פתרון תרגיל מספר 2 - חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

16 באפריל 2020

שאלה 5:

סעיף 2:

צ"ל: אם L רגולרית אז $L_{\frac{1}{2}}$ היא רגולרית

הוכחה:

מהיות L רגולרית קיים אוטומט DFA, $\mathcal{A}=\langle Q,\Sigma,\delta,q_0,F\rangle$ כך ש- $L=L\left(\mathcal{A}\right)$
לכל $q\in Q$, נגדיר $\mathcal{A}_q=\langle Q\times Q,\Sigma,\delta_q,\langle q_0,q\rangle,F_q\rangle$ כאשר $F_q=\{q\}\times F=\{\langle q,q_f\rangle\mid q_f\in F\}$
ולכל $\langle q_1,q_2\rangle\in Q\times Q$, $\sigma\in\Sigma$ נגדיר

$$\delta_q\left(\langle q_1,q_2\rangle,\sigma\right)=\langle\delta\left(q_1,\sigma\right),\delta\left(q_2,\sigma\right)\rangle$$

נגדיר $\mathcal{A}'=\bigcup_{q\in Q}\mathcal{A}_q$ (ראינו בהרצאה כיצד לאחד אוטומטים)
עתה נוכיח כי $L_{\frac{1}{2}}=L\left(\mathcal{A}'\right)$

1. תהי $w\in L\left(\mathcal{A}'\right)$ אזי $\exists q\in Q$ כך ש- $w\in\mathcal{A}_q$, כלומר $\delta_q^*\left(\langle q_0,q\rangle,w\right)\in F_q$. כלומר מההגדרה נקבל כי $\exists q_f\in F$ כך ש- $\delta_q^*\left(\langle q_0,q\rangle,w\right)=\langle q,q_f\rangle$

$$\langle q,q_f\rangle=\delta_q^*\left(\langle q_0,q\rangle,w\right)\overset{\text{def}}{=}\langle\delta^*\left(q_0,w\right),\delta^*\left(q,w\right)\rangle$$

כלומר $\delta^*\left(q_0,w\right)=q,\delta^*\left(q,w\right)=q_f$, ולכן משאלה 3 סעיף 1 מתקיים

$$\delta^*\left(q_0,w\cdot w\right)=\delta^*\left(\delta^*\left(q_0,w\right),w\right)=\delta^*\left(q,w\right)=q_f\in F$$

כלומר $w\cdot w\in L\left(\mathcal{A}\right)=L$, ולכן $w\in L_{\frac{1}{2}}$. כלומר הראנו כי $\boxed{L\left(\mathcal{A}'\right)\subseteq L_{\frac{1}{2}}}$,

2. עתה תהי $w\in L_{\frac{1}{2}}$, לכן מההגדרה $w\cdot w\in L=L\left(\mathcal{A}\right)$,
נסמן את הריצה של $\mathcal{A}$ על $w\cdot w$ ב- $q_0\ldots q_{2n}$ כאשר $q_i\in Q$ וגם $q_{2n}\in F$ כי $w\cdot w\in L\left(\mathcal{A}\right)$,
נשים לב כי $\delta^*\left(q_0,w\right)=q_n$ מההגדרה וגם מתקיים משאלה 3 סעיף 1 כי

$$\delta^*\left(q_n,w\right)=\delta^*\left(\delta^*\left(q_0,w\right),w\right)=\delta^*\left(q_0,w\cdot w\right)=q_{2n}\in F$$

לכן מתקיים כי

$$\delta_{q_n}^*\left(\langle q_0,q_n\rangle,w\right)\overset{\text{def}}{=}\langle\delta^*\left(q_0,w\right),\delta^*\left(q_n,w\right)\rangle=\langle q_n,q_{2n}\rangle\overset{q_{2n}\in F}{\in}F_{q_n}$$

כלומר $\mathcal{A}_{q_n}$ מקבל את w, ולכן $w\in L\left(\mathcal{A}_{q_n}\right)$, ולכן $w\in L\left(\mathcal{A}'\right)$, ולכן $\boxed{L_{\frac{1}{2}}\subseteq L\left(\mathcal{A}'\right)}$

