פתרון תרגיל מספר 2 - אינפי 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

6 בנובמבר 2018

1. **צ"ל:** אם f אינטגרבילית ב$[a,b]$, אזי f אינטגרבילית בכל $[c,d]\subseteq[a,b]$
הוכחה:
יהי $\varepsilon>0$,
מהיות f אינטגרבילית ב$[a,b]$ קיימת חלוקה P כך ש

$$U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)\le\varepsilon$$

נגדיר $P^{*}=P\cup\left\{ c,d\right\}$,
נשים לב כי ממשפט שהוכחנו בכיתה מתקיים כי $U\left(f,P^{*}\right)\le U\left(f,P\right)$ וגם $L\left(f,P^{*}\right)\ge L\left(f,P\right)$, לכן

$$U\left(f,P^{*}\right)-L\left(f,P^{*}\right)\le U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)\le\varepsilon$$

נגדיר $P^{**}=P^{*}\cap[c,d]$, נשים לב כי

$$U\left(f,P^{**}\right)-L\left(f,P^{**}\right)=\sum_{\substack{i=1\\ \left[x_{i-1},x_{i}\right]\in[c,d]}}^{n}\left(M_{i}-m_{i}\right)\left(x_{i}-x_{i-1}\right)\overset{\star}{\le}\sum_{i=1}^{n}\left(M_{i}-m_{i}\right)\left(x_{i}-x_{i-1}\right)=U\left(f,P^{*}\right)-L\left(f,P^{*}\right)\le\varepsilon$$

כלומר, f אינטגרבילית עבור החלוקה P^{**} וגם מתקיים כי P^{**} חלוקה של $[c,d]$,
כלומר f אינטגרבילית ב$[c,d]$
כלומר f אינטגרבילית בכל $[c,d]\subseteq[a,b]$
הערה: נשים לב ש-$\star$ מתקיים כי $M_{i}-m_{i}\ge0$ וגם $x_{i}-x_{i-1}\ge0$ מההגדרה, לכן פשוט מוסיפים עוד איברים חיוביים, ולכן האי שוויון מתקיים

מ.ש.ל.☺

2. **הוכחה:**

(א) **צ"ל:** אם f אינטגרבילית ב$[a,b]$, אזי $c\cdot f$ אינטגרבילית ב $[a,b]$ וגם

$$\int_{a}^{b}c\cdot f\left(x\right)dx=c\cdot\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx$$

פתרון:
תחילה נשים לב כי $\phi\left(t\right)=c\cdot t$ רציפה בכל קטע וגם f אינטגרבילית ב$[a,b]$,
ולכן מתקיים כי $\phi\left(f\left(x\right)\right)=c\cdot f\left(x\right)$ אינטגרבילית ב$[a,b]$
תהי $P=\left\{ x_{0},\dots,x_{n}\right\}$ חלוקה של $[a,b]$ אזי

$$m_{i}^{*}=\inf\left\{ c\cdot f\left(x\right)\mid x_{i-1}\le x\le x_{i}\right\} =c\cdot\inf\left\{ f\left(x\right)\mid x_{i-1}\le x\le x_{i}\right\} =c\cdot m_{i}$$

ולכן

$$L\left(c\cdot f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}m_{i}^{*}\left(x_{i}-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}c\cdot m_{i}\left(x_{i}-x_{i-1}\right)=c\cdot\sum_{i=1}^{n}m_{i}\left(x_{i}-x_{i-1}\right)=c\cdot L\left(f,P\right)$$

כלומר $c\cdot L\left(f,P\right)=L\left(c\cdot f,P\right)$,
ולכן מתקיים כי

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b}c\cdot f\left(x\right)dx= & \underline{\int_{a}^{b}}c\cdot f\left(x\right)dx\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{ L\left(c\cdot f,P\right)\mid P\right\} =\sup\left\{ c\cdot L\left(f,P\right)\mid P\right\} \\ = & c\cdot\sup\left\{ L\left(f,P\right)\mid P\right\} \overset{\text{def}}{=}c\cdot\underline{\int_{a}^{b}}f\left(x\right)dx=c\cdot\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\end{aligned}$$

