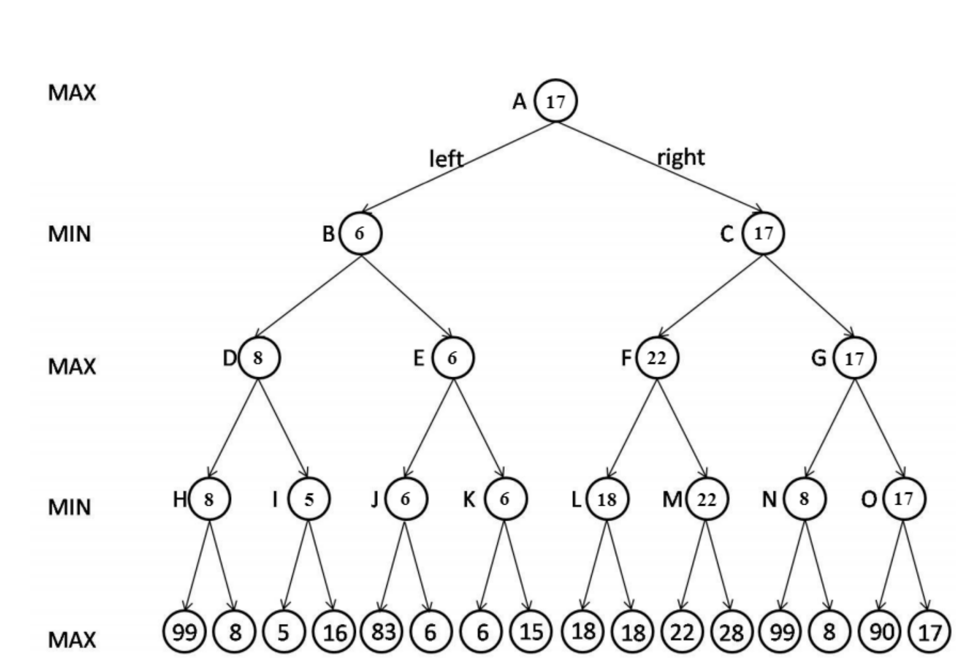
פתרון תרגיל מספר 2 - AI

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639 **שם:** הראל רותם, **ת.ז:** 318661741

26 במאי 2020

שאלה 0 סעיף 1

צ"ל: עץ מינימקס ולאיזה כיוון נלך
הוכחה:

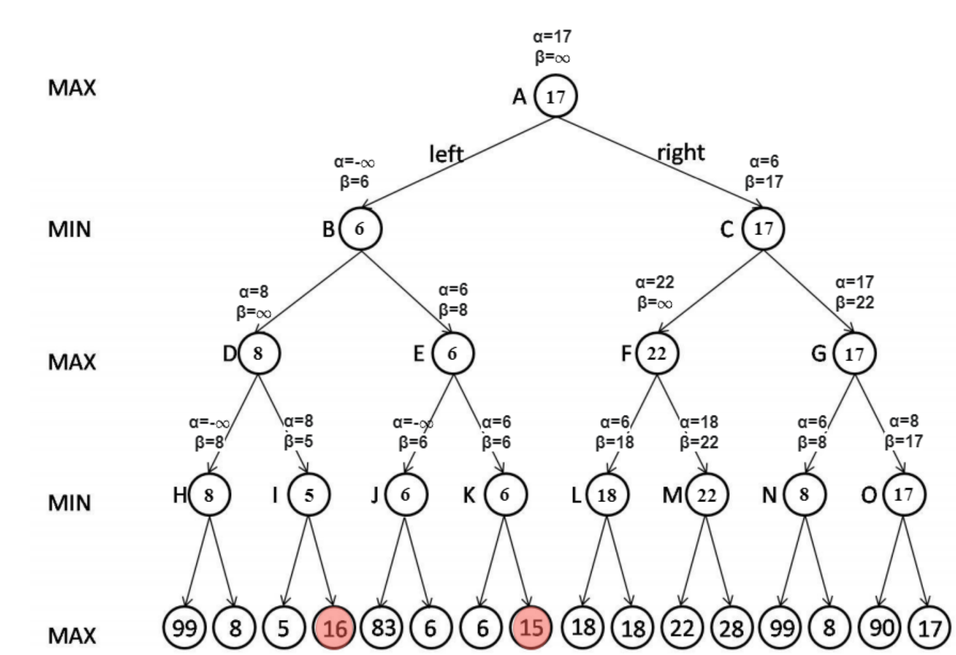


תשובה לחלק ב': נשים לב שנלך $right$ כי ב־ A נרצה למקסם את הרווח שלנו

מ.ש.ל.א.☺

שאלה 0 סעיף 2

צ"ל: עץ מינימקס עם אלפא בטא
הוכחה:



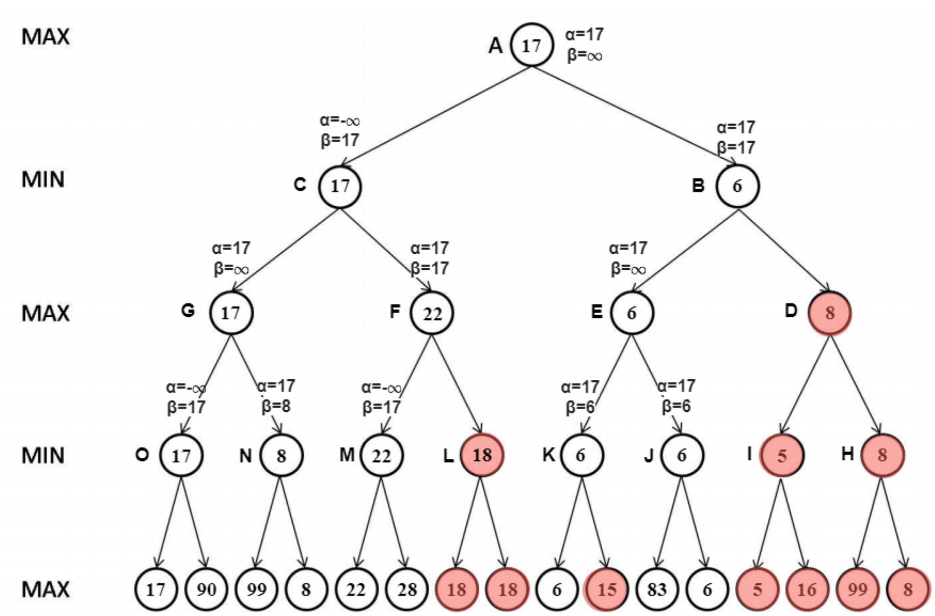
תשובה לחלק ב': נשים לב שנלך $right$ כי ב־ A נרצה למקסם את הרווח שלנו. בכללי $alpha - beta$ תמיד יילך לאותו כיוון כמו $minimax$ ופשוט לא יבדוק $nodes$ שברור שלא ייבחרו על ידי המינימום \ מקסימום.

מ.ש.ל.ב.☺

שאלה 0 סעיף 3

צ"ל: עץ מינימקס עם אלפא בטא בסדר טוב

הוכחה:



תשובה לחלק ב': נשים לב שבסידור אופטימלי לא פתחנו 11 קודקודים בגרף!

מ.ש.ל.ג.☺

שאלה 0 סעיף 4 חלק 1

צ"ל: קירוב למספר המשחקים באיקס עיגול

הוכחה:

יהי G משחק חוקי באיקס עיגול, נסמן ב־ $a_1, \dots, a_n$ את המהלכים שנעשו במשחק.
נסמן את a_i להיות המיקום שבו הונחה הצורה ה־ i (מספר בין 1 ל־ 9)
כלומר $a_i \in \{1, \dots, 9\}$ לכל $i \in [n]$ וגם $n \leq 9$ כי משחק נגמר תוך 9 מהלכים.
עתה נשים לב כי שאסור לשים 2 צורות באותו מיקום ולכן $a_i \neq a_j$ לכל $i \neq j \in [n]$
אם $n < 9$, נגדיר $(a_1, \dots a_n, a_{n+1}, \dots, a_9)$ כאשר $a_i \neq a_j$ לכל $i \neq j \in [9]$.
נשים לב שהתיאור של G נשמר באופן חח"ע ב־ $(a_1, \dots a_n, a_{n+1}, \dots, a_9)$, אם זה היה מתאר משחק אחר G' הוא היה גם מסתיים תוך n צעדים עם המהלכים $a_1, \dots, a_n$ ולכן זהה למשחק G.
עתה נעזר בכל מה ששמנו לב אליו

$$\begin{aligned}\#\text{number of games} &= |\{G\} \mid G \text{ is a valid game}| \\ &\leq |\{(a_1, \dots a_n, a_{n+1}, \dots, a_9) \mid \forall i \neq j \in [9] \to a_i \neq a_j\}| \\ &= 9!\end{aligned}$$

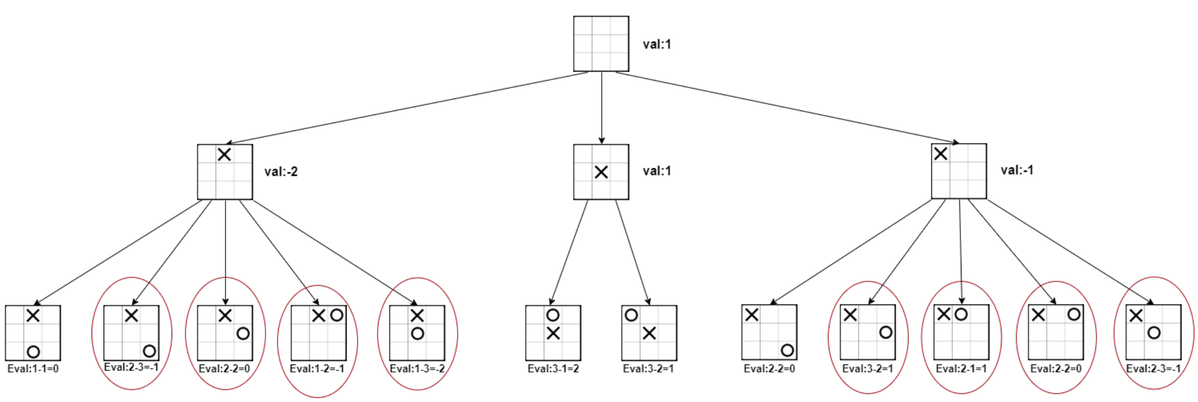
ולכן חסמנו את מספר המשחקים על ידי $9! = 362880$.
עתה נסתכל על המשחקים שמסתיימים אחרי 5 מהלכים, כלומר X ניצח ו־ O שיחק 2 מהלכים.
מספר האפשרויות השונות ל־ X לנצח תוך 3 מהלכים שלו זה בדיוק ליצור שורה, עמודה או אלכסון ויש 8 אפשרויות כאלה (3 בשורה, 3 בעמודה ו2 באלכסון).
עתה לאחר שבחרנו את השורה, עמודה, אלכסון ש־ X מנצח איתו, נשארו 6 מקומות ריקים ל־ O לעשות 2 אפשרויות, כלומר יש לו $6 \cdot 5 = 30$ אפשרויות.
כלומר מספר המשחקים שמסתיימים אחרי 5 מהלכים הוא $30 \cdot 8$ כפול $3!$ שזה מספר הדרכים לשים את X בשורה, עמודה, אלכסון. כלומר קיבלנו $8 \cdot 30 \cdot 6 = 1440$ משחקים שמסתיימים אחרי 5 מהלכים.
נשים לב כי שכל משחק שמסתיים ב־ 5 מהלכים השלמנו לכל רשימה מהצורה $(a_1, \dots, a_9)$ וספרנו את אותו משחק $4!$ פעמים ולכן נוכל לחסר $4! - 1$ על כל משחק שמסתיים תוך 5 מהלכים.
ולכן נקבל כי $\boxed{\#\text{number of games} \leq 9! - (4! - 1) \cdot 1440 = 9! - 33120 = 329760}$,
כלומר קיבלנו שמספר המשחקים הוא חסום על ידי 329760, אפשר לעשות אותה אנליזה שנעשה למשחקים שמסתיימים אחרי 5 מהלכים ל־ $6, 7, 8$ מהלכים ולקבל שיש בערך 250000 משחקים.

