פתרון תרגיל מספר 11 - לינארית 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

4 ביוני 2019

1. **צ"ל:** $|a+2b+3c|\le 4\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
הוכחה:
נסתכל על $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$. ממשפט קושי שוורץ בריבוע מתקיים

$$(a+2b+3c)^2=\left\langle\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\mid\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\rangle^2\le\left\langle\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\mid\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\right\rangle^2\cdot\left\langle\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\mid\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\rangle^2=\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot\left(1+2^2+3^2\right)$$
$$\Rightarrow(a+2b+3c)^2\le 14\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 16\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$\Rightarrow|a+2b+3c|=\sqrt{(a+2b+3c)^2}\le\sqrt{16\left(a^2+b^2+c^2\right)}=4\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

לכן

$$\boxed{|a+2b+3c|\le 4\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

מ.ש.ל.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** u_1,u_2,u_3 בת"ל
הוכחה:
נשים את הוקטורים במטריצה, נדרג ונראה שהדרגה היא מספר המטריצות ומפה נסיק שהוקטורים בת"ל

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&i&-1&-i&1\\1&2&4&8&16\end{bmatrix}\overset{\substack{R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3-R_1}}{\to}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&i-1&-2&-i-1&0\\0&1&3&7&15\end{bmatrix}\overset{R_2\Leftrightarrow R_3}{\to}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&3&7&15\\0&i-1&-2&-i-1&0\end{bmatrix}$$
$$\overset{R_3\to R_3-(i-1)R_2}{\to}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&3&7&15\\0&0&-2+3-3i&-i-1-7+7i&15-15i\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&3&7&15\\0&0&1-3i&-8+6i-&15-15i\end{bmatrix}$$

מהיות $\operatorname{rk}(A)=3$, מתקיים שהוקטורים בת"ל, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** מציאת בסיס או"נ

הוכחה:

תחילה ננרמל את u_1,

$$b_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

עתה נשים לב כי

$$v_2 = u_2 - \langle b_1, u_2 \rangle \cdot b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \cdot (1+i-1-i+1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5i-1 \\ -6 \\ -5i-1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

לכן

$$b_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5i-1 \\ -6 \\ -5i-1 \\ 4 \end{bmatrix}}{\frac{1}{5}\sqrt{4^2+5^2+1^2+6^2+5^2+1^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{120}} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5i-1 \\ -6 \\ -5i-1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

עתה נחשב את b_3:

$$v_3 = u_3 - \langle b_1, u_3 \rangle \cdot b_1 - \langle b_2, u_3 \rangle \cdot b_2$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{120}} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5i-1 \\ -6 \\ -5i-1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{120}} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5i-1 \\ -6 \\ -5i-1 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} - \frac{31}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{120} \cdot (34+30i) \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5i-1 \\ -6 \\ -5i-1 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{19}{3} - i \\ \frac{-8}{3} - \frac{7}{6}i \\ \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}i \\ \frac{5}{6} + \frac{5}{3}i \\ \frac{26}{3} - i \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -38-6i \\ -16-7i \\ -3+9i \\ 5+10i \\ 52-6i \end{bmatrix}$$

לכן

$$e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-38-6i\\-16-7i\\-3+9i\\5+10i\\52-6i\end{bmatrix}}{\frac{1}{6}\cdot\sqrt{4740}} = \frac{1}{\sqrt{4740}}\cdot\begin{bmatrix}-38-6i\\-16-7i\\-3+9i\\5+10i\\52-6i\end{bmatrix}$$

לכן $\frac{1}{\sqrt{4740}}\cdot\begin{bmatrix}-38-6i\\-16-7i\\-3+9i\\5+10i\\52-6i\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{120}}\cdot\begin{bmatrix}4\\5i-1\\-6\\-5i-1\\4\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ הוא בסיס או"נ

מ.ש.ל.ב.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $P_U\left(\begin{bmatrix}1\\2\\4\\8\\16\end{bmatrix}\right)$

הוכחה:

נשים לב כי יש $\dim U = 3$, וננחש 3 וקטורים בת"ל בU, אזי מתקיים שהם בסיס ופורשים, כלומר:

$$U = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

עתה נמצא בסיס אורתונורמלי של U,

$$b_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

וגם

$$v_2 = u_2 - \langle b_1, u_2\rangle b_1 = \begin{bmatrix} 0\\0\\-1\\0\\1 \end{bmatrix} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0\\-1\\0\\1\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\-1\\0\\1 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0\\-1\\0\\1\\0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0\\-1\\0\\1 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = \frac{v_1}{\|u_1\|} = \frac{\begin{bmatrix} 0\\0\\-1\\0\\1 \end{bmatrix}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0\\0\\-1\\0\\1 \end{bmatrix}$$

