

## מבני נתונים 67109

### תרגיל 12

להגשה: עד ה-19/6/2019 בשעה 23:55

#### שאלה 1 - גרף רכיבי הקשירות החזקה $SCC$

ראינו אלגוריתם למציאת רכיבי קשירות חזקה. חזרו על הטענה מהתרגול ממנה הסקנו שאם נעבור על הקודקודים בסדר **יורד** לפי חותמות זמני הסיום ( $post$ ) הקודקוד הראשון שנטפל בו יהיה ברכיב קשירות חזקה שהוא **מקור** בגרף רכיבי הקשירות (כלומר שאין צלעות אל רכיב הקשירות הזה).

שאלה טבעית היא - למה לא לעבור בסדר **עולה** בתקווה שהקודקוד הראשון בו נטפל יהיה כך ברכיב קשירות שהוא **כיור** (או בור, כלומר שאין צלעות ממנו) בגרף רכיבי הקשירות? הראו דוגמא נגדית - הציגו גרף עם לפחות 10 קודקודים, ובו 3 רכיבי קשירות חזקה, וריצת  $DFS$  על הגרף (רשמו את חותמות הזמן) כך שהקודקוד בעל חותמת זמן הסיום הנמוכה ביותר אינו ברכיב קשירות שהוא כיור. ציירו גם את גרף רכיבי הקשירות המתאים לגרף שיצרתם.

#### שאלה 2 - ניתוח סיבוכיות לשיעורין

1. סדרת פעולות מבוצעת על מחסנית שמספר האיברים בה לעולם אינו עולה על  $k$ . אחרי כל  $k$  פעולות עותק של כל המחסנית נשמר בזכרון לצרכי גיבוי. הראו שהמחיר של  $n$  פעולות מחסנית כולל ההעתקות של המחסנית הוא  $O(n)$  בשיטת החשבונאות. תנו מחירים לשיעורין לפעולות המחסנית השונות (להבהרה: כאן אין לנו  $Multipop$  בפעולות המחסנית. רק בדיקה אם היא ריקה, הכנסת איבר והוצאת איבר).

2. נניח שמבחינת זיכרון יש לנו רק אפשרות ליצור 2 מחסניות רגילות (כאלה שניתן לבדוק אם הן ריקות -  $Stack\_Empty$ , להוסיף להן איבר בראש המחסנית -  $Push$  ולהוציא איבר מראש המחסנית -  $Pop$ ). נרצה לממש תור בו ניתן לבדוק האם התור ריק  $Queue\_Empty$ , להוסיף איבר לסוף התור -  $Enqueue$  ולהוציא איבר מראש התור -  $Dequeue$ . ממשו תור ע"י 2 מחסניות, כך שכל אחת מהפעולות של התור מתבצעת במחיר לשיעורין של  $O(1)$ .

### שאלה 3 - סיום ניתוח זמן הריצה לשיעורין עבור מבנה הנתונים קבוצה-זרה (*Disjoint Set*)

הוכיחו את הטענות הבאות, עליהן ההוכחה בתרגול לניתוח זמן הריצה לשיעורין נסמכה. ניתן להסתמך על טענות קודמות לפי הסדר בו הן הופיעו בתרגול.

1. **טענה ב':** במבנה הנתונים קבוצה-זרה, הממומש כיער עם היוריסטיקת ה-*union by rank* בלבד, בתת-עץ של קודקוד מדרגה  $r$  יש לכל הפחות  $2^r$  קודקודים.

2. **טענה ג':** במבנה הנתונים קבוצה-זרה, הממומש כיער עם היוריסטיקת ה-*union by rank* בלבד, אם יש בו  $n$  איברים אזי יכולים להיות בו לכל היותר  $\frac{n}{2^r}$  איברים מתוכם עם דרגה  $r$ . (ניתן ורצוי להסתמך על טענה ב')

3. הוכיחו כי טענה א' מסיכום התרגול (שבמבנה הנתונים קבוצה-זרה, לכל קודקוד  $x$  שאינו שורש מתקיים  $x.rank < x.parent.rank$ ) נכונה גם כאשר המימוש הוא כיער עם 2 ההיוריסטיקות *union by rank* ו-*path compression*.

