# פתרון תרגיל מספר 9 - תורת המשחקים

**שם:** מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

13 ביוני 2021

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** למצוא N.E

**הוכחה:**

שני השחקנים עם אסטרטגיות טהורות:

נשים לב שאם 2 השחקנים משחקים 1 הם מרוויחים 2 ואף אחד לא ירצה להחליף.

נשים לב שאם 2 השחקנים משחקים 2 הם מרוויחים 1 ואף אחד לא ירצה להחליף.

במקרה והם משחקים אסטרטגיות שונות אז כל אחד ירצה להחליף לאסטרטגיה של השני.

השחקן הראשון משחק טהור והשני משחק עם אסטרטגיה מעורבת ממש:

נשים לב שהשחקן השני ירצה לשחק את האסטרטגיה הטהורה של השחקן הראשון כי זה ימקסם את רווחו ולכן הוא לא indifferent לאסטרטגיות ולכן אין $N.E$ במצב כזה.

באופן סימטרי אין מצב שהשחקן הראשון משחק מעורב והשני משחק טהור.

נניח ששני השחקנים משחקים אסטרטגיה מעורבת ונסמן אותם ב- $\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}$.

ממשפט ה- $indifferent$ מתקיים

$$2q = u_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}\right) = u_1\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}\right) = 1-q \implies \boxed{q = \frac{1}{3}}$$

$$2p = u_2\left(\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = u_2\left(\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1-p \implies \boxed{p = \frac{1}{3}}$$

ולכן ה- $N.E$ במקרה זה הוא האסטרטגיה $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ל- 2 השחקנים.

כלומר ה- $N.E$ הם $\boxed{e_1, e_1}$, $\boxed{e_2, e_2}$ ו- $\boxed{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** למצוא N.E

**הוכחה:**

שני השחקנים עם אסטרטגיות טהורות:

נשים לב שבנקודה $e_2, e_2$ אף אחד מהשחקנים לא יירצה להחליף כי אם הראשון יחליף הרווח שלו יירד מ- 1 ל- 0 וכנ"ל לשני.

ולכן $e_2, e_1$ ו- $e_1, e_2$ הם לא $N.E$.

נשים לב שמהנקודה $e_1, e_1$ השחקן הראשון יירצה להחליף ל- $e_2, e_1$.

ולכן גם $e_1, e_1$ הוא לא $N.E$.

ולכן ה- $N.E$ היחיד בטהורות הוא $(e_2, e_2)$.

השחקן הראשון משחק טהור והשני משחק עם אסטרטגיה מעורבת ממש:
נשים לב שהשחקן השני הוא לא indifferent לאסטרטגיות ולכן אין $N.E$ במצב כזה.

באופן סימטרי אין מצב שהשחקן הראשון משחק מעורב והשני משחק טהור.

נניח ששני השחקנים משחקים אסטרטגיה מעורבת ונסמן אותם ב־ $\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}$.
ממשפט ה־ $indifferent$ מתקיים

$$2q = u_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}\right) = u_1\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}\right) = 3q + (1-q) \implies \text{no solution}$$

כלומר אין פתרון כששני השחקנים משחקים אסטרטגיה מעורבת!

כלומר ה־ $N.E$ הם $\boxed{(0,1),(0,1)}$.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** למצוא N.E
**הוכחה:**
שני השחקנים עם אסטרטגיות טהורות:
נשים לב שבנקודה $e_1, e_1$ אף אחד מהשחקנים לא רוצה להחליף אסטרטגיה.
ולכן $(e_1,e_2),(e_1,e_3),(e_2,e_1)$ הם לא $N.E$.
נשים לב שבנקודה $(e_2,e_2)$ אף אחד מהשחקנים לא רוצה להחליף אסטרטגיה.
ולכן $(e_2,e_3)$ הוא לא $N.E$.

השחקן הראשון משחק טהור והשני משחק עם אסטרטגיה מעורבת ממש:
נשים לב שהשחקן השני הוא לא indifferent לאסטרטגיות ולכן אין $N.E$ במצב כזה.

