פתרון תרגיל מספר 1 ־ דאסט

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

20 במרץ 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty}\log\left(n\right)=\infty$

הוכחה:

נסמן בa את הבסיס של ה$\log$. יהי $M>0$, נגדיר $N=\left\lceil a^{M+1}\right\rceil$, נשים לב כי $\forall n\in\mathbb{N}$

$$N<n\to M<M+1=\log_{a}\left(a^{M+1}\right)\overset{\star}{\leq}\log_{a}\left(N\right)\overset{\star}{\leq}\log_{a}\left(n\right)\Rightarrow M<\log_{a}\left(n\right)$$

$\star$ ־ מתקיים כי $\log$ פונקציה עולה

לכן הראנו כי

$$\left(\forall M>0\right)\left(\exists N\in\mathbb{N}\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\left(N<n\to M<\log_{a}\left(n\right)\right)$$

כלומר מהגדרת הגבול נובע כי $\boxed{\lim_{n\to\infty}\log\left(n\right)=\infty}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty}k^{-n}=0$

הוכחה:

אם $k=1$ אזי $k^{-n}=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, לכן

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists N(=1)\in\mathbb{N}\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\left(N<n\to\left|k^{-n}-1\right|=\left|1-1\right|=0<\varepsilon\right)$$

כלומר מהגדרת הגבול נובע כי $\boxed{\lim_{n\to\infty}k^{-n}=1}$

אחרת:

יהי $\varepsilon>0$, לכן $\exists N\in\mathbb{N}$ כך ש$k^{N}\geq\frac{1}{\varepsilon}$ (ארכימדיות),

לכן $\forall n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$N<n\to\frac{1}{\varepsilon}\leq k^{N}<k^{N+1}<\cdots<k^{n}\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon}<k^{n}\Rightarrow\boxed{\frac{1}{k^{n}}<\varepsilon}$$

לכן $\forall n\in\mathbb{N}>N$ מתקיים

$$\left|k^{-n}-0\right|=\left|\frac{1}{k^{n}}\right|=\frac{1}{k^{n}}<\varepsilon$$

כלומר הראנו כי

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists N\in\mathbb{N}\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\left(N<n\to\left|k^{-n}-0\right|<\varepsilon\right)$$

כלומר מהגדרת הגבול נובע כי $\boxed{\lim_{n\to\infty}k^{-n}=0}$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n}=1$

הוכחה:

יהי $\varepsilon>0$, לכן $\exists N\in\mathbb{N}$ כך ש$N\geq\frac{1}{\varepsilon}$ (ארכימדיות), לכן $\forall n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$N<n\to\frac{1}{\varepsilon}\leq N<n\Rightarrow\boxed{\frac{1}{n}<\varepsilon}$$

לכן $\forall n\in\mathbb{N}>N$ מתקיים

$$\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right|=\left|-\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

כלומר הראנו כי

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists N\in\mathbb{N})\,(\forall n\in\mathbb{N})\left(N<n\to\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right|<\varepsilon\right)$$

כלומר מהגדרת הגבול נובע כי $\boxed{\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n}=1}$

מ.ש.ל.ג.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty} f(n)=\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(n)}=0$

הוכחה:

יהי $\varepsilon>0$, מהיות $\lim_{n\to\infty} f(n)=\infty$ $\exists N\in\mathbb{N}$ כך ש$\forall n\in\mathbb{N}>N$ מתקיים $\frac{1}{\varepsilon}\leq f(n)$, כלומר

$$0\leq\frac{1}{\varepsilon}\leq f(n)\Rightarrow 0\leq\boxed{\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{|f(n)|}}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\leq f(n)\Rightarrow\boxed{\frac{1}{|f(n)|}=\frac{1}{f(n)}<\varepsilon}$$

לכן $\forall n\in\mathbb{N}>N$ מתקיים

$$\left|\frac{1}{f(n)}-0\right|=\left|\frac{1}{f(n)}\right|=\frac{1}{|f(n)|}<\varepsilon$$

כלומר הראנו כי

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists N\in\mathbb{N})\,(\forall n\in\mathbb{N})\left(N<n\to\left|\frac{1}{f(n)}-0\right|<\varepsilon\right)$$

