פתרון תרגיל מספר 5 ־ כלים מתמטיים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

25 בנובמבר 2020

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^{*}y\rangle$ לכל x,y

הוכחה:

יהיו $x,y\in\mathbb{C}^{n}$, אזי קיימים $b_1,\dots,b_n,c_1,\dots,c_n\in\mathbb{C}$ כך ש־ $x=\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot e_i, y=\sum_{i=1}^{m}c_i\cdot e_i$.
נסמן $[A]_{i,j}=a_{i,j}$, נסמן את עמודות A ב־ a_i, נסמן $[A^{*}]_{i,j}=a^{*}_{i,j}$ ואת עמודות A^{*} ב־ a^{*}_i. נשים לב כי

$$\begin{aligned}\langle Ax,y\rangle&=\left\langle A\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot e_i,y\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot(A\cdot e_i),y\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot a_i,y\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot\left\langle a_i,\sum_{j=1}^{n}c_j\cdot e_j\right\rangle\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{c_j}\cdot b_i\cdot\langle a_i,e_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{c_j}\cdot b_i\cdot a_{i,j}\end{aligned}$$

וגם כי

$$\begin{aligned}\langle x,A^{*}y\rangle&=\left\langle x,A^{*}\cdot\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot e_i\right\rangle=\left\langle x,\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot(A^{*}\cdot e_i)\right\rangle=\left\langle x,\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot a^{*}_i\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\overline{c_i}\cdot\left\langle\sum_{j=1}^{n}b_j\cdot e_j,a^{*}_i\right\rangle\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_j\cdot\overline{c_i}\cdot\langle e_j,a^{*}_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_j\cdot\overline{c_i}\cdot\overline{a^{*}_{i,j}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_i\cdot\overline{c_j}\cdot\overline{a^{*}_{j,i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_i\cdot\overline{c_j}\cdot\overline{(\overline{a_{i,j}})}\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{c_j}\cdot b_i\cdot a_{i,j}=\langle Ax,y\rangle\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^{*}y\rangle}$, ולכן $\boxed{\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^{*}y\rangle}$ לכל $x,y\in\mathbb{C}^{n}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **פתרון:**

i. **צ"ל:** $\lambda\in\mathbb{R}$

הוכחה:

נסמן ב־ v את הוקטור העצמי של λ, נשים לב כי

$$\lambda\cdot\|v\|^{2}=\lambda\cdot\langle v,v\rangle=\langle\lambda v,v\rangle=\langle Av,v\rangle=\langle v,A^{*}v\rangle=\langle v,\lambda v\rangle=\overline{\lambda}\cdot\langle v,v\rangle=\overline{\lambda}\cdot\|v\|^{2}$$

מהיות $v\neq 0$ (בגלל שהוא וקטור עצמי) אז $\|v\|^{2}\neq 0$ ונוכל לחלק בו ולקבל כי $\lambda=\overline{\lambda}$,
נשים לב ש־ $z=\overline{z}$ רק כאשר $z\in\mathbb{R}$ ומפה נסיק כי $\lambda\in\mathbb{R}$, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.1.☺

ii. **צ"ל:** $\langle u_1, u_2\rangle = 0$
הוכחה:

$$\lambda_1 \cdot \langle u_1, u_2\rangle = \langle \lambda_1 \cdot u_1, u_2\rangle = \langle A \cdot u_1, u_2\rangle = \langle u_1, A^* u_2\rangle = \langle u_1, Au_2\rangle = \langle u_1, \lambda_2 u_2\rangle = \overline{\lambda_2} \cdot \langle u_1, u_2\rangle$$

