

## פתרון תרגיל מספר 10 - חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, ת.ז: 211747639

13 ביוני 2020

### שאלה 4

סעיף 1

צ"ל:  $IS \in NP$

הוכחה:

נבנה מוודא פולינומי  $M$  באופן הבא:

1. נקבל קלט  $\langle G, k \rangle \# S$  כאשר  $G = \langle V, E \rangle$

2. נבדוק ש-  $S \subseteq V$  ואם לא נדחה

3. נבדוק ש-  $|S| = k$  ואם לא נדחה

4. נבדוק ש-  $\forall u, v \in S, \{u, v\} \notin E$  מתקיים ואם לא נדחה

5. נקבל

נשים לב שזמן הריצה של  $M$  הוא  $O(1)$  בשלב 1,  $O(|V| \cdot |S|)$  בשלב 2,  $O(|S| \cdot k)$  בשלב 3,  $O(|S|^2 \cdot |E|)$  בשלב 4 ו-  $O(1)$  בשלב 5, לכן זמן הריצה הכולל הוא  $O(|V| \cdot |S| + |S| \cdot k + |S|^2 \cdot |E|)$ .  
נשים לב ש-  $|S| \leq |V| \cdot k$  ולכן זמן הריצה של  $M$  הוא  $O(|V| \cdot |V| \cdot k + |V| \cdot k \cdot k + (|V| \cdot k)^2 \cdot |E|)$  וזה פולינומי ב-  $\langle G, k \rangle$ .

נסמן  $L = \{\langle G, k \rangle \# S \mid \langle G, k \rangle \in IS \wedge S \text{ is an independent set of size } k\}$  ועתה נשים לב כי

$$\begin{aligned} \langle G, k \rangle \# S \in \{\langle G, k \rangle \# S \mid \langle G, k \rangle \in IS \wedge S \text{ is an independent set of size } k\} \\ \iff \langle G, k \rangle \in IS \wedge (S \subseteq V) \wedge (|S| = k) \wedge (\forall u, v \in S \rightarrow \{u, v\} \notin E) \\ \stackrel{\text{by definition}}{\iff} (S \subseteq V) \wedge (|S| = k) \wedge (\forall u, v \in S \rightarrow \{u, v\} \notin E) \\ \stackrel{\text{we accept if all the terms are true}}{\iff} \langle G, k \rangle \# S \in L(M) \end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי  $L(M) = L$  וגם  $M$  חשיב בזמן פולינומי ב-  $\langle G, k \rangle$ .  
כלומר הראנו ש-  $L$  מוודא של  $IS$  וגם הראנו שקיימת  $M$  דטרמיניסטית שמכריעה את  $L$  בזמן פולינומי ב-  $\langle G, k \rangle$  ולכן מוודא פולינומי של  $IS$  ולכן  $IS \in NP$

מ.ש.ל.א. ☺

סעיף 2

צ"ל:  $IS \leq_p CLIQUE$

הוכחה:

נבנה רדוקציה  $f(\langle \langle V, E \rangle, k \rangle) = \langle \langle V, \bar{E} \rangle, k \rangle$  כאשר  $\bar{E}$  זה כל הצלעות שאינן ב-  $E$ .

נשים לב ש-  $f$  חשיבה בזמן פולינומי כי הדבר היחיד שהיא צריכה לחשב זה את  $\bar{E}$  וזה לוקח לכל היותר  $O(|V|^2 \cdot |E|)$  (לכל  $V \times V$  נוסף אם לא נמצא ב-  $E$ )

עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}\langle \langle V, E \rangle, k \rangle \in CLIQUE &\iff \exists S \subseteq V \text{ s.t. } (|S| = k) \wedge (\forall u, v \in S \rightarrow \{u, v\} \in E) \\ &\iff \exists S \subseteq V \text{ s.t. } (|S| = k) \wedge (\forall u, v \in S \rightarrow \{u, v\} \notin \overline{E}) \\ &\iff \langle \langle V, E \rangle, k \rangle \in IS \iff f(\langle \langle V, E \rangle, k \rangle) \in IS\end{aligned}$$

כלומר הראנו שקיימת  $f$  חשיבה בזמן פולינומי המקיימת

$$\langle \langle V, E \rangle, k \rangle \in CLIQUE \iff f(\langle \langle V, E \rangle, k \rangle) \in IS$$

ולכן מההגדרה  $IS \leq_p CLIQUE$

מ.ש.ל.ב. ☺