כלומר מהגדרת הגבול נובע כי $\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(n)}=0}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty} f(n)=0\not\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(n)}=\infty$

הוכחה:

נבחר $f(n)=-\frac{1}{n}$, נראה כי $\lim_{n\to\infty} f(n)=0\not\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(n)}=\infty$,

תחילה נראה כי $\lim_{n\to\infty} f(n)=0$, יהי $\varepsilon>0$, לכן $\exists N\in\mathbb{N}$ כך ש$N\geq\frac{1}{\varepsilon}$ (ארכימדיות), לכן $\forall n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$N<n\to\frac{1}{\varepsilon}\leq N<n\Rightarrow\boxed{\frac{1}{n}<\varepsilon}$$

לכן $N < \forall n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\left|-\frac{1}{n} - 0\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

כלומר הראנו כי

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\left(N < n \to \left|-\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon\right)$$

כלומר מהגדרת הגבול נובע כי $\boxed{\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0}$,
עתה נראה כי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} = -\infty \neq \infty$,
יהי $M < 0$, לכן $\exists N \in \mathbb{N}$ כך ש$N \geq -M$ (ארכימדיות), לכן $\forall n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$N < n \to -n \leq -N \leq M \Rightarrow \boxed{-n \leq M}$$

כלומר הראנו כי

$$(\forall M < 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(N < n \to -n \leq M)$$

כלומר מהגדרת הגבול נובע כי $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} -n = -\infty \neq \infty}$,
לכן $\boxed{\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \not\to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} = \infty}$

מ.ש.ל.ב.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\log\left(n^k\right) = O(n)$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log(n)} \overset{L\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

מהיות $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log(n)} = \infty$, $\exists N \in \mathbb{N}$ כך ש$N < \forall n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\frac{n}{\log(n)} > 1$, כלומר $\boxed{n > \log(n)}$,
לכן $N < \forall n \in \mathbb{N}$

$$\log\left(n^k\right) = k \cdot \log(n) < k \cdot n \Rightarrow \boxed{\log\left(n^k\right) < k \cdot n}$$

כלומר הראנו כי עבור $c = k$, $n_0 = N$ מתקיים $\log\left(n^k\right) < c \cdot n$, $n_0 < \forall n \in \mathbb{N}$, כלומר

$$(\exists c > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\left(n_0 < n \to \log\left(n^k\right) < c \cdot n\right)$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{\log\left(n^k\right) = O(n)}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $c_1 \cdot n + c_2 \cdot n^2 = \Theta\left(n^2\right)$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{c_1 \cdot n + c_2 \cdot n^2 \geq c_2 \cdot n^2}$$

כלומר הראנו כי עבור $c=c_2$, $n_0=1$ מתקיים $c_1\cdot n+c_2\cdot n^2\geq c\cdot n^2$, $\forall n\in\mathbb{N} > n_0$, כלומר

$$(\exists c>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\left(n_0<n\to c_1\cdot n+c_2\cdot n^2\geq c\cdot n^2\right)$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{c_1\cdot n+c_2\cdot n^2=\Omega\left(n^2\right)}$

עתה נשים לב כי $\forall n\in\mathbb{N}$

$$c_1\cdot n+c_2\cdot n^2\leq c_1\cdot n^2+c_2\cdot n^2=(c_1+c_2)\cdot n^2\Rightarrow\boxed{c_1\cdot n+c_2\cdot n^2\leq(c_1+c_2)\cdot n^2}$$

כלומר הראנו כי עבור $c=c_1+c_2$, $n_0=1$ מתקיים $c_1\cdot n+c_2\cdot n^2\leq c\cdot n^2$, $\forall n\in\mathbb{N} > n_0$, כלומר

$$(\exists c>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\left(n_0<n\to c_1\cdot n+c_2\cdot n^2\leq c\cdot n^2\right)$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{c_1\cdot n+c_2\cdot n^2=O\left(n^2\right)}$,

לכן מהיות $c_1\cdot n+c_2\cdot n^2=O\left(n^2\right)$ וגם $c_1\cdot n+c_2\cdot n^2=\Omega\left(n^2\right)$, מההגדרה מתקיים $\boxed{c_1\cdot n+c_2\cdot n^2=\Theta\left(n^2\right)}$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $f(n)=\Omega(\log(f(n)))$

הוכחה:

תחילה נרצה להראות כי $\forall x>0$ מתקיים $g(x)=x^{\frac{1}{x}}\leq e^{\frac{1}{e}}$.