כלומר

$$\int_{a}^{b}c\cdot f\left(x\right)dx=c\cdot\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** אם f_1,f_2 אינטגרביליות ב$[a,b]$, כך ש$f_1\le f_2$ אזי

$$\int_{a}^{b}f_{1}\left(x\right)dx\le\int_{a}^{b}f_{2}\left(x\right)dx$$

פתרון:
נשים לב כי $f_1\left(x\right)\le f_2\left(x\right)$, ולכן $0\le f_2\left(x\right)-f_1\left(x\right)$, $\forall x\in[a,b]$
תהי P חלוקה, נשים לב כי

$$\begin{aligned}m_{i}\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{ f_{2}\left(x\right)-f_{1}\left(x\right)\mid x_{i-1}\le x\le x_{i}\right\} \ge\inf\left\{ 0\mid x_{i-1}\le x\le x_{i}\right\} =0\\ L\left(f,P\right)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}m_{i}\left(x_{i}-x_{i-1}\right)\ge0\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-x_{i-1}\right)=0\end{aligned}$$

נשים לב שמההנחה מתקיים כי f_1,f_2 אינטגרביליות ב$[a,b]$, ולכן מסעיף א מתקיים כי $-1\cdot f_1=-f_1$ אינטגרבילית וגם מתקיים כי f_2-f_1 אינטגרבילית ב$[a,b]$ (הוכח בתרגול 3 שאם f,g אנטגרביליות ב$[a,b]$ אז $f+g$ גם אינטגרבילית שם)

$$\int_{a}^{b}\left(f_{2}-f_{1}\right)dx=\underline{\int_{a}^{b}}\left(f_{2}-f_{1}\right)dx\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{ L\left(f,P\right)\mid P\right\} \ge\sup\left\{ 0\mid P\right\} =0$$

ולכן

$$\begin{aligned} & 0\le\int_{a}^{b}\left(f_{2}-f_{1}\right)dx=\int_{a}^{b}f_{2}\left(x\right)dx-\int_{a}^{b}f_{1}\left(x\right)dx\\ & \Rightarrow\int_{a}^{b}f_{1}\left(x\right)dx\le\int_{a}^{b}f_{2}\left(x\right)dx\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** אם f אינטגרביליות ב$[a,b]$, $|f\left(x\right)|\le M$ אזי

$$\left|\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\right|\le M\cdot\left(b-a\right)$$

פתרון:
נשים לב שמתקיים $-M\le f\left(x\right)\le M$, $\forall x\in[a,b]$
נבחר $f_1=f,f_2\left(x\right)=M$, נשים לב כי $f_1\le f_2$ ולכן מסעיף ב מתקיים

$$\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\le M\cdot\left(b-a\right)$$

נבחר $f_1 = -M, f_2(x) = f$, נשים לב כי $f_1 \le f_2$ ולכן מסעיף ב מתקיים

$$-M \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx$$

ולכן

$$-M \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M \cdot (b-a)$$
$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le M \cdot (b-a)$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** אם f אינטגרביליות ב$[a,b]$, אזי

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

פתרון:
תחילה נשים לב שמשאלה 1 מתקיים שאם f אינטגרבילית ב$[a,b]$ אז f אינטגרבילית ב$[a,c]$ וגם ב$[c,b]$,
עתה נרצה להראות שאם f אינטגרבילית ב$[a,c]$ וגם ב$[c,b]$ אז f אינטגרבילית ב$[a,b]$ ו- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
מהיות f אינטגרבילית ב$[a,c]$ וגם ב$[c,b]$ קיימות סדרות חלוקה $(P_1)_{n=1}^{\infty}$ ו$(P_2)_{n=1}^{\infty}$ של $[a,c]$ ו$[c,b]$ בהתאמה כך ש

$$\lim_{n\to\infty} U(f, P_1(n)) = \int_a^c f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} L(f, P_1(n))$$
$$\lim_{n\to\infty} U(f, P_2(n)) = \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} L(f, P_2(n))$$

