פתרון תרגיל מספר 9 - אינפי 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

25 בדצמבר 2018

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $T_4 f(x)$ עבור $a=0$, $a=1$ כאשר $f(x)=x^5+x^3+x$

הוכחה:

נחשב:

$$f^{(0)}(x)=x^5+x^3+x\Rightarrow f^{(0)}(0)=0;f^{(0)}(1)=3$$
$$f^{(1)}(x)=5\cdot x^4+3\cdot x^2+1\Rightarrow f^{(1)}(0)=1;f^{(1)}(1)=9$$
$$f^{(2)}(x)=20\cdot x^3+6\cdot x\Rightarrow f^{(2)}(0)=0;f^{(2)}(1)=26$$
$$f^{(3)}(x)=60\cdot x^2+6\Rightarrow f^{(3)}(0)=6;f^{(3)}(1)=66$$
$$f^{(4)}(x)=120\cdot x\Rightarrow f^{(4)}(0)=0;f^{(4)}(1)=120$$

$$\begin{aligned}T_{a=0,n=4}f(x)&=\sum_{i=0}^{4}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}\cdot(x-0)^i\\&=\frac{f^{(0)}(0)}{0!}+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}\cdot x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}\cdot x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}\cdot x^4\\&=\frac{0}{0!}+\frac{1}{1!}\cdot x+\frac{0}{2!}\cdot x^2+\frac{6}{3!}\cdot x^3+\frac{0}{4!}\cdot x^4=x+x^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_{a=1,n=4}f(x)&=\sum_{i=0}^{4}\frac{f^{(i)}(1)}{i!}\cdot(x-1)^i\\&=\frac{f^{(0)}(1)}{0!}+\frac{f^{(1)}(1)}{1!}\cdot(x-1)+\frac{f^{(2)}(1)}{2!}\cdot(x-1)^2+\frac{f^{(3)}(1)}{3!}\cdot(x-1)^3+\frac{f^{(4)}(1)}{4!}\cdot(x-1)^4\\&=\frac{3}{0!}+\frac{9}{1!}\cdot(x-1)+\frac{26}{2!}\cdot(x-1)^2+\frac{66}{3!}\cdot(x-1)^3+\frac{120}{4!}\cdot(x-1)^4\\&=3+9(x-1)+13(x-1)^2+11(x-1)^3+5(x-1)^4\end{aligned}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $T_3 f(x)$ עבור $a=0$ כאשר $f(x)=e^{\sin(x)}$

הוכחה:

נחשב:

$$
\begin{aligned}
&f^{(0)}(x)=e^{\sin(x)}\Rightarrow f^{(0)}(0)=e^{0}=1\\
&f^{(1)}(x)=\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}\Rightarrow f^{(1)}(0)=1\cdot e^{0}=1\\
&f^{(2)}(x)=-\sin(x)\cdot e^{\sin(x)}+\cos^{2}(x)\cdot e^{\sin(x)}=e^{\sin(x)}\left(\cos^{2}(x)-\sin(x)\right)\\
&\qquad\Rightarrow f^{(2)}(0)=e^{0}(1-0)=1\\
&f^{(3)}(x)=\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}\left(\cos^{2}(x)-\sin(x)\right)+e^{\sin(x)}\left(2\cos(x)\cdot-\sin(x)-\cos(x)\right)\\
&\qquad\Rightarrow f^{(3)}(0)=1\cdot e^{0}(1-0)+e^{0}\cdot(0-1)=1-1=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{a=0,n=3}f(x)&=\sum_{i=0}^{3}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}\cdot(x-0)^{i}\\
&=\frac{f^{(0)}(0)}{0!}+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}\cdot x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}\cdot x^{2}+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}\cdot x^{3}\\
&=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}\cdot x+\frac{1}{2!}\cdot x^{2}+\frac{0}{3!}\cdot x^{3}=1+x+\frac{x^{2}}{2}
\end{aligned}
$$

מ.ש.ל.ב.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** חשבו את $\sin\left(\frac{1}{2}\right)$ עד דיוק 10^{-20}

