פתרון תרגיל מספר 13 ־ מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

17 ביוני 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $f_{Y|X}$

הוכחה:

תחילה נחשב את $f_X(x)$, יהי $0 < x < 1$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy = \int_{x^2}^{1} \frac{3}{2} dy = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - x^2\right)$$

לכן $f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot \left(1 - x^2\right) & 0 < x < 1 \\ 0 & else \end{cases}$, לכן

$$\boxed{f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{1-x^2} & 0 < x < 1 \\ 0 & else \end{cases}}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{E}[Y \mid X]$

הוכחה:

נשים לב כי

$$\mathbb{E}[Y \mid X = x] = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f_{Y|X}(y \mid x)\, dy = \int_{x^2}^{1} \frac{y}{1-x^2} dy = \frac{1}{1-x^2} \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{1} = \frac{1}{1-x^2} \cdot \left[\frac{1-x^4}{2}\right] = \frac{1+x^2}{2}$$

כלומר

$$\boxed{\mathbb{E}[Y \mid X] = \frac{1+X^2}{2}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\mathbb{E}[Y]$

הוכחה:

נשים לב כי

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X]] = \mathbb{E}\left[\frac{1+X^2}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(1 + \mathbb{E}\left[X^2\right]\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f_X(x) \cdot dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \int_0^1 x^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1 - x^2\right) dx\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \left[\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\right]_0^1\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{15}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{10} = 0.6
\end{aligned}$$

כלומר

$$\boxed{\mathbb{E}\left[Y\right]=0.6}$$

מ.ש.ל.ג.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $f_{Y|X}$

הוכחה:

תחילה נחשב את $f_X\left(x\right)$, יהי $0<x<1$

$$f_X\left(x\right)=\int_{\mathbb{R}}f\left(x,y\right)dy=\int_0^x\frac{1}{x}\cdot dy=\frac{x}{x}=1$$

לכן $f_X\left(x\right)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$, לכן

$$\boxed{f_{Y|X}\left(y\mid x\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)}=\begin{cases}\frac{1}{x} & 0<y\leq x<1\\ 0 & else\end{cases}}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{E}\left[Y\mid X\right]$

הוכחה:

נשים לב כי

$$\mathbb{E}\left[Y\mid X=x\right]=\int_{\mathbb{R}}y\cdot f_{Y|X}\left(y\mid x\right)dy=\int_0^x\frac{y}{x}dy=\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x=\frac{x}{2}$$

כלומר

$$\boxed{\mathbb{E}\left[Y\mid X\right]=\frac{X}{2}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\mathbb{E}\left[Y\right]$

הוכחה:

נשים לב כי

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y\right]&=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y\mid X\right]\right]=\mathbb{E}\left[\frac{X}{2}\right]=\frac{1}{2}\cdot\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}}x\cdot f_X\left(x\right)\cdot dx\right)\\&=\frac{1}{2}\int_0^1x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1dx=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

כלומר

$$\boxed{\mathbb{E}\left[Y\right]=0.5}$$

מ.ש.ל.ג.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** התפלגות N_i

הוכחה:

נשים לב כי הסיכוי להצלחה הוא p_i ויש n ניסוים ולכן $N_i \sim Bin\left(n, p_i\right)$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{E}\left[N_j \mid N_i > 0\right]$

הוכחה:

$$\mathbb{E}\left[N_j\right] = \mathbb{E}\left[N_j \mid N_i > 0\right] \cdot \mathbb{P}\left(N_i > 0\right) + \mathbb{E}\left[N_j \mid N_i = 0\right] \cdot \mathbb{P}\left(N_i = 0\right)$$

$$\mathbb{E}\left[N_j \mid N_i > 0\right] = \frac{\mathbb{E}\left[N_j\right] - \mathbb{E}\left[N_j \mid N_i = 0\right] \cdot \mathbb{P}\left(N_i = 0\right)}{\mathbb{P}\left(N_i > 0\right)} = \frac{\mathbb{E}\left[N_j\right] - \mathbb{E}\left[N_j \mid N_i = 0\right] \cdot \mathbb{P}\left(N_i = 0\right)}{1 - \mathbb{P}\left(N_i = 0\right)}$$

נשים לב ש$N_i \sim Bin\left(n, p_i\right)$, וגם $N_j \sim Bin\left(n, p_j\right)$ לכן

$$\mathbb{P}\left(N_i = 0\right) = \left(1 - p_i\right)^n, \mathbb{E}\left[N_j\right] = n \cdot p_j$$

