פתרון תרגיל מספר 11 ־ אינפי 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

6 בינואר 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $f_n = \frac{x}{n}$, בדיקת התכנסות במ"ש ב$[0,b]$ וב$[0,\infty)$
הוכחה:
תחילה נחשב את f,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$$

לכן $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
עתה נחשב בקטעים:

i. בקטע $[0,b]$, יהי $\varepsilon > 0$,

$$(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\left(N < n \to \frac{b}{n} < \varepsilon\right)$$

יהי $x \in [0,b]$ ו$N < n \in \mathbb{N}$ אזי

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{x}{n} \le \frac{b}{n} < \varepsilon$$

כלומר

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall x \in [0,b])(\forall n \in \mathbb{N})(N < n \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

כלומר $f_n \to f$ רציפה במידה שווה ב$[0,b]$ מההגדרה

ii. בקטע $[0,\infty)$, אזי נשים לב כי $n \in [0,\infty)$, לכן

$$\begin{aligned}\sup\left\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [0,\infty)\right\} &\ge \sup\{|f_n(n) - f(n)|\}\\ &= \sup\left\{\frac{n}{n} - 0 \mid x \in [0,\infty)\right\} = 1\end{aligned}$$

לכן $\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [0,\infty)\} \ge 1$, כלומר $\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [0,\infty)\} \not\to 0$,
לכן מגרסת הsup להגדרת התכנסות במידה שווה, נסיק כי $f_n \to f$ לא מתכנסת במידה שווה ב $[0,\infty)$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $f_n = \frac{n^2x^2}{e^{n^2x^2}}$, בדיקת התכנסות במ"ש ב$(-\infty,\infty)$ וב$[a,\infty)$
הוכחה:
תחילה נחשב את f,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^2}{e^{n^2x^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} \overset{L\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

i. בקטע $(-\infty,\infty)$, אזי נשים לב כי $\frac{1}{n}\in(-\infty,\infty)$, לכן

$$\begin{aligned}\sup\left\{|f_n(x)-f(x)| \mid x\in(-\infty,\infty)\right\} &\geq \sup\left\{\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \mid x\in(-\infty,\infty)\right\}\\ &=\sup\left\{\frac{n^2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2}{e^{n^2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2}}-0 \mid x\in(-\infty,\infty)\right\}\\ &=\sup\left\{\frac{1}{e^1}-0 \mid x\in(-\infty,\infty)\right\}=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

לכן $\sup\left\{|f_n(x)-f(x)| \mid x\in(-\infty,\infty)\right\}\geq\frac{1}{e}$, כלומר $\sup\left\{|f_n(x)-f(x)| \mid x\in(-\infty,\infty)\right\}\not\to 0$,
לכן מגרסת הsup להגדרת התכנסות במידה שווה, נסיק כי $f_n\to f$ לא מתכנסת במידה שווה ב $(-\infty,\infty)$

ii. בקטע $[a,\infty)$, יהי $\varepsilon>0$, נשים לב כי

$$f_n'(x)=\left(\frac{n^2x^2}{e^{n^2x^2}}\right)'=\frac{2n^2x\cdot e^{n^2x^2}-2n^2x\cdot n^2x^2e^{n^2x^2}}{\left(e^{n^2x^2}\right)^2}=\frac{2n^2x\cdot e^{n^2x^2}\left(1-n^2x^2\right)}{\left(e^{n^2x^2}\right)^2}=\frac{2n^2x\left(1-n^2x^2\right)}{e^{n^2x^2}}$$

לכן הפונקציה יורדת עבור $\frac{1}{n}<x$

$$\left(\exists N_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\left(N_1<n\to\frac{1}{n}<a\right)$$

מהיות $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2x^2}{e^{n^2x^2}}=0$,

$$\left(\exists N_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\left(N_2<n\to\frac{n^2a^2}{e^{n^2a^2}}<\varepsilon\right)$$

