אלגברה לינארית (1) תשע"ח ־ תרגיל (5)

30 באפריל 2018

שאלה 1

בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתון מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$ ותת־קבוצה $S \subseteq V$. עליכם לקבוע אם S מהווה תת־מרחב של V. אם כן, הוכיחו זאת. אחרת, ציינו תכונה אחת שתת־הקבוצה S לא מקיימת:

א') $V = \mathbb{R}^2$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{x+y}{2} = 0 \right\}$.

ב') $V = \mathbb{R}^2$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y \right\}$.

ג') $V = \mathbb{R}^3$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x = z \text{ or } \ y = z \right\}$.

ד') $V = \mathbb{R}^3$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| xy = 2z \right\}$.

ה') $V = \mathbb{R}[x]$, $S = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \middle| \deg(p(x)) \leq 2 \wedge \right.$ סכום המקדמים של $p(x)$ הוא מספר רציונלי $\left. \right\}$.

ו') $V = \mathbb{R}^3$, $S = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \middle| Av = Bv \right\}$, כאשר $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ נתונות מראש.

ז') $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} x & x+y \\ x-y & y \end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

שאלה 2

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, W_1, W_2 תת־מרחבים של V כך ש־$W_1 \neq V$, $W_2 \neq V$. הוכיחו כי $W_1 \cup W_2 \neq V$.

שאלה 3

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, W_1, W_2 תת־מרחבים של V. הוכיחו ש־$W_1 \cup W_2$ הוא תת־מרחב של V אם ורק אם $W_1 \subseteq W_2$ או $W_2 \subseteq W_1$.

שאלה 4

נתון מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$, $v_1, v_2, v_3 \in V$. הוכיחו או הפריכו:

א') $\mathrm{Span}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \mathrm{Span}(\{v_1, v_2, 3v_1 + v_2, 5v_1 + 3v_2 + v_3\})$.

ב') $\mathrm{Span}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \mathrm{Span}(\{v_1, 3v_1 + v_2, 5v_1 + 3v_2 + v_3\})$.

ג') $\mathrm{Span}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \mathrm{Span}(\{v_1, v_2 - 2v_3, 2v_2 - 4v_3\})$.

שאלה 5

נתון מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$, $v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m \in V$, $k \leq n$. אלו מהטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

א') אם $\text{Span}(\{v_1, ..., v_k\}) \subseteq \text{Span}(\{v_1, ..., v_n\})$, אז $\text{Span}(\{v_1, ..., v_k\}) = \text{Span}(\{v_1, ..., v_n\})$.

ב') אם $\text{Span}(\{v_1, \ldots, v_k\}) \neq \text{Span}(\{v_1, \ldots, v_n\})$, אז לכל $k+1 \leq i \leq n$ מתקיים $v_i \notin \text{Span}(\{v_1, \ldots, v_k\})$.

ג') אם $\text{Span}(\{v_1, \ldots, v_k\}) \neq \text{Span}(\{v_1, \ldots, v_n\})$, אז קיים $k+1 \leq i \leq n$ כך ש־ $v_i \notin \text{Span}(\{v_1, \ldots, v_k\})$.

ד') אם $u_1, \ldots, u_m \in \text{Span}(\{v_1, \ldots, v_n\})$, אז $\text{Span}(\{u_1, \ldots, u_m\}) \subseteq \text{Span}(\{v_1, \ldots, v_n\})$.

ה') אם לכל $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ מתקיים $u_j \neq v_i$, אז

$$\text{Span}(\{u_1, \ldots, u_m\}) \cap \text{Span}(\{v_1, \ldots, v_n\}) = \{0_V\}$$

.

ו') אם קיימים $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ כך ש־ $u_j = v_i$, אז

$$\text{Span}(\{u_1, \ldots, u_m\}) \cap \text{Span}(\{v_1, \ldots, v_n\}) \neq \{0_V\}$$

.

שאלה 6

מצאו תת־קבוצה סופית S של $\mathbb{R}^4$ כך ש־$\text{Span}(S)$ מהווה את קבוצת הפתרונות של מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$