תרגיל 9 אלגברה לינארית 1

מיכאל גרינבאום

211747639

1א. **צ"ל:** T העתקה לינארית
נתונים: $T:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, T, ו$f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, נגדיר $T(f)(x)=f(x+1)$
הוכחה:
יהיו $f,g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, נשים לב כי $T(f+g)(x)=f(x+1)+g(x+1)=T(f)(x)+T(g)(x)$
יהי $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ו$\alpha\in\mathbb{R}$ נשים לב $T(\alpha f)(x)=(\alpha f)(x+1)=\alpha f(x+1)=\alpha T(f)(x)$
ולכן מכיוון שT סגורה לחיבור ולכפל בסקלר מתקיים כי T העתקה לינארית

מ.ש.ל.א.☺

1ב. **צ"ל:** $kerT, imT$
נתונים: $T:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, T, ו$f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, נגדיר $T(f)(x)=f(x+1)$
הוכחה:
יהי $v\in kerT$, אזי $T(v)(x)=v(x+1)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$
ולכן $v(x+1)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ כלומר $v(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$
ולכן $v(x)$ היא פונקצית האפס
לכן $kerT\subseteq 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ וברור כי $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\subseteq kerT$ ולכן $kerT=\{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$
יהי $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי גם $g(x)=f(x-1)\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
וגם $T(g(x))=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ולכן $f\in ImT$
כלומר $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\subseteq ImT$ וברור כי $ImT\subseteq\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ולכן $ImT=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

מ.ש.ל.ב.☺

2א. **צ"ל:** האם ניתן לקבוע את $T\left(\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}\right)$

נתונים: $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית כך ש $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

הוכחה:
נכון! נשים לב כי $\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}-1\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$
ולכן מכיוון שT העתקה לינארית מתקיים ש

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}\right)=2\cdot T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right)-1\cdot T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-1\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

מ.ש.ל.א.☺

2ב. **צ"ל:** האם ניתן לקבוע את $T\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)$

נתונים: $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית כך ש $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

הוכחה:
לא נכון!
נגדיר $T_1\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $T_1\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$, $T_1\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$
נשים לב כי T_1 העתקות לינאריות לפי משפט שהוזכר בתרגול
שאם T מוגדרת לכל וקטור בבסיס אז קיימת העתקה לינארית המקיימת תנאים אלו

ולכן כי $T_2\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $T_1\left(\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ וגם $T_1\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

נגדיר $T_2\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $T_2\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$, $T_2\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

באופן דומה קיימת T_2 העתקה לינארית מאותו המשפט

ולכן כי $T_2\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $T_1\left(\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ וגם $T_2\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

ולכן קיבלנו שעבור 2 העתקות לינאריות המתאימות לתנאים יש ערך אחר ל $T\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)$

ולכן לא ניתן לקבוע ביחידות את $T\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)$

מ.ש.ל.ב.☺

3א. **צ"ל:** בסיס $kerT, imT$

נתונים: $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית כך ש $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+3y+5z\\2x+6y+9z\end{bmatrix}$

הוכחה:

יהי $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in kerT$ אזי $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+3y+5z\\2x+6y+9z\end{bmatrix}$

נסמן $x=t$, ונקבל $3y+5z=-t$, $6y+9z=-2t$, נדרג

$$\left[\begin{array}{cc|c}3&5&-t\\6&9&-2t\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\left[\begin{array}{cc|c}3&5&-t\\0&-1&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_1\to\frac{1}{3}R_1]{R_2\to -R_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&\frac{5}{3}&-\frac{t}{3}\\0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{5}{3}R_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-\frac{t}{3}\\0&1&0\end{array}\right]$$

ולכן $x=t$, $y=-\frac{t}{3}$, $z=0$

כלומר $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\-\frac{t}{3}\\0\end{bmatrix}\in span\left\{\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{3}\\0\end{bmatrix}\right\}=span\left\{\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$

ולכן $kerT=span\left\{\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$, ולכן $\dim kerT=1$

ולכן $\left\{\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$ בסיס של $kerT$

ממשפט המימדים השני מתקיים $3=\dim V=\dim kerT+\dim imT=1+\dim ImT$

ולכן $\dim ImT=2$

נשים לב כי $ImT\subseteq\mathbb{R}^2$ וגם $\dim ImT=2=\dim\mathbb{R}^2$

ולכן $ImT=\mathbb{R}^2=span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$, ברור שהם בת"ל

ולכן $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ בסיס של ImT

מ.ש.ל.א.☺

3ב. **צ"ל:** בסיס $kerT, imT$

נתונים: $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^4$ העתקה לינארית כך ש $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\\w\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x-2y\\y-2z\\z-2t\\t-2x\end{bmatrix}$

הוכחה:

יהי $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{bmatrix} \in kerT$ אזי $\begin{bmatrix} x-2y \\ y-2z \\ z-2t \\ t-2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

כלומר $2x = t$, $2t = z$, $2z = y$, $2y = x$

נציב ונקבל $4x = z$, $8x = y$, $16x = x$, כלומר $x = 0$ ולכן $y = z = t = x = 0$

נסמן $w = a$, ונקבל ש$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \in kerT$ ולכן $kerT = span\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

ולכן $\dim kerT = 1$

וגם $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ בסיס של $kerT$

ממשפט המימדים השני מתקיים $5 = \dim V = \dim kerT + \dim imT = 1 + \dim ImT$

ולכן $\dim ImT = 4$

נשים לב כי $ImT \subseteq \mathbb{R}^4$ וגם $\dim ImT = 4 = \dim \mathbb{R}^4$

ולכן $ImT = \mathbb{R}^4 = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, וברור שהם בת"ל

ולכן $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ הוא בסיס של ImT

מ.ש.ל.ב.☺

3ג. **צ"ל:** בסיס $kerT, imT$

נתונים: $T : \mathbb{F}_5^4 \to \mathbb{F}_5^2$ העתקה לינארית כך ש $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{bmatrix}$

הוכחה:

יהי $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in kerT$, אזי $\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

נדרג $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

נסמן $x_4 = t$, $x_2 = s$ נקבל $x_1 = -2s - 3t = 3s + 2t$, $x_3 = -2t = 3t$

כלומר $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s + 2t \\ s \\ 3t \\ t \end{bmatrix} \in span\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

ולכן $kerT = span\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, נשים לב כי $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3a \\ a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot a$, ולכן הם בת"ל

ולכן $\dim kerT = 2$

ולכן $\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ בסיס של $kerT$
ממשפט המימדים השני מתקיים $4=\dim V=\dim kerT+\dim imT=2+\dim ImT$
ולכן $\dim ImT=2$
נשים לב כי $ImT\subseteq\mathbb{F}_5^2$ וגם $\dim ImT=2=\dim\mathbb{F}_5^2$
ולכן $ImT=\mathbb{F}_5^2=span\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$, ברור שהם בת"ל
ולכן $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ בסיס של ImT

מ.ש.ל.ג.☺

4א. **צ"ל:** האם קיימת העתקה לינארית כך שהתנאים מתקיימים?
נתונים: $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ העתקה לינארית כך ש$T\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)=3$, $T\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right)=2$, $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=1$
הוכחה:
נכון! נסתכל על $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z$
תחילה נשים לב כי $T\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)=3$, $T\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right)=2$, $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=1$
נראה שT העתקה לינארית ונסיים
יהיו $\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ אזי $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}\right)=(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(y_1+y_2)+\frac{1}{3}(z_1+z_2)$

$$=x_1+\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{3}z_1+x_2+\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{3}z_2=T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}\right)$$

וגם יהי $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$, $\alpha\in\mathbb{R}$,
אזי $T\left(\alpha\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\alpha x+\frac{1}{2}\alpha y+\frac{1}{3}\alpha z=\alpha(x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z)=\alpha T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)$
ולכן מכיוון שT סגורה לחיבור ולכפל בסקלר מתקיים כי T העתקה לינארית

מ.ש.ל.א.☺

4ב. **צ"ל:** האם קיימת העתקה לינארית כך שהתנאים מתקיימים?
נתונים: $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ העתקה לינארית כך ש$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right)=3$, $T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=2$, $T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}\right)=1$
הוכחה:
נכון! נסתכל על $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=x+y+\frac{1}{3}z$
תחילה נשים לב כי $T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right)=3$, $T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=2$, $T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}\right)=1$
נראה שT העתקה לינארית ונסיים
יהיו $\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ אזי $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}\right)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+\frac{1}{3}(z_1+z_2)$

$$= x_1 + y_1 + \tfrac{1}{3}z_1 + x_2 + y_2 + \tfrac{1}{3}z_2 = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right)$$

וגם יהי $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

אזי $T\left(\alpha\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \alpha x + \alpha y + \frac{1}{3}\alpha z = \alpha(x + y + \frac{1}{3}z) = \alpha T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$

ולכן מכיוון שT סגורה לחיבור ולכפל בסקלר מתקיים כי T העתקה לינארית

מ.ש.ל.ב.☺

4ג. **צ"ל:** האם קיימת העתקה לינארית כך שהתנאים מתקיימים?