מ.ש.ל.ד.1.☺

שאלה 0 סעיף 4 חלק 2־5

צ"ל: ציור של איקס עיגול

הוכחה:



תשובה לסעיף ד': הוא ייבחר לשים x באמצע כי זה ימקסם את רווחו.
תשובה לסעיף ה': בסידור אופטימלי הוא ייפתח קודם את האמצעי, ייראה את הערך 1. יכיל לשאר הקודקודים בעומק 1, ייראה ערך קטן מ־ 1 ולא יבדוק יותר.

מ.ש.ל.ד.1.☺

שאלה 1 סעיף 1 תת סעיף 1

צ"ל: את ה־ $clauses$ של $\forall x:[P_1(x)\wedge P_2(x,A)]\Rightarrow[P_3(x,B)\vee(\forall y:\exists z:P_3(y,z)\Rightarrow P_4(x,y))]$

הוכחה:

נעשה לפי השלבים שהוגדרו בתרגול:

1. נחליף $x\Rightarrow y$ ב־ $\neg x\vee y$ ונקבל

$$\forall x:\neg[P_1(x)\wedge P_2(x,A)]\vee[P_3(x,B)\vee(\forall y:\exists z:\neg P_3(y,z)\vee P_4(x,y))]$$

2. לדחוף $\neg$ פנימה,

$$\forall x:[\neg P_1(x)\vee\neg P_2(x,A)]\vee[P_3(x,B)\vee(\forall y:\exists z:\neg P_3(y,z)\vee P_4(x,y))]$$

3. לשנות שמות משתנים לשונים, לא צריך כי ה־ $\forall x,y\ \exists z$ הם על כל הביטוי שמשתמש במשתנים אלה (אולי ניתן לפרש את ה־ $\forall x$ רק על $[P_1(x)\wedge P_2(x,A)]$ ואת ה־ $\forall y:\exists z:$ רק על ה־ $\neg P_3(y,z)$ אבל לא נראלי שלזה התכוונתם)

4. להוריד משתנים קיומיים

$$\forall x:[\neg P_1(x)\vee\neg P_2(x,A)]\vee[P_3(x,B)\vee(\forall y:\neg P_3(y,G(x,y))\vee P_4(x,y))]$$

5. להוריד כימות של לכל

$$[\neg P_1(x)\vee\neg P_2(x,A)]\vee[P_3(x,B)\vee(\neg P_3(y,G(x,y))\vee P_4(x,y))]$$

6. לפתח לצורה של CNF

$$\begin{aligned}&[\neg P_1(x)\vee\neg P_2(x,A)]\vee[P_3(x,B)\vee(\neg P_3(y,G(x,y))\vee P_4(x,y))]\\=&\neg P_1(x)\vee\neg P_2(x,A)\vee P_3(x,B)\vee\neg P_3(y,G(x,y))\vee P_4(x,y)\end{aligned}$$

7. לפרק ל־ $clauses$: נשים לב שיש רק אחד ולכן נקבל כי

$$\boxed{clauses=\{\neg P_1(x),\neg P_2(x,A),P_3(x,B),\neg P_3(y,G(x,y)),P_4(x,y)\}}$$

8. שמות ייחודים לכל משתנה בכל $caluse$, אין צורך כי יש רק $clause$ אחד.