עתה נזכר כי $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ לפי הסעיף הקודם ולכן $\lambda_2 = \overline{\lambda_2}$ ולכן נקבל כי

$$\lambda_1 \cdot \langle u_1, u_2\rangle = \overline{\lambda_2} \cdot \langle u_1, u_2\rangle \implies (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \langle u_1, u_2\rangle = 0 \overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\implies} \langle u_1, u_2\rangle = 0$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\langle u_1, u_2\rangle = 0}$, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.2.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\lim_{t\to\infty} \frac{x^T \cdot A^{2t+1} \cdot x}{\|A^t \cdot x\|^2}$
הוכחה:
מהיות $u_1, \ldots, u_n$ בסיס אורתונורמלי, נוכל לכתוב את x בצורה הבאה $x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle \cdot u_i$.
עתה נוכיח באינדוקציה כי $A^t \cdot x = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t \cdot \langle x, u_i\rangle \cdot u_i$.
<u>בסיס:</u> $t = 0$, נשים לב כי $A^0 \cdot x = I_n \cdot x = x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle \cdot u_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^0 \cdot \langle x, u_i\rangle \cdot u_i$, כנדרש.
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל- $t-1$ ונוכיח ל- t

$$\begin{aligned}
A^t \cdot x = A \cdot A^{t-1} \cdot x &\overset{\text{induction}}{=} A \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i^{t-1} \cdot \langle x, u_i\rangle \cdot u_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{t-1} \cdot \langle x, u_i\rangle \cdot A \cdot u_i \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i^{t-1} \cdot \langle x, u_i\rangle \cdot \lambda_i \cdot u_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{t} \cdot \langle x, u_i\rangle \cdot u_i
\end{aligned}$$

כנדרש.
עתה נשתמש בזה כדי לפשט את הביטוי:

$$\begin{aligned}
x^T \cdot A^{2t+1} \cdot x = x^T \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2t+1} \cdot \langle x, u_i\rangle \cdot u_i &= \left(\sum_{j=1}^n \langle x, u_j\rangle \cdot u_j\right)^T \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2t+1} \cdot \langle x, u_i\rangle \cdot u_i \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2t+1} \cdot \langle x, u_i\rangle \cdot \langle x, u_j\rangle \cdot u_j^T \cdot u_i \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2t+1} \cdot \langle x, u_i\rangle \cdot \langle x, u_j\rangle \cdot \langle u_i, u_j\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2t+1} \cdot \langle x, u_i\rangle \cdot \langle x, u_i\rangle \cdot \langle u_i, u_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2t+1} \cdot \langle x, u_i\rangle^2 = \lambda_1^{2t+1} \cdot \left[\langle x, u_1\rangle^2 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2t+1} \cdot \langle x, u_i\rangle^2\right]
\end{aligned}$$

וגם מתקיים כי

$$\begin{aligned}
\left\|A^t \cdot x\right\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i^t \cdot \langle x, u_i\rangle \cdot u_i\right\|^2 &\overset{\text{orthogal vectors}}{=} \sum_{i=1}^n \left\|\lambda_i^t \cdot \langle x, u_i\rangle \cdot u_i\right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2t} \cdot \langle x, u_i\rangle^2 \cdot \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2t} \cdot \langle x, u_i\rangle^2 = \lambda_1^{2t} \cdot \left[\langle x, u_1\rangle^2 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2t} \cdot \langle x, u_i\rangle^2\right]
\end{aligned}$$

ולכן נקבל כי

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x^T\cdot A^{2t+1}\cdot x}{\|A^t\cdot x\|^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_1^{2t+1}\cdot\left[\langle x,u_1\rangle^2+\sum_{i=2}^n\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2t+1}\cdot\langle x,u_i\rangle^2\right]}{\lambda_1^{2t}\cdot\left[\langle x,u_1\rangle^2+\sum_{i=2}^n\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2t}\cdot\langle x,u_i\rangle^2\right]}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_1\cdot\left[\langle x,u_1\rangle^2+\sum_{i=2}^n\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2t+1}\cdot\langle x,u_i\rangle^2\right]}{\langle x,u_1\rangle^2+\sum_{i=2}^n\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2t}\cdot\langle x,u_i\rangle^2}$$

נשים לב כי $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2t},\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2t+1}\to 0$ מההנחה כי $|\lambda_i|<\lambda_1$ לכל $2\le i\le n$,
ולכן

$$\left[\langle x,u_1\rangle^2+\sum_{i=2}^n\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2t+1}\cdot\langle x,u_i\rangle^2\right]\to\langle x,u_1\rangle^2$$
$$\left[\langle x,u_1\rangle^2+\sum_{i=2}^n\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2t}\cdot\langle x,u_i\rangle^2\right]\to\langle x,u_1\rangle^2$$

