פתרון תרגיל מספר 13 ־ לינארית 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

16 ביוני 2019

1. **צ"ל:** קיימת $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ יחידה על V כך שB בסיס אורתונומלי
הוכחה:
תחילה נשים לב שאם B בסיס אורתונורמלי ביחס ל$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ אז לפי פרסבל מתקיים כי $\forall u, v \in V$

$$\langle u \mid v \rangle = \overline{[u]_B^t} \cdot [v]_B$$

לכן $\langle u \mid v \rangle = \overline{[u]_B^t} \cdot [v]_B$ היא העתקה **שמקיימת את הנדרש**. נניח בשלילה שקיימות 2 מכפלות שמקיימות את התנאי אזי נקבל מפרסבל שמתקיים $\forall u, v \in V$

$$\langle u \mid v \rangle_1 = \overline{[u]_B^t} \cdot [v]_B = \langle u \mid v \rangle_2$$

כלומר קיבלנו שזוהי אותה מכפלה, כלומר מכפלה המקיימת תנאי זה הינה **יחידה.**

מ.ש.ל.☺

2. **צ"ל:** $T = R_U$
הוכחה:
תחילה נשים לב שמהיות T הוא אופרטור אורתוגונלי לכסין, אז לכל λ ערך עצמי מתקיים $|\lambda| = 1$, ומהיות $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, נובע כי $\lambda = 1, -1$.
מהיות T לכסין, קיים בסיס מלכסן $\mathcal{B}$ שמכיל רק וקטורים עצמיים.
נסמן ב$\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$ את הוקטורים העצמיים שהערך העצמי שלהם הוא 1,
נסמן ב$\mathcal{B}_2 = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1$, נשים לב כי $\mathcal{B}_2$ מכיל את כל הוקטורים העצמיים שהערך העצמי שהם הוא -1 (מהיות הוא מכיל רק וקטורים שהערך העצמי שלהם הוא $1, -1$),
נשים לב כי

$$V = \text{span}\{\mathcal{B}\} = \text{span}\{\mathcal{B}_1\} \oplus \text{span}\{\mathcal{B}_2\} = V_1 \oplus V_{-1}$$

הערה: $\text{span}\{\mathcal{B}_1\} \cap \text{span}\{\mathcal{B}_2\} = \emptyset$ מהיות $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ בסיס.
יהי $v \in V$, אזי $\exists v_1 \in V_1$, $\exists v_{-1} \in V_{-1}$ כך ש$v = v_1 + v_{-1}$, לכן

$$T(v) = T(v_1 + v_{-1}) = T(v_1) + T(v_{-1}) = v_1 - v_{-1} = R_{V_1}(v)$$

כלומר עבור $\boxed{U = V_1}$, $\forall v \in V$ מתקיים $T(v) = R_U(v)$, כלומר

$$\boxed{T = R_U, U = V_1}$$

מ.ש.ל.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $(S+T)^*=S^*+T^*$
הוכחה:
יהיו $u,v\in V$ אזי

$$\begin{aligned}\left\langle (S+T)^*(u)\mid v\right\rangle &= \langle u\mid (S+T)(v)\rangle = \langle u\mid S(v)\rangle + \langle u\mid T(v)\rangle = \langle S^*(u)\mid v\rangle + \langle T^*(u)\mid v\rangle\\ &= \langle S^*(u)+T^*(u)\mid v\rangle = \langle (S^*+T^*)(u)\mid v\rangle\end{aligned}$$