השחקן הראשון משחק מעורב ממש והשני משחק עם אסטרטגיה טהור: נסמן את האסטרטגיה של השחקן הראשון ב־ $\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}$

i. אם השחקן השני בוחר את העמודה הראשונה אז נרצה שיתקיים

$$2p + 12(1-p) = u_2\left(\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, e_2\right) \le u_2\left(\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, e_1\right) = 8p + 4(1-p) = 1 \implies \boxed{\frac{8}{14} = \frac{4}{7} \le p}$$

$$3(1-p) = u_2\left(\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, e_3\right) \le u_2\left(\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, e_1\right) = 8p + 4(1-p) = 1 \implies \boxed{-\frac{1}{7} \le p}$$

כלומר קיבלנו שלכל $\frac{4}{7} \le p < 1$ מתקיים ש־ $\left(\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, e_1\right)$ היא $N.E$

ii. אם השחקן השני בוחר את העמודה השנייה או השלישית אז השחקן הראשון הוא לא indifferent לאסטרטגיות ולכן אין $N.E$ במצב כזה

נניח ששני השחקנים משחקים אסטרטגיה מעורבת והשחקן השני מערבב רק 2 אסטרטגיות:

i. נסמן את האסטרטגיה של השחקן השני ב־ $\begin{bmatrix} q \\ 1-q \\ 0 \end{bmatrix}$. במקרה זה, השחקן הראשון יבחר את השורה השנייה באופן טהור ולא יעשה אסטרטגיה מעורבת (כי ככה ירוויח יותר בגלל שזאת אסטרטגיה שולטת).

ii. נסמן את האסטרטגיה של השחקן השני ב־ $\begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 1-q \end{bmatrix}$. לפי ממשפט ה־ $indifferent$ מתקיים

$$q = u_1\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}q\\0\\1-q\end{bmatrix}\right) = u_1\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}q\\0\\1-q\end{bmatrix}\right) = -8q+9 \implies \boxed{q=1}$$

נשים לב שהנחנו שהאסטרטגיה מעורבת ממש וקיבלנו $1 \leq q$ שאומר שאין $N.E$ במצב כזה

iii. נסמן את האסטרטגיה של השחקן השני ב־ $\begin{bmatrix} 0 \\ q \\ 1-q \end{bmatrix}$. לפי ממשפט ה־ $indifferent$ מתקיים

$$q = u_1\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\q\\1-q\end{bmatrix}\right) = u_1\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\q\\1-q\end{bmatrix}\right) = -7q+9 \implies \boxed{q=\frac{9}{8}}$$

נשים לב שהנחנו שהאסטרטגיה מעורבת ממש וקיבלנו $1 \leq \frac{9}{8} \leq q$ שאומר שאין $N.E$ במצב כזה

נניח ששני השחקנים משחקים אסטרטגיה מעורבת והשחקן השני מערבב את כל האסטרטגיות:
נשים לב שהעמודה השנייה שולטת חזק על האחרונה לשחקן השני ולכן הוא לא יערב אותה באסטרטגיה שלו.

כלומר ה־ $N.E$ היחיד שיצאו הם $\boxed{(e_2,e_2)}$, $\boxed{(e_1,e_1)}$, ולכל $\frac{4}{7} \leq p < 1$, $\boxed{\left(\begin{bmatrix}p\\1-p\end{bmatrix}, e_1\right)}$.

מ.ש.ל.ג.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $x^*, y^*$ הן אסטרטגיות אופטימליות

**הוכחה:**

$\Leftarrow$: נניח $x^*, y^*$ הם $N.E$ ונוכיח שהם אופטימליים.
יהיו $x, y$ אסטרטגיות אופטימליות.
נניח בשלילה ש־ $x^*$ אינה אסטרטגיה אופטימלית,
כלומר $u_1(x,y) > u_1(x^*,y)$.
נחלק ל־ 2 מקרים:

i. אם $u_1(x,y) \leq u_1(x^*,y^*)$ אז מהיות $x^*$ לא אופטימלי, מתקיים

$$\min_{y'} u_1(x^*,y') < u_1(x,y) \leq u_1(x^*,y^*)$$

נסמן $y' = \text{argmin}_{y'} u_1(x^*,y')$, נשים לב כי

$$u_2(x^*,y') = -u_1(x^*,y') > -u_1(x,y) \geq -u_1(x^*,y^*) = u_2(x^*,y^*)$$

בסתירה לכך שזה $N.E$ כי לשחקן השני יש אסטרטגיה יותר טובה שהיא לבחור את $y'$.

ii. אחרת $u_1(x^*,y^*) < u_1(x,y)$, אז מתקיים

$$u_1(x^*,y^*) < u_1(x,y)$$

מהיות $x$ ו־ $y$ אופטימליים מתקיים כי $u_1(x,y) \leq u_1(x,y')$ לכל $y'$.
לכן

$$u_1(x^*,y^*) < u_1(x,y) \overset{y'=y^*}{\leq} u_1(x,y^*)$$

בסתירה לכך שזה $N.E$ כי לשחקן הראשון יש אסטרטגיה יותר טובה שהיא לבחור את $x$.