נשתמש בזה ונקבל כי

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x^T\cdot A^{2t+1}\cdot x}{\|A^t\cdot x\|^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_1\cdot\left[\langle x,u_1\rangle^2+\sum_{i=2}^n\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2t+1}\cdot\langle x,u_i\rangle^2\right]}{\langle x,u_1\rangle^2+\sum_{i=2}^n\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2t}\cdot\langle x,u_i\rangle^2}=\frac{\lambda_1\cdot\langle x,u_1\rangle^2}{\langle x,u_1\rangle^2}=\lambda_1$$

כלומר הראנו כי $\lim_{t\to\infty}\frac{x^T\cdot A^{2t+1}\cdot x}{\|A^t\cdot x\|^2}=\lambda_1$ כנדרש

הערה: הסיבה שהיה אפשר להציב את הגבול הייתה מההנחה כי $\langle x,u_1\rangle\ne 0$ ולכן $\langle x,u_1\rangle^2\ne 0$.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\lim_{t\to\infty}\left\|A\cdot x^{(t)}\right\|=1$ וגם $\lim_{t\to\infty}\langle x^{(t)},u_1\rangle=1$

הוכחה:

תחילה נוכיח באינדוקציה כי $x^{(t)}=\frac{A^t\cdot x^{(0)}}{\left\|A^t\cdot x^{(0)}\right\|}$

<u>בסיס:</u> $t=1$, נשים לב כי $x^{(1)}=\frac{A^t\cdot x^{(0)}}{\left\|A^t\cdot x^{(0)}\right\|}$ מההגדרה.

<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל־ $t-1$ ונוכיח ל־ t.

$$x^{(t)}=\frac{A\cdot x^{(t-1)}}{\left\|A\cdot x^{(t-1)}\right\|}\overset{\text{induction}}{=}\frac{A\cdot\frac{A^{t-1}\cdot x^{(0)}}{\left\|A^{t-1}\cdot x^{(0)}\right\|}}{\left\|A\cdot\frac{A^{t-1}\cdot x^{(0)}}{\left\|A^{t-1}\cdot x^{(0)}\right\|}\right\|}=\frac{\frac{A^t\cdot x^{(0)}}{\left\|A^{t-1}\cdot x^{(0)}\right\|}}{\frac{\left\|A^t\cdot x^{(0)}\right\|}{\left\|A^{t-1}\cdot x^{(0)}\right\|}}=\frac{A^t\cdot x^{(0)}}{\left\|A^t\cdot x^{(0)}\right\|}$$

כנדרש.

מהיות $u_1,\ldots,u_n$ בסיס אורתונורמלי נוכל לכתוב את x בצורה הבאה $x=\sum_{i=1}^n\langle x,u_i\rangle\cdot u_i$.

בסעיף הקודם הוכחנו כטענת עזר כי כי $A^t \cdot x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t \cdot \langle x, u_i \rangle \cdot u_i$, ולכן נקבל כי

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \left\| A \cdot x^{(t)} \right\| &= \lim_{t\to\infty} \left\| A \cdot \frac{A^t \cdot x^{(0)}}{\left\| A^t \cdot x^{(0)} \right\|} \right\| = \lim_{t\to\infty} \left\| \frac{A^{t+1} \cdot x^{(0)}}{\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t \cdot \langle x, u_i \rangle \cdot u_i \right\|} \right\| = \\
&= \lim_{t\to\infty} \left\| \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{t+1} \cdot \langle x, u_i \rangle \cdot u_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t \cdot \langle x, u_i \rangle \cdot \|u_i\|} \right\| = \lim_{t\to\infty} \left\| \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{t+1} \cdot \langle x, u_i \rangle \cdot u_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t \cdot \langle x, u_i \rangle} \right\| \\
&= \lim_{t\to\infty} \left\| \frac{\lambda_1^{t+1} \cdot \left[\langle x, u_1 \rangle \cdot u_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{t+1} \cdot \langle x, u_i \rangle \cdot u_i \right]}{\lambda_1^t \cdot \left[\langle x, u_1 \rangle + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{t} \cdot \langle x, u_i \rangle \right]} \right\| \\
&= \lim_{t\to\infty} \left\| \frac{\lambda_1 \cdot \left[\langle x, u_1 \rangle \cdot u_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{t+1} \cdot \langle x, u_i \rangle \cdot u_i \right]}{\langle x, u_1 \rangle + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{t} \cdot \langle x, u_i \rangle} \right\|
\end{aligned}$$