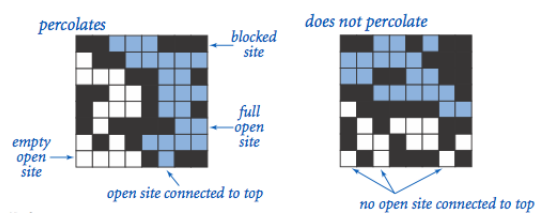
4. הוכיחו כי טענה ג' מסעיף 2 נכונה גם כאשר המימוש הוא כיער עם 2 ההיוריסטיקות *union by rank* ו-*path compression* (וכעת לא ניתן להסתמך על טענה ב', היות והיא לא מתקיימת. לעומת זאת כן ניתן להסתמך על הטענה שהוכחתם הרגע - שהטענה מתקיימת עבור מימוש ללא היוריסטיקת ה-*path compression*).

### שאלה 4 - קבוצה-זרה: וריאציות ושימושים

1. נשתמש במבנה הנתונים קבוצה-זרה לאחסון קבוצת מספרים שונים (אין מספר המופיע פעמיים). הוסיפו פעולת *Largest* למבנה הנתונים, כך שהקריאה *Largest(i)* תחזיר את המספר הגדול ביותר בקבוצת-הקשירות (כלומר בעץ) של  $i$ . ניתן לשנות את פעולת *Link* לצורך זה. הניחו כי מבנה הנתונים ממומש עם שתי ההיוריסטיקות ושמרו על זמן הריצה שראינו עבורו בתרגול.

2. בטבלת משבצות בגודל  $N \times N$  כל משבצת נקראת "אתר". כל אתר יכול להיות פתוח או סגור. אתר פתוח נקרא "מלא" אם יש מסלול ממנו לשורה העליונה בטבלה שעובר רק דרך אתרים פתוחים (מסלול יכול לעבור מאתר לאחד מ-4 האתרים השכנים שלו - למעלה, למטה, ימינה או שמאלה, אם הם קיימים בטבלה). נאמר שטבלה "מסוננת" אם קיים אתר מלא בשורה התחתונה שלה. (ראו איור להבהרה). תארו אלגוריתמים לבדיקה האם אתר הוא מלא והאם טבלה מסוננת ע"י הפיכת טבלה לקבוצה-זרה. קלט האלגוריתם הוא טבלה בגודל  $N \times N$  כאשר כל תא מסומן כפתוח או סגור. נסו לעשות זאת כך שהמימוש של שתי הפונקציות תקראנה ל-*Find* רק מספר קבוע של פעמים (כלומר מספר שלא תלוי ב- $N$ , ניתן לבצע *Union* מספר לא קבוע של פעמים).

3. נתונים  $n$  משתנים  $x_1, \dots, x_n$  עם  $m$  אילוצים, שהם אילוצי שיוויון  $x_i = x_j$  ואילוצי אי-שיוויון  $x_k \neq x_l$ . מטרתנו לדעת האם יש השמה של מספרים למשתנים כך שכל האילוצים מתקיימים. לדוגמא: למערכת האילוצים  $x_1 = x_2, x_2 = x_3, x_1 \neq x_3$  אין פיתרון, כי על פי שני האילוצים מימין,  $x_1 = x_3$ , בסתירה לאילוץ האחרון. הציעו אלגוריתם יעיל ככל האפשר, אשר בהינתן מערכת אילוצים שכזאת, ימצא האם קיימת השמה למשתנים כך שכל האילוצים יתקיימו. נתחו את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם.



איור 1: דוגמאות לטבלאות אפשריות בשאלה 4 סעיף 2. כל ריבוע הוא "אתר". ריבועים מושחרים הם אתרים "סגורים". לבנים הם אתרים "פתוחים ריקים" וכחולים הם "פתוחים מלאים". משמאל טבלא "מסננת" ומימין טבלא שאינה "מסננת".