פתרון תרגיל מספר 3 ־ כלים מתמטיים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

10 בנובמבר 2020

1. **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(G\sim G\left(n,p\right)\ \forall v\text{ s.t. the number of neighbors}\leq 2.01\left(n\log\left(n\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)=1$

הוכחה:

נסמן $\alpha=2.01$, וב־ $k=\frac{\alpha-2}{2}$, נשים לב כי

$$\begin{aligned}(n-1)\cdot n^{-\frac{1}{2}}\leq k\cdot\left(n\log\left(n\right)\right)^{\frac{1}{2}} & \iff\frac{n^{2}-2n+1}{n}\leq k^{2}\cdot\left(n\log\left(n\right)\right)\\ & \iff n^{2}-2n+1\leq k^{2}\cdot n\left(n\log\left(n\right)\right)\\ & \iff 0\leq n^{2}\left(k^{2}\cdot\log\left(n\right)-1\right)+2n-1\end{aligned}$$

נשים לב כי $\lim_{n\to\infty}n^{2}\left(k^{2}\cdot\log\left(n\right)-1\right)+2n-1=\infty$ ולכן ממקום מסוים מתקיים כי $0\leq n^{2}\left(k^{2}\cdot\log\left(n\right)-1\right)+2n-1$
ולכן ממקום מסוים מתקיים כי $\boxed{(n-1)\cdot n^{-\frac{1}{2}}\leq k\cdot\left(n\log\left(n\right)\right)^{\frac{1}{2}}}$.
נסמן ב־ $X_{v_i}=d_i$ משתנה מקרי של מספר השכנים של v_i,
נגדיר X_{v_i,v_j} להיות משתנה אינדיקטור של האם הצלע $\{v_i,v_j\}$ קיימת.
נשים לב כי $X_{v_i}=\sum_{j\in[n]\setminus\{i\}}X_{v_i,v_j}$ ולכן

$$\mathbb{E}\left[X_{v_i}\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{j\in[n]\setminus\{i\}}X_{v_i,v_j}\right]=\sum_{j\in[n]\setminus\{i\}}\mathbb{E}\left[X_{v_i,v_j}\right]=(n-1)\cdot p=(n-1)\cdot n^{-\frac{1}{2}}$$

עתה נשים לב כי ממקום מסוים מתקיים $(n-1)\cdot n^{-\frac{1}{2}}\leq k\cdot\left(n\log\left(n\right)\right)^{\frac{1}{2}}$, כלומר קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n_0<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $(n-1)\cdot n^{-\frac{1}{2}}\leq k\cdot\left(n\log\left(n\right)\right)^{\frac{1}{2}}$.

יהי $n \geq n_0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} d_i > \alpha \cdot (n\log(n))^{\frac{1}{2}}\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_{v_i} \geq \alpha \cdot (n\log(n))^{\frac{1}{2}}\right) \overset{\text{union bound}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_{v_i} \geq \alpha \cdot (n\log(n))^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_{v_i} \geq (\alpha - k) \cdot (n\log(n))^{\frac{1}{2}} + k \cdot (n\log(n))^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\overset{(n-1)\cdot n^{-\frac{1}{2}} \leq k \cdot (n\log(n))^{\frac{1}{2}}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_{v_i} \geq (\alpha - k) \cdot (n\log(n))^{\frac{1}{2}} + (n-1) \cdot n^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_{v_i} - (n-1) \cdot n^{-\frac{1}{2}} \geq (\alpha - k) \cdot (n\log(n))^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_{v_i} - \mathbb{E}\left[X_{v_i}\right] \geq (\alpha - k) \cdot (n\log(n))^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\left|X_{v_i} - \mathbb{E}\left[X_{v_i}\right]\right| \geq (\alpha - k) \cdot (n\log(n))^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\overset{\text{hoeffding inequality for } X_{v_i}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot e^{-\frac{\left[(\alpha-k)\cdot(n\log(n))^{\frac{1}{2}}\right]^2}{2(n-1)\cdot 1^2}} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot e^{-\frac{(\alpha-k)^2 \cdot n\log(n)}{2(n-1)\cdot 1^2}}$$
$$= 2n \cdot e^{-\frac{(\alpha-k)^2 \cdot n\log(n)}{2(n-1)\cdot 1^2}} = 2e^{\log(n)} \cdot e^{-\frac{n}{n-1}\cdot\frac{(\alpha-k)^2}{2}\cdot\log(n)} = 2e^{\log(n)\cdot\left[1-\frac{n}{n-1}\cdot\frac{(\alpha-k)^2}{2}\right]}$$
$$\leq 2e^{\log(n)\cdot\left[1-\frac{(\alpha-k)^2}{2}\right]} = 2n^{1-\frac{(\alpha-k)^2}{2}} = 2n^{1-\frac{\left(\alpha-\frac{\alpha-2}{2}\right)^2}{2}} = 2n^{1-\frac{\left(\frac{2+\alpha}{2}\right)^2}{2}}$$
$$= 2n^{1-\frac{(2+\alpha)^2}{8}} \overset{\alpha>2}{<} 2n^{1-\frac{(2+2)^2}{8}} = 2n^{-1} = \frac{2}{n}$$

