פתרון תרגיל מספר 3 ־ תורת המשחקים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

30 באפריל 2021

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $G = G_1 \oplus G_2$

הוכחה:

יהי $1 \leq m \leq n-1$,

אבחנה: המצב ההתחלתי של G הוא $(t_1, \ldots, t_n)$ אס"ם המצב ההתחלתי של G_1 הוא $(t_1, \ldots, t_m)$ ושל G_2 הוא $(t_{m+1}, \ldots, t_n)$

תחילה נוכיח ש־ $(a_1, \ldots, a_n)$ מצב חוקי ב־ G אס"ם $(a_1, \ldots, a_m)$ מצב חוקי ב־ G_1 ו־ $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$ מצב חוקי ב־ G_2.

$\Leftarrow$: אם $(a_1, \ldots, a_n)$ מצב חוקי ב־ G אז היה סדר של פעולות חוקיות $b_1, \ldots, b_k$ מהמצב ההתחלתי $t = (t_1, \ldots, t_n)$.

אם נפעיל רק את הפעולות שנעשו על ה־ m הערימות הראשונות מהפעולות $b_1, \ldots, b_k$ נקבל את המצב $(a_1, \ldots, a_m, t_{m+1}, \ldots, t_n)$

ונשים לב שכל אלה פעולות חוקיות ב־ G_1 ואם נבצען ב־ G_1 נגיע מהמצב ההתחלתי $(t_1, \ldots, t_m)$ ל־ $(a_1, \ldots, a_m)$

ולכן $(a_1, \ldots, a_m)$ מצב חוקי ב־ G_1.

אם נפעיל רק את הפעולות שנעשו על ה־ $n-m$ הערימות האחרונות מהפעולות $b_1, \ldots, b_k$ נקבל את המצב $(t_1, \ldots, t_m, a_{m+1}, \ldots, a_n)$

ונשים לב שכל אלה פעולות חוקיות ב־ G_2 (עד כדי הפעלת הפעולה על הערימה ה־ $i-m$ במקום על הערימה ה־ i) ואם נבצען ב־ G_2 נגיע מהמצב ההתחלתי $(t_{m+1}, \ldots, t_n)$ ל־ $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$ ולכן $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$ מצב חוקי ב־ G_2.

$\Rightarrow$: אם $(a_1, \ldots, a_m)$ מצב חוקי ב־ G_1 אז קיימת סדרת פעולות חוקיות $b_1, \ldots, b_k$ שמעבירה מהמצב $(t_1, \ldots, t_m)$ ל־ $(a_1, \ldots, a_m)$.

אם $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$ מצב חוקי ב־ G_2 אז קיימת סדרת פעולות חוקיות $c_1, \ldots, c_l$ שמעבירה מהמצב $(t_{m+1}, \ldots, t_n)$ ל־ $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$. נסמן ב־ $d_l, \ldots d_l$ את אותן פעולות אך במקום לפעול על הערימה ה־ i פועלות על הערימה ה־ $m+i$.

נשים לב שאם נפעיל מהמצב ההתחלתי של G שהוא $(t_1, \ldots, t_n)$ את הפעולות $b_1, \ldots, b_k$ (סדרת פעולות חוקית ב־ G) נגיע למצב $(a_1, \ldots, a_m, t_{m+1}, \ldots, t_n)$. עתה נוכל לעשות את הפעולות $d_1, \ldots, d_l$ (שגם הן פעולות חוקיות ב־ G) ונגיע למצב $(a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n)$.

נשים לב שמצאנו סדרת פעולות חוקית $b_1, \ldots, b_k, d_1, \ldots, d_l$ ב־ G שמעבירה מהמצב ההתחלתי ל־ $(a_1, \ldots, a_n)$ ולכן $(a_1, \ldots, a_n)$ מצב חוקי ב־ G.

כלומר הוכחנו שקבוצת המצבים החוקיים של G שווה לקבוצת המצבים של $G_1 \oplus G_2$.

