פתרון תרגיל מספר 10 ־ מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

31 במאי 2019

1. **צ"ל:** חוסר שיכחון אס"ם $X \sim \exp(\lambda)$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי

$$\frac{\mathbb{P}(X > m+n)}{\mathbb{P}(X > m)} = \mathbb{P}(X > m+n \mid X > m) = \mathbb{P}(X > n)$$

$\Leftarrow$: נניח כי $X \sim \exp(\lambda)$ אזי

$$\int_a^\infty f_X(x)\,dx = \int_a^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \mid_a^\infty = e^{-\lambda a}$$

נציב ונקבל

$$\mathbb{P}(X > m+n \mid X > m) = \frac{\mathbb{P}(X > m+n)}{\mathbb{P}(X > m)} = \frac{e^{-\lambda(n+m)}}{e^{-\lambda m}} = e^{-\lambda(n+m-n)} = e^{-\lambda n} = \mathbb{P}(X > n)$$

כלומר $X \sim \exp(\lambda)$ מקיים את תכונת חוסר הזיכרון,
$\Rightarrow$: נניח כי X מקיים את תכונת חוסר הזיכרון, לכן $\mathbb{P}(X > m+n) = \mathbb{P}(X > n) \cdot \mathbb{P}(X > m)$,
נגדיר $g(x) = \mathbb{P}(X > x)$ אזי $g(n+m) = g(n) \cdot g(m)$, לכל n, m, לכן נשים לב שלכל מספר טבעי מתקיים

$$g(n) = g(1) \cdot g(n-1) = \cdots = (g(1))^n$$

עתה לכל מספר טבעי q מתקיים

$$g\left(\frac{1}{q}\right)^q = g\left(\frac{1}{q}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{q}\right) = g\left(q \cdot \frac{1}{q}\right) = g(1)$$
$$\Rightarrow g\left(\frac{1}{q}\right) = (g(1))^{\frac{1}{q}}$$

לכן, משילוב שני התכונות שהראנו, לכל מספר רציונלי $0 \le \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ מתקיים

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = \left(g\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p = \left(g(1)^{\frac{1}{q}}\right)^p = (g(1))^{\frac{p}{q}}$$

לכן , מהיות g רציפה ל־$\mathbb{Q} \cap [0, \infty[$ צפופה, נסיק כי $g(x) = (g(1))^x$, לכל x בתחום, וגם $g(x) = 0$, לכל x שלילי כי f רציפה ואי שלילית, לכן נגדיר $\lambda = -\log(g(1))$, אזי

$$e^{-\lambda x} = (g(1))^x = g(x) = \mathbb{P}(X > x) = \int_x^\infty f_X(x)\,dx$$

לכן

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

כלומר $X \sim \exp(\lambda)$, כנדרש

מ.ש.ל.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{P}(X>4)$ וגם את $\mathbb{P}(X<10)$

הוכחה:

נגדיר בA את המאורע שהתיש לבן ובB את המאורע שהתיש שחור, תחילה נשים לב כי

$$\mathbb{P}(X>4 \mid A)=\int_4^\infty 4\cdot e^{t\cdot\frac{-1}{4}}dt=e^{t\cdot\frac{-1}{4}}\ |_4^\infty=e^{-1}$$
$$\mathbb{P}(X>4 \mid B)=\int_4^\infty 8\cdot e^{t\cdot\frac{-1}{8}}dt=e^{t\cdot\frac{-1}{8}}\ |_4^\infty=e^{-\frac{1}{2}}$$

לכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>4)&=\mathbb{P}(X>4\mid A)\cdot\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(X>4\mid B)\cdot\mathbb{P}(B)=\\&=e^{-1}\cdot\frac{1}{10}+e^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{9}{10}\end{aligned}$$

כלומר $\boxed{\mathbb{P}(X>4)=e^{-1}\cdot\frac{1}{10}+e^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{9}{10}}$, עתה נשים לב כי

$$\mathbb{P}(X<10 \mid A)=\int_0^{10} 4\cdot e^{t\cdot\frac{-1}{4}}dt=e^{t\cdot\frac{-1}{4}}\ |_0^{10}=1-e^{\frac{-10}{4}}$$
$$\mathbb{P}(X<10 \mid B)=\int_0^{10} 8\cdot e^{t\cdot\frac{-1}{4}}dt=e^{t\cdot\frac{-1}{8}}\ |_0^{10}=1-e^{\frac{-10}{8}}$$

לכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X<10)&=\mathbb{P}(X<10\mid A)\cdot\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(X<10\mid B)\cdot\mathbb{P}(B)=\\&=\left(1-e^{\frac{-10}{4}}\right)\cdot\frac{1}{10}+\left(1-e^{\frac{-10}{8}}\right)\cdot\frac{9}{10}\end{aligned}$$

כלומר $\boxed{\mathbb{P}(X<10)=\left(1-e^{\frac{-10}{4}}\right)\cdot\frac{1}{10}+\left(1-e^{\frac{-10}{8}}\right)\cdot\frac{9}{10}}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $F_X(x)$

הוכחה:

נגדיר בA את המאורע שהתיש לבן ובB את המאורע שהתיש שחור, תחילה נשים לב כי

$$\mathbb{P}(X\le x \mid A)=\int_0^{x} 4\cdot e^{t\cdot\frac{-1}{4}}dt=e^{t\cdot\frac{-1}{4}}\ |_0^{x}=1-e^{-\frac{x}{4}}$$
$$\mathbb{P}(X\le x \mid B)=\int_0^{x} 8\cdot e^{t\cdot\frac{-1}{8}}dt=e^{t\cdot\frac{-1}{8}}\ |_0^{x}=1-e^{-\frac{x}{8}}$$

לכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה

$$\begin{aligned}F_X(x)=\mathbb{P}(X\le x)&=\mathbb{P}(X\le x\mid A)\cdot\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(X\le x\mid B)\cdot\mathbb{P}(B)=\\&=\left(1-e^{-\frac{x}{4}}\right)\cdot\frac{1}{10}+\left(1-e^{-\frac{x}{8}}\right)\cdot\frac{9}{10}\end{aligned}$$

וברור כי $F_X(x) = 0$, $\forall x \le 0$, לכן

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \left(1 - e^{-\frac{x}{4}}\right) \cdot \frac{1}{10} + \left(1 - e^{-\frac{x}{8}}\right) \cdot \frac{9}{10} & x \ge 0 \end{cases}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** f_X
הוכחה:
תחילה עבור $x < 0$ מתקיים $F_X(x) = 0$, לכן $f_X(x) = 0$ (פרט אולי ל0)
עבור $x > 0$ מתקיים

$$f_X(x) = (F_X(x))' = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{x}{4}} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{x}{8}} \cdot \frac{9}{10}$$

לכן

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{x}{4}} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{x}{8}} \cdot \frac{9}{10} & x > 0 \end{cases}}$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\mathbb{E}[X], \mathrm{Var}[X]$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי

$$\begin{aligned} \int t \cdot e^{-\lambda t} \cdot dt &\overset{g=e^{-\lambda t}}{\underset{F=t}{=}} t \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} - \int 1 \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} dt = t \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} + \frac{1}{\lambda} \cdot \int e^{-\lambda t} \cdot dt \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda t} [\lambda t + 1] \end{aligned}$$

לכן נציב ונקבל

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) \cdot t \cdot dt = \int_0^{\infty} f_X(t) \cdot t \cdot dt = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{t}{4}} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{t}{8}}\right] \cdot t \cdot dt \\ &= \frac{1}{10} \int_0^{\infty} \frac{t}{4} \cdot e^{\frac{-t}{4}} dt + \frac{9}{10} \int_0^{\infty} \frac{t}{8} \cdot e^{\frac{-t}{8}} dt = \frac{1}{10} \cdot (0 + 4) + \frac{9}{10}(0 + 8) = \\ &= \frac{76}{10} = 7.6 \end{aligned}$$

עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned} \int t\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot dt &\overset{g=e^{-\lambda t}}{\underset{F=t^2}{=}} t^2 \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} - \int 2t \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} dt = t^2 \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} + \frac{2}{\lambda} \cdot \int t \cdot e^{-\lambda t} \cdot dt \\ &= t^2 \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} + -\frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda t} [\lambda t + 1] \end{aligned}$$