כלומר קיבלנו כי ממקום מסוים מתקיים

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} d_i > \alpha \cdot (n\log(n))^{\frac{1}{2}}\right) \leq \frac{2}{n}$$

וממשפט סנדוויץ', נסיק כי $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} d_i > \alpha \cdot (n\log(n))^{\frac{1}{2}}\right) = 0$, כלומר

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} d_i \leq \alpha \cdot (n\log(n))^{\frac{1}{2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} d_i > \alpha \cdot (n\log(n))^{\frac{1}{2}}\right)\right] = 1 - 0 = 1$$

כלומר הראנו את הנדרש, שמתקיים $\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} d_i \leq \alpha \cdot (n\log(n))^{\frac{1}{2}}\right) = 1}$.

מ.ש.ל.☺

2. **צ"ל:** $p = n^{-\frac{2}{k-1}}$ הוא ה־ $threshold$ לתכונה של הופעת K_k בגרף $G \sim G(n,p)$

הוכחה:

תחילה נעשה פיתוח עזר,

נסמן ב־ X משתנה מקרי של מספר הופעות של K_k ב־ G.

נסמן ב־ X_S אינדיקטור של האם תת הגרף שנוצר על ידי הקבוצה S הוא K_k.

נשים לב כי

$$\mathbb{E}\left[X_S\right] = \mathbb{P}\left(X_S\right) = \underbrace{p^{\binom{k}{2}}}_{\text{the probability that all } \binom{k}{2} \text{ edges exists}}$$

ונשים לב כי $X=\sum_{S\subseteq V\wedge|S|=k}X_S$ ולכן נקבל כי

$$\mathbb{E}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{S\subseteq V\wedge|S|=k}X_S\right]=\sum_{S\subseteq V\wedge|S|=k}\mathbb{E}\left[X_S\right]=\sum_{S\subseteq V\wedge|S|=k}p^{\binom{k}{2}}=\binom{n}{k}\cdot p^{\binom{k}{2}}$$

עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[X\right]&=\mathrm{Var}\left[\sum_{S\subseteq V\wedge|S|=k}X_S\right]=\sum_{S\subseteq V\wedge|S|=k}\mathrm{Var}\left[X_S\right]+\sum_{S\subseteq V\wedge|S|=k}\sum_{S\subseteq V\wedge|T|=k\wedge S\neq T}\mathrm{Cov}\left[X_S,X_T\right]\\
&=\sum_{S\subseteq V\wedge|S|=k}\left[\mathbb{E}\left[X_S^2\right]-\left(\mathbb{E}\left[X_S\right]\right)^2\right]+\sum_{S\subseteq V\wedge|S|=k}\sum_{S\subseteq V\wedge|T|=k\wedge S\neq T}\mathrm{Cov}\left[X_S,X_T\right]\\
&=\sum_{S\subseteq V\wedge|S|=k}\left[p^{\binom{k}{2}}-\left(p^{\binom{k}{2}}\right)^2\right]+\sum_{S\subseteq V\wedge|S|=k}\sum_{S\subseteq V\wedge|T|=k\wedge S\neq T}\mathrm{Cov}\left[X_S,X_T\right]\\
&=\binom{n}{k}\cdot p^{\binom{k}{2}}\left(1-p^{\binom{k}{2}}\right)+\sum_{S\subseteq V\wedge|S|=k}\sum_{S\subseteq V\wedge|T|=k\wedge S\neq T}\mathrm{Cov}\left[X_S,X_T\right]\\
&=\mathbb{E}\left[X\right]\cdot\left(1-p^{\binom{k}{2}}\right)+\sum_{S\subseteq V\wedge|S|=k}\sum_{S\subseteq V\wedge|T|=k\wedge S\neq T}\left(\mathbb{E}\left[X_S\cdot X_T\right]-\mathbb{E}\left[X_S\right]\cdot\mathbb{E}\left[X_T\right]\right)\\
&=\mathbb{E}\left[X\right]\cdot\left(1-p^{\binom{k}{2}}\right)+\sum_{S\subseteq V\wedge|S|=k}\sum_{l=2}^{k-1}\sum_{S\subseteq V\wedge|T|=k\wedge|S\cap T|=l}\left(\mathbb{E}\left[X_S\cdot X_T\right]-\left(p^{\binom{k}{2}}\right)^2\right)\\
&=\mathbb{E}\left[X\right]\cdot\left(1-p^{\binom{k}{2}}\right)+\sum_{S\subseteq V\wedge|S|=k}\sum_{l=2}^{k-1}\sum_{S\subseteq V\wedge|T|=k\wedge|S\cap T|=l}\left(p^{2\binom{k}{2}-\binom{l}{2}}-\left(p^{\binom{k}{2}}\right)^2\right)\\
&=\mathbb{E}\left[X\right]\cdot\left(1-p^{\binom{k}{2}}\right)+\binom{n}{k}\cdot\sum_{l=2}^{k-1}\sum_{S\subseteq V\wedge|T|=k\wedge|S\cap T|=l}\left(p^{2\binom{k}{2}-\binom{l}{2}}-\left(p^{\binom{k}{2}}\right)^2\right)\\
&=\mathbb{E}\left[X\right]\cdot\left(1-p^{\binom{k}{2}}\right)+\binom{n}{k}\cdot\sum_{l=2}^{k-1}\binom{k}{l}\cdot\binom{n-k}{k-l}\left(p^{2\binom{k}{2}-\binom{l}{2}}-\left(p^{\binom{k}{2}}\right)^2\right)\\
&<\mathbb{E}\left[X\right]\cdot 1+\binom{n}{k}\cdot\sum_{l=2}^{k-1}\binom{k}{l}\cdot\binom{n-k}{k-l}\cdot p^{2\binom{k}{2}-\binom{l}{2}}\end{aligned}$$

לאחר החישובים, נחלק למקרים:

(א) אם $p=o\left(n^{-\frac{2}{k-1}}\right)$, נשים לב כי

$$0\leq\mathbb{P}\left(X>0\right)\leq\mathbb{E}\left[X\right]=\binom{n}{k}\cdot p^{\binom{k}{2}}=\binom{n}{k}\cdot p^{\frac{k(k-1)}{2}}=\Theta\left(n^k\cdot p^{\frac{k(k-1)}{2}}\right)=\Theta\left(\left(n^{\frac{2}{k-1}}\cdot p\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}\right)$$

