# פתרון תרגיל מספר 2 - חישוביות וסיבוכיות

**שם:** מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

16 באפריל 2020

## שאלה 3:

### סעיף 1:

**צ"ל:** $\delta^*(q, u \cdot v) = \delta^*(\delta^*(q, u), v)$

**הוכחה:**

יהי $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ אוטומט, יהיו $u, v \in \Sigma^*$ מילים.

נוכיח באינדוקציה על אורך המילה $v$ שמתקיים $\delta^*(q, u \cdot v) = \delta^*(\delta^*(q, u), v)$

<u>בסיס:</u> $|v| = 0$, אזי $v = \varepsilon$, כלומר מתקיים

$$\delta^*(\delta^*(q, u), v) = \delta^*(\delta^*(q, u), \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \delta^*(q, u) \stackrel{u=u\cdot\varepsilon}{=} \delta^*(q, u \cdot \varepsilon) = \delta^*(q, u \cdot v)$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\delta^*(q, u \cdot v) = \delta^*(\delta^*(q, u), v)}$, כמו שרצינו

<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה לכל מילה באורך $n-1$ ונוכיח למילה באורך $n$

נסמן $v = \sigma_1 \dots \sigma_n$ כאשר $\sigma_i \in \Sigma$, ונסמן $w = \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$, לכן מתקיים $v = w \cdot \sigma_n$,

נשים לב כי $|w| = n-1$ ולכן מהנחת האינדוקציה מתקיים $\delta^*(\delta^*(q, u), w) \stackrel{\star}{=} \delta^*(q, u \cdot w)$,

לכן נשים לב כי

$$\delta^*(\delta^*(q, u), v) = \delta^*(\delta^*(q, u), w \cdot \sigma_n) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(\delta^*(\delta^*(q, u), w), \sigma_n) \stackrel{\star}{=} \delta(\delta^*(q, u \cdot w), \sigma_n)$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \delta^*(q, u \cdot w \cdot \sigma_n) = \delta^*(q, u \cdot (w \cdot \sigma_n)) = \delta^*(q, u \cdot v)$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\delta^*(q, u \cdot v) = \delta^*(\delta^*(q, u), v)}$, כנדרש

כלומר הוכחנו שלכל $u, v \in \Sigma^*$ מתקיים $\delta^*(q, u \cdot v) = \delta^*(\delta^*(q, u), v)$

מ.ש.ל.א.☺

### סעיף 2:

**צ"ל:** השפה של האוטומט והוכחה שזאת השפה

**הוכחה:**

נגדיר פונקצית עזר $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ באופן הבא: תהי $w \in \Sigma^*$ מילה, נגדיר את $f(w)$ להיות המספר ש- $w$ מייצג (בבסיס עשרוני), בנוסף נגדיר נגדיר $f(\varepsilon) = 0$

עתה נוכיח באינדוקציה על אורך $w$ ש- $\boxed{\delta^*(q_0, w) = q_i \Leftrightarrow f(w) \equiv i \mod 3}$

<u>בסיס:</u> $|w| = 0$, אזי $w = \varepsilon$ אזי הריצה של האוטומט על $w$ מסתיים ב- $q_0$ וגם מתקיים $f(\varepsilon) = 0 \equiv 0 \mod 3$, כלומר $\boxed{\delta^*(q_0, w) = q_0 \Leftrightarrow f(w) \equiv 0 \mod 3}$ כנדרש

<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה לכל מילה באורך $n-1$, ונוכיח לכל מילה באורך $n$

נסמן $w = \sigma_1 \dots \sigma_n$ כאשר $\sigma_i \in \Sigma$, נסמן $u = \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$ אזי $w = u \cdot \sigma_n$

נשים לב שאם $\sigma_n = 0$ אז מתקיים $f(w) = 2 \cdot f(u)$ ואם $\sigma_n = 1$ אז מתקיים $f(w) = 2 \cdot f(u) + 1$

נשים לב כי $\delta^*(q_0, w) = \delta^*(q_0, u \cdot \sigma_n) = \delta(\delta^*(q_0, u), \sigma_n)$,

נשים לב כי $|u| = n-1$ ולכן מהנחת האינדוקציה $f(u) \equiv i \mod 3$ כאשר $\delta^*(q_0,u) = q_i$
נפתור עם טבלה שמייצגת לכל מצב אפשרי ל־ $\delta^*(q_0,u)$ ולכל פעולה $\sigma_n$ את המצב של $\delta^*(q_0,w)$ ואת שארית החלוקה שלו ב־

3

| $\delta^*(q_0,u) \setminus \sigma_n$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_0$ | $\delta^*(q_0,w) = \delta(\delta^*(q_0,u),\sigma_n) = \delta(q_0,0) = q_0$ | $\delta^*(q_0,w) = \delta(\delta^*(q_0,u),\sigma_n) = \delta(q_0,1) = q_1$ |
| $q_1$ | $\delta^*(q_0,w) = \delta(\delta^*(q_0,u),\sigma_n) = \delta(q_1,0) = q_2$ | $\delta^*(q_0,w) = \delta(\delta^*(q_0,u),\sigma_n) = \delta(q_1,1) = q_0$ |
| $q_2$ | $\delta^*(q_0,w) = \delta(\delta^*(q_0,u),\sigma_n) = \delta(q_2,0) = q_1$ | $\delta^*(q_0,w) = \delta(\delta^*(q_0,u),\sigma_n) = \delta(q_2,1) = q_2$ |

| $\delta^*(q_0,u) \setminus \sigma_n$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_0$ | $f(w) = 2 \cdot f(u) \equiv 2 \cdot 0 \equiv 0 \mod 3$ | $f(w) = 2 \cdot f(u) + 1 \equiv 2 \cdot 0 + 1 \equiv 1 \mod 3$ |
| $q_1$ | $f(w) = 2 \cdot f(u) \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2 \mod 3$ | $f(w) = 2 \cdot f(u) + 1 \equiv 2 \cdot 1 + 1 \equiv 3 \equiv 0 \mod 3$ |
| $q_2$ | $f(w) = 2 \cdot f(u) \equiv 2 \cdot 2 \equiv 1 \mod 3$ | $f(w) = 2 \cdot f(u) + 1 \equiv 2 \cdot 2 + 1 \equiv 5 \equiv 2 \mod 3$ |

נשים לב שקיבלנו שהשארית היא $i$ בטבלה אם"ם $\delta^*(q_0,w) = q_i$ (השוואת טבלאות)
נשים לב שעברנו על כל המקרים והראנו שלכל קומבינציה אפשרית של $\delta^*(q_0,u)$ ולכל פעולה $\sigma_n$ מתקיים ש־

$$\boxed{\delta^*(q_0,w) = q_i \Leftrightarrow f(w) \equiv i \mod 3}$$

עתה נגדיר $\boxed{L = \{w \in \Sigma^* \mid f(w) \equiv 0 \mod 3\}}$
נשים לב כי

$$w \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \delta^*(q_0,w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q_0,w) = q_0 \overset{\text{lemma}}{\Leftrightarrow} f(w) \equiv 0 \mod 3 \Leftrightarrow w \in L$$

כלומר הראנו כי $\boxed{L(\mathcal{A}) = L}$

מ.ש.ל.ב.☺