נשים לב כי $g'(x)=\left(e^{\frac{\ln(x)}{x}}\right)'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(x)}{x^2}\right)=\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1-\ln(x))$,

נשים לב כי $g'(x)\leq 0$, $\forall x\geq e$, (כי הכל חיובי במכפלה חוץ מ$(1-\ln(x)$)

באופן דומה מתקיים $g'(x)\geq 0$, $\forall x\leq e > 0$, כלומר $\forall x>0$ מתקיים $g(x)=x^{\frac{1}{x}}\leq g(e)=e^{\frac{1}{e}}$

נסמן בa את הבסיס של הלוג, עתה נשים לב כי עבור $0<c<\frac{\ln(a)}{\ln\left(e^{\frac{1}{e}}\right)}=e\cdot\ln(a)$ מתקיים $\forall x>0$

$$c<\frac{\ln(a)}{\ln\left(e^{\frac{1}{e}}\right)}\Rightarrow c\cdot\ln\left(e^{\frac{1}{e}}\right)<\ln(a)\Rightarrow c\cdot\ln(g(e))<\ln(a)\Rightarrow c\cdot\ln(g(x))\leq c\cdot\ln(g(e))<\ln(a)$$

$$\Rightarrow c\cdot\ln(g(x))<\ln(a)\Rightarrow e^{c\cdot\ln(g(x))}<e^a\Rightarrow g(x)^c<a\Rightarrow x^{\frac{c}{x}}<a\Rightarrow x^c<a^x\Rightarrow a^{\log_a(x^c)}<a^x$$

$$\Rightarrow\log_a(x^c)<x\Rightarrow\boxed{c\cdot\log_a(x)<x}$$

כלומר הראנו כי $\forall x>0$ מתקיים $c\cdot\log_a(x)<x$, נציב $x=f(n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ונקבל $c\cdot\log_a(f(n))<f(n)$,
כלומר הראנו כי עבור c, $n_0=1$ מתקיים $c\cdot\log_a(f(n))<f(n)$, $\forall n\in\mathbb{N} > n_0$, כלומר

$$(\exists c>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(n_0<n\to c\cdot\log_a(f(n))\leq f(n))$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{f(n)=\Omega(\log(f(n)))}$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\sum_{i=1}^{n}i=\Theta\left(n^2\right)$

הוכחה:

נשים לב כי $\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n^2-n}{2}$, נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2-n}{2}-\frac{n^2}{4}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}\right]=\infty$$

לכן $\exists N\in\mathbb{N}$ כך ש$\forall n\in\mathbb{N} > N$ מתקיים

$$\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}>0\Leftrightarrow\frac{n^2-n}{2}-\frac{n^2}{4}>0\Leftrightarrow\frac{n^2-n}{2}>\frac{1}{4}\cdot n^2$$

כלומר הראנו כי עבור $c=\frac{1}{4}$, $n_0=N$ מתקיים $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n^2-n}{2}>c\cdot n^2$, $n_0<\forall n\in\mathbb{N}$, כלומר

$$(\exists c>0)\,(\exists n_0\in\mathbb{N})\,(\forall n\in\mathbb{N})\left(n_0<n\to\sum_{i=1}^{n} i>c\cdot n^2\right)$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i=\Omega\left(n^2\right)}$,

עתה נשים לב כי $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n^2-n}{2}<\frac{1}{2}\cdot n^2}$$

כלומר הראנו כי עבור $c=\frac{1}{2}$, $n_0=1$ מתקיים $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n^2-n}{2}<\frac{1}{2}\cdot n^2$, $n_0<\forall n\in\mathbb{N}$, כלומר

$$(\exists c>0)\,(\exists n_0\in\mathbb{N})\,(\forall n\in\mathbb{N})\left(n_0<n\to\sum_{i=1}^{n} i\le c\cdot n^2\right)$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i=O\left(n^2\right)}$,

