פתרון תרגיל מספר 3 ־ אלגוריתמים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639, **שם:** גיא לוי, **ת.ז:** 211744636

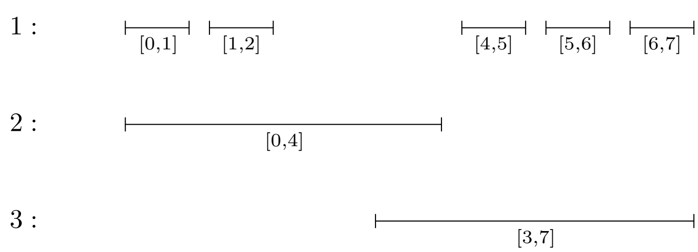
16 בנובמבר 2019

1. **פתרון:**

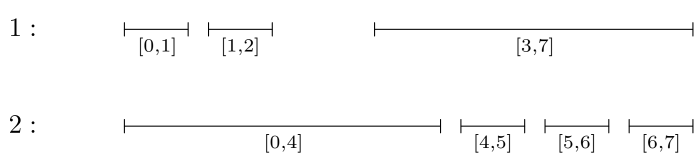
(א) **צ"ל:** האלגוריתם לא אופטימלי

הוכחה:

נסתכל על קבוצת הקטעים $\{[0,1],[1,2],[4,5],[5,6],[6,7],[0,4],[3,7]\}$, החלוקה של לאולמות על־פי האלגוריתם של שרגע תהיה $\{[0,1],[1,2],[4,5],[5,6],[6,7]\}$ באולם 1, $\{[0,4]\}$ באולם 2, $\{[3,7]\}$ באולם 3. נשרטט:



ואילו קיים פתרון במשתמש בלבד בשני אולמות: $\{[0,1],[1,2],[3,7]\}$ באולם 1 ו־ $\{[4,5],[5,6],[6,7],[0,4]\}$ באולם 2. נשרטט:



מ.ש.ל.א.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** האם מטרואיד?

הוכחה:

הקבוצות המוגדרות הן מטרואיד!

נראה שכל תכונות המטרואיד מתקיימות:

i. $|S| \le 2^n$ ולכן S היא קבוצה סופית וגם $\emptyset \in S$ ולכן S לא ריקה. $\square$

ii. **תורשתיות:** יהי $k \in \mathbb{N}$, $A \in I$ ו־ $B \subseteq A$ אזי מתקיים $|B| \le |A| \le k$ וגם $B \subseteq A \subseteq S$, ולכן B מקיים את כל דרישות I ולכן $B \in I$,

כלומר $(\forall A \in I)\,(B \subseteq A \to B \in I)$, לכן $M = \langle S, I\rangle$ מקיים את תכונת התורשתיות כדרוש. $\square$

iii. **החלפה:** יהיו $A, B \in I$ כך ש- $|B| > |A|$.
נשים לב כי $|B| < |A|$, לכן $|B| \leq |A| - 1$ וגם ולכן $A \setminus B \neq \phi$, קרי קיים $a \in A \setminus B$ כלשהו. נשים לב כי

$$|B \cup \{a\}| \leq (|A| - 1) + 1 \leq |A| \leq k$$

וגם מתקיים

$$B \cup \{a\} \subseteq B \cup A \subseteq S$$

ולכן $B \cup \{a\} \in I$, כלומר

$$(\forall A, B \in I)\,(|A| > |B| \to \exists a \in A \setminus B \text{ such that } B \cup \{a\} \in I)$$

ולכן $M = \langle S, I \rangle$ מקיים את תכונת ההחלפה כדרוש. $\square$

מהיות $M = \langle S, I \rangle$ מקיים את כל תכונות המטרואיד, נובע כי M מטרואיד

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם מטרואיד?
הוכחה:
הקבוצות המוגדרות הן לא מטרואיד!
נראה שתכונת ההחלפה לא מתקיימת, נסתכל על $S = \{[0,1], [2,3], [1,5]\}$,
נשים לב כי $B = \{[1,5]\} \in I$ וגם $A = \{[0,1], [2,3]\} \in I$, וגם מתקיים $|A| = 2 \geq 1 = |B|$,
לכן אם תכונת ההחלפה הייתה נכונה, היה קיים קטע $a \in A \setminus B$ כך ש- $B \cup \{a\} \in I$, כלומר a לא נחתך עם אף קטע בB.
אבל מתקיים כי $[0,1]$ וגם $[2,3]$ נחתכים עם $[1,5]$ ולכן לא קיים $a \in A \setminus B$ כך ש$B \cup \{a\} \in I$, כלומר M לא מקיים את תכונת ההחלפה ולכן אינו מטרואיד!