לכן

$$0=\left\langle (S+T)^*(u)-(S^*+T^*)(u)\mid v\right\rangle$$

מהיות וזה נכון לכל $v\in V$, נציב $v=(S+T)^*(u)-(S^*+T^*)(u)$, ונקבל

$$\begin{aligned}0&=\left\langle (S+T)^*(u)-(S^*+T^*)(u)\mid (S+T)^*(u)-(S^*+T^*)(u)\right\rangle\\ &\Rightarrow (S+T)^*(u)-(S^*+T^*)(u)=0\Rightarrow \boxed{(S+T)^*(u)=(S^*+T^*)(u)}\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $(S^*+T^*)(u)=(S+T)^*(u)$, $\forall u\in V$, כלומר

$$\boxed{(S+T)^*=S^*+T^*}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $(S\circ T)^*=T^*\circ S^*$
הוכחה:
יהיו $u,v\in V$ אזי

$$\begin{aligned}\left\langle (S\circ T)^*(u)\mid v\right\rangle &= \langle u\mid (S\circ T)(v)\rangle = \langle u\mid S(T(v))\rangle = \langle S^*(u)\mid T(v)\rangle\\ &= \langle T^*(S^*(u))\mid v\rangle = \langle (T^*\circ S^*)(u)\mid v\rangle\end{aligned}$$

לכן

$$0=\left\langle (S\circ T)^*(u)-(T^*\circ S^*)(u)\mid v\right\rangle$$

מהיות וזה נכון לכל $v\in V$, נציב $v=(S\circ T)^*(u)-(T^*\circ S^*)(u)$, ונקבל

$$\begin{aligned}0&=\left\langle (S\circ T)^*(u)-(T^*\circ S^*)(u)\mid (S\circ T)^*(u)-(T^*\circ S^*)(u)\right\rangle\\ &\Rightarrow (S\circ T)^*(u)-(T^*\circ S^*)(u)=0\Rightarrow \boxed{(S\circ T)^*(u)=(T^*\circ S^*)(u)}\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $(S\circ T)^*(u)=(T^*\circ S^*)(u)$, $\forall u\in V$, כלומר

$$\boxed{(S\circ T)^*=T^*\circ S^*}$$

מ.ש.ל.ב.☺

4. **צ"ל:** $(ImT)^\perp=\ker T^*$
הוכחה:
נשים לב כי

$$\begin{aligned}s^\perp\in(ImT)^\perp &\Leftrightarrow (\forall s\in ImT)\left(\left\langle s^\perp,s\right\rangle=0\right)\Leftrightarrow(\forall v\in V)\left(\left\langle s^\perp,T(v)\right\rangle=0\right)\\ &\Leftrightarrow(\forall v\in V)\left(\left\langle T^*\left(s^\perp\right),v\right\rangle=0\right)\end{aligned}$$

יהי $s^{\perp}\in(ImT)^{\perp}$, עתה מתקיים $(\forall v\in V)\left(\left\langle T^{*}\left(s^{\perp}\right),v\right\rangle =0\right)$,
אם נציב $v=T^{*}\left(s^{\perp}\right)$, נקבל כי $\left\langle T^{*}\left(s^{\perp}\right),T^{*}\left(s^{\perp}\right)\right\rangle =0$, כלומר $T^{*}\left(s^{\perp}\right)=0$, כלומר $s^{\perp}\in\ker T^{*}$,
לכן $\boxed{(ImT)^{\perp}\subseteq\ker T^{*}}$.
עתה יהי $\forall s\in\ker T^{*}$ מתקיים $(\forall v\in V)\left(\left\langle T^{*}\left(s^{\perp}\right),v\right\rangle =\langle0,v\rangle=0\right)$, לכן מהשורת אם"ם שהראנו קודם, מתקיים כי $s^{\perp}\in(ImT)^{\perp}$, כלומר $\boxed{\ker T^{*}\subseteq(ImT)^{\perp}}$, לכן

$$\boxed{(ImT)^{\perp}=\ker T^{*}}$$

מ.ש.ל.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\ker T^{*}=\ker T$

הוכחה:

לא נכון! נבחר $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y\\0\end{bmatrix}$, נשים לב כי $T^{*}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\x\end{bmatrix}$.

