פתרון תרגיל מספר 12 ־ מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

16 ביוני 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** C

הוכחה:

נשים לב כי

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} C\cdot e^{-x}\cdot e^{-2y}dxdy \\ &= C\cdot\int_{0}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx\right]\cdot e^{-2y}dy = C\cdot\int_{0}^{\infty}\left[\frac{e^{-x}}{-1}\mid_{0}^{\infty}\right]\cdot e^{-2y}dy \\ &= C\cdot\int_{0}^{\infty} 1\cdot e^{-2y}dy = C\cdot\left[\frac{e^{-2y}}{-2}\mid_{0}^{\infty}\right] = C\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

לכן

$$\boxed{C=2}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{P}(X<1\cap Y>1)$ וגם $\mathbb{P}(X>1\cap Y<1)$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X<1\cap Y>1) &= \int_{-\infty}^{1}\left[\int_{1}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\right]dx = \int_{0}^{1}\left[\int_{1}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\right]dx \\ &= \int_{0}^{1}\left[\int_{1}^{\infty} 2e^{-x}\cdot e^{-2y}dy\right]dx = 2\int_{0}^{1}\left[\int_{1}^{\infty} e^{-2y}dy\right]e^{-x}dx \\ &= 2\int_{0}^{1}\left[\frac{e^{-2y}}{-2}\mid_{1}^{\infty}\right]e^{-x}dx = 2\int_{0}^{1}\left[\frac{e^{-2}}{-2}\right]e^{-x}dx \\ &= -e^{-2}\int_{0}^{1} e^{-x}dx = -e^{-2}\cdot\left(e^{-1}-1\right) = \left(1-e^{-1}\right)\cdot e^{-2}\end{aligned}$$

באופן דומה נחשב

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>1\cap Y<1) &= \int_{-\infty}^{1}\left[\int_{1}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\right]dy = \int_{0}^{1}\left[\int_{1}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\right]dy \\ &= \int_{0}^{1}\left[\int_{1}^{\infty} 2e^{-x}\cdot e^{-2y}dx\right]dy = 2\int_{0}^{1}\left[\int_{1}^{\infty} e^{-x}dx\right]\cdot e^{-2y}dy \\ &= 2\int_{0}^{1}\left[\frac{e^{-x}}{-1}\mid_{1}^{\infty}\right]\cdot e^{-2y}dy = 2\cdot e^{-1}\int_{0}^{1} e^{-2y}dy = 2\cdot e^{-1}\cdot\left[\frac{e^{-2y}}{-2}\mid_{0}^{1}\right] \\ &= e^{-1}\cdot\left(1-e^{-2}\right)\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\mathbb{P}\left(X<1\cap Y>1\right)=\left(1-e^{-1}\right)\cdot e^{-2}}$ וגם $\boxed{\mathbb{P}\left(X>1\cap Y<1\right)=e^{-1}\cdot\left(1-e^{-2}\right)}$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(X>Y\right)$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X>Y\right)&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{y}^{\infty}f_{X,Y}\left(x,y\right)dx\right]dy=\int_{0}^{\infty}\left[\int_{y}^{\infty}f_{X,Y}\left(x,y\right)dx\right]dy\\&=\int_{0}^{\infty}\left[\int_{y}^{\infty}2e^{-x}\cdot e^{-2y}dx\right]dy=2\cdot\int_{0}^{\infty}\left[\int_{y}^{\infty}e^{-x}dx\right]\cdot e^{-2y}dy\\&=2\cdot\int_{0}^{\infty}\left[\frac{e^{-x}}{-1}\mid_{y}^{\infty}\right]\cdot e^{-2y}dy=2\cdot\int_{0}^{\infty}e^{-y}\cdot e^{-2y}dy\\&=2\cdot\int_{0}^{\infty}\cdot e^{-3y}dy=2\cdot\left[\frac{e^{-3y}}{-3}\mid_{0}^{\infty}\right]=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