נגדיר $N=\max\{N_1,N_2\}$, יהי $x\in[a,\infty)$ ו$N<n\in\mathbb{N}$ אזי

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(a)-0|=\left|\frac{n^2a^2}{e^{n^2a^2}}\right|<\varepsilon$$

כלומר

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\right)\left(\forall x\in[a,\infty)\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\left(N<n\to|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\right)$$

כלומר $f_n\to f$ רציפה במידה שווה ב$[a,\infty)$ מההגדרה

מ.ש.ל.ב.☺

2. **צ"ל:** תסתרו את Dini
הוכחה:

(א) אם $f_n(x)=x^n, D=[0,1], f(x)=\begin{cases}0 & 0\leq x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$,
נשים לב כי f_n מונוטונית, D קטע סגור וf_n רציפה אבל ראינו בהרצאה כי $f_n\to f$ לא במידה שווה וכן נקודתית

(ב) אם $f_n(x)=x^n, D=[0,1), f(x)=0$,
נשים לב כי f_n מונוטונית, f רציפה (כי קבועה 0) וf_n רציפה,
אבל ראינו בתרגיל הקודם (שאלה 4ב) ראינו כי $f_n\to f$ לא במידה שווה וכן נקודתית

(ג) אם $f_n(x)=x^n-x^{2n}, D=[0,1], f(x)=0$,
נשים לב כי f רציפה (כי קבועה 0) וf_n רציפה וגם D קטע סגור
אבל ראינו בתרגיל הקודם (שאלה 5ב) ראינו כי $f_n\to f$ לא במידה שווה וכן נקודתית

ד) אם $f(x)=0$, $D=[0,1]$, $f_n(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ x^n & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$,
נשים לב כי

$$0=f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ x^n & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}=0$$

נשים לב כי f רציפה (כי קבועה 0) וגם D קטע סגור, וגם נשים לב כי f_n מונטונית
נראה כי $f_n\to f$ לא במידה שווה,

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)|\mid x\in[0,1]\}\geq\sup\left\{\left|f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)-f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)\right|\right\}$$
$$=\sup\left\{\left|\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^n-0\right|\right\}=\frac{1}{2}$$

לכן $\sup\{|f_n(x)-f(x)|\mid x\in[0,1]\}\geq\frac{1}{2}$, כלומר $\sup\{|f_n(x)-f(x)|\mid x\in[0,1]\}\not\to 0$,
לכן מגרסת הsup להגדרת התכנסות במידה שווה, נסיק כי $f_n\to f$ לא מתכנסת במידה שווה ב $[0,1]$

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** האם $f_n\to f$ בקטע $(-\infty,a]$
הוכחה:
כן! יהי $\varepsilon>0$,

$$(\exists c\in\mathbb{R})(\forall d\in\mathbb{R})\left(d\leq c\to e^d<\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

ראינו בתרגול כי $f_n\to f$ במידה שווה ב$[a,b]$ לכל $[a,b]$,
לכן $f_n\to f$ במידה שווה ב$[c,a]$, כלומר $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ כך ש$\forall x\in[c,a], \forall n\in\mathbb{N}, N<$ מתקיים

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

עתה נשים לב כי

$$(\forall x\in(-\infty,c])(\forall n\in\mathbb{N})\left(|f_n(x)-f(x)|=\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}-e^x\right|<\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}\right|+|e^x|\leq 2e^x<\varepsilon\right)$$

כלומר

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall x\in(-\infty,c])(\forall n\in\mathbb{N})(N<n\to|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$$

כלומר $f_n\to f$ רציפה במידה שווה ב$(-\infty,c]$ מההגדרה

מ.ש.ל.☺

4. **צ"ל:** אם $f_n\to f$ במ"ש ורציפות במידה שווה אז f רציפה במידה שווה
הוכחה:
יהי $\varepsilon>0$, מהיות $f_n\to f$ במידה שווה $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ כך ש$\forall x\in I, \forall N\leq n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

