אלגברה לינארית (2) - סמסטר ב' תשע`ט - תרגיל 15

התרגיל אינו להגשה, אך החומר בתרגיל הוא חלק מהחומר לבחינה הסופית!

1. נתונים שדה $\mathbb{F}$ ומטריצות $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ חופפות זו לזו. הוכיחו כי קיים $0\neq c\in\mathbb{F}$ כך ש- $\det B=c^2\det A$.

2. תבנית בילינארית $g\colon\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_iy_j$.

   מצאו את המשלים הניצב של $Span\{v\}$ ביחס ל- g כאשר א) $v=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ ב) $v=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

3. נתונים מ"ו V ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, תבנית בילינארית סימטרית $g\colon V\times V\to\mathbb{R}$ ותת-מרחב U של V .
   Z הוא המשלים הניצב של U ביחס ל- g ו- W הוא המשלים הניצב של Z ביחס ל- g . האם בהכרח $U=W$?

4. יהי V מ"ו ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$ ו- $l_1,l_2\colon V\to\mathbb{F}$ פונקציונלים לינאריים.
   העתקה דו-מקומית $g\colon V\times V\to\mathbb{F}$ מוגדרת ע"י $g(v,w)=l_1(v)l_2(w)$.
   א) הוכיחו כי g היא תבנית בילינארית על V .
   ב) נתון גם ש- $\dim V\geqslant 2$. הוכיחו כי קיים $0\neq v\in V$ כך ש- $g(v,w)=0$ לכל $w\in V$.

5. יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ כך ש- $\mathrm{char}\mathbb{F}\neq 2$. תהי $g\colon V\times V\to\mathbb{F}$ תבנית בילינארית על V .
   הוכיחו כי קיימות תבניות בילינאריות g_1 ו- g_2 על V כך ש- g_1 סימטרית ו- g_2 אנטי-סימטרית ו- $g=g_1+g_2$.

6. נתונה מטריצה $A=\begin{bmatrix}1&3&0\\3&9&2\\0&2&0\end{bmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.
   א) מצאו מטריצה הפיכה $P\in M_3(\mathbb{R})$ כך שהמטריצה P^tAP אלכסונית.
   ב) מצאו מטריצה הפיכה $Q\in M_3(\mathbb{R})$ כך שהמטריצה Q^tAQ אלכסונית וכל מספר על האלכסון שייך לקבוצה $\{-1,0,1\}$.
   ג) האם קיימת מטריצה הפיכה $S\in M_3(\mathbb{R})$ כך שמתקיים $S^tAS=I_3$?

7. נתונה מטריצה $A=\begin{bmatrix}1&3&0\\3&9&2\\0&2&0\end{bmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$. (שימו לב שהשדה בשאלה זו הוא $\mathbb{C}$)
   א) מצאו מטריצה הפיכה $Q\in M_3(\mathbb{C})$ כך שהמטריצה Q^tAQ אלכסונית וכל מספר על האלכסון שייך לקבוצה $\{0,1\}$.
   ב) האם קיימת מטריצה הפיכה $S\in M_3(\mathbb{C})$ כך שמתקיים $S^tAS=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$?

8. נתונות מטריצות $A,B\in M_2(\mathbb{F}_5)$. האם A ו- B חופפות מעל $\mathbb{F}_5$ כאשר
   א) $A=I_2\ ,\ B=-I_2$? ב) $A=I_2\ ,\ B=2I_2$? ג) $A=I_2\ ,\ B=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$? רמז: שאלה 1 לעיל.

9. יהי $\mathbb{F}$ שדה כך ש- $\mathrm{char}\mathbb{F}\neq 2$ ותהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה סימטרית.
   הוכיחו כי קיימת מטריצה $P\in M_n(\mathbb{F})$ עם $\det(P)\in\{-1,1\}$ כך שהמטריצה P^tAP אלכסונית.

10. תהי $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ התבנית הריבועית המודגרת על ידי $q\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2-6x_2x_3-9x_3^2$.
    הגדירו משתנים חדשים x_1',x_2',x_3' המהווים ביטויים לינאריים ב- x_1,x_2,x_3 כך שבמשתנים החדשים התבנית הריבועית תיראה באופן הבא: $ax'^2+by'^2+cz'^2$, עם $a,b,c\in\{-1,0,1\}$.

11. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{C}$ עם $\dim V\geqslant 2$ ותהי $q:V\to\mathbb{C}$ תבנית ריבועית. הוכיחו כי קיים $\vec{0}\neq v\in V$ כך ש- $q(v)=0$.

12. יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ו- $q:V\to\mathbb{F}$ תבנית ריבועית. נתונים $u,w\in V$ כך ש- $q(u)=0$ ו- $q(w)=0$.
    הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות: א) אם $v\in\mathrm{Span}\{u\}$ אז $q(v)=0$. ב) אם $v\in\mathrm{Span}\{u,w\}$ אז $q(v)=0$.