פתרון תרגיל מספר 7 - תורת המשחקים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

27 במאי 2021

1. **צ"ל:** $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ זאת אסטרטגיה אופטימלית ל- 2 השחקנים
הוכחה:
נסמן $x^*=y^*=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$,
נשים לב כי

$$A\cdot y^*=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

וגם נשים לב כי

$$(x^*)^T\cdot A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}&\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}$$

לכן קיבלנו כי $(x^*)^T\cdot A=[v,v,v]$ ו- $A\cdot y^*=\begin{bmatrix}v\\v\\v\end{bmatrix}$, כאשר $v=0$,
לכן לפי השאלה הבאה, נקבל כי v הוא ערך המשחק וגם כי x^*,y^* הן אסטרטגיות אופטימליות כנדרש.

מ.ש.ל.☺

2. **צ"ל:** v הוא ערך המשחק, x היא אסטרטגיה אופטימלית של השחקן הראשון ו- y היא אסטרטגיה אופטימלית של השחקן השני
הוכחה:
נשים לב כי לכל $y'\in Y$ מתקיים

$$x^T\cdot A\cdot y'=\begin{bmatrix}v&\dots&v\end{bmatrix}\cdot y'=\sum_i v_i\cdot y'_i=\sum_i v\cdot y'_i=v\cdot\sum_i y'_i\overset{y'\in\Delta_m\to\sum y'_i=1}{=}v\cdot 1=v$$

ונשים לב כי לכל $x'\in X$ מתקיים

$$x'^T\cdot A\cdot y=x'^T\cdot\begin{bmatrix}v\\\vdots\\v\end{bmatrix}=\sum_i v_i\cdot x'_i=\sum_i v\cdot x'_i=v\cdot\sum_i x'_i\overset{x'\in\Delta_n\to\sum x'_i=1}{=}v\cdot 1=v$$

כלומר קיבלנו כי לכל $y'\in Y$ מתקיים $U(x,y')=x^T\cdot A\cdot y'=v\geq v$,
וגם לכל $x'\in X$ מתקיים $U(x',y)=x'^T\cdot A\cdot y=v\leq v$.
לכן לפי טענה 3.1 בהרצאה 6 מתקיים כי v הוא ערך המשחק.
יהי $x''\in\Delta_n$, נשים לב כי

$$\min_{y'\in\Delta_m}U(x,y')=\min_{y'\in\Delta_m}v=v=\min_{y'\in\Delta_m}\max_{x'\in\Delta_n}U(x',y')\geq\min_{y'\in\Delta_m}U(x'',y')$$

ולכן קיבלנו כי לכל $x'' \in \Delta_n$ מתקיים $\min_{y'\in\Delta_m} U(x'',y') \geq \min_{y'\in\Delta_m} U(x,y')$ ולכן x אסטרטגיה אופטימלית של השחקן הראשון.
יהי $y'' \in \Delta_m$, נשים לב כי

$$\max_{x'\in\Delta_n} U(x',y) = \max_{x'\in\Delta_n} v = v = \max_{x'\in\Delta_n} \min_{y'\in\Delta_m} U(x',y') \leq \max_{x'\in\Delta_n} U(x',y'')$$

ולכן קיבלנו כי לכל $y'' \in \Delta_m$ מתקיים $\max_{x'\in\Delta_n} U(x',y'') \leq \max_{x'\in\Delta_n} U(x',y)$ ולכן y אסטרטגיה אופטימלית של השחקן השני.

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** ערך המשחק ואסטרטגיות אופטימליות

הוכחה:
נחשב את מטריצה A, אם השחקן הראשון ניחש נכון הוא מרוויח 1 ולכן באלכסון יש 1.
עתה אם השחקן הראשון ניחש מספר גדול יותר, כלומר מתחת לאלכסון, הוא מקבל $\frac{1}{2}$.
אחרת 0.
כלומר $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$,
ננחש שיש פתרון מהצורה $A \cdot y = v \cdot 1$ כאשר $y \in \Delta_4$.
נסמן $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ ונקבל את השוויונות הבאים

$$y_1 = v, \frac{1}{2}y_1 + y_2 = v, \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 = v$$
$$\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + y_4 = v, y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1$$