הוכחה:

ראינו בהרצאה כי פולינום הטיילור של sin הוא $T_n\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$,

נבחר קירוב:

$$T_{64}\sin\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{i=0}^{31}\frac{(-1)^{i}}{(2i+1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1}=\sum_{i=0}^{31}\frac{(-1)^{i}}{(2i+1)!}\cdot\frac{1}{2^{2i+1}}$$

נשים לב ש$\exists\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ כך ש

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\frac{1}{2}\right)&=T_{64}\sin\left(\frac{1}{2}\right)+R_{64}\sin\left(\frac{1}{2}\right)=T_{6}\sin\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\sin^{(64+1)}(\xi)}{(64+1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{64+1}\\
&\Rightarrow\left|\sin\left(\frac{1}{2}\right)-T_{64}\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|\frac{\sin^{(64+1)}(\xi)}{(64+1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{64+1}\right|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{64+1}\cdot\frac{1}{65!}\\
&=\frac{1}{2^{65}}\cdot\frac{1}{65!}<\frac{1}{2^{65}}\cdot\frac{1}{2^{64}}=\frac{1}{2^{129}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{128}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{64}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16^{32}}\\
&\quad<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{32}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{20}}<10^{-20}\\
&\Rightarrow\left|\sin\left(\frac{1}{2}\right)-T_{64}\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right|<10^{-20}
\end{aligned}
$$

כלומר $T_{64}\sin\left(\frac{1}{2}\right)=C$ הוא קירוב של $\sin\left(\frac{1}{2}\right)$ עד כדי דיוק 10^{-20}

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** חשבו את e עד דיוק 10^{-1000}

הוכחה:

ראינו בהרצאה כי פולינום הטיילור של e^x הוא $T_n\exp(1)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$,

נבחר קירוב:

$$T_{10^{1000}}\exp(1)=\sum_{i=0}^{10^{1000}}\frac{1}{i!}$$

נשים לב ש$\exists\xi\in(0,1)$ כך ש

$$e^1=T_{10^{1000}}\exp(1)+R_{10^{1000}}\exp\left(\frac{1}{2}\right)=T_{10^{1000}}\exp(1)+\frac{(e^x)^{\left(10^{1000}+1\right)}(\xi)}{(10^{1000}+1)!}(1-0)^{10^{1000}+1}$$
$$\Rightarrow\left|e^1-T_{10^{1000}}\exp(1)\right|=\left|\frac{(e^x)^{\left(10^{1000}+1\right)}(\xi)}{(10^{1000}+1)!}\right|=\left|\frac{e^\xi}{(10^{1000}+1)!}\right|$$
$$=\frac{e^\xi}{(10^{1000}+1)!}\overset{\xi<1}{\leq}\frac{1}{(10^{1000}+1)!}<\frac{1}{10^{1000}}=10^{-1000}$$
$$\Rightarrow|e-T_{10^{1000}}\exp(1)|=\left|e^1-T_{10^{1000}}\exp(1)\right|=<10^{-1000}$$

כלומר $T_{10^{1000}}\exp(1)=C$ הוא קירוב של e עד כדי דיוק 10^{-1000}

מ.ש.ל.ב.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** קרבו את $\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\left(x^2\right)dx$ בדיוק של 10^{-4}

הוכחה:

נבחר $f(x)=\sin(x)$ ונסתכל על $T_n\sin\left(x^2\right)$

נשים לב כי

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\left(x^2\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[T_n\left(x^2\right)+R_n\left(x^2\right)\right]dx=\int_0^{\frac{1}{2}}T_n\left(x^2\right)dx+\int_0^{\frac{1}{2}}R_n\left(x^2\right)dx$$

נחפש n כך ש$\left|\int_0^{\frac{1}{2}}R_n\left(x^2\right)dx\right|<10^{-4}$,

יהי $0\leq x\leq\frac{1}{2}$, קיים $\xi\in\left(0,x^2\right)$ כך ש

$$\left|R_n\left(x^2\right)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot\left(x^2\right)^{(n+1)}\right|\leq\left|\frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right|\leq\frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{4^{n+1}}\overset{n\geq5}{\leq}\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{4^6}$$
$$=\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{4^6}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{6\cdot4\cdot3}\cdot\frac{1}{16^3}\leq\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10^3}\cdot\frac{1}{6\cdot4\cdot3}\leq\frac{1}{10^5}=10^{-5}$$