נשים לב כי $p=o\left(n^{-\frac{2}{k-1}}\right)$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{2}{k-1}}\cdot p\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}=0$ ולכן נסיק כי $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[X\right]=\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\cdot p^{\binom{k}{2}}=0$.
ונקבל כי $0\leq\mathbb{P}\left(X>0\right)\leq\mathbb{E}\left[X\right]$ וממשפט סנדוויץ' נקבל כי $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X>0\right)=0$,
כלומר הסיכוי למצוא K_k הוא 0 כש $n\to\infty$, כלומר התכונה תתקיים בהסתברות 0, כנדרש

(ב) אם $p=\omega\left(n^{-\frac{2}{k-1}}\right)$, נשים לב כי

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X=0\right)\leq\frac{\mathrm{Var}\left[X\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]^{2}}&<\frac{\binom{n}{k}\cdot p^{\binom{k}{2}}\cdot1+\binom{n}{k}\cdot\sum_{l=2}^{k-1}\binom{k}{l}\cdot\binom{n-k}{k-l}\cdot p^{2\binom{k}{2}-\binom{l}{2}}}{\left[\binom{n}{k}\cdot p^{\binom{k}{2}}\right]^{2}}\\&=\frac{\Theta\left(\binom{n}{k}\cdot p^{\binom{k}{2}}\right)+\Theta\left(n^{k}\right)\cdot\sum_{l=2}^{k-1}\Theta\left(n^{k-l}\cdot p^{2\binom{k}{2}-\binom{l}{2}}\right)}{\Theta\left(n^{2k}\cdot p^{2\binom{k}{2}}\right)}\\&=\frac{\Theta\left(\binom{n}{k}\cdot p^{\binom{k}{2}}\right)+\sum_{l=2}^{k-1}\Theta\left(n^{2k-l}\cdot p^{2\binom{k}{2}-\binom{l}{2}}\right)}{\Theta\left(n^{2k}\cdot p^{2\binom{k}{2}}\right)}\end{aligned}$$

תחילה נשים לב כי $\frac{1}{\Theta\left(\left(n^{\frac{2}{k-1}}\cdot p\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}\right)}=\frac{1}{\Theta\left(n^{k}\cdot p^{\frac{k(k-1)}{2}}\right)}=\frac{1}{\Theta\left(n^{k}\cdot p^{\binom{k}{2}}\right)}=\frac{\Theta\left(\binom{n}{k}\cdot p^{\binom{k}{2}}\right)}{\Theta\left(n^{2k}\cdot p^{2\binom{k}{2}}\right)}$,

מהנתון $p=\omega\left(n^{-\frac{2}{k-1}}\right)$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{2}{k-1}}\cdot p\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}=\infty$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Theta\left(\left(n^{\frac{2}{k-1}}\cdot p\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}\right)}=0$.

עתה, יהי $1\leq l\leq k-1$, תחילה נשים לב כי

$$\begin{aligned}\frac{\Theta\left(n^{2k-l}\cdot p^{2\binom{k}{2}-\binom{l}{2}}\right)}{\Theta\left(n^{2k}\cdot p^{2\binom{k}{2}}\right)}&=\frac{1}{\Theta\left(n^{l}\cdot p^{\binom{l}{2}}\right)}=\frac{1}{\Theta\left(n^{l}\cdot p^{\frac{l\cdot(l-1)}{2}}\right)}=\frac{1}{\Theta\left(\left[n\cdot p^{\frac{l-1}{2}}\right]^{l}\right)}=\frac{1}{\omega\left(\left[n\cdot n^{\frac{-2}{k-1}\cdot\frac{l-1}{2}}\right]^{l}\right)}\\&=\frac{1}{\omega\left(\left[n\cdot n^{-\frac{l-1}{k-1}}\right]^{l}\right)}=\frac{1}{\omega\left(\left[n^{\frac{k-1-l+1}{k-1}}\right]^{l}\right)}=\frac{1}{\omega\left(\left[n^{\frac{k-l}{k-1}}\right]^{l}\right)}\end{aligned}$$

עתה נשים לב כי $\frac{k-l}{k-1}>0$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\omega\left(\left[n^{\frac{k-l}{k-1}}\right]^{l}\right)=\infty$ ולכן מתקיים כי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\omega\left(\left[n^{\frac{k-l}{k-1}}\right]^{l}\right)}=0$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{\Theta\left(n^{2k-l}\cdot p^{2\binom{k}{2}-\binom{l}{2}}\right)}{\Theta\left(n^{2k}\cdot p^{2\binom{k}{2}}\right)}=0$.

