פתרון תרגיל מספר 5 ־ מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

1 במאי 2019

1. **צ"ל:** $p(x)=p\cdot p(x+1)+(1-p)\cdot p(x-1)$, נוסחא ל$p(x)$

הוכחה:

נגדיר $p(x)$ = ההסתברות של השחקן יפסיד הכל כאשר הוא מתחיל עם x.$

נגדיר A = מאורע שהשחקן יפסיד הכל כאשר מתחיל מx כסף, כלומר $p(x)=\mathbb{P}(A)$

נגדיר B_1 = מאורע שמתקבל H כאשר המטבע הוטל בפעם הראשונה

נגדיר B_2 = מאורע שמתקבל T כאשר המטבע הוטל בפעם הראשונה

לכן $\Omega=B_1\cup B_2$, $B_1\cap B_2=\emptyset$,

$$p(x)=\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\mid B_1)\cdot\mathbb{P}(B_1)+\mathbb{P}(A\mid B_2)\cdot\mathbb{P}(B_2)=\mathbb{P}(A\mid B_1)\cdot p+\mathbb{P}(A\mid B_2)\cdot(1-p)$$

עתה נשים לב כי

$$\mathbb{P}(A\mid B_1)=p(x+1);\mathbb{P}(A\mid B_2)=p(x-1)$$

לכן

$$\boxed{p(x)=\mathbb{P}(A\mid B_1)\cdot p+\mathbb{P}(A\mid B_2)\cdot(1-p)=p\cdot p(x+1)+(1-p)\cdot p(x-1)}$$

בנוסף לכך נשים לב כי $\boxed{p(0)=1}$ (כי לא נשאר לשחקן כסף) ו$\boxed{p(K)=0}$ (כי השחקן לא הפסיד כסף), נשים לב כי

$$\begin{aligned}p\cdot p(x+1)+(1-p)\cdot p(x-1)&=p(x)=p\cdot p(x)+(1-p)\cdot p(x)\\ &\Rightarrow p\cdot(p(x+1)-p(x))=(1-p)\cdot(p(x)-p(x-1))\\ &\Rightarrow \frac{p}{1-p}\cdot(p(x+1)-p(x))=(p(x)-p(x-1))\end{aligned}$$

לכן באינדוקציה נקבל כי $p(x)-p(x-1)=\left(\frac{p}{1-p}\right)^{K-x}(p(K)-p(K-1))=\left(\frac{p}{1-p}\right)^{K-x}\cdot -p(K-1)$, מהיות וזה נכון לכל $x\in\mathbb{N}$, נכתוב ונקבל כי

$$-p(x)=p(K)-p(x)=(p(K)-p(K-1))+\cdots+(p(x+1)-p(x))=\sum_{i=x+1}^{K}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{K-i}\cdot -p(K-1)$$

$$=-p(K-1)\cdot\sum_{j=0}^{K-x-1}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{j}=-p(K-1)\cdot\frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{K-x}-1}{\left(\frac{p}{1-p}\right)-1}\Rightarrow\boxed{p(x)=p(K-1)\cdot\frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{K-x}-1}{\left(\frac{p}{1-p}\right)-1}}$$

עתה נשתמש בכך ש

$$p(0)=1\Rightarrow p(K-1)\cdot\frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{K}-1}{\left(\frac{p}{1-p}\right)-1}=1\Rightarrow\boxed{p(K-1)=\frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)-1}{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{K}-1}}$$

נציב ונקבל כי

$$p\left(x\right)=p\left(K-1\right)\cdot\frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{K-x}-1}{\left(\frac{p}{1-p}\right)-1}=\frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)-1}{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{K}-1}\cdot\frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{K-x}-1}{\left(\frac{p}{1-p}\right)-1}=\frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{K-x}-1}{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{K}-1}$$

לכן

$$\boxed{p\left(x\right)=\frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{K-x}-1}{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{K}-1}}$$

מ.ש.ל.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** ערך שממקסם את $Bin\left(n,p\right)$

הוכחה:

נבחר $0<k<n$, נגדיר $g\left(p\right)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot\left(1-p\right)^{n-k}$, אזי

$$\begin{aligned}g'\left(p\right)&=\binom{n}{k}\cdot\left[k\cdot p^{k-1}\cdot\left(1-p\right)^{n-k}-\left(n-k\right)\cdot p^{k}\cdot\left(1-p\right)^{n-k-1}\right]\\&=\binom{n}{k}\cdot p^{k-1}\cdot\left(1-p\right)^{n-k-1}\left[k\cdot\left(1-p\right)-\left(n-k\right)\cdot p\right]\\&=\binom{n}{k}\cdot p^{k-1}\cdot\left(1-p\right)^{n-k-1}\left[k-n\cdot p\right]\end{aligned}$$

נשים לב שהפונקציה מתאפסת עבור $x=0,1,\frac{k}{n}$, נשים לב כי $g\left(0\right)=0$ וגם $g\left(1\right)=0$ וg תמיד חיובית ולכן אינם נקודות מקסימום.