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** האם מטרואיד?
הוכחה:
הקבוצות המוגדרות הן מטרואיד!
נראה שכל תכונות המטרואיד מתקיימות:

i. $|S| \leq 2^n$ ולכן S היא קבוצה סופית וגם $\emptyset \in S$ ולכן S לא ריקה. $\square$

ii. **תורשתיות:** יהיו $A \in I$ ו- $B \subseteq A$ אזי מתקיים $|A \cap C_i| \leq 1$ לכל $1 \leq i \leq k$ וגם $B \subseteq A \subseteq S$.
יהי $1 \leq i \leq k$. ראשית נשים לב כי בהינתן קבוצות X, Y, Z מתקיים

$$X \subseteq Y \Rightarrow X \cap Z \subseteq Y \cap Z$$

שכן כל האיברים שנמצאים ב- $X \cap Z$ נמצאים גם ב- Y ($X \subseteq Y$) וגם ב- Z. מהיות $B \subseteq A$ נסיק:

$$B \cap C_i \subseteq A \cap C_i \Rightarrow |B \cap C_i| \leq |A \cap C_i| = 1$$

uלכן B מקיים את הנדרש לקבוצה ב- I, לכן $B \in I$,
כלומר $(\forall A \in I)\,(B \subseteq A \to B \in I)$, לכן $M = \langle S, I \rangle$ מקיים את תכונת התורשתיות. $\square$

iii. **החלפה:** יהיו $A, B \in I$ כך ש- $|B| > |A|$.
נשים לב כי

$$|B| < |A| = |A \cap S| = \left|A \cap \left(\sqcup_{i=1}^{k} C_i\right)\right| = \left|\sqcup_{i=1}^{k}(A \cap C_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{k} 1 = k$$

לכן קיימת קבוצה C_i כך ש- $|B \cap C_i| = 0$ וגם $|A \cap C_i| = 1$, נסמן ב- $a \in A \cap C_i$ את האיבר המשותף,
נשים לב כי $a \notin B$ אחרת $|B \cap C_i| > 0$, לכן $a \in A \setminus B$ וגם מתקיים

$$B \cup \{a\} \subseteq B \cup A \subseteq S$$

ועתה יהי $1 \leq j \leq n$,

$$|(B \cup \{a\}) \cap C_j| = |(B \cap C_j) \cup (\{a\} \cap C_j)| = \begin{cases} |\emptyset \cup (\{a\} \cap C_j)| & j = i \\ |(B \cap C_j) \cup \emptyset| & j \neq i \end{cases} = \begin{cases} 1 & j = i \\ |(B \cap C_i)| & j \neq i \end{cases}$$
$$\leq \begin{cases} 1 & j = i \\ 1 & j \neq i \end{cases} = 1$$

ולכן $B \cup \{a\} \in I$, כלומר

$$(\forall A, B \in I)\,(|A| > |B| \to \exists a \in A \setminus B \text{ such that } B \cup \{a\} \in I)$$

ולכן $M = \langle S, I\rangle$ מקיים את תכונת ההחלפה. □

מהיות $M = \langle S, I\rangle$ מקיים את כל תכונות המטרואיד, נובע כי M מטרואיד

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** האם מטרואיד?

הוכחה:

הקבוצות המוגדרות הן לא מטרואיד!

נראה שתכונת ההחלפה לא מתקיימת, נסתכל על $L = \{0,1\}\,, R = \{2,3\}\,, E = \{(0,2)\,, (1,2)\,, (1,3)\}$

נשים לב כי $B = \{(1,2)\} \in I$ וגם $A = \{[0,2]\,, [1,3]\} \in I$, וגם מתקיים $|A| = 2 \geq 1 = |B|$,

לכן אם תכונת ההחלפה הייתה נכונה, היה קיים קטע $a \in A \setminus B$ כך ש־ $B \cup \{a\} \in I$, כלומר $B \cup \{a\}$ הוא שידוך,

אבל מתקיים כי $\{[0,2]\,, [1,2]\}$ וגם $\{[1,2]\,, [1,3]\}$ הם לא שידוכים חוקיים ולכן לא קיים $a \in A \setminus B$ כך ש־ $B \cup \{a\} \in I$,

כלומר M לא מקיים את תכונת ההחלפה ולכן אינו מטרואיד!