נגדיר $P(n) = P_1(n) \cup P_2(n)$, נשים לב כי

$$U(f, P(n)) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} M_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{\substack{i=1 \\ x_{i-1} \in P_1(n)}}^{k} M_i (x_i - x_{i-1}) + \sum_{\substack{i=1 \\ x_{i-1} \in P_2(n)}}^{k} M_i (x_i - x_{i-1}) \overset{\text{def}}{=} U(f, P_1(n)) + U(f, P_2(n))$$
$$L(f, P(n)) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{\substack{i=1 \\ x_{i-1} \in P_1(n)}}^{k} m_i (x_i - x_{i-1}) + \sum_{\substack{i=1 \\ x_{i-1} \in P_2(n)}}^{k} m_i (x_i - x_{i-1}) \overset{\text{def}}{=} L(f, P_1(n)) + L(f, P_2(n))$$

ולכן,

$$\lim_{n\to\infty} U(f, P(n)) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_1(n)) + \lim_{n\to\infty} U(f, P_2(n)) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
$$\lim_{n\to\infty} L(f, P(n)) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_1(n)) + \lim_{n\to\infty} L(f, P_2(n)) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

נשים לב מהמשפט שהתנאים הבאים שקולים מתקיים כי f אינטגרבילית ב$[a,b]$ וגם

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

מ.ש.ל.ד.☺

3. **צ"ל:** אם f אינטגרבילית ב$[0,\Delta]$, ו$f(x)=f(x+\Delta)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ אזי f אינטגרבלית בכל קטע סגור ו$\forall a\in\mathbb{R}$

$$\int_0^{\Delta} f(x)\,dx=\int_a^{a+\Delta} f(x)\,dx$$

פתרון:
תחילה נשים לב שהוכחנו בתרגיל הקודם משפט שהינו

$$\int_a^b f(x+c)=\int_{a+c}^{b+c} f(x)$$

נשים לב ש$\exists z\in\mathbb{Z}$ כך ש$a\le z\cdot\Delta<a+\Delta$, נשים לב כי $f(x+z\cdot\Delta)=f(x)$ מההנחה על f וגם $f(x+(z-1)\cdot\Delta)=f(x)$
נסמן ב$c=(a+\Delta)-z\cdot\Delta$, נשים לב כי $0\le c\le\Delta$ לפי בחירת z
ולכן מהמשפט שהוכח בתרגיל הקודם (7א) ומשאלה 2 סעיף ד מתקיים כי

$$\begin{aligned}\int_0^{\Delta} f(x)\,dx&=\int_0^{c} f(x)\,dx+\int_c^{\Delta} f(x)\,dx=\int_0^{c} f(x+z\cdot\Delta)\,dx+\int_c^{\Delta} f(x)\,dx\\&=\int_{0+z\cdot\Delta}^{c+z\cdot\Delta} f(x)\,dx+\int_c^{\Delta} f(x)\,dx\\&=\int_{z\cdot\Delta}^{a+\Delta} f(x)\,dx+\int_c^{\Delta} f(x)\,dx\\&=\int_{z\cdot\Delta}^{a+\Delta} f(x)\,dx+\int_c^{\Delta} f(x+(z-1)\cdot\Delta)\,dx\\&=\int_{z\cdot\Delta}^{a+\Delta} f(x)\,dx+\int_{c+(z-1)\cdot\Delta}^{\Delta+(z-1)\cdot\Delta} f(x)\,dx\\&=\int_{z\cdot\Delta}^{a+\Delta} f(x)\,dx+\int_{(a+\Delta)-z\cdot\Delta+(z-1)\cdot\Delta}^{z\cdot\Delta} f(x)\,dx\\&=\int_{z\cdot\Delta}^{a+\Delta} f(x)\,dx+\int_{a}^{z\cdot\Delta} f(x)\,dx\\&=\int_{a}^{z\cdot\Delta} f(x)\,dx+\int_{z\cdot\Delta}^{a+\Delta} f(x)\,dx=\int_a^{a+\Delta} f(x)\,dx\end{aligned}$$