כלומר מתקיים $\boxed{L_{\frac{1}{2}}=L\left(\mathcal{A}'\right)}$, הראנו שקיים אוטומט DFA, $\mathcal{A}'$ כך ש- $L_{\frac{1}{2}}=L\left(\mathcal{A}'\right)$,
ולכן $L_{\frac{1}{2}}$ שפה רגולרית מההגדרה

מ.ש.ל.ב.☺

טענת עזר לשאלה 3:
יהי $\mathcal{A}=\langle Q,\Sigma,\delta,q_0,F\rangle$ אוטומט NFA אזי $\forall u,v\in\Sigma^*$ ו־ $S\subseteq Q$, מתקיים

$$\delta^*\left(\delta^*\left(S,u\right),v\right)=\delta^*\left(S,u\cdot v\right)$$

הערה: מדובר ב־δ^* המוכללת שהיא $\delta^*:2^Q\times\Sigma\to 2^Q$, כאשר $\delta^*\left(S,w\right)=\begin{cases}E\left(S\right) & w=\varepsilon\\ E\left(\bigcup_{q\in\delta^*\left(S,u\right)}\delta\left(q,\sigma\right)\right) & w=u\cdot\sigma\end{cases}$, וגם

$$E\left(S\right)=\left\{q\mid\exists s\in S\text{ such that there is an epsilon path between s and q}\right\}$$

הוכחת טענת עזר:
נוכיח באינדוקציה על אורך v את הטענה
<u>בסיס:</u> $|v|=0$ אזי $v=\varepsilon$, אזי מתקיים

$$\delta^*\left(S,u\cdot\varepsilon\right)=E\left(\bigcup_{q\in\delta^*\left(S,u\right)}\delta\left(q,\varepsilon\right)\right)=E\left(\bigcup_{q\in\delta^*\left(S,u\right)}E\left(\left\{q\right\}\right)\right)=E\left(\delta^*\left(S,u\right)\right)=\delta^*\left(\delta^*\left(S,u\right),\varepsilon\right)$$

<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה לכל מילה באורך $n-1$ ונוכיח לכל מילה באורך n
תהי $v\in\Sigma^*$ כך ש־ $|v|=n$, נסמן $v=\sigma_1\ldots\sigma_n$ כאשר $\sigma_i\in\Sigma$,
נסמן $w=\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}$, אזי $v=w\cdot\sigma_n$
עתה נשים לב כי $|w|=n-1$, לכן מהנחת האינדוקציה מתקיים $\delta^*\left(\delta^*\left(S,u\right),w\right)=\delta^*\left(S,u\cdot w\right)$, לכן,

$$\begin{aligned}\delta^*\left(S,u\cdot v\right)&=\delta^*\left(S,u\cdot w\cdot\sigma_n\right)=E\left(\bigcup_{q\in\delta^*\left(S,u\cdot w\right)}\delta\left(q,\sigma_n\right)\right)=E\left(\bigcup_{q\in\delta^*\left(\delta^*\left(S,u\right),w\right)}\delta\left(q,\sigma_n\right)\right)\\&=\delta^*\left(\delta^*\left(S,u\right),w\cdot\sigma_n\right)=\delta^*\left(\delta^*\left(S,u\right),v\right)\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\delta^*\left(\delta^*\left(S,u\right),v\right)=\delta^*\left(S,u\cdot v\right)}$, כנדרש

מ.ש.ל.עזר.☺

סעיף 3:
צ"ל: אם L רגולרית אז L^* היא רגולרית
הוכחה:
מהיות L רגולרית קיים אוטומט DFA, $\mathcal{A}=\langle Q,\Sigma,\delta,q_0,F\rangle$ כך ש־ $L=L\left(\mathcal{A}\right)$
נגדיר אוטומט NFA, $\mathcal{A}'=\langle Q\cup\left\{q_{start}\right\},\Sigma,\delta',q_{start},\left\{q_{start}\right\}\rangle$ כאשר לכל $q\in Q$, $\sigma\in\Sigma$ נגדיר

$$\delta'\left(q,\sigma\right)=\begin{cases}\left\{\delta\left(q,\sigma\right)\right\} & q\in Q\\ \emptyset & q=q_{start}\end{cases}$$

וגם

$$\delta'\left(q,\varepsilon\right)=\begin{cases}\left\{q_{start}\right\} & q\in F\\ \emptyset & q\in Q\setminus F\\ \left\{q_0\right\} & q=q_{start}\end{cases}$$