לכן נבחר $n=6$, ולכן

$$\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\left(x^2\right)-\int_0^{\frac{1}{2}}T_6\left(x^2\right)dx\right|=\left|\int_0^{\frac{1}{2}}R_6\left(x^2\right)dx\right|\leq\int_0^{\frac{1}{2}}\left|R_6\left(x^2\right)\right|dx\leq\int_0^{\frac{1}{2}}10^{-5}dx\leq10^{-4}$$

נחשב $T_6\sin\left(x^2\right)=x^2-\frac{\left(x^2\right)^3}{3!}+\frac{\left(x^2\right)^5}{5!}$, לכן

$$\int_0^{\frac{1}{2}}T_6\sin\left(x^2\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[x^2-\frac{\left(x^2\right)^3}{3!}+\frac{\left(x^2\right)^5}{5!}\right]=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{3!\cdot7}+\frac{x^{11}}{5!\cdot11}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{3!\cdot7}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{5!\cdot11}-0=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6\cdot7}\cdot\frac{1}{2^4}+\frac{1}{120\cdot11}\cdot\frac{1}{2^8}\right)$$
$$=0.04148102467194264$$

כלומר 0.04148102467194264 מקיים את הנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** קרבו את $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^4}dx$ בדיוק של 10^{-5}

הוכחה:

$f\left(x\right)=\sqrt{x}$ ונסתכל על T_nf סביב $a=1$

נשים לב כי

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^4}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[T_n\left(1-x^4\right)+R_n\left(1-x^4\right)\right]dx=\int_0^{\frac{1}{2}}T_n\left(1-x^4\right)dx+\int_0^{\frac{1}{2}}R_n\left(1-x^4\right)dx$$

נחפש n כך ש$\left|\int_0^{\frac{1}{2}}R_n\left(1-x^4\right)dx\right|<10^{-5}$

יהי $0\le x\le\frac{1}{2}$, קיים $\xi\in\left[1-x^4,1\right]\subseteq\left[\frac{3}{4},1\right]$ כך ש

$$\begin{aligned}\left|R_n\left(1-x^4\right)\right|&=\left|\frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{(n+1)!}\cdot\left(1-x^4-1\right)^{n+1}\right|\le\left|\frac{\left(x^4\right)^n\cdot f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{(n+1)!}\right|\le\frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left|f^{(n+1)}\left(\xi\right)\right|\\&=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{16^{n+1}}\cdot\left|f^{(n+1)}\left(\xi\right)\right|\end{aligned}$$

נבחר $n=3$, לכן

$$\begin{aligned}f^{(0)}\left(x\right)&=x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f^{(0)}\left(1\right)=1\\f^{(1)}\left(x\right)&=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{-1}{2}}\Rightarrow f^{(1)}\left(1\right)=\frac{1}{2}\\f^{(2)}\left(x\right)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot x^{\frac{-3}{2}}\Rightarrow f^{(2)}\left(1\right)=\frac{-1}{4}\\f^{(3)}\left(x\right)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\cdot x^{\frac{-5}{2}}\Rightarrow f^{(3)}\left(1\right)=\frac{3}{8}\\f^{(4)}\left(x\right)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\cdot\frac{-5}{2}\cdot x^{\frac{-7}{2}}\Rightarrow f^{(4)}\left(1\right)=-\frac{15}{16}\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\left|R_3\left(1-x^4\right)\right|&=\frac{1}{(3+1)!}\cdot\frac{1}{16^{3+1}}\cdot\left|f^{(3+1)}\left(\xi\right)\right|\le\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{16^4}\cdot\frac{15}{16}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{-7}{2}}=\frac{15}{24}\cdot\frac{1}{16^4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{-7}{2}}\\&<\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{16^4}\cdot 2.8\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^4}-\int_0^{\frac{1}{2}}T_3\left(1-x^4\right)dx\right|&=\left|\int_0^{\frac{1}{2}}R_3\left(1-x^4\right)dx\right|\le\int_0^{\frac{1}{2}}\left|R_3\left(1-x^4\right)\right|dx\\&\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{5\cdot 2.8}{8}\cdot\frac{1}{16^4}dx=\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{16^4}<10^{-5}\end{aligned}$$

