פתרון תרגיל מספר 5 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

7 במאי 2020

שאלה 4

צ"ל: אם $\mathcal{M}$ שהוא TM רץ לכל היותר t צעדים אז $L(\mathcal{M}) \in REG$

הוכחה:

תחילה תהי מילה $w \in \Sigma^*$ המקיימת $|w| \geq t$, נסמן $w = \sigma_1 \dots \sigma_n$ כאשר $\sigma_i \in \Sigma$,
נגדיר $Pref_t(w) = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_t$
עתה יהיו $x, y \in \Sigma^*$ כך ש־ $|x| \geq t$ וגם $|y| \geq t$ וגם מתקיים $Pref_t(x) = Pref_t(y)$
יהי $z \in \Sigma^*$, נשים לב שהריצה של $\mathcal{M}$ על $x \cdot z$ וגם של $y \cdot z$ תלויה לכל היותר ב־ t הצעדים הראשונים, כלומר הריצה של $\mathcal{M}$ על $x \cdot z$ וגם על $y \cdot z$ תלויה לכל היותר ב־ $Pref_t(x \cdot z)$ וב־ $Pref_t(y \cdot z)$.
נשים לב כי $Pref_t(x \cdot z) = Pref_t(x) = Pref_t(y) = Pref_t(y \cdot z)$
ולכן הריצה של $\mathcal{M}$ על $x \cdot z$ וגם על $y \cdot z$ תהיה זהה, כלומר $x \cdot z \in L(\mathcal{M}) = L$ אם"ם $y \cdot z \in L(\mathcal{M}) = L$
כלומר קיבלנו שלכל מילה $z \in \Sigma^*$ מתקיים $x \cdot z \in L(\mathcal{M}) = L$ אם"ם $y \cdot z \in L(\mathcal{M}) = L$, כלומר $x \sim_L y$,
לכן נשים לב כי

$$\{[w] \mid w \in \Sigma^*, |w| \geq t\} = \{Pref_t(w) \mid w \in \Sigma^*, |w| \geq t\} = \{w \mid w \in \Sigma^*, |w| = t\}$$

ולכן נקבל כי

$$\begin{aligned}\{[w] \mid w \in \Sigma^*\} &= \{[w] \mid w \in \Sigma^*, |w| \geq t\} \cup \{[w] \mid w \in \Sigma^*, |w| < t\} \\ &= \{w \mid w \in \Sigma^*, |w| = t\} \cup \{[w] \mid w \in \Sigma^*, |w| < t\}\end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned}|\{[w] \mid w \in \Sigma^*, |w| < t\}| &\leq \sum_{l=1}^{t-1} |\{[w] \mid w \in \Sigma^*, |w| = l\}| \leq \sum_{l=1}^{t-1} |\{w \mid w \in \Sigma^*, |w| = l\}| \\ &\leq \sum_{l=1}^{t-1} |\Sigma|^l\end{aligned}$$

כלומר נקבל ש־

$$\begin{aligned}|\{[w] \mid w \in \Sigma^*\}| &= |\{w \mid w \in \Sigma^*, |w| = t\} \cup \{[w] \mid w \in \Sigma^*, |w| < t\}| \\ &\leq |\{w \mid w \in \Sigma^*, |w| = t\}| + |\{[w] \mid w \in \Sigma^*, |w| < t\}| \\ &\leq |\Sigma|^t + \sum_{l=1}^{t-1} |\Sigma|^l = \sum_{l=1}^{t} |\Sigma|^l < \infty\end{aligned}$$

נשים לב ש־ $\sum_{l=1}^{t} |\Sigma|^l$ זה מספר סופי, כלומר קיבלנו שמספר מחלקות השקילות של השפה $L(\mathcal{M})$ הוא סופי,
ולכן לפי משפט $Myhill - Nerode$, נקבל שהשפה רגולרית, כלומר $L = L(\mathcal{M}) \in REG$

מ.ש.ל.☺