כלומר קיבלנו ש־ $x^*$ חייב להיות אופטימלי, ובאופן סימטרי נקבל ש־ $y^*$ חייב להיות אופטימלי.
$\Rightarrow$: נניח ש־ $x^*, y^*$ אופטימליים ונוכיח שהם $N.E$.
נסמן את ערך המשחק ב־ $V$. נזכר כי $\left(x^*\right)^T \cdot A \cdot y^* = V$. נניח ש־ $x^*, y^*$ לא $N.E$:

i. אם לשחקן הראשון יש אסטרטגיה טובה יותר $x$ אז מתקיים

$$x^T \cdot A \cdot y^* > \left(x^*\right)^T \cdot A \cdot y^* \geq V$$

עתה מאופטימליות $y^*$ מתקיים כי לכל $x'$ ש־ $x'^T \cdot A \cdot y^* \leq V$ אבל מצאנו $x$ שעבורו מתקיים $x^T \cdot A \cdot y^* > V$ בסתירה לאופטימליות של $y^*$.

ii. אם לשחקן השני יש אסטרטגיה טובה יותר $y$.
אסטרטגיה יותר טובה לשחקן השני היא בהכרח פחות טובה לשחקן הראשון מהיות והמשחק הוא סכום 0 אז מתקיים

$$\left(x^*\right)^T \cdot A \cdot y < \left(x^*\right)^T \cdot A \cdot y^* \leq V$$

עתה מאופטימליות $x^*$ מתקיים כי לכל $y'$ ש־ $\left(x^*\right)^T \cdot A \cdot y' \geq V$ אבל מצאנו $y$ שעבורו מתקיים $\left(x^*\right)^T \cdot A \cdot y > V$ בסתירה לאופטימליות של $y^*$.

מ.ש.ל.א.☺

3. **צ"ל:** מטריצה ו־ $N.E$
**הוכחה:**
נניח שלכל אדם יש שקל, לכן בכל חוף יום יש 10 שקל ולכן המטריצה היא

$$\begin{bmatrix} (50,50) & (10,90) & (15,85) & (20,80) & (25,75) & (30,70) & (35,65) & (40,60) & (45,55) & (50,50) \\ (90,10) & (50,50) & (20,80) & (25,75) & (30,70) & (35,65) & (40,60) & (45,55) & (50,50) & (55,45) \\ (85,15) & (80,20) & (50,50) & (30,70) & (35,65) & (40,60) & (45,55) & (50,50) & (55,45) & (60,40) \\ (80,20) & (75,25) & (70,30) & (50,50) & (40,60) & (45,55) & (50,50) & (55,45) & (60,40) & (65,35) \\ (75,25) & (70,30) & (65,35) & (60,40) & (50,50) & (50,50) & (55,45) & (60,40) & (65,35) & (70,30) \\ (70,30) & (65,35) & (60,40) & (55,45) & (50,50) & (50,50) & (60,40) & (65,35) & (70,30) & (75,25) \\ (65,35) & (60,40) & (55,45) & (50,50) & (45,55) & (40,60) & (50,50) & (70,30) & (75,25) & (80,20) \\ (60,40) & (55,45) & (50,50) & (45,55) & (40,60) & (35,65) & (35,65) & (50,50) & (80,20) & (85,15) \\ (55,45) & (50,50) & (45,55) & (40,60) & (35,65) & (30,70) & (25,75) & (20,80) & (50,50) & (90,10) \\ (50,50) & (45,55) & (40,60) & (35,65) & (30,70) & (25,75) & (20,80) & (15,85) & (10,90) & (50,50) \end{bmatrix}$$

נשים לב שבכל משבצת האיברים נסכמים ל־ 100 ולכן בהינתן המטריצה של השחקן הראשון $A$, המטריצה של השחקן השני היא $100 - A$ ולכן נוכל לפשט מעט את המטריצה ונקבל:

$$A = 50 + 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 0 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

נסמן את המטריצה המוכפלת ב־ 5 ב־ $\hat{A}$, עתה המטריצה של השחקן השני תהיה

$$100 - \left(50 + 5 \cdot \hat{A}\right) = 50 - 5 \cdot \hat{A} = 50 + 5 \cdot \left(-\hat{A}\right)$$

עתה מהיות הוספת קבוע 50 משפיע באותה צורה על כל אסטרטגיה ולא משנה את הפתרון של האי שוויון ולכן לא משנה את ה־ $N.E$, נוכל להסתכל על מטריצות המשחק $5 \cdot \hat{A}, -5 \cdot \hat{A}$.