לכן $\int_0^{\frac{1}{2}}T_3\left(1-x^4\right)dx$ הוא הקירוב שחיפשנו, נחשב אותו

$$\begin{aligned}T_3\left(1-x^4\right)&=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!}\cdot\left(1-x^4+1\right)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(1-x^4-1\right)^2+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\left(1-x^4-1\right)^3\\&=1-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{8}x^8-\frac{1}{16}x^{12}\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} T_3\left(1-x^4\right)dx &= \int_0^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{8}x^8-\frac{1}{16}x^{12}\right]dx\\ &=\left[x+\frac{x^5}{10}-\frac{x^9}{72}+\frac{x^{13}}{13\cdot 16}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{10}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9}{72}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{13}}{13\cdot 16}\\ &\sim 0.496847286387386\end{aligned}$$

כלומר 0.496847286387386 מקיים את הנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $T_nf\left(x^m\right)=T_{n\cdot m}g\left(x\right)$

הוכחה:

נשים לב כי הוכחנו בכיתה שמתקיים $\lim_{x\to a}\frac{T_nf(x)-f(x)}{(x-a)^n}=0$

וגם T_nf הוא הפולינום היחיד מדרגה קטנה n המקיים את הנדרש,

לכן נשים לב שמתקיים

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{T_nf\left(x\right)-f\left(x\right)}{\left(x-0\right)^n}=\lim_{x\to 0}\frac{T_nf\left(x^m\right)-f\left(x^m\right)}{\left(x^m-0\right)^n}=\lim_{x\to 0}\frac{T_nf\left(x^m\right)-f\left(x^m\right)}{\left(x-0\right)^{n\cdot m}}$$

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{T_{n\cdot m}g\left(x\right)-g\left(x\right)}{\left(x-0\right)^{n\cdot m}}=\lim_{x\to 0}\frac{T_{n\cdot m}g\left(x\right)-f\left(x^m\right)}{\left(x-0\right)^{n\cdot m}}$$

נשים לב כי $T_{n\cdot m}g\left(x\right)$ ו$T_nf\left(x^m\right)$ הינם פולינומים ממעלה קטנה שווה $n\cdot m$ המקיימים את התנאים של המשפט עבור $f\left(x^m\right)$,

לכן

$$T_nf\left(x^m\right)=T_{n\cdot m}g\left(x\right)$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $T_nf\left(a+\left(x-a\right)^m\right)=T_{n\cdot m}g\left(x\right)$

הוכחה:

נשים לב כי הוכחנו בכיתה שמתקיים $\lim_{x\to a}\frac{T_nf(x)-f(x)}{(x-a)^n}=0$

וגם T_nf הוא הפולינום היחיד מדרגה קטנה n המקיים את הנדרש,

לכן נשים לב שמתקיים

$$\begin{aligned}0=\lim_{x\to a}\frac{T_nf\left(x\right)-f\left(x\right)}{\left(x-a\right)^n}&\overset{t=a+(x-a)^m}{=}\lim_{t\to a}\frac{T_nf\left(t\right)-f\left(t\right)}{\left(t-a\right)^n}\\ &=\lim_{x\to a}\frac{T_nf\left(a+\left(x-a\right)^m\right)-f\left(a+\left(x-a\right)^m\right)}{\left(\left(x-a\right)^m\right)^n}\\ &=\lim_{x\to a}\frac{T_nf\left(a+\left(x-a\right)^m\right)-f\left(a+\left(x-a\right)^m\right)}{\left(x-a\right)^{n\cdot m}}\\ 0=\lim_{x\to a}\frac{T_{n\cdot m}g\left(x\right)-g\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n\cdot m}}&=\lim_{x\to a}\frac{T_{n\cdot m}g\left(x\right)-f\left(a+\left(x-a\right)^m\right)}{\left(x-a\right)^{n\cdot m}}\end{aligned}$$

