אינפי 2 ־ סמסטר א' תשע"ט
תרגיל בית 9

להגשה עד יום חמישי, 27 בדצמבר, בשעה 23:45, דרך תיבת ההגשה במודל

בשאלות בהן אתם מתבקשים "לקרב את B בדיוק של α", עליכם למצוא מספר C אשר מקיים $|B-C| \le \alpha$. עליכם לבטא את C על־ידי מספר סופי של פעולות חיבור/חיסור/כפל/חילוק של מספרים ממשיים. מותר להשתמש בסימון $\sum$ עבור סכום של מספר סופי של מחוברים. גם חזקות עם מעריך שלם מותרות.

1. (א) חשבו את פולינום טיילור של $f(x)=x^5+x^3+x$ מסדר 4 ב ־ $a=0$. חשבו גם את פולינום טיילור של $f(x)$ מסדר 4 ב ־ $a=1$.
   (ב) חשבו את פולינום טיילור מסדר 3 של $f(x)=e^{\sin(x)}$ ב ־ $a=0$.

2. (א) חשבו את $\sin\left(\frac{1}{2}\right)$ בדיוק של 10^{-20}.
   (ב) חשבו את e בדיוק של 10^{-1000}.

3. (א) קרבו את $\int_0^{1/2}\sin\left(x^2\right)dx$ בדיוק של 10^{-4}.
   (ב) קרבו את $\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^4}dx$ בדיוק של 10^{-5}.

4. תהי f פונקציה אשר מוגדרת על קטע I. יהי $n\ge 0$ שלם ו ־ $a\in I$. נסמן ב ־ T_nf את פולינום טיילור מסדר n של f ב ־ a. יהי $m\ge 1$ שלם.
   (א) נניח $a=0$. נגדיר פונקציה $g:I\to\mathbb{R}$ על־ידי $g(x)=f(x^m)$. הוכיחו שפולינום טיילור מסדר mn של g ב ־ a הוא $(T_nf)(x^m)$.
   (ב) נחזור ל ־ $a\in I$ כללי. נגדיר פונקציה $g:I\to\mathbb{R}$ על־ידי $g(x)=f\left(a+(x-a)^m\right)$. הוכיחו שפולינום טיילור מסדר mn של g ב ־ a הוא $(T_nf)\left(a+(x-a)^m\right)$.
   (ג) חשבו את פולינום טיילור מסדר 3000 של $h(x)=e^{\left(x^{1000}\right)}$ ב ־ $a=0$. חשבו גם את פולינום טיילור מסדר 2511 של $h(x)$ ב ־ $a=0$.
   (ד) חשבו את פולינום טיילור מסדר 3456 של $h(x)=\ln\left(1+x^{1000}\right)$ ב ־ $a=0$.

5. (א) היעזרו בצורה האינטגרלית של השארית של פולינום טיילור ובסעיף ב' כדי להוכיח את המשפט הבא:
   משפט (צורת קושי עבור השארית): יהי $n\ge 0$ שלם. יהיו $c<d$ ממשיים, $a\in[c,d]$, ותהי $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ פונקציה עבורה $f^{(n+1)}$ (הנגזרת ה ־ $n+1$ של f) קיימת ורציפה. אז, קיים $\xi\in(c,d)$ כך ש ־
   $$f(x)-(T_nf)(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot(x-\xi)^n\cdot(x-a)$$
   כאשר T_nf הוא פולינום טיילור מסדר n של f ב ־ a.
   (ב) יהיו $a<b$ ממשיים ותהי $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו שקיים $\xi\in(a,b)$ עבורו $\int_a^b h=h(\xi)\cdot(b-a)$.

6. (א) הראו שלמשוואה $x^2=\cos(x)$ יש בדיוק פתרון חיובי אחד A (מותר להשתמש בעובדה $3<\pi<4$).
   (ב) הוכיחו: $\sqrt{\frac{2}{3}}\le A\le\frac{5}{6}$.

7. יהי $\alpha>0$.
   (א) האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right)$ מתכנס? התשובה יכולה להיות תלויה ב ־ α. ראו שאלה 1ב' בתרגיל 8.
   (ב) **בונוס (2 נק'):** לאלו ערכי α הטור לעיל הוא טור לייבניץ (**למי שלא פותר:** הנקודה היא שלפעמים הטור מתכנס למרות שהוא לא טור לייבניץ).