לכן מהיות $\sum_{i=1}^{n} i=\Omega\left(n^2\right)$ וגם $\sum_{i=1}^{n} i=O\left(n^2\right)$, מההגדרה מתקיים $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i=\Theta\left(n^2\right)}$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** $\sum_{i=1}^{n} i^k=\Theta\left(n^{k+1}\right)$

הוכחה:

נשים לב כי $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^k\le 1\cdot n^{k+1}}$ $\sum_{i=1}^{n} i^k\le\sum_{i=1}^{n} n^k=1\cdot n^{k+1}\Rightarrow$,

כלומר הראנו כי עבור $c=1$, $n_0=1$ מתקיים $\sum_{i=1}^{n} i^k\le c\cdot n^{k+1}$, $n_0<\forall n\in\mathbb{N}$, כלומר

$$(\exists c>0)\,(\exists n_0\in\mathbb{N})\,(\forall n\in\mathbb{N})\left(n_0<n\to\sum_{i=1}^{n} i^k\le c\cdot n^{k+1}\right)$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^k=O\left(n^{k+1}\right)}$

עתה נשים לב כי עבור $n\in\mathbb{N}$ זוגי מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} i^k\ge\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} i^k\ge\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n}\left(\frac{n}{2}\right)^k=\left(\frac{n}{2}\right)^{k+1}=\frac{1}{2^{k+1}}\cdot n^{k+1}\Rightarrow\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^k\ge\frac{1}{2^{k+1}}\cdot n^{k+1}}$$

ונשים לב כי עבור $n\in\mathbb{N}$ אי זוגי מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} i^k\ge\sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n} i^k\ge\sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n}\left(\frac{n+1}{2}\right)^k\ge\sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n}\left(\frac{n}{2}\right)^k=\frac{1}{2^k}\cdot n^k\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)=\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\left(n^{k+1}-n^k\right)$$

נשים לב כי $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\left(n^{k+1}-n^k\right)-\frac{1}{2^{k+2}}n^{k+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\left(\frac{1}{2}n^{k+1}-n^k\right)\right]=\infty$$

לכן $\exists N \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n \in \mathbb{N} < N$ מתקיים

$$\frac{1}{2^{k+1}} \cdot \left(\frac{1}{2}n^{k+1} - n^k\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \left(n^{k+1} - n^k\right) - \frac{1}{2^{k+2}}n^{k+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \left(n^{k+1} - n^k\right) > \frac{1}{2^{k+2}}n^{k+1}$$

כלומר $\forall n \in \mathbb{N} < N$ אי זוגי מתקיים כי

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \geq \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \left(n^{k+1} - n^k\right) \geq \frac{1}{2^{k+2}}n^{k+1} \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} i^k \geq \frac{1}{2^{k+2}}n^{k+1}}$$

ו$\forall n \in \mathbb{N} < N$ זוגי מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \geq \frac{1}{2^{k+1}} \cdot n^{k+1} \geq \frac{1}{2^{k+2}}n^{k+1} \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} i^k \geq \frac{1}{2^{k+2}}n^{k+1}}$$

לכן $\forall n \in \mathbb{N} < N$ מתקיים $\sum_{i=1}^{n} i^k \geq \frac{1}{2^{k+2}}n^{k+1}$,
כלומר הראנו כי עבור $c = \frac{1}{2^{k+2}}$, $n_0 = N$ מתקיים $\sum_{i=1}^{n} i^k \geq c \cdot n^{k+1}$, $\forall n \in \mathbb{N} < n_0$, כלומר

$$\left(\exists c > 0\right)\left(\exists n_0 \in \mathbb{N}\right)\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\left(n_0 < n \to \sum_{i=1}^{n} i^k \geq c \cdot n^{k+1}\right)$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^k = \Omega\left(n^{k+1}\right)}$,

