אלגברה לינארית (2) תשע`ט 2018-2019 - סמסטר ב' - תרגיל 13

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז.** יש לציין **כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 19.6.19 בשעה 21:00.

לכל אורך תרגיל זה הסימון $\mathbb{F}$ יציין את אחד מהשדות $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.

1. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$ ו- $B=(b_1,\dots,b_n)$ בסיס של V.
הוכיחו כי קיימת מכפלה פנימית $\langle\cdot\mid\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{F}$ יחידה על V כך ש- B הוא בסיס אורתונורמלי ביחס ל- $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$.

2. יהי V ממ`פ מעל $\mathbb{R}$ ממימד סופי ו- $T\colon V\to V$ אופרטור אורתוגונלי לכסין.
הוכיחו כי קיים תת-מרחב U של V כך ש- $T=R_U$ כאשר $R_U\colon V\to V$ הוא השיקוף האורתוגונלי ביחס ל-U (הוגדר בתרגיל 12 שאלה 5).

3. יהי V ממ`פ מעל $\mathbb{F}$ ממימד סופי ו- $S,T\colon V\to V$ אופרטורים לינאריים. הוכיחו כי:
א) $(S+T)^*=S^*+T^*$.
ב) $(ST)^*=T^*S^*$.

4. יהי V ממ`פ מעל $\mathbb{F}$ ממימד סופי ו- $T\colon V\to V$ אופרטור לינארי. הוכיחו כי $(\mathrm{Im}(T))^\perp=\ker T^*$.

5. יהי V ממ`פ מעל $\mathbb{F}$ ממימד סופי ו- $T\colon V\to V$ אופרטור לינארי.
אלו מהטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
א) $\ker(T^*)=\ker(T)$
ב) $\ker(T^*\circ T)=\ker(T)$
ג) $\ker(T\circ T^*)=\ker(T)$
ד) $\dim\ker(T^*)=\dim\ker(T)$

6. יהי V ממ`פ מעל $\mathbb{F}$ ממימד סופי ו- $T\colon V\to V$ אופרטור לינארי.
אלו מהטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
א) אם T הפיך, אז גם T^* הפיך.
ב) אם T אורתוגונלי/אוניטרי, אז גם T^* אורתוגונלי/אוניטרי.
ג) אם T לכסין אורתוגונלית, אז גם T^* לכסין אורתוגונלית.
ד) אם T לכסין, אז גם T^* לכסין.

7. יהי V ממ`פ מעל $\mathbb{F}$ ממימד סופי ו- $S,T\colon V\to V$ אופרטורים לינאריים.
אלו מהטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
א) אם S,T אורתוגונלים/אוניטרים, אז גם $S\circ T$ אורתוגונלי/אוניטרי.
ב) אם S,T צמודים לעצמם, אז גם $S\circ T$ צמוד לעצמו.

8. יהי V ממ`פ מעל $\mathbb{F}$ ממימד סופי, יהי U תת-מרחב של V ויהי $R_U\colon V\to V$ השיקוף האורתוגונלי ביחס ל-U. הוכיחו כי R_U אופרטור צמוד לעצמו.

9. יהי V ממ`פ מעל $\mathbb{F}$ ממימד סופי ו- $T\colon V\to V$ אופרטור לינארי כך ש- $T\circ T=T$.
הוכיחו כי T צמוד לעצמו אם"ם $(\mathrm{Im}T)^\perp=\ker T$ ובמקרה זה $T=P_{\mathrm{Im}T}$, כלומר T הוא ההטלה האורתוגונלית על $\mathrm{Im}T$.

בהצלחה!