

פתרון תרגיל מספר 3 - אינפי 2

שם: מיכאל גרינבאום, ת.ז: 211747639

12 בנובמבר 2018

1. הוכחה: חשבו את האינטגרלים הבאים

(א) צ"ל: $\int x^\alpha dx$
נשים לב שמתקיים

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{x^{\alpha+1-1}}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1) = x^\alpha$$

ולכן

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

מ.ש.ל.א. ☺

(ב) צ"ל: $\int \frac{1}{x} dx$ עבור $(-\infty, 0)$ ו $(0, \infty)$
נשים לב שמתקיים

$$(\ln(|x|))' = \begin{cases} (\ln(x))' & x > 0 \\ (\ln(-x))' & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{-x} \cdot -1 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{x} \cdot 1 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

ולכן

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

מ.ש.ל.ב. ☺

(ג) צ"ל: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ עבור $(-1, 1)$
נשים לב שמתקיים

$$1 = (x)' = (\sin(\arcsin(x)))' = \cos(\arcsin(x)) \cdot (\arcsin(x))' \\ \Rightarrow (\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{\cos(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ולכן

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$$

מ.ש.ל.ג.⊙

(ד) **צ"ל:** $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ עבור $(-1, 1)$
 ראינו בסעיף ג שמתקיים כי $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$ ולכן

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arcsin(x) + C$$

מ.ש.ל.ד.⊙

(ה) **צ"ל:** $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$ עבור $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
 נשים לב שמתקיים

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - (\sin(x) \cdot -\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

ולכן

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$$

מ.ש.ל.ה.⊙

(ו) **צ"ל:** $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx$ עבור $(0, \pi)$
 נשים לב שמתקיים

$$(-\cot(x))' = - \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)' = - \frac{(-\sin(x) \cdot \sin(x)) - \cos(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

ולכן

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + C$$

מ.ש.ל.ו.⊙

(ז) **צ"ל:** $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ עבור \mathbb{R}
 נשים לב שמתקיים

$$1 = (x)' = (\tan(\arctan(x)))' = \frac{1}{\cos^2(\arctan(x))} \cdot (\arctan(x))'$$

$$\Rightarrow (\arctan(x))' = \cos^2(\arctan(x)) = \cos(\arctan(x)) \cdot \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}$$

ולכן

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

מ.ש.ל.ז.⊙

2. צ"ל: $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx \stackrel{u=\sin(x)}{\underset{du=\cos(x)dx}{=}} \int \frac{1}{u} du \stackrel{*}{=} \ln(|u|) + C = \ln(|\sin(x)|) + C$$

נשים לב ש* מתקיים משאלה 1 סעיף ב

מ.ש.ל.⊙

3. צ"ל: חשבו את האינטגרלים הבאים

(א) צ"ל: $\int x^2 \ln(x) dx$

$$\int x^2 \ln(x) dx \stackrel{f=x^2}{\underset{G=\ln(x)}{=}} \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \frac{1}{3} \cdot \int x^2 dx \stackrel{*}{=} \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{3} \left(\ln(x) - \frac{1}{3} \right) + C$$

נשים לב ש* מתקיים משאלה 1 סעיף א

מ.ש.ל.א.⊙

(ב) צ"ל: $\int x^2 \ln^2(x) dx$

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln^2(x) dx &\stackrel{f=\ln^2(x)}{\underset{G=x^3}{=}} \frac{x^3}{3} \cdot \ln^2(x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot 2 \ln(x) dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln^2(x) - \frac{2}{3} \cdot \int x^2 \ln(x) dx \\ &\stackrel{*}{=} \frac{x^3}{3} \cdot \ln^2(x) - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \left(\ln(x) - \frac{1}{3} \right) + C = \frac{x^3}{3} \left(\ln^2(x) - \frac{2}{3} \ln(x) + \frac{2}{9} \right) + C \end{aligned}$$

