מבני נתונים 67109
תרגיל 14

להגשה: עד ה־10/7/2019 בשעה 23:55

שאלה 1 ־ עץ פורש מינימאלי

1. תארו אלגוריתם שבהינתן $G =< V, E >$ גרף קשיר לא ממושקל, מוצא עץ פורש מינימאלי בזמן של $O(|E| + |V|)$. הוכיחו את נכונות האלגוריתם, ונתחו את זמן הריצה.
2. נתון גרף G לא מכוון ממושקל, כאשר ידוע שהמשקולות הם מספרים טבעיים, וכן כי $\sum_{u,v\in E} W(u, v) = O(|V|)$.
   (א) הציגו אלגוריתם אשר בהינתן גרף G וקודקוד $s \in V$ כלשהו, מחזיר לכל קודקוד $v \in V$ את המרחק הממושקל שלו מ־s, ב־ $O(|E| + |V|)$.
   (ב) הוכיחו כי הוא עומד בזמן הריצה.
   (ג) הסבירו את נכונות האלגוריתם, אין צורך להוכיח פורמלית.
3. הוכיחו בעזרת למת החתך: אם בגרף קשיר לא מכוון וממושקל G יש צלע יחידה ממשקל מקסימלי e ויש עץ פורש מינימלי T שהיא נמצאת בו $e \in T$, אזי הסרת הצלע מ־G תהפוך אותו ללא־קשיר. כלומר הגרף $< V, E \setminus \{e\} >$ אינו קשיר.

שאלה 2 ־ הוכחת דייקסטרה

1. הוכיחו את הלמות הבאות:
   (א) למה 1: תת מסלול של מסלול קצר ביותר הוא גם מסלול קצר ביותר
   (ב) למה 2: לכל קודקוד $v \in V$ בכל שלב באלגוריתם מתקיים כי $v.dist \geq \delta(v)$ כאשר $\delta(v)$ הוא המרחק המינימאלי האמיתי של v מקודקוד ההתחלה s.
2. הוכיחו את נכונות האלגוריתם דייקסטרה, ע"י שימוש בהוכחה באינדוקציה על גודל הקבוצה R של הטענה הבאה: בכל שלב באלגוריתם, מתקיים לכל קודקוד $v \in R$ $v.dist = \delta(v)$.

שאלה 3 - שימוש בדייקסטרה

1. שנו את אלגוריתם דייקסטרה כך שיחזיר, בנוסף לאורך המסלול המינימאלי של כל קודקוד מs, גם תת גרף המכיל מסלול יחיד מ־s לכל קודקוד והוא קצר ביותר, נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם שקיבלתם.
2. נקרא לתת הגרף המכיל את המסלול הקצר לכל קודקוד (שהתקבל מפתרון הסעיף הקודם) "גרף המסלולים הקצרים".
   (א) הוכיחי או הפריכי: גרף המסלולים הקצרים הוא עץ.
   (ב) הוכח או הפרך: גרף המסלולים הקצרים הוא עץ פורש מינימאלי.
3. למדנו בכיתה והראתם בתרגיל הקודם כי דייקסטרה לא מקבל גרף עם משקולות שליליים.
   נציע את הפתרון הבא: בהינתן $G =< V, E >$ גרף ממושקל בעל משקולות שליליים, נמצא את הצלע המינימאלית בE נסמנה בe ונוסיף לכל צלעות הגרף את הערך $|w(e)|$ לכל הצלעות בגרף ונסמן את הגרף המחודש כG'.
   כעת כל הצלעות בעלות משקל אי שלילי.
   הוכיחו או הפריכו: האלגוריתם דייקסטרה יחזיר תשובה נכונה, קרי גרף המסלולים הקצרים שיתקבל בריצה על G' יהיה נכון עבור הגרף עם המשקולות המקוריים G.

שאלה 4 - קרוסקל

יהי $G =< V, E >$ גרף לא מכוון וקשיר. הוכיחו את הטענות הבאות (אין להסתמך על סעיף 2 בפתרון סעיף 1):

1. אם נתחיל בתת־גרף על כל הקודקודים, בו אין צלעות, וכל עוד יש צלע ב־G שלא בתת־הגרף והוספתה לתת־הגרף לא תסגור מעגל בו - נוסיף צלע כזו, אזי כשנסיים תת־הגרף יהיה עץ פורש.
2. יהי T תת הגרף שהאלגוריתם של קרוסקל מוצא בריצה על G, אזי כל הקודקודים של G הם ברכיב קשירות יחיד בT.

שאלה 5 - אינדוקציה לא נכונה

מצאו כמה שיותר טעויות בהוכחה הבאה והסבירו כל אחת מהן.

<u>הגדרה:</u> נגדיר גרף כללי לא מכוון להיות גרף לא מכוון שיכולות להיות בו מספר צלעות שמחברות אותו זוג קודקודים (כלומר ריבוי של צלעות).

<u>הגדרה:</u> בהנתן גרף G כללי לא מכוון, נגדיר דרגה של קודקוד v להיות מספר הצלעות שאחד מקודקודיהן הוא v.

<u>טענה:</u> לכל גרף לא מכוון כללי עם לפחות שני קודקודים, שדרגת כל קודקוד בו זוגית, קיים מסלול $v_1, ..., v_n$ (כלומר לכל $1 \leq i < n$ מתקיים $(v_i, v_{i+1}) \in E$) כך שמסלול זה עובר בכל צלע של G בדיוק פעם אחת. <u>הוכחה:</u> נוכיח את הטענה באינדוקציה על מספר הקודקודים בגרף $|V|$.

<u>בסיס:</u> עבור $|V| = 2$ יש לגרף שני קודקודים x ו־y. אזי אם ביניהם יש מספר זוגי של צלעות,

ניתן לייצר מסלול על ידי סידור הצלעות בסדר כלשהו והמסלול יהיה פשוט מעבר על הצלעות לפי סדר זה, כל פעם בכיוון המתאים (המסלול יהיה $x-y-x-y-x-y-\cdots-y-x$).
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה לגרף עם $|V|=N$ קודקודים. נבנה גרף עם $N+1$ קודקודים על ידי הוספת קודקוד z, ומספר צלעות זוגי שנוגעות כולן בקודקוד החדש. על מנת שיתקבל גרף שבו עדיין דרגת כל קודקוד זוגית, צריך להוסיף מספר זוגי של צלעות מz לכל קודקוד אחר x (כי מקודם דרגת הקודקוד x היתה זוגית, ועל מנת שתשאר זוגית צריך להוסיף לה מספר זוגי של צלעות). אם כך, ניתן לבנות מסלול שכולל את כל הצלעות על ידי כך שנשנה את המסלול בגרף המקורי באופן הבא: המסלול יוגדר כמקודם, אלא שבכל פעם שהמסלול מגיע לקודקוד $w \neq z$ שעוד לא עברנו בו ושיש צלעות בינו ובין z, נעבור הלוך ושוב לz עד שנעבור על כל הצלעות בין w לz. מאחר שמספר הצלעות בין w ל־z זוגי, נסיים את החלק הזה בw ומשם נוכל להמשיך במסלול המקורי, לאחר שכיסינו את כל הצלעות שהוספנו בין z ל־w.