פתרון תרגיל מספר 10 ־ חישוביות וסיבוכיות

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

15 ביוני 2020

שאלה 3

סעיף 1

צ"ל: $ILP \in \text{NP}$

הוכחה:

נבנה מוודא פולינומי M באופן הבא:

1. נקבל קלט $\langle A, b\rangle \#x$, נסמן את איברי המטריצה של A ב־ $a_{i,j}$ ובמימדים m, n
2. נבדוק שהמימד של b הוא m ואחרת נדחה
3. נבדוק שהמימד של x הוא n ואחרת נדחה
4. לכל איבר x אם הוא לא 0 ולא 1 נדחה
5. לכל $1 \le i \le m$:
   (א) נחשב את $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j$ (נסכום רק איפה שיש 1)
   (ב) אם $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j > b_i$ נדחה
6. נקבל

נשים לב שזמן הריצה של M הוא $O\left(m \cdot n\right)$ בשלב 1, $O\left(m\right)$ בשלב 2, $O\left(n\right)$ בשלב 3,
$O\left(n\right)$ בשלב 4, $O\left(m \cdot n \cdot \text{addition time} \cdot \text{comparing time}\right)$ בשלב 5 ו־ $O\left(1\right)$ בשלב 6,
לכן זמן הריצה הכולל הוא $O\left(m \cdot n \cdot \text{addition time} \cdot \text{comparing time}\right)$.
באלגו ראינו ש־ $\text{addition time} \cdot \text{comparing time}$ הם פולינומיים ולכן המכפלה פולינומית באיברים $a_{i,j}, b_i$ (נשים לב ש־ $x_j = \{0, 1\}$ ולכן הוא לא משנה את החישוב והושאר שם כי ככה הבעיה הוגדרה)
ולכן M רץ בזמן פולינומי ב־ $\langle A, b\rangle$
נסמן $L = \{\langle A, b\rangle \#x \mid \langle A, b\rangle \in ILP \wedge A \cdot x \le b\}$, ועתה נשים לב כי

$$
\begin{aligned}
&\langle A, b\rangle \#x \in \{\langle A, b\rangle \#x \mid \langle A, b\rangle \in ILP \wedge A \in \mathbb{Z}_{m\times n} \wedge b \in \mathbb{Z}^m \wedge x \in \{0,1\}^n \wedge A \cdot x \le b\} \\
&\iff \langle A, b\rangle \in ILP \wedge A \in \mathbb{Z}_{m\times n} \wedge b \in \mathbb{Z}^m \wedge x \in \{0,1\}^n \wedge A \cdot x \le b \\
&\overset{\text{by definition}}{\iff} A \in \mathbb{Z}_{m\times n} \wedge b \in \mathbb{Z}^m \wedge x \in \{0,1\}^n \wedge A \cdot x \le b \\
&\iff A \in \mathbb{Z}_{m\times n} \wedge b \in \mathbb{Z}^m \wedge x \in \{0,1\}^n \wedge \left[\forall i \in [m] \to [A \cdot x]_i \le [b]_i\right] \\
&\iff A \in \mathbb{Z}_{m\times n} \wedge b \in \mathbb{Z}^m \wedge x \in \{0,1\}^n \wedge \left[\forall i \in [m] \to \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \le [b]_i\right] \\
&\iff A \in \mathbb{Z}_{m\times n} \wedge b \in \mathbb{Z}^m \wedge x \in \{0,1\}^n \wedge \left[\forall i \in [m] \to \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \le b_i\right] \\
&\overset{\text{we accept if all the terms are true}}{\iff} \langle A, b\rangle \#x \in L\left(M\right)
\end{aligned}
$$

כלומר קיבלנו כי $L(M)=L$ וגם M חשיב בזמן פולינומי ב־ $\langle G,k\rangle$.
כלומר הראנו ש־ L מוודא של ILP וגם הראנו שקיימת M דטרמניסטית שמכריעה את L בזמן פולינומי ב־ $\langle G,k\rangle$ ולכן מוודא פולינומי של ILP ולכן $ILP\in \mathrm{NP}$

מ.ש.ל.א.☺

סעיף 2

צ"ל: $SUBSET-SUM\leq_p PARTITION$

הוכחה:

נבנה רדוקציה $f\left(\left\langle\left\{x_1,\ldots,x_m\right\},t\right\rangle\right)=\left\{x_1,\ldots,x_m,x_{m+1}=\sum_{i\in[m]}x_i-2t\right\}$

נשים לב ש־ f חשיבה בזמן פולינומי כי הדבר היחיד שהיא צריכה לחשב זה את $\sum_{i\in[m]}x_i-2t$ וזה לוקח לכל היותר $O\left(m\cdot \text{addition time}\right)$ וראינו באלגו ש־ addtion time הוא פולינומי בקלט ולכן fחשיבה בזמן פולינומי וגם מתקיים
עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}
\left\langle\left\{x_1,\ldots,x_m\right\},t\right\rangle\in SUBSET-SUM &\iff \exists I\subseteq[m]\ \text{ s.t. }\ \sum_{i\in I}x_i=t\\
&\iff \exists I\subseteq[m]\ \text{ s.t. }\ 2\cdot\sum_{i\in I}x_i=2\cdot t\\
&\iff \exists I\subseteq[m]\ \text{ s.t. }\ \sum_{i\in I}x_i+\sum_{i\in I}x_i=2\cdot t\\
&\iff \exists I\subseteq[m]\ \text{ s.t. }\ \sum_{i\in I}x_i+\left[\sum_{i\in[m]}x_i-\sum_{i\in[m]\setminus I}x_i\right]=2\cdot t\\
&\iff \exists I\subseteq[m]\ \text{ s.t. }\ \sum_{i\in I}x_i+\sum_{i\in[m]}x_i-2\cdot t=\sum_{i\in[m]\setminus I}x_i\\
&\iff \exists I\subseteq[m]\ \text{ s.t. }\ \sum_{i\in I}x_i+\left[\sum_{i\in[m]}x_i-2\cdot t\right]=\sum_{i\in[m]\setminus I}x_i\\
&\overset{x_{m+1}=\sum_{i\in[m]}x_i-2t}{\iff} \exists I\subseteq[m]\ \text{ s.t. }\ \sum_{i\in(I\cup\{m+1\})}x_i=\sum_{i\in[m]\setminus(I\cup\{m+1\})}x_i\\
&\iff \exists I\subseteq[m+1]\ \text{ s.t. }\ \sum_{i\in I}x_i=\sum_{i\in[m]\setminus I}x_i\\
&\iff \left\{x_1,\ldots,x_{m+1}\right\}\in PARTITION\\
&\overset{x_{m+1}=\sum_{i\in[m]}x_i-2t}{\iff} \left\{x_1,\ldots,\sum_{i\in[m]}x_i-2t\right\}\in PARTITION\\
&\iff f\left(\left\langle\left\{x_1,\ldots,x_m\right\},t\right\rangle\right)\in PARTITION
\end{aligned}$$

כלומר הראנו שקיימת f חשיבה בזמן פולינומי המקיימת

$$\left\langle\left\{x_1,\ldots,x_m\right\},t\right\rangle\in SUBSET-SUM\iff f\left(\left\langle\left\{x_1,\ldots,x_m\right\},t\right\rangle\right)\in PARTITION$$

ולכן מההגדרה $SUBSET-SUM\leq_p PARTITION$

מ.ש.ל.ב.☺

סעיף 3
צ"ל: $3SAT \leq_p ILP$
הוכחה:
תהי ϕ נוסחא מצורת CNF, אזי ניתן לכתוב $\phi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ כאשר C_i פסוקית.
נסמן את מספר המשתנים ב־ n.
נסתכל על פסוקית אחת, $C_i = l_{1,i} \vee l_{2,i} \vee l_{3,i}$ פסוקית, כאשר $l_{1,i}, l_{2,i}, l_{3,i}$ הליטרלים שלה.
נשים לב ש־ C_i מקבלת $True$ אם"ם אחד מהליטרלים $l_{1,i}, l_{2,i}, l_{3,i}$ מתיישם.
נגדיר פונקצית עזר $g\left(l_{j,i}\right) = \begin{cases} x_k & l_{j,i} \text{ is the literal } x_k \\ 1 - x_k & l_{j,i} \text{ is the literal } \neg x_k \end{cases}$.
נשים לב כי

$$l_{i,j} = True \iff \begin{cases} x_k = 1 & l_{j,i} \text{ is the literal } x_k \\ x_k = 0 & l_{j,i} \text{ is the literal } \neg x_k \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} g\left(l_{i,j}\right) = x_k = 1 & l_{j,i} \text{ is the literal } x_k \\ g\left(l_{i,j}\right) = 1 - x_k = 1 & l_{j,i} \text{ is the literal } \neg x_k \end{cases} \iff g\left(l_{i,j}\right) = 1$$

