פתרון תרגיל מספר 10 ־ תורת המשחקים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

17 ביוני 2021

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** למצוא מטריצה

הוכחה:

נשים לב שהמטריצה היא $\begin{bmatrix} (0,0,1) & (1,0,0) \\ (0,1,0) & (0,0,0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (0,0,0) & (0,1,0) \\ (1,0,0) & (0,0,1) \end{bmatrix}$ מההגדרה שמי שמרוויח 1 הוא זה שבחר שונה מהאחרים.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** למצוא $N.E$

הוכחה:

נשים לב ש־ $(e_2,e_1,e_1),(e_1,e_2,e_1),(e_1,e_1,e_2),(e_2,e_2,e_1),(e_2,e_1,e_2),(e_1,e_2,e_2)$ הם $N.E$ באסטרטגיות טהורות.

עתה נניח שכולם משחקים מעורב, לראשון האסטרטגיה היא $\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}$, לשני היא $\begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}$, לשלישי היא $\begin{bmatrix} r \\ 1-r \end{bmatrix}$.

מעיקרון האדישות לשחקן הראשון מתקיים

$$(1-q)\cdot(1-r) = u_1\left(e_1, \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ 1-r \end{bmatrix}\right) = u_1\left(e_2, \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ 1-r \end{bmatrix}\right) = qr$$

באופן סימטרי לשאר השחקנים נקבל את המשוואות

$$\begin{aligned}
(1-q)\cdot(1-r) = qr &\implies 1-q-r+qr = qr \implies 1 = q+r \implies \boxed{r = 1-q} \\
(1-p)\cdot(1-r) = pr &\implies 1-p-r+pr = pr \implies 1 = p+r \implies \boxed{r = 1-p} \\
(1-p)\cdot(1-q) = pq &\implies 1-p-q+pq = pq \implies 1 = p+q \implies \boxed{q = 1-p}
\end{aligned}$$

מ2 המשוואות הראשונות נסיק כי $p=q$, ומהשלישית נסיק כי $p=q=\frac{1}{2}$, נציב ונקבל כי $p=q=r=\frac{1}{2}$.

כלומר ה־ $N.E$ הם

$$(e_2,e_1,e_1),(e_1,e_2,e_1),(e_1,e_1,e_2),(e_2,e_2,e_1),(e_2,e_1,e_2),(e_1,e_2,e_2),\left(\frac{e_1+e_2}{2},\frac{e_1+e_2}{2},\frac{e_1+e_2}{2}\right)$$

מ.ש.ל.ב.☺

2. **צ"ל:** תמיד קיים משולש עם הצבעים $1,2,3$

הוכחה:

נסמן את מספר הצלעות החיצוניות בצבע $1,3$ ב־ $E^1_{1,3}$, ואת הצלעות הפנימיות ב־ $E^2_{1,3}$.

תחילה נרצה להוכיח ש־ $E^1_{1,3}=1$.

נשים לב שהצבעים הללו יכולים להופיע רק על הצלע AB,BC.

עתה נבחין שכל הצלע AB,BC צבועות בצבע 1 לכן הצלע שצבועה ב־ $1,3$ תהיה בין הנקודה הכי קרובה בצלע לקודקוד A,B,C.

נשים לב שלקודקוד A יכול להיות רק הצבעים $2,3$ ולכן לא יתרום לצלעות $1,3$ החיצוניות כי בצלע AB יהיו רק קודקודים בצבע 3 ו־ A לא יכול להיות צבוע בצבע 1.
באופן סימטרי נסיק כי קודקוד C לא תורם לצלעות $1,3$ החיצוניות.
עתה נשים לב שאם B צבוע ב־ 1 אז הוא יתרום צלע אחת עם הנקודה הכי קרובה ב־ AB ל־ B ולא יתרום בצלע BC כי היא תהיה באותו צבע כמוהו.
ואם B צבוע ב־ 3 אז הוא יתרום צלע אחת עם הנקודה הכי קרובה ב־ BC ל־ B ולא יתרום בצלע AB כי היא תהיה באותו צבע כמוהו.
כלומר קיבלנו כי $E^1_{1,3} = 1$.
עתה נשים לב שכל צלע פנימית שצבועה ב־ $1,3$ תופיע ב־ 2 משולשים אז יהיו $\boxed{E^1_{1,3} + 2 \cdot E^2_{1,3} = 1 + 2 \cdot E^2_{1,3}}$ צלעות שצבועות ב־ $1,3$ בכל המשולשים.
נסמן את מספר המשולשים עם קודקודים בצבעים a,b,c ב־ $T_{a,b,c}$.
נשים לב שיש 2 צלעות בצבע $1,3$ במשולשים $T_{1,3,3}$, באופן דומה יש 2 צלעות בצבע $1,3$ במשולשים $T_{1,1,3}$.
ויש צלע אחת בצבע $1,3$ במשולשים $T_{1,2,3}$.
לכן נקבל שמספר הצלעות בצבע $1,3$ במשולשים הוא $\boxed{T_{1,2,3} + 2 \cdot T_{1,1,3} + 2 \cdot T_{1,3,3}}$,
נשווה ונקבל כי $T_{1,2,3} = 1 + 2 \cdot \left(E^2_{1,3} - T_{1,1,3} - T_{1,3,3}\right)$,
כלומר $T_{1,2,3}$ הוא מספר טבעי אי זוגי ולכן לפחות 1, ולכן קיבלנו שיש לפחות משולש אחד עם קודקודים בצבעים $1,2,3$, כנדרש.

