אלגברה לינארית (2) תשע"ט 2019-2018 - סמסטר ב' - תרגיל 1

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז.** יש לציין **כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 20.3.19 בשעה 21:00.

1. נתונה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כך ש- $A^2 + A + I_n = 0$.
   (א) הוכיחו כי A הפיכה.
   (ב) הוכיחו כי $A^3 = I_n$.
   (ג) חשבו את $\det A$.

2. (א) נתונות $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $A^2 - B^2$ הפיכה וגם $AB = BA$. הוכיחו כי $A + B$ הפיכה.
   (ב) הביאו דוגמה למטריצות $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ כך ש- $A^2 - B^2$ הפיכה, אבל $A + B$ אינה הפיכה.

3. יהי V מרחב וקטורי ממימד 3 ויהי $\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right)$ בסיס ב- V.
   יהי $T\colon V \to V$ האופרטור הלינארי המוגדר על ידי $\begin{cases} T\left(\vec{b}_1\right) = \frac{5}{6}\vec{b}_1 - \frac{1}{3}\vec{b}_2 - \frac{1}{2}\vec{b}_3 \\ T\left(\vec{b}_2\right) = -\frac{1}{6}\vec{b}_1 + \frac{2}{3}\vec{b}_2 - \frac{1}{2}\vec{b}_3 \\ T\left(\vec{b}_3\right) = -\frac{1}{6}\vec{b}_1 - \frac{1}{3}\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_3 \end{cases}$. (מדוע זה מגדיר את T?)
   (א) הוכיחו ש- T הטלה.
   (ב) מצאו U ו- W כך ש- $T = P_{U,W}$.

4. במרחב $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ נסמן $W = \left\{ \begin{bmatrix} -c & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
   (א) הוכיחו כי U ו- W תתי מרחבים של V וש- $U \oplus W = V$.
   (ב) לכל $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ נסמן $P_{U,W}\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{bmatrix}$. הביעו את x' , y' , z' ו- t' בעזרת x , y , z ו- t.

5. יהי V מרחב וקטורי ויהיו U, W תתי מרחבים שלו כך ש- $U \oplus W = V$.
   יהיו $P_{U,W}\colon V \to V$ ו- $P_{W,U}\colon V \to V$ ההטלות במקביל כפי שהוגדרו בתרגול.
   (א) הוכיחו כי $P_{U,W} \circ P_{W,U} = 0$.
   (ב) הוכיחו כי $P_{U,W} + P_{W,U} = Id_V$.

6. יהי $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ האופרטור הלינארי המוגדר ע"י $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}$. הוכיחו כי
   (א) $\ker T = 0$, $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3$.
   (ב) $T(\vec{u}) = \vec{u}$ אם"ם $\vec{u} \in U = \operatorname{Span}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ ו- $T(\vec{w}) = -\vec{w}$ אם"ם $\vec{w} \in W = \operatorname{Span}\{\vec{e}_3\}$.
   (ג) $T \circ T = Id_{\mathbb{R}^3}$.

7. יהי V מרחב וקטורי (לאו דווקא נוצר סופית) ויהיו U, W תתי מרחבים שלו כך ש- $U \oplus W = V$.
   נגדיר פונקציה $R_{U,W}\colon V \to V$ באופן הבא: עבור $\vec{v} \in V$ נכתוב $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ עם $\vec{u} \in U$ ו- $\vec{w} \in W$ ונגדיר $R_{U,W}(\vec{v}) = \vec{u} - \vec{w}$.
   ההעתקה $R_{U,W}$ נקראת השיקוף ביחס ל- U במקביל ל- W. הוכיחו :
   (א) $R_{U,W}$ אופרטור לינארי.
   (ב) $R_{U,W}(\vec{u}) = \vec{u}$ לכל $\vec{u} \in U$ ו- $R_{U,W}(\vec{w}) = -\vec{w}$ לכל $\vec{w} \in W$.
   (ג) $\ker R_{U,W} = 0$, $\operatorname{Im} R_{U,W} = V$.
   (ד) $R_{U,W} + R_{W,U} = 0$.
   (ה) $R_{U,W} \circ R_{U,W} = Id_V$.
   (ו) $R_{U,W} \circ R_{W,U} = -Id_V$.

8. יהי V מרחב וקטורי (לאו דווקא נוצר סופית) מעל שדה $\mathbb{F}$ כך ש־ $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$. ויהי $T\colon V \to V$ אופרטור לינארי המקיים $T \circ T = Id_V$.

נגדיר $U = \{\, \vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \vec{v} \,\}$ ו־ $W = \{\, \vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = -\vec{v} \,\}$. הוכיחו כי

(א) U ו־ W הם תתי מרחבים של V.

(ב) $V = U \oplus W$.

(ג) $T = R_{U,W}$.