לכן מהיות $\sum_{i=1}^{n} i^k = O\left(n^{k+1}\right)$ וגם $\sum_{i=1}^{n} i^k = \Omega\left(n^{k+1}\right)$, מההגדרה מתקיים $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta\left(n^{k+1}\right)}$

מ.ש.ל.ה.☺

(ו) **צ"ל:** $\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) = \Theta\left(\log^2(n)\right)$
הוכחה:
נסמן $n = 2^k$, לכן

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(\frac{2^k}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(2^{k-i}\right) = \log\left(\prod_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} 2^{k-i}\right)$$
$$= \log\left(2^{\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor}[k-i]}\right) = \log\left(2^{k \cdot \lfloor \log(n) \rfloor + \sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor}[-i]}\right)$$
$$= \log\left(2^{k \cdot \lfloor \log(n) \rfloor - \frac{\lfloor \log(n) \rfloor (\lfloor \log(n) \rfloor + 1)}{2}}\right) = \lfloor \log(n) \rfloor \cdot \log\left(2^{k - \frac{\lfloor \log(n) \rfloor + 1}{2}}\right)$$

נשים לב כי $\forall n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) = \lfloor \log(n) \rfloor \cdot \log\left(2^{k - \frac{\lfloor \log(n) \rfloor + 1}{2}}\right) \leq \log(n) \cdot \log\left(2^{k - \frac{\lfloor \log(n) \rfloor + 1}{2}}\right) \leq \log(n) \cdot \log\left(2^k\right)$$

$$= \log(n) \cdot \log(n) = 1 \cdot \log^2(n) \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) \leq 1 \cdot \log^2(n)}$$

כלומר הראנו כי עבור $c = 1$, $n_0 = 1$ מתקיים $\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) \leq c \cdot \log^2(n)$, $\forall n \in \mathbb{N} < n_0$, כלומר

$$\left(\exists c > 0\right)\left(\exists n_0 \in \mathbb{N}\right)\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\left(n_0 < n \to \sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) \leq c \cdot \log^2(n)\right)$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^k = O\left(\log^2(n)\right)}$

נניח כי הבסיס של הלוגשווה ל2 (מהיות $\log_a(x) = \log_b(x) \cdot c$ נוכל להוכיח רק לבסיס אחד ולהסיק את הטענה לכל בסיס).

נשים לב כי $\forall n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) &= \lfloor \log(n) \rfloor \cdot \log\left(2^{k-\frac{\lfloor \log\left(2^k\right) \rfloor + 1}{2}}\right) \geq (\log(n) - 1) \cdot \log\left(2^{k-\frac{k+1}{2}}\right)\\ &\geq (\log(n) - 1) \cdot \log\left(2^{k-\frac{k}{2}}\right) = (\log(n) - 1) \cdot \log\left(2^k\right) \cdot \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2} \cdot (\log(n) - 1) \cdot \log(n) = \frac{1}{2} \cdot (\log_2(n) - 1) \cdot \log_2(n)\end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\lim_{n \to \infty} \left[\log_2(n) - 1 - \frac{1}{2} \cdot \log_2(n)\right] = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \log_2(n) - 1\right] = \infty$$

לכן $\exists N \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n \in \mathbb{N} > N$ מתקיים

$$\frac{1}{2} \cdot \log_2(n) - 1 > 0 \Leftrightarrow \log_2(n) - 1 - \frac{1}{2} \cdot \log_2(n) > 0 \Leftrightarrow \log_2(n) - 1 > \frac{1}{2} \cdot \log_2(n)$$

לכן $\forall n \in \mathbb{N} > N$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) = \frac{1}{2} \cdot (\log_2(n) - 1) \cdot \log_2(n) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \log_2(n)\right) \cdot \log_2(n) = \frac{1}{4} \cdot \log_2^2(n)$$

כלומר הראנו כי עבור $c = \frac{1}{4}$, $n_0 = N$ מתקיים $\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) \geq c \cdot \log^2(n)$, $\forall n \in \mathbb{N} > n_0$, כלומר

$$(\exists c > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n_0 < n \to \sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) \geq c \cdot \log^2(n)\right)$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) = \Omega\left(\log^2(n)\right)}$,