עתה

$$v_3 = u_3 - \langle b_1, u_3\rangle b_1 - \langle b_2, u_3\rangle b_2 = \begin{bmatrix} -1\\0\\1\\0\\0 \end{bmatrix} - 0\cdot b_1 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0\\0\\-1\\0\\1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2\\0\\1\\0\\1 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = \frac{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2\\0\\1\\0\\1 \end{bmatrix}}{\frac{1}{2}\sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\begin{bmatrix} -2\\0\\1\\0\\1 \end{bmatrix}$$

כלומר b_1, b_2, b_3 הוא בסיס או"נ, עתה

$$P_U\left(\begin{bmatrix} 1\\2\\4\\8\\16 \end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{3}\left\langle b_i, \begin{bmatrix} 1\\2\\4\\8\\16 \end{bmatrix}\right\rangle b_i = (8-2)\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0\\-1\\0\\1\\0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(16-4)\begin{bmatrix} 0\\0\\-1\\0\\1 \end{bmatrix} + (16+4-2)\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} -2\\0\\1\\0\\1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0\\-3\\0\\3\\0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\0\\-6\\0\\6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6\\0\\3\\0\\3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\\-3\\-3\\3\\9 \end{bmatrix}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** P_U

הוכחה:

$$P_U\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{3}\left\langle b_i,\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\rangle b_i=(0)\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}(0)\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+(-2)\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{4}{6}e_1-\frac{2}{6}e_3-\frac{2}{6}e_5$$

$$P_U\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{3}\left\langle b_i,\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\rangle b_i=(-1)\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}(0)\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+(0)\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}e_2-\frac{1}{2}e_4$$

$$P_U\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{3}\left\langle b_i,\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\rangle b_i=(0)\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}(-1)\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+(1)\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}=-\frac{2}{6}e_1+\frac{4}{6}e_3-\frac{2}{6}e_5$$

$$P_U\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{3}\left\langle b_i,\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right\rangle b_i=(1)\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}(0)\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+(0)\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{2}e_4$$

$$P_U\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{3}\left\langle b_i,\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle b_i=(0)\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}(1)\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+(1)\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}=-\frac{1}{3}e_1-\frac{1}{3}e_3+\frac{2}{3}e_5$$

לכן

$$[P_U]_E^E=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{-1}{3}&0&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

מ.ש.ל.ב.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** מכפלה פנימית
הוכחה:

i. תחילה נראה לינאריות במשתנה השני

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x_2+\alpha\cdot x_3 \\ y_2+\alpha\cdot y_3 \\ z_2+\alpha\cdot z_3 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1\cdot(x_2+\alpha\cdot x_3)+2\cdot y_1(y_2+\alpha\cdot y_3)+3\cdot z_1(z_2+\alpha\cdot z_3)$$
$$+y_1\cdot(z_2+\alpha\cdot z_3)+z_1\cdot(y_2+\alpha\cdot y_3)$$
$$=(x_1\cdot x_2+2y_1\cdot y_2+3z_1\cdot z_2+y_1\cdot z_2+z_1\cdot y_2)$$
$$+\alpha(x_1\cdot x_3+2y_1\cdot y_3+3z_1\cdot z_3+y_1\cdot z_3+z_1\cdot y_3)$$
$$=\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right\rangle + \alpha \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

ii. עתה נראה סימטריות ב$\mathbb{R}$

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1\cdot x_2+2y_1\cdot y_2+3z_1\cdot z_2+y_1\cdot z_2+z_1\cdot y_2$$

$$=x_1\cdot x_2+2y_1\cdot y_2+3z_1\cdot z_2+z_1\cdot y_2+y_1\cdot z_2=\left\langle \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

iii. עתה נראה חיובית ו0 אם"ם זה וקטור ה0

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\rangle = x^2+2\cdot y^2+3\cdot z^2+2\cdot yz = x^2+2\left(y^2+yz+z^2\right)+z^2$$

נשים לב כי

$$y^2+yz+z^2>0 \Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow z^2-4\cdot z^2<0 \Leftrightarrow z^2>0$$