מ.ש.ל.א.1.☺

שאלה 1 סעיף 1 תת סעיף 2

צ"ל: את ה־ $clauses$ של $(P\Rightarrow Q)\Rightarrow((Q\Rightarrow R)\Rightarrow(P\Rightarrow R))$

הוכחה:

נפשט את הביטוי

$$
\begin{aligned}
(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)) &= (\neg P \vee Q) \Rightarrow ((\neg Q \vee R) \Rightarrow (\neg P \vee R)) \\
&= (\neg P \vee Q) \Rightarrow (\neg (\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R)) \\
&= \neg (\neg P \vee Q) \vee (\neg (\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R)) \\
&= (P \wedge \neg Q) \vee ((Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee R)) \\
&\overset{A=(\neg P \vee R)}{=} (P \wedge \neg Q) \vee ((Q \wedge \neg R) \vee A) \\
&= (P \wedge \neg Q) \vee ((Q \vee A) \wedge (\neg R \vee A)) \\
&\overset{A=(\neg P \vee R)}{=} (P \wedge \neg Q) \vee ((Q \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee \neg P \vee R)) \\
&\overset{\neg R \vee R = T}{=} (P \wedge \neg Q) \vee ((Q \vee \neg P \vee R) \wedge T) \\
&= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee (\neg P \vee R)) \\
&\overset{S=(Q \vee \neg P \vee R)}{=} (P \wedge \neg Q) \vee S = (P \vee S) \wedge (\neg Q \vee S) \\
&= (P \vee Q \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee Q \vee \neg P \vee R) \\
&\overset{\neg P \vee P = T}{=} T \wedge (\neg Q \vee Q \vee \neg P \vee R) \\
&= T \wedge (\neg Q \vee Q \vee \neg P \vee R) = \neg Q \vee Q \vee \neg P \vee R
\end{aligned}
$$

כלומר קיבלנו נוסחא עם פסוקית אחת שניתן לכתובה כ־ $\{\neg Q, Q, \neg P, R\}$.
כלומר קיבלנו שהנוסחא היא טאוטולוגיה ולכן $\boxed{clause = \{\neg Q, Q, \neg P, R\}}$

מ.ש.ל.א.2.☺

שאלה 1 סעיף 2 תת סעיף 1

צ"ל: העבר ל־ propositional logic את המשפט הבא:

Neither the storm blast nor the flood did any damage to the House.

הוכחה:

נגדיר

$$
\begin{aligned}
P &= \text{the storm blast did any damage to the House} \\
Q &= \text{the flood did any damage to the House}
\end{aligned}
$$

לכן המשפט אומר

$$\boxed{\neg (P \vee Q)}$$

כי גם הסופה לא עשתה נזק לבית וגם ההצפה לא עשתה נזק לבית וזה בדיוק מה שהמשפט אומר (עד כדי הבנה שונה של משפטים באנגלית כמו everyone loves someone שכולם אוהבים מישהו או שכולם אוהבים את *someone*, דוגמא הניתנה על ידי נעם ניסן סמסטר קודם)

מ.ש.ל.ב.1.☺

שאלה 1 סעיף 2 תת סעיף 2

צ"ל: העבר ל־ propositional logic את המשפט הבא:

Drivers should neither drive over 65 miles per hour nor cross the red light, or they will get a ticket.

הוכחה:
נגדיר

$$P = \text{Driver crosses the red light}$$
$$Q = \text{Driver drives over 65 miles}$$
$$R = \text{Driver will get a ticket}$$

לכן המשפט אומר

$$\boxed{(P \vee Q) \Rightarrow R}$$

כי אם נעשה עבירה שמוגדרת על ידי P, Q אנחנו נקבל דוח, (עד כדי הבנה שונה של משפטים באנגלית כמו everyone loves someone שכולם אוהבים מישהו או שכולם אוהבים את $someone$, דוגמא הניתנה על ידי נעם ניסן סמסטר קודם)