לכן נציב ונקבל

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) \cdot t^2 \cdot dt = \int_0^{\infty} f_X(t) \cdot t^2 \cdot dt = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{t}{4}} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{t}{8}}\right] \cdot t^2 \cdot dt \\ &= \frac{1}{10} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{4} \cdot e^{\frac{-t}{4}} dt + \frac{9}{10} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{8} \cdot e^{\frac{-t}{8}} dt = \frac{1}{10} \cdot \left(4^2\right) + \frac{9}{10}\left(8^2\right) = \\ &= \frac{592}{10} = 59.2 \end{aligned}$$

לכן

$$\mathrm{Var}\left[X\right]=59.2-\left(7.6\right)^{2}=1.44$$

כלומר

$$\boxed{\mathbb{E}\left[X\right]=7,6,\mathrm{Var}\left[X\right]=1.44}$$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(X>10\mid X>4\right)$
הוכחה:
נשים לב כי

$$\mathbb{P}\left(X>10\mid X>4\right)=\frac{\mathbb{P}\left(X>10\cap X>4\right)}{\mathbb{P}\left(X>4\right)}=\frac{\mathbb{P}\left(X>10\right)}{\mathbb{P}\left(X>4\right)}=\frac{e^{\frac{-10}{4}}\cdot\frac{1}{10}+e^{\frac{-10}{8}}\cdot\frac{9}{10}}{e^{-1}\cdot\frac{1}{10}+e^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{9}{10}}$$

באופן דומה לחישוב שנעשה בסעיף א' נקבל כי

$$\mathbb{P}\left(X>6\right)=e^{\frac{-6}{4}}\cdot\frac{1}{10}+e^{\frac{-6}{8}}\cdot\frac{9}{10}$$

וגם

$$\mathbb{P}\left(X>10\mid X>4\right)=\frac{e^{\frac{-10}{4}}\cdot\frac{1}{10}+e^{\frac{-10}{8}}\cdot\frac{9}{10}}{e^{-1}\cdot\frac{1}{10}+e^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{9}{10}}\neq e^{\frac{-6}{4}}\cdot\frac{1}{10}+e^{\frac{-6}{8}}\cdot\frac{9}{10}=\mathbb{P}\left(X>6\right)$$

כלומר X לא מקיים את תכונת חוסר הזיכרון

מ.ש.ל.ה.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\int_{-\infty}^{\infty}f_X\left(t\right)dt=1$, התפלגות f_X
הוכחה:
תחילה נשים לב כי $\forall t\leq 100$ מתקיים

$$F_X\left(t\right)=\int_{-\infty}^{t}f_X\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{x}0\cdot dx=0$$

עתה נשים לב כי $\forall t>100$ מתקיים

$$\begin{aligned}F_X\left(t\right)&=\int_{-\infty}^{t}f_X\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{100}f_X\left(x\right)\cdot dx+\int_{100}^{t}f_X\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{t}0\cdot dx+\int_{100}^{t}\frac{100}{x^{2}}dx\\&=0+100\cdot\left[\frac{-1}{x}\right]_{100}^{t}=100\cdot\left[\frac{-1}{t}+\frac{1}{100}\right]=1-\frac{100}{t}\end{aligned}$$

ועתה מתקיים כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_X\left(t\right)dt=\lim_{t\to\infty}F_X\left(t\right)=\lim_{t\to\infty}\left[1-\frac{100}{t}\right]=1$$

וגם

$$F_X\left(t\right)=\begin{cases}0 & t\leq 100\\ 1-\frac{100}{t} & t\geq 100\end{cases}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** הסיכוי שבדיוק 2 סוללות מתקלקלות ב150 שעות

הוכחה:

נסמן בA_i את המאורע שהסוללה הi התקלקלה ב150 שעות ובX_i את חיי הסוללה הi, אזי

$$\mathbb{P}\left(A_i\right) = \mathbb{P}\left(X_i \leq 150\right) = F_X\left(150\right) = 1 - \frac{100}{150} = \frac{1}{3}$$

מהיות המאורעות בלתי תלויים ושוות התפלגות, השאלה זהה ל$Y \sim Bin\left(5, \frac{1}{3}\right)$ כשמעניין אותנו שבדיוק 2 התקלקלו לכן

$$\boxed{\mathbb{P}\left(Y = 2\right) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3}$$

מ.ש.ל.ב.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** C

הוכחה:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(t\right) dt = \int_{-2}^{1} f_X\left(t\right) dt = C \cdot \int_{-2}^{1} x^2 dx = C \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = C \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3}\right) = 3C$$

לכן

$$\boxed{C = \frac{1}{3}}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(X < -1\right)$