נסמן ב־ $E_{G,(a_1,\ldots,a_n)}$ את הפעולות החוקיות של משחק G ממצב כלשהו, נשים לב כי

$$\begin{aligned}
E_{G,(a_1,\ldots,a_n)} &= \{-c \cdot e_i \mid 1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq c \leq a_i\} \\
&= \{-c \cdot e_i \mid 1 \leq i \leq m \wedge 1 \leq c \leq a_i\} \cup \{-c \cdot e_i \mid m+1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq c \leq a_i\} \\
&= \{-c \cdot e_i \mid 1 \leq i \leq m \wedge 1 \leq c \leq a_i\} \cup \{-c \cdot e_i \mid m+1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq c \leq a_i\} \\
&= E_{G_1,(a_1,\ldots,a_m)} \cup \{-c \cdot e_{m+i} \mid 1 \leq i \leq n-m \wedge 1 \leq c \leq a_{m+i}\} \\
&= E_{G_1,(a_1,\ldots,a_m)} \cup \left\{-c \cdot e_{m+i} \mid -c \cdot e_i \in E_{G_2,(a_{m+1},\ldots,a_n)}\right\} \overset{\star}{=} E_{G_1 \oplus G_2,(a_1,\ldots a_n)}
\end{aligned}$$

נשים לב ש־ $\star$ נכון היות וזה בדיוק ההגדרה של חיבור גרפי משחק, הערה: הסיבה ל־ e_{m+i} זה פשוט כדי לפעול על הערימה המתאימה ל־ e_i מ־ G_2 במשחק שנוצר על ידי G.

כלומר לכל מצב מתקיים כי $E_{G,(a_1,\ldots,a_n)}=E_{G_1\oplus G_2,(a_1,\ldots a_n)}$ ולכן $E_G=E_{G_1\oplus G_2}$.
כלומר הראנו שקבוצת הקודקודים (המצבים החוקיים) שווה וגם קבוצת הצלעות ולכן $G=G_1\oplus G_2$.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $(x,y)\in N_{G_1\oplus G_2}$
הוכחה:
נוכיח באינדוקציה על n שאם $B((x,y))=n$ ש- $x\in N_{G_1}$ ו- $y\in P_{G_2}$ אז $(x,y)\in N_{G_1\oplus G_2}$ ואם $x\in P_{G_1}$ ו- $y\in P_{G_2}$ אז $(x,y)\in P_{G_1\oplus G_2}$ ואם $x\in P_{G_1}$ ו- $y\in N_{G_2}$ אז $(x,y)\in N_{G_1\oplus G_2}$.
<u>בסיס:</u> $n=0$, נשים לב כי $B((x,y))=0$, לכן $B(x)=B(y)=0$ ולכן $x\in P_{G_1},y\in P_{G_2}$ וגם $(x,y)\in P_{G_1\oplus G_2}$ ולכן התנאי מתקיים.
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל- $k<n$ ונוכיח ל- n.

i. אם $x\in N_{G_1}$ ו- $y\in P_{G_2}$, אז קיימת פעולה שמעבירה את x למצב $y_1\in P_{G_1}$.
נבצע פעולה זאת ונגיע למצב (y_1,y) כאשר $y_1\in P_{G_1}\wedge y\in P_{G_2}$.
ומתקיים $B((y_1,y))<n$ ולכן מהנחת האינדוקציה מתקיים $(y_1,y)\in P_{G_1\oplus G_2}$ ולכן השחקן הקודם שהוביל למצב (y_1,y) ינצח, ובמקרה שלנו זה השחקן הראשון ולכן $(x,y)\in N_{G_1\oplus G_2}$ כנדרש.
ii. אם $x\in P_{G_1}$ ו- $y\in N_{G_2}$, אז קיימת פעולה שמעבירה את y למצב $y_2\in P_{G_2}$.
נבצע פעולה זאת ונגיע למצב (x,y_2) כאשר $y\in P_{G_1}\wedge y_2\in P_{G_2}$.
ומתקיים $B((y,y_2))<n$ ולכן מהנחת האינדוקציה מתקיים $(y,y_2)\in P_{G_1\oplus G_2}$ ולכן השחקן הקודם שהוביל למצב (y,y_2) ינצח, ובמקרה שלנו זה השחקן הראשון ולכן $(x,y)\in N_{G_1\oplus G_2}$ כנדרש.
iii. אם $x\in P_{G_1}$ ו- $y\in P_{G_2}$, אז כל פעולה תעביר אותנו למצב מהצורה (y_1,y_2) כאשר $y_1\in N_{G_1}\wedge y_2\in P_{G_2}$ או ש- $y_1\in P_{G_1}\wedge y_2\in N_{G_2}$.
נשים לב כי $B((y_1,y_2))<n$ ולכן מהנחת האינדוקציה $(y_1,y_2)\in N_{G_1\oplus G_2}$ ולכן $(x,y)\in P_{G_1\oplus G_2}$.