לכן מהיות $\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) = O\left(\log^2(n)\right)$ וגם $\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) = \Omega\left(\log^2(n)\right)$,

מההגדרה מתקיים $\boxed{\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) = \Theta\left(\log^2(n)\right)}$

מ.ש.ל.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $f(n) = O(g(n)),\, g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$

הוכחה:

מהיות $f(n) = O(g(n))$ $\exists c_1 > 0$ ו$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n \in \mathbb{N} > n_1$ מתקיים $f(n) \leq c_1 \cdot g(n)$,

מהיות $g(n) = O(h(n))$ $\exists c_2 > 0$ ו$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall n \in \mathbb{N} > n_2$ מתקיים $g(n) \leq c_2 \cdot h(n)$,

נגדיר $N = \max\{n_1, n_2\}$, נשים לב כי $\forall n \in \mathbb{N} > N$ מתקיים

$$f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \leq c_1 \cdot (c_2 \cdot h(n)) = (c_1 \cdot c_2) \cdot h(n)$$

כלומר הראנו כי עבור $c = c_1 \cdot c_2$, $n_0 = N$ מתקיים $f(n) \le c \cdot h(n)$, $\forall n \in \mathbb{N} > n_0$, כלומר

$$(\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n_0 < n \to f(n) \le c \cdot h(n))$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{f(n) = O(h(n))}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$
הוכחה:

$$\begin{aligned}
&f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = O(g(n)) \wedge \Omega(g(n)) \\
&\quad\Leftrightarrow [(\exists c_1 > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n_1 < n \to f(n) \le c_1 \cdot g(n))] \\
&\quad\wedge [(\exists c_2 > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n_2 < n \to f(n) \ge c_2 \cdot g(n))] \\
&\quad\Leftrightarrow \left[(\exists c_1 > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\left(n_1 < n \to \frac{f(n)}{c_1} \le g(n)\right)\right] \\
&\quad\wedge \left[(\exists c_2 > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\left(n_2 < n \to \frac{f(n)}{c_2} \ge g(n)\right)\right] \\
&\quad\Leftrightarrow [(\exists c_1 > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n_1 < n \to g(n) \le c_1 \cdot f(n))] \\
&\quad\wedge [(\exists c_2 > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n_2 < n \to g(n) \ge c_2 \cdot f(n))] \\
&\quad\Leftrightarrow g(n) = O(f(n)) \wedge \Omega(f(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))
\end{aligned}$$

לכן קיבלנו כי $\boxed{f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))}$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$
הוכחה:
$\Leftarrow$: נניח כי $f(n) = O(g(n))$ ונוכיח כי $g(n) = \Omega(f(n))$
מהיות $f(n) = O(g(n))$, $\exists c_1 > 0$ ו-$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ כך ש-$\forall n \in \mathbb{N} > n_1$ מתקיים $f(n) \le c_1 \cdot g(n)$,
כלומר $\forall n \in \mathbb{N} > n_1$ מתקיים $\frac{1}{c_1} \cdot f(n) < g(n)$
כלומר הראנו כי עבור $c = \frac{1}{c_1}$, $n_0 = n_1$ מתקיים $c \cdot f(n) < g(n)$, $\forall n \in \mathbb{N} > n_0$, כלומר

$$(\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n_0 < n \to c \cdot f(n) < g(n))$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{g(n) = \Omega(f(n))}$
$\Rightarrow$: נניח כי $g(n) = \Omega(f(n))$ ונוכיח כי $f(n) = O(g(n))$
מהיות $g(n) = \Omega(f(n))$, $\exists c_1 > 0$ ו-$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ כך ש-$\forall n \in \mathbb{N} > n_1$ מתקיים $f(n) \cdot c_1 \le g(n)$,
כלומר $\forall n \in \mathbb{N} > n_1$ מתקיים $f(n) < \frac{1}{c_1} \cdot g(n)$
כלומר הראנו כי עבור $c = \frac{1}{c_1}$, $n_0 = n_1$ מתקיים $f(n) < c \cdot g(n)$, $\forall n \in \mathbb{N} > n_0$, כלומר

$$(\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n_0 < n \to f(n) < c \cdot g(n))$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{f(n) = O(g(n))}$