מהיות f_N רציפה במידה שווה, $\exists\delta(\varepsilon)$ כך ש$\forall x,y\in I$ המקיימים $|x-y|<\delta$ מתקיים

$$|f_N(x)-f_N(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

נשים לב כי $\forall x, y \in I$ המקיימים $|x-y| < \delta$ מתקיים

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

כלומר

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon))(\forall x, y \in I)(|x-y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

כלומר f רציפה במידה שווה מההגדרה

מ.ש.ל.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $f_n \to f$ במ"ש ו$g \circ f_n$ לא במ"ש

הוכחה:

נבחר $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, $g(x) = x^2$, נשים לב כי g רציפה וגם

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left[x + \frac{1}{n}\right] = x$$

כלומר $f_n \to f$ נקודתית כאשר $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, בנוסף לכך נשים לב כי

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} = \sup\left\{\left|x + \frac{1}{n} - x\right| \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \sup\left\{\frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{n} \to 0$$

לכן מהגדרת התכנסות במידה שווה (לפי sup) מתקיים כי $f_n \to f$ במ"ש ב$\mathbb{R}$,
עתה נשים לב כי

$$g \circ f_n = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$
$$h(x) = \lim_{n\to\infty} g \circ f_n = \lim_{n\to\infty} \left[x^2 + 2x \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right] = x^2$$

כלומר $g \circ f_n \to h$ נקודתית כאשר $h(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, בנוסף לכך נשים לב כי

$$\begin{aligned}
\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} &= \sup\left\{\left|x^2 + 2x \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - x^2\right| \mid x \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \sup\left\{\left|2x \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right| \mid x \in \mathbb{R}\right\} \\
&\geq \sup\left\{\left|2n \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right| \mid x \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \sup\left\{\left|2 + \frac{1}{n^2}\right| \mid x \in \mathbb{R}\right\} \geq 2 \not\to 0
\end{aligned}$$

לכן מהגדרת התכנסות במידה שווה (לפי sup) מתקיים כי $g \circ f_n \to h$ לא במ"ש ב$\mathbb{R}$, אחרת היה מתקיים

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} \to 0$$

אבל ראינו כי $\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} \geq 2$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $f_n \to f$ במ"ש וg רציפה במידה שווה אזי $g \circ f_n$ במ"ש

הוכחה:

יהי $\varepsilon > 0$, מהיות g רציפה במידה שווה, $\exists \delta(\varepsilon)$ כך ש$\forall x, y \in \mathbb{R}$ המקיימים $|x - y| < \delta$ מתקיים

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

מהיות $f_n \to f$ במידה שווה $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I$ $N \leq$ מתקיים

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta$$

נשים לב כי $\forall N < n \in \mathbb{N}, \forall x \in I$ מתקיים

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| \overset{|f_n(x) - f(x)| < \delta}{<} \varepsilon$$

כלומר

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \in \mathbb{N})(N < n \to |g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon)$$

כלומר $g \circ f_n \to g \circ f$ במידה שווה בI מההגדרה

מ.ש.ל.ב.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $f_n + g_n$ במ"ש

הוכחה:

יהי $\varepsilon > 0$, מהיות $f_n \to f$ ו$g_n \to g$ במידה שווה, מתקיים כי

$$(\exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \in \mathbb{N})\left(N_1 < n \to |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$(\exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \in \mathbb{N})\left(N_2 < n \to |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

נבחר $N = \max\{N_1, N_2\}$, יהי $N < n \in \mathbb{N}$ ו$x \in I$, אזי מתקיים

$$|r_n(x) - r(x)| = |f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon$$

כלומר

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \in \mathbb{N})(N < n \to |r_n(x) - r(x)| < \varepsilon)$$

כלומר $r_n \to r$ במידה שווה בI מההגדרה

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $f_n \cdot g_n$ לאו דווקא במ"ש