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** האם מטרואיד?

הוכחה:

הקבוצות המוגדרות הן מטרואיד!

נראה שכל תכונות המטרואיד מתקיימות:

i. $|S| \leq |E|$ ולכן S היא קבוצה סופית וגם $\emptyset \in S$ ולכן S לא ריקה. □

ii. **תורשתיות:** יהיו $A \in I$ ו־ $B \subseteq A$ אזי מתקיים $(V, E \setminus A)$ הוא קשיר.
$B \subseteq A$ ולכן $E \setminus A \subseteq E \setminus B$, ומהיות $(V, E \setminus A)$ הוא קשיר, מתקיים כי $(V, E \setminus B)$ הוא גם קשיר,
לכן B מקיים את הנדרש לקבוצה ב־ I, לכן $B \in I$,
כלומר $(\forall A \in I)\,(B \subseteq A \to B \in I)$, לכן $M = \langle S, I\rangle$ מקיים את תכונת התורשתיות. □

iii. **החלפה:** יהיו $A, B \in I$ כך ש־ $|A| > |B|$.
נגדיר כמו ברמז $G_A = \langle V, E \setminus A\rangle$, $G_B = \langle V, E \setminus B\rangle$ ו־ $G_{AB} = \langle V, E \setminus (A \cup B)\rangle$,
נחלק ל־ 2 מקרים:

א'. אם G_{AB} קשיר: אז $\exists a \in A \setminus B$, ונשים לב כי $(V, E \setminus (A \cup B))$ קשיר וגם $E \setminus (A \cup B) \subseteq E \setminus (\{a\} \cup B)$,
ולכן גם $(V, E \setminus (\{a\} \cup B))$ קשיר ולכן $B \cup \{a\} \in I$ כנדרש.

ב'. אם G_{AB} לא קשיר: נסמן ב־ $n > 1$ את מספר רכיבי הקשירות של G_{AB},
נוכל להוסיף $n - 1$ צלעות מ־ G_A ל־ G_{AB} כדי שG_{AB} יהיה קשיר (קיימות צלעות כאלו בגלל שG_A קשיר),
נוריד מ־ G_A את כל הצלעות שנמצאות ב־ G_{AB} ואת ה־ $n-1$ צלעות שהוספנו כדי שG_{AB} יהיה קשיר, ונסמן גרף זה ב$G_{A'}$
נעשה תהליך דומה על G_B, נוריד את הצלעות המשותפות ו־ $n - 1$ צלעות מ־ G_B שאם נוסיף אותם לG_{AB} אז G_{AB} יהיה קשיר ונסמן גרף זה ב־ $G_{B'}$.
עתה נשים לב כי ב־ G_B יש יותר צלעות מב־ G_A כי $|E \setminus A| \leq |E \setminus B|$ ומהיות הורדנו אותה כמות של צלעות מ־ G_A ומ־ G_B אז יש ב־ $G_{B'}$ יש יותר צלעות מב־ $G_{A'}$.
כלומר יש צלע $a \in G_{B'}$ כך ש $a \notin G_{A'}$. ומהיות $a \in G_{B'}$ וגם $a \notin G_{A'}$ מתקיים כי $a \in A \setminus B$
נשים לב שאם נוריד את a מגרף G_B הגרף עדיין יהיה קשיר כי הוא יכיל את G_{AB} ואת ה־ $n - 1$ צלעות החסרות כדי שG_{AB} יהיה קשיר.
כלומר הגרף $G' = \langle V, E \setminus (B \cup \{a\})\rangle$ קשיר, כלומר $B \cup \{a\} \in I$

ולכן $B\cup\{a\}\in I$, כלומר

$$(\forall A,B\in I)\left(|A|>|B|\rightarrow\exists a\in A\setminus B \text{ such that } B\cup\{a\}\in I\right)$$

ולכן $M=\langle S,I\rangle$ מקיים את תכונת ההחלפה. $\square$

מהיות $M=\langle S,I\rangle$ מקיים את כל תכונות המטרואיד, נובע כי M מטרואיד

מ.ש.ל.ה.☺

3. **צ"ל:** להראות שבעיה א' היא מקרה פרטי של בעיה ב'