עתה נשים לב כי $T\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)=0$ וגם $T^{*}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\neq0$, לכן $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\in\ker T$ וגם $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\notin\ker T^{*}$,
כלומר $\boxed{\ker T\neq\ker T^{*}}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\ker\left(T^{*}\circ T\right)=\ker T$

הוכחה:

נכון! תחילה נשים לב כי $\boxed{\ker T\subseteq\ker\left(T^{*}\circ T\right)}$ באופן ברור,
עתה יהי $v\in\ker\left(T^{*}\circ T\right)$, אזי

$$\begin{aligned}(\forall s\in V)\left(\left\langle \left(T^{*}\circ T\right)(v),s\right\rangle =\langle0,s\rangle=0\right) & \Rightarrow(\forall s\in V)\left(\left\langle T^{*}(T(v)),s\right\rangle =0\right)\\ & \Rightarrow(\forall s\in V)\left(\langle T(v),T(s)\rangle=0\right)\end{aligned}$$

נבחר $v=s$, אזי $\langle T(v),T(v)\rangle=0$, כלומר $T(v)=0$, כלומר $v\in\ker T$, לכן $\boxed{\ker\left(T^{*}\circ T\right)\subseteq\ker T}$, לכן

$$\boxed{\ker\left(T^{*}\circ T\right)=\ker T}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\ker\left(T\circ T^{*}\right)=\ker T$

הוכחה:

לא נכון! נבחר $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y\\0\end{bmatrix}$, נשים לב כי $T^{*}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\x\end{bmatrix}$.

עתה נשים לב כי $T\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)=0$ וגם $T\left(T^{*}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)\right)=T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\neq0$,
לכן $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\in\ker T$ וגם $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\notin\ker\left(T\circ T^{*}\right)$, כלומר $\boxed{\ker\left(T\circ T^{*}\right)\neq\ker T^{*}}$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\dim\left(\ker T^*\right)=\dim\left(\ker T\right)$

הוכחה:

נכון!

$$\dim\left(\ker T^*\right)\overset{\ker T^*=(ImT)^\perp}{=}\dim\left(ImT\right)^\perp\overset{\dim V=\dim U+\dim U^\perp}{=}\dim V-\dim ImT$$
$$\overset{\dim V=\dim\ker T+\dim ImT}{=}\dim\ker T$$

כלומר קיבלנו כי

$$\boxed{\dim\left(\ker T^*\right)=\dim\left(\ker T\right)}$$

מ.ש.ל.ד.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** T^* הפיך

הוכחה:

נכון!

T הפיך $\Leftarrow\ker T=\{0\}\Leftarrow\dim\ker T=0\Leftarrow\dim\ker T^*=\dim\ker T=0\Leftarrow\ker T^*=\{0\}\Leftarrow T^*$ הפיך.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** T^* אורתוגונלי \ אוניטרי

הוכחה:

נכון! ראינו כי $T^*=T^{-1}$, עתה $\forall u,v\in V$ מתקיים

$$\left\langle T^*\left(u\right),T^*\left(v\right)\right\rangle=\left\langle u,T\left(T^*\left(v\right)\right)\right\rangle=\left\langle u,v\right\rangle$$

כלומר T^* אורתוגונלי \ אוניטרי

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** T^* לכסין אורתוגונלית

הוכחה:

נכון! T לכסין אורתוגונלית $\Leftarrow$ קיים בסיס אורתונורמלי $\mathcal{B}$ כך ש$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ אלכסונית,

נשים לב כי $[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\overline{[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^t$ אלכסונית, לכן קיים בסיס אורתונורמלי $\mathcal{B}$ כך ש$[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ אלכסונית,

כלומר T^*לכסין אורתוגונלית מההגדרה

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** T^* לכסין

הוכחה:

נכון! T לכסין $\Leftarrow$ קיים בסיס $\mathcal{B}$ כך ש$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ אלכסונית,

נשים לב כי $[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\overline{[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^t$ אלכסונית

לכן קיים בסיס $\mathcal{B}$ כך ש$[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ אלכסונית,

