אלגברה ליניארית 1 תשע"ח סמסטר ב - תרגיל 4

29 באפריל 2018

1. בכל סעיף פתרו את מערכת המשוואות הנתונה מעל השדה $\mathbb{F}$ הנתון

א) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

$$\begin{cases} (1+i)x_1 + (-1+8i)x_2 = 1 \\ (2+i)x_1 + (1+5i)x_2 = 4-i \end{cases}$$

ב) $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

2. מצאו את המטריצות ההפוכות לכל אחת מהמטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & 3+2i \end{pmatrix}$$

3. תהי A מטריצה מסדר $n \times n$ **משולשת**, כלומר, לכל $1 \le j < i \le n$, $A_{i,j} = 0$.

א) הוכיחו כי A אם לכל $1 \le i \le n$, $A_{i,i} \neq 0$ אז A הפיכה.

ב) הוכיחו כי אם A הפיכה, אזי ההופכית שלה משולשת.

4. א) תהינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$. הוכיחו כי ABהפיכה אס"ם A הפיכה וגם Bהפיכה.

ב) תהינה $A_1, \dots, A_m$ מטריצות הפיכות מסדר $n \times n$. הוכיחו כי $A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_m$ הפיכה.

5. יהי $(\mathbb{F},+,\cdot)$ שדה ויהיו $a,b,c,d\in\mathbb{F}$. הוכיחו את התכונות הבאות:

א) $-(a-b)=b-a$

ב) אם $a,b\neq 0_F$ אזי $\left(a\cdot b^{-1}\right)^{-1}=b\cdot a^{-1}$

ג) אם $b,d\neq 0_F$, $a\cdot b^{-1}+c\cdot d^{-1}=(a\cdot d+c\cdot b)\,(b\cdot d)^{-1}$

ד) נגדיר את 3 על ידי $1+1+1$. הוכיחו כי $(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$.

ה) אם $a\cdot b=0$ אז $a=0$ או $b=0$

ו) אם $a^2=b^2$ אז $a=b$ או $a=-b$

ז) אם $a^3=a$ אז $a=0$ או $a=1$ או $a=-1$.

6. יהי $(\mathbb{F},+,\cdot)$ שדה בו מתקיים $1+1=0$. יהיו $a,b\in\mathbb{F}$. הוכיחו:

א) $(a+b)^2=a^2-b^2$

ב) $a+b=a-b$

7. יהי $\mathbb{F}$ שדה, V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, $a\in\mathbb{F}$, $u,v\in V$. הוכיחו את התכונות הבאות:

א) $a\cdot 0_V=0_V$

ב) $0_{\mathbb{F}}v=0_V$

ג) אם $a\cdot v=0_V$ אז $v=0_V$ או $a=0_{\mathbb{F}}$.

ד) $(-1_{\mathbb{F}})\cdot v=-v$

ה) אם $a\neq 0_F$ קיים $x\in V$ יחיד כך ש $a\cdot x+u=v$