הוכחה:

נעשה כמו בהדרכה. יהי $G=\langle V,E\rangle$, לכל $e=(i,j)\in E$ נתאים וקטור $v_e=e_i+e_j$ (כאשר $e_1,\ldots,e_n$ הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{Z}_2^n$),

נראה שקבוצת הצלעות היא מכילה מעגלים אם"ם קבוצת הוקטורים המתאימה היא ת"ל:

(א) תחילה נראה שהוקטורים המתאימים הם תלוים לינארית אם יש מעגל בגרף:
אם בגרף G יש מעגל, אז יש גם מעגל פשוט שכל קודקוד מופיע 0 או 2 פעמים במעגל.
עתה נשים לב כי

$$\sum_{e\in E}v_e=\sum_{e\in\text{not in circle}}0+\sum_{e\in\text{in circle}}v_e=\sum_{e\in\text{in circle}}e_i+e_j$$
$$\overset{\text{everything appears twice}}{=}\sum_{e\in\text{in circle}}2\cdot e_i=\sum_{e\in\text{in circle}}0=0$$

(כאשר אי השוויון הלפני אחרון נובע מהיות המרחב הוקטורי מעל $\mathbb{Z}_2$) כלומר הראנו שאם יש מעגל אז הוקטורים הם ת"ל כדרוש. $\square$

(ב) עתה נראה שיש מעגל אם הוקטורים המתאימים הם תלוים לינארית:
קיים צירוף לינארי כלשהו של וקטורים $v_1+\cdots+v_k=0$,
נשים לב שכל קודקוד משתתף מספר זוגי של פעמים בסכום בשביל שהסכום יתאפס, כלומר דרגת כל קודקוד היא זוגית (ביחס לצלעות המופיעות בסכום).
מכיוון שקבוצת הוקטורים $v_1,\ldots,v_k$ לא ריקה, נוכל לבחור קודקוד אחד שמקבל את הערך 1 לפחות באחד הוקטורים, נתחיל לטייל על הצלעות מאלה שמופיעות בסכום, מהיות ויש דרגה זוגית לכל קודקוד, נתקע רק כאשר נגיע לקודקוד שהיינו בו כבר (אחרת בשלילה נכנסנו לקודקוד שלא הגענו אליו לפני כן בלי לצאת ממנו ולכן דרגתו 1 בסתירה למסקנה שלנו). היות ויש מספר סופי של צלעות ואנחנו עוצרים רק כשנחזור לקודקוד שכבר היינו בו, נקבל כי סגרנו מעגל.
ולכן אם הוקטורים המתאימים הם תלוים לינארית יש מעגל כדרוש. $\square$

לכן ראינו כי הוקטורים הם ת"ל אם"ם יש מעגל בגרף, כלומר הוקטורים הם בת"ל אם"ם אין מעגל בגרף.
לכן אם נריץ את האלגוריתם של הוקטורים על הוקטורים v_e שיצרנו, נקבל את מספר הוקטורים בת"ל שהם עם ערך מקסימלי, כלומר ממה שראינו זה מספר הצלעות עם הערכים המקסימליים שלא יוצאים מעגל.

מ.ש.ל.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** להציע אלגוריתם חמדן גנרי למינימליות
הוכחה:

i. **נאתחל:** $A=\emptyset$ **(הפתרון שיוחזר)**

ii. **נמיין את איברי** S **בסדר עולה חלש**

iii. **לפי הסדר שקיבלנו נבצע את הלולאה הבאה:**
לכל $(x\in S)$: **אם** $A\cup\{x\}\in I$ **אז נעדכן את** $A=A\cup\{x\}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** להוכיח נכונות אלגוריתם בסעיף הקודם
הוכחה:
נסמן $W=\max_{s\in S}w\left(s\right)$,
נגדיר פונקצית משקל חדשה, $\boxed{w'\left(i\right)=W-w\left(i\right)}$,
עתה נפעיל את w' על האלגוריתם החמדן הגנרי למקסימליות,
נשים לב שהאלגוריתם בוחר את אותם איברים כמו בסעיף א' ובאותו הסדר, נסמן פתרון זה בA,
מנכונות האלגוריתם החמדן הגנרי למקסימליות, הקבוצה המוחזרת היא עם גודל מקסימלי וגם $\sum_{s\in A}w'\left(s\right)$, לכן A היא מגודל מקסימלי.
עתה נניח בשלילה שהפתרון שהאלגוריתם הגנרי למינימליות אינו מינימלי, כלומר קיימת קבוצה $B\in I$ מגודל מקסימלי המקיימת $w\left(A\right)>w\left(B\right)$, לכן

