פתרון תרגיל מספר 4־ אינפי 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

19 בנובמבר 2018

1. הוכחה:

 $\int rac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ או אינטגרל הלא מסוים הבא אינטגרל אינטגרל

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx \stackrel{u=1+e^x}{\underset{du=e^x}{=}} \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{1+e^x} + C$$

יש.ל.א.י

(ב) אינו שאינו או גבולו מתכנס מתכנס מתכנס מתכנס $\int_0^\infty \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ הוכחה:

שים לב שמתקיים ולכן:

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \to \infty} \int_0^t \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{1+e^x} + C \right) \Big|_0^t = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{1+e^t} + \frac{1}{1+e^0} \right] = \frac{1}{1+1} - \lim_{t \to \infty} \frac{1}{1+e^t} \stackrel{\frac{1}{\infty}=0}{=} \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

מ.ש.ל.ב.☺

 $\lim_{n o\infty}rac{\sum_{k=1}^n k^lpha}{C\cdot n^eta}=1$ כך של כך כך כל מצאו .2 מיל: מצאו הוכחה:

נשים לב שמתקיים

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha = \sum_{k=1}^n k^\alpha \cdot \frac{n^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{n} \cdot n^{\alpha+1} = n^{\alpha+1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{n} = n^{\alpha+1} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{n}$$

נבחר $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1
ight\}$ נבחר

$$\lim_{n \to \infty} \left(\max_{1 \le i \le n} \left\{ x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)} \right\} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0$$

נבחר $f\left(x\right)=x^{\alpha}$ ו, $\xi_{i}^{(n)}=\frac{i}{n}$ ולכן מתקיים

$$\varsigma(f, P_n, \xi_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)}) (x_i - x_{i-1}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n k^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}$$

נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}\varsigma\left(f,P_n,\xi_n\right)\stackrel{\star}{=} \int_0^1 t^\alpha\cdot dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\mid_0^1 = \frac{1}{\alpha+1} - 0 = \frac{1}{\alpha+1}$$

נשים לב ש \star מתקיים ממשפט 9.3 ולכן

$$\begin{split} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{n^{\alpha+1}} &= \lim_{n\to\infty} \varsigma\left(f,P_n,\xi_n\right) = \frac{1}{\alpha+1} \\ \Rightarrow 1 &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{n^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\alpha+1}} = \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}} \\ &\text{!וומ בור } \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{C \cdot n^\beta} = 1 \text{ and } c, C = \frac{1}{\alpha+1} \text{ ,} \beta = \alpha+1 \end{split}$$
ילכן עבור $C = \frac{1}{\alpha+1}$, $C = \frac{1}{\alpha+1}$

3. פתרון:

 $A\left(y
ight)=\int_{0}^{y}\cos^{100}\left(t
ight)dt$ אי איל: גזרו את הפונקציה א

הוכחה

F(t) הערה ונסמנה (שים לב של $f(t) = \cos^{100}(t)$ רציפה ולכן היא אינטגרבילית וקיימת פונקציה קדומה (הערה $F(t) = \cos^{100}(t)$ הערה בהרצאה)

, א $t\in\mathbb{R}$ רציפה לכל כי כי $t\in\mathbb{R}$ לכל לכל היקוים, אולכן לכן היקוים לכן לכן אר האינפי היסודי של האינפי (משפט היסודי של האינפי לכן מהמשפט היסודי א

$$A(y) = \int_0^y \cos^{100}(t) dt = F(y) - F(0)$$

$$A'(y) = (F(y) - F(0))' = (F(y))' - (F(0))'$$

$$= f(y) - 0 = \cos^{100}(y)$$

מ.ש.ל.א.©

 $B\left(x
ight)=\int_{0}^{e^{x}}\cos^{100}\left(t
ight)dt$ ב) צ"ל: גזרו את הפונקציה

הוכחה:

F(t) הערה (נטמנה היא אינטגרבילית וקיימת פונקציה דומה הערה (הערה $f(t)=\cos^{100}{(t)}$ הערה הרצאה) הרצאה)

, א $t\in\mathbb{R}$ רציפה $f\left(t\right)$ כי כל לכל , אל הא', א ולכן מתקיים ולכן מתקיים לכן האינפי של האינפי של האינפי לכן מהמשפט היסודי של האינפי (משפט 7.4

$$B(x) = \int_{0}^{e^{x}} \cos^{100}(t) dt = F(e^{x}) - F(0)$$

$$B'(x) = (F(e^{x}) - F(0))' = (F(e^{x}))' - (F(0))'$$

$$\stackrel{\text{chain rule}}{=} F'(e^{x}) \cdot (e^{x})' - 0 = f(e^{x}) \cdot e^{x} = \cos^{100}(e^{x}) \cdot e^{x}$$

