תרגיל 5 אלגברה לינארית 1

מיכאל גרינבאום

211747639

1א. **צ"ל:** האם S מרחב וקטורי?

נתונים: $S=\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \frac{x+y}{2}=0 \right\}$

הוכחה:

נשים לב כי $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in S$ כי $\frac{0+0}{2}=0$

סגירות לחיבור:

יהיו $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in S$, נשים לב כי $\frac{x_1+y_1}{2}=0=\frac{x_2+y_2}{2}$ כלומר $x_1+y_1=0=x_2+y_2$

נקבל ש $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}$ נשים לב כי $\frac{x_1+x_2+y_1+y_2}{2}=\frac{(x_1+y_1)+(x_2+y_2)}{2}=\frac{0+0}{2}=0$

ולכן $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix} \in S$

סגירות לכפל בסקלר:

יהי $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in S, \alpha \in \mathbb{R}$ אזי $\alpha\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}$

נשים לב כי $\frac{\alpha x+\alpha y}{2}=\alpha\cdot\frac{x+y}{2}=\alpha\cdot 0=0$

ולכן $\alpha\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} \in S$

ולכן S הוא תת מרחב וקטורי כי 3 הטענות מתקיימות מעל $\mathbb{R}^2$

מ.ש.ל.א.☺

1ב. **צ"ל:** האם S מרחב וקטורי?

נתונים: $S=\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x \geqslant y \right\}$

הוכחה:

נבחר $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in S$, נשים לב כי הוא שייך ל$S$ כי $1>0$

נסתכל על $-1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

נשים לב כי 0>1- ולכן $-1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin S$

כלומר S לא סגורה לכפל בסקלר ולכן לא מרחב וקטורי

מ.ש.ל.ב.☺

1ג. **צ"ל:** האם S מרחב וקטורי?

נתונים: $S=\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x=z \quad or \quad y=z \right\}$

הוכחה:

נבחר $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

נשים לב כי $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in S$

נשים לב כי $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \notin S$ כי $x \neq z$ וגם $y \neq z$

כלומר S לא סגורה לחיבור ולכן לא מרחב וקטורי

מ.ש.ל.ג.☺

1ד. **צ"ל:** האם S מרחב וקטורי?

נתונים: $S=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \quad | \quad xy=2z\right\}$

הוכחה:

נבחר $\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\in S$ ו$2\in\mathbb{R}$

נשים לב ש $\begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\cdot 2$, נשים לב ש$4\cdot 4\neq 2\cdot 4$

ולכן $S \notin \begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\cdot 2$

כלומר S לא סגורה לכפל בסקלר ולכן לא מרחב וקטורי

מ.ש.ל.ד.☺

1ה. **צ"ל:** האם S מרחב וקטורי?

נתונים: $S=\{\ p(x)\in\mathbb{R}[x] \quad | \quad deg(p(x))\leqslant 2\&a_0,a_1,a_2\in\mathbb{Q}\ \}$

הוכחה:

נבחר $x\in S$ ו$\sqrt{2}\in\mathbb{R}$

ולכן $\sqrt{2}x\notin S$

כלומר S לא סגורה לכפל בסקלר ולכן לא מרחב וקטורי

מ.ש.ל.ה.☺

1ו. **צ"ל:** האם S מרחב וקטורי?

נתונים: $S=\{\ v\in\mathbb{R}^3 \quad | \quad Av=Bv\ \}$

הוכחה:

נשים לב ש$(A-B)v=0_V$

נסמן ב$C=A-B$,

ראינו בכיתה כי אוסף הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית $Cv=0_V$היא מרחב וקטורי

ולכן S הוא מרחב וקטורי כי S הוא אוסף הפתרונות למערכת $Cv=0_V$

מ.ש.ל.ו.☺

1ז. **צ"ל:** האם S מרחב וקטורי?