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** תמיד קיים מרובע עם הצבעים $1,2,3,4$

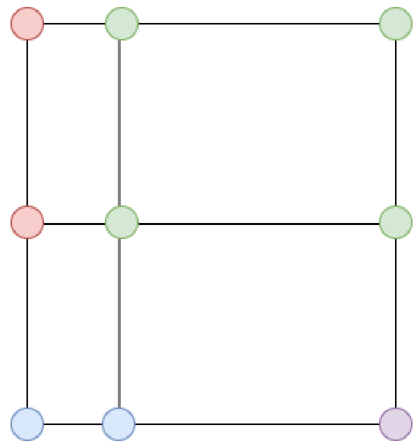
הוכחה:
נסמן את מספר הצלעות החיצוניות בצבע $1,2$ ב־ $E^1_{1,2}$, ואת הצלעות הפנימיות ב־ $E^2_{1,2}$.
נשים לב ש־ $E^1_{1,2}$ הוא מספר הצלעות בצבע $1,2$ בצלע במרובע החיצוני שהוא חד מימדי, לכן מהלמה של ספרנס מתקיים כי $E^1_{1,2} \equiv 1 \mod 2$
עתה נשים לב שכל צלע פנימית שצבועה ב־ $1,2$ תופיע ב־ 2 ריבועים אז יהיו $\boxed{E^1_{1,2} + 2 \cdot E^2_{1,2}}$ צלעות שצבועות ב־ $1,2$ בכל הריבועים.
נסמן את מספר המרובעים עם קודקודים בצבעים בסדר a,b,c,d ב־ $T_{a,b,c,d}$.
נשים לב שיש 2 צלעות בצבע $1,2$ במרובעים $T_{1,1,2,2}, T_{1,2,3,2}, T_{1,2,4,2}$.
נשים לב שיש 4 צלעות בצבע $1,2$ במרובעים $T_{1,2,1,2}$.
ויש צלע אחת בצבע $1,2$ במשולשים $T_{1,2,3,4}$.
לכן נקבל שמספר הצלעות בצבע $1,2$ במשולשים הוא

$$\boxed{T_{1,2,3,4} + T_{1,2,3,1} + T_{1,2,1,3} + T_{1,2,1,4} + T_{2,1,3,2} + T_{2,1,4,2} + 2 \cdot [T_{1,1,2,2}, T_{1,2,3,2}, T_{1,2,4,2}] + 4 \cdot T_{1,2,1,2}}$$

נשווה ונקבל כי

$$T_{1,2,3,4}+T_{1,2,3,1}+T_{1,2,1,3}+T_{1,2,1,4}+T_{2,1,3,2}+T_{2,1,4,2} = E^1_{1,2}+2\cdot\left(E^2_{1,2} - T_{1,1,2,2} - 2 \cdot T_{1,2,1,2}\right) \equiv E^1_{1,2} \equiv 1 \mod 2$$

כלומר $T_{1,2,3,4} + T_{1,2,3,1} + T_{1,2,1,3} + T_{1,2,1,4} + T_{2,1,3,2} + T_{2,1,4,2}$ הוא מספר טבעי אי זוגי ולכן לפחות 1,
נשים לב כי רוב המרובעים בסכום הם עם 3 צבעים שונים ולכן קיבלנו שיש לפחות מרובע אחד עם לפחות 3 צבעים שונים כנדרש.
נשים לב שבדוגמא הבאה אין מרובע עם כל הצבעים $1,2,3,4$



מ.ש.ל.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** הנקודה היא יחידה

הוכחה:

נניח שהקבוצה היא קמורה, נשים לב כי

$$\begin{aligned}
\|a-a'\|^2 &= \langle a-a', a-a'\rangle = \langle a-z+z-a', a-a'\rangle \\
&= \langle a-z, a-a'\rangle + \langle z-a', a-a'\rangle \\
&= -\langle a-z, a'-a\rangle - \langle a'-z, a-a'\rangle \\
&= -\left(\langle a-z, a'-a\rangle + \langle a'-z, a-a'\rangle\right) \\
&\overset{a'\in C \implies \langle a-z,a'-a\rangle\geq 0}{\leq} -\left(\langle a'-z, a-a'\rangle\right) \\
&\overset{a'\in C \implies \langle a'-z,a-a'\rangle\geq 0}{\leq} 0
\end{aligned}$$

ולכן $\|a-a'\|^2 \leq 0 \implies \|a-a'\|^2 = 0 \implies \boxed{a=a'}$.