תהי $w\in L$, נסמן $w=\sigma_1\ldots\sigma_n$, נסמן את הריצה של $\mathcal{A}$ על w ב־ $q_0\ldots,q_n$ כאשר $q_n\in F$,

נוכיח באינדוקציה על i ש־ $q_i \in \delta'^*\left(\{q_{start}\}, \varepsilon\cdot\sigma_1\ldots\sigma_i\right)$ כאשר δ'^* זאת הדלתא המורחבת לקבוצות.
בסיס: $i=0$, נשים לב כי

$$q_0 \in \delta'^*\left(\{q_{start}\}, \varepsilon\right) = \{q_{start}, q_0\}$$

כנדרש
צעד: נניח שהטענה נכונה ל $i-1$ ונוכיח ל־ i,
מהנחת האינדוקציה מתקיים $q_{i-1} \in \delta'^*\left(\{q_{start}\}, \varepsilon\cdot\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}\right)$ נשים לב שמטענת העזר מתקיים

$$q_i \in \{q_i\} = \delta'^*\left(\{q_{i-1}\}, \sigma_i\right) \subseteq \delta'^*\left(\delta'^*\left(\{q_{start}\}, \varepsilon\cdot\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}\right), \sigma_i\right) = \delta'^*\left(\{q_{start}\}, \varepsilon\cdot\sigma_1\ldots\sigma_i\right)$$

כלומר קיבלנו כי $q_i \in \delta'^*\left(\{q_{start}\}, \varepsilon\cdot\sigma_1\ldots\sigma_i\right)$ כנדרש
מסקנה: לכל מילה $w \in L$, נסמן $w = \sigma_1\ldots\sigma_n$, נסמן את הריצה של $\mathcal{A}$ על w ב־ $q_0\ldots, q_n$ כאשר $q_n \in F$ אזי $q_n \in \delta'^*\left(\{q_{start}\}, \varepsilon\cdot w\right)$, ולכן בגלל ש־ $q_n \in F$ מתקיים

$$q_{start} \in \{q_{start}\} \subseteq \delta'^*\left(\{q_n\}, \varepsilon\right) \subseteq \delta'^*\left(\delta'^*\left(\{q_{start}\}, \varepsilon\cdot w\right), \varepsilon\right) = \delta'^*\left(\{q_{start}\}, \varepsilon\cdot w\cdot\varepsilon\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{q_{start} \in \delta'^*\left(\{q_{start}\}, \varepsilon\cdot w\cdot\varepsilon\right)}$$

תהי $w \in L^*$, אזי קיימים $w_1\ldots, w_k \in L$ כך ש־ $w = w_1\cdot\dots\cdot w_k$,
נוכיח באינדוקציה על k ש־ $q_{start} \in \delta'^*\left(\{q_{start}\}, w_1\cdot\dots\cdot w_k\right)$ כאשר δ'^* זאת הדלתא המורחבת לקבוצות, ומזה נסיק כי $L^* \subseteq L\left(\mathcal{A}'\right)$.
בסיס: אם $k=0$ אז $w=\varepsilon$, נשים לב כי

$$\delta'^*\left(\{q_{start}\}, \varepsilon\right) = E\left(\{q_{start}\}\right) = \{q_{start}, q_0\}$$

כלומר $q_{start} \in \delta'^*\left(\{q_{start}\}, \varepsilon\right)$, כנדרש
צעד: נניח שהטענה נכונה ל־ $k-1$ ונוכיח ל־ k,
נסמן $w = w_1\cdot\dots\cdot w_k$, $u = w_1\cdot\dots\cdot w_{k-1}$ כאשר $w_i \in L$,
נשים לב כי u מכילה $k-1$ מילים מL ולכן מההנחה מתקיים $q_{start} \in \delta'^*\left(\{q_{start}\}, u\right)$
נשים לב כי לפי טענת העזר מתקיים

$$\delta'^*\left(\delta'^*\left(\{q_{start}\}, u\right), \varepsilon\cdot w_k\cdot\varepsilon\right) = \delta'^*\left(\{q_{start}\}, u\cdot\varepsilon\cdot w_k\cdot\varepsilon\right) = \delta'^*\left(\{q_{start}\}, u\cdot w_k\right)$$

