פתרון תרגיל מספר 8 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

3 ביוני 2020

שאלה 2

סעיף 1

צ"ל: $ET_{TM} \leq_m FINITE_{TM}$

הוכחה:

ראינו בתרגיל קודם ש־ $ET_{TM} \in \text{coRE}$ ונסמן מכונה שמזהה את $\overline{ET_{TM}}$ ב־ $\mathcal{M}_{helper}$

נבנה מכונת עזר $\mathcal{M}_M$ באופן הבא:

1. נקבל קלט x
2. נריץ את $\mathcal{M}_{helper}$ על M ונענה כמוה

נסתכל על $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ הבאה: $f(\langle M \rangle) = \langle \mathcal{M}_M \rangle$,

נשים לב ש־ f חשיבה כי היא רק כותבת את הקידוד של $\mathcal{M}_M$ ומקבלת (ניתן לעשות על ידי תיאור של מכונה אוניברסלית)

וגם נשים לב כי:

$$x \in L(\mathcal{M}_M) \iff \langle M \rangle \in \mathcal{M}_{helper} \iff \langle M \rangle \notin ET_{TM}$$

$$\Rightarrow L(\mathcal{M}_M) = \begin{cases} \Sigma^* & \langle M \rangle \notin ET_{TM} \\ \emptyset & \langle M \rangle \in ET_{TM} \end{cases}$$

כלומר $L(\mathcal{M}_M)$ היא סופית אם"ם $M \in ET_{TM}$ (ממעבר על 2 האפשרויות של $M \in ET_{TM}, M \notin ET_{TM}$) ולכן

$$\langle M \rangle \in ET_{TM} \iff L(\mathcal{M}_M) \text{ is finite} \iff L(\mathcal{M}_M) \in FINITE_{TM} \iff f(\langle M \rangle) \in FINITE_{TM}$$

כלומר קיבלנו שקיימת $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ חשיבה כך ש־ $\langle M \rangle \in ET_{TM} \iff f(\langle M \rangle) \in FINITE_{TM}$,

כלומר $\boxed{ET_{TM} \leq_m FINITE_{TM}}$, כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2

צ"ל: $FINITE_{TM} \leq_m REG_{TM}$

הוכחה:

נבנה $\mathcal{M}_M$ באופן הבא:

1. נקבל קלט x
2. אם $x \neq 0^n 1^n$ נדחה
3. נריץ את M במקביל על כל המילים המקיימות שאורכן לפחות $|x|$, ואם M קיבלה אחת מהן, נקבל

נסתכל על $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ הבאה: $f(\langle M\rangle)=\langle\mathcal{M}_M\rangle$,
נשים לב ש־ f חשיבה כי היא רק כותבת את הקידוד של $\mathcal{M}_M$ ומקבלת (ניתן לעשות על ידי תיאור של מכונה אוניברסלית)
וגם נשים לב כי:

1. אם $\langle M\rangle\in FINITE_{TM}$, כלומר $L(M)$ סופית, אז נסמן את אורך המילה הכי ארוכה ב־ N.
יהי $x\in L(\mathcal{M}_M)$, נשים לב שנקבל את x רק אם קיים $w\in\Sigma^*$ כך ש־ $|x|\leq|w|$ וגם M מקבלת את w,
ולכן $|x|\leq|w|\leq N$. כלומר נקבל כי $|L(\mathcal{M}_M)|\leq|\{x\in\Sigma^*\mid|x|\leq N\}|=|\Sigma|^N$.
כלומר $L(\mathcal{M}_M)$ סופית ולכן רגולרית, כלומר $L(\mathcal{M}_M)\in REG_{TM}$
2. אם $\langle M\rangle\notin FINITE_{TM}$, כלומר $L(M)$ אינסופית,
יהי $x\in L(\mathcal{M}_M)$, נשים לב שנקבל את x רק אם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־ $x=0^n1^n$ ולכן $x\in\{0^n1^n\mid n\in\mathbb{N}\}$. כלומר נקבל כי $L(\mathcal{M}_M)\subseteq\{0^n1^n\mid n\in\mathbb{N}\}$.
יהי $x\in\{0^n1^n\mid n\in\mathbb{N}\}$, נשים לב שקיימת מילה $w\in L(M)$ כך ש־ $|x|\leq|w|$ כי $L(M)$ אינסופית.
ולכן לפי אופן פעולת $\mathcal{M}_M$, מתקיים כי $x=0^n1^n$ וגם קיימת מילה $w\in\Sigma^*$ כך ש־ $|x|\leq|w|$ וגם M מקבלת את w, ולכן $\mathcal{M}_M$ תקבל את x. כלומר $x\in L(\mathcal{M}_M)$. כלומר קיבלנו כי $\{0^n1^n\mid n\in\mathbb{N}\}\subseteq L(\mathcal{M}_M)$
כלומר $L(\mathcal{M}_M)=\{0^n1^n\mid n\in\mathbb{N}\}$, כלומר $L(\mathcal{M}_M)\notin REG_{TM}$

כלומר הראנו כי $L(\mathcal{M}_M)\in REG_{TM}\iff\langle M\rangle\in FINITE_{TM}$ ולכן

$$\langle M\rangle\in FINITE_{TM}\iff L(\mathcal{M}_M)\in REG_{TM}\iff f(\langle M\rangle)\in REG_{TM}$$

כלומר קיבלנו שקיימת $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ חשיבה כך ש־ $\langle M\rangle\in FINITE_{TM}\iff f(\langle M\rangle)\in REG_{TM}$,
כלומר $\boxed{FINITE_{TM}\leq_m REG_{TM}}$, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3
צ"ל: $ALL_{TM}\leq_m INFINITE_{TM}$
הוכחה:
נבנה מכונה שמקבלת x ומריצה את כל המילים באורך עד $|x|$ ל־ $|x|$ צעדים ומקבלת אם כולם קיבלו

מ.ש.ל.ג.☺