פתרון תרגיל מספר 11 ־ מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

9 ביוני 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** התפלגות Y
הוכחה:
תחילה נשים לב כי

$$F_X\left(t\right)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{t}\frac{1}{\pi}dx=\frac{t+\frac{\pi}{2}}{\pi}$$

עתה נשים לב כי

$$F_Y\left(t\right)=\mathbb{P}\left(\tan\left(X\right)\leq t\right)=\mathbb{P}\left(X\leq\arctan\left(t\right)\right)=F_X\left(\arctan\left(t\right)\right)=\frac{\arctan\left(t\right)+\frac{\pi}{2}}{\pi}$$

כלומר קיבלנו כי

$$\boxed{F_Y\left(t\right)=\frac{\arctan\left(t\right)+\frac{\pi}{2}}{\pi}}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** התפלגות Y
הוכחה:
תחילה נשים לב כי עבור $t\leq 0$ מתקיים

$$F_Y\left(t\right)=0$$

עתה עבור $t>0$ מתקיים

$$F_Y\left(t\right)=\mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda}\log\left(X\right)\leq t\right)=\mathbb{P}\left(e^{-\lambda t}\leq X\right)=1-F_X\left(e^{-\lambda t}\right)=1-e^{-\lambda t}$$

כלומר קיבלנו כי

$$\boxed{F_Y\left(t\right)=\begin{cases}0 & t\leq 0\\ 1-e^{-\lambda t} & t>0\end{cases}}$$

וגם נשים לב כי

$$\boxed{f_Y\left(t\right)\sim\exp\left(1\right)}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** התפלגות Y
הוכחה:
תחילה נשים לב כי עבור $t \leq 1$ מתקיים

$$F_Y(t) = 0$$

עתה עבור $t > 1$ מתקיים

$$F_Y(t) = \mathbb{P}\left(e^X \leq t\right) = \mathbb{P}\left(X \leq \log(t)\right) = F_X(\log(t)) = 1 - e^{-\log(t)} = 1 - \frac{1}{t}$$

כלומר קיבלנו כי

$$\boxed{F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{t} & t > 1 \end{cases}}$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** התפלגות Y
הוכחה:
תחילה נשים לב כי עבור $t \geq 1$ מתקיים

$$F_Y(t) = 1$$

עתה נשים לב כי עבור $t < 0$ מתקיים

$$F_Y(t) = 0$$

עתה עבור $0 < t < 1$ תחילה נשים לב כי

$$F_X(t) = \int_{-1}^{t} \frac{1}{1-(-1)} dx = \frac{t+1}{2}$$

לכן נציב ונקבל

$$F_Y(t) = \mathbb{P}\left(X^2 \leq t\right) = \mathbb{P}\left(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}\right) = F_X\left(\sqrt{t}\right) - F_X\left(-\sqrt{t}\right) = \frac{\sqrt{t}+1}{2} - \frac{-\sqrt{t}+1}{2} = \sqrt{t}$$

כלומר קיבלנו כי

$$\boxed{F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sqrt{t} & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}}$$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** התפלגות Y
הוכחה:
תחילה נשים לב כי עבור $t \geq 1$ מתקיים

$$F_Y(t) = 1$$

עתה נשים לב כי עבור $t < 0$ מתקיים

$$F_Y(t) = 0$$

עתה עבור $0 < t < 1$ תחילה נשים לב כי

$$F_X\left(t\right) = \int_{-1}^{t} \frac{1}{1-\left(-1\right)} dx = \frac{t+1}{2}$$

לכן נציב ונקבל

$$F_Y\left(t\right) = \mathbb{P}\left(\left|X\right| \le t\right) = \mathbb{P}\left(-t \le X \le t\right) = F_X\left(t\right) - F_X\left(-t\right) = \frac{t+1}{2} - \frac{-t+1}{2} = t$$

כלומר קיבלנו כי

$$\boxed{F_Y\left(t\right) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \le t \le 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}}$$