נשים לב שעבור $x<\frac{k}{n}$ מתקיים כי $g'\left(x\right)>0$ (כי הכל במכפלה חיובי חוץ מ$k-n\cdot x$ שלילי)

ועבור $x>\frac{k}{n}$ מתקיים כי $g'\left(x\right)<0$ (כי הכל במכפלה חיובי) לכן $\boxed{p=\frac{k}{n}}$ נקודת המקסימום עבור $0<k<n$,

עבור $k=0$, מתקיים כי $g\left(p\right)=\left(1-p\right)^{n}$ מתקיים כי $p=0=\frac{0}{n}=\frac{k}{n}$ הוא מקסימום בקטע $[0,1]$,

עבור $k=n$, מתקיים כי $g\left(p\right)=p^{n}$ מתקיים כי $p=1=\frac{n}{n}=\frac{k}{n}$ הוא מקסימום בקטע $[0,1]$,

לכן $0\leq\forall k\leq n$ מתקיים כי $p=\frac{k}{n}$ הוא המקסימום

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $F_{X}\left(i\right)=1-F_{Y}\left(n-1-i\right)$

הוכחה:

נשים לב כי $F_{X}\left(i\right)$ מתאר את ההסתברות שיש i הצלחות או פחות, שזה שקול לכך שיש לכל הפחות $n-i$ כשלונות.
המשתנה Y מתאר את מספר הכשלונות כשX את מספר ההצלחות לכן

$$F_{X}\left(i\right)=\mathbb{P}\left(Y\geq n-i\right)=1-\mathbb{P}\left(Y<n-i\right)=1-\mathbb{P}\left(Y\leq n-i-1\right)=1-F_{Y}\left(n-1-i\right)$$

מ.ש.ל.ב.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(X>k\right)=\left(1-p\right)^{k}$
הוכחה:

$$\mathbb{P}\left(X>k\right)=1-\mathbb{P}\left(X\leq k\right)=1-\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}\left(X=i\right)=1-\sum_{i=1}^{k}\left(1-p\right)^{i-1}\cdot p$$
$$=1-p\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(1-p\right)^{i-1}=1-p\cdot\frac{\left(1-p\right)^{k}-1}{\left(1-p\right)-1}=1-1+\left(1-p\right)^{k}=\left(1-p\right)^{k}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(X=n+k\mid X>k\right)=\mathbb{P}\left(X=n\right)$
הוכחה:
תחילה נשים לב מנוסחת ההסתברות השלמה מתקיים

$$\mathbb{P}\left(n+k\right)=\mathbb{P}\left(X=n+k\mid X>k\right)\cdot\mathbb{P}\left(X>k\right)+\mathbb{P}\left(X=n+k\mid X\leq k\right)\cdot\mathbb{P}\left(X\leq k\right)$$

נשים לב כי $X=n+k>k$, לכן $\mathbb{P}\left(X=n+k\mid X\leq k\right)=0$, לכן

$$\mathbb{P}\left(n+k\right)=\mathbb{P}\left(X=n+k\mid X>k\right)\cdot\mathbb{P}\left(X>k\right)$$
$$\mathbb{P}\left(X=n+k\mid X>k\right)=\frac{\mathbb{P}\left(n+k\right)}{\mathbb{P}\left(X>k\right)}=\frac{\left(1-p\right)^{n+k-1}\cdot p}{\left(1-p\right)^{k}}=\left(1-p\right)^{n-1}\cdot p=\mathbb{P}\left(X=n\right)$$

כלומר הראנו כי $\boxed{\mathbb{P}\left(X=n+k\mid X>k\right)=\mathbb{P}\left(X=n\right)}$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** X חייב היות Geo
הוכחה:
נסמן $\mathbb{P}\left(X=1\right)=p$, נוכיח באינדוקציה כי $\mathbb{P}\left(X=n\right)=\left(1-p\right)^{n-1}\cdot p$,
<u>בסיס:</u> $n=1$, נשים לב כי $\mathbb{P}\left(X=1\right)=p=p\cdot1=\left(1-p\right)^{0}\cdot p$, כנדרש
<u>שלב:</u> נניח שהטענה נכונה לn ונראה שהיא נכונה ל$n+1$

$$\mathbb{P}\left(X=n+1\right)=\mathbb{P}\left(X=n+1\mid X>1\right)\cdot\mathbb{P}\left(X>1\right)+\mathbb{P}\left(X=n+1\mid X\leq1\right)\cdot\mathbb{P}\left(X\leq1\right)$$