נתונים: $S=\left\{\begin{bmatrix}x & x+y\\x-y & y\end{bmatrix} \quad | \quad x,y\in\mathbb{R}\right\}$

הוכחה:

נשים לב כי $\begin{bmatrix}0 & 0+0\\0-0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\in S$

סגירות לחיבור:

יהיו $\begin{bmatrix}x_1 & x_1+y_1\\x_1-y_1 & y_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_2 & x_2+y_2\\x_2-y_2 & y_2\end{bmatrix}\in S$

$$\begin{bmatrix}x_1 & x_1+y_1\\x_1-y_1 & y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2 & x_2+y_2\\x_2-y_2 & y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2 & x_1+y_1+x_2+y_2\\x_1-y_1+x_2-y_2 & y_1+y_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1+x_2 & (x_1+x_2)+(y_1+y_2)\\x_1+x_2-(y_1+y_2) & y_1+y_2\end{bmatrix}\in S$$

סגירות לכפל בסקלר:

יהי $\begin{bmatrix}x & x+y\\x-y & y\end{bmatrix}\in S$ וגם $\alpha\in\mathbb{R}$

נשים לב כי $\alpha\begin{bmatrix}x & x+y\\x-y & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha x & \alpha(x+y)\\\alpha(x-y) & \alpha y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha x & \alpha x+\alpha y\\\alpha x-\alpha y & \alpha y\end{bmatrix}\in S$

ולכן S הוא תת מרחב וקטורי כי 3 הטענות מתקיימות מעל $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

מ.ש.ל.ז.☺

2. **צ"ל:** $W_1 \cup W_2 \neq V$

נתונים: W_1, W_2 תתי מרחבים של Vכך ש$W_1 \neq V$וגם $W_2 \neq V$

הוכחה:

אם $W_1 \subseteq W_2$ אז $W_1 \cup W_2 = W_1 \neq V$

אם $W_2 \subseteq W_1$ אז $W_1 \cup W_2 = W_2 \neq V$

ולכן נניח כי $W_1 \nsubseteq W_2$וגם $W_2 \nsubseteq W_1$

ולכן קיים $w_1 \in W_1$ שעבורו מתקיים $w_1 \nsubseteq W_2$

וגם קיים $w_2 \in W_2$ שעבורו מתקיים $w_2 \nsubseteq W_1$

נניח בשלילה כי $W_1 \cup W_2 = V$ ולכן $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$

אם $w_1 + w_2 \in W_1$ אז מהיות W_1 מרחב וקטורי מתקיים ש$w_2 = w_1 + w_2 - w_2 \in W_1$

בסתירה להנחה ש $w_2 \nsubseteq W_1$

אחרת $w_1 + w_2 \in W_2$ אז מהיות W_2 מרחב וקטורי מתקיים ש$w_1 = w_2 + w_1 - w_1 \in W_2$

בסתירה להנחה ש $w_1 \nsubseteq W_2$

ולכן $W_1 \cup W_2 \neq V$

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** $W_1 \subseteq W_2$ או $W_2 \subseteq W_1$ אם"ם $W_1 \cup W_2$ מרחב וקטורי

נתונים: W_1, W_2 תתי מרחבים של Vכך ש$W_1 \cup W_2$ מרחב וקטורי

הוכחה:

$\Leftarrow$:נניח כי $W_1 \nsubseteq W_2$ וגם $W_2 \nsubseteq W_1$

קיים $w_1 \in W_1$ שעבורו מתקיים $w_1 \nsubseteq W_2$

וגם קיים $w_2 \in W_2$ שעבורו מתקיים $w_2 \nsubseteq W_1$

נשים לב כי מסגירות לחיבור מתקיים $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$

אם $w_1 + w_2 \in W_1$ אז מהיות W_1 מרחב וקטורי מתקיים ש$w_2 = w_1 + w_2 - w_2 \in W_1$

בסתירה להנחה ש $w_2 \nsubseteq W_1$

אחרת $w_1 + w_2 \in W_2$ אז מהיות W_2 מרחב וקטורי מתקיים ש$w_1 = w_2 + w_1 - w_1 \in W_2$

בסתירה להנחה ש $w_1 \nsubseteq W_2$

ולכן $W_1 \subseteq W_2$ או $W_2 \subseteq W_1$

$\Rightarrow$: נניח ללא הגבלת הכלליות כי $W_1 \subseteq W_2$

אזי יהי $v \in W_1 \cup W_2$ אזי $v \in W_1 \subseteq W_2$ או $v \in W_2$ ולכן $v \in W_2$

