פתרון תרגיל מספר 8 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

3 ביוני 2020

שאלה 1

סעיף 1

צ"ל: $L = \{\langle\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle\rangle \mid L(M_1) \subseteq L(M_2)\} \in \overline{\text{RE} \cup \text{coRE}}$

הוכחה:

תהי M_{all} מכונה כך ש־ $L(M_{all}) = \Sigma^*$ (אפשר עם 2 מצבים שתקבל כל מילה כשלב ראשון)

נסתכל על $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ הבאה: $f(\langle M\rangle) = \langle\langle M_{all}\rangle, \langle M\rangle\rangle$,

נשים לב ש־ f חשיבה כי היא רק כותבת את הקידוד של M_{all} לפני M ומקבלת.

וגם נשים לב כי

$$\begin{aligned}
\langle M\rangle \in ALL_{TM} &\iff L(M) = \Sigma^* \iff L(M) \subseteq \Sigma^* \wedge \Sigma^* \subseteq L(M) \\
&\overset{L(M)\subseteq\Sigma^* \text{ always true}}{\iff} \Sigma^* \subseteq L(M) \overset{L(M_{all})=\Sigma^*}{\iff} L(M_{all}) \subseteq L(M) \\
&\iff \langle\langle M_{all}\rangle, \langle M\rangle\rangle \in L \iff f(\langle M\rangle) \in L
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו שקיימת $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ חשיבה כך ש־ $\langle M\rangle \in ALL_{TM} \iff f(\langle M\rangle) \in L$,

כלומר $ALL_{TM} \leq_m L$ וגם $ALL_{TM} \in \overline{\text{RE} \cup \text{coRE}}$ (ראינו בתרגול)

ולכן $\boxed{L \in \overline{\text{RE} \cup \text{coRE}}}$ ממשפט הרדוקציה, כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2

צ"ל: $L = \{\langle\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle\rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\} \in \overline{\text{RE} \cup \text{coRE}}$

הוכחה:

נעשה בדיוק אותה בנייה כמו בסעיף הקודם ונקבל $ALL_{TM} \leq_m L$ ונסיק $\boxed{L \in \overline{\text{RE} \cup \text{coRE}}}$ ממשפט הרדוקציה

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3

צ"ל: $L = \{\langle\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle, w\rangle \mid M_1, M_2 \text{ agree on } w\} \in \overline{\text{RE} \cup \text{coRE}}$

הוכחה:

תחילה נסמן ב־ $M_{not\ halt}$ מכונה שלא עוצרת על אף קלט.

נסתכל על $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ הבאה: $f(\langle\langle M\rangle, w\rangle) = \langle\langle M_{not\ halt}\rangle, \langle M\rangle, w\rangle$,

נשים לב ש־ f חשיבה כי היא רק כותבת את הקידוד של $M_{not\ halt}$ לפני M ומקבלת.

וגם נשים לב כי

$$\begin{aligned}
\langle\langle M\rangle, w\rangle \in \overline{HALT_{TM}} &\iff M \text{ doesn't halt on } w \iff \\
&\overset{M_{not\ halt} \text{ never halts}}{\iff} M \text{ doesn't halt on } w \wedge M_{not\ halt} \text{ doesn't halt on } w \\
&\overset{M_{not\ halt} \text{ never halts}}{\iff} M, M_{not\ halt} \text{ agree on } w \\
&\iff \langle\langle M_{not\ halt}\rangle, \langle M\rangle, w\rangle \in L \iff f(\langle\langle M\rangle, w\rangle) \in L
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו שקיימת $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ חשיבה כך ש־ $f\left(\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\right)\in L\iff\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\in\overline{HALT_{TM}}$,
כלומר $\overline{HALT_{TM}}\le_m L$ וגם $\overline{HALT_{TM}}\notin\mathrm{RE}$ (ראינו בהרצאה)
ולכן $\boxed{L\notin\mathrm{RE}}$ ממשפט הרדוקציה.
עתה נסמן $M_{accepts}$ מכונה שמקבלת כל קלט.
נסתכל על $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ הבאה: $f\left(\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\right)=\left\langle\left\langle M_{accepts}\right\rangle,\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle$,
נשים לב ש־ f חשיבה כי היא רק כותבת את הקידוד של $M_{accepts}$ לפני M ומקבלת.
וגם נשים לב כי

$$\begin{aligned}\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\in A_{TM}&\iff M\text{ accepts }w\iff\\ &\overset{M_{not\ halt}\text{ always accepts}}{\iff} M\text{ accepts }w\wedge M_{accepts}\text{ accepts }w\\ &\overset{M_{not\ halt}\text{ always accepts}}{\iff} M,M_{accepts}\text{ agree on }w\\ &\iff\left\langle\left\langle M_{accepts}\right\rangle,\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\in L\iff f\left(\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\right)\in L\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו שקיימת $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ חשיבה כך ש־ $f\left(\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\right)\in L\iff\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\in A_{TM}$,
כלומר $A_{TM}\le_m L$ וגם $A_{TM}\notin\mathrm{coRE}$ (ראינו בהרצאה)
ולכן $\boxed{L\notin\mathrm{coRE}}$ ממשפט הרדוקציה.
כלומר קיבלנו ש־ $\boxed{L\in\overline{\mathrm{RE}\cup\mathrm{coRE}}}$, כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