נציב ונקבל

$$\mathbb{E}\left[N_j \mid N_i > 0\right] = \frac{n \cdot p_j - \mathbb{E}\left[N_j \mid N_i = 0\right]\left(1 - p_i\right)^n}{1 - \left(1 - p_i\right)^n}$$

נחשב את $\mathbb{E}\left[N_j \mid N_i = 0\right]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[N_j \mid N_i = 0\right] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}\left(N_j = k \mid N_i = 0\right) &= \frac{\sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}\left(N_j = k \cap N_i = 0\right)}{\mathbb{P}\left(N_i = 0\right)} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n}\left[k \cdot \binom{n}{k} \cdot p_j^k \cdot \left(1 - p_i - p_j\right)^{n-k}\right]}{1 - \left(1 - p_i\right)^n} \\ &\overset{\star}{=} \frac{p_j \cdot n \cdot \left(1 - p_i\right)^{n-1}}{1 - \left(1 - p_i\right)^n}\end{aligned}$$

נשים לב כי $\star$ מתקיים מגזירה של $p_j \cdot \left(1 - p_i\right)^n$, נציב חזרה ונקבל

$$\boxed{\mathbb{E}\left[N_j \mid N_i > 0\right] = \frac{n \cdot p_j - p_j \cdot n \cdot \left(1 - p_i\right)^{n-1}}{1 - \left(1 - p_i\right)^n} = \frac{n \cdot p_j\left(1 - \left(1 - p_i\right)^{n-1}\right)}{1 - \left(1 - p_i\right)^n}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\mathbb{E}\left[N_j \mid N_i > 1\right]$

הוכחה:

$$\mathbb{E}\left[N_j\right] = \mathbb{E}\left[N_j \mid N_i > 1\right] \cdot \mathbb{P}\left(N_i > 1\right) + \mathbb{E}\left[N_j \mid N_i = 0\right] \cdot \mathbb{P}\left(N_i = 0\right) + \mathbb{E}\left[N_j \mid N_i = 1\right] \cdot \mathbb{P}\left(N_i = 1\right)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[N_j \mid N_i > 1\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[N_j\right] - \mathbb{E}\left[N_j \mid N_i = 0\right] \cdot \mathbb{P}\left(N_i = 0\right) - \mathbb{E}\left[N_j \mid N_i = 1\right] \cdot \mathbb{P}\left(N_i = 1\right)}{\mathbb{P}\left(N_i > 1\right)} \\ &= \frac{n \cdot p_j\left(1 - \left(1 - p_i\right)^{n-1}\right) - \mathbb{E}\left[N_j \mid N_i = 1\right] \cdot \mathbb{P}\left(N_i = 1\right)}{1 - \mathbb{P}\left(N_i = 0\right) - \mathbb{P}\left(N_i = 1\right)}\end{aligned}$$

נשים לב ש-$N_i \sim Bin\left(n, p_i\right)$, וגם $N_j \sim Bin\left(n, p_j\right)$ לכן

$$\mathbb{P}\left(N_i = 0\right) = \left(1 - p_i\right)^n, \mathbb{P}\left(N_i = 1\right) = n \cdot \left(1 - p_i\right)^{n-1} \cdot p_i$$

נציב ונקבל

$$\mathbb{E}\left[N_j \mid N_i > 1\right] = \frac{n \cdot p_j \left(1 - \left(1 - p_i\right)^{n-1}\right) - \mathbb{E}\left[N_j \mid N_i = 1\right] \cdot \mathbb{P}\left(N_i = 1\right)}{1 - \left(1 - p_i\right)^n - n \cdot \left(1 - p_i\right)^{n-1} \cdot p_i}$$

נחשב את $\mathbb{E}\left[N_j \mid N_i = 1\right]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[N_j \mid N_i = 1\right] &= \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \mathbb{P}\left(N_j = k \mid N_i = 1\right) = \frac{\sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}\left(N_j = k \cap N_i = 1\right)}{\mathbb{P}\left(N_i = 1\right)} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \left[k \cdot \binom{n-1}{k} \cdot p_j^k \cdot p_i \cdot \left(1 - p_i - p_j\right)^{n-k-1}\right]}{\mathbb{P}\left(N_i = 1\right)} \\
&= \frac{p_j \cdot p_i \cdot (n-1) \cdot \left(1 - p_i\right)^{n-2}}{\mathbb{P}\left(N_i = 1\right)}
\end{aligned}$$

נציב חזרה ונקבל

$$\boxed{\mathbb{E}\left[N_j \mid N_i > 1\right] = p_j \cdot \left[\frac{n \left(1 - \left(1 - p_i\right)^{n-1}\right) - p_i \cdot (n-1) \cdot \left(1 - p_i\right)^{n-2}}{1 - \left(1 - p_i\right)^n - n \cdot \left(1 - p_i\right)^{n-1} \cdot p_i}\right]}$$