יהי $[a,b]\subset\mathbb{R}$ תת קטע סופי, נגדיר $m=\left\lfloor\frac{b-a}{\Delta}\right\rfloor+1$ ולכן משאלה 2ד

$$m\cdot\int_0^{\Delta} f(x)\,dx=\int_a^{a+\Delta} f(x)\,dx+\int_{a+\Delta}^{a+2\Delta} f(x)\,dx+\cdots+\int_{a+(m-1)\Delta}^{a+m\cdot\Delta} f(x)\,dx=\int_a^{a+m\cdot\Delta} f(x)\,dx$$

ולכן f אינטגרבילית ב$[a,a+m\cdot\Delta]$, נשים לב כי

$$b=(b-a)+a=a+\frac{b-a}{\Delta}\cdot\Delta\le a+\left(\left\lfloor\frac{b-a}{\Delta}\right\rfloor+1\right)\Delta=a+m\cdot\Delta$$

לכן $b\in[a,a+m\cdot\Delta]$, נשים לב כי $[a,b]\subseteq[a,a+m\cdot\Delta]$, ולכן משאלה 1 מתקיים ש$f$ אינטגרבילית ב$[a,b]$

מ.ש.ל.☺

4. **צ"ל:** אם f,h אינטגרביליות ב$[a,b]$, כך ש$f\le g\le h$ ו$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b h(x)\,dx$ אזי

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b h(x)\,dx$$

פתרון:
יהי $\varepsilon > 0$,
מהיות f,h אינטגרביליות ב$[a,b]$ קיימות חלוקות P_1 וP_2 בקטע $[a,b]$ כך ש

$$L\left(f,P_1\right) \geq \int_a^b f\left(x\right)dx - \frac{\varepsilon}{2}$$
$$U\left(h,P_2\right) \leq \int_a^b f\left(x\right)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

נגדיר $P = P_1 \cup P_2$, ולכן מתקיים כי

$$L\left(f,P\right) \geq L\left(f,P_1\right) \geq \int_a^b f\left(x\right)dx - \frac{\varepsilon}{2}$$
$$U\left(h,P\right) \leq U\left(h,P_2\right) \leq \int_a^b h\left(x\right)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

בנוסף לכך מתקיים כי

$$m_i = \inf\left\{g\left(x\right) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\right\} \geq \inf\left\{f\left(x\right) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\right\} = m_{f,i}$$
$$M_i = \sup\left\{g\left(x\right) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\right\} \leq \sup\left\{h\left(x\right) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\right\} = M_{h,i}$$

ולכן

$$L\left(g,P\right) = \sum_{i=1}^n m_i\left(x_i - x_{i-1}\right) \geq \sum_{i=1}^n m_{f,i}\left(x_i - x_{i-1}\right) = L\left(f,P\right)$$
$$U\left(g,P\right) = \sum_{i=1}^n M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) \leq \sum_{i=1}^n M_{h,i}\left(x_i - x_{i-1}\right) = U\left(h,P\right)$$

ולכן

$$\int_a^b f\left(x\right)dx - \frac{\varepsilon}{2} \leq L\left(f,P\right) \leq L\left(g,P\right) \leq U\left(g,P\right) \leq U\left(h,P\right) \leq \int_a^b h\left(x\right)dx + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f\left(x\right)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leq L\left(g,P\right) - \int_a^b f\left(x\right)dx \leq U\left(g,P\right) - \int_a^b f\left(x\right)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן

$$0 \leq U\left(g,P\right) - L\left(g,P\right) = \left(U\left(g,P\right) - \int_a^b f\left(x\right)dx\right) - \left(L\left(g,P\right) - \int_a^b f\left(x\right)dx\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
$$\Rightarrow U\left(g,P\right) - L\left(g,P\right) \leq \varepsilon$$