נשים לב כי $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{t+1} \to 0$ וגם $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{t} \to 0$ מהנתון כי $|\lambda_i| < \lambda_1$ לכל $2 \le i \le n$ ולכן

$$\langle x, u_1 \rangle \cdot u_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{t+1} \cdot \langle x, u_i \rangle \cdot u_i \to \langle x, u_1 \rangle \cdot u_1$$

$$\langle x, u_1 \rangle + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{t} \cdot \langle x, u_i \rangle \to \langle x, u_1 \rangle$$

נציב חזרה ונקבל כי

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \left\| A \cdot x^{(t)} \right\| &= \lim_{t\to\infty} \left\| \frac{\lambda_1 \cdot \left[\langle x, u_1 \rangle \cdot u_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{t+1} \cdot \langle x, u_i \rangle \cdot u_i \right]}{\langle x, u_1 \rangle + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{t} \cdot \langle x, u_i \rangle} \right\| = \left\| \frac{\lambda_1 \cdot \langle x, u_1 \rangle \cdot u_1}{\langle x, u_1 \rangle} \right\| \\
&= \lambda_1 \cdot \|u_1\| = \lambda_1
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\lim_{t\to\infty} \left\| A \cdot x^{(t)} \right\| = \lambda_1}$, כנדרש ועתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \left\langle x^{(t)}, u_1 \right\rangle &= \lim_{t\to\infty} \left\langle \frac{A^t \cdot x^{(0)}}{\left\| A^t \cdot x^{(0)} \right\|}, u_1 \right\rangle = \lim_{t\to\infty} \left\langle \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t \cdot \langle x, u_i \rangle \cdot u_i}{\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t \cdot \langle x, u_i \rangle \cdot u_i \right\|}, u_1 \right\rangle \\
&= \lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^t \cdot \langle x, u_i \rangle}{\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t \cdot \langle x, u_i \rangle \cdot u_i \right\|} \cdot \langle u_i, u_1 \rangle \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda_1^t \cdot \langle x, u_1 \rangle}{\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t \cdot \langle x, u_i \rangle \cdot u_i \right\|} \cdot \langle u_1, u_1 \rangle \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda_1^t \cdot \langle x, u_1 \rangle}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t \cdot \langle x, u_i \rangle \cdot \|u_i\|} = \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda_1^t \cdot \langle x, u_1 \rangle}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t \cdot \langle x, u_i \rangle} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda_1^t \cdot \langle x, u_1 \rangle}{\lambda_1^t \cdot \left[\langle x, u_1 \rangle + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{t} \cdot \langle x, u_i \rangle \right]}
\end{aligned}$$

כבר ראינו כי $\langle x,u_1\rangle + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^t \cdot \langle x,u_i\rangle \to \langle x,u_1\rangle$, ולכן

$$\lim_{t\to\infty}\left\langle x^{(t)},u_1\right\rangle = \lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_1^t\cdot\langle x,u_1\rangle}{\lambda_1^t\cdot\left[\langle x,u_1\rangle + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^t\cdot\langle x,u_i\rangle\right]} = \lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_1^t\cdot\langle x,u_1\rangle}{\lambda_1^t\cdot\langle x,u_1\rangle} = 1$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\lim_{t\to\infty}\left\langle x^{(t)},u_1\right\rangle = 1}$, כנדרש.

הערה: כל פעם שהוצאנו את λ_1 מהנורמה ללא ערך מוחלט, זה היה חוקי מהנתון ש־ $\lambda_1 > \max_{2\le i\le n}|\lambda_i| \ge 0$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(\left\langle x^{(t)},u_1\right\rangle = 0\right) = O\left(\frac{1}{k}\right)$

הוכחה:

יהי u_1 וקטור אורותוגונלי, נגריל $y\in\mathbb{R}^{n-1}$ באותה צורה כמו x.

