מבני נתונים 67109
תרגיל 7

תאריך הגשה: יום שבת 18.5.19, 23:55

שאלה 1

יהי H עץ בינארי כמעט שלם עם n איברים. נניח שלכל $i \in \{2, ..., n\}$, התת עץ המושרש בקודקוד i הוא ערימת מקסימום (כלומר כולם למעט השורש). נסמן $T(n)$ כזמן הריצה של $Max\_Heapify$ על תת עץ עם n קודקודים.

1. הראו שלכל קודקוד x בעץ הנ"ל, מספר הקודקודים המקסימלי בתתי־העצים ששורשיהם הם בניו (הישירים), הוא לכל היותר $\frac{2n}{3}$.
2. הראו כי זמן הריצה של $Max\_Heapify$ מקיים $T(n) \leq T(\frac{2n}{3}) + c$, והסיקו חסם עליון לזמן הריצה.
3. ראיתם בכיתה שזמן בניית ערימה לינארי ב־n. ההוכחה לכך מתבססת על הטענה שבעץ (כמעט שלם) בעל n קודקודים, יש לכל היותר $\frac{n}{2^d}$ קודקודים בגובה d. הוכיחו באינדוקציה את הטענה.

שאלה 2

1. ראיתם בכיתה את פעולת $Extract\_Max$ וזמן הריצה שלה. נניח ואנחנו רוצים להוסיף פעולת $Extract\_Min$ לערימת מקסימום.
   - בהנחה וכל איברי הערימה שונים, היכן עשוי להימצא האיבר הקטן ביותר בערימה? הוכיחו זאת.
   - כתבו בקצרה (בלי פסאודו קוד) תיאור של המתודה $Extract\_Min$. מה יהיה זמן הריצה שלה במקרה הגרוע?
2. השתמשו במבנה הערימה על מנת להגדיר מבנה נתונים חדש, התומך בפעולות הבאות: הפעולה $Build\_Heap$ בזמן $O(n)$, בפעולות Max ו־Min בזמן $O(1)$, ובפעולות $Extract\_Max$, $Extract\_Min$, $Delete$, $Insert$ בזמן ריצה $O(\log n)$. **נמקו את זמני הריצה.**

שאלה 3

הניחו כי קיבלתם מערך ממוין A, שנרצה לעקוב אחרי החציון שלו. בנוסף נרצה לאפשר דינמיות, כלומר לאפשר הוצאת והכנסת איברים למערך, ועדיין לשמור על זמני ריצה טובים. הציעו מבנה נתונים שיתמוך בתיאור הנ"ל, ותארו במילים כיצד תוכלו לעקוב אחר החציון גם לאחר הכנסה/הוצאה של איברים, בזמן לוגריתמי (שימו לב: אין צורך לעדכן את המערך הראשוני שקיבלתם. הוא קלט סטטי, שביחס אליו אתם בונים את מבנה הנתונים החדש).

שאלה 4

1. היזכרו במתודה $Heap\_Increase\_Key(A, i, key)$ שראיתם בהרצאה, המגדילה ערך של איבר במערך:

```
Heap_Increase_Key(A, i, key):
    if key < A[i]:
        raise error
    A[i] = key
    while i>1 and A[parent(i)]<A[i]:
        swap A[i], A[parent(i)]
        i = parent(i)
```

הוכיחו את נכונותה.

2. התבוננו בפסאודו קוד של שני האלגוריתמים הבאים - 1. הכנסת איבר חדש לערימה, המתבסס על אלגוריתם הגדלת מפתח שראיתם בכיתה. 2. בניית ערימה ע"י הכנסה:

```
1. Max_Heap_Insert(A, key):
    A.heap_size = A.heap_size+1
    A[heap_size] = -∞
    Heap_Increase_Key(A, A.heap_size, key)
2.  Build_Max_Heap_insertion(A):
    A.heap_size = 1
    For i=2 to A.length:
        Max_Heap_insert(A, A[i])
```

הראו שהחסם האסימפטוטי ההדוק של **Build_Max_Heap_Insertion** על מערך בגודל n, הוא: $\Theta(n \log n)$.

שאלה 5

1. הראו שעבור ערימה בגודל n בגובה h, $\frac{3}{4}$ מן האיברים נמצאים במרחק לפחות $\frac{\log n}{2}$ מהשורש, עבור $n > 16$.
2. הסיקו חסם תחתון Ω לזמן הריצה של מיון ערימה.

שאלה 6

בהינתן ערימת מקסימום H של איברים שונים, כתבו אלגוריתם המחזיר את 10 המספרים הגדולים ביותר בזמן $O(1)$, הוכיחו את נכונותו, ונתחו והוכיחו את זמן הריצה שלו.