כלומר הראנו כי כל איבר שואף ל־0 בביטוי $\frac{\Theta\left(\binom{n}{k}\cdot p^{\binom{k}{2}}\right)+\sum_{l=2}^{k-1}\Theta\left(n^{2k-l}\cdot p^{2\binom{k}{2}-\binom{l}{2}}\right)}{\Theta\left(n^{2k}\cdot p^{2\binom{k}{2}}\right)}$ ויש לכל היותר l מחוברים ולכן גם סכומם שואף ל־ 0. לכן $\lim_{n\to\infty}\frac{\Theta\left(\binom{n}{k}\cdot p^{\binom{k}{2}}\right)+\sum_{l=2}^{k-1}\Theta\left(n^{2k-l}\cdot p^{2\binom{k}{2}-\binom{l}{2}}\right)}{\Theta\left(n^{2k}\cdot p^{2\binom{k}{2}}\right)}=0$, ועתה

$$0\leq\mathbb{P}\left(X=0\right)\leq\frac{\Theta\left(\binom{n}{k}\cdot p^{\binom{k}{2}}\right)+\sum_{l=2}^{k-1}\Theta\left(n^{2k-l}\cdot p^{2\binom{k}{2}-\binom{l}{2}}\right)}{\Theta\left(n^{2k}\cdot p^{2\binom{k}{2}}\right)}$$

ממשפט סנדוויץ' נקבל כי $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X=0\right)=0$, ולכן נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X>0\right)=\lim_{n\to\infty}1-\mathbb{P}\left(X=0\right)=1-0=1$$

כלומר הראנו כי $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X>0\right)=1$, כלומר התכונה של מציאת K_k בגרף מתקיימת בהסתברות 1.

מחיבור א' וב' נקבל ש־ $p = n^{-\frac{2}{k-1}}$ הוא אכן ה־ $threshold$ לתכונה של מציאת K_k בגרף $G \sim G(n,p)$, כנדרש.

מ.ש.ל.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T \subseteq S) = \Theta\left(\left(\frac{k}{n}\right)^t\right)$

הוכחה:

נסמן $T = \{x_1, \ldots, x_t\}$, נשים לב כי

$$\mathbb{P}(T \subseteq S) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{t} x_i \in S\right) = \Pi_{i=1}^{t}\mathbb{P}\left(x_i \in S \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} x_j \in S\right) = \Pi_{i=1}^{t}\frac{k-i}{n-i}$$
$$= \frac{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-t+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-t+1)} = \Theta\left(\frac{k^t}{n^t}\right) = \Theta\left(\left(\frac{k}{n}\right)^t\right)$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** S מכילה $\Omega\left(\frac{k^3}{n}\right)$ סדרות אריתמטיות באורך 3

הוכחה:

נסמן $l = 3$,

נבחין כי סדרה שהיא אריתמטית l מקיימת $a_n = a_1 + d\cdot(n-1)$ כאשר $d = a_2 - a_1$ לכל $1 \le n \le l$.

נגדיר X משתנה שסופר כמה סדרות אריתמטיות יש באורך l.

נגדיר $X_{a_1,d}$ משתנה אינדיקטור שאומר האם $a_1, a_1+d, ..., a_1+(l-1)\cdot d$ היא סדרה אריתמטית.

נשים לב שבשביל ש־ $X_{a_1,d}$ תהיה אריתמטית צריך להתקיים כי $a_1 + (l-1)\cdot d \le n$, כלומר $d \le \left\lfloor \frac{n-a_1}{l-1} \right\rfloor$.