נשים לב כי $T_{n\cdot m}g\left(x\right)$ ו$T_nf\left(x^m\right)$ הינם פולינומים ממעלה קטנה שווה $n\cdot m$ המקיימים את התנאים של המשפט עבור $f\left(a+\left(x-a\right)^m\right)$,

לכן

$$T_nf\left(a+\left(x-a\right)^m\right)=T_{n\cdot m}g\left(x\right)$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** פולינום טיילור של $e^{\left(x^{1000}\right)}$ מסדר 3000 ומסדר 2511

הוכחה:

נגדיר $f\left(x\right)=e^{x};g\left(x\right)=e^{x^{1000}}$, נשים לב כי $g\left(x\right)=f\left(x^{1000}\right)$,

לכן מסעיף א מתקיים

$$T_{3000}g\left(x\right)=T_{\frac{3000}{1000}}f\left(x^{1000}\right)=T_{3}f\left(x^{1000}\right)=1+x^{1000}+\frac{\left(x^{1000}\right)^{2}}{2!}+\frac{\left(x^{1000}\right)^{3}}{3!}=\frac{x^{3000}}{6}+\frac{x^{2000}}{2}+x^{1000}+1$$

עתה נחשב T_{2511}, נשים לב כי מתקיים

$$\lim_{x\to0}\frac{T_{3000}g\left(x\right)-g\left(x\right)}{\left(x-0\right)^{3000}}=0\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{T_{3000}g\left(x\right)-g\left(x\right)}{\left(x-0\right)^{2511}}=0=\lim_{x\to0}\frac{T_{2511}g\left(x\right)-g\left(x\right)}{\left(x-0\right)^{2511}}$$

לכן אם נסמן $T_{2511}g\left(x\right)=\sum_{i=0}^{2511}a_{i}x^{i}$ ו $T_{3000}g\left(x\right)=\sum_{i=0}^{3000}b_{i}x^{i}$,

ממשפט היחידות הפולינום מדרגה קטנה שווה n מתקיים כי $a_{i}=b_{i}$, $0\leq\forall i\leq2511$,

כלומר $T_{2511}g\left(x\right)=\frac{x^{2000}}{2}+x^{1000}+1$, כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** פולינום טיילור של $\ln\left(1+x^{1000}\right)$ מסדר 3456

הוכחה:

נגדיר $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right);g\left(x\right)=\ln\left(1+x^{1000}\right)$, נשים לב כי $g\left(x\right)=f\left(1+x^{1000}\right)$,

לכן מסעיף א מתקיים

$$T_{3000}g\left(x\right)=T_{\frac{4000}{1000}}f\left(x^{1000}\right)=T_{4}f\left(x^{1000}\right)=x^{1000}-\frac{\left(x^{1000}\right)^{2}}{2}+\frac{\left(x^{1000}\right)^{3}}{3}-\frac{\left(x^{1000}\right)^{4}}{4}$$
$$=-\frac{x^{4000}}{4}+\frac{x^{3000}}{3}-\frac{x^{2000}}{2}+x^{1000}$$

עתה נחשב T_{3456}, נשים לב כי מתקיים

$$\lim_{x\to0}\frac{T_{4000}g\left(x\right)-g\left(x\right)}{\left(x-0\right)^{4000}}=0\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{T_{4000}g\left(x\right)-g\left(x\right)}{\left(x-0\right)^{3456}}=0=\lim_{x\to0}\frac{T_{3456}g\left(x\right)-g\left(x\right)}{\left(x-0\right)^{3456}}$$

לכן אם נסמן $T_{3456}g\left(x\right)=\sum_{i=0}^{3456}a_{i}x^{i}$ ו $T_{4000}g\left(x\right)=\sum_{i=0}^{4000}b_{i}x^{i}$,

