פתרון תרגיל מספר 3 - AI

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639 **שם:** הראל רותם, **ת.ז:** 318661741

7 ביוני 2020

1. **צ"ל:** להוכיח ברזולוציה ש- $\exists x\left(Climber\left(x\right)\wedge\neg Skier\left(x\right)\right)$
הוכחה:
נתחיל להמיר כל נתון ל- $clause$,

(א) הנתון הראשון הוא Every member of the Hoofers Club is either a skier or a mountain climber or both., כלומר

$$\forall x\left[Climber\left(x\right)\vee Skier\left(x\right)\right]$$

נעשה לפי האלגוריתם המרה ונוריד את ה- $\forall$ ונקבל $Climber\left(x\right)\vee Skier\left(x\right)$, וב- $clause$ לאחר החלפת שם המשתנה למשתנה ייחודי זה $\boxed{\left\{Climber\left(x_1\right),Skier\left(x_1\right)\right\}}$

(ב) הנתון השני הוא No mountain climber likes rain, כלומר

$$\forall x\left[Climber\left(x\right)\Rightarrow\neg Likes\left(x,Rain\right)\right]$$

נעשה לפי האלגוריתם המרה ונוריד את ה- $\forall$ ונקבל $Climber\left(x\right)\Rightarrow\neg Likes\left(x,Rain\right)$, נשים לב כי

$$Climber\left(x\right)\Rightarrow\neg Likes\left(x,Rain\right)=\neg Climber\left(x\right)\vee\neg Likes\left(x,Rain\right)$$

וב- $clause$ לאחר החלפת שם המשתנה למשתנה ייחודי זה $\boxed{\left\{\neg Climber\left(x_2\right),\neg Likes\left(x_2,Rain\right)\right\}}$

(ג) הנתון השלישי הוא all skiers like snow, כלומר

$$\forall x\left[Skier\left(x\right)\Rightarrow Likes\left(x,Snow\right)\right]$$

נעשה לפי האלגוריתם המרה ונוריד את ה- $\forall$ ונקבל $Skier\left(x\right)\Rightarrow Likes\left(x,Snow\right)$, נשים לב כי

$$Skier\left(x\right)\Rightarrow Likes\left(x,Snow\right)=\neg Skier\left(x\right)\vee Likes\left(x,Snow\right)$$

וב- $clause$ לאחר החלפת שם המשתנה למשתנה ייחודי זה $\boxed{\left\{\neg Skier\left(x_3\right),Likes\left(x_3,Snow\right)\right\}}$

(ד) הנתון הרביעי הוא Porthos dislikes whatever Athos likes, and likes whatever Athos dislikes, כלומר

$$\forall x\left[Likes\left(Porthos,x\right)\iff\neg Likes\left(Athos,x\right)\right]$$

נעשה לפי האלגוריתם המרה ונוריד את ה- $\forall$ ונקבל $Likes\left(Porthos,x\right)\iff\neg Likes\left(Athos,x\right)$, נשים לב כי

$$\begin{aligned}&Likes\left(Porthos,x\right)\iff\neg Likes\left(Athos,x\right)\\&=\left[Likes\left(Porthos,x\right)\Rightarrow\neg Likes\left(Athos,x\right)\right]\wedge\left[\neg Likes\left(Athos,x\right)\Rightarrow Likes\left(Porthos,x\right)\right]\\&=\left[\neg Likes\left(Porthos,x\right)\vee\neg Likes\left(Athos,x\right)\right]\wedge\left[\neg\neg Likes\left(Athos,x\right)\vee Likes\left(Porthos,x\right)\right]\\&=\left[\neg Likes\left(Porthos,x\right)\vee\neg Likes\left(Athos,x\right)\right]\wedge\left[Likes\left(Athos,x\right)\vee Likes\left(Porthos,x\right)\right]\end{aligned}$$

וב- $clauses$ לאחר החלפת שמות המשתנים למשתנים ייחודים זה

$$\boxed{\left\{\neg Likes\left(Porthos,x_4\right),\neg Likes\left(Athos,x_4\right)\right\},\left\{Likes\left(Athos,x_5\right),Likes\left(Porthos,x_5\right)\right\}}$$

(ה) הנתון החמישי הוא Athos likes rain and snow, כלומר

$$Likes\left(Athos, Snow\right) \wedge Likes\left(Athos, Rain\right)$$

וב־ $clauses$ נקבל $\boxed{\{Likes\left(Athos, Snow\right)\}, \{Likes\left(Athos, Rain\right)\}}$