סעיף 4
צ"ל: $L=\left\{\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\mid\text{M never modifies the portain that w is written on}\right\}\in\mathrm{coRE}\setminus R$
הוכחה:
תחילה נראה ש־ $L\in\mathrm{coRE}$ ונבנה את המכונה $\mathcal{M}$ הבאה:

1. נקבל קלט $\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle$
2. לכל $i\in\{1,2,\dots\}$:
   (א) נריץ את M על w ל־ i צעדים ונבדוק האם M שינה את הסרט שכתבנו עליו w, אם כן נקבל

נוכיח ש־ $L\left(\mathcal{M}\right)=\overline{L}$.

1. אם $\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\in\overline{L}$ אז קיים שלב i בו המכונה M משנה את החלק שכתוב בו w, נשים לב ש־ $\mathcal{M}$ אף פעם לא דוחה ואיטרציה ה־ i נראה ש־ M שינה את הסרט שכתבנו עליו w ולכן נקבל, כלומר $\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\in L\left(\mathcal{M}\right)$
2. אם $\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\in L\left(\mathcal{M}\right)$ קיים שלב i בו המכונה M בו $\mathcal{M}$ קיבלה, כלומר קיים שלב i בו המכונה M משנה את החלק שכתוב בו w, כלומר $\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\notin L$, כלומר $\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\in\overline{L}$

כלומר קיבלנו כי $\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\in L\left(\mathcal{M}\right)\iff\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle\in\overline{L}$ ולכן $L\left(\mathcal{M}\right)=\overline{L}$,
כלומר הראנו שקיים מ"ט $\mathcal{M}$ כך ש־ $L\left(\mathcal{M}\right)=\overline{L}$, ולכן $\overline{L}\in\mathrm{RE}$, כלומר $\boxed{L\in\mathrm{coRE}}$.
נבנה $\mathcal{M}_{\left\langle\left\langle M\right\rangle,w\right\rangle}$ באופן הבא:

1. נקבל קלט x
2. נזיז את הראש $|x|$ צעדים ימינה
3. נריץ את M על w
4. אם M קיבל את w:
   (א) נשנה את התו הראשון של x

נסתכל על $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ הבאה: $f(\langle\langle M\rangle,w\rangle)=\left\langle\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle},0\right\rangle$,

נשים לב ש־ f חשיבה כי היא רק כותבת את הקידוד של $\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle},0$ שניתן לחישוב על ידי מכונה אוניברסלית.

נשים לב שכאשר $\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}$ מסמלצת את M על w היא לא תזיז את הראש אחורה מהנקודה שבו הוא התחיל (כי M חושבת שההתחלה של הסרט היא הנקודה שבו היה הראש כשהתחלנו להריץ את M),

ולכן בזמן ש־ M מסמלצת את w, הערך של x על הסרט לא ישתנה וגם לפני הסמלוץ לא ישתנה.

ולכן $\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}$ משנה את x אם ורק אם M קיבל את w (אחרת $\mathcal{M}$ מריצה את M על w שלא יחזור אחורה מהמקום ההתחלתי שבו שמנו את הראש כאשר

לכן $\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}$ משנה את התו הראשון של $x=0$ אם ורק אם M קיבל את w

ולכן

$$\begin{aligned}\langle\langle M\rangle,w\rangle\in A_{TM}&\iff M\text{ accepts }w\iff\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle}\text{ changes the first bit of input }0\\&\iff\left\langle\mathcal{M}_{\langle\langle M\rangle,w\rangle},0\right\rangle\notin L\iff f(\langle\langle M\rangle,w\rangle)\notin L\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו שקיימת $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ חשיבה כך ש־ $\langle\langle M\rangle,w\rangle\in A_{TM}\iff f(\langle\langle M\rangle,w\rangle)\notin L$,

כלומר $A_{TM}\le_m\overline{L}$ וגם $A_{TM}\notin\text{coRE}$ (ראינו בהרצאה)

ולכן $\overline{L}\notin\text{coRE}$ ולכן $\boxed{L\notin\text{RE}}$

כלומר קיבלנו כי $L\in\text{coRE}$ וגם $L\notin\text{RE}$ ולכן $\boxed{L\in\text{coRE}\setminus R}$ כנדרש

מ.ש.ל.ד.☺

סעיף 5

צ"ל: $L=\{\langle\langle M\rangle,w_1,w_2\rangle\mid\text{M accepts }w_1\text{ and rejects }w_2\}\in\text{RE}\setminus R$

הוכחה:

תחילה פשוט נריץ את M ונקבל אם קיבל את w_1 ודחה את w_2 ולכן זה ב־ RE.

עתה ניצור $\mathcal{M}$ שמקבל את w_i אם M קיבל את w_{i-1} ודוחה את המילה הראשונה וזה רדוקציה מ־ A_{TM} ל־ L ולכן השפה לא ב־ coRE.

מ.ש.ל.ה.☺