נסיק מההוכחה באינדוקציה שאם $x\in N_{G_1}$ ו- $y\in P_{G_2}$ אז $(x,y)\in N_{G_1\oplus G_2}$, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $(x,y)\in P_{G_1\oplus G_2}$
הוכחה:
נסיק מההוכחה באינדוקציה בסעיף הקודם שאם $x\in P_{G_1}$ ו- $y\in P_{G_2}$ אז $(x,y)\in P_{G_1\oplus G_2}$, כנדרש.

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** יש מצב כך ש- $(x,y)\in P_{G_1\oplus G_2}$
הוכחה:
נבחר G_1,G_2 להיות משחק Nim עם ערימה אחת.
ממה שראינו בהרצאה מתקיים $\text{sg}(1)=1$ (באופן כללי הוכחנו שעבור ערימה אחת מתקיים כי $\text{sg}(n)=n$ כשיש n איברים בערימה).
לכן מהמצב $(x,y)=(1,1)$ מתקיים כי $\text{sg}(x)=\text{sg}(y)=\text{sg}(1)=1\neq 0$,
ראינו בהרצאה כי $\text{sg}(x)\neq 0 \iff x\in N_G$, לכן $x\in N_{G_1},y\in N_{G_2}$,
נשים לב כי

$$\text{sg}((x,y))=\text{sg}(x)\oplus\text{sg}(y)=1\oplus 1=0$$

ולכן נקבל כי $(x,y)\in P_{G_1\oplus G_2}$ בגלל ש- $\text{sg}((x,y))=0$, כנדרש

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** יש מצב כך ש- $(x,y)\in N_{G_1\oplus G_2}$
הוכחה:
נבחר G_1,G_2 להיות משחק Nim עם ערימה אחת.
ממה שראינו בהרצאה מתקיים $\text{sg}(1)=1$ ו- $\text{sg}(2)=2$ (באופן כללי הוכחנו שעבור ערימה אחת מתקיים כי $\text{sg}(n)=n$ כשיש n איברים בערימה).
לכן מהמצב $(x,y)=(1,2)$ מתקיים כי $\text{sg}(x)=\text{sg}(1)=1\neq 0,\text{sg}(y)=\text{sg}(2)=2\neq 0$,

ראינו בהרצאה כי $\text{sg}(x) \neq 0 \iff x \in N_G$, לכן $x \in N_{G_1}, y \in N_{G_2}$,
נשים לב כי

$$\text{sg}((x,y)) = \text{sg}(x) \oplus \text{sg}(y) = 1 \oplus 2 = 3 \neq 0$$

ולכן נקבל כי $(x,y) \in N_{G_1 \oplus G_2}$ בגלל ש־ $\text{sg}((x,y)) \neq 0$, כנדרש

מ.ש.ל.ה.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** המצב ב־ N
הוכחה:
נשים לב כי

$$\begin{aligned}
9 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \to 1001 \\
10 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \to 1010 \\
11 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \to 1011 \\
12 &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \to 1100
\end{aligned}$$

