

פתרון בעיות באלגוריתמים - תרגיל 2

להגשה ב-2 בדצמבר ב-23:59

1. המשחק פקמן:

מפתחי המשחק פקמן פיתחו גרסה חדשה למשחק. בגרסה זו, הדמות זזה על גבי הסריג הדו־מימדי במאוזן או במאונך, ו"אוכלת" נקודות המפוזרות בו. עם זאת, כעת המטרה היא "לאכול" את הנקודות לפי סידור נתון מראש שלהן. כמו כן, הדמות יכולה "לאכול" נקודה על ידי עמידה על אחד הצירים שעליו הנקודה נמצאת, כלומר על הדמות להימצא באותה קואורדינטה x או באותה קואורדינטה y של הנקודה.

מפתחי המשחק ארגנו תחרות תכנות, בה המטרה היא לפתח אלגוריתם שבהינתן מיקום הנקודות והסדר שלהן, מנצח במשחק תוך מספר מינימלי של צעדים. פורמלית, הקלט הוא סדרת n נקודות במישור $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ והפלט הוא המספר המינימלי של צעדים שעל הדמות שבראשית הצירים לעבור כדי "לאכול" את n הנקודות לפי הסדר.

לפניכם מוצעת טענה: לכל קלט $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ קיים מסלול אופטימלי p_1, \dots, p_n כך שכל רישא באורך i שלו היא מסלול אופטימלי לרישא באורך i של הקלט, לכל i . הנקודה p_k בתיאור זה של המסלול היא זו שממנה הדמות "אוכלת" את הנקודה k -ה בקלט, לכל k .

אם לדעתכם הטענה נכונה, הוכיחו את נכונותה והציעו אלגוריתם יעיל לבעיה המבוסס עליה, כלומר שזמן ריצתו פולינומי. אם לדעתכם היא לא נכונה, תארו דוגמא נגדית, והציעו אלגוריתם כלשהו, לא בהכרח יעיל, עבור הבעיה. הסבירו בכל מקרה נכונות וזמן ריצה.

בנוסף: פתרונות שזמן ריצתם הוא **טוב יותר** מ- $O(n^2)$ תחת ההנחה כי כל נקודות הקלט ממוקמות בתת־ריבוע של הסריג, המכיל $O(n)$ נקודות מהסריג, יזכו ב-10 נקודות בonus. פתרונות בעלי זמן ריצה כזה שלא מסתמכים על הנחה זו, יזכו ב-40 נקודות. הסבירו בקצרה נכונות וזמן ריצה.

2. סדרת טבעיים משורשרת:

תארו מבנה נתונים המקבל בשלב האתחול כקלט סדרת מספרים טבעיים שאורכה n ומספר טבעי k , המייצגים יחד סדרה גדולה יותר שאורכה $n \cdot k$, ומורכבת משרשרת הסדרה המקורית k פעמים. על מבנה הנתונים לתמוך בפעולת שאילתת סכום על קטע רצוף בסדרה הארוכה בעלות $O((k + \log n) \cdot \log k)$, ובפעולת עדכון ערך יחיד בסדרה זו בעלות $O(\log n \cdot \log k)$. בנוסף לפעולות אלה, תארו את פעולת אתחול המבנה, כך שתפעל בזמן ריצה $O(n)$. שימו לב כי לאחר פעולת העדכון על המבנה אין הכרח שהוא יהיה בפורמט סדרת טבעיים משורשרת. הסבירו בקצרה את הנכונות ואת זמן הריצה של הפעולות, ושימו לב לדרישת זמן הריצה של פעולת האתחול.