באופן דומה נשים לב שהכפלה בקבוע חיובי (5) משפיע באותה צורה על כל אסטרטגיה ולא משנה את הפתרון של האי שוויון (ואת ערך המשחק כי הוא 0) ולכן לא משנה את ה־ $N.E$, נוכל להסתכל על מטריצות המשחק $\hat{A}, -\hat{A}$.
נשים לב שסכום המטריצות הוא 0 בכל נקודה ולכן זה משחק סכום 0.
וגם נשים לב כי $\hat{A} = -\hat{A}^T$ ולכן ערך המשחק הוא 0.
נשים לב שהשורה החמישית שולטת על השורה הראשונה ונשאר עם המטריצה

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 0 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

נשים לב שהעמודה החמישית שולטת על העמודה הראשונה והשנייה ונשאר עם המטריצה

$$\begin{bmatrix} -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & 0 & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

נשים לב שהשורה החמישית שולטת על העמודה הראשונה והשנייה ונשאר עם המטריצה

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

נשים לב שהעמודה השלישית שולטת על 2 העמודות האחרונות ונשאר עם המטריצה

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

נשים לב שהשורה הרביעית שולטת על 2 השורות האחרונות ועל השורה הראשונה ונשאר עם המטריצה

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

נשים לב שהעמודה השלישית שולטת על 2 העמודות הראשונות והאחרונות ונשאר עם

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

נשים לב שהשורה השנייה שולטת על השורה הראשונה והאחרונה ונשאר עם

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כלומר כל ה־ $N.E$ יהיו בבחירה של חופים $5,6$ במקור (וכל קומבינציה של בחירה של $5-6$).

מ.ש.ל.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** מטריצה

**הוכחה:**

מהנתון, אם שניהם לובשים מסיכה, שניהם מפסידים $-1$.

אם אחד לובש מסיכה והשני לא, זה שלבש מפסיד $-11$ בזמן שזה שלא לבש מפסיד $0$.

ואם שניהם לא לבשו, שניהם מפסידים $-10$.

ולכן המטריצה היא $\begin{bmatrix} (-1,-1) & (-11,0) \\ (0,-11) & (-10,-10) \end{bmatrix}$,

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $N.E$

**הוכחה:**

נשים לב שהשורה השורה שולטת על הראשונה עבור השחקן הראשון ולכן נשאר עם

$$\begin{bmatrix} (0,-11) & (-10,-10) \end{bmatrix}$$

נשים לב שהעמודה השנייה שולטת על הראשונה ולכן נשאר עם $(-10,-10)$, כלומר שניהם לא לובשים מסיכה, לצערנו זה לא אופטימלי כי זה מעלה את חולי הקורונה ומעלה את מספר הסגרים בארץ.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** מטריצה

**הוכחה:**

מהנתון, אם שניהם לובשים מסיכה, שניהם מפסידים $-1$.

אם אחד לובש מסיכה והשני לא, זה שלבש מפסיד $-11$ בזמן שזה שלא לבש מפסיד $-100$.

ואם שניהם לא לבשו, שניהם מפסידים $-10$.

ולכן המטריצה היא $\begin{bmatrix} (-1,-1) & (-11,-100) \\ (-100,-11) & (-10,-10) \end{bmatrix}$,

נשים לב שאם שניהם משחקים אסטרטגיות טהורות אז ה־ $N.E$ הם $(e_1,e_1),(e_2,e_2)$.

אם אחד משחק טהור והשני מעורב, אז המעורב הוא לא $indifferent$ ולכן ישחק טהור.

נניח ששניהם משחקים מעורב ונסמן את האסטרטגיות ב־ $\begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}$, לכן ממשפט ה־ $indifferent$ מתקיים

$$10q-11 = u_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}\right) = u_1\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}\right) = -90q-10 \implies \boxed{q = \frac{1}{100}}$$

וגם

$$10p-11 = u_2\left(\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = u_2\left(\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -90p-10 \implies \boxed{p = \frac{1}{100}}$$

כלומר קיבלנו שה־ $N.E$ הוא כאשר $(e_1,e_1),(e_2,e_2),([0.01,0.99],[0.01,0.99])$.

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** מטריצה

**הוכחה:**

מהנתון, אם שניהם לובשים מסיכה, שניהם מפסידים $-1$.

אם אחד לובש מסיכה והשני לא, זה שלבש מפסיד $-11$ בזמן שזה שלא לבש מפסיד $-100$.

ואם שניהם לא לבשו, שניהם מפסידים $(-100)+-10$.

ולכן המטריצה היא $\begin{bmatrix} (-1,-1) & (-11,-100) \\ (-100,-11) & (-110,-110) \end{bmatrix}$,

נשים לב שהשורה הראשונה שולטת על השנייה ולכן נשאר עם

$$\begin{bmatrix} (-1,-1) & (-11,-100) \end{bmatrix}$$

נשים לב שהעמודה הראשונה שולטת על השנייה ולכן נשאר עם

$$\begin{bmatrix} (-1,-1) \end{bmatrix}$$

כלומר קיבלנו שה־ $N.E$ הוא כאשר $(e_1,e_1)$ וזה כשכולם לובשים מסיכות כמו שרצינו :)

מ.ש.ל.ד.☺