הוכחה:

$$\mathbb{P}\left(X < -1\right) = \int_{-\infty}^{-1} f_X\left(t\right) dt = \int_{-2}^{-1} f_X\left(t\right) = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{-1}{3} + \frac{8}{3}\right] = \frac{7}{9}$$

כלומר

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X < -1\right) = \frac{7}{9}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(\frac{-1}{2} < X < \frac{1}{2}\right)$

הוכחה:

$$\mathbb{P}\left(\frac{-1}{2} < X < \frac{1}{2}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_X\left(t\right) \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9} \cdot \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] = \frac{1}{36}$$

כלומר

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\frac{-1}{2} < X < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{36}}$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $F_X(t)$
הוכחה:
אם $t \le -2$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(x) \cdot dx = 0$$

אם $-2 \le t \le 1$ אחרת

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{-2} f_X(x) \cdot dx + \int_{-2}^{t} f_X(x) \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{t}$$
$$= \frac{t^3+8}{3}$$

ואם $t \ge 1$ אזי $F_X(t) = 1$ לכן

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^3+8}{3} & -2 \le t \le 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** $\mathbb{E}[X], \mathrm{Var}[X]$
הוכחה:
נשים לב כי

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_{-2}^{1} x^3 \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{4} - \frac{16}{4}\right] = \frac{-15}{4}$$

וגם

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\, dx = \int_{-2}^{1} x^4 \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{5} + \frac{32}{5}\right] = \frac{11}{5}$$

לכן

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{11}{5} - \left(\frac{-15}{4}\right)^2 = \frac{-949}{80}$$

כלומר קיבלנו כי

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{-15}{4}, \mathrm{Var}[X] = \frac{-949}{80}}$$

מ.ש.ל.ה.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** C
הוכחה:
בשביל שזאת תהיה הסתברות חייב להתקיים ש

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t) \cdot dt + \int_{0}^{\infty} f_X(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{\infty} C \cdot t \cdot e^{-5t} \cdot dt$$
$$= C \cdot \int_{0}^{\infty} t \cdot e^{-5t} \cdot dt$$

לכן $C=\frac{1}{\int_0^\infty t\cdot e^{-5t}\cdot dt}$, נפתור את $\int t\cdot e^{-5t}\cdot dt$,

$$\int t\cdot e^{-5t}\cdot dt \overset{g=e^{-5t}}{\underset{F=t}{=}} t\cdot\frac{e^{-5t}}{-5}-\int 1\cdot\frac{e^{-5t}}{-5}dt=t\cdot\frac{e^{-5t}}{-5}+\frac{1}{5}\cdot\int e^{-5t}\cdot dt$$
$$=-\frac{1}{25}\cdot e^{-5t}\left[5t+1\right]$$

עתה נרצה לחשב את

$$\int_0^\infty t\cdot e^{-5t}\cdot dt=-\frac{1}{25}\cdot e^{-5t}\left[5t+1\right]|_0^\infty=-\frac{1}{25}\cdot\left[\frac{5t+1}{e^{5t}}\right]_0^\infty=\frac{-1}{25}\cdot\left(0-\frac{0+1}{1}\right)=\frac{1}{25}$$

לכן

$$\boxed{C=\frac{1}{\int_0^\infty t\cdot e^{-5t}\cdot dt}=25}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(\ln(2)<X<\ln(3)\right)$
הוכחה:

$$\mathbb{P}\left(\ln(2)<X<\ln(3)\right)=\int_{\ln(2)}^{\ln(3)}f_X(t)\cdot dt=C\cdot-\frac{1}{25}\cdot\left[\frac{5t+1}{e^{5t}}\right]_{\ln(2)}^{\ln(3)}$$
$$=C\cdot\frac{-1}{25}\cdot\left[\frac{5\ln(3)+1}{e^{5\ln(3)}}-\frac{5\ln(2)+1}{e^{5\ln(2)}}\right]$$
$$=\left[\frac{5\ln(2)+1}{2^5}-\frac{5\ln(3)+1}{3^5}\right]$$

כלומר

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\ln(2)<X<\ln(3)\right)=\frac{5\ln(2)+1}{2^5}-\frac{5\ln(3)+1}{3^5}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $F_X(t)$
הוכחה:
אם $t\leq 0$