כלומר T^*לכסין מההגדרה

מ.ש.ל.ד.☺

7. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $S\circ T$ אורתוגונלי \ אוניטרי
הוכחה:
נכון! $\forall u,v\in V$ מתקיים

$$\langle (S\circ T)(u),(S\circ T)(v)\rangle=\langle S(T(u)),S(T(v))\rangle=\langle T(u),T(v)\rangle=\langle u,v\rangle$$

כלומר $S\circ T$ אורתוגונלי \ אוניטרי מההגדרה

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $S\circ T$ צמוד לעצמו
הוכחה:
לא נכון! נבחר $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1\\1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y\\x+3y\end{bmatrix}$, נשים לב כי $T^*=T$,
נבחר $S\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3&1\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x+y\\x+y\end{bmatrix}$, נשים לב כי $S^*=S$
עתה נשים לב כי

$$(S\circ T)\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4&2\\6&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

וגם מתקיים $\overline{\begin{bmatrix}4&2\\6&4\end{bmatrix}}^t\neq\begin{bmatrix}4&2\\6&4\end{bmatrix}$, כלומר $S\circ T$ לא צמוד לעצמו

מ.ש.ל.ב.☺

8. **צ"ל:** R_U צמוד לעצמו
הוכחה:
נסמן ב$(b_1,\dots,b_m)$ בסיס אורתונורמלי של U,
עתה נשלימו לבסיס של V, $B=(b_1,\dots,b_m,b_{m+1},\dots,b_n)$.
בתרגיל הקודם הוכחנו כי $(b_{m+1},\dots,b_n)$ בסיס של $U^\perp$,
עתה נשים לב כי $R_U(b_i)=b_i$, $1\le\forall i\le m$ ו$R_U(b_i)=-b_i$, $m+1\le\forall i\le n$.
לכן $[R_U]_B^B=\begin{bmatrix}I_m&0\\0&-I_{m-n}\end{bmatrix}$, נשים לב כי $[R_U^*]_B^B=\overline{[R_U]_B^B}^t=[R_U]_B^B$, כלומר R_U צמוד לעצמו

מ.ש.ל.☺

9. **צ"ל:** T צמוד לעצמו אם"ם $(ImT)^\perp=\ker T$, P_{ImT} הטלה אורתוגורנלית על ImT
הוכחה:
$\Leftarrow$: אם T צמוד לעצמו, לפי שאלה 4, מתקיים כי $(ImT)^\perp=\ker T^*=\ker T$
$\Rightarrow$: אם $(ImT)^\perp=\ker T$, אזי מתקיים

$$V=ImT\oplus(ImT)^\perp=ImT\oplus\ker T$$

נתון $T\circ T=T$, יהי $v\in V$, אזי $\exists u\in ImT$, $\exists w\in\ker T$ כך ש$v=u+w$, לכן מתקיים

$$T(v)=T(u+w)=T(u)+T(w)=T(u)\overset{\exists u_0\in V,T(u_0)=u}{=}T(T(u_0))=T(u_0)=u=P_{ImT}(v)$$

כלומר $T(v)=P_{ImT}(v)$, $\forall v\in V$, לכן $\boxed{T=P_{ImT}}$, עתה נראה כי T צמוד לעצמו,
יהיו $v_1,v_2\in V$ אזי $\exists u_1,u_2\in ImT$, $\exists w_1,w_2\in\ker T$ כך ש$v_1=u_1+w_1$, $v_2=u_2+w_2$, לכן מתקיים

$$\begin{aligned}\langle v_1\mid T(v_2)\rangle&=\langle v_1,P_{ImT}(v_2)\rangle=\langle u_1+w_1,u_2\rangle=\langle u_1,u_2\rangle+\langle w_1,u_2\rangle=\langle u_1,u_2\rangle\\&=\langle u_1,u_2\rangle+\langle u_1,w_2\rangle=\langle u_1,u_2+w_2\rangle=\langle P_{ImT}(v_1),v_2\rangle=\langle T(v_1),v_2\rangle\end{aligned}$$

לכן מיחידות הצמוד נובע כי $T^*=T$, כלומר T צמוד לעצמו

מ.ש.ל.☺