אינפי 2 - סמסטר א' תשע"ט
תרגיל בית 11

להגשה עד יום חמישי, 10 בינואר, בשעה 23:45, דרך תיבת ההגשה במודל

1. לכל אחת מסדרות הפונקציות $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ הבאות, מצאו את תחום ההתכנסות הנקודתית, וקבעו האם היא מתכנסת במ"ש בכל אחד מהתחומים המצוינים.
   (א) $f_n(x) = \frac{x}{n}$. תחומים לבדיקת התכנסות במ"ש: $[0,b]$ עבור $b>0$; $[0,\infty)$.
   (ב) $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{e^{n^2x^2}}$. תחומים לבדיקת התכנסות במ"ש: $(-\infty,\infty)$; $[a,\infty)$ עבור $a>0$.

2. יהי D קטע (סגור/פתוח/חצי-סגור). תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות $f_n : D \to \mathbb{R}$ אשר מתכנסת נקודתית לפונקציה $f : D \to \mathbb{R}$. משפט דיני אומר שאם מתקיימים התנאים הבאים, אז $f_n \to f$ במ"ש:
   (א) הקטע D הוא קטע סגור. (ב) כל f_n היא רציפה. (ג) f רציפה. (ד) הסדרה $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית.
   לכל שלושה מתוך ארבעת התנאים, מצאו דוגמה ל - $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ו - f המקיימות את שלושת התנאים, אבל $f_n \to f$ נקודתית בלבד ולא במ"ש.

3. נגדיר $f_n(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$ ו - $f(x) = e^x$. יהי $a \in \mathbb{R}$. האם בהכרח $f_n \to f$ במ"ש בקרן $(-\infty,a]$?

4. תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפות במ"ש ומתכנסת במ"ש לפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. הוכיחו כי f רציפה במ"ש ב - $\mathbb{R}$.

5. נתונה סדרה $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה. נניח שקיים הגבול $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ וההתכנסות במ"ש ב-I.
   (א) מצאו דוגמה שבה $(g \circ f_n)_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת במ"ש (הסימן $\circ$ מציין הרכבת פונקציות).
   (ב) הוכיחו שאם g רציפה במ"ש אז $(g \circ f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש.

6. יהי I קטע (אולי לא חסום) ויהיו $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(g_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות של פונקציות המוגדרות בקטע I ומתכנסות במ"ש ב - I לפונקציות f ו - g בהתאמה.
   (א) האם בהכרח סדרת הפונקציות $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $r_n = f_n + g_n$ מתכנסת במ"ש לפונקציה $r = f + g$?
   (ב) האם בהכרח סדרת הפונקציות $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $h_n = f_n g_n$ מתכנסת במ"ש לפונקציה $h = fg$?
   (ג) האם התשובה לסעיף ב' משתנה אם נניח שהפונקציות f ו - g חסומות?

7. תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרת על קטע I. הוכיחו:
   (א) אם טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס נקודתית אז סדרת הפונקציות $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית לפונקציית האפס.
   (ב) אם טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במ"ש אז סדרת הפונקציות $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לפונקציית האפס.
   (ג) אם טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ מתכנס במ"ש אז טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במ"ש.

8. יהיו $a<b$ ממשיים. תהי $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ פונקציה. לכל $n \in \mathbb{N}$ תהי $f_n : [a,b) \to \mathbb{R}$ פונקציה.
   (א) הוכיחו שאם $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל - f ב - $[a,b_0)$ לכל $b_0 \in \mathbb{R}$ המקיים $a \le b_0 < b$, אז $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל - f ב - $[a,b)$.
   (ב) נניח ש - $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל - f ב - $[a,b_0)$ לכל $b_0 \in \mathbb{R}$ המקיים $a \le b_0 < b$. עבור $a \le b_0 < b$ ו - $\epsilon > 0$, נסמן ב - $N_\epsilon(b_0)$ את המספר הטבעי הקטן ביותר עבורו לכל $n \ge N_\epsilon(b_0)$ מתקיים $\sup_{x\in[a,b_0)} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
      i. הסבירו בקצרה מדוע $N_\epsilon(b_0)$ קיים (רמז: אם קבוצה של מספרים טבעיים A היא לא הקבוצה הריקה, אז יש בה איבר מינימלי).
      ii. הראו שלכל $\epsilon > 0$ קבוע, הפונקציה $N_\epsilon : [a,b) \to \mathbb{R}$ היא מונוטונית עולה, והסיקו שהגבול $\lim_{b_0\to b^-} N_\epsilon(b_0)$ קיים במובן הרחב.
      iii. הוכיחו ש - $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל - f ב - $[a,b)$ אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ מתקיים $\lim_{b_0\to b^-} N_\epsilon(b_0) \neq \infty$.
      iv. תנו דוגמה שבה $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ב - $[a,b_0)$ לכל $a \le b_0 < b$, אבל לא מתכנסת במ"ש ב - $[a,b)$.