אינפי 2 - סמסטר א' תשע"ט
תרגיל בית 6

להגשה עד יום חמישי, 6 בדצמבר, בשעה 20:00, דרך תיבת ההגשה במודל

1. **(44 נק')** לכל אחד מהטורים הבאים, קבעו האם הוא מתכנס:

$$\text{(A)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1+1/n}{1+1/(n+1)}\right) \qquad \text{(B)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} \qquad \text{(C)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$\text{(D)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n^4+n+1)}} \qquad \text{(E)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\sin^2(n) \qquad \text{(F)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{(G)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{(H)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n \qquad \text{(I)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}\cdot\sin(1/n)}{\sqrt{n}}$$

$$\text{(J)}\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \qquad \text{(K)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

בסעיף (J) x הוא קבוע חיובי, והתשובה יכולה להיות תלויה בו.

2. **לא להגשה (אל תגישו):** הוכיחו את אי־שיוויון הממוצעים: עבור $\alpha,\beta \geq 0$, מתקיים $\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{1}{2}\cdot(\alpha+\beta)$.

3. **(24 נק')** תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים חיוביים.
   (א) הוכיחו שאם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.
   (ב) נניח שהסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת, והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
   (ג) הוכיחו שהסעיף הקודם לא נכון אם מוותרים על ההנחה שהסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת.

4. **(16 נק')** יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס ל - $S \in \mathbb{R}$.
   (א) הראו שלכל $l \in \mathbb{N}$, הטור $\sum_{n=l+1}^{\infty} a_n$ מתכנס ל - $S - \sum_{n=1}^{l} a_n$.
   ראיתם הוכחה לכך בשיעור. אתם יכולים לחזור עליה.
   (ב) הוכיחו: $\lim_{l\to\infty} \sum_{n=l+1}^{\infty} a_n = 0$.

5. **(12 נק')** ראינו ש - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס. נסמן $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. הוכיחו שמתקיים $1 \leq S \leq 2$ (**רמז:** נסו להעריך בנפרד את $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ו - $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ בעזרת אינטגרל).

6. **(4 נק')** תנו דוגמה לסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ של מספרים חיוביים עבורה הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לא קיים, אבל הגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ קיים במובן הצר ושונה מ - 1. מה תוכלו להסיק לגבי מבחני התכנסות כפי שנוסחו בתרגול?