נשים לב שיש $\sum_{a_1\in[n]}\sum_{d=1}^{\left\lfloor\frac{n-a_1}{l-1}\right\rfloor} 1 = \Theta\left(n^2\right)$ סדרות אריתמטיות ונסמן מספר זה ב־ N.

עתה נשים לב כי $X = \sum_{a_1\in[n]}\sum_{d=1}^{\left\lfloor\frac{n-a_1}{l-1}\right\rfloor} X_{a_1,d}$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{a_1\in[n]}\sum_{d=1}^{\left\lfloor\frac{n-a_1}{l-1}\right\rfloor} X_{a_1,a_2}\right] = \sum_{a_1\in[n]}\sum_{d=1}^{\left\lfloor\frac{n-a_1}{l-1}\right\rfloor}\mathbb{E}\left[X_{a_1,a_2}\right]$$
$$= \sum_{a_1\in[n]}\sum_{d=1}^{\left\lfloor\frac{n-a_1}{l-1}\right\rfloor}\mathbb{P}\left(\{a_1, a_1+d, ..., a_1+(l-1)\cdot d\} \subseteq S\right)$$
$$= \sum_{a_1\in[n]}\sum_{d=1}^{\left\lfloor\frac{n-a_1}{l-1}\right\rfloor}\Theta\left(\left[\frac{k}{n}\right]^l\right) = \Theta\left(N\cdot\left[\frac{k}{n}\right]^l\right) = \Theta\left(n^2\cdot\left[\frac{k}{n}\right]^l\right) = \Theta\left(\frac{k^l}{n^{l-2}}\right)$$

יהיו a_1, d_a בטווחים המתאימים, נשים לב כי עתה נשים לב כי

$$\mathbb{E}\left[\sum_{b_1\in[n]}\sum_{d_b=1\wedge(b_1\ne a_1\vee d_a\ne d_b)}^{\left\lfloor\frac{n-b_1}{l-1}\right\rfloor} X_{a_1,d_a}\cdot X_{b_1,d_b}\right] = \sum_{b_1\in[n]}\sum_{d_b=1\wedge(b_1\ne a_1\vee d_a\ne d_b)}^{\left\lfloor\frac{n-b_1}{l-1}\right\rfloor}\mathbb{E}\left[X_{a_1,d_a}\cdot X_{b_1,d_b}\right]$$
$$\stackrel{\star}{=} \Theta(1)\cdot\Theta\left(\frac{k^4}{n^4}\right) + \Theta(n)\cdot\Theta\left(\frac{k^5}{n^5}\right) + N\cdot\Theta\left(\frac{k^6}{n^6}\right)$$
$$= \Theta\left(\frac{k^4(1+k)}{n^4}\right) + N\cdot\mathbb{P}\left(T\subseteq S \wedge |T| = 6\right)$$

הסיבה ש־ $\star$ נכונה מ־ 3 אבחנות:

i. תחילה המקרה ש־ $|\{a_1, a_1+d_a, a_1+2d_a\} \cap \{b_1, b_1+d_b, b_1+2d_b\}| = 2$ מתקיים רק מספר סופי של פעמים $\Theta(1)$ בגלל שצריך ש־ $d_a = d_b$ ושגם $a_1 + d_a \in \{b_1, b_1+d_b, b_1+2d_b\}$ והפוך וההסתברות למאורע היא $\mathbb{P}(T \subseteq S \wedge |T| = 4) = \Theta\left(\frac{k^4}{n^4}\right)$, מפה נקבל שהתוחלת במקרה זה היא $\boxed{\Theta\left(\frac{k^4}{n^4}\right) \cdot \Theta(1)}$

ii. במקרה ש־ $|\{a_1, a_1+d_a, a_1+2d_a\} \cap \{b_1, b_1+d_b, b_1+2d_b\}| = 1$ מתקיים כפעמיים שלוש לכל b_1 ויש n מהם ולכן המאורע קורה $\Theta(n)$ פעמים וההסתברות למאורע היא $\mathbb{P}(T \subseteq S \wedge |T| = 5) = \Theta\left(\frac{k^5}{n^5}\right)$, מפה נקבל שהתוחלת במקרה זה היא $\boxed{\Theta\left(\frac{k^5}{n^5}\right) \cdot \Theta(n)}$.