נשים לב כי קיים לכל היותר איבר אחד בקבוצה $c\in\left\{-1,-1+\frac{1}{k},\ldots,1-\frac{1}{k},1\right\}$ כך שמתקיים $0 = \left\langle u_1, \begin{bmatrix} y \\ c\end{bmatrix}\right\rangle$

(יותר מדויק אם $u_n \neq 0$ אז ה־ c היחיד שיקיים את הדרישה הוא $c = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} y_i\cdot u_i}{u_n}$ והוא אולי שייך לקבוצה $\left\{-1,-1+\frac{1}{k},\ldots,1-\frac{1}{k},1\right\}$).

נשים לב שמספר האפשרויות ל-$y\in\mathbb{R}^{n-1}$ לפי ההגרלה הוא $\left|\left\{-1,-1+\frac{1}{k},\ldots,1-\frac{1}{k},1\right\}\right|^{n-1}$,

ומספר האפשרויות ל־ $x\in\mathbb{R}^n$ לפי ההגרלה הוא $\left|\left\{-1,-1+\frac{1}{k},\ldots,1-\frac{1}{k},1\right\}\right|^{n}$,

ולכן נקבל כי

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left\langle x^{(t)},u_1\right\rangle = 0\right) &\le \frac{\text{number of option to roll y}}{\text{number of option to roll x}} = \frac{\left|\left\{-1,-1+\frac{1}{k},\ldots,1-\frac{1}{k},1\right\}\right|^{n-1}}{\left|\left\{-1,-1+\frac{1}{k},\ldots,1-\frac{1}{k},1\right\}\right|^{n}} \\ &= \frac{1}{\left|\left\{-1,-1+\frac{1}{k},\ldots,1-\frac{1}{k},1\right\}\right|} = \frac{1}{2k+1} = O\left(\frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\mathbb{P}\left(\left\langle x^{(t)},u_1\right\rangle = 0\right) = O\left(\frac{1}{k}\right)}$, כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $|\lambda_i| \le d$

הוכחה:

יהי λ ערך עצמי ו־ v וקטור עצמי מתאים לו, נבחר $i = \operatorname{argmax}_{j\in[|V|]}|v_i|$, נשים לב כי

$$|\lambda|\cdot|v_i| = |\lambda v_i| = |Av_i| = \left|\sum_{(i,j)\in E} v_j\right| \le \left|\sum_{(i,j)\in E} v_j\right| \le \sum_{(i,j)\in E}|v_j| \le \sum_{(i,j)\in E}|v_i| = |v_i|\cdot\sum_{(i,j)\in E}1$$

נתון שלכל קודקוד יש בדיוק d שכנים ולכן $\sum_{(i,j)\in E}1 = d$, נציב ונקבל כי

$$|\lambda|\cdot|v_i| \le d\cdot|v_i|$$

נשים לב ש־ $|v_i| > 0$ אחרת $v = 0$ בסתירה לכך שהוא וקטור עצמי, ולכן נקבל כי $|\lambda| \le d$.

כלומר הראנו שלכל ערך עצמי λ מתקיים $\boxed{|\lambda| \le d}$, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\dim V_d = l$

הוכחה:

נסמן את רכיבי קשירות ב־ $C_1, \ldots, C_l$. נסמן את קודקודי הגרף ב־ $v_1, \ldots, v_n$.

נגדיר $1_{C_i} \in \mathbb{F}^n$ באופן הבא $[1_{C_i}]_j = \begin{cases} 0 & v_j \notin C_i \\ 1 & v_j \in C_i \end{cases}$ לכל $1 \leq i \leq l$.

נרצה להראות כי $\{1_{C_1}, \ldots, 1_{C_d}\}$ הוא בסיס של V_d.

תחילה נשים לב ש־ $\{1_{C_1}, \ldots, 1_{C_d}\}$ היא אכן קבוצה בת"ל,

יהי $u \in V_d$, נראה כי $u \in \operatorname{span}\{1_{C_1}, \ldots, 1_{C_d}\}$ בכך שנראה כי $u_i = u_j$ לכל i, j שהם באותו רכיב קשירות.

יהי C רכיב קשירות של G. נסמן $i = \operatorname{argmax}_{j \in C} u_j$, נוכיח באינדוקציה על אורך המסלול בין v_i, v_j שמתקיים $u_i = u_j$

<u>בסיס:</u> $n = 0$, נשים לב שהטענה נכונה באופן ריק

<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל־ $n-1$ ונוכיח ל־ n.