נשים לב ש* מתקיים משאלה 3 סעיף א

מ.ש.ל.ב.⊙

(ג) צ"ל: $\int x \cdot \arctan(x) dx$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \arctan(x) dx &\stackrel{f=x}{\underset{G=\arctan(x)}{=}} \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^2 \arctan(x)}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2 \arctan(x)}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \frac{x^2 \arctan(x)}{2} - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{x^2 \arctan(x)}{2} - \frac{1}{2} \left(\int 1 \cdot dx - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx \right) \stackrel{*}{=} \frac{x^2 \arctan(x)}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\arctan(x) + C}{2} \\ &= \frac{1}{2} (x^2 \arctan(x) - x + \arctan(x)) + C = \frac{1}{2} ((x^2+1) \arctan(x) - x) + C \end{aligned}$$

נשים לב ש* מתקיים משאלה 1 סעיף ז ושאלה 1 סעיף א

מ.ש.ל.ג.⊙

(ד) צ"ל: $\int \ln(x) dx$

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \int 1 \cdot \ln(x) dx \stackrel{f=\ln(x)}{\underset{G=x}{=}} x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln(x) - \int 1 \cdot dx \\ &\stackrel{*}{=} x \cdot \ln(x) - x + C = x (\ln(x) - 1) + C \end{aligned}$$

נשים לב ש* מתקיים משאלה 1 סעיף א

מ.ש.ל.ד.⊙

$$\int \sin(\ln(x)) dx \quad \text{ז"ל: (ה)}$$

$$\begin{aligned} \int \sin(\ln(x)) dx &\stackrel{f=1}{\underset{G=\sin(\ln(x))}{=}} x \cdot \sin(\ln(x)) - \int x \cdot \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \sin(\ln(x)) - \int \cos(\ln(x)) dx \\ &= x \cdot \sin(\ln(x)) - \int \cos(\ln(x)) dx \stackrel{f=1}{\underset{G=\cos(\ln(x))}{=}} \left(x \cdot \sin(\ln(x)) - \left(x \cos(\ln(x)) - \int -\sin(\ln(x)) x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \right) \\ &\Rightarrow 2 \cdot \int \sin(\ln(x)) dx = x \cdot \sin(\ln(x)) - x \cdot \cos(\ln(x)) = x(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))) \\ &\Rightarrow \int \sin(\ln(x)) dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))) + C \end{aligned}$$

מ.ש.ל.ה.ס

$$\int \frac{x}{\sin^2(x)} dx \quad \text{ז"ל: (ו)}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sin^2(x)} dx &\stackrel{F=x}{\underset{g=\frac{1}{\sin^2(x)}}{=}} x \cdot (-\cot(x)) - \int -\cot(x) dx = -x \cdot \cot(x) + \int \cot(x) dx \\ &= -x \cdot \cot(x) + \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx \stackrel{**}{=} -x \cdot \cot(x) + \ln(|\sin(x)|) + C \\ &= \ln(|\sin(x)|) - x \cdot \cot(x) + C \end{aligned}$$

נשים לב ש* מתקיים משאלה 1 סעיף ו
נשים לב ש** מתקיים משאלה 2

מ.ש.ל.ו.ס

4. ז"ל: חשבו את האינטגרלים הבאים

$$\int e^{\sin(x)} \cos(x) dx \quad \text{ז"ל: (א)}$$

$$\int e^{\sin(x)} \cos(x) dx \stackrel{u=\sin(x)}{\underset{du=\cos(x)dx}{=}} \int e^u du = e^u = e^{\sin(x)} + C$$

מ.ש.ל.א.ס

$$\int x \cdot \cos(x^2) dx \quad \text{ז"ל: (ב)}$$

$$\int x \cdot \cos(x^2) dx \stackrel{u=x^2}{\underset{du=2xdx}{=}} \int \frac{\cos(u) du}{2} = \frac{1}{2} \int \cos(u) du = \frac{1}{2} \cdot \sin(u) = \frac{1}{2} \cdot \sin(x^2) + C$$

מ.ש.ל.ב.ס

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx \quad \text{ז"ל: (ג)}$$

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx \stackrel{u=\ln(x)}{\underset{du=\frac{1}{x}dx}{=}} \int \cos(u) du = \sin(u) = \sin(\ln(x)) + C$$