iii. והמקרה האחרון הוא $|\{a_1, a_1+d_a, a_1+2d_a\} \cap \{b_1, b_1+d_b, b_1+2d_b\}| = 0$ שמתקיים $\Theta\left(n^2 - n - 1\right) = $ $N \leq \Theta\left(n^2\right)$ (מחיסור שאר האפשרויות) פעמים וההסתברות למאורע היא $\mathbb{P}(T \subseteq S \wedge |T| = 6) = \Theta\left(\frac{k^6}{n^6}\right)$, מפה נקבל שהתוחלת במקרה זה היא $\boxed{\mathbb{P}(T \subseteq S \wedge |T| = 6) \cdot N}$

לאחר אבחנה זאת נקבל כי

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{a_1 \in [n]} \sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n-a_1}{l-1} \right\rfloor} X_{a_1,a_2}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{a_1 \in [n]} \sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n-a_1}{l-1} \right\rfloor} X_{a_1,a_2}^2 + \sum_{a_1 \in [n]} \sum_{d_a=1}^{\left\lfloor \frac{n-a_1}{l-1} \right\rfloor} \sum_{b_1 \in [n]} \sum_{d_b=1 \wedge (b_1 \neq a_1 \vee d_a \neq d_b)}^{\left\lfloor \frac{n-b_1}{l-1} \right\rfloor} X_{a_1,d_a} \cdot X_{b_1,d_b}\right]$$

$$= \sum_{a_1 \in [n]} \sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n-a_1}{l-1} \right\rfloor} \mathbb{E}\left[X_{a_1,a_2}^2\right] + \sum_{a_1 \in [n]} \sum_{d_a=1}^{\left\lfloor \frac{n-a_1}{l-1} \right\rfloor} \mathbb{E}\left[\sum_{b_1 \in [n]} \sum_{d_b=1 \wedge (b_1 \neq a_1 \vee d_a \neq d_b)}^{\left\lfloor \frac{n-b_1}{l-1} \right\rfloor} X_{a_1,d_a} \cdot X_{b_1,d_b}\right]$$

$$= \sum_{a_1 \in [n]} \sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n-a_1}{l-1} \right\rfloor} \Theta\left(\frac{k^3}{n}\right) + \sum_{a_1 \in [n]} \sum_{d_a=1}^{\left\lfloor \frac{n-a_1}{l-1} \right\rfloor} \left[\Theta\left(\frac{k^4(1+k)}{n^4}\right) + N \cdot \mathbb{P}(T \subseteq S \wedge |T| = 6)\right]$$

$$= \Theta\left(n^2 \cdot \frac{k^3}{n^2}\right) + \Theta\left(n^2 \frac{k^4(1+k)}{n^4}\right) + N^2 \cdot \mathbb{P}(T \subseteq S \wedge |T| = 6)$$

$$= \Theta\left(\frac{k^3}{n} + \frac{k^4(1+k)}{n^2}\right) + N^2 \cdot \mathbb{P}(T \subseteq S \wedge |T| = 6)$$

נזכר שבמקור חישבנו $\mathbb{E}[X] = N \cdot \mathbb{P}(T \subseteq S \wedge |T| = 3)$, ולפי סעיף א' נקבל

$$\mathbb{E}[X] = N \cdot \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}$$

