פתרון תרגיל מספר 4 - חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

1 במאי 2020

שאלה 4

סעיף 1 חלק a

צ"ל: $\{1^k \mid k \equiv 0 \mod 3\}$ רגולרית

הוכחה:

השפה רגולרית ונוכיח שמחלקות השקילות הן $A_r = \{1^k \mid k \equiv r \mod 3\}$,

נשים לב כי $\Sigma^* = A_0 \cup A_1 \cup A_2$

בשביל להראות ש- A_r הינם מחלקות השקילות של L צריך להראות ש:

1. לכל $x, y \in A_r$, לא קיים זנב מפריד בין x ל- y
2. לכל $x \in A_i, y \in A_j$ כך ש- $i \neq j$ קיים זנב מפריד בין x ל- y

תחילה נוכיח שאם $x, y \in A_r$ אז לא קיים זנב מפריד בין x ל- y.

יהיו $x, y \in A_r$ ו- $z \in \Sigma^*$, נכתוב $x = 1^n, y = 1^m, z = 1^l$, נשים לב כי $n \equiv m \equiv r \mod 3$,

נחלק ל2 מקרים:

1. אם $l \equiv 3 - r \mod 3$ אז יתקיים

$$x \cdot z = 1^{n+l} \overset{n+l\equiv r+3-r=0 \mod 3}{\in} L$$
$$y \cdot z = 1^{m+l} \overset{m+l\equiv r+3-r=0 \mod 3}{\in} L$$

ולכן z לא זנב מפריד

2. אם $l \not\equiv 3 - r \mod 3$ אז יתקיים

$$x \cdot z = 1^{n+l} \overset{n+l\not\equiv r+3-r=0 \mod 3}{\notin} L$$
$$y \cdot z = 1^{m+l} \overset{m+l\not\equiv r+3-r=0 \mod 3}{\notin} L$$

ולכן z לא זנב מפריד

כלומר הראנו שלכל $x, y \in A_r$, לא קיים זנב מפריד בין x ל- y,

עתה נראה כי לכל $x \in A_i, y \in A_j$ כך ש- $i \neq j$ קיים זנב מפריד בין x ל- y,

יהיו $x \in A_i, y \in A_j$ כך ש- $i \neq j$, אזי $z = 1^{3-i}$ הוא זנב מפריד, נסמן $x = 1^n, y = 1^m$

$$x \cdot z = 1^{n+3-i} \overset{n+3-i\equiv i+3-i=0 \mod 3}{\in} L$$
$$y \cdot z = 1^{m+3-i} \overset{m+3-i\equiv j+3-i\neq 0 \mod 3}{\notin} L$$

לכן קיבלנו כי A_0, A_1, A_2 הן אכן מחלקות השקילות של L,

לכן מספר מחלקות השקילות של L סופי, כלומר ממשפט $Myhill - Norde$ השפה רגולרית.

מ.ש.ל.א.1.☺

סעיף 1 חלק b

צ"ל: $\left\{a^i b^j c^k \mid i+j=k\right\}$ לא רגולרית

הוכחה:

יהיו $i,j\in\mathbb{N}$ כל ש־ $i<j$, נוכיח כי קיים זנב מפריד בין $x=a^i$ ל־ $y=a^j$,
נבחר $z=c^i$, נשים לב כי

$$x\cdot z=a^i c^i \overset{i+0=i}{\in} L$$
$$y\cdot z=a^j c^i \overset{j+0\neq i}{\notin} L$$

כלומר הראנו שלכל $i,j\in\mathbb{N}$ כך ש־ $i<j$ קיים זנב מפריד בין $x=a^i$ ל־ $y=a^j$,
כלומר מצאנו סדרה אינסופית של איברים שלא שקולים אחד לשני שהיא $a^1,a^2,a^3,\ldots$.
לכן מספר מחלקות השקילות הוא אינסופי ולכן לפי משפט $Myhill-Norde$ השפה $\left\{a^i b^j c^k \mid i+j=k\right\}$ לא רגולרית

מ.ש.ל.א.2.☺

סעיף 2

צ"ל: $\{w\cdot z \mid \#_a(w)=\#_b(w)\}$ לא רגולרית

הוכחה:

יהיו $i,j\in\mathbb{N}$ כל ש־ $i<j$, נוכיח כי קיים זנב מפריד בין $x=a^i$ ל־ $y=a^j$,
נבחר $z=b^i$, נשים לב כי

$$x\cdot z=a^i\cdot b^i\in L$$
$$y\cdot z=a^j\cdot b^i \overset{\star}{\notin} L$$

נשים לב כי $\star$ נכון כי אין חלוקה של $a^j\cdot b^i$ ל־ $w\cdot z$ כך ש־ $\#_a(w)=\#_b(w)$ (בגלל ש $j>i$)
כלומר הראנו שלכל $i,j\in\mathbb{N}$ כך ש־ $i<j$ קיים זנב מפריד בין $x=a^i$ ל־ $y=a^j$,
כלומר מצאנו סדרה אינסופית של איברים שלא שקולים אחד לשני שהיא $a,a^2,a^3,\ldots$.
לכן מספר מחלקות השקילות הוא אינסופי ולכן לפי משפט $Myhill-Norde$ השפה $\{w\cdot z \mid \#_a(w)=\#_b(w)\}$ לא רגולרית

מ.ש.ל.ב.☺