מ.ש.ל.ג.ס

$$\int e^x \ln(1+e^x) dx \quad \text{ז"ל: (ד)}$$

$$\int e^x \ln(1+e^x) dx \stackrel{u=e^x+1}{\underset{du=e^xdx}{=}} \int \ln(u) du \stackrel{*}{=} (\ln(u) - 1) \cdot u = (\ln(e^x + 1) - 1) \cdot (e^x + 1) + C$$

מ.ש.ל.ד.ד. ☺

5. הוכחה:

צ"ל: מצאו $A, B, C \in \mathbb{R}$ כך ש $\frac{1}{t^3-t} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t}$

$$\begin{aligned} \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t} &= \frac{A \cdot (t-1) \cdot t + B \cdot (t+1) \cdot t + C \cdot (t-1)(t+1)}{(t+1)(t-1)t} = \\ &= \frac{(A+B+C)t^2 + (B-A)t - C}{t^3-t} = \frac{1}{t^3-t} \end{aligned}$$

לכן $C = -1$, וגם $B - A = 0$ וגם $A + B + C = 0$, לכן $A = B$, נציב ונקבל

$$\begin{aligned} 0 &= A + B + C = 2A - 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} = B, C = -1 \\ &\Rightarrow A = \frac{1}{2}; B = \frac{1}{2}; C = -1 \end{aligned}$$

מ.ש.ל.א. ☺

(א) צ"ל: $\int \frac{1}{t^3-t} dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t^3-t} dt &= \int \left[\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t} \right] dt = \int \frac{A}{t+1} dt + \int \frac{B}{t-1} dt + \int \frac{C}{t} dt \\ &\stackrel{u=t+1}{=} \int \frac{A}{u} du + \int \frac{B}{t-1} dt + \int \frac{C}{t} dt \\ &\stackrel{w=t-1}{=} \int \frac{A}{u} du + \int \frac{B}{w} dw + \int \frac{C}{t} dt \\ &\stackrel{*}{=} A \cdot \ln(|u|) + B \cdot \ln(|w|) + C \cdot \ln(|t|) \\ &= A \cdot \ln(|t+1|) + B \cdot \ln(|t-1|) + C \cdot \ln(|t|) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln(|t+1|) + \frac{1}{2} \cdot \ln(|t-1|) - \ln(|t|) + C \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln(|t+1|) + \ln(|t-1|)) - \ln(|t|) + C \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln(|t^2-1|)) - \ln(|t|) + C \end{aligned}$$

נשים לב ש* מתקיים משאלה 1 סעיף ב

מ.ש.ל.ב. ☺

6. חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א) צ"ל: $\int \frac{1}{1-(e^x)^2} dx$ בקטע $(0, \infty)$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-(e^x)^2} dx &\stackrel{u=e^{2x}}{du=2 \cdot e^{2x} dx} \int \frac{1}{1-u} \frac{du}{2 \cdot e^{2x}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{(1-u)u} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{(1-u)u} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{(u-1)u} = -\frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right] du \\ &\stackrel{u=w-1}{dw=du} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{w} dw + \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} \ln(|u|) - \frac{1}{2} \ln(|w|) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(|u|) - \frac{1}{2} \ln(|u-1|) + C = \frac{1}{2} \ln(e^{2x}) - \frac{1}{2} \ln(|e^{2x}-1|) + C \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2x - \frac{1}{2} \ln(|e^{2x}-1|) + C \\ &= x - \frac{1}{2} \ln(|e^{2x}-1|) + C \end{aligned}$$

נשים לב ש* מתקיים משאלה 1 סעיף ב

מ.ש.ל.א. ☺

(ב) צ"ל: $\mathbb{R} \int x \cdot \sqrt{1+x^2} dx$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sqrt{1+x^2} dx &\stackrel{u=x^2+1}{du=2x dx} \int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} \cdot du \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

נשים לב ש* מתקיים משאלה 1 סעיף א

מ.ש.ל.ב. ☺