מ.ש.ל.ב.©

 $C\left(x
ight)=\int_{x^{2}}^{0}\cos^{100}\left(t
ight)dt$ גו איל: גזרו את הפונקציה

הוכחה:

F(t) הערה ונסמנה קדומה וניסמנה ולכן היא אינטגרבילית היא אינטגרבילית וקיימת וניסמנה וניסמנה ולכן הערה $f(t)=\cos^{100}{(t)}$ הערה בהרצאה)

, אל $\in \mathbb{R}$ רציפה $f\left(t\right)$ כי כי $t\in \mathbb{R}$ לכל האינפי אל היסודי של האינפי (משפט היסודי של האינפי (משפט היסודי של האינפי (מ

$$C(x) = \int_{x^{2}}^{0} \cos^{100}(t) dt = F(0) - F(x^{2})$$

$$C'(x) = (F(0) - F(x^{2}))' = (F(0))' - (F(x^{2}))'$$

$$\stackrel{\text{chain rule}}{=} 0 - F'(x^{2}) \cdot (x^{2})' = -f(x^{2}) \cdot 2x = -\cos^{100}(x^{2}) \cdot 2x$$

מ.ש.ל.ג.©

 $D\left(x
ight)=\int_{x^{2}}^{e^{x}}\cos^{100}\left(t
ight)dt$ הפונקציה את את גזרו את צ"ל: גזרו

הוכחה:

F(t) הערה ונסמנה קדומה ונסמנה ולכן היא אינטגרבילית וקיימת ולכן רציפה ולכן רציפה ולכן היא אינטגרבילית וקיימת האינטגרבילית (הערה 10.7%) הערה (הערה 17.8%) בהרצאה)

, $\forall t\in\mathbb{R}$ רציפה $f\left(t\right)$ כי כי $t\in\mathbb{R}$ לכל , $F'\left(t\right)=f\left(t\right)$ מתקיים לכן מהמשפט היסודי של האינפי (משפט 7.4) מתקיים

$$D(x) = \int_{x^2}^{e^x} \cos^{100}(t) dt = F(e^x) - F(x^2)$$

$$D'(x) = (F(e^x) - F(x^2))' = (F(e^x))' - (F(x^2))'$$

$$\stackrel{\text{chain rule}}{=} F'(e^x) \cdot (e^x)' - F'(x^2) \cdot (x^2)'$$

$$= f(e^x) \cdot e^x - f(x^2) \cdot 2x = \cos^{100}(e^x) \cdot e^x - \cos^{100}(x^2) \cdot 2x$$

מ.ש.ל.ד.☺

 $E\left(x
ight)=\int_{x}^{x^{2}}e^{t\cdot\sin(t)}dt$ (ה) אייל: גזרו את הפונקציה

:הוכחה

7.3 הערה (t) הערה ונסמנה קדומה נשים לב ש $f\left(t
ight)=e^{t\cdot\sin(t)}$ רציפה ולכן היא אינטגרבילית וקיימת פונקציה קדומה (הערה בהרצאה)

, אל $\in \mathbb{R}$ רציפה $f\left(t\right)$ כי כי לכל האינפי לכל , אל האינפי (משפט היסודי של האינפי (משפט היסודי של האינפי לכן מהמשפט היסודי של האינפי (משפט א

$$E\left(x\right) = \int_{x}^{x^{2}} e^{t \cdot \sin(t)} dt = F\left(x^{2}\right) - F\left(x\right)$$

$$E'\left(x\right) = \left(F\left(x^{2}\right) - F\left(x\right)\right)' = \left(F\left(x^{2}\right)\right)' - \left(F\left(x\right)\right)'$$

$$\stackrel{\text{chain rule}}{=} F'\left(x^{2}\right) \cdot \left(x^{2}\right)' - F'\left(x\right) \cdot \left(x\right)'$$

$$= f\left(x^{2}\right) \cdot 2x - f\left(x\right) = e^{x^{2} \cdot \sin\left(x^{2}\right)} \cdot 2x - e^{x \cdot \sin\left(x\right)}$$

מ.ש.ל.ה.☺

ו [a,b] אינטגרבילית אינטגרבילית לכל f אזי אינטגרבילית לכל ,[a+arepsilon,b] ב"ל. 4

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^{+}} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x) dx$$

הוכחה:

 $\varepsilon > 0$ יהי

, $\forall x \in [a,b]$, $|f\left(x
ight)| \leq M$ כך ש $\exists M \in \mathbb{R}$ אזי היות הסומה ב $f\left(x
ight)$

f(x) מתקיים שf(x) אינטגרבילית f(x) אינטגרבילית של אינטגרבילית בכל $[a+\varepsilon,b]$, לכל $[a+\varepsilon,b]$, מתקיים שf(x) אינטגרבילית בכל $[a+\varepsilon,b]$, לכל ב $[a+\varepsilon,b]$,

לכן קיימת חלוקה Q של [a+r,b] כך שמתקיים

$$U(f,Q) - L(f,Q) \le \frac{\varepsilon}{2}$$

[a,b] נגדיר $P=Q\cup\{a\}$ חלוקה של נעדיר נשים לב שמתקיים.

$$\sup \{ f(x) \mid a \le x \le a + r \} - \inf \{ f(x) \mid a \le x \le a + r \} \le 2 \cdot M$$

אזי מההגדרה מתקיים

$$U\left(f,P\right) - L\left(f,P\right) \le U\left(f,Q\right) - L\left(f,Q\right) + 2 \cdot M\left((a+r) - a\right) \le \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot M \cdot (r)$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

לכן, מהמשפט שהתנאים הבאים שקולים מתקיים שf אינטגרבילית באים וגם מתקיים לכן, מהמשפט שהתנאים הבאים שקולים מתקיים

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \to 0^{+}} \left| \int_{a}^{b} f(x) \, dx - \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x) \, dx \right| = \lim_{\varepsilon \to 0^{+}} \left| \left(\int_{a}^{a+\varepsilon} f(x) \, dx + \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x) \, dx \right) - \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x) \, dx \right|$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^{+}} \left| \int_{a}^{a+\varepsilon} f(x) \, dx \right| \leq \lim_{\varepsilon \to 0^{+}} M \cdot \varepsilon = 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{\varepsilon \to 0^{+}} \left| \int_{a}^{b} f(x) \, dx - \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x) \, dx \right| \leq 0$$

כלומר, ממשפט סנדוויץ' מתקיים כי

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^{+}} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x) dx$$

מ.ש.ל.©

5. פתרון:

 $F'\left(x
ight)=f\left(x
ight)$ גיירה ב[a,b] גיירה ב[a,b], איי איי ג[a,b], איי הינחה: $F\left(x
ight)=\int_{a}^{x}f\left(x
ight)dx$ איי איי מתקיים כי $F\left(x
ight)=f\left(x
ight)$ גיירה ב $F\left(x
ight)=f\left(x
ight)$, (משפט $F\left(x
ight)=f\left(x
ight)$ מ.ש.ל.א. $F'\left(x
ight)=f\left(x
ight)$ מ.ש.ל.א. $F'\left(x
ight)=f\left(x
ight)$ מ.ש.ל.א.

 $F'\left(x
ight)=$ ו [a,b] גזירה ב[a,b] גזירה איר איר בעלת אי רציפות סליקה ב[a,b] ואינטגרבילית ב[a,b], איי איר אירה ב[a,b] גזירה ב[a,b] וואינטגרבילית ב[a,b]

 $f_{x}(x_0)
eq L$ נשים לב שמהיות $f_{x}(x_0) = L = \lim_{x \to x_0^+} f_{x}(x)$ מתקיים סליקה אזי מתקיים לב שמהיות בעלת אי רציפות סליקה אזי מתקיים לב כי $g_{x}(x_0) = \begin{cases} L - f_{x}(x_0) & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases}$ נגדיר נקודה, ולכן

$$G(x) = \int_{a}^{x} g(x) dx = \int_{a}^{x} 0 \cdot dx = 0$$

$$h\left(x
ight)=f\left(x
ight)+g\left(x
ight)=egin{cases} L & x=x_0 \\ f\left(x
ight) & x
eq x_0 \end{cases}$$
 לכך

אזי h אינטגרביליות ב[a,b] כי היא התקבלה מסכום של אינטגרביליות וגם

$$F(x) = F(x) + G(x) = \int_{a}^{x} f(x) dx + \int_{a}^{x} g(x) dx = \int_{a}^{x} h(x) dx = H(x)$$

וגם מתקיים כי h רציפה בx0 מההגדרה כי h (x0) וגם מתקיים כי h רציפה בx0 מההגדרה כי x1, וווו $x_{x\to x_0}$ x2 מתקיים x3 מתקיים x4 מתקיים x6.4 מתקיים x7 גזירה בx8 וגם

$$\lim_{x \to x_{0}^{-}} f(x) = F'(x_{0}) = \lim_{x \to x_{0}^{+}} f(x)$$

מ.ש.ל.ב.☺

[a,b] לא גזירה ב $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ אזי [a,b], אזי אינטגרבילית ב[a,b] לא גזירה ב[a,b] לא גזירה ב[a,b] לא גזירה ב[a,b] לא גזירה ב

