אלגברה לינארית (2) תשע"ט 2018-2019 *- סמסטר ב' -* תרגיל 5

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז.** יש לציין **כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל־ 17.4.19 בשעה 21:00.

- $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ ויהי V ויהי של חרחב T-אינווריאנטי של $T: V \longrightarrow V$ ויהי $T: V \longrightarrow V$ ויהי מעל שדה $T: V \longrightarrow V$ ויהי מרחב T-אינווריאנטי.
 - המקיימים $p(X),q(X),r(X)\in\mathbb{F}\left[X\right]$ היו לינארי וי אופרטור אופרטור אופרט אדה $T:V\longrightarrow V$, \mathbb{F} המקיימים .2 . $\mathrm{Im}\left(p(T)\right)\subseteq\mathrm{Im}\left(r(T)\right)$ הראו כי . $p(X)=q(X)\cdot r(X)$
 - $\deg(p)=k\geqslant 1$ פולינום המקיים $p(X)\in\mathbb{F}[X]$ אופרטור לינארי וי $T:V\longrightarrow V$, \mathbb{F} שדה מעל שדה על מרחב וקטורי מעל מרחב $V:V\longrightarrow V$, הוכיחו כי $v\in V$ ויהי ער $v\in V$ ויהי ער $v\in V$ ויהי ער ויהי ער אופרטור פיער מוניח שר
- . $\deg(p)=k\geqslant 1$ פולינום המקיים $p(X)\in \mathbb{F}[X]$ אופרטור לינארי ו־ $T:V\longrightarrow V$, \mathbb{F} שדה מעל שדה שלה פולינום V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $T:V\longrightarrow V$ אופרטור לינארי V איננו "על" אז קיים תת־מרחב T-אינווריאנטי של V כך ש־V איננו "על" אז קיים תת־מרחב אינווריאנטי של פולינום אינוו אינוו "על" אז קיים פולינום פולינום אינווריאנטי של פולינום אינוו "על" אז פיים פולינום אינווריאנטי של פולינום אינוו "על" אז פולינום פולינום פולינום אינוו פולינום אינוו "על" אז פולינום אינוו פולינום אינוו פולינום אינוו פולינום אינוו "על" אז פולינום פולינום אינווריאנטי של פולינום אינוו פולינום אינוו פולינום אינוו "על" אז פולינום פולינום פולינום אינוו פולינום אינוו פולינום פולינום אינוו פולינום אינוו פולינום אינוו פולינום פולינום
- $\deg(q)=0$ בהכרח בהכרח $p(X)=q(X)\cdot r(X)$ המקיימים $q(X),r(X)\in\mathbb{F}[X]$ בהכרח נקרא אי־פריק אם לכל $p(X)=q(X)\cdot r(X)$ המקיימים $p(X)=q(X)\cdot r(X)$ הוא פולינום לפמלים אחרות, אם אחד מבין p(X)=q(X) הוא פולינום קבוע. למשל, הפולינום p(X)=q(X) הוא פולינום אי־פריק).
- פולינום $p(x)\in \mathbb{F}[X]$ יהי אופרטור לינארי. יהי $T:V\longrightarrow V$ בו $2\leqslant \dim V<\infty$ המקיים המקיים על שדה $T:V\longrightarrow V$ המקיים מעל שדה U=0 הראו שאם U=0 איננו "על" אז קיים תת־מרחב U=0 אינווריאנטי של ע כך ש־ U=0 אינוו "על" אז קיים תת־מרחב אינווריאנטי של אופרטור פון אינו "על" אינוו "על" אינוו "על" אינווריאנטי של ע כך ש־ פון אינוו "על" אינווריאנטי של ע כך ש־ פון אינוו "על" אינווריאנטי של ע כך ש־ פון אינוו "על" אינוו "על" אינוו "על" אינווריאנטי של ע כך ש־ פון אינוו "על" אינווריאנטי של ע כך ש־ פון אינוו שליים אינווריאנטי של ע כך ש־ פון אינוו שליים אינווריאנטי של על" אינוו "על" אינוויים אינווריאנטי של ע כך ש־ פון אינוו שליים אינוו אינוו "על" אינוו "על" אינוווריאנטי של ע כך ש־ פון אינווווריאנטי של ע כן ש־ פון אינוווריאנטי של ע כן שיינוווריאנטי של ע כן ש־ פון אינוווריאנטי של ע כן שיינוווריאנטי של ע כן ש־ פון אינוווריאנטי של ע כן שיינוווריאנטי של ע כן שיינוווריאנטי של ע כן שיינוווריאנטי של ע כון אינוווריאנטי של ע כן שיינוווריאנטי של ע כון שיינוווריאנטי של ע כן שיינוווריאנטי של ע כון ע כן שיינוווריאנטי של ע כון ע
- ער כך של V מרחבים T-אינווריאנטיים של V פר אופרטור לינארי ויU,W תתי־מרחבים V אופרטור ער אופרטור $T:V\longrightarrow V$ אופרטורי מעל שדה $T:V\longrightarrow V$, ווריאנטיים של $T:V\longrightarrow V$, ווריאנטיים של $T:V\longrightarrow V$. אינווריאנטיים של $T:V\longrightarrow V$. יהיי $V=U\oplus W$
 - $\operatorname{Im}\left(q(T)\right)\subseteq U$ אז $W\subseteq\ker q(T)$ (א) הוכיחו כי אם
 - $\ker q(T)\subseteq W$ אז $U\subseteq \mathrm{Im}\,(q(T))$ ב) גניח בנוסף כי V נוצר סופית. הוכיחו כי אם
 - $.ec{0}
 eq ec{v} \in \mathbb{R}$ יהי $\lambda
 eq \mu$ ו־ע λ,μ הם שלו הם העצמיים לינארי כך שהערכים לינארי כך אופרטור $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. יהי v . אופרטור לינארי מתקיים אחד מהשניים הבאים: (א) הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי הוכיחו כי מתקיים אחד מהשניים הבאים:
 - λ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי רוא וקטור דוא וקטור (ב)
 - על ידי $T_A:M_{n\times n}(\mathbb F)\longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb F)$ נגדיר העתקה גדיר אנדיר מטריצה $A\in M_{n\times n}(\mathbb F)$ עבור מטריצה . $\forall Y\in M_{n\times n}(\mathbb F)$ $T_A(Y)=A\cdot Y$