מהשוויון הראשון נקבל $\boxed{y_1 = v}$, נציב בשוויון השני ונקבל

$$\frac{1}{2}v + y_2 = v \implies \boxed{y_2 = \frac{1}{2}v}$$

נציב בשוויון השלישי ונקבל

$$\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v\right) + y_3 = v \implies \boxed{y_3 = \frac{1}{4}v}$$

נציב בשוויון הרביעי ונקבל

$$\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v\right) + y_4 = v \implies \boxed{y_4 = \frac{1}{8}v}$$

נציב בשוויון האחרון ונקבל

$$v + \frac{1}{2}v + \frac{1}{4}v + \frac{1}{8}v = 1 \implies \boxed{v = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{8+4+2+1}{8}} = \frac{8}{15}}$$

כלומר קיבלנו כרגע ש־ $\boxed{v = \frac{8}{15}}$ ו־ $\boxed{y = \left(\frac{8}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right)}$,
נעשה באופן דומה ל־ x, ננחש שיש פתרון מהצורה $x^T \cdot A = v \cdot 1$ כאשר $x \in \Delta_4$.
נסמן $x = (x_1, \ldots, x_4)$ ונקבל את השוויונות הבאים

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 1, x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 1, x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 1$$
$$x_4 = 1, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

מהשוויון הרביעי נקבל $\boxed{x_4 = v}$, נציב בשוויון השלישי ונקבל

$$\frac{1}{2}v + x_3 = v \implies \boxed{x_3 = \frac{1}{2}v}$$

נציב בשוויון השני ונקבל

$$\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v\right) + x_2 = v \implies \boxed{x_2 = \frac{1}{4}v}$$

נציב בשוויון הרביעי ונקבל

$$\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v\right) + x_1 = v \implies \boxed{x_1 = \frac{1}{8}v}$$

נציב בשוויון האחרון ונקבל

$$v + \frac{1}{2}v + \frac{1}{4}v + \frac{1}{8}v = 1 \implies \boxed{v = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{8+4+2+1}{8}} = \frac{8}{15}}$$

כלומר קיבלנו כרגע ש־ $\boxed{v = \frac{8}{15}}$ ו־ $\boxed{x = \left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}\right)}$.

נשים לב שמצאנו x, y, v כך ש־ $x^T \cdot A = v \cdot 1$ וגם $A \cdot y = v \cdot 1$

לכן מהשאלה הקודמת נקבל ש־ $\boxed{v = \frac{8}{15}}$ הוא ערך המשחק, ש־ $\boxed{x = \left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}\right)}$ זאת אסטרטגיה אופטימלית לשחקן הראשון ו־ $\boxed{y = \left(\frac{8}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right)}$ זאת אסטרטגיה אופטימלית לשחקן השני.

מ.ש.ל.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** ערך המשחק ואסטרטגיות אופטימליות

הוכחה:

נשים לב ש־ x^* שהוגדר בשאלה מוגדר היטב כי לכל i מתקיים

$$\begin{aligned}\langle x^*, 1\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} x_1^* \cdot \frac{v_2}{v_1+v_2} & x_2^* \cdot \frac{v_1}{v_1+v_2} \end{bmatrix}^T, 1 \right\rangle = \frac{v_2}{v_1+v_2}\langle x_1^*, 1\rangle + \frac{v_1}{v_1+v_2}\langle x_2^*, 1\rangle \\ &= \frac{v_2}{v_1+v_2} \cdot 1 + \frac{v_1}{v_1+v_2} \cdot 1 = \frac{v_1+v_2}{v_1+v_2} = 1\end{aligned}$$

וגם כל קורדיאנטה היא בין 0 ל־ 1 כי $0 \le \frac{v_1}{v_1+v_2} \le 1$ ולכן קיבלנו ש־ x^* הוא אכן וקטור התפלגות ב־ X.