לכן נקבל כי

$$9 \oplus 10 \oplus 11 \oplus 12 = 0100 = 4 \neq 0$$

לכן נקבל כי $(9,10,11,12) \in N$ בגלל ש־ $\text{sg}((9,10,11,12)) \neq 0$, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** מצבים שמסתיימים ב־ P מהמצב הנתון
הוכחה:
ראינו שהקסור יצא 0100, לכן צריך לקחת 4 מערימה שהביט של 4 דלוק בה, הערימה היחידה העונה על התנאי היא 12,
לכן המהלך היחיד שיעביר אותנו ל־ P הוא $(9,10,11,8)$.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** המצב ב־ N
הוכחה:
נשים לב כי

$$\begin{aligned}
9 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \to 1001 \\
12 &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \to 1100 \\
14 &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \to 1110 \\
15 &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \to 1111
\end{aligned}$$

לכן נקבל כי

$$9 \oplus 12 \oplus 14 \oplus 15 = 0100 = 4 \neq 0$$

לכן נקבל כי $(9,12,14,15) \in N$ בגלל ש־ $\text{sg}((9,12,14,15)) \neq 0$, כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** מצבים שמסתיימים ב־ P מהמצב הנתון
הוכחה:
ראינו שהקסור יצא 0100, לכן צריך לקחת 4 מערימה שהביט של 4 דלוק בה, הערימות שעונות על התנאי הן $12, 14, 15$,
לכן המהלכים שיעבירו אותנו ל־ P הם $(9,12,14,11)$, $(9,12,10,15)$, $(9,8,14,15)$.

מ.ש.ל.ד.☺

3. **פתרון:** לשם נוחות, נגדיר את המהלכים החוקיים להיות (i,n) כאשר $i \in \{1,2\}$ ו־ $n \in \mathbb{N}$ כאשר 1 זה שורה תחתונה ו־ 2 זאת שורה עליונה.

(א) **צ"ל:** האם המשחק סופי?

הוכחה:

לא! יהי $n \in \mathbb{N}$, נשים לב שבתור הראשון השחקן הראשון יכול לעשות את המהלך $(1,n)$ וישאיר טבלה מלאה בגודל $2 \times (n-1)$ מצד שמאל שהינה מצב חוקי של המשחק.

נשים לב שמצאנו ∞ מצבים שונים ולכן המשחק אינו סופי.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם המשחק חסום? אין סדרה אינסופית של מהלכים

הוכחה:

לא! יהי $n \in \mathbb{N}$, נשים לב שבתור הראשון השחקן הראשון יכול לעשות את המהלך $(1,n)$ וישאיר טבלה מלאה בגודל $2 \times (n-1)$ מצד שמאל.

בתור ה־ $i+1$ של המשחק, השחקן הנוכחי יאכל את $(1,n-i)$ והמשחק יסתיים לאחר n תורות (כלומר כל פעם השחקן אוכל עמודה אחת ומעביר את התור לשחקן האחר ובמהלך הראשון נשארים $n-1$ עמודות).

כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ הראנו משחק שאורכו n מהלכים.

נניח בשלילה שהמשחק היה חסום על ידי m מהלכים, נקבל סתירה לכך שיש משחק שאורכו $m+1$ מהלכים בשיטה שציינו מלעיל, ולכן המשחק לא חסום.

למטרת הסעיף הזה: נסמן מצב כזוג (x,y) כאשר x זה מספר האיברים שנשארו בשורה העליונה ו־ y מספר האיברים שנשארו בשורה התחתונה (מרציפות המהלכים זה מתאר כל מצב אפשרי במשחק).

נניח בשלילה שיש סדרה אינסופית של מהלכים, שנסמנה $a_1, \ldots$.

נסמן את $a_1 = (i,n)$,

i. אם $i=1$, נשים לב שהמצב הוא $(n-1,n-1)$ ולכן קבוצת המהלכים החוקיים ממצב מוכלת ב־ $\{(i,j) \mid 0 \le i,j \le n-1\}$. הקבוצה הזאת סופית (לכל היותר n^2 איברים) וכל פעולה מורידה את ערך $i+j$ ולכן יהיו לכל היותר n^2 פעולות בסתירה לכך שיש מספר אינסופי של פעולות.

ii. אם $i=2$, נשים לב שהמצב הוא $(\infty, n-1)$.