הוכחה:

נבחר $f_n(x) = g_n(x) = x + \frac{1}{n}$, בשאלה 5א ראינו כי $x + \frac{1}{n} \to x$ במידה שווה,
לכן $f_n \to h$, $g_n \to h$ במידה שווה ב$\mathbb{R}$ כאשר $h(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
בנוסף לכך בשאלה 5א ראינו כי $\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \to x^2$ לא במידה שווה ב$\mathbb{R}$,
נשים לב כי

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{n}\right) = f_n(x) \cdot g_n(x)$$

לכן $f_n \cdot g_n \to k(x)$לא במידה שווה ב$\mathbb{R}$, כאשר $k(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $f_n \cdot g_n$ במ"ש אם f, g חסומות
הוכחה:
יהי $\varepsilon > 0$, מהיות f, g חסומות $\exists M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ כך ש$|f(x)| \leq M_1$, $|g(x)| \leq M_2$, $\forall x \in I$
מהיות $f_n \to f$ ו$g_n \to g$ במידה שווה, מתקיים כי

$$(\exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \in \mathbb{N})\left(N_1 < n \to |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(M_2+1)}\right)$$
$$(\exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \in \mathbb{N})\left(N_2 < n \to |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(M_1+1)}\right)$$
$$(\exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \in \mathbb{N})(N_3 < n \to |f_n(x) - f(x)| < 1)$$

יהי $N_3 < n \in \mathbb{N}$ ו$x \in I$, נשים לב כי

$$|f_n(x) - f(x)| < 1 \Rightarrow |f_n(x)| < |f(x)| + 1 \leq M_1 + 1$$

נבחר $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, יהי $N < n \in \mathbb{N}$ ו$x \in I$, אזי מתקיים

$$\begin{aligned}
|r_n(x) - r(x)| &= |f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| \\
&= |f_n(x) \cdot g_n(x) + f_n(x) g(x) - f_n(x) g(x) - f(x) \cdot g(x)| \\
&\leq |f_n(x) \cdot g_n(x) - f_n(x) g(x)| + |f_n(x) g(x) - f(x) \cdot g(x)| \\
&= |f_n(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| \\
&\leq (M_1 + 1) \cdot |g_n(x) - g(x)| + M_2 \cdot |f_n(x) - f(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2(M_1+1)} \cdot (M_1 + 1) + \frac{\varepsilon}{2(M_2+1)} \cdot (M_2) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

כלומר

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \in \mathbb{N})(N < n \to |r_n(x) - r(x)| < \varepsilon)$$

כלומר $r_n \to r$ במידה שווה בI מההגדרה

מ.ש.ל.ג.☺

7. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\sum f_n$ מתכנס נקודתית אזי $f_n \to 0$
הוכחה:
יהי $x \in I$, אזי מהיות $\sum f_n$ מתכנס נקודתית, מתקיים כי $\sum f_n(x)$ מתכנס,
אזי מהיות $\sum f_n(x)$ מתכנס מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\sum f_n$ מתכנס במ"ש אזי $f_n \to 0$ במ"ש
הוכחה:
יהי $\varepsilon > 0$, אזי מהיות $\sum f_n$ מתכנס במידה שווה, לפי קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה,

$$(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n, m \in \mathbb{N})\left(N < n, m \to \left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon\right)$$

יהי $N < n+1 \in \mathbb{N}$ אזי מקריטריון קושי להתכנסות במ"ש מתקיים

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sum_{k=n-1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