ולכן ממהמשפט שהתנאים שקולים מתקיים כי g אינטגרבילית, ולכן משאלה 2 סעיף ב מתקיים

$$\int_a^b f\left(x\right)dx \leq \int_a^b g\left(x\right)dx$$
$$\int_a^b g\left(x\right)dx \leq \int_a^b h\left(x\right)dx = \int_a^b f\left(x\right)dx$$

כלומר

$$\int_a^b f\left(x\right)dx \leq \int_a^b g\left(x\right)dx \leq \int_a^b f\left(x\right)dx$$

ולכן

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b h(x)\,dx$$

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:** אם f אינטגרביליות ב$[a,b]$, כך ש$|f(x)|\geq c$ אזי $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית ב$[a,b]$
פתרון:
יהי $\varepsilon>0$, מהיות f אינטגרבילית ב$[a,b]$ קיימת P חלוקה של $[a,b]$ כך ש

$$U(f,P)-L(f,P)\leq c^2\cdot\varepsilon$$

יהיו $x^*,x^{**}\in[x_{i-1},x_i]$

$$\left|\frac{1}{f(x^*)}-\frac{1}{f(x^{**})}\right|=\left|\frac{f(x^{**})-f(x^*)}{f(x^*)f(x^{**})}\right|\leq\frac{1}{c^2}\cdot|f(x^{**})-f(x^*)|\leq\frac{1}{c^2}(M_i-m_i)$$

נגדיר

$$x_i^*=\sup\left\{\frac{1}{f}\mid x_{i-1}\leq x\leq x_i\right\}$$
$$x_i^{**}=\inf\left\{\frac{1}{f}\mid x_{i-1}\leq x\leq x_i\right\}$$

לכן

$$U\left(\frac{1}{f},P\right)-L\left(\frac{1}{f},P\right)=\sum_{i=1}^{n}(x_i^*-x_i^{**})(x_i-x_{i-1})\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c^2}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})$$
$$=\frac{1}{c^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})\leq\frac{1}{c^2}\cdot c^2\cdot\varepsilon=\varepsilon$$

נשים לב מהמשפט שהתנאים הבאים שקולים מתקיים כי $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית ב$[a,b]$

מ.ש.ל.☺

6. **צ"ל:** הוכח \ הפרך: $f:[a,b]\to[c,d]$ ו$g:[c,d]\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות בקטעים שלהן,
לg יש נקודת אי רציפות אחת, אזי $g\circ f$ אינטגרבילית ב$[a,b]$
פתרון:
לא נכון! נבחר $f:[0,1]\to[0,1]$ ו$g:[0,1]\to[0,1]$ באופן הבא:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},\gcd(p,q)=1,q\in\mathbb{N}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$
$$g(x)=\begin{cases}1 & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

נשים לב כי g רציפה בכל נקודה חוץ מ$x=0$, בגלל שהיא הפונקציה הקבועה שם,
נשים לב כי בתרגול ראינו שf אינטגרבילית בקטע $[0,1]$
נשים לב כי g רציפה חוץ ממספר סופי של נקודות בקטע $[0,1]$ ולכן היא אינטגרבילית בקטע $[0,1]$,
ולכן אם הטענה נכונה נקבל כי $g\circ f:[0,1]\to[0,1]$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$,
נשים לב כי

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}g\left(\frac{1}{q}\right) & x\in\mathbb{Q}\\ g(0) & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}=D(x)$$

ראינו בכיתה כי $D(x)$ לא אינטגרבילית בקטע $[0,1]$,
ולכן הטענה לא נכונה כי f,g איטנגרביליות ב$[0,1]$, לg יש נקודת אי רציפות אחת, וגם $g\circ f=D$ לא אינטגרבילית ב$[0,1]$

מ.ש.ל.☺