כלומר

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X>Y\right)=\frac{2}{3}}$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $F_X\left(t\right)$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי עבור $t\geq0$

$$\begin{aligned}F_X\left(t\right)=\mathbb{P}\left(X\leq t,Y\in\mathbb{R}\right)&=\int_{-\infty}^{t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}\left(x,y\right)dy\right]dx=\int_{0}^{t}\left[\int_{0}^{\infty}f_{X,Y}\left(x,y\right)dy\right]dx\\&=\int_{0}^{t}\left[\int_{0}^{\infty}2e^{-x}\cdot e^{-2y}dy\right]dx=2\cdot\int_{0}^{t}\left[\int_{0}^{\infty}e^{-2y}dy\right]\cdot e^{-x}dx\\&=2\cdot\int_{0}^{t}\left[\frac{e^{-2y}}{-2}\mid_{0}^{\infty}\right]\cdot e^{-x}dx=\int_{0}^{t}e^{-x}dx=\left[\frac{e^{-x}}{-1}\mid_{0}^{t}\right]=1-e^{-t}\end{aligned}$$

כלומר

$$\boxed{F_X\left(t\right)=\begin{cases}1-e^{-t} & t\geq0\\0 & else\end{cases}}$$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** $F_Y\left(t\right)$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי עבור $t\geq0$

$$\begin{aligned}F_Y\left(t\right)=\mathbb{P}\left(Y\leq t,X\in\mathbb{R}\right)&=\int_{-\infty}^{t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}\left(x,y\right)dx\right]dy=\int_{0}^{t}\left[\int_{0}^{\infty}f_{X,Y}\left(x,y\right)dx\right]dy\\&=\int_{0}^{t}\left[\int_{0}^{\infty}2e^{-x}\cdot e^{-2y}dx\right]dy=2\cdot\int_{0}^{t}\left[\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx\right]\cdot e^{-2y}dy\\&=2\cdot\int_{0}^{t}\left[\frac{e^{-x}}{-1}\mid_{0}^{\infty}\right]\cdot e^{-2y}dy=2\int_{0}^{t}e^{-2y}dy=2\left[\frac{e^{-2y}}{-2}\mid_{0}^{t}\right]=1-e^{-2t}\end{aligned}$$

כלומר

$$\boxed{F_X(t)=\begin{cases}1-e^{-2t} & t\geq 0\\ 0 & else\end{cases}}$$

מ.ש.ל.ה.☺

(ו) **צ"ל:** X,Y ב"ת

הוכחה:

נכון! נשים לב שמסעיפים ד וה נובע כי $f_X\sim\exp(1)$ ו$f_Y\sim\exp(2)$, לכן

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\left(e^{-x}\right)\cdot\left(2\cdot e^{-2y}\right) & x\geq 0,y\geq 0\\ 0 & else\end{cases}=\begin{cases}2\cdot e^{-x}\cdot e^{-2y} & x\geq 0,y\geq 0\\ 0 & else\end{cases}=f_{X,Y}(x,y)$$

לכן מהיות $f_X(x)\cdot f_Y(y)=f_{X,Y}(x,y)$ לכל x,y, נובע כי X,Y ב"ת מההגדרה

מ.ש.ל.ו.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** C

הוכחה:

נשים לב כי

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}C & 0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1-x\\ 0 & else\end{cases}=\begin{cases}C & 0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1-x\\ 0 & else\end{cases}$$

לכן

$$\begin{aligned}1&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy\right]dx=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}f_{X,Y}(x,y)\,dy\right]dx\\&=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}C\cdot dy\right]dx=C\cdot\left[\int_0^1\left[\int_0^{1-x}dy\right]dx\right]=C\cdot\int_0^1[1-x]\,dx\\&=C\cdot\left[\left(x-\frac{x^2}{2}\right)|_0^1\right]=C\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

לכן

$$\boxed{C=2}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $f_X(t)$, $f_Y(t)$

הוכחה:

נשים לב כי

$$f_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^{1-t}f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^{1-t}2\cdot dy=2(1-t)$$