שעתה נשים לב כי עבור $x < y$ מתקיים כי $y \geq x \iff xy - x \geq xy - y \iff \frac{x}{y} \geq \frac{x-1}{y-1}$, נשתמש בזה ונקבל:

$$N^2 \cdot \mathbb{P}(T \subseteq S \wedge |T| = 6) \leq \mathbb{E}[X]^2$$

$$\iff N^2 \cdot \frac{k \cdot \ldots \cdot (k-5)}{n \cdot \ldots \cdot (n-5)} \leq \left(N \cdot \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}\right)^2$$

$$\iff \frac{(k-3) \cdot \ldots \cdot (k-5)}{(n-3) \cdot \ldots \cdot (n-5)} \leq \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}$$

$$\iff \text{true by lemma } \frac{x}{y} \geq \frac{x-1}{y-1} \iff y \geq x$$

ולכן קיבלנו כי $N^2 \cdot \mathbb{P}(T \subseteq S \wedge |T| = 6) \leq \mathbb{E}[X]^2$, עכשיו נקבל כי

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \Theta\left(\frac{k^3}{n} + \frac{k^4(1+k)}{n^2}\right) + N^2 \cdot \mathbb{P}(T \subseteq S \wedge |T| = 6) - \mathbb{E}[X]^2$$

$$\leq \Theta\left(\frac{k^3}{n} + \frac{k^4(1+k)}{n^2}\right) + \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[X]^2 = \Theta\left(\frac{k^3}{n} + \frac{k^4(1+k)}{n^2}\right)$$

ועתה נקבל כי

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X<\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X\right]\right)&=\mathbb{P}\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]<\frac{-2}{3}\mathbb{E}\left[X\right]\right)=\mathbb{P}\left(-\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]\right)>\frac{2}{3}\mathbb{E}\left[X\right]\right)\\&\leq\mathbb{P}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq\frac{2}{3}\mathbb{E}\left[X\right]\right)\\&\overset{\text{chebyshev inequality}}{\leq}\frac{\mathrm{Var}\left[X\right]}{\left(\frac{2}{3}\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2}=\frac{\Theta\left(\frac{k^3}{n}+\frac{k^4(1+k)}{n^2}\right)}{\Theta\left(\frac{k^6}{n^2}\right)}=\Theta\left(\frac{n}{k^3}+\frac{1+k}{k^2}\right)\\&=o\left(\frac{n}{n}+\frac{1+n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}\right)=o\left(1\right)\end{aligned}$$

כלומר הראנו כי $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X<\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X\right]\right)=0$, עתה

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X\geq\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X\right]\right)=\lim_{n\to\infty}1-\mathbb{P}\left(X<\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X\right]\right)=1-0=1$$

כלומר קיבלנו כי $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X\geq\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X\right]=\Theta\left(\frac{k^3}{n}\right)=\Omega\left(\frac{k^3}{n}\right)\right)=1$,
כלומר הראנו שיש $\Omega\left(\frac{k^3}{n}\right)$ סדרות אריתמטיות בהתסברות 1, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** S מכילה 0 סדרות אריתמטיות באורך 4
הוכחה:
נסמן $l=4$,
נגדיר X ואת $X_{a_1,d}$ כמו שהגדרנו בסעיף הקודם כתלות ב־ l.
לפי חישוב התוחלת בהתחלה של הסעיף הקודם נקבל כי

$$\mathbb{E}\left[X\right]=\Theta\left(\frac{k^l}{n^{l-2}}\right)\overset{l=4}{=}\Theta\left(\frac{k^4}{n^2}\right)=o\left(\frac{\sqrt{n}^4}{n^2}\right)=o\left(1\right)$$

כלומר קיבלנו כי $\mathbb{E}\left[X\right]=o\left(1\right)$, כלומר $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[X\right]=0$ ולכן

$$0\leq\mathbb{P}\left(X>0\right)\leq\mathbb{E}\left[X\right]$$

ממשפט סנדוויץ' נקבל כי $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X>0\right)=0$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X=0\right)=\lim_{n\to\infty}1-\mathbb{P}\left(X>0\right)=1-0=1$$

כלומר הראנו כי $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X=0\right)=1$, כלומר יש 0 סדרות אריתמטיות בהסתברות 1, כנדרש.

מ.ש.ל.ג.☺