(ו) הסתירה של הנתון היא

$$\neg\exists x\left(Climber\left(x\right) \wedge \neg Skier\left(x\right)\right) = \forall x\left[\neg Climber\left(x\right) \vee Skier\left(x\right)\right]$$

נעשה לפי האלגוריתם המרה ונוריד את ה־ $\forall$ ונקבל $\neg Climber\left(x\right) \vee Skier\left(x\right)$, וב־ $clause$ לאחר החלפת שם המשתנה למשתנה ייחודי זה $\boxed{\{\neg Climber\left(x_6\right), Skier\left(x_6\right)\}}$

עתה נרצה להוכיח כי ההנחות גוררות את המסקנה, זה שקול להראות שההנחות איחוד השלילה של המסקנה זה לא ספיק עם רזולוציה.
כלומר ה־ $clauses$ שאנחנו רוצים להראות שהם לא ספיקים הם

$$\{Climber\left(x_1\right), Skier\left(x_1\right)\}, \{\neg Climber\left(x_2\right), \neg Likes\left(x_2, Rain\right)\}$$
$$\{\neg Skier\left(x_3\right), Likes\left(x_3, Snow\right)\}, \{\neg Likes\left(Porthos, x_4\right), \neg Likes\left(Athos, x_4\right)\}$$
$$\{Likes\left(Athos, x_5\right), Likes\left(Porthos, x_5\right)\}, \{Likes\left(Athos, Snow\right)\}$$
$$\{Likes\left(Athos, Rain\right)\}, \{\neg Climber\left(x_6\right), Skier\left(x_6\right)\}$$

נתחיל מרזולוציה של $\{Likes\left(Athos, Snow\right)\}$ ו־ $\{\neg Likes\left(Porthos, x_4\right), \neg Likes\left(Athos, x_4\right)\}$ כאשר ה־ $MGU = \{x_4 \backslash Snow\}$ ונקבל $\boxed{\{\neg Likes\left(Porthos, Snow\right)\}}$
עתה נעשה רזולוציה של $\{\neg Likes\left(Porthos, Snow\right)\}$ ו־ $\{\neg Skier\left(x_3\right), Likes\left(x_3, Snow\right)\}$ כאשר ה־ $MGU = \{x_3 \backslash Porthos\}$ ונקבל $\boxed{\{\neg Skier\left(Porthos\right)\}}$,
עתה נעשה רזולוציה של $\{\neg Skier\left(Porthos\right)\}$ ו־ $\{\neg Climber\left(x_6\right), Skier\left(x_6\right)\}$ כאשר ה־ $MGU = \{x_6 \backslash Porthos\}$ ונקבל $\boxed{\{\neg Climber\left(Porthos\right)\}}$
עתה נעשה רזולוציה של $\{\neg Climber\left(Porthos\right)\}$ ו־ $\{Climber\left(x_1\right), Skier\left(x_1\right)\}$ כאשר ה־ $MGU = \{x_1 \backslash Porthos\}$ ונקבל $\boxed{\{Skier\left(Porthos\right)\}}$

עתה נעשה רזולוציה של $\{Skier\left(Porthos\right)\}$ ו־ $\{\neg Skier\left(Porthos\right)\}$ ונקבל $\boxed{\emptyset}$.
כלומר ההנחות איחוד השלילה של המסקנה לא ספיק, ולכן ההנחות גוררת את המסקנה ש־ $\exists x\left(Climber\left(x\right) \wedge \neg Skier\left(x\right)\right)$, כנדרש.
היוריסטיקה שהשתמשנו בה למציאת הפתרון היא unit resolution heuristic שדורשת שאחד מ־ 2 האיברים בכל רזולוציה יכיל איבר אחד, זה לא מבטיח שנמצא פתרון אבל במקרה שלנו זה עבד ממש טוב.

מ.ש.ל.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** המרת הנתון והמסקנה ללוגיקה ו־CNF
הוכחה:
הנתון הוא Horses are animals כלומר בלוגיקה מסדר ראשון

$$\forall x\left[Horse\left(x\right) \to Animal\left(x\right)\right]$$

נמיר ל־ CNF על ידי מחיקת כמת ה־ $\forall$ ונקבל

$$Horse\left(x\right) \to Animal\left(x\right) = \neg Horse\left(x\right) \vee Animal\left(x\right)$$