באופן דומה ל־ y^* נקבל שהוא וקטור התפלגות ב־ Y

נשים לב כי לכל $y \in Y$, ניתן לכתוב את y כ־ $y = \begin{bmatrix} y_1 \cdot p & y_2 \cdot (1-p) \end{bmatrix}$ כש p זאת ההסתברות לשחק במשחק הראשון ו־ y_1 זאת אסטרטגיה ב־ G_1 ו־ y_2 זאת אסטרטגיה ב־ G_2.

מהיות x_1^*, x_2^* אסטרטגיות אופטימליות, מתקיים כי $u_{G_2}(x_2^*, y_2) \ge v_2$ ו־ $u_{G_1}(x_1^*, y_1) \ge v_1$,

נשים לב כי

$$\begin{aligned}u_G(x^*, y) = x^* \cdot A \cdot y &= \begin{bmatrix} x_1^* \cdot \frac{v_2}{v_1+v_2} & x_2^* \cdot \frac{v_1}{v_1+v_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \cdot p & y_2 \cdot (1-p) \end{bmatrix}^T \\ &= p \cdot \frac{v_2}{v_1+v_2} \cdot x_1^* \cdot A_1 \cdot y_1 + (1-p) \cdot \frac{v_1}{v_1+v_2} \cdot x_2^* \cdot A_2 \cdot y_2 \\ &= p \cdot \frac{v_2}{v_1+v_2} \cdot u_{G_1}(x_1^*, y_1) + (1-p) \cdot \frac{v_1}{v_1+v_2} \cdot u_{G_2}(x_2^*, y_2) \\ &\ge p \cdot \frac{v_2}{v_1+v_2} \cdot v_1 + (1-p) \cdot \frac{v_1}{v_1+v_2} \cdot v_2 = \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1+v_2}\end{aligned}$$

נשים לב כי לכל $x \in X$, ניתן לכתוב את x כ־ $x = \left[\begin{array}{cc} x_1 \cdot p & x_2 \cdot (1-p) \end{array}\right]$ כש p זאת ההסתברות לשחק במשחק הראשון ו־ x_1 זאת אסטרטגיה ב־ G_1 ו־ x_2 זאת אסטרטגיה ב־ G_2.
מהיות y_1^*, y_2^* אסטרטגיות אופטימליות, מתקיים כי $u_{G_2}(x_2, y_2^*) \leq v_2$ ו־ $u_{G_1}(x_1, y_1^*) \leq v_1$,
נשים לב כי

$$\begin{aligned}
u_G(x, y^*) &= x \cdot A \cdot y^* = \left[\begin{array}{cc} x_1 \cdot p & x_2 \quad \cdot (1-p) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc} y_1 \cdot \frac{v_2}{v_1+v_2} & y_2 \cdot \frac{v_1}{v_1+v_2} \end{array}\right]^T \\
&= p \cdot \frac{v_2}{v_1+v_2} \cdot x_1 \cdot A_1 \cdot y_1^* + (1-p) \cdot \frac{v_1}{v_1+v_2} \cdot x_2 \cdot A_2 \cdot y_2^* \\
&= p \cdot \frac{v_2}{v_1+v_2} \cdot u_{G_1}(x_1, y_1^*) + (1-p) \cdot \frac{v_1}{v_1+v_2} \cdot u_{G_2}(x_2^*, y_2^*) \\
&\leq p \cdot \frac{v_2}{v_1+v_2} \cdot v_1 + (1-p) \cdot \frac{v_1}{v_1+v_2} \cdot v_2 = \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1+v_2}
\end{aligned}$$

כלומר הראנו כי $\forall y \in Y$ מתקיים $u_G(x^*, y) \geq \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1+v_2}$ ו־ $\forall x \in X$ מתקיים $u_G(x, y^*) \leq \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1+v_2}$ ולכן לפי משפט 3.1 בהרצאה 6, נקבל כי $v \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1+v_2}$ הוא ערך המשחק.
יהי $x'' \in \Delta_n$, נשים לב כי

$$\min_{y' \in \Delta_m} U(x^*, y') \geq \min_{y' \in \Delta_m} v = v = \min_{y' \in \Delta_m} \max_{x' \in \Delta_n} U(x', y') \geq \min_{y' \in \Delta_m} U(x'', y')$$