כלומר $W_1 \cup W_2 \subseteq W_2$ וברור כי $W_2 \subseteq W_1 \cup W_2$ ולכן $W_2 = W_1 \cup W_2$

מכיוון שW_2 מרחב וקטורי, מתקיים ש$W_2 = W_1 \cup W_2$ מרחב וקטורי

מ.ש.ל.☺

4א. **צ"ל:** $span(\{v_1, v_2, v_3\}) = span(\{v_1, v_2, 3v_1 + v_2, 5v_1 + 3v_2 + v_3\})$

נתונים: Vמרחב וקטורי ו$v_1, v_2, v_3 \in V$

הוכחה:

תחילה נראה כי $span(\{v_1, v_2, 3v_1 + v_2, 5v_1 + 3v_2 + v_3\}) \subseteq span(\{v_1, v_2, v_3\})$

ברור כי $v_1, v_2, 3v_1 + v_2, 5v_1 + 3v_2 + v_3 \in span(\{v_1, v_2, v_3\})$

מהמשפט שהוכח שאם $A \subseteq sp\{B\}$ אז $sp\{A\} \subseteq sp\{B\}$ (מוכח בשאלה 5ד)

נקבל ש $span(\{v_1, v_2, 3v_1 + v_2, 5v_1 + 3v_2 + v_3\}) \subseteq span(\{v_1, v_2, v_3\})$

נראה עתה שוויון הפוך ונסיים

נשים לב כי $v_1, v_2 \in span(\{v_1, v_2, 3v_1 + v_2, 5v_1 + 3v_2 + v_3\})$

וגם $v_3 = (5v_1 + 3v_2 + v_3) - 5v_1 - 3v_2 \in span(\{v_1, v_2, 3v_1 + v_2, 5v_1 + 3v_2 + v_3\})$

מהמשפט שהוכח שאם $A \subseteq sp\{B\}$ אז $sp\{A\} \subseteq sp\{B\}$ (מוכח בשאלה 5ד)

נקבל ש$span(\{v_1, v_2, v_3\}) \subseteq span(\{v_1, v_2, 3v_1 + v_2, 5v_1 + 3v_2 + v_3\})$

ולכן $span(\{v_1, v_2, v_3\}) = span(\{v_1, v_2, 3v_1 + v_2, 5v_1 + 3v_2 + v_3\})$

מ.ש.ל.א.☺

4ב. **צ"ל:** $span(\{v_1, v_2, v_3\}) = span(\{v_1, 3v_1 + v_2, 5v_1 + 3v_2 + v_3\})$

נתונים: Vמרחב וקטורי ו$v_1, v_2, v_3 \in V$

הוכחה:

תחילה נראה כי $span(\{v_1, 3v_1 + v_2, 5v_1 + 3v_2 + v_3\}) \subseteq span(\{v_1, v_2, v_3\})$

ברור כי $v_1, 3v_1 + v_2, 5v_1 + 3v_2 + v_3 \in span(\{v_1, v_2, v_3\})$

מהמשפט שהוכח שאם $A \subseteq sp\{B\}$ אז $sp\{A\} \subseteq sp\{B\}$ (מוכח בשאלה 5ד)
נקבל ש $span(\{v_1, 3v_1+v_2, 5v_1+3v_2+v_3\}) \subseteq span(\{v_1, v_2, v_3\})$
נראה עתה שוויון הפוך ונסיים
נשים לב כי $v_1 \in span(\{v_1, v_2, 3v_1+v_2, 5v_1+3v_2+v_3\})$
וגם $v_2 = (3v_1+v_2) - 3v_1 \in span(\{v_1, 3v_1+v_2, 5v_1+3v_2+v_3\})$
וגם $v_3 = (5v_1+3v_2+v_3) - 3(3v_1+v_2) + 4v_1 \in span(\{v_1, 3v_1+v_2, 5v_1+3v_2+v_3\})$
מהמשפט שהוכח שאם $A \subseteq sp\{B\}$ אז $sp\{A\} \subseteq sp\{B\}$ (מוכח בשאלה 5ד)
נקבל ש$span(\{v_1, v_2, v_3\}) \subseteq span(\{v_1, 3v_1+v_2, 5v_1+3v_2+v_3\})$
ולכן $span(\{v_1, v_2, v_3\}) = span(\{v_1, 3v_1+v_2, 5v_1+3v_2+v_3\})$