כלומר ה־ $clause$ של הנתון הוא $\{\neg Horse\left(x\right), Animal\left(x\right)\}$,
עתה מה שאנחנו רוצים להוכיח הוא The head of a horse is the head of an animal, כלומר בלוגיקה מסדר ראשון

$$\forall h\left[\exists x\left[Horse\left(x\right) \wedge headOf\left(h, x\right)\right] \to \exists y\left[Animal\left(y\right) \wedge headOf\left(h, y\right)\right]\right]$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** לשלול את המסקנה
הוכחה:
השלילה של המסקנה הינה

$$\begin{aligned}
&\neg\forall h\left[\exists x\left[Horse\left(x\right)\wedge headOf\left(h,x\right)\right]\rightarrow\exists y\left[Animal\left(y\right)\wedge headOf\left(h,y\right)\right]\right]\\
=&\exists h\neg\left[\exists x\left[Horse\left(x\right)\wedge headOf\left(h,x\right)\right]\rightarrow\exists y\left[Animal\left(y\right)\wedge headOf\left(h,y\right)\right]\right]\\
=&\exists h\neg\left[\neg\exists x\left[Horse\left(x\right)\wedge headOf\left(h,x\right)\right]\vee\exists y\left[Animal\left(y\right)\wedge headOf\left(h,y\right)\right]\right]\\
=&\exists h\left[\exists x\left[Horse\left(x\right)\wedge headOf\left(h,x\right)\right]\wedge\neg\exists y\left[Animal\left(y\right)\wedge headOf\left(h,y\right)\right]\right]\\
=&\exists h\left[\exists x\left[Horse\left(x\right)\wedge headOf\left(h,x\right)\right]\wedge\forall y\left[\neg\left[Animal\left(y\right)\wedge headOf\left(h,y\right)\right]\right]\right]\\
=&\exists x\left[Horse\left(x\right)\wedge headOf\left(A,x\right)\right]\wedge\forall y\left[\neg\left[Animal\left(y\right)\wedge headOf\left(A,y\right)\right]\right]\\
=&\left[Horse\left(B\right)\wedge headOf\left(A,B\right)\right]\wedge\forall y\left[\neg\left[Animal\left(y\right)\wedge headOf\left(A,y\right)\right]\right]\\
=&\left[Horse\left(B\right)\wedge headOf\left(A,B\right)\right]\wedge\left[\neg\left[Animal\left(y\right)\wedge headOf\left(A,y\right)\right]\right]\\
=&\left[Horse\left(B\right)\wedge headOf\left(A,B\right)\right]\wedge\left[\neg Animal\left(y\right)\vee\neg headOf\left(A,y\right)\right]\\
=&Horse\left(B\right)\wedge headOf\left(A,B\right)\wedge\left[\neg Animal\left(y\right)\vee\neg headOf\left(A,y\right)\right]
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו שה־ $clauses$ של שלילת המסקנה הם $\{\neg Animal\left(y\right),\neg headOf\left(A,y\right)\}$, $\{headOf\left(A,B\right)\}$, $\{Horse\left(B\right)\}$.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** להוכיח ברזולוציה ש־ a head of a horse is a head of an animal
הוכחה:

עתה במקום להוכיח שההנחה גוררת את המסקנה, נראה שההנחה איחוד השלילה של המסקנה היא לא ספיקה בעזרת רזולוציה ונסיק שההנחה אכן גוררת את המסקנה.
ה־ $clauses$ שיש לנו הם :

$$\{\neg Animal\left(y\right),\neg headOf\left(A,y\right)\},\{Horse\left(B\right)\},\{headOf\left(A,B\right)\},\{\neg Horse\left(x\right),Animal\left(x\right)\}$$

תחילה נעשה רזולוציה בין $\{Horse\left(B\right)\}$ ל־ $\{\neg Horse\left(x\right),Animal\left(x\right)\}$ כאשר ה־ $MGU=x\backslash B$ ונקבל $\boxed{\{Animal\left(B\right)\}}$
עתה נעשה רזולוציה בין $\{Animal\left(B\right)\}$ ל־ $\{\neg Animal\left(y\right),\neg headOf\left(A,y\right)\}$ כאשר ה־ $MGU=y\backslash B$ ונקבל $\boxed{\{\neg headOf\left(A,B\right)\}}$
עתה נעשה רזולוציה בין $\{headOf\left(A,B\right)\}$ ל־ $\{\neg headOf\left(A,B\right)\}$ ונקבל $\emptyset$.
כלומר ההנחות איחוד השלילה של המסקנה לא ספיק, ולכן המסקנה אכן נובעת מההנחה, כנדרש!