ולכן קיבלנו כי לכל $x'' \in \Delta_n$ מתקיים $\min_{y' \in \Delta_m} U(x^*, y') \geq \min_{y' \in \Delta_m} U(x'', y')$ ולכן x^* אסטרטגיה אופטימלית של השחקן הראשון.
יהי $y'' \in \Delta_m$, נשים לב כי

$$\max_{x' \in \Delta_n} U(x', y^*) \leq \max_{x' \in \Delta_n} v = v = \max_{x' \in \Delta_n} \min_{y' \in \Delta_m} U(x', y') \leq \max_{x' \in \Delta_n} U(x', y'')$$

ולכן קיבלנו כי לכל $y'' \in \Delta_m$ מתקיים $\max_{x' \in \Delta_n} U(x', y^*) \leq \max_{x' \in \Delta_n} U(x', y'')$ ולכן y^* אסטרטגיה אופטימלית של השחקן השני.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** ערך המשחק ואסטרטגיות אופטימליות
הוכחה:
נשים לב שבהוכחה של הסעיף הקודם התבססנו רק על העובדה ש־ $0 \leq \frac{v_1}{v_1+v_2}, \frac{v_2}{v_1+v_2} \leq 1$ וזה נכון גם אם $v_1, v_2 \leq 0$.
לכן מאותה הוכחה של הסעיף הקודם, נקבל כי ערך המשחק הוא $\frac{v_1 \cdot v_2}{v_1+v_2}$ והאסטרטגיות האופטימליות הן כמו שתוארו בתרגיל, לשחק אסטרטגיה אופטימלית של המשחק הראשון בהסתברות $\frac{v_2}{v_1+v_2}$ ולשחק אסטרטגיה אופטימלית של המשחק השני בהסתברות $\frac{v_1}{v_1+v_2}$.

מ.ש.ל.ב.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** ערך המשחק ואסטרטגיות אופטימליות
הוכחה:
נגדיר $x_j = y_j = \frac{\Pi_{i \neq j} \lambda_i}{\sum_{k=1}^n [\Pi_{i \neq k} \lambda_i]}$,
נגדיר $x = [x_1, \ldots, x_n]$, נשים לב כי x הוא וקטור התפלגות בגלל ש־ $0 \leq x_j \leq 1$ (המכנה מכיל את המונה וסוכם איברים אי שליליים).
וגם כי

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{j=1}^n \frac{\Pi_{i \neq j} \lambda_i}{\sum_{k=1}^n [\Pi_{i \neq k} \lambda_i]} = \frac{\sum_{j=1}^n [\Pi_{i \neq j} \lambda_i]}{\sum_{k=1}^n [\Pi_{i \neq k} \lambda_i]} = 1$$

מכיוון שכל האיברים בין 0 ל־ 1 והאיברים נסכמים ל־ 1 נקבל ש־ x וקטור התפלגות.

נסמן $v=\frac{\Pi_i\lambda_i}{\sum_{k=1}^n[\Pi_{i\neq k}\lambda_i]}$, נשים לב כי

$$\begin{aligned}
x^T\cdot A&=\left[\frac{\Pi_{i\neq 1}\lambda_i}{\sum_{k=1}^n\left[\Pi_{i\neq k}\lambda_i\right]}\cdot\lambda_1,\ldots,\frac{\Pi_{i\neq n}\lambda_i}{\sum_{k=1}^n\left[\Pi_{i\neq k}\lambda_i\right]}\cdot\lambda_n\right]\\
&=\left[\frac{\Pi_i\lambda_i}{\sum_{k=1}^n\left[\Pi_{i\neq k}\lambda_i\right]},\ldots,\frac{\Pi_i\lambda_i}{\sum_{k=1}^n\left[\Pi_{i\neq k}\lambda_i\right]}\right]=[v,\ldots,v]
\end{aligned}$$

עתה נגדיר $y=x$, נשים לב כי נשים לב כי

$$(A\cdot y)^T=\left(y^T\cdot A^T\right)\overset{\text{A diagonal}}{=}y^T\cdot A=x^T\cdot A=[v,\ldots,v]$$

ולכן $\begin{bmatrix}v\\ \vdots\\ v\end{bmatrix}=A\cdot y=[v,\ldots,v]^T$.