$$\begin{aligned}w'\left(A\right) & =\sum_{s\in A}w'\left(s\right)=\sum_{s\in A}\left(W-w\left(s\right)\right)=W\cdot\left|A\right|-\sum_{s\in A}w\left(s\right)=W\cdot\left|A\right|-w\left(A\right)\\
 & <W\cdot\left|A\right|-w\left(B\right)=W\cdot\left|B\right|-w\left(B\right)=W\cdot\left|B\right|-\sum_{s\in B}w\left(s\right)=\sum_{s\in B}\left(W-w\left(s\right)\right)\\
 & =\sum_{s\in B}w'\left(s\right)=w'\left(B\right)
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו שקבוצה B היא מגודל מקסימלי וגם $w'\left(A\right)<w'\left(B\right)$ בסתירה לכך ש־ A הוא פתרון האלגוריתם החמדן הגנרי למקסימליות.
לכן קיבלנו כי $w\left(A\right)$ הוא מינימלי וגם A מגודל מקסימלי כנדרש, ולכן האלגוריתם בסעיף הקודם הוא אופטימלי.

מ.ש.ל.ב.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** הצעה לפונקצית משקל, S,I ולהוכיח ש־ $\left(S,I\right)$ הוא מטרואיד אם לא הוכח.
הוכחה:
קבוצת האיברים המתאימה לשאלה הזאת: $\boxed{S=\left[n\right]}$,
כל הפתרונות הם בגודל k לכל היותר, לכן $\boxed{I=\left\{ A\subseteq S\mid\left|A\right|\leq k\right\} }$ (ראינו שזה מטרואיד ב2א),
ופונקצית המשקל היא

$$\boxed{w\left(i\right)=80-\left|80-g_{i}\right|}$$

נשים לב ש־ w היא פונקציה אי שלילית שנותנת יותר משקל ככל שקרובים יותר ל־ 80, כמו הרצוי בשאלה

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** הצעה לפונקצית משקל, S,I ולהוכיח ש־ $\left(S,I\right)$ הוא מטרואיד אם לא הוכח.
הוכחה:
קבוצת האיברים המתאימה לשאלה הזאת: $\boxed{S=\left[n\right]}$,
כל הפתרונות הם כאלה שמכילים לכל היותר דרדס אחד מכל סוג, נסמן בC_i את הקבוצה ה־ i של הדרדסים, אזי

$$\boxed{I=\left\{ A\subseteq S\mid1\leq i\leq5,\left|A\cap C_{i}\right|\leq1\right\} }$$

ראינו שזה מטרואיד ב2ג,
ופונקצית המשקל היא

$$\boxed{w\left(i\right)=m_{i}}$$

נשים לב ש־ w היא פונקציה אי שלילית שנותנת יותר משקל ככל שמנת המשכל שלו יותר גדולה.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** הצעה לפונקצית משקל, S,I ולהוכיח ש־ (S,I) הוא מטרואיד אם לא הוכח.
הוכחה:
נגדיר קבוצת צלעות

$$E=(l_i,r)\,\forall 1\leq i\leq m, r\in R_i$$

ונגדיר גרף $G=(L,R,E)$ דו־צדדי. קבוצת האיברים המתאימה לשאלה הזאת: $\boxed{S=L}$,
כל הפתרונות הם כאלה שמכילים התאמה חד חד ערכית בין סטודנטים לעבודות, אזי

$$\boxed{I=\{L'\subseteq L\mid \exists R'\subseteq R,\exists\pi:L'\to R' \text{ such that } \pi \text{ is a perfect matching for } (L',R')\}}$$

ראינו בתרגול שזה מטרואיד,
ופונקצית המשקל היא

$$\boxed{w\left(i\right)=c_i}$$

נשים לב ש־ w היא פונקציה אי שלילית שנותנת יותר משקל ככל שדרישת השכר של האדם גדולות יותר וכן שההתאמות הן תת־קבוצה של קבוצת הצלעות ־ ולכן תנאי החוקיות גם כן נשמרים.

מ.ש.ל.ג.☺