נשים לב כי $X=n+1>1$, לכן $\mathbb{P}\left(X=n+1\mid X\leq1\right)=0$,
וגם מתקיים $\mathbb{P}\left(X>1\right)=1-\mathbb{P}\left(X\leq1\right)=1-p$, לכן

$$\mathbb{P}\left(X=n+1\right)=\mathbb{P}\left(X=n+1\mid X>1\right)\cdot\mathbb{P}\left(X>1\right)=\mathbb{P}\left(X=n+1\mid X>1\right)\cdot\left(1-p\right)$$
$$\overset{\text{assumption}}{=}\mathbb{P}\left(X=n\right)\cdot\left(1-p\right)\overset{\text{induction}}{=}p\cdot\left(1-p\right)^{n-1}\cdot\left(1-p\right)=p\cdot\left(1-p\right)^{n}$$

לכן $\mathbb{P}\left(X=n+1\right)=p\cdot\left(1-p\right)^{n}$, כלומר $X\sim Geo\left(p\right)$

מ.ש.ל.ג.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** התפלגות X
הוכחה:
זה משתנה מקרי גאומטרי עם סיכוי הצלחה של $p=\frac{1}{n}$, לכן

$$\mathbb{P}\left(X=k\right)=\left(1-p\right)^{k-1}\cdot p=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{n}$$

לכן ההתפלגות היא $\left(\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{n}\right)_{k=0}^{\infty}\right)$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** התפלגות X בהנחה והוא היה זורק את המפתחות
הוכחה:
נגדיר A_j = מאורע שj מפתחות ראשונים לא הצליחו.
נוכיח באינדוקציה כי $\mathbb{P}(A_j) = \frac{n-j}{n}$,
<u>בסיס:</u> $j = 0$ מתקיים כי $\mathbb{P}(A_j) = 1$ (כי לא ניסו מפתחות עדיין)
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה לj ונראה שהיא נכונה ל$j+1$, נשים לב שמנוסחת ההסתברות השלמה מתקיים

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{j+1}) &= \mathbb{P}(A_{j+1} \mid A_j) \cdot \mathbb{P}(A_j) + \mathbb{P}\left(A_{j+1} \mid A_j^C\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_j^C\right) \\
&= \mathbb{P}(A_{j+1} \mid A_j) \cdot \frac{n-j}{n} + 0 \cdot \mathbb{P}\left(A_j^C\right) \\
&= \frac{n-j}{n} \cdot \frac{n-j-1}{n-j} = \frac{n-j-1}{n} = \frac{n-(j+1)}{n}
\end{aligned}$$

עתה נשים לב כי $\mathrm{Range}(X) = (0, \ldots, n-1)$ לכן מנוסחת ההסתברות השלמה מתקיים

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X = k \mid A_{k-1}) \cdot \mathbb{P}(A_{k-1}) + \mathbb{P}\left(X = k \mid A_{k-1}^C\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_{k-1}^C\right) \\
&= \mathbb{P}(X = k \mid A_{k-1}) \cdot \frac{n-k}{n} + 0 \cdot \mathbb{P}\left(A_{k-1}^C\right) \\
&= \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ היא ההתפלגות של X

מ.ש.ל.ב.☺

5. **צ"ל:** סיכוי שהפסק דין שנתנו המושבעים נכון
הוכחה:
נגדיר A - מאורע שהאדם הוא אשם
נגדיר B_i - מאורע שהאדם הi טוען שהאדם אשם, לכן

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_i \mid A) = 0.8 &\Rightarrow \mathbb{P}\left(B_i^C \mid A\right) = 0.2 \\
\mathbb{P}\left(B_i \mid A^C\right) = 0.1 &\Rightarrow \mathbb{P}\left(B_i^C \mid A^C\right) = 0.9
\end{aligned}$$

תחילה נחשב מה ההסתברות שבית המשפט מרשיע אדם אשם. נגדיר $X \sim Bin(12, 0.8)$ ואדם נקבע אשם כאשר $X \geq 9$, לכן

$$\mathbb{P}(X \geq 9) = \sum_{i=9}^{12} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=9}^{12} \binom{12}{i} \cdot 0.8^i \cdot 0.2^{12-i} \approx 0.7945689497600006$$