מ.ש.ל.ה.☺

(ו) **צ"ל:** התפלגות Y
הוכחה:
תחילה נשים לב כי עבור $t \le 0$ מתקיים

$$F_Y\left(t\right) = 0$$

עתה עבור $1 > t > 0$ מתקיים

$$F_Y\left(t\right) = \mathbb{P}\left(e^{-X} \le t\right) = \mathbb{P}\left(-X \le \log\left(t\right)\right) = \mathbb{P}\left(-\log\left(t\right) \le X\right) = 1 - F_X\left(-\log\left(t\right)\right) = 1 - \left(1 - e^{-\left(-\log\left(t\right)\right)}\right) = t$$

כלומר קיבלנו כי

$$\boxed{F_Y\left(t\right) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \le t \le 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}}$$

התפלגות זאת היא ההתפלגות $U\left[0,1\right]$

מ.ש.ל.ו.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{E}\left[X_i\right], \mathrm{Var}\left[X_i\right]$
הוכחה:
תחילה נשים לב שיש $\frac{18}{38}$ לניצחון, לכן

$$\mathbb{E}\left[X_i\right] = \sum_{x \in \mathrm{Im} X_i} x \cdot \mathbb{P}_{X_i}\left(x\right) = 1 \cdot \mathbb{P}\left(win\right) - 1 \cdot \mathbb{P}\left(lose\right) = \frac{18}{38} - \frac{20}{38} = -\frac{2}{38}$$

עתה נשים לב כי

$$\mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \sum_{x \in \mathrm{Im} X_i} x^2 \cdot \mathbb{P}_{X_i}\left(x\right) = 1 \cdot \mathbb{P}\left(win\right) + 1 \cdot \mathbb{P}\left(lose\right) = \frac{18}{38} + \frac{20}{38} = 1$$

לכן

$$\mathrm{Var}\left[X_i\right] = \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{19}\right)^2 = \frac{360}{361}$$

כלומר

$$\boxed{\mathbb{E}\left[X_i\right]=-\frac{1}{19}, \operatorname{Var}\left[X_i\right]=\frac{360}{361}}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(S_n \geq 0\right)$
הוכחה:
נשים לב כי $\mathbb{E}\left[X_1\right]=\cdots=\mathbb{E}\left[X_n\right]=\mu$, $\operatorname{Var}\left[X_1\right]=\cdots=\operatorname{Var}\left[X_n\right]=\sigma^2$,
לכן ממשפט הגבול המרכזי מתקיים

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_n \geq 0\right) & =\mathbb{P}\left(\frac{S_n-\mu \cdot n}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \geq \frac{-\mu \cdot n}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}}\right)=\mathbb{P}\left(\frac{S_n-\mu \cdot n}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \geq \frac{-\left(-\frac{1}{19}\right) \cdot 19^2}{\sqrt{19^2 \cdot \sigma^2}}\right) \\
& =\mathbb{P}\left(\frac{S_n-\mu \cdot n}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \geq \frac{19}{\sqrt{19^2-1}}\right) \approx \mathbb{P}\left(\frac{S_n-\mu \cdot n}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \geq 1\right) \\
& \approx \mathbb{P}(Z \geq 1)=F_Z(1) \approx 0.1587
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ב.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $x<x^2+1$
הוכחה:
נחלק למקרים

i. אם $x<0$ אז צד שמאל שלילי וימין חיובי ולכן הטענה ברורה
ii. אם $0 \leq x<1$ אז

$$x<1<x^2+1$$

iii. אחרת $x \geq 1$, לכן

$$x \leq x^2<x^2+1$$

כלומר הטענה נכונה לכל $x \in \mathbb{R}$, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{E}[X]$ קיים
הוכחה:
נשים לב כי

$$\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[|X|] \stackrel{|x| \leq x^2+1}{\leq} \mathbb{E}\left[X^2+1\right]=\mathbb{E}\left[X^2\right]+1$$