יהי j קודקוד שאורך המסלול בינו ל־ v_i הוא n, כלומר יש מסלול $v_i, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{n-1}}, v_j$,

מהנחת האינדוקציה מתקיים כי $u_i = u_{i_{n-1}}$.

נסמן $l = i_{n-1}$ וב־ $k = \operatorname{argmin}_{j \in C \wedge (k,j) \in E} u_j$, ונשים לב כי

$$d \cdot u_l \leq [A \cdot u]_l = \sum_{(l,j) \in E} u_j = \min_{(l,j) \in E} u_j + \sum_{(l,j) \in E \wedge j \neq k} u_j \leq \min_{(l,j) \in E} u_j + (k-1) \cdot u_l$$

$$u_i = u_l \leq \min_{(l,j) \in E} u_j \leq \max_{z \in C} u_z = u_i$$

כלומר קיבלנו כי $\min_{(i,j) \in C} u_j = u_l$ ולכן בפרט מתקיים כי

$$u_i = \min_{(l,j) \in C} u_j \leq u_j \leq \max_{z \in C} u_z = u_i$$

ולכן נקבל כי $u_i = u_j$ כנדרש.

כלומר הוכחנו ש־ u הוא בנוי מ־ l חלקים שכל חלק מתאים אחד לאחד לרכיב קשירות והערך בתוך כל חלק שווה,

כלומר $\operatorname{span}\{1_{C_1}, \ldots, 1_{C_d}\} \ni \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_2 \\ \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ a_l \end{bmatrix} = u$.

כלומר הראנו כי $\{1_{C_1}, \ldots, 1_{C_d}\}$ קבוצה בת"ל ופורשת, ולכן בסיס של V_d, כלומר $\boxed{\dim V_d = l}$, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $-d$ ערך עצמי אם"ם G הוא עם רכיב קשירות דו צדדי

הוכחה:

$\Leftarrow$: תחילה נניח כי $-d$ הוא ערך עצמי, נסמן ב־ u את הוקטור העצמי המתאים לו.

יהי C רכיב קשירות של G ש־ $0 \neq \operatorname{argmax}_{j \in C} |u_j|$, נסמן את קודקודי הגרף ב־ $v_1, \ldots, v_n$.

נבחר $i = \operatorname{argmax}_{j \in C} |u_j|$, נשים לב כי

$$-d \cdot u_i = [-d \cdot u]_i = [A \cdot u]_i = \sum_{(i,j) \in E} u_j$$

$$\Longrightarrow 0 = \sum_{(i,j) \in E} u_j + d \cdot u_i = \sum_{(i,j) \in E} [u_j + u_i]$$

נשים לב כי קיבלנו ששווין זה יתקיים רק אם $u_j = -u_i$ לכל שכן של i,
נוכל לחזור על הטענה הקודמת באינדוקציה ולקבל שכל קודקוד ברכיב קשירות של v_i מקיים $|u_k| = |u_i|$ ושכל קודקוד בסימן שונה משכניו.
נגדיר $X = \{v_i \mid i \in C \wedge u_i \geq 0\}$, $Y = \{v_i \mid i \in C \wedge u_i < 0\}$.
נשים לב כי $X \cup Y = C$ וגם $X \cap Y = \emptyset$.
נותר להראות שאין צלע כך ש־ $\{v_l, v_k\}$ שניהם ב־ X או שניהם ב־ Y.
יהיו $v_k, v_l \in \{v_i \mid i \in C\}$ כך ש־ $\{v_l, v_k\} \in E$, מהטענה שהוכחנו קודם מתקיים $u_l = -u_k$ ולכן $v_l \in X \wedge v_k \in Y$ או ש־ $v_k \in X \wedge v_l \in Y$.
כלומר הראנו חלוקה של הקודקודים ברכיב קשירות של C שכל הצלעות עוברות דרכן ולכן G הוא אכן רכיב קשירות דו צדדי, כנדרש.
$\Rightarrow$: עתה נניח ש־ G הוא גרף עם רכיב קשירות דו צדדי ונסמנו ב־ C,
ראינו בסעיף הקודם ש־ 1_C הוא וקטור עצמי עם ערך עצמי d,
לפי הסעיף הבא נקבל כי $-d$ הוא ערך עצמי בתת הגרף לפי קודקודי C שנסמנו ב־ u,
נגדיר $w_i = \begin{cases} u_i & i \in C \\ 0 & else \end{cases}$, נשים לב כי