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t}f_X(x)\cdot dx=\int_{-\infty}^{0}f_X(x)\cdot dx=0$$

אחרת

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t}f_X(x)\cdot dx=\int_{-\infty}^{0}f_X(x)\cdot dx+\int_0^t f_X(x)\cdot dx=25\cdot\int_0^t f_X(x)\cdot dx$$
$$=25\cdot-\frac{1}{25}\cdot\left[\frac{5x+1}{e^{5x}}\right]_0^t=\frac{5x+1}{e^{5x}}-1$$

לכן

$$F_X(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{5t+1}{e^{5t}}-1 & t\geq 0\end{cases}$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\mathbb{E}\left[X\right], \mathrm{Var}\left[X\right]$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-5x} dx &\underset{g=e^{-5x}}{\overset{F=x^2}{\equiv}} x^2 \cdot \frac{e^{-5x}}{-5} - \int 2x \cdot \frac{e^{-5x}}{-5} dx \\ &= -\frac{x^2}{5} \cdot e^{-5x} + \frac{2}{5} \cdot \int x \cdot e^{-5x} dx \\ &= -\frac{x^2}{5} \cdot e^{-5x} + \frac{2}{5} \cdot \left[-\frac{1}{25} \cdot e^{-5x}\left[5x+1\right]\right] \\ &= \frac{-1}{125} \cdot e^{-5x}\left[25x^2+10x+2\right]\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\right] &= \int_{-\infty}^\infty x \cdot f_X\left(x\right) dx = \int_0^\infty x^2 \cdot 25 \cdot e^{-5x} dx = 25 \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-5x} dx \\ &= 25 \cdot \left[\frac{-1}{125} \cdot e^{-5x}\left[25x^2+10x+2\right]\right]_0^\infty = -\frac{1}{5}\left[0-2\right] = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^3 \cdot e^{-5x} dx &\underset{g=e^{-5x}}{\overset{F=x^2}{\equiv}} x^3 \cdot \frac{e^{-5x}}{-5} - \int 3x^2 \cdot \frac{e^{-5x}}{-5} dx \\ &= -\frac{x^3}{5} \cdot e^{-5x} + \frac{3}{5} \cdot \int x^2 \cdot e^{-5x} dx \\ &= -\frac{x^3}{5} \cdot e^{-5x} + \frac{3}{5} \cdot \left[\frac{-1}{125} \cdot e^{-5x}\left[25x^2+10x+2\right]\right] \\ &= \frac{-1}{625} \cdot e^{-5x}\left[125x^3+75x^2+30x+6\right]\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^\infty x^2 \cdot f_X\left(x\right) dx = \int_0^\infty x^3 \cdot 25 \cdot e^{-5x} dx = 25 \cdot \int_0^\infty x^3 \cdot e^{-5x} dx \\ &= 25 \cdot \left[\frac{-1}{625} \cdot e^{-5x}\left[125x^3+75x^2+30x+6\right]\right]_0^\infty = -\frac{1}{25}\left[0-6\right] = \frac{6}{25}\end{aligned}$$

לכן

$$\mathrm{Var}\left[X\right] = \frac{6}{25} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{25}$$

כלומר קיבלנו כי

$$\boxed{\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{2}{5}, \mathrm{Var}\left[X\right] = \frac{2}{25}}$$

מ.ש.ל.ד.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(X<\frac{1}{2}\right)$
הוכחה:
תחילה נשים לב כי $X<\frac{1}{2}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(X<\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)$, לכן

$$\mathbb{P}\left(X<\frac{1}{2}\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(X<\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X<\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right]^2=\frac{1}{4}$$

כלומר

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X<\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(X\geq\frac{1}{2}\right)$
הוכחה:

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X\geq\frac{1}{2}\right)=1-\mathbb{P}\left(X<\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(X=\frac{1}{2}\right)$
הוכחה:

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X=\frac{1}{2}\right)=\mathbb{P}\left(X\leq\frac{1}{2}\right)-\mathbb{P}\left(X<\frac{1}{2}\right)=F_X\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}}$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** האם המרחב רציף?
הוכחה:
ראינו שעבור מרחבים רציפים מתקיים $\mathbb{P}(X=a)=0$, לכל a אך בסעיף הקודם ראינו כי $\mathbb{P}\left(X=\frac{1}{2}\right)\neq 0$, לכן המרחב לא רציף

מ.ש.ל.ד.☺