נתונים: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ העתקה לינארית כך ש$-1 = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 0$

הוכחה:

לא נכון! תהי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ העתקה לינארית כך שהתנאים מתקיימים

נשים לב ש $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, ולכן $1 = 1{+}0 = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$

אבל גם נתון ש $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = -1$ בסתירה למה שקיבלנו

ולכן לכל $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ העתקה לינארית, התנאים לא מתקיימים

מ.ש.ל.ג.☺

5. **צ"ל:** $T(v_i) = w_i$

נתונים: $T : V \to W$ העתקה לינארית, V נוצר סופית, $\{v_1, \ldots, v_k\}$ בת"ל, $\{w_1, \ldots, w_k\} \in W$

הוכחה:

נסמן $\dim V = n$, נשלים את $\{v_1, \ldots, v_k\}$ לבסיס ונקבל $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$

יהי $v \in V$, אזי $\exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ כך ש $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$

נגדיר $T(v) = a_1w_1 + \cdots + a_kw_k$

נשים לב ש$1 \le \forall i \le k$ מתקיים ש$v_i = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{i-1} + v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \cdots + 0 \cdot v_n$

ולכן מתקיים $T(v_i) = 0 + 0 + \cdots + 1 \cdot w_i + 0 + \cdots + 0 = w_i$

נראה שT העתקה לינארית ונסיים

יהיו $u, v \in V$, אזי $\exists a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{F}$

כך ש $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ וגם $u = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$

נשים לב ש$u + v = (a_1 + b_1)v_1 + \cdots + (a_n + b_n)v_n$

ולכן $T(v + u) = (a_1 + b_1)w_1 + \cdots + (a_k + b_k)w_k$

$$= a_1w_1 + \cdots + a_kw_k + b_1w_1 + \cdots + b_kw_k = T(v) + T(u)$$

יהיו $v \in V$,$\alpha \in \mathbb{F}$ אזי $\exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ כך ש $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$

וגם מתקיים $\alpha v = \alpha a_1v_1 + \cdots + \alpha a_nv_n$

ולכן $T(\alpha v) = \alpha a_1w_1 + \cdots + \alpha a_kw_k = \alpha(a_1w_1 + \cdots + a_kw_k) = \alpha T(v)$

ולכן מכיוון שT סגורה לחיבור ולכפל בסקלר מתקיים כי T העתקה לינארית

מ.ש.ל.☺

6. **צ"ל:** $T^{-1}(U) = \{v \in V \mid T(v) \in U\}$ תת מרחב של V

נתונים: V, W מרחבים וקטוריים $T : V \to W$ העתקה לינארית, V נוצר סופית, $U \subseteq W$ מרחב וקטורי

הוכחה:

נראה כי $0_V \in T^{-1}(U)$, נשים לב כי $T(0_V) = 0_W$

ומכיוון שU תת מרחב של W אז $T(0_V) = 0_W \in U$

יהיו $v_1, v_2 \in T^{-1}(U)$ אזי $T(v_1), T(v_2) \in U$
מהיות U מרחב וקטורי מתקיים $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \in U$
ולכן $v_1 + v_2 \in T^{-1}(U)$
יהיו $v \in T^{-1}(U)$, $\alpha \in \mathbb{F}$ אזי $T(v) \in U$
מהיות U מרחב וקטורי מתקיים $T(\alpha v) = \alpha T(v) \in U$
ולכן $\alpha v \in T^{-1}(U)$
$T^{-1}(U)$ תת קבוצה של V המקיימת סגירות לחיבור, כפל בסקלר
ומכילה את וקטור האפס מתקיים ש$T^{-1}(U)$ תת מרחב של V

מ.ש.ל.☺

7. **צ"ל:** $FixT = \{v \in V \mid T(v) = v\}$ תת מרחב של V
נתונים: V מרחבים וקטורי $T : V \to V$ העתקה לינארית
הוכחה:
תחילה נשים לב כי $T(0_V) = 0_V$ ולכן $0_V \in FixT$
עתה יהיו $v_1, v_2 \in FixT$, ולכן $T(v_1) = v_1$, $T(v_2) = v_2$
ולכן $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = v_1 + v_2$ ולכן $v_1 + v_2 \in Fix(T)$
יהי $v \in FixT$, $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכן $T(v) = v$ וגם $T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha v$
ולכן $\alpha v \in FixT$
$FixT$ תת קבוצה של V המקיימת סגירות לחיבור, כפל בסקלר
ומכילה את וקטור האפס מתקיים ש$FixT$ תת מרחב של V

מ.ש.ל.☺

8א. **צ"ל:** האם $kerT \subseteq FixT$?
נתונים: V מרחב וקטורי $T : V \to V$ העתקה לינארית
הוכחה:
לא נכון! נבחר $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$
תחילה נראה כי T העתקה לינארית
יהיו $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$,
ולכן $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$
יהי $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ כך ש $T\left(\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha x \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$
ולכן מכיוון שT סגורה לחיבור ולכפל בסקלר מתקיים כי T העתקה לינארית
נשים לב כי $FixT = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ וגם $kerT = span\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
ולכן $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in kerT$ וגם $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin FixT$ ולכן $kerT \not\subseteq FixT$