$$[A \cdot w]_i = \begin{cases} [A \cdot u]_i & i \in C \\ 0 & else \end{cases} = \begin{cases} [-d \cdot u]_i & i \in C \\ 0 & else \end{cases} = -d \cdot \begin{cases} u_i & i \in C \\ 0 & else \end{cases} = -d \cdot w_i$$

וקיבלנו כי w הוא וקטור עצמי עם ערך עצמי $-d$ בגרף G, כנדרש.

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $-\lambda$ הוא ערך עצמי של G
הוכחה:
יהי u הוקטור העצמי של λ, מהיות G דו צדדי, נסמן את צדדיו ב־ X, Y. נסמן את קודקודי הגרף ב־ $v_1, \ldots, v_n$.
נגדיר $[w]_i = \begin{cases} u_i & v_i \in X \\ -u_i & v_i \notin X \end{cases}$,
יהי $i \in [|V|]$, נחלק למקרים:

i. אם $v_i \in X$ אז:

$$[A \cdot w]_i = \sum_{(i,j) \in E} w_j = \sum_{(i,j) \in E} -u_j = -\sum_{(i,j) \in E} u_j = -[A \cdot u]_i = -\lambda \cdot u_i = -\lambda \cdot w_i$$

ii. אם $v_i \notin X$ אז:

$$[A \cdot w]_i = \sum_{(i,j) \in E} w_j = \sum_{(i,j) \in E} u_j = [A \cdot u]_i = \lambda \cdot u_i = \lambda \cdot (-w_i) = -\lambda \cdot w_i$$

כלומר הראנו כי $A \cdot w = -\lambda \cdot w$, ולכן $-\lambda$ ערך עצמי.

מ.ש.ל.ד.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** ספקטרום של K_n
הוכחה:
נשים לב שהמטריצה המתאימה היא $A_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ לכל $1 \leq i, j \leq n$,
נשים לב כי $A = 1_{n \times n} - I_n$,
נשים לב שהערכים העצמיים של $1_{n \times n}$ הם 0 עם $n - 1$ וקטורים בלתי תלויים כי $\ker(1_{n \times n}) = 1$ ואחד עם ערך עצמי n כי $1_{n \times n} \cdot 1_n = n \cdot 1_n$)

נסמן את ה$n-1$ הוקטורים העצמיים של 0 של המטריצה $1_{n\times n}$ ב־ $v_1,\ldots,v_{n-1}$ ואת הוקטור העצמי לערך העצמי n של המטריצה $1_{n\times n}$ ב־ v_n.
נשים לב כי $1\le\forall i\le n-1$ מתקיים

$$A\cdot v_i=[1_{n\times n}-I_n]\cdot v_i=1_{n\times n}\cdot v_i-I_n\cdot v_i=0\cdot v_i-1\cdot v_i=-v_i$$

כלומר ל־ A יש לפחות $n-1$ וקטורים עצמיים לערך -1, כלומר $\dim V_{-1}\ge n-1$
נשים לב כי מתקיים

$$A\cdot v_n=[1_{n\times n}-I_n]\cdot v_n=1_{n\times n}\cdot v_n-I_n\cdot v_n=n\cdot v_n-1\cdot v_n=(n-1)\cdot v_i$$

כלומר ל־ A יש לפחות 1 וקטורים עצמיים לערך $n-1$, כלומר $\dim V_{n-1}\ge 1$
נניח בשלילה שיש עוד ערך עצמי λ או שאין שוויון הדוק ונקבל כי