מ.ש.ל.ג.☺

5. **צ"ל:** נכונות האלגוריתם שהוראה בכיתה
הוכחה:
נוכיח את נכונות האלגוריתם באינדוקציה.
<u>בסיס:</u> עבור $n = 1$, האלגוריתם מחזיר את 0 שהוא פסגה של מערך a בגודל 1 מההגדרה.
<u>צעד האינדוקציה:</u> נניח שהטענה נכונה לכל $k < n$ ונוכיח שהטענה נכונה ל-n.

- אם $n=2$:
האלגוריתם מחזיר את האיבר המקסימלי בין ה2 במערך, שהוא גם פסגה מההגדרה.
- אחרת, אם $(a[mid-1]\le a[mid])\wedge(a[mid]\ge a[mid+1])$:
נובע כי mid הוא פסגה מההגדרה, והאלגוריתם מחזיר mid כנדרש
- אחרת, אם $(a[mid-1]>a[mid])$:
האלגוריתם מחזיר את הפסגה של המערך $a[left:mid-1]$,
נשים לב כי

$$mid-1-left=\frac{right-left}{2}-1-left<right-left=n$$

לכן מהנחת האינדוקציה, האלגוריתם יחזיר את הפסגה של המערך $a[left:mid-1]$ שנסמנה בM.
נראה כי M פסגה של $a[left:right]$ ונסיים.
נחלק מקרים:

  - אם $M=mid-1$, אזי $a[M]\ge a[M-1]$ (מהנחת האלגוריתם),
ומהתנאי שהנחנו מתקיים כי $a[M]=a[mid-1]>a[mid]=a[M+1]$,
לכן $(a[M-1]\le a[M])\wedge(a[M]\ge a[M+1])$, כלומר M פסגה של $a[left:right]$ מההגדרה
  - אחרת אם $M=0$, מתקיים כי $a[0]\le a[1]$ ולכן M פסגה של $a[left:right]$ מההגדרה
  - אחרתיר את הפסגה של המערך $a[mid+1:right]$,
נשים לב כי , מתקיים כי $(a[M-1]\le a[M])\wedge(a[M]\ge a[M+1])$ ולכן M פסגה של $a[left:right]$ מההגדרה

- אחרת, מהיות mid לא פסגה וגם $a[mid]\ge a[mid-1]$ נובע כי $a[mid]<a[mid+1]$
האלגוריתם מחזיר את הפסגה של המערך $a[mid+1:right]$,
נשים לב כי

$$right-mid-1=right-\frac{right-left}{2}-1<right-left=n$$

לכן מהנחת האינדוקציה, האלגוריתם יחזיר את הפסגה של המערך $a[mid+1:right]$ שנסמנה בM.
נראה כי M פסגה של $a[left:right]$ ונסיים.
נחלק מקרים:

  - אם $M=mid+1$, אזי $a[M]\ge a[M+1]$ (מהנחת האלגוריתם),
ומהתנאי שהנחנו מתקיים כי $a[M]=a[mid+1]>a[mid]=a[M-1]$,
לכן $(a[M-1]\le a[M])\wedge(a[M]\ge a[M+1])$, כלומר M פסגה של $a[left:right]$ מההגדרה
  - אחרת אם $M=right$, מתקיים כי $a[right-1]\le a[right]$ ולכן M פסגה של $a[left:right]$ מההגדרה
  - אחרת, מתקיים כי $(a[M-1]\le a[M])\wedge(a[M]\ge a[M+1])$ ולכן M פסגה של $a[left:right]$ מההגדרה

מ.ש.ל.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** דוגמא למערך שהאלגוריתם רץ 12 פעמים
הוכחה:

0	1	14	13
3	2	1	12
4	2	2	11
5	2	2	10
6	7	8	9

נשים לב שהמסלול הוא $14\to13\to12\to11\to10\to9\to8\to7\to6\to5\to4\to3\to2$,
והוא באורך 12 כנדרש!