ובאופן דומה נקבל כי

$$f_Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_0^{1-t}f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_0^{1-t}2\cdot dx=2(1-t)$$

לכן

$$\boxed{f_X(t)=f_Y(t)=\begin{cases}2(1-t) & 0\le t\le 1\\ 0 & else\end{cases}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** X,Y לא ב"ת

הוכחה:

נשים לב כי $0<\forall t<1$ ($t\neq\frac{1}{2}$) מתקיים

$$f_X(t)\,f_Y(t)=4(1-t)^2\overset{\cdot}{\neq}2(1-t)=f_{X,Y}(t,t)$$

לכן מההגדרה נובע כי X,Y לא ב"ת כי מכפלת ההתפלגות לא שווה להתפלגות המשותפת לקבוצה אינסופית של ערכים.

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\mathbb{P}(X<Y)$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X<Y)&=\mathbb{P}(X<Y\cap(Y\le 1-X))=\mathbb{P}(X<Y\le 1-X)\\ &=\mathbb{P}\left(\left(X\le\frac{1}{2}\right)\cap(X<Y\le 1-X)\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_x^{1-x}f_{X,Y}(x,y)\,dy\right]dx\\ &=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_x^{1-x}2\cdot dy\right]dx=2\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}[1-2x]\,dx=2\cdot\left[x-x^2\mid_0^{\frac{1}{2}}\right]\\ &=2\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי

$$\boxed{\mathbb{P}(X<Y)=\frac{1}{2}}$$

מ.ש.ל.ד.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** f_X,f_Y

הוכחה:

נשים לב כי עבור $0<t\le 1$

$$\begin{aligned}f_X(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_x^1\frac{1}{y}dy\\ &=\ln(1)-\ln(x)=-\ln(x)\end{aligned}$$

ולכן

$$\boxed{f_X(t)=\begin{cases}-\ln(t) & 0<t\le 1\\ 0 & else\end{cases}}$$

ועתה עבור $0 < t \leq 1$ נשים לב כי

$$f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^t \frac{1}{t}dx$$
$$= \frac{1}{t} \cdot \int_0^t dx = t \cdot \frac{1}{t} = 1$$

כלומר קיבלנו כי

$$\boxed{f_Y(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq 1 \\ 0 & else \end{cases} = 1_{(0,1]}(t)}$$

נשים לב שהם לא ב"ת בגלל ש

$$0 = \mathbb{P}\left(\left(X > \frac{1}{2}\right) \cap \left(Y < \frac{1}{2}\right)\right) \neq \mathbb{P}\left(X > \frac{1}{2}\right) \cdot \mathbb{P}\left(Y < \frac{1}{2}\right)$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$
הוכחה:
תחילה נחשב את $\mathbb{E}[X]$,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot -\ln(x)\,dx$$
$$\overset{F=\ln(x)}{\underset{g=x}{=}} \frac{x^2}{2} \cdot -\ln(x) \mid_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) \mid_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{2}$$
$$= -0 + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} \mid_0^1\right] = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

עתה נחשב את $\mathbb{E}[Y]$,

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y \cdot 1 \cdot dy = \left[\frac{y^2}{2} \mid_0^1\right] = \frac{1}{2}$$

כלומר קיבלנו כי

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{1}{4}, \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\mathbb{E}[XY]$
הוכחה:
לפי משפט הסטטיסטיקאי חסר ההכרה מתקיים כי

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x,y)\,dydx = \int_0^1 \left[\int_x^1 y \cdot f_{X,Y}(x,y)\,dy\right] x \cdot dx$$
$$= \int_0^1 \left[\int_x^1 y \cdot \frac{1}{y}dy\right] x \cdot dx = \int_0^1 \left[\int_x^1 dy\right] x \cdot dx = \int_0^1 [1-x]\, x \cdot dx$$
$$= \left[\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right] \mid_0^1\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

כלומר קיבלנו כי

$$\boxed{\mathbb{E}\left[XY\right]=\frac{1}{6}}$$

מ.ש.ל.ג.☺