כלומר אם z אינו 0, אז יש לפחות איבר אחד והכל חיובי ולכן זה לא 0,
המכפלה שווה 0 רק אם $x=z=y^2+yz+z^2=0$ ומפה נקבל כי $x=y=z=0$, כלומר המכפלה מתאפסת
אם"ם $x=y=z=0$, כלומר וקטור ה0

מהיות המכפלה מקיימת את כל התכונות, המכפלה היא מכפלה פנימית

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** בסיס או"נ לU
הוכחה:

$$b_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{1+0+0+0}}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=v_1$$

עתה נחשב את v_2,

$$v_2=v_2-\langle b_1,v_2\rangle b_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}-\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}=\frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

כלומר קיבלנו כי $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ הוא הבסיס חיפשנו

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** הטלה של $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ על U

הוכחה:

$$P_U\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** מטריצה P_U

הוכחה:

$$P_U\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\rangle\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\rangle\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=e_1$$
$$P_U\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\rangle\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\rangle\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=e_2$$
$$P_U\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}e_2$$

לכן

$$[P_U]_E^E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}$$

מ.ש.ל.ד.☺

5. **צ"ל:** בסיס או"נ ל$\text{span}\left\{1,x,x^2\right\}$

הוכחה:

$$b_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}1^2dx}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

עתה נחשב את v_2

$$v_2=x-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}},x\right\rangle\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=x-\left[\int_{-1}^{1}x\cdot dx\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=x-\left[\frac{x^2}{2}\mid_{-1}^{1}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=x$$
$$b_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}=\frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1}x^2dx}}=\frac{x}{\sqrt{\frac{x^3}{3}\mid_{-1}^{1}}}=\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x$$

עתה נחשב את v_3

$$\begin{aligned} v_3 &= x^2 - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, x^2 \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \left\langle \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x, x^2 \right\rangle \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x \\ &= x^2 - \left(\int_{-1}^{1} x^2 \cdot dx \right) \cdot \frac{1}{2} - \left(\int_{-1}^{1} x^3 \cdot dx \right) \cdot \frac{3}{2} \cdot x \\ &= x^2 - \left(\frac{x^3}{3} \mid_{-1}^{1} \right) \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot \frac{3}{2} \cdot x = x^2 - \frac{1}{3} \\ b_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} dx}} \\ &= \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{5} - \frac{2}{9}}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{45}}} \end{aligned}$$

לכן $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x, \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{45}}}$ הוא בסיס או"נ של $\text{span}\left\{1, x, x^2\right\}$

מ.ש.ל.☺

6. **צ"ל:** $\sum_{i=1}^{m} |\langle b_i, v\rangle|^2 \le \|v\|^2$

הוכחה:

מהיות $b_1, \ldots, b_m$ אנכים ממשפט פיתגורס אנחנו יודעים כי

$$\|P_U(v)\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\langle b_i, v\rangle|^2 \cdot \langle b_i, b_i\rangle = \sum_{i=1}^{m} |\langle b_i, v\rangle|^2$$

לכן מהגדרת ההטלה מתקיים $\langle v - P_U(v), P_U(v)\rangle = 0$, לכן

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \|P_U(v)\|^2 + \|v - P_U(v)\|^2 \ge \|P_U(v)\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\langle b_i, v\rangle|^2 \\ &\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{m} |\langle b_i, v\rangle|^2 \le \|v\|^2} \end{aligned}$$

מ.ש.ל.☺

7. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\|w\| \le \|u\|$

הוכחה:

תחילה נוכיח כי $P_W(u) = w$,

נתון כי $U \subseteq W$, לכן $U^\perp \subseteq W^\perp$, עתה נשים לב כי $v - w \in W^\perp$ מהגדרת הטלה וגם $v - u \in U^\perp \subseteq W^\perp$ מהגדרת ההטלה. לכן

$$u - w = (v - w) - (v - u) \in W^\perp$$

לכן מהגדרת הטלה מתקיים כי $P_W(u) = w$, עתה נשים לב כי

$$\|w\|^2 = \|P_W(u)\|^2 \overset{\star}{\le} \|u\|^2 \Rightarrow \boxed{\|w\| \le \|u\|}$$

נשים לב כי בשאלה הקודמת נימקנו מדוע $\|P_V(u)\| \le \|u\|$ לכל u

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $d\left(v,u\right)\leq d\left(v,w\right)$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי $w\in U$, לכן ממה שהוכח בכיתה על הטלה מתקיים כי

$$d\left(v,w\right)\geq d\left(v,P_{U}\left(v\right)\right)$$

ונתון כי $P_{U}\left(v\right)=u$, לכן

$$\boxed{d\left(v,w\right)\geq d\left(v,P_{U}\left(v\right)\right)=d\left(v,u\right)}$$