מ.ש.ל.ב.2.☺

שאלה 1 סעיף 3 תת סעיף 1

צ"ל: מצא MGU
הוכחה:
נעשה לפי האלגוריתם:

1. נאתחל סט ריק $A = \emptyset$
2. נעבור ל־ $Color$ ונראה שהוא זהה בשניהם ונקרא רקורסיבית על איבריו
3. עתה נגיע ל־ Hat ושוב הם זהים בשניהם ונקרא רקורסיבית על איבריו
4. נגיע ל־ $y, Postman$. נשים לב ש־ y משתנה ולכן נוסיף את $A = A \cup \{y \backslash Postman\} = \{y \backslash Postman\}$ ונעדכן את הנוסחאות ואת A בהתאמה להצבה זאת ונקבל שהנוסחאות הן $Color\left(Hat\left(Postman\right), Blue\right)$, $Color\left(Hat\left(Postman\right), x\right)$ ו־ A לא התעדכן
5. נגיע לאיבר השני ונראה שיש $x, Blue$. נשים לב ש־ x משתנה ולכן נוסיף את $A = A \cup \{x \backslash Blue\} = \{y \backslash Postman, x \backslash Blue\}$ ונעדכן את הנוסחאות ואת A בהתאמה להצבה זאת ונקבל שהנוסחאות הן $Color\left(Hat\left(Postman\right), Blue\right)$, $Color\left(Hat\left(Postman\right), Blue\right)$, ו־ A לא התעדכן
6. נשים לב שסיימנו לרוץ על הנוסחאות והכל היה תקין ולכן נחזיר את A שהוא ה־ MGU.

כלומר קיבלנו ש־ $\boxed{MGU = \{y \backslash Postman, x \backslash Blue\}}$

מ.ש.ל.ג.1.☺

שאלה 1 סעיף 3 תת סעיף 2

צ"ל: מצא MGU
הוכחה:
נעשה לפי האלגוריתם:

1. נאתחל סט ריק $A = \emptyset$
2. נעבור ל־ R ונראה שהוא זהה בשניהם ונקרא רקורסיבית על איבריו
3. נגיע ל־ $x, F(y)$. נשים לב ש־ x משתנה ולכן נוסיף את $A = A \cup \{x \backslash F(y)\} = \{x \backslash F(y)\}$ ונעדכן את הנוסחאות ואת A בהתאמה להצבה זאת ונקבל שהנוסחאות הן $R\left(F(y), y, F(y)\right)$, $R\left(F(y), F(A), F(v)\right)$ ו־ A לא התעדכן.

4. נגיע לאיבר השני ונראה שיש $y, F(A)$. נשים לב ש־ y משתנה ולכן נוסיף את $A = A\cup\{y\backslash F(A)\} = \{x\backslash F(y), y\backslash F(A)\}$ ונעדכן את הנוסחאות ואת A בהתאמה להצבה זאת ונקבל שהנוסחאות הן $R(F(F(A)), F(A), F(F(A)))$,$R(F(F(A)), F(A), F(v))$ וגם $A = \{x\backslash F(F(A)), y\backslash F(A)\}$

5. נגיע לאיבר השלישי ונראה F בשניהם ונקרא רקורסיבית למה שבפנים.

6. נגיע ל־ $v, F(A)$. נשים לב כי v משתנה ולכן נוסיף את $A = A\cup\{v\backslash F(A)\} = \{x\backslash F(F(A)), y\backslash F(A), v\backslash F(A)\}$ ונעדכן את הנוסחאות ואת A בהתאמה להצבה זאת ונקבל שהנוסחאות הן $R(F(F(A)), F(A), F(F(A)))$,$R(F(F(A)), F(A), F(F(A)))$ ו־ A לא התעדכן.

7. נשים לב שסיימנו לרוץ על הנוסחאות והכל היה תקין ולכן נחזיר את A שהוא ה־ MGU.