$$\dim V_{n-1}+\dim V_\lambda+\dim V_{-1}\ge n+1>n$$

בסתירה לכך שהמימד של כל הוקטורים העצמיים ביחד הוא n,
כלומר קיבלנו שהספקטרום הוא שיש 2 ערכים עצמיים שהם $n-1,-1$ וגם $\dim V_{-1}=n-1$ וגם $\dim V_{n-1}=1$.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** ספקטרום של $K_{n,n}$
הוכחה:
נשים לב שהמטריצה המתאימה היא $A_{i,j}=\begin{cases}0 & \lfloor\frac{i}{n}\rfloor=\lfloor\frac{j}{n}\rfloor\\1 & else\end{cases}$ לכל $1\le i,j\le n$, המטריצה היא מהצורה $A=$ $\begin{bmatrix}0_{n\times n} & 1_{n\times n}\\1_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{bmatrix}$
נשים לב שהגרף הוא n רגולרי ולכן יש ערך עצמי n עם וקטור עצמי אחד בדיוק בגלל שהגרף קשיר (הוכח בסעיף ב' של שאלה 3),
נשים לב שהגרף הוא דו צדדי ויש לו n כערך עצמי ולכן $-n$ הוא גם ערך עצמי עם לפחות וקטור עצמי אחד (הוכח בסעיף ד' של שאלה 3),
וגם נשים לב ש־ $\ker(A)=2n-2$, ולכן יש ערך עצמי 0 עם בדיוק $2n-2$ וקטורים עצמיים.
כלומר $\dim V_0=2n-2$ וגם $\dim V_n=1$ וגם $\dim V_{-n}\ge 1$,
נניח בשלילה שיש עוד ערך עצמי λ או ש־ $\dim V_{-n}>1$ ונקבל כי

$$\dim V_n+\dim V_{-n}+\dim V_\lambda+\dim V_0\ge 2n+1>2n$$

בסתירה לכך שהמימד של כל הוקטורים העצמיים ביחד הוא $2n$,
כלומר קיבלנו שהספקטרום הוא שיש 3 ערכים עצמיים שהם $0,n,-n$ וגם $\dim V_0=2n-2$ וגם $\dim V_n=1$ וגם $\dim V_{-n}=1$.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** ספקטרום של $K_{n,m}$
הוכחה:
נשים לב שהמטריצה המתאימה היא $A=\begin{bmatrix}0_{n\times n} & 1_{n\times m}\\1_{m\times n} & 0_{m\times m}\end{bmatrix}$
נגדיר $v_i=\begin{cases}\sqrt{\frac{m}{n}} & i\le n\\1 & else\end{cases}$, נשים לב כי

$$[A\cdot v]_i=\begin{cases}m\cdot 1 & i\le n\\n\cdot\sqrt{\frac{m}{n}} & else\end{cases}=\begin{cases}m & i\le n\\\sqrt{mn} & else\end{cases}=\sqrt{nm}\cdot\begin{cases}\sqrt{\frac{m}{n}} & i\le n\\1 & else\end{cases}=\sqrt{mn}\cdot v_i$$

ולכן $Av=\sqrt{mn}\cdot v$, ולכן $\sqrt{mn}$ הוא ערך עצמי עם וקטור עצמי אחד לפחות
נשים לב שהגרף הוא דו צדדי ויש לו $\sqrt{mn}$ כערך עצמי ולכן $-\sqrt{mn}$ הוא גם ערך עצמי עם לפחות וקטור עצמי אחד

(הוכח בסעיף ד' של שאלה 3),
וגם נשים לב ש־ $\ker(A) = n+m-2$, ולכן יש ערך עצמי 0 עם בדיוק $n+m-2$ וקטורים עצמיים.
כלומר $\dim V_0 = n+m-1$ וגם $\dim V_{\sqrt{mn}} \geq 1$ וגם $\dim V_{-\sqrt{mn}} \geq 1$,
נניח בשלילה שיש עוד ערך עצמי λ או שאין שוויון הדוק ונקבל כי

$$\dim V_{-\sqrt{mn}} + \dim V_{\sqrt{mn}} + \dim V_{\lambda} + \dim V_0 \geq n+m+1 > n+m$$

בסתירה לכך שהמימד של כל הוקטורים העצמיים ביחד הוא $n+m$,
כלומר קיבלנו שהספקטרום הוא שיש 3 ערכים עצמיים שהם $0, \sqrt{nm}, -\sqrt{nm}$ וגם $\dim V_0 = n+m-2$ וגם $\dim V_{\sqrt{mn}} = 1$ וגם $\dim V_{-\sqrt{mn}} = 1$.

מ.ש.ל.ג.☺