מ.ש.ל.ב.☺

4ג. **צ"ל:** לא תמיד $span(\{v_1, v_2, v_3\}) = span(\{v_1, v_2-2v_3, 2v_2-4v_3\})$
נתונים: Vמרחב וקטורי ו$v_1, v_2, v_3 \in V$
הוכחה:
נבחר $V = \mathbb{R}^3$ו $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
נשים לב כי $span(\{v_1, v_2, v_3\}) = \mathbb{R}^3$
נשים לב כי $span(\{v_1, v_2-2v_3, 2v_2-4v_3\}) = span\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}\right\}\right) = span\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}\right)$
נשים לב כי $span(\{v_1, v_2-2v_3, 2v_2-4v_3\}) = span\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}\right) \notin \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
וגם $span(\{v_1, v_2, v_3\}) \ni \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

מ.ש.ל.ג.☺

5א. **צ"ל:** $span(\{v_1, \ldots, v_n\}) = span(\{v_1, \ldots, v_k\})$
נתונים:$V \ni v_1, \ldots v_k, \ldots v_n, u_1, \ldots u_m$ כך ש$span(\{v_1, \ldots, v_n\}) \subseteq span(\{v_1, \ldots, v_k\})$
הוכחה:
נשים לב כי $v_1, \ldots, v_k \in span(\{v_1, \ldots, v_n\})$
מהמשפט שהוכח שאם $A \subseteq sp\{B\}$ אז $sp\{A\} \subseteq sp\{B\}$ (מוכח בשאלה 5ד)
נקבל ש$span(\{v_1, \ldots, v_k\}) \subseteq span(\{v_1, \ldots, v_n\})$
נתון ש$span(\{v_1, \ldots, v_n\}) \subseteq span(\{v_1, \ldots, v_k\})$
ולכן $span(\{v_1, \ldots, v_n\}) = span(\{v_1, \ldots, v_k\})$

מ.ש.ל.א.☺

5ב. **צ"ל:** לא תמיד $v_i \notin span(\{v_1, \ldots, v_k\})$, $k+1 \leq \forall i \leq n$
נתונים:$V \ni v_1, \ldots v_k, \ldots v_n, u_1, \ldots u_m$ כך ש$span(\{v_1, \ldots, v_n\}) \neq span(\{v_1, \ldots, v_k\})$
הוכחה:
נבחר $V = \mathbb{R}^3$, $k = 1, n = 3$.
נבחר $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
נשים לב כי $span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \neq span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ כי $span(\{v_1, \ldots, v_3\}) \ni \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ וגם
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin span(\{v_1\})$
אבל מתקיים $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in span(\{v_1\}) = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$
ולכן לא תמיד $v_i \notin span(\{v_1, \ldots, v_3\})$, $2 \leq \forall i \leq 3$ בסתירה להנחה

מ.ש.ל.ב.☺

5ג. **צ"ל:** $k+1 \leq \exists i \leq n$ שעבורו מתקיים $v_i \notin span(\{v_1,\dots,v_k\})$
נתונים: $v_1,\dots v_k,\dots v_n,u_1,\dots u_m \in V$ כך ש$span(\{v_1,\dots,v_n\}) \neq span(\{v_1,\dots,v_k\})$
הוכחה:
נשים לב כי $v_1,\dots,v_k \in span(\{v_1,\dots,v_n\})$
מהמשפט שהוכח שאם $A \subseteq sp\{B\}$ אז $sp\{A\} \subseteq sp\{B\}$ (מוכח בשאלה 5ד)
ולכן $span(\{v_1,\dots,v_k\}) \subseteq span(\{v_1,\dots,v_n\})$
נניח בשלילה שלא קיים $k+1 \leq i \leq n$ שעבורו מתקיים $v_i \notin span(\{v_1,\dots,v_k\})$
כלומר $v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n \in span(\{v_1,\dots,v_k\})$
מהמשפט שהוכח שאם $A \subseteq sp\{B\}$ אז $sp\{A\} \subseteq sp\{B\}$ (מוכח בשאלה 5ד)
ולכן $span(\{v_1,\dots,v_n\}) \subseteq span(\{v_1,\dots,v_k\})$
ולכן $span(\{v_1,\dots,v_n\}) = span(\{v_1,\dots,v_k\})$
בסתירה לנתונים ולכן $k+1 \leq \exists i \leq n$ שעבורו מתקיים $v_i \notin span(\{v_1,\dots,v_k\})$