מ.ש.ל.א.☺

8ב. **צ"ל:** האם $kerT \cap FixT = \{0_V\}$?
נתונים: V מרחב וקטורי $T : V \to V$ העתקה לינארית
הוכחה:
נכון! יהי $v \in kerT \cap FixT$ אזי $T(v) = v$ מכיוון ש$v \in FixT$
וגם $T(v) = 0_V$ כי $v \in kerT$
ולכן $v = T(v) = 0_V$, ולכן $v = 0_V$, ולכן $kerT \cap FixT \subseteq \{0_V\}$
וברור כי $\{0_V\} \subseteq kerT \cap FixT$ ולכן $kerT \cap FixT = \{0_V\}$

מ.ש.ל.ב.☺

8ג. **צ"ל:** האם $FixT \subseteq ImT$?
נתונים: V מרחב וקטורי $T : V \to V$ העתקה לינארית
הוכחה:
נכון! יהי $v \in FixT$ ולכן $v = T(v) \in ImT$
ולכן $FixT \subseteq ImT$

מ.ש.ל.ג.☺

8ד. **צ"ל:** האם $FixT + ImT = V$?

נתונים: V מרחב וקטורי $T : V \to V$ העתקה לינארית

הוכחה:

לא נכון! נבחר $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

ראינו בשאלה 8א כי זה העתקה לינארית

נשים לב כי $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin ImT$ וגם $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin FixT$

ולכן $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin ImT + FixT$

ולכן $V \nsubseteq ImT + FixT$ ולכן $V \neq ImT + FixT$

מ.ש.ל.ד.☺

9א. **צ"ל:** האם T חח"ע?

נתונים: V, W מרחבים וקטוריים $T : V \to W$ העתקה לינארית, $span\{v_1, \ldots, v_k\} = V$

וגם $\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\}$ בת"ל

הוכחה:

נכון! יהי $v \in kerT$, אזי $T(v) = 0$

מכיוון ש$span\{v_1, \ldots, v_k\} = V$, $\exists a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{F}$ כך ש$v = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$

ולכן $0_V = T(v) = T(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k) = a_1T(v_1) + \cdots + a_kT(v_k)$

כלומר $a_1T(v_1) + \cdots + a_kT(v_k) = 0_V$, ומכיוון ש$\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\}$ בת"ל

מתקיים ש$a_1 = \cdots = a_k = 0_{\mathbb{F}}$,

נציב ונקבל $v = 0_{\mathbb{F}} \cdot v_1 + \cdots + 0_{\mathbb{F}} \cdot v_k = 0_V$

ולכן $kerT \subseteq \{0_V\}$ וברור כי $\{0_V\} \subseteq kerT$ ולכן $kerT = \{0_V\}$

הוכחנו בהרצאה כי $kerT = \{0_V\}$ אם"ם T חח"ע

ולכן T חח"ע

מ.ש.ל.א.☺

9ב. **צ"ל:** האם T חח"ע?

נתונים: V, W מרחבים וקטוריים $T : V \to W$ העתקה לינארית, $\{v_1, \ldots, v_k\}$ בת"ל

וגם $span\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\} = W$

הוכחה:

לא נכון! נבחר $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = x + y + \frac{1}{3}z$, $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $k = 3$

ראינו בשאלה 4ב כי $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ העתקה לינארית

נסמן $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

נשים לב כי $\{v_1 v_2, v_3\}$ בת"ל

נשים לב כי $span\{T(v_1)\} = span\left\{T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right\} = a \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = a = W$

ולכן $W = span\{T(v_1)\} = span\{T(v_1), \ldots, T(v_3)\}$

ולכן כל התנאים מתקיימים

אך נשים לב כי $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1 = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, כלומר T לא חח"ע

מ.ש.ל.ב.☺

10. **צ"ל:** $T^{-1}(\{w\}) = v + kerT$

נתונים: V, W מרחבים וקטוריים $T : V \to W$ העתקה לינארית, $v \in V$ ונסמן $w = T(v)$

הוכחה:

נרצה למצוא כל $v \in V$ כך ש $T(v) = w$

יהי $u \in v + kerT$, אזי $\exists z \in kerT$, כך ש $u = v + z$ ו $T(z) = 0_W$

ולכן $T(u) = T(v + z) = T(v) + T(z) = T(v) = w$

ולכן $v + kerT \subseteq T^{-1}(\{w\})$

יהי $u \in T^{-1}(\{w\})$ אזי $T(u) = w$, ולכן $T(u - v) = T(u) - T(v) = w - w = 0_W$

כלומר $u - v \in kerT$ ולכן $u \in v + kerT$

ולכן $T^{-1}(\{w\}) \subseteq v + kerT$

כלומר $T^{-1}(\{w\}) = v + kerT$

מ.ש.ל.☺