ממשפט היחידות הפולינום מדרגה קטנה שווה n מתקיים כי $a_{i}=b_{i}$, $0\leq\forall i\leq3456$,

כלומר $T_{3456}g\left(x\right)=\frac{x^{3000}}{3}-\frac{x^{2000}}{2}+x^{1000}$, כנדרש

מ.ש.ל.ד.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $f\left(x\right)-T_{n}f\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{n!}\cdot\left(x-\xi\right)^{n}\cdot\left(x-a\right)$

הוכחה:

ראינו בהרצאה כי

$$f\left(x\right)-T_{n}f\left(x\right)=\int_{a}^{x}\frac{f^{(n+1)}\left(t\right)}{n!}\cdot\left(x-t\right)^{n}dt$$

נסמן $h\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(t\right)}{n!}\cdot\left(x-t\right)^{n}$, נשים לב כי h רציפה כי $f^{(n+1)}$ רציפה,

לכן מסעיף מתקיים $\exists\xi\in\left(a,x\right)$ כך ש

$$\int_{a}^{x}h\left(t\right)dt=h\left(\xi\right)\cdot\left(x-a\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{n!}\cdot\left(x-\xi\right)^{n}\cdot\left(x-a\right)$$

נשים לב כי

$$f\left(x\right)-T_{n}f\left(x\right)=\int_{a}^{x}\frac{f^{\left(n+1\right)}\left(t\right)}{n!}\cdot\left(x-t\right)^{n}dt=\int_{a}^{x}h\left(t\right)dt=\frac{f^{\left(n+1\right)}\left(\xi\right)}{n!}\cdot\left(x-\xi\right)^{n}\cdot\left(x-a\right)$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\exists\xi\in\left(a,x\right)$ כך ש$\int_{a}^{b}h\left(t\right)dt=h\left(\xi\right)\cdot\left(b-a\right)$
הוכחה:
מהיות h רציפה אז קיימת לh פונקציה קדומה ונסמנה $H\left(x\right)$,
לכן ממשפט היסודי של האינפי מתקיים

$$\int_{a}^{b}h\left(x\right)dx=H\left(b\right)-H\left(a\right)$$

נשים לב כי H גזירה בכל נקודה בה h רציפה, כלומר H גזירה ורציפה ב$\left[a,b\right]$,
לכן ממשפט לגנדז' $\exists\xi\in\left(a,x\right)$ כך ש

$$\frac{H\left(b\right)-H\left(a\right)}{b-a}=H'\left(\xi\right)=h\left(\xi\right)\Rightarrow H\left(b\right)-H\left(a\right)=h\left(\xi\right)\cdot\left(b-a\right)$$

נציב ונקבל

$$\int_{a}^{b}h\left(x\right)dx=H\left(b\right)-H\left(a\right)=h\left(\xi\right)\cdot\left(b-a\right)$$

מ.ש.ל.ב.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** הראו שלמשוואה $x^{2}=\cos\left(x\right)$ יש רק פתרון אחד חיובי
הוכחה:
נגדיר $f\left(x\right)=x^{2}-\cos\left(x\right)$, נשים לב כי f רציפה וגם

$$f\left(0\right)=0-\cos\left(0\right)=-1\leq0;f\left(1\right)=1^{2}-\cos\left(1\right)\geq1^{2}-1\geq0$$

לכן מערך הביניים $\exists x_{0}\in\left[0,1\right]$ כך ש

$$f\left(x_{0}\right)=0\Rightarrow x_{0}^{2}-\cos\left(x_{0}\right)=0\Rightarrow x_{0}^{2}=\cos\left(x_{0}\right)$$