- $\mathscr{R}(A)=(A-I)^{-1}$ מטריצה כך ש־A-I הפיכה. נגדיר את הראולבנטה אל $A\in M_{n imes n}\left(\mathbb{F}
 ight)$ פ. תהי $A\in M_{n imes n}\left(\mathbb{F}
 ight)$ מטריצה כך ש־A בשאלה או נמצא נוסחה ל־ $\mathscr{R}(A)$ כתלות ב-A מומך או מקדמי הפולינום האופייני של מחריצה בשאלה או נמצא נוסחה ל־A
- , $k\in\mathbb{N}$ כדי להראות שלכל $X^k-1=(X-1)\cdot(1+X+X^2+\cdots+X^{k-1})$ כדי להראות שלכל $\mathscr{R}(A)\cdot A^k=I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}+\mathscr{R}(A)$
 - .($c_n=1$ נכאשר $\chi_A(X)=c_0+c_1X+\cdots+c_nX^n$ (ב)
- . $\left(\sum_{i=0}^n c_i\right)\mathscr{R}(A) = -\sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(\sum_{m=k+1}^n c_m\right)A^k\right)$ כי $\chi_A(A) \cdot \mathscr{R}(A) \cdot \mathscr{R}(A) \cdot \mathscr{R}(A)$ הסתכלו על הסתכלו על הוכיחו בעזרת משפט קיילי־המילטון כי

$$\mathscr{R}(A)=-rac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\biggl(\biggl(\displaystyle\sum_{m=k+1}^n c_m\biggr)A^k\biggr)}{\biggl(\displaystyle\sum_{i=0}^n c_i\biggr)}$$
 והסיקו כי והסיקו כי והסיקו והסיקו