מ.ש.ל.ג.☺

4. **צ"ל:** $\mathbb{E}$

הוכחה:

נגדיר X להיות משתנה מקרי של מספר השעות לפני יציאה, נשים לב כי הסיכוי לבחירת דלת הוא אחיד והוא $\frac{1}{3}$, לכן

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X \mid 3 \text{ hours door}] \cdot \mathbb{P}(3 \text{ hours door}) + \mathbb{E}[X \mid 5 \text{ hours door}] \cdot \mathbb{P}(5 \text{ hours door}) \\
&\mathbb{E}[X \mid 7 \text{ hours door}] \cdot \mathbb{P}(7 \text{ hours door}) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} + (\mathbb{E}[X] + 7) \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \mathbb{E}[X] + 5
\end{aligned}$$

לכן

$$\frac{2}{3}\mathbb{E}[X] = 5 \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[X] = 7.5}$$

מ.ש.ל.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $f_{X_{(j)}}(x) = \frac{3!}{(3-j)! \cdot (j-1)!} \cdot (F(x))^{j-1} \cdot (1 - F(x))^{3-j} \cdot f(x)$

הוכחה:

נחלק למקרים:

i. אם $j=1$, אזי

$$f_{X_{(1)}}(x)=3!\cdot\int_{x}^{\infty}\left(\int_{x_2}^{\infty}f(x_3)\,dx_3\right)f(x_2)\cdot dx_2\cdot f(x)=3!f(x)\cdot\int_{x}^{\infty}\left[(1-F(x_2))\,f(x_2)\cdot dx_2\right]$$

$$\overset{\left(-\frac{(1-F(x))^2}{2}\right)'=(1-F(x))f(x)}{=}3!f(x)\cdot((1-F(x)))\cdot\left[-\frac{(1-F(x))^2}{2}\right]_{x}^{\infty}$$

$$=3f(x)\cdot((1-F(x)))^2=\frac{3!}{(3-1)!\cdot(1-1)!}\cdot(F(x))^{1-1}\cdot(1-F(x))^{3-1}\cdot f(x)$$

ii. אם $j=2$ אזי

$$f_{X_{(2)}}(x)=3!\cdot\int_{-\infty}^{x}\left[\left(\int_{x}^{\infty}f(x_3)\,dx_3\right)f(x_1)\cdot dx_1\right]\cdot f(x)=3!f(x)\cdot\int_{-\infty}^{x}\left[(1-F(x))\,f(x_1)\cdot dx_1\right]$$

$$3!f(x)\cdot((1-F(x)))\cdot\int_{-\infty}^{x}f(x_1)\cdot dx_1=3!f(x)\cdot((1-F(x)))\cdot F(x)$$

$$=\frac{3!}{(3-2)!\cdot(2-1)!}\cdot(F(x))^{2-1}\cdot(1-F(x))^{3-2}\cdot f(x)$$

iii. אם $j=3$ אזי

$$f_{X_{(3)}}(x)=3!\cdot\int_{-\infty}^{x}\left[\left(\int_{-\infty}^{x_2}f(x_1)\,dx_1\right)f(x_2)\cdot dx_2\right]\cdot f(x)=3!f(x)\cdot\int_{-\infty}^{x}\left[F(x_2)\cdot f(x_2)\cdot dx_2\right]$$

$$\overset{\left(\frac{(F(x))^2}{2}\right)'=F(x)f(x)}{=}3!f(x)\cdot\left[\frac{(F(x))^2}{2}\right]_{-\infty}^{x}=3!f(x)\cdot\frac{(F(x))^2}{2}$$

$$=\frac{3!}{(3-3)!\cdot(3-1)!}\cdot(F(x))^{3-1}\cdot(1-F(x))^{3-3}\cdot f(x)$$

כלומר הטענה נכונה לכל $j=1,2,3$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(\frac{1}{4}<X_{(2)}<\frac{3}{4}\right)$
הוכחה:
נשים לב כי $f(x)=1$, $F(x)=x$, לכן

$$f_{X_2}(x)=3!f(x)\cdot((1-F(x)))\cdot F(x)=3!\cdot(1-x)\cdot x$$

לכן

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{4}<X_{(2)}<\frac{3}{4}\right)=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}f_{X_{(2)}}(x)\,dx=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}(3!\cdot(1-x)\cdot x)\,dx=3!\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}=\frac{11}{16}$$

לכן

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\frac{1}{4}<X_{(2)}<\frac{3}{4}\right)=\frac{11}{16}}$$

מ.ש.ל.ב.☺