מ.ש.ל.ג.☺

5ד. **צ"ל:** $span(\{u_1,\dots,u_m\}) \subseteq span(\{v_1,\dots,v_n\})$
נתונים: Vמרחב וקטורי ו$v_1,\dots v_k,\dots v_n,u_1,\dots u_m \in V$ כך ש$u_1,\dots,u_m \in span(\{v_1,\dots,v_n\})$
הוכחה:
מהיות $u_i \in span(\{v_1,\dots,v_n\})$
קיימים $a_{i,1},\dots a_{i,n} \in \mathbb{F}$ שעבורם מתקיים $1 \leq \forall i \leq m, u_i = a_{i,1}v_1 + \dots + a_{i,n}v_n$
יהי $u \in span(\{u_1,\dots,u_m\})$ ולכן קיימים $b_1,\dots,b_m \in \mathbb{F}$ שעבורם מתקיים $u = b_1u_1 + \dots + b_mu_m$
ולכן $u = b_1u_1 + \dots + b_mu_m = b_1(a_{1,1}v_1 + \dots a_{1,n}v_n) + \dots + b_m(a_{m,1}v_1 + \dots a_{m,n}v_n)$

$$= (b_1a_{1,1} + \dots + b_ma_{m,1})v_1 + (b_1a_{1,n} + \dots + b_ma_{m,n})v_n \in span(\{v_1,\dots,v_n\})$$

ולכן $u \in span(\{v_1,\dots,v_n\})$ כלומר $span(\{u_1,\dots,u_m\}) \subseteq span(\{v_1,\dots,v_n\})$

מ.ש.ל.ד.☺

5ה. **צ"ל:** לא תמיד $span(\{u_1,\dots,u_m\}) \cap span(\{v_1,\dots,v_n\}) = \{0_V\}$
נתונים: Vמרחב וקטורי ו$v_1,\dots v_k,\dots v_n,u_1,\dots u_m \in V$ כך ש$1 \leq \forall i \leq n, 1 \leq \forall j \leq m, u_j \neq v_i$
הוכחה:
נבחר $V = \mathbb{R}^2$ו$m = n = 1$
נבחר $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
נשים לב כי $u_1 \neq v_1$
נשים לב כי $span\{v_1\} = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = span\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = span\{u_1\}$
ולכן $span\{v_1\} \cap span\{u_1\} = span\{v_1\} \neq \{0_v\}$ לדוגמא $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in span\{v_1\}$ בסתירה להנחה

מ.ש.ל.ה.☺

5ו. **צ"ל:** לא תמיד$span(\{u_1,\dots,u_m\}) \cap span(\{v_1,\dots,v_n\}) \neq \{0_V\}$
נתונים: Vמרחב וקטורי ו$v_1,\dots v_k,\dots v_n,u_1,\dots u_m \in V$ כך ש$1 \leq \exists i \leq n, 1 \leq \exists j \leq m, u_j = v_i$
הוכחה:
נבחר $V = \mathbb{R}^2$ו$m = n = 1$
נבחר $v_1 = u_1 = 0_V$ נקבל ש$span\{u_1\} = 0_V = span\{v_1\}$
ולכן $span(\{u_1,\dots,u_m\}) \cap span(\{v_1,\dots,v_n\}) = \{0_V\}$ בסתירה להנחה

מ.ש.ל.ו.☺

6. **צ"ל:** תת קבוצה סופית S שמהווה קבוצת פתרונות של מערכת המשוואות הבאה
נתונים:$x_1 + 3x_3 - 3x_4 = 0, 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$
הוכחה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

נסמן $x_3 = t, x_4 = s$
ונקבל $x_1 + 3t - 3s = 0, -x_2 - 4t + 4s = 0$

ולכן $x_1 = 3s - 3t, x_2 = 4s - 4t$

ולכן $$S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad | \quad s,t \in \mathbb{R} \right\} = span\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

מ.ש.ל.☺