

## מבני נתונים 67109 תרגיל 13

להגשה: עד ה-26/6/2019 בשעה 23:55

### שאלה 1 - ניתוח לשיעורין

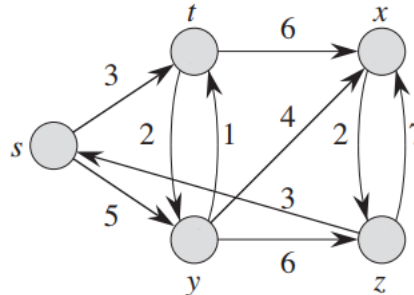
היזכרו במבנה הנתונים המופיע בנספח של תרגול 12 - המונה הבינארי. זהו מערך  $A$  בגודל  $k$  של ביטים, כך ש- $A[0]$  הביט הכי פחות משמעותי ו- $A[k-1]$  הביט הכי משמעותי. למבנה זה קיימת הפעולה  $Increment(A)$ , והצגנו ניתוח לשיעורין בשיטת החשבונאות כך שסדרת  $n$  פעולות מסוגה, עולות לנו  $O(n)$ .

עתה, נניח שאנו רוצים להוסיף פעולת  $Reset(A)$  למבנה זה, המאפסת את כל הביטים במערך, ונזכיר שהזמן שלוקח לשנות לבדוק כל תא במערך הוא  $\Theta(1)$  (כמו גישה ישירה ובודדת למערך).

הציגו באמצעות ניתוח לשיעורין בשיטת החשבונאות כיצד לממש מונה בינארי כך שכל רצף של  $n$  פעולות של  $Increment$  ו- $Reset$  יעלה לנו מחיר ל  $O(n)$ , על מונה שמאותחל ל-0 (רמז: שמרו מצביע לביט הכי משמעותי שאינו 0).

### שאלה 2 - Dijkstra

1. הריצו את אלגוריתם דייקסטרה על הגרף הבא:



ועל קודקוד ההתחלה  $s$ . רשמו את ערכי  $dist$  של כל הקודקודים בכל איטרציה.

2. מצאו דוגמה לגרף ממושקל עם משקלים שליליים כך שאלגוריתם דייקסטרה יחזיר את המרחקים הנכונים לכל קודקוד בגרף עליו נריץ אותו. הסבירו איך זה ייתכן.

3. מצאו דוגמה לגרף ממושקל עם משקלים שליליים כך שאלגוריתם דייקסטרה יחזיר מרחקים שגויים לפחות לחלק מהקודקודים בגרף עבור לפחות ריצה אחת על קודקודי הגרף.

### שאלה 3 - MST

1. יהא  $G = \langle V, E \rangle$  גרף מכוון וממושקל ע"י  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  ונניח שלכל צלע בגרף נתון לנו קירוב של משקלה ע"י  $w' : E \rightarrow \mathbb{R}$ , כך ש- $w'(e) \leq w(e) \leq 2 \cdot w'(e)$ , הוכיחו שמשקל עץ פורש מינימלי של  $G$  לפי  $w'$  הוא לכל היותר פי 2 ממשקל עץ פורש מינימלי של  $G$  לפי  $w$ .

2. הוכיחו או הפריכו: אם  $G = \langle V, E \rangle$  גרף ממושקל כך שלכל שתי צלעות  $e, e' \in E$ ,  $w(e) \neq w(e')$  אזי קיים לגרף עץ פורש מינימלי יחיד.

### שאלה 4 - Bellman Ford

יהא  $G = \langle V, E \rangle$  גרף מכוון וממושקל ע"י  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. שנו את אלגוריתם בלמן-פורד כך שיתן את הערך  $v.dist = -\infty$  לכל קודקוד  $v \in V$  כך שקיים מסלול מסלול  $s$  (הקודקוד עליו אנחנו מריצים את האלגוריתם) ל- $v$  שעובר במעגל שלילי.

2. נניח שיש ב- $G$  לפחות מעגל שלילי אחד. רשמו אלגוריתם יעיל למציאת כל הקודקודים של מעגל שלילי (כלשהו) בגרף. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

### שאלה 5 - Prim

נניח שאנחנו מריצים את אלגוריתם *Prim* בהנתן ש:

- המשקלים בגרף הם בטווח  $\{1, \dots, W\}$  עבור קבוע כלשהו  $W$ , איך נוכל לשנות את מימושנו כך שזמן הריצה ישתפר?
- כעת המשקלים בגרף הם בטווח  $\{1, \dots, |V|\}$ , נתחו את זמן הריצה של הפיתרון שהצעתם בסעיף הקודם.