אינפי 2 - סמסטר א' תשע"ט
תרגיל בית 5

להגשה עד יום חמישי, 29 בנובמבר, בשעה 20:00 בערב, דרך תיבת ההגשה במודל

1. לכל אחד מהאינטגרלים הלא־אמיתיים הבאים, קבעו האם הוא מתכנס:

(א) $\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$. **הדרכה:** הרחיבו את הפונקציה $f(x)=\frac{\sin^2(x)}{x^2}$, המוגדרת על $(0,1]$, לפונקציה אינטגרבילית (במובן הרגיל) על $[0,1]$. אז השתמשו בשאלה 4 מתרגיל בית 4 ובהגדרת האינטגרל הלא־אמיתי.

(ב) $\int_1^2 \frac{1}{\ln(x)}dx$. **הדרכה:** אם ϵ קרוב מאוד לאפס, אז $\ln(1+\epsilon)$ הוא "בערך" ϵ. השתמשו בכך כדי לנחש לאיזה פונקציה להשוות את $\frac{1}{\ln(x)}$, ואז תנו הוכחה פורמלית.

(ג) $\int_1^\infty e^{-\sqrt{x}}dx$. **הדרכה:** השוו את e^{-x} לפונקציה מתאימה מהצורה x^α (בחרו α מתאים). אם אתם רוצים, תוכלו לבדוק את ההתכנסות בקרן $[a,\infty)$ לאיזה $a\geq 1$ שתרצו (הסבירו בעזרת הגדרת האינטגרל הלא־אמיתי למה זה שקול לשאלות ההתכנסות ב - $[1,\infty)$).

(ד) $\int_{e^2}^\infty \frac{\sin(x)}{\ln\ln(x)}dx$. **הדרכה:** הפתרון קצר למדי בעזרת הכלים שלנו.

(ה) $\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^{3/2}}dx$.

2. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. קבעו האם $\int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x^\alpha}dx$ מתכנס (התשובה יכולה להיות תלויה ב - α).
הדרכה: כדאי להיעזר בפתרון בעיה דומה מתרגולים 5 ו - 6. בשלב ראשון, הוכיחו שלכל $m\geq k$ טבעיים, מתקיים $\int_{2\pi k}^{2\pi m}\frac{\cos^2(x)}{x}dx\geq c\cdot\int_{2\pi k}^{2\pi m}\frac{1}{x}dx$ לאיזה קבוע $c>0$ (למשל, $c=\frac{1}{16}$ יכול להיות נוח). אז, השתמשו בקריטריון קושי כדי להראות שהאינטגרל בשאלה לא מתכנס עבור $\alpha=1$. נותר לטפל במקרים $\alpha>1$ ו - $\alpha<1$.

3. יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ כאשר $\beta>0$. הוכיחו ש - $\int_1^\infty x^\alpha\sin\left(x^\beta\right)dx$ מתכנס אם ורק אם $\alpha+1<\beta$.
הדרכה: עברו להגדרת האינטגרל הלא־אמיתי במונחי מושג האינטגרל על קטע סגור, השתמשו בשיטת ההצבה כדי להחליף את $\sin\left(x^\beta\right)$ ב - $\sin(u)$, ואז חזרו לאינטגרל לא־אמיתי (אחר מזה שהתחלנו ממנו). תקבלו שהתכנסות האינטגרל בשאלה שקולה להתכנסות של אינטגרל שכבר טיפלנו בו בתרגול.

4. יהיו $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ ו - $g:(0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות ואי־שליליות. הוכיחו או הפריכו (יש משהו בתרגול 6 שיכול לעזור):

(א) אם $\int_1^\infty f$ מתכנס, אז f חסומה.

(ב) **בונוס (5 נקודות):** אם $\int_0^1 g$ מתכנס, אז g חסומה.

5. לכל אחד מהטורים הבאים, קבעו האם הוא מתכנס:

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-2+1/n} \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{n+1}{2n^2-51n}$$

6. תהי $(a_n)_{n=1}^\infty$ סדרה של מספרים ממשיים חיוביים. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{a_n+1}$ מתכנס.