כלומר קיבלנו ש־ $\boxed{MGU = \{x\backslash F(F(A)), y\backslash F(A), v\backslash F(A)\}}$

מ.ש.ל.ג.2.☺

שאלה 1 סעיף 3 תת סעיף 3

צ"ל: מצא MGU

הוכחה:

נעשה לפי האלגוריתם:

1. נאתחל סט ריק $A = \emptyset$

2. נעבור ל־ $Loves$ ונראה שהוא זהה בשניהם ונקרא רקורסיבית על איבריו

3. נגיע ל־ x, y. נשים לב ש־ x משתנה ולכן נוסיף את $A = A \cup \{x\backslash y\} = \{x\backslash y\}$ ונעדכן את הנוסחאות ואת A בהתאמה להצבה זאת ונקבל שהנוסחאות הן $Loves(y, y)$,$Loves(y, y)$ ו־ A לא התעדכן.

4. נקרא לאיבר השני ונקבל y, y. נשים לב ש־ $y = y$ ונמשיך.

5. נשים לב שסיימנו לרוץ על הנוסחאות והכל היה תקין ולכן נחזיר את A שהוא ה־ MGU.

כלומר קיבלנו ש־ $\boxed{MGU = \{x\backslash y\}}$

מ.ש.ל.ג.3.☺

שאלה 1 סעיף 4 תת סעיף 1

צ"ל: הוכח את $\{r(a)\}$ על ידי רזולוציות.

הוכחה:

נשים לב כי שלהראות $\{\{p(a), q(a)\}, \{\neg p(x), r(x)\}, \{\neg q(a)\}\} \vdash r(a)$ שקולה ללהראות ש־ $\{\{p(a), q(a)\}, \{\neg p(x), r(x)\}, \{\neg q(a)\}, \{\neg r(a)\}\}$ לא ספיקה, ונעשה זאת עם רזולוציות.
תחילה נשים לב שמרזולוציה על $\{\neg q(a)\}$ עם $\{p(a), q(a)\}$ ניתן לקבל $\{p(a)\}$.
עתה מרזולוציה של $\{p(a)\}$ עם $\{\neg p(x), r(x)\}$ (לאחר הצבת $x\backslash a$) ניתן לקבל $\{r(a)\}$
עתה מרזולוציה של $\{r(a)\}$ עם $\{\neg r(a)\}$ ניתן לקבל את $\emptyset$.
כלומר $\{\{p(a), q(a)\}, \{\neg p(x), r(x)\}, \{\neg q(a)\}, \{\neg r(a)\}\}$ לא ספיקה ולכן $\{\{p(a), q(a)\}, \{\neg p(x), r(x)\}, \{\neg q(a)\}\} \vdash r(a)$.
נשים לב כי $r(a)$ שווה ל־ $clause$ של $\{r(a)\}$ ולכן $\{\{p(a), q(a)\}, \{\neg p(x), r(x)\}, \{\neg q(a)\}\} \vdash \{r(a)\}$ כנדרש.

מ.ש.ל.ד.1.☺

שאלה 1 סעיף 4 תת סעיף 2

צ"ל: הוכח את $\forall x[p(x)] \Rightarrow \forall x[q(x)]$ על ידי רזולוציות.

הוכחה:

נמיר ל־ CNF כדי להשתמש ברזולוציות.

$$\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)] = p(x) \Rightarrow q(x) = \neg p(x) \vee q(x)$$

כלומר קיבלנו שה־ $clause$ הוא $\{\neg p(x), q(x)\}$.
עתה נמיר את $\neg(\forall x[p(x)] \Rightarrow \forall x[q(x)])$ ל־ CNF