מ.ש.ל.ג.☺

3. **צ"ל:** להמיר את הבעיה ל־ SAS
הוכחה:
תחילה נגדיר את

$$\begin{aligned}
&V:\\
&\quad box-below\left[n\right]\in\{None,T,1,\ldots,n\}\\
&\quad box-above\left[n\right]\in\{None,1,\ldots,n\}\\
&\quad picked-value\in\{None,1,\ldots,n\}
\end{aligned}$$

כלומר לכל מצב יש $2n+1$ משתנים, לכל קופסא מי נמצא מעל לקוביה שאנחנו רוצים להמיר, מי נמצא מתחת ועוד משתנה איזו קוביה מורמת כרגע על ידי המנוף.
עתה נתחיל להגדיר את הפעולות A.

לכל $x \in \{1,\ldots,n\}$ נגדיר

$$pick\left(x\right):$$
$$Pre: box-above\left[x\right]=None, box-below\left[x\right]=T, picked-value=None$$
$$Eff: picked-value=x, box-below\left[x\right]=None$$

כלומר הרעיון של הפעולה היא לעדכן את המשתנה של המנוף, שהוא כרגע מחזיק בקופסא x ובשביל זה הוא צריך לא להחזיק שום דבר אחר וגם שיוכל להרים את הקופסא, כלומר שאין שום דבר מעליה.
לכל $x \in \{1,\ldots,n\}$ נגדיר

$$drop\left(x\right):$$
$$Pre: picked-value=x, box-below\left[x\right]=None$$
$$Eff: box-below\left[x\right]=T, picked-value=None, box-above\left[x\right]=None$$

כלומר הרעיון של הפעולה היא לעדכן את הקופסא שהיא על השולחן ואת המנוף שהוא לא מחזיק יותר כלום, ובשביל זה הוא צריך להחזיק ב־ x.
לכל $x,y \in \{1,\ldots,n\}$ כאשר $x \neq y$, נגדיר

$$stack\left(x,y\right):$$
$$Pre: picked-value=x, box-above\left[y\right]=None, box-below\left[x\right]=None$$
$$Eff: picked-value=None, box-below\left[x\right]=y, box-above\left[y\right]=x, box-above\left[x\right]=None$$

כלומר הרעיון של הפעולה היא לעדכן את x שמתחתיו יש את y ומעל y יש את x, וזה אפשרי אם אין משהו מעל ל־ y ואנחנו מחזיקים ב־ x.
לכל $x,y \in \{1,\ldots,n\}$ כאשר $x \neq y$, נגדיר

$$unstack\left(x,y\right):$$
$$Pre: picked-value=None, box-above\left[y\right]=x, box-below\left[x\right]=y, box-above\left[x\right]=None$$
$$Eff: box-above\left[y\right]=None, picked-value=x, box-below\left[x\right]=None$$

כלומר הרעיון של הפעולה היא לעדכן y ש־ x לא מעליו יותר ואת המנוף שהוא כרגע מחזיק ב־ x אם המנוף פנוי, x נמצא מעל ל־ y, y נמצא מתחת ל־ x ואין שום דבר מעל ל־ x.
נתון שהמצב ההתחלתי הוא ש־ i נמצא מעל ל־ $i+1$ והמנוף לא מחזיק כלום.
ולכן נגדיר את המצב ההתחלתי עם המשתנים

$$I:$$
$$box-above\left[i\right]=i-1, box-below\left[i\right]=i+1, \forall i \in \{2,\ldots,n-1\}$$
$$box-above\left[1\right]=None, box-below\left[1\right]=2$$
$$box-above\left[n\right]=n-1, box-below\left[n\right]=T$$
$$picked-value=None$$

עתה נשאר רק להגדיר את הgoal, נשים לב שהוא ממש דומה חוץ מזה שהקופסאות של $n-1,n$ התהפכו ולכן נגדיר אותו באופן הבא

$$G:$$
$$box-above\left[i\right]=i-1, box-below\left[i\right]=i+1, \forall i \in \{2,\ldots,n-2\}$$
$$box-above\left[1\right]=None, box-below\left[1\right]=2$$
$$box-above\left[n\right]=n-2, box-below\left[n\right]=n-1$$
$$box-above\left[n-1\right]=n, box-below\left[n\right]=T$$
$$picked-value=None$$

הגדרנו את המשתנים, הפעולות, המצב ההתחלתי, והמצב הרצוי ולכן הגדרנו את הבעיה כבעית SAS כנדרש

מ.ש.ל.☺