לכן ממה שהוכחנו מלעיל מתקיים $q_{start} \in \delta'^*\left(\{q_{start}\}, \varepsilon\cdot w_k\cdot\varepsilon\right)$ לכל מילה $w_k \in L$, לכן

$$q_{start} \in \delta'^*\left(\{q_{start}\}, \varepsilon\cdot w_k\cdot\varepsilon\right) \subseteq \delta'^*\left(\delta'^*\left(\{q_{start}\}, u\right), \varepsilon\cdot w_k\cdot\varepsilon\right) = \delta'^*\left(\{q_{start}\}, u\cdot w_k\right)$$

כמו שרצינו,
כלומר לכל מילה $w \in L^*$ מתקיים כי $\exists w_1, \ldots, w_k \in L$ כך ש־ $w = w_1\cdot\dots\cdot w_k$, לכן

$$q_{start} \in \delta'^*\left(\{q_{start}\}, w_1\cdot\dots\cdot w_k\right) = q_{start} \in \delta'^*\left(\{q_{start}\}, w\right)$$

כלומר $\delta'^*\left(\{q_{start}\}, w\right) \cap \{q_{start}\} \neq \emptyset$, כלומר $w \in L\left(\mathcal{A}'\right)$ מההגדרה, כלומר $\boxed{L^* \subseteq L\left(\mathcal{A}'\right)}$
עתה נוכיח את הכיוון השני,

תהי $w \in L(\mathcal{A}')$, אזי קיימת ריצה $r_0 \ldots r_n$ כך ש־ $r_n \in \{q_{start}\}$. נסמן את האינדקסים בהם יש q_{start} ב־ $i_0, \ldots, i_k$ אזי נוכל להסתכל כל הריצה באופן הבא, נשים לב כי $r_{i_k} = q_{start}$ וגם $r_0 = r_{i_0} = q_{start}$ כי מתחילים ב־ q_{start}, לכן

$$\begin{aligned} &q_{start} r_{i_0+1} \ldots r_{i_1-1} \\ &\vdots \\ &q_{start} r_{i_{k-1}+1} \ldots r_{i_k-1} \\ &r_{i_k} = q_{start} \end{aligned}$$

נסמן $s_j = r_{i_{j-1}+1} \ldots r_{i_j-1}$, אזי הריצה היא $q_{start} s_1 q_{start} s_2 \ldots q_{start} s_k q_{start}$
נשים לב כי $r_{i_{j-1}+1} = q_0$ לכל $1 \le j \le k$ בגלל שלאחר q_{start} אפשר רק לעבור ל־ q_0,
באופן דומה $r_{i_j-1} \in F$ לכל $1 \le j \le k$ בגלל שבשביל לעבור ל־ q_{start} צריך להיות במצב מקבל של $\mathcal{A}$,
ועתה נשים לב שהמעברי אפסילון הם רק ל ־ q_{start} ומ־ q_{start},
ולכן ניתן לכתוב את $w = w_1 \cdot \cdots \cdot w_k$ כאשר

$$|w_j| = i_j - i_{j-1} - 1$$

נשים לב כי הריצה של $\mathcal{A}'$ על w_j היא עם מעבר ε בהתחלה מ־ q_{start} ל־ q_0 ולאחר מכן ללא מעברי אפסילון עם הריצה $q_{start}, q_0, r_{i_{j-1}+2} \ldots r_{i_j-1}$ כאשר הריצה $q_0, r_{i_{j-1}+2} \ldots r_{i_j-1}$ זהה לריצה של $\mathcal{A}$ על w_j, ולכן $\delta^*(q_0, w_j) = r_{i_j-1} \in F$ ממה שצוין מלעיל, ולכן $w_j \in L(\mathcal{A}) = L$
ולכן קיבלנו כי לכל $w \in L(\mathcal{A}')$, קיימים $w_1 \ldots, w_k \in L$ כך ש־ $w = w_1 \cdot \cdots \cdot w_k$, כלומר $w \in L^*$
לכן $\boxed{L(\mathcal{A}') \subseteq L^*}$,
לכן קיבלנו כי $\boxed{L(\mathcal{A}') = L^*}$
כלומר הראנו שקיים אוטומט $\mathcal{A}'$ לשפה L^*, כלומר L^* רגולרית.
הערה: אפשר להמיר את האוטומט לדטרמיניסטי ואז לציין שהדטרמיניסטי הוא אוטומט לשפה L^* ולכן L^* רגולרית

☺.מ.ש.ל.ג