נשים לב שמצאנו התפלגויות x,y כך ש־ $x^T\cdot A=[v,\ldots,v]$ וגם $\begin{bmatrix}v\\ \vdots\\ v\end{bmatrix}=A\cdot y$,

ולכן משאלה 2, x,y אסטרטגיות אופטימליות של השחקן הראשון והשני בהתאמה ו־ $v=\frac{\Pi_i\lambda_i}{\sum_{k=1}^n[\Pi_{i\neq k}\lambda_i]}$ הוא ערך המשחק.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** ערך המשחק ואסטרטגיות אופטימליות

הוכחה:

נוכיח ש־ v הוא ערך המשחק ב־ A אז $-v$ הוא ערך המשחק ב־ $-A^T$.

וגם נוכיח שאם x אסטרטגיה אופטימלית של השחקן הראשון ב־ A אז x אסטרטגיה אופטימלית של השחקן השני ב־ $-A^T$ אם מתקיים $X=Y$.

נשים לב כי

$$\begin{aligned}
-v&=-\max_{x\in X}\min_{y\in Y}x^T\cdot A\cdot y=\min_{x\in X}-\min_{y\in Y}x^T\cdot A\cdot y=\min_{x\in X}\max_{y\in Y}-x^T\cdot A\cdot y\\
&=\min_{x\in X}\max_{y\in Y}x^T\cdot(-A)\cdot y=\min_{x\in X}\max_{y\in Y}y^T\cdot(-A)^T\cdot x
\end{aligned}$$

נשים לב כי $\min_{x\in X}\max_{y\in Y}y^T\cdot(-A)^T\cdot x$ הוא בדיוק ערך המשחק של $-A^T$ והראנו שהוא $-v$.

תהי x אסטרטגיה אופטימלית של השחקן הראשון ב־ A, נשים לב כי לכל $y\in Y$ מתקיים

$$x^T\cdot A\cdot y\geq v\implies -v\geq -x^T\cdot A\cdot y=x^T\cdot(-A)\cdot y=y^T\cdot(-A)^T\cdot x$$

כלומר לכל $y\in Y=X$ מתקיים $y^T\cdot(-A)^T\cdot x\leq -v$ ולכן x היא אסטרטגיה אופטימלית של השחקן השני.

באופן דומה כל אסטרטגיה אופטימלית של השחקן השני ב־ A היא אסטרטגיה אופטימלית של השחקן הראשון ב־ $-A^T$.

עתה נשתמש בלמות שלנו,

נגדיר $A=\mathrm{diag}\left(-\lambda_1,\ldots,-\lambda_n\right)$, נשים לב כי $-A^T=\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$

אז מהסעיף הקודם (כי כל הערכים העצמיים הם אי שליליים) ערך המשחק של A הוא

$$\frac{\Pi_i\left(-\lambda_i\right)}{\sum_{k=1}^n\left[\Pi_{i\neq k}\left(-\lambda_i\right)\right]}$$

לכן ערך המשחק של $-A^T$ הוא

$$\boxed{-\frac{\Pi_i\left(-\lambda_i\right)}{\sum_{k=1}^n\left[\Pi_{i\neq k}\left(-\lambda_i\right)\right]}=-\frac{\left(-1\right)^n\cdot\Pi_i\lambda_i}{\sum_{k=1}^n\left[\left(-1\right)^{n-1}\cdot\Pi_{i\neq k}\lambda_i\right]}=\frac{\Pi_i\lambda_i}{\sum_{k=1}^n\left[\Pi_{i\neq k}\lambda_i\right]}}$$

