אלגברה לינארית 1 תשע"ח - תרגיל 8

5 ביוני 2018

שאלה 1

בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצאו בסיס לתת המרחב $U\cap W$ של $\mathbb{R}^4$ כאשר:

א') $U=\mathrm{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix}\right\}\right)$ ו-$W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4\middle| x_1+x_2+x_3-x_4=0\right\}$.

ב') $U=\mathrm{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}\right)$ ו-$W=\mathrm{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}\right)$.

שאלה 2

נתבונן ב-$\mathbb{R}^5$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. יהי W תת המרחב של $\mathbb{R}^5$ המוגדר על ידי:

$$W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^5\middle| \begin{array}{l}x_1+x_2+x_3=0\\x_3+x_4+x_5=0\end{array}\right\}$$

מצאו בסיס ל-W והשלימו אותו לבסיס של $\mathbb{R}^5$.

שאלה 3

יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{F}$, $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ בת"ל ב-V. הוכיחו שאם $\{v_{k+1},...,v_n\}$ בת"ל כך ש-$\{v_1,...,v_n\}$ הוא בסיס של V, אז $V=\mathrm{Span}(\{v_1,...,v_k\})\oplus\mathrm{Span}(\{v_{k+1},...,v_n\})$.

שאלה 4

נתבונן ב-$V=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. נגדיר:

$$\mathcal{E}=\{f\in V\mid \forall x\in\mathbb{R}:\ f(-x)=f(x)\}$$

ו-

$$\mathcal{O}=\{f\in V\mid \forall x\in\mathbb{R}:\ f(-x)=-f(x)\}$$

א') הוכיחו ש-$\mathcal{E}$ ו-$\mathcal{O}$ הם תת-מרחבים של V.

ב') הוכיחו ש-$V=\mathcal{E}\oplus\mathcal{O}$.

שאלה 5

נתבונן ב־$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. הפונקציות $f,g,h,k,l,m \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מוגדרות באופן הבא:

- $\forall x: \ f(x) = 1$.
- $\forall x: \ g(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$.
- $\forall x: \ h(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$.
- $\forall x: \ k(x) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$.
- $\forall x: \ l(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$.
- $\forall x: \ m(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & x \geq 2 \end{cases}$.

נסמן $V = \mathrm{Span}(f,g,h,l)$.

א') האם $k \in V$?

ב') האם $m \in V$?

ג') מצאו בסיס ומימד של V.

שאלה 6

נתבונן בקבוצה

$$U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a,b \in \mathbb{R} \text{ such that } \ f(x) = a\sin(x+b) \text{ for all } x \in \mathbb{R}\}$$

א') הוכיחו כי U הוא תת־מרחב של $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

ב') מצאו תת־קבוצה סופית S של U כך ש־$\mathrm{Span}(S) = U$.

הערה ־ מותר להשתמש בזהות הטריגונומטרית הבאה ללא הוכחה: $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$.

שאלה 7

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

לכל n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ תהי $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $g_n(x) = f(x-n) \ \ \forall x:$. האם הקבוצה $S = \{g_0, g_1, g_2, ...\}$ בת"ל ב־$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$?

שאלה 8

נתבונן ב-$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. הפונקציות $f,g,l \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מוגדרות באופן הבא:

- $\forall x: \; f(x) = 1$.
- $\forall x: \; g(x) = (x-1)(x+1)$.
- $\forall x: \; l(x) = x^2(x+1)$.

יהיו U,W תת המרחבים של $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המוגדרים על ידי

$$U = \mathrm{Span}(\{f,g,l\})$$

ו-

$$W = \{h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid h(0) = h(1)\}$$

מצאו בסיס ל-$U \cap W$.

שאלה 9

נתבונן ב-$V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. נגדיר

$$U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \; f(x) = f(x+2)\}$$

א') הוכיחו ש-U הוא תת-מרחב של V.

ב') האם U נוצר סופית?

שאלה 10

נתבונן ב-$V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$- מרחב הסדרות הממשיות - כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. נגדיר

$$U = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \forall n \; f(n) = f(n+2)\}$$

א') הוכיחו ש-U הוא תת-מרחב של V.

ב') האם U נוצר סופית?