לכן

$$\sup\left\{\left|f_n(x)-f(x)\right| \mid x\in I\right\}<\varepsilon$$

כלומר $\sup\left\{\left|f_n(x)-f(x)\right| \mid x\in I\right\}<\varepsilon$ מתקיים כמעט תמיד, $\forall\varepsilon>0$,
לכן

$$\sup\left\{\left|f_n(x)-f(x)\right| \mid x\in I\right\}\to 0$$

לכן מהגדרת התכנסות במידה שווה (לפי sup) מתקיים כי $f_n\to f$ במ"ש בI,

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\sum|f_n|$ מתכנס במ"ש אזי $\sum f_n$ במ"ש
הוכחה:
יהי $\varepsilon>0$, אזי מהיות $\sum|f_n|$ מתכנס במידה שווה, לפי קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה,

$$(\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N})\,(\forall x\in I)\,(\forall n,m\in\mathbb{N})\left(N<n,m\to\left|\sum_{k=n}^{m}|f_k(x)|\right|<\varepsilon\right)$$

יהי $x\in I, N<n,m\in\mathbb{N}$, נשים לב כי

$$\left|\sum_{k=n}^{m}f_k(x)\right|<\sum_{k=n}^{m}|f_k(x)|=\left|\sum_{k=n}^{m}|f_k(x)|\right|<\varepsilon$$

לכן מקריטריון קושי להתכנסות במידה שווה, נסיק כי $\sum f_n$ במ"ש

מ.ש.ל.ג.☺

8. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $f_n\to f$ נקודתית ב$[a,b)$
הוכחה:
יהי $x\in[a,b)$, נראה כי $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ ונסיים,
נשים לב כי $\exists c\in\mathbb{R}$ כך ש$a\le x<c<b$,
לכן מתקיים כי $x\in[a,c)$, מההנחה ש$f_n\to f$ מתכנסת נקודתית לכל $b_0<b$,
נסיק כי $f_n\to f$ נקודתית ב$[a,c)$, לכן מההנחה מתקיים כי $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$,
כלומר $f_n(x)\to f(x)$, $\forall x\in[a,b)$, כלומר $f_n\to f$ נקודתית ב$[a,b)$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **פתרון:**

i. **צ"ל:** $N_\varepsilon(b_0)$ מוגדרת
הוכחה:
יהי $\varepsilon>0$,
נשים לב כי f מתכנסת במידה שווה ב$[a,b_0)$, לכן

$$(\exists N\in\mathbb{N})\,(\forall x\in[a,b_0))\,(\forall n\in\mathbb{N})\,(N<n\to|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$$

נגדיר $A_{b_0}=\{n\in\mathbb{N}\mid|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\}$,
נשים לב כי A_{b_0} לא ריקה כי $N\in A_{b_0}$ וגם A_{b_0} קבוצה של מספרים טבעיים ולא ריקה,
לכן קיים מינימום בA_{b_0} ומתקיים $\min A_{b_0}=N_\varepsilon(b_0)$, כלומר $N_\varepsilon(b_0)$ מוגדרת היטב
מ.ש.ל.ב.1.☺

ii. **צ"ל:** $N_{\varepsilon}(b_0)$ מונוטונית עולה

הוכחה:

יהי $\varepsilon > 0$,

יהיו $c,d \in \mathbb{R}$ כך ש$c < d$, ונרצה להראות כי $N_{\varepsilon}(c) \le N_{\varepsilon}(d)$,

נשים לב כי f מתכנסת במידה שווה ב$[a,d)$, לכן

$$(\forall x \in [a,d))\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(N_{\varepsilon}(d) < n \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

יהי $x \in [a,c)$, נשים לב כי $x \in [a,d)$, ויהי $N_{\varepsilon}(d) < n \in \mathbb{N}$ אזי מתקיים

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

כלומר $N_{\varepsilon}(d)$ מקיים את הנדרש בקטע $[a,c)$, לכן מכך ש$N_{\varepsilon}(c)$ הוא המינימלי שמקיים את התנאי,

נסיק כי $N_{\varepsilon}(c) \le N_{\varepsilon}(d)$, כלומר $N_{\varepsilon}(b_0)$ מונוטונית עולה,