מ.ש.ל.ב.☺

8. **צ"ל:** $a_{i,j}=\left\langle b_{i},T\left(b_{j}\right)\right\rangle$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי שמההגדרה של מטריצה מייצגת לפי בסיס, מתקיים כי

$$T\left(b_{j}\right)=\sum_{k=1}^{m}a_{k,j}\cdot b_{k}$$

נציב ונקבל

$$\left\langle b_{i},T\left(b_{j}\right)\right\rangle =\left\langle b_{i},\sum_{k=1}^{m}a_{k,j}\cdot b_{k}\right\rangle =\sum_{k=1}^{m}a_{k,j}\cdot\left\langle b_{i},b_{k}\right\rangle =\sum_{k=1}^{m}a_{k,j}\cdot\begin{cases}1 & i=k\\0 & i\neq k\end{cases}=1\cdot a_{i,j}=a_{i,j}$$

כלומר קיבלנו כי

$$\boxed{a_{i,j}=\left\langle b_{i},T\left(b_{j}\right)\right\rangle }$$

מ.ש.ל.☺

9. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** W מרחב וקטורי
הוכחה:

i. תחילה נראה סגירות לכפל בסקלר:
יהי $f\in W$, $a\in\mathbb{F}$, נשים לב כי $a\cdot f$ רציפה ואינטגרבילית ולכן $a\cdot f\in C\left[0,1\right]$ וגם מתקיים

$$\left(a\cdot f\right)\left(0\right)=a\cdot f\left(0\right)=a\cdot0=0$$

לכן $a\cdot f\in W$

ii. תחילה נראה סגירות לחיבור:
יהיו $f,g\in W$, נשים לב כי $f+g$ רציפה ואינטגרבילית ולכן $f+g\in C\left[0,1\right]$ וגם מתקיים

$$\left(f+g\right)\left(0\right)=f\left(0\right)+g\left(0\right)=0+0=0$$

לכן $f+g\in W$

iii. עתה נרא את שייכות וקטור ה0,
נשים לב כי $f\left(x\right)=0$ היא פונקציה רציפה, אינטגרבילית, וגם מתקיים $f\left(0\right)=0$, לכן $f\in W$, כלומר וקטור ה0 במרחב

לכן W הוא תת מרחב וקטורי

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $W^{\perp}=\{0\}$

הוכחה:

יהי $g\in W^{\perp}$, נגדיר $f\left(x\right)=x\cdot g\left(x\right)$, נשים לב ש$f$ רציפה ואינטגרבילית וגם $f\left(0\right)=0$, לכן $f\in W$ וגם מתקיים מהגדרה של $g\in W^{\perp}$ ש

$$0=\left\langle f,g\right\rangle =\int_{0}^{1}f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)dx=\int_{0}^{1}x\cdot g^{2}\left(x\right)dx$$

נשים לב כי $x\cdot g^{2}\left(x\right)$ היא פונקציה רציפה ואי שלילית שהאינטגרל שלה שווה ל0, לכן זאת פונקציית האפס (ראינו באינפי 2),

לכן $\forall x\in\left(0,1\right]$ מתקיים

$$0=x\cdot g^{2}\left(x\right)\Rightarrow0=g^{2}\left(x\right)\Rightarrow g\left(x\right)=0$$

מרציפות g נובע כי $g\left(0\right)=0$, לכן g היא פונקצית ה0,

לכן $W^{\perp}\subseteq\{0\}$ וברור כי $\{0\}\subseteq W^{\perp}$ כי $W^{\perp}$ מרחב וקטורי, לכן $\boxed{W^{\perp}=\{0\}}$,

עתה יהי $f\in C\left[0,1\right]$ אזי מתקיים

$$0=\left\langle f,0\right\rangle =\int_{0}^{1}f\left(x\right)\cdot0dx=0$$

לכן $f\in\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$, לכן $C\left[0,1\right]\subseteq\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$, וברור כי $\left(W^{\perp}\right)^{\perp}\subseteq C\left[0,1\right]$, לכן $C\left[0,1\right]=\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$,

לכן נובע כי $W\subset C\left[0,1\right]=\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$,

וגם נשים לב כי $f\left(x\right)=1\in\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$ וגם $f\left(0\right)\neq0$, לכן $f\notin W$, כלומר $W\neq\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$

מ.ש.ל.ב.☺