עתה נחשב מה ההסתברות שבית המשפט מזכה אדם חף מפשע. נגדיר $Y \sim Bin(12, 0.1)$ ואדם נקבע אשם כאשר $Y < 9$, לכן

$$\mathbb{P}(Y < 9) = 1 - \mathbb{P}(Y \geq 9) = 1 - \sum_{i=9}^{12} \mathbb{P}(Y = i) = 1 - \sum_{i=9}^{12} \binom{12}{i} \cdot 0.1^i \cdot 0.9^{12-i} \approx 0.999999834165$$

עתה נגדיר מאורע C להיות שבית המשפט צדק. לכן מנוסחת ההסתברות השלמה

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(C \mid A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(C \mid A^C\right) \cdot \mathbb{P}\left(A^C\right) = \mathbb{P}(C \mid A) \cdot 0.65 + \mathbb{P}\left(C \mid A^C\right) \cdot 0.35 \\
&= \mathbb{P}(X \geq 9) \cdot 0.65 + \mathbb{P}(Y < 9) \cdot 0.35 \approx 0.8664697593017504
\end{aligned}$$

כלומר $\boxed{\mathbb{P}(C) \approx 0.8664697593017504}$

מ.ש.ל.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** סיכוי שמחשב יעבוד לפחות 7 ימים ברצף

הוכחה:

נגדיר X = להיות משתנה מקרי כך שהוא מייצג את היום בו המחשב מתקלקל $X(k)=\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{10}\sim Geo\left(0.1\right)$, ההסתברות שמעניינת אותנו היא

$$\mathbb{P}\left(X>7\right)\overset{\star}{=}\left(1-\frac{1}{10}\right)^{7}=\left(\frac{9}{10}\right)^{7}$$

נשים לב כי $\star$ מתקיים משאלה 3 סעיף א'. לכן ההסתברות שמחשב יעבוד 7 ימים ברצף היא $\boxed{\mathbb{P}\left(X>7\right)=\left(\frac{9}{10}\right)^{7}}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** סיכוי שמחשב יעבוד לפחות 7 ימים ברצף

הוכחה:

נגדיר $X\sim Geo\left(\frac{M}{N+M}\right)$, הסיבה ש$X\left(k\right)$ מתאר את ההסתברות להוציא כדור שחור ביום הk, היא שניתן לחשוב על להוציא כדור שחור כהצלחה ולכך יש לנו הסתברות $\frac{M}{N+M}$, לכן

$$\boxed{X\left(k\right)=\left(\frac{N}{N+M}\right)^{k-1}\cdot\frac{M}{N+M}=\frac{N^{k-1}\cdot M}{\left(N+M\right)^{k}}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X>n\right)\overset{\star}{=}\left(1-\frac{M}{N+M}\right)^{n}=\left(\frac{N}{N+M}\right)^{7}}$$

נשים לב כי $\star$ מתקיים משאלה 3 סעיף א'.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** התפלגות X, סיכוי לא לשחק 10 משחקים עם 9 מטבעות

הוכחה:

נשים לב כי בחלק הראשון שמחשבים התפלגות, אין חשיבות לתיקו, לכן נוכל להתעלם ממנו.

בהנחה ושניהם זרקו קוביות ויצאו תוצאות שונות, ההסתברות של אריק לזכות היא 0.5 (תמיד ניתן להחליף את סדר התוצאות).

נשים לב כי $\text{Range}\left(X\right)=\left(0,\ldots,N\right)$, נשים לב כי

$$X\left(k\right)=\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{which coins for aric}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}_{\text{odds aric won those k coins}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}}_{\text{odds aric lost all other coins}}$$

לכן קיבלנו כי ההתפלגות של X זהה לההתפלגות של $Bin\left(N,0.5\right)$ וההתפלגות היא $\boxed{\left(\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)_{k=0}^{n}}$,

עתה נחשב סיכוי לא לשחק 10 עם 9 מטבעות.

נגדיר משתנה Y = הסתברות לתיקו לראשונה (כלומר $Y\left(k\right)$ זה ההסתברות שלראשונה יצא תיקו בזריקה הk)

נשים לב כי $Y\sim Geo\left(\frac{1}{6}\right)$ (כי $\frac{1}{6}$ זה ההסתברות ש2 הקוביות ייצאו זהות),

אותנו מעניינת ההסתברות שלא יצא תיקו ב9 משחקים הראשונים,

לכן

$$\boxed{\mathbb{P}\left(Y>9\right)\overset{\star}{=}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{9}=\left(\frac{5}{6}\right)^{9}}$$

נשים לב כי $\star$ מתקיים משאלה 3 סעיף א'.

מ.ש.ל.ג.☺