לכן מהיות $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ קיים, נקבל כי $\mathbb{E}[X]$ קיים

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\mathbb{E}\left[X\right]$ קיים אבל $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ לא קיים
הוכחה:
נבחר $f_X\left(t\right)=\frac{2}{t^3}$, לכל $t\geq 1$, אחרת $f_X\left(t\right)=0$, תחילה נראה שזאת צפיפות

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_X\left(t\right)dt=\int_{1}^{\infty}\frac{2}{t^3}dt=2\cdot\left(\frac{1}{-2t^2}\mid_1^{\infty}\right)=1$$

כלומר זאת צפיפות, עתה נשים לב כי

$$\mathbb{E}\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}t\cdot f_X\left(t\right)dt=\int_{1}^{\infty}\frac{2}{t^2}dt=2\cdot\left(\frac{1}{-t}\mid_1^{\infty}\right)=2$$

לכן $\mathbb{E}\left[X\right]$ קיים, עתה נשים לב כי

$$\mathbb{E}\left[X^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}t^2\cdot f_X\left(t\right)dt=\int_{1}^{\infty}\frac{2}{t}dt=2\cdot\left(\log\left(t\right)\mid_1^{\infty}\right)=\text{doesn't exists}$$

לכן $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ לא קיים, כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{E}\left[Z_n\right]$, $\mathrm{Var}\left[Z_n\right]$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי $Y_i=0$ אם"ם $X_i=X_{i+1}=0$, לכן $Y_i\sim Ber\left(\frac{3}{4}\right)$, לכן לפי מה שראינו בהרצאה מתקיים

$$\mathbb{E}\left[Y_i\right]=\frac{3}{4}$$

לכן

$$\mathbb{E}\left[Z_n\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[Y_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{4}=\frac{3}{4}n$$

לכן $\boxed{\mathbb{E}\left[Z_n\right]=\frac{3}{4}n}$, עתה נחשב את $\mathrm{Var}\left[Z_n\right]$, נשים לב כי

$$\mathrm{Var}\left[Z_n\right]=\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\left[Y_i\right]+2\cdot\sum_{i<j}Cov\left(Y_i,Y_j\right)$$

עתה נשים לב כי

$$\mathrm{Var}\left[Y_i\right]=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{16}$$

נניח כי $j>i$, אזי עבור $j\neq i+1$ מתקיים $Cov\left(Y_i,Y_j\right)=0$ כי הם בלתי תלויים,
ועבור $j=i+1$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left[Y_i\cdot Y_{i+1}\right]=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\mathbb{P}\left(X_{i+1}=1\right)}+\underbrace{\frac{1}{8}}_{\mathbb{P}\left(X_i=1\cap X_{i+1}=0\cap X_{i+2}=1\right)}=\frac{5}{8}$$

לכן

$$Cov\left(Y_i,Y_j\right)=\mathbb{E}\left[Y_i\cdot Y_{i+1}\right]-\mathbb{E}\left[Y_i\right]\cdot\mathbb{E}\left[Y_{i+1}\right]=\frac{5}{8}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

נציב ונקבל

$$\boxed{\mathrm{Var}\left[Z_n\right] = \frac{3}{16}n + 2\cdot(n-1)\frac{1}{16} = \frac{5n-2}{16}}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(Z_n = \frac{n}{2}\right) \to 0$

הוכחה:

מאי שוויון צ'כישב מתקיים

$$0 \le \mathbb{P}\left(Z_n = \frac{n}{2}\right) \le \mathbb{P}\left(\left|Z_n - \frac{3}{4}n\right| \le \frac{n}{4}\right) \le \frac{\mathrm{Var}\left[Z_n\right]}{\left(\frac{n}{4}\right)^2} = \frac{5n-2}{n^2} \to 0$$

לכן ממשפט סנדוויץ' מתקיים כי $\boxed{\mathbb{P}\left(Z_n = \frac{n}{2}\right) \to 0}$

מ.ש.ל.ב.☺