|E|)$ וזה פולינומי בקלט.
ועתה נשים לב שמתקיים:

1. יהי $\langle G,s,t\rangle \in U-ST-HAMPATH$ אזי קיים מסלול המילטון מ־ s ל־ t שנסמנו $s,v_1,\dots,v_n,t$, נשים לב ש־ $x_0,x_i,x_{i+1},\dots,x_k,x_1,\dots,x_{i-1},s,v_1,\dots,v_n,t$ הוא מסלול המילטון בגרף G' מ־ x_0 ל־ t המוגדר על ידי f שיצרנו לכל $1\le i\le k$. נשים לב שלכל $1\le i\ne j\le k$ המסלולים שונים ולכן הראנו שבגרף G' יש לפחות k מסלולי המילטון שונים מ־ x_0 ל־ t ולכן $f(\langle G,s,t\rangle)=\langle G',x_0,t\rangle \in U-ST-HAMPATH^{\ge k}$

2. יהי $f(\langle G,s,t\rangle)\in U-ST-HAMPATH^{\ge k}$ אזי קיים מסלול המילטון מ־ x_0 ל־ t בגרף G'. נשים לב שלאחר שנגיע לקודקוד s לא נוכל להגיע יותר לקודקודים $x_1,\dots,x_k$ ולכן הם אמורים להופיע במסלול המילטון לפני s וגם לא נוכל להגיע לאף קודקוד $s\ne v\in V$ לפני שנגיע ל־ s מהצלעות שהגדרנו, לכן קיים מסלול המילטון מ־ x_0 ל־ t בגרף G' שהוא מהצורה $x_0,x_i,x_{i+1},\dots,x_k,x_1,\dots,x_{i-1},s,v_1,\dots,v_n,t$.
נטען ש־ $s,v_1,\dots,v_n,t$ הוא מסלול המילטון ב־ G מ־ s ל־ t,
תחילה נשים לב שאף קודקוד לא מופיע פעמיים, אחרת $x_0,x_i,x_{i+1},\dots,x_k,x_1,\dots,x_{i-1},s,v_1,\dots,v_n,t$ לא היה מסלול המילטון.
עתה יהי $s,t\ne v\in V$, נשים לב ש־ $v\in V'$ ולכן הוא מופיע במסלול $x_0,x_i,x_{i+1},\dots,x_k,x_1,\dots,x_{i-1},s,v_1,\dots,v_n,t$ ומהנימוק שאמרנו מלעיל, הוא אמור להופיע לאחר s ולכן הוא מופיע במסלול $s,v_1,\dots,v_n,t$.
כלומר כל קודקוד מופיע לפחות פעם אחת במסלול ומופיע לכל היותר פעם אחת, לכן כל קודקוד מופיע בדיוק פעם אחת במסלול ולכן $s,v_1,\dots,v_n,t$ הוא מסלול המילטון ב־ G מ־ s ל־ t ולכן $\langle G,s,t\rangle\in U-ST-HAMPATH$

כלומר הראנו שקיימת f חשיבה בזמן פולינומי המקיימת

$$\langle G,s,t\rangle \in U-ST-HAMPATH \iff f(\langle G,s,t\rangle)\in U-ST-HAMPATH^{\ge k}$$

ולכן $U-ST-HAMPATH \le_p U-ST-HAMPATH^{\ge k}$, בתרגול ראינו כי $U-ST-HAMPATH\in \mathrm{NP}-HARD$
ולכן מטרנזטיביות נובע כי $\boxed{U-ST-HAMPATH^{\ge k}\in \mathrm{NP}-HARD}$.
עתה, נשים לב שהראנו ש־ $U-ST-HAMPATH^{\ge k}\in \mathrm{NP}$ וגם $U-ST-HAMPATH^{\ge k}\in \mathrm{NP}-HARD$ ולכן מההגדרה $\boxed{U-ST-HAMPATH^{\le}\in \mathrm{NP}-COMPLETE}$

מ.ש.ל.ד.☺

סעיף 5
צ"ל: $TSP\in \mathrm{NP}-COMPLETE$
הוכחה:
לא להגשה, רדוקציה ממסלול המילטון עם פונקצית משקל 1 לכל צלע ורצון למצוא מסלול המילטון עם משקל $|V|$ (כלומר כל מסלול שהוא)

מ.ש.ל.ה.☺