נשים לב כי $N_{\varepsilon}(b_0)$ מונוטונית עולה של מספרים טבעיים,

לכן אם $N_{\varepsilon}(b_0)$ חסומה אז מתקיים כי $N_{\varepsilon}(b_0)$ מתכנסת (ל$N_{\varepsilon}(b)$)

אחרת $N_{\varepsilon}(b_0)$ לא חסומה ואז $\lim_{b_0 \to b^-} N_{\varepsilon}(b_0) = \infty$

מ.ש.ל.ב.2.☺

iii. **צ"ל:** $f_n \to f$ במידה שווה ב$[a,b)$ אם ורק אם $\lim_{b_0 \to b^-} N_{\varepsilon}(b_0) \ne \infty$

הוכחה:

יהי $\varepsilon > 0$,

$\Rightarrow$: תחילה נניח כי $f_n \to f$ במידה שווה ב$[a,b)$ ונראה כי $\lim_{b_0 \to b^-} N_{\varepsilon}(b_0) \ne \infty$,

מהיות $f_n \to f$ במידה שווה ב$[a,b)$

$$(\forall x \in [a,b))\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(N_{\varepsilon}(b) < n \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

מהסעיף הקודם ראינו כי N_{ε} עולה ולכן $\forall b_0 < b$ מתקיים $N_{\varepsilon}(b_0) \le N_{\varepsilon}(b)$,

כלומר N_{ε} חסומה ולכן $\lim_{b_0 \to b^-} N_{\varepsilon}(b_0) \ne \infty$

$\Leftarrow$: עתה נניח כי $\lim_{b_0 \to b^-} N_{\varepsilon}(b_0) \ne \infty$ ונראה כי $f_n \to f$ במידה שווה ב$[a,b)$,

מהיות $\lim_{b_0 \to b^-} N_{\varepsilon}(b_0) \ne \infty$,

מהסעיף הקודם אנחנו יודעים כי $\lim_{b_0 \to b^-} N_{\varepsilon}(b_0)$ קיים ונסמן

$$\lim_{b_0 \to b^-} N_{\varepsilon}(b_0) = L$$

נבחר $N(\varepsilon) = L + 1$, יהי $x \in I$ ו$N(\varepsilon) < n \in \mathbb{N}$, נשים לב כי $\exists b_0 \in [a,b)$ כך שמתקיים

$$a \le x < b_0 < b$$

נשים לב כי

$$N_{\varepsilon}(b_0) \le N_{\varepsilon}(b) \le L < L + 1 = N(\varepsilon)$$
$$(\forall x \in [a,b_0))\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(N_{\varepsilon}(b_0) < n \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

לכן

$$|f_n(x) - f(x)| \overset{N_{\varepsilon}(b_0) < N(\varepsilon) < n}{<} \varepsilon$$

כלומר ראינו כי

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})\,(\forall x \in I)\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(N < n \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

כלומר $f_n \to f$ במידה שווה ב$[a,b)$

מ.ש.ל.ב.3.☺

iv. **צ"ל:** $f_n \to f$ לא במידה שווה ב$[a,b)$ אבל $f_n \to f$ במידה שווה ל$[a,b_0)$ לכל $a<b_0<b$

הוכחה:

נבחר $f_n(x)=x^n, f(x)=0$ ו$I=[a,b)=[0,1)$,

ראינו בתרגיל הקודם (שאלה 4ב) כי $f_n \to f$ לא במידה שווה בקטע $[0,1)$,

עתה נראה כי $f_n \to f$ במידה שווה ל$[a,b_0)$ לכל $a<b_0<b$,

יהי $a<b_0<b$, אזי

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid x\in[0,b_0)\} = \sup\{|x^n-0| \mid x\in[0,b_0)\} = b_0^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

לכן מהגדרת התכנסות במידה שווה (לפי sup) מתקיים כי $f_n \to f$ במ"ש ב$[0,b)$

מ.ש.ל.ב.4.☺