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall x[p(x)] \Rightarrow \forall x[q(x)]) = \neg(\forall x[p(x)] \Rightarrow \forall x[q(x)]) \\
&= \neg(\neg\forall x[p(x)] \vee \forall x[q(x)]) = \forall x[p(x)] \wedge \neg\forall x[q(x)] \\
&= \forall x[p(x)] \wedge \exists x[\neg q(x)] = \forall z[p(z)] \wedge \exists y[\neg q(y)] \\
&= \forall z[p(z)] \wedge \neg q(A) = p(z) \wedge \neg q(A)
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו שה־ $clauses$ הם $\{p(z)\}, \{\neg q(A)\}$.
עתה נרצה להוכיח כי $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)] \vdash \forall x[p(x)] \Rightarrow \forall x[q(x)]$, וזה שקול להראות שאיחוד ה־ CNF של $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$ ו־ $\neg[\forall x[p(x)] \Rightarrow \forall x[q(x)]]$ לא ספיק.
נעשה רזולוציה של $\{\neg p(x) \vee q(x)\}$ ו־ $\{\neg q(A)\}$ ונקבל $\{\neg p(x)\}$.
עה נעשה רזולוציה של $\{\neg p(x)\}$ וגם $\{p(z)\}$ ונקבל $\emptyset$.
ואז נקבל כי $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$ ו־ $\neg[\forall x[p(x)] \Rightarrow \forall x[q(x)]]$ לא ספיק.
כלומר $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)] \vdash \forall x[p(x)] \Rightarrow \forall x[q(x)]$ נכונה, כמו שרצינו.

מ.ש.ל.ד.2.☺

שאלה 1 סעיף 4 תת סעיף 3

צ"ל: הוכח את $\forall x[([p(x) \Rightarrow q(x)] \Rightarrow p(x)) \Rightarrow p(x)]$ על ידי רזולוציות.
הוכחה:
תחילה נפרק את הנוסחא לצורת CNF:

$$\begin{aligned}
&\neg[\forall x[([p(x) \Rightarrow q(x)] \Rightarrow p(x)) \Rightarrow p(x)]] \\
&= \neg[\forall x[([\neg p(x) \vee q(x)] \Rightarrow p(x)) \Rightarrow p(x)]] \\
&= \neg[\forall x[(\neg[\neg p(x) \vee q(x)] \vee p(x)) \Rightarrow p(x)]] \\
&= \neg[\forall x[\neg(\neg[\neg p(x) \vee q(x)] \vee p(x)) \vee p(x)]] \\
&= \exists x \neg[\neg(\neg[\neg p(x) \vee q(x)] \vee p(x)) \vee p(x)] \\
&= \neg[\neg(\neg[\neg p(A) \vee q(A)] \vee p(A)) \vee p(A)] \\
&= \neg\neg(\neg[\neg p(A) \vee q(A)] \vee p(A)) \wedge \neg p(A) \\
&= (\neg[\neg p(A) \vee q(A)] \vee p(A)) \wedge \neg p(A) \\
&= ([p(A) \wedge \neg q(A)] \vee p(A)) \wedge \neg p(A) \\
&= ([p(A) \vee p(A)] \wedge (\neg q(A) \vee p(A))) \wedge \neg p(A) \\
&= p(A) \wedge (\neg q(A) \vee p(A)) \wedge \neg p(A)
\end{aligned}$$

ולכן ה־ $clauses$ של הנוסחא הם $\{\neg q(A), p(A)\}, \{p(A)\}, \{\neg p(A)\}$.
עתה נרצה להראות ש־ $\forall x[([p(x) \Rightarrow q(x)] \Rightarrow p(x)) \Rightarrow p(x)]$ נכונה, כלומר $\neg([p(x) \Rightarrow q(x)] \Rightarrow p(x))$ לא ספיקה, נעשה זאת עם רזולוציה על ה־ $clauses$ שלה $\{\neg q(A), p(A)\}, \{p(A)\}, \{\neg p(A)\}$.
נשים לב כי רזולוציה של $\{p(A)\}, \{\neg p(A)\}$ היא $\emptyset$
ואז נקבל כי $\neg([p(x) \Rightarrow q(x)] \Rightarrow p(x))$ לא ספיקה, כלומר $\forall x[([p(x) \Rightarrow q(x)] \Rightarrow p(x)) \Rightarrow p(x)]$ נכונה, כמו שרצינו.

מ.ש.ל.ד.3.☺