עתה נגדיר $C=\{e_1,-e_1\}$, נשים לב כי עבור $z=0\notin C$, מתקיים כי $\|e_1-z\|,\|-e_1-z\|\leq\|x-z\|$ לכל $x\in C$ וגם מתקיים $e_1\neq -e_1$.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\|\Psi(y)-\Psi(z)\|\leq\|y-z\|$

הוכחה:

נשים לב כי $\Psi(y),\Psi(z)\in C$, לכן מהמשפט של הסעיף הקודם

$$\langle\Psi(z)-z,\Psi(y)-\Psi(z)\rangle,\langle\Psi(y)-y,\Psi(z)-\Psi(y)\rangle\geq 0$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned}
&\|\Psi(y)-\Psi(z)\|\cdot\|y-z\|\geq\langle y-z,\Psi(y)-\Psi(z)\rangle \\
&=\langle y-\Psi(y)-\Psi(z)+\Psi(z)+\Psi(y)-z,\Psi(y)-\Psi(z)\rangle \\
&=\langle y-\Psi(y),\Psi(y)-\Psi(z)\rangle+\langle\Psi(y)-\Psi(z),\Psi(y)-\Psi(z)\rangle+\langle\Psi(z)-z,\Psi(y)-\Psi(z)\rangle \\
&=\langle\Psi(y)-y,\Psi(z)-\Psi(y)\rangle+\langle\Psi(y)-\Psi(z),\Psi(y)-\Psi(z)\rangle+\langle\Psi(z)-z,\Psi(y)-\Psi(z)\rangle \\
&\overset{\Psi(y),\Psi(z)\in C,y\in\mathbb{R}^d}{\geq}\langle\Psi(y)-\Psi(z),\Psi(y)-\Psi(z)\rangle+\langle\Psi(z)-z,\Psi(y)-\Psi(z)\rangle \\
&\overset{\Psi(y),\Psi(z)\in C,z\in\mathbb{R}^d}{\geq}\langle\Psi(y)-\Psi(z),\Psi(y)-\Psi(z)\rangle=\|\Psi(y)-\Psi(z)\|^2
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי

$$\|\Psi(y)-\Psi(z)\|^2 \le \|\Psi(y)-\Psi(z)\|\cdot\|y-z\| \implies \|\Psi(y)-\Psi(z)\| \le \|y-z\|$$

כלומר Ψ ליפשיצית ולכן רציפה.

מ.ש.ל.ב.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $Imf \subseteq \Delta_3$
הוכחה:
יהי $(x,y,z)\in\Delta_3$, נשים לב כי

$$\sum_i [f(x,y,z)]_i = \frac{y+z}{2}+\frac{y}{2}+\frac{2x+z}{2} = x+y+z \overset{(x,y,z)\in\Delta_3}{=} 1$$

וגם נשים לב כי

$$[f(x,y,z)]_1 = \frac{y+z}{2} \overset{(x,y,z)\in\Delta_3}{\ge} \frac{y}{2} \overset{(x,y,z)\in\Delta_3}{\ge} 0$$
$$[f(x,y,z)]_2 = \frac{y}{2} \overset{(x,y,z)\in\Delta_3}{\ge} 0$$
$$[f(x,y,z)]_3 = \frac{2x+z}{2} \overset{(x,y,z)\in\Delta_3}{\ge} \frac{z}{2} \overset{(x,y,z)\in\Delta_3}{\ge} 0$$

כלומר הקורדינטות נסכמות ל־ 1 וכל אחד אי שלילי ולכן $f(x,y,z)\in\Delta_3$,
כלומר הראנו שלכל $(x,y,z)\in\Delta_3$ מתקיים $f(x,y,z)\in\Delta_3$ ולכן $Imf\subseteq\Delta_3$.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** נקודות שבת
הוכחה:
יהי $(x,y,z)\in\Delta_3$ נקודת שבת, אזי $f(x,y,z)=(x,y,z)$, כלומר

$$\frac{y+z}{2}=x,\ \frac{y}{2}=y,\ \frac{2x+z}{2}=z$$

מהמשוואה השנייה נקבל $\boxed{y=0}$, עתה נציב במשוואה הראשונה ונקבל $z=2x \implies \frac{z}{2}=x$.

אנחנו יודעים כי $x+y+z=1$, נציב ונקבל כי $\boxed{x=\frac{1}{3}} \implies x+0+2x=1$,

ולכן $\boxed{z=\frac{2}{3}}$,

כלומר קיבלנו כי נקודת השבת היחידה היא $\boxed{\left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right)}$

מ.ש.ל.ב.☺