עתה נשים לב כי $f''\left(x\right)=\left(2x-\sin\left(x\right)\right)'=2-\cos\left(x\right)>0$,
כלומר $f'\left(x\right)$ עולה ממש ומתקיים $f'\left(0\right)=0$, כלומר $f'\left(x\right)>0$, $\forall x\geq0$,
לכן f עולה ממש בקטע $\left(0,\infty\right)$ ולכן קיים לכל היותר קיים פתרון אחד עבור $f\left(x\right)=0$,
וראינו כי x_{0} מקיים את הנדרש, לכן קיים פתרון יחיד בקטע $\left(0,\infty\right)$,
כלומר קיים פתרון יחיד חיובי למשוואה $x^{2}=\cos\left(x\right)$, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\sqrt{\frac{2}{3}}<A<\frac{5}{6}$
הוכחה:
נגדיר $f\left(x\right)=x^{2}-\cos\left(x\right)$,
מסעיף א אנחנו יודעים כי קיים פתרון יחיד עבור $f\left(x\right)=0$ ונסמנו ב A

בכיתה ראינו כי $T_{2n}\cos(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^n\cdot(x)^{2n}}{2n!}$,

$$\cos\left(\frac{5}{6}\right)-T_3\cos\left(\frac{5}{6}\right)=R_3\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{\cos^{(3+1)}\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{3+1}}{(3+1)!}<\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}$$

$$T_3\left(\frac{5}{6}\right)=1-\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{2!}$$

לכן

$$f\left(\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^2-\cos\left(\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(T_3\cos\left(\frac{5}{6}\right)+R_3\left(\frac{5}{6}\right)\right)\geq\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(T_3\cos\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}\right)$$
$$=\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(1-\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{2!}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}\right)=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2-1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}=\frac{3\cdot 25}{2\cdot 36}-1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}$$
$$=\frac{25}{24}-1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}-\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}=\frac{1}{4!}\cdot\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\right)>0$$

מהיות f עולה ממש (ראינו בסעיף א) נובע כי

$$f(A)=0<f\left(\frac{5}{6}\right)\Rightarrow A<\frac{5}{6}$$

עתה נחשב את הצד השני של האי שוויון

$$\cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-T_3\cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=R_3\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{\cos^{(3+1)}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{3+1}}{(3+1)!}=\frac{\cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2}{(3+1)!}$$
$$=\frac{\cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot 2^2}{4!\cdot 3^2}=\frac{\cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{3!\cdot 3^2}\overset{\sqrt{\frac{2}{3}}>\frac{\pi}{4}}{>}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!\cdot 3^2}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 3!\cdot 3^2}$$

$$T_3\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=1-\frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}{2!}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

לכן

$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2-\cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2-\left(T_3\cos\left(\frac{5}{6}\right)+R_3\left(\frac{5}{6}\right)\right)=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 3!\cdot 3^2}\right)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 3!\cdot 3^2}<0$$

מהיות f עולה ממש (ראינו בסעיף א) נובע כי

$$f(A)=0>f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\Rightarrow A>\sqrt{\frac{2}{3}}$$

כלומר קיבלנו ש

$$\sqrt{\frac{2}{3}}<A<\frac{5}{6}$$

מ.ש.ל.ב.☺

7. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ מתכנס?

הוכחה:

נראה כי $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ מתכנס עבור $\alpha > \frac{1}{2}$

i. אם $\alpha > \frac{1}{2}$, ראינו בכיתה כי פולינום טיילור של $T_4 \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$,
קיים $h(x)$ כך ש$\ln(1+x) = T_4 \ln(1+x) + h(x)$ וגם $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^4} = 0$
לכן

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = T_4 \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) + h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$
$$= \left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^3 - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^4 + h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$
$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \frac{(-1)^n}{3n^{3\alpha}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{4\alpha}} + h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

נשים לב כי $\frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{3n^{3\alpha}}$ מונוטוניות יורדות ושואפות ל0,
לכן ממשפט לייבניץ $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \sum \frac{(-1)^n}{3n^{3\alpha}}$ מתכנסים,
נשים לב כי $4\alpha \geq 2\alpha > 2\cdot\frac{1}{2} = 1$, לכן $\sum \frac{1}{2n^{2\alpha}} = \frac{1}{2}\sum\frac{1}{n^{2\alpha}}, \sum\frac{1}{4n^{4\alpha}} = \frac{1}{4}\sum\frac{1}{n^{4\alpha}}$ מתכנסים,
נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)}{\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^4} \overset{\text{heine}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^4} = 0$$