הראנו בסעיף הקודם שהאסטרטגיה האופטימלית ל־ 2 השחקנים ב־ A היא

$$x = y = \left[\frac{\Pi_{i\neq 1}\left(-\lambda_i\right)}{\sum_{k=1}^{n}\left[\Pi_{i\neq k}\left(-\lambda_i\right)\right]}\cdot -\lambda_1, \dots, \frac{\Pi_{i\neq n}\left(-\lambda_i\right)}{\sum_{k=1}^{n}\left[\Pi_{i\neq k}\left(-\lambda_i\right)\right]}\cdot -\lambda_n\right]$$

ומהלמה הקודמת זאת אלו גם אסטרטגיות אופטימליות של המשחק $-A^T$, כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** ערך המשחק ואסטרטגיות אופטימליות

הוכחה:

יהיו $\lambda_i > 0$ ו־ $\lambda_j < 0$, נשים לב כי לכל $x \in X$ מתקיים

$$x^T \cdot A \cdot e_j = x^T \cdot \lambda_j \cdot e_j = \lambda_j \cdot x_j \leq 0$$

ונשים לב כי לכל $y \in Y$ מתקיים

$$e_i^T \cdot A \cdot y = \lambda_i \cdot e_i \cdot y = \lambda_i \cdot y_i \geq 0$$

ולכן מצאנו $\boxed{y^* = e_j}$, $\boxed{x^* = e_i}$ כך ש־ $\left(x^*\right)^T \cdot A \cdot y \geq 0$ לכל $y \in Y$ וגם $x^T \cdot A \cdot \left(y^*\right) \leq 0$.

לכן לפי משפט 3.1 מהרצאה 6 נקבל שערך המשחק הוא $v = 0$.

יהי $x'' \in \Delta_n$, נשים לב כי

$$\min_{y' \in \Delta_m} U\left(x^*, y'\right) \geq \min_{y' \in \Delta_m} v = v = \min_{y' \in \Delta_m}\max_{x' \in \Delta_n} U\left(x', y'\right) \geq \min_{y' \in \Delta_m} U\left(x'', y'\right)$$

ולכן קיבלנו כי לכל $x'' \in \Delta_n$ מתקיים $\min_{y' \in \Delta_m} U\left(x^*, y'\right) \geq \min_{y' \in \Delta_m} U\left(x'', y'\right)$ ולכן x^* אסטרטגיה אופטימלית של השחקן הראשון.

יהי $y'' \in \Delta_m$, נשים לב כי

$$\max_{x' \in \Delta_n} U\left(x', y^*\right) \leq \max_{x' \in \Delta_n} v = v = \max_{x' \in \Delta_n}\min_{y' \in \Delta_m} U\left(x', y'\right) \leq \max_{x' \in \Delta_n} U\left(x', y''\right)$$

ולכן קיבלנו כי לכל $y'' \in \Delta_m$ מתקיים $\max_{x' \in \Delta_n} U\left(x', y^*\right) \leq \max_{x' \in \Delta_n} U\left(x', y''\right)$ ולכן y^* אסטרטגיה אופטימלית של השחקן השני.

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** ערך המשחק

הוכחה:

נשים לב שמחוץ לאלכסון, השחקן הראשון לא מרוויח ולכן הערך הוא 0.

באלכסון האיבר ה־ j הרווח של השחקן הראשון הוא 2^j ולכן המטריצה היא $\begin{bmatrix} 2^0 & & & \\ & 2^1 & & \\ & & 2^2 & \\ & & & 2^3 \end{bmatrix}$.

לכן לפי הסעיף הראשון של השאלה, נקבל שערך המשחק הוא

$$\begin{aligned}\frac{\Pi_i \lambda_i}{\sum_{k=1}^{n}\left[\Pi_{i\neq k}\lambda_i\right]} &= \frac{2^0\cdot 2^1\cdot 2^2\cdot 2^3}{2^1\cdot 2^2\cdot 2^3 + 2^0\cdot 2^2\cdot 2^3 + 2^0\cdot 2^1\cdot 2^3 + 2^0\cdot 2^1\cdot 2^2} \\ &= \frac{2^6}{2^6+2^5+2^4+2^3} = \frac{64}{64+32+16+8} = \frac{64}{120} = \frac{32}{60} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ד.☺