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** אלגוריתם למציאת מקסימום ולהוכיח כי הוא ביעילות $\Theta(n)$

הוכחה:

נסתכל על האלגוריתם הבא:

```
def global_maximum(a, left=0):
    if len(a)-1 == left:
        return left
    maximum_i = global_maximum(a, left+1)
    if a[left] > a[maximum_i]:
        return left
    else:
        return maximum_i
```

<u>תחילה נוכיח נכונות באינדוקציה:</u>

<u>בסיס האינדוקציה:</u> עבור $n=1$, מתקיים כי האלגוריתם עוצר על ההתחלה ומחזיר את 0 שהוא המקסימום הגלובלי במקרה זה, כנדרש

<u>שלב האינדוקציה:</u> נניח כי הטענה נכונה לכל מערך בגודל $n-1$ ונוכיח שהאלגוריתם נכון לכל מערך בגודל n,

תחילה נשים לב כי $n \neq 1$,

נסמן ב$j = \text{global_maximum(a,left+1)}$. נשים לב כי j הוא המקסימום הגלובלי של $a\left[left+1 : left+n\right]$ מהנחת האינדוקציה.

- אם $a\left[left\right] > a\left[j\right]$, אזי $left+1 \leq \forall i \leq n$ מתקיים $\boxed{a\left[left\right] \geq a\left[i\right]} \Leftarrow a\left[left\right] > a\left[j\right] \geq a\left[i\right]$,

  לכן $left \leq \forall i \leq n$ מתקיים $\boxed{a\left[left\right] \geq a\left[i\right]}$,

  כלומר $left$ הוא המקסימום הגלובלי של $a\left[left : left+n\right]$ והאלגוריתם מחזיר אותו כנדרש

- אחרת, $a\left[j\right] \geq a\left[left\right]$ ומתקיים מהנחת האינדוקציה כי $left+1 \leq \forall i \leq n$ש$a\left[j\right] \geq a\left[i\right]$ וגם $a\left[j\right] \geq a\left[left\right]$.

  כלומר $left \leq \forall i \leq n$ מתקיים $\boxed{a\left[j\right] \geq a\left[i\right]}$,

  כלומר j הוא המקסימום הגלובלי של $a\left[left : left+n\right]$ והאלגוריתם מחזיר אותו כנדרש

עתה נראה כי האלגוריתם הוא $\Theta(n)$, נשים לב כי מתקיים $T(n) = \begin{cases} 2 & n=1 \\ T(n-1)+4 & n \neq 1 \end{cases}$,

נוכיח באינדוקציה כי $n \leq T(n) \leq 10 \cdot n$

<u>בסיס האינדוקציה:</u> $n=1$

$$1 \leq T(1) = 2 \leq 10 \cdot 1 = 10$$

כלומר הטענה נכונה ל$n=1$

<u>שלב האינדוקציה:</u> נניח כי הטענה נכונה לn ונראה שהיא נכונה ל$n+1$,

$$T(n+1) = T(n)+4 \overset{\text{induction}}{\leq} 10 \cdot n + 4 \leq 10 \cdot n + 10 = 10 \cdot (n+1)$$

$$T(n+1) = T(n)+4 \overset{\text{induction}}{\geq} n+4 \leq n+1 = (n+1)$$

כלומר הראנו כי $(n+1) \leq T(n+1) \leq 10 \cdot (n+1)$

כלומר הראנו כי עבור $c=10$, $n_0=1$ מתקיים $T(n) \leq c \cdot n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $n_0 <$, כלומר

$$(\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n_0 < n \to T(n) \leq c \cdot n)$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{T(n) = O(n)}$,

כלומר הראנו כי עבור $c=1$, $n_0=1$ מתקיים $T(n) \geq c \cdot n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $n_0 <$, כלומר

$$(\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n_0 < n \to T(n) \geq c \cdot n)$$

לכן מההגדרה מתקיים $\boxed{T(n) = \Omega(n)}$,

לכן מהיות $T(n) = O(n)$ וגם $T(n) = \Omega(n)$, מההגדרה מתקיים $\boxed{T(n) = \Theta(n)}$

מ.ש.ל.ב.☺