לכן $\left|h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right| < \frac{1}{n^{4\alpha}}$ כמעט תמיד, לכן ממבחן ההשוואה $\sum\left|h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right|$ מתכנס,
לכן $\sum h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ מתכנס כי מתכנס בהחלט, לכן

$$\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \sum\left[\frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \frac{(-1)^n}{3n^{3\alpha}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{4\alpha}} + h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right]$$
$$= \sum\frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \sum\frac{1}{2n^{2\alpha}} + \sum\frac{(-1)^n}{3n^{3\alpha}} - \sum\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{4\alpha}} + \sum h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

כלומר $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ כי הוא סכום של טורים מתכנסים

ii. אם $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$,
קיים $0 < m \in \mathbb{N}$ כך ש$\alpha\cdot m > 1$ וגם $\forall n \in \mathbb{N}$ כך ש$n < m$ מתקיים $\alpha\cdot n \leq 1$,
ראינו בכיתה כי פולינום טיילור של $T_m \ln(1+x) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1}\cdot\frac{x^i}{i}$,
קיים $h(x)$ כך ש$\ln(1+x) = T_m\ln(1+x) + h(x)$ וגם $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^m} = 0$

לכן

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = T_m \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) + h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1}{i} \cdot \left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^i + h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor} \cdot \frac{1}{2i+1} \cdot \left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{2i+1} - \sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor} \frac{1}{2i} \cdot \left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{2i} + +h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor} \cdot \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{(-1)^n}{n^{\alpha(2i+1)}} - \sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor} \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{n^{2\cdot i\cdot\alpha}} + h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

נשים לב כי $\frac{1}{n^{\alpha(2i+1)}}$ מונוטונית יורדות ושואפות ל0, $1 \le \forall i \le m$
לכן ממשפט לייבניץ $\sum \frac{1}{n^{\alpha(2i+1)}}$ מתכנס,
ומהיות $\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor} \cdot \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{(-1)^n}{n^{\alpha(2i+1)}}$ סכום סופי של טורים מתכנסים, מתקיים כי גם הוא מתכנס
נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h\left(\frac{(-1)^n}{n^{\alpha\cdot m}}\right)}{\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^m} \overset{\text{heine}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^m} = 0$$

לכן $\left|h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right| < \frac{1}{n^{m\alpha}}$ כמעט תמיד, לכן ממבחן ההשוואה $\sum \left|h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right|$ מתכנס כי $\alpha \cdot m > 1$,
לכן $\sum h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ מתכנס כי מתכנס בהחלט,
נשים לב כי $\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor} \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{n^{2\cdot i\cdot\alpha}} > \sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ וגם $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ לא מתכנס כי $2\alpha \le 1$ אחרת $\alpha > \frac{1}{2}$ בסתירה למקרה,
לכן ממבחן ההשוואה מתקיים כי $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ מתבדר ולכן $\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor} \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{n^{2\cdot i\cdot\alpha}}$ מתבדר,
לכן

$$\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \sum \left[\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor} \cdot \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{(-1)^n}{n^{\alpha(2i+1)}} - \sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor} \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{n^{2\cdot i\cdot\alpha}} + h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor} \cdot \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{(-1)^n}{n^{\alpha(2i+1)}}\right] - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor} \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{n^{2\cdot i\cdot\alpha}}\right] + \sum h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

נסמן $\sum h\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \beta$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor} \cdot \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{(-1)^n}{n^{\alpha(2i+1)}}\right] = \gamma$ (כי הם מתכנסים) ונקבל

$$\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \beta + \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor} \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{n^{2\cdot i\cdot\alpha}}\right]$$

כלומר $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor} \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{n^{2\cdot i\cdot\alpha}}\right]$ מתכנס (כי השאר הם מספרים),
וראינו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor} \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{n^{2\cdot i\cdot\alpha}}\right]$ לא מתכנס, לכן $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ לא מתכנס

מ.ש.ל.א.☺