וגם נשים לב ש־ g חשיבה בזמן פולינומי כי היא רק עוברת כל המשתנים ומצאת איזה אחד מתאים ל־ $l_{i,j}$ ומחזירה בהתאם לערכו. (וגם g אי שלילית)
נשים לב ש־ C_i מקבלת $True$ אם"ם אחד מהליטרלים $l_{1,i}, l_{2,i}, l_{3,i}$ מתיישם אם"ם $\left(g\left(l_{1,i}\right) = 1\right) \vee \left(g\left(l_{2,i}\right) = 1\right) \vee \left(g\left(l_{3,i}\right) = 1\right)$ אם"ם $g\left(l_{1,i}\right) + g\left(l_{2,i}\right) + g\left(l_{3,i}\right) \geq 1$ אם"ם $-g\left(l_{1,i}\right) - g\left(l_{2,i}\right) - g\left(l_{3,i}\right) \leq -1$.
לאחר פתיחת סוגריים ניתן לכתוב את $-g\left(l_{1,i}\right) - g\left(l_{2,i}\right) - g\left(l_{3,i}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j + b'_i$ כאשר $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ לכל $1 \leq j \leq n$ וגם $b'_i \in \mathbb{Z}$ (זה חשיב בזמן פולינומי, לשמור איזה משתנים הופיעו כמה פעמים עם איזה סימן ל־ $a_{i,j}$ וכמה מהמשתנים הופיעו עם שלילה ל־ b'_i)
לכן נקבל כי C_i מקבלת $True$ אם"ם $-g\left(l_{1,i}\right) - g\left(l_{2,i}\right) - g\left(l_{3,i}\right) \leq -1$ אם"ם $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j + b'_i \leq -1$ אם"ם $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \leq -1 - b'_i$
עתה נוכל להגדיר את רדוקציה עם האבחנות שראינו נגדיר $f\left(\phi\right) = \left\langle A_\phi, b_\phi \right\rangle$ כאשר $\left[A_\phi\right]_{i,j} = a_{i,j}$ ו־ $\left[b_\phi\right]_i = b'_i - 1$, ראינו ש־ $a_{i,j}, b'_i$ חשיבות בזמן פולינומי לכל פסוקית m ונחשב ל־ m פסוקיות ולכן יישאר פולינומי כי הכפלת פולינומיים זה פולינומיים, ולכן f חשיבה בזמן פולינומי.
עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}
\phi \in 3SAT &\iff \exists x \in \{0,1\}^n \text{ s.t. } \phi \text{ is true for x} \\
&\iff \exists x \in \{0,1\}^n \text{ s.t. } \forall i \left[C_i \text{ is true for x}\right] \\
&\iff \exists x \in \{0,1\}^n \text{ s.t. } \forall i \left[\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \leq -1 - b'_i\right] \\
&\iff \exists x \in \{0,1\}^n \text{ s.t. } \forall i \left[\left[A_\phi \cdot x\right]_i \leq \left[b_\phi\right]_i\right] \\
&\iff \exists x \in \{0,1\}^n \text{ s.t. } A_\phi \cdot x \leq b_\phi \\
\left\langle A_\phi, b_\phi \right\rangle \in ILP &\iff f\left(\phi\right) \in ILP
\end{aligned}$$

כלומר הראנו שקיימת f חשיבה בזמן פולינומי המקיימת

$$\phi \in 3SAT \iff f\left(\phi\right) \in ILP$$

ולכן מההגדרה $3SAT \leq_p ILP$
הערה: נשים לב שלא נעזרנו בכך שזה בדיוק 3, אותה ההוכחה תהיה נכונה ל־ $KSAT$ ל־ K כללי :)

מ.ש.ל.ג.☺