נניח בשלילה שלא קיים מהלך a_j בסדרה שהוא מהצורה $(1,m)$ ולכן קבוצת המהלכים החוקיים ממצב מוכלת ב־ $\{(\infty,j) \mid 0 \le j \le n-1\}$. הקבוצה הזאת סופית (לכל היותר n איברים) וכל פעולה מורידה את ערך j ולכן יהיו לכל היותר n פעולות בסתירה לכך שיש מספר אינסופי של פעולות.

כלומר קיים מהלך a_j מהצורה מהצורה $(1,m)$ ב־ $n+1$ מהלכים הראשונים. לכן נקבל שכל המהלכים החוקיים מוכלים בקבוצה

$$\{(\infty,j) \mid 0 \le j \le n-1\} \cup \{\{(i,j) \mid 0 \le j \le n-1, 0 \le i \le m-1\}\}$$

הקבוצה הזאת סופית (לכל היותר $n + n \cdot m$ איברים) וכל פעולה מורידה את ערך $i+j$ ולכן יהיו לכל היותר $n + n \cdot m$ פעולות בסתירה לכך שיש מספר אינסופי של פעולות.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** למי יש אסטרטגיה מנצחת?

הוכחה:

לשחקן השני!

למטרת הסעיף הזה: נסמן מצב כזוג (x,y) כאשר x זה מספר האיברים שנשארו בשורה העליונה ו־ y מספר האיברים שנשארו בשורה התחתונה (מרציפות המהלכים זה מתאר כל מצב אפשרי במשחק).

תחילה נוכיח באינדוקציה על n ש־ $(n,n) \in N$ ושהמצב $(n,n-1) \in P$
<u>בסיס:</u> נניח ש־ $n = 1$, כלומר הלוח הוא $(1,1)$, נעשה את המהלך $(2,1)$ (נאכל מהשורה העליונה איבר אחד),
נגיע למצב $(1,0)$ ומפה השחקן השני מחויב לאכול את הקוביה הרעילה ולהפסיד.
ולכן $(1,1) \in N$ ו־ $(1,0) \in P$
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה לכל $k < n$ ונוכיח ל־ n.
נעשה את המהלך $(2,n)$ ונגיע למצב $(n,n-1)$.
נחלק למקרים לפי השחקן השני:

i. אם השחקן השני עושה את המהלך $(1,1)$ הוא הפסיד כי אכל את הקוביה הרעילה
ii. אם השחקן השני עושה את המהלך $(1,k)$ כאשר $n \geq k \geq 2$ (לאכול k מהשורה התחתונה והעליונה), נחזור למצב $(k-1,k-1)$ ומפה מהנחת האינדוקציה, $(k-1,k-1) \in N$, כלומר לשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת מהמצב $(n,n) \in N$.
iii. אם השחקן השני עושה את המהלך $(2,k)$ כאשר $1 \leq k \leq n-1$ (לאכול k רק מהשורה העליונה), נגיע למצב $(n,k-1)$. השחקן הראשון יעשה את המהלך $(1,k+1)$ (לאכול k מהשורה התחתונה והעליונה) ונגיע למצב $(k,k-1)$. נשים לב שהפעולה חוקית והשחקן הראשון לא הפסיד כי $k-1 \geq 0$ ולכן $k \geq 1$ ולכן לא אכל את הקוביה הרעילה.
בנוסף לכך, מהנחת האינדוקציה $(k,k-1) \in P$ ומפה השחקן הקודם, שהוא הראשון מנצח ולכן $(n,n) \in N$.

בנוסף לכך $(n,n-1) \in P$ כי לשחקן הקודם שהיה ב־ $(n,n) \in N$ יש אסטרטגיה מנצחת שמעבירה ל־ $(n,n-1)$ ולכן $(n,n-1)$ חייב להיות ב־ P אחרת נקבל סתירה לכך ש־ $(n,n) \in N$.

