פתרון תרגיל מספר 1 - חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

28 במרץ 2020

שאלה 1:

סעיף 1:

צ"ל: תמיד מתקיים $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$
הוכחה:
הטענה לא נכונה!
נגדיר $\Sigma = \{0,1\}$, $L_1 = \{0\}$, $L_2 = \{1\}$,
נשים לב כי

$$
\begin{aligned}
&L_1 \cdot L_2 = \{w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\} = \{01\} \\
&L_2 \cdot L_1 = \{w_2 \cdot w_1 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\} = \{10\} \\
&L_1 \cdot L_2 = \{01\} \neq \{10\} = L_2 \cdot L_1
\end{aligned}
$$

לכן $L_1 \neq L_2$, כמו שרצינו להראות, ולכן הטענה לא נכונה.

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2:

צ"ל: אם מתקיים $L_1 \cdot L_2 = L_1 \cdot L_3$ אזי מתקיים $L_2 = L_3$
הוכחה:
הטענה לא נכונה!
נגדיר $\Sigma = \{0,1\}$, $L_1 = \Sigma^*$, $L_2 = \Sigma^*$, $L_3 = \{\varepsilon\}$,
נשים לב כי $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$ וראינו בהרצאה כי שרשור הוא פעולה סגורה תחת Σ^*, ולכן $L_1 \cdot L_2, L_1 \cdot L_3 \subseteq \Sigma^*$,
נשים לב כי $0 \in L_1$ ולכן L_1 לא ריקה.
יהי $w \in \Sigma^*$, נשים לב כי $\varepsilon \in L_2, L_3$, וגם כי $w \in L_1$ מההגדרה, לכן מההגדרה מתקיים

$$w = w \cdot \varepsilon \in L_1 \cdot L_2, L_1 \cdot L_3$$

כלומר הראנו כי $(\Sigma^* \subseteq L_1 \cdot L_2) \wedge (\Sigma^* \subseteq L_1 \cdot L_3)$,
לכן נוכל להסיק מההגדרה של שוויון קבוצות כי

$$\boxed{L_1 \cdot L_2 = \Sigma^* = L_1 \cdot L_3}$$

וגם מתקיים כי $0 \in L_2 \wedge 0 \notin L_3$, כלומר $L_2 \neq L_3$ מההגדרה.
כלומר הטענה לא נכונה, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3:

צ"ל: אם $|L_1| = \aleph_0$ וגם $\varepsilon \in L_1$ אז $L_1 = L_1^*$

הוכחה:

הטענה לא נכונה!

נגדיר $\Sigma = \{1\}$, $L_1 = \{\varepsilon\} \cup \left\{ \underbrace{1 \ldots 1}_{n \text{ times}} \mid n \equiv 1 \mod 3 \right\}$

נראה כי L_1 אינסופית.

נניח בשלילה ש־ L_1 סופית ולכן קיימת מחרוזת מאורך מקסימלי שנסמנה $w \in L_1$

עתה נשים לב כי מההגדרה המחרוזת $\underbrace{1 \ldots 1}_{3|w|+1 \text{ times}} \in L_1$ בסתירה לכך שהמחרוזת הכי ארוכה היא באורך $|w|$ כי מצאנו איבר בקבוצה שאורכו $3|w| + 1 > |w|$.

לכן נקבל כי L_1 היא אינסופית.

נשים לב כי $\varepsilon \in L_1$ מההגדרה,

נשים לב כי $11 \in L_1^*$ על ידי שרשור $1 \in L_1$ פעמיים. ($1 \in L_1$ בגלל ש־ $1 \equiv 1 \mod 3$)

וגם $11 \notin L_1$ בגלל ש־ $2 \not\equiv 1 \mod 3$.

לכן $L_1 \neq L_1^*$, כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