כלומר הוכחנו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים שהמצב $(n,n) \in N$ וגם $(n,n-1) \in P$.
עתה נוכיח שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת בלוח $2 \times \infty$, נחלק למקרים:

i. אם השחקן הראשון עשה את הפעולה $(2,n)$ אז נשאר עם הלוח $(\infty, n-1)$,
השחקן השני יעשה את הפעולה $(1,n+1)$ ונגיע ללוח $(n,n-1) \in P$.
כלומר לשחקן שהגיע למצב $(n,n-1)$ יש אסטרטגיה מנצחת, ובמקרה שלנו זה השחקן השני.
ii. אם השחקן הראשון עשה את הפעולה $(1,1)$ אז הוא אכל את הקוביה הרעילה והפסיד.
iii. אם השחקן הראשון עשה את הפעולה $(1,n)$ כאשר $n > 1$ אז נשאר עם הלוח $(n-1,n-1)$,
נשים לב כי $(n-1,n-1) \in N$ כלומר לשחקן שעכשיו ישחק מהמצב $(n-1,n-1)$ יש אסטרטגיה מנצחת, ובמקרה שלנו זה השחקן השני.

כלומר קיבלנו אסטרטגיה מנצחת לשחקן השני בלוח $2 \times \infty$.

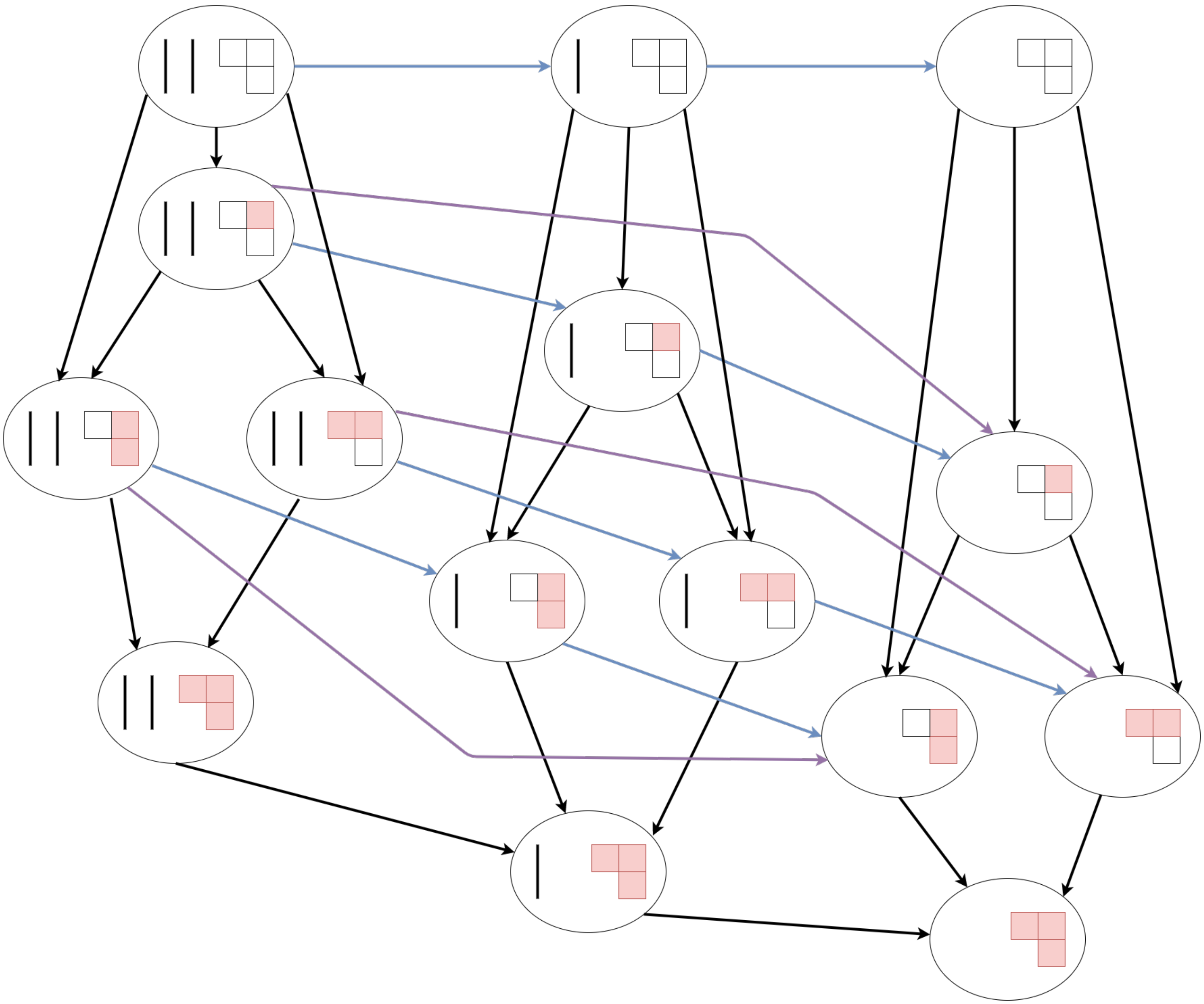
מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** למי יש אסטרטגיה מנצחת?
הוכחה:
ראינו שעבור $m = 2$, לשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת.
עבור $m > 2$, השחקן הראשון יכול לאכול את כל השורות פרט ל־ 2 שורות תחתונות ולעבור ללוח $2 \times \infty$. ראינו שלשחקן השני ממצב זה יש אסטרטגיה מנצחת, במקרה שלנו השחקן הוא השחקן הראשון.
עבור $m = 1$, השחקן הראשון יכול לעשות את המהלך $(1,2)$ ולהשאיר רק את הקוביה הרעילה ואז השחקן השני יפסיד.
כלומר קיבלנו ש:

i. אם $m = 1$, לשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת
ii. אם $m = 2$, לשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת
iii. אם $m > 2$, לשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת

מ.ש.ל.ד.☺

4. **צ"ל:** גרף
הוכחה:
כל צלע בגרף היא מהלך חוקי ל־ 2 השחקנים ולא נכתב זאת בגרף כדי להשאירו קריא.



נסתכל על מי מנצח, נחשב מהציור בשיטה שראינו בתרגול הראשון:

$$P_0 = \left\{ \left(0, \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ & \blacksquare \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$N_1 = \left\{ \left(1, \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ & \blacksquare \end{bmatrix} \right), \left(0, \begin{bmatrix} \square & \blacksquare \\ & \blacksquare \end{bmatrix} \right), \left(0, \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ & \square \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$P_1 = \left\{ \left(2, \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ & \blacksquare \end{bmatrix} \right), \left(1, \begin{bmatrix} \square & \blacksquare \\ & \blacksquare \end{bmatrix} \right), \left(1, \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ & \square \end{bmatrix} \right), \left(0, \begin{bmatrix} \square & \blacksquare \\ & \square \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$N_2 = \left\{ \left(1, \begin{bmatrix} \square & \square \\ & \square \end{bmatrix} \right), \left(0, \begin{bmatrix} \square & \square \\ & \square \end{bmatrix} \right), \left(2, \begin{bmatrix} \square & \blacksquare \\ & \square \end{bmatrix} \right), \left(1, \begin{bmatrix} \square & \blacksquare \\ & \square \end{bmatrix} \right), \left(2, \begin{bmatrix} \square & \blacksquare \\ & \blacksquare \end{bmatrix} \right), \left(2, \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ & \square \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$P_2 = \left\{ \left(2, \begin{bmatrix} \square & \square \\ & \square \end{bmatrix} \right) \right\}$$

וקיבלנו שהשחקן השני הוא המנצח במשחק, ואף יותר מצאנו את האסטרטגיה של לעבור מ־ $N = N_1 \cup N_2$ ל־ $P = P_0 \cup P_1 \cup P_2$ בשביל ניצחון של השחקן השני.

מ.ש.ל.☺