, $\lim_{x \to x_0^-} f\left(x\right) = L_1 \neq L_2 = \lim_{x \to x_0^+} f\left(x\right)$ נשים לב שמהיות f בעלת אי רציפות מסוג 1 אזי מתקיים (g_1,g_2) בעלה אי רציפות מסוג 1 אינטגרביליות (g_1,g_2) בער האפס עד כדי שינוי נקודה, $g_1(x) = \begin{cases} L_1 - f\left(x_0\right) & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases}$, מדיר (g_1,g_2) בי הן פונקצית האפס עד כדי שינוי נקודה, האפס עד כדי שינוי נקודה (g_1,g_2)

$$G_1(x) = \int_a^x g_1(x) dx = \int_a^x 0 \cdot dx = 0 = \int_a^x g_2(x) dx = G_2(x)$$

$$h_{2}\left(x\right)=f\left(x\right)+g_{2}\left(x\right)=\begin{cases}L_{2} & x=x_{0}\\ f\left(x\right) & x\neq x_{0}\end{cases}, h_{1}\left(x\right)=f\left(x\right)+g_{1}\left(x\right)=\begin{cases}L_{1} & x=x_{0}\\ f\left(x\right) & x\neq x_{0}\end{cases}$$
לכך

אזי h_1,h_2 אינטגרביליות ב[a,b] כי היא התקבלה מסכום של אינטגרביליות וגם

$$F(x) = F(x) + G_1(x) = \int_a^x f(x) dx + \int_a^x g_1(x) dx = \int_a^x h_1(x) dx = H_1(x)$$

$$\lim_{x \to x_0^-} h_1(x) dx = \lim_{x \to x_0^-} [f(x) + g_1(x)] dx = L_1 = h_1(x_0)$$

וגם מתקיים כי h_1 רציפה משמאל ב x_0 מההגדרה, לכן ממשפט h_1 מתקיים

$$L_1 = h_1(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{H_1(x_0 + h) - H_1(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$

באופן דומה ל h_2 , נקבל כי

$$F(x) = F(x) + G_2(x) = \int_a^x f(x) dx + \int_a^x g_2(x) dx = \int_a^x h_2(x) dx = H_2(x)$$

$$\lim_{x \to x_0^+} h_2(x) dx = \lim_{x \to x_0^+} [f(x) + g_2(x)] dx = L_2 = h_2(x_0)$$

וגם מתקיים כי h_2 רציפה מימין ב x_0 מההגדרה, לכן ממשפט h_2 מתקיים וגם מתקיים כי

$$L_2 = h_2(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{H_2(x_0 + h) - H_2(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$

לכן,

$$\lim_{h \to 0^{+}} \frac{F(x_{0} + h) - F(x_{0})}{h} = L_{2} \neq L_{1} = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{F(x_{0} + h) - F(x_{0})}{h}$$

 x_0 כלומר F לא גזירה

מ.ש.ל.ג.©

(ד) פתרון:

f שני של מסוג שני אי רציפות מסוג שני אי $x_0=0$.i

. נניח בשלילה שf היא היא לא בעלת אי רציפות מסוג שני, אזי ו $\lim_{x\to 0^+}f(x)$ קיים במובן הרחב. ענדיר וניח $y_n=rac{2}{2n+1}$, $x_n=rac{1}{n}$, נאדיר

$$\lim_{n \to \infty} y_n = 0 = \lim_{n \to \infty} x_n$$

אזי מהיינה מתקיים

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} f\left(\frac{2}{2n+1}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} 3 = 3$$

, $0=\lim_{n o\infty}f\left(x_{n}
ight)=\lim_{n o\infty}f\left(y_{n}
ight)=3$ כי מתקיים מסוג שני, מעלת אי רציפות מסוג אי רציפות מסוג שני, מתקיים איני

fשני שני מסוג רציפות אי נקודה אי $x_0=0$ ולכן

מ.ש.ל.ד.1.©

0<orall arepsilon<1, [-1,arepsilon], [arepsilon,1], ii אינטגרבילית ב

נרצה להראות כי f רציפה ב[arepsilon,1] עד כדי מספר סופי של נקודות, ,[arepsilon,1] בקטע מספר את מקבלת לא בהם ליים של נקודות מספר טופי של נקודות בהם לא יהי $\frac{1}{n} \in [arepsilon, 1]$ כך ש
 $n \in \mathbb{N}$ יהי יהי

$$\varepsilon \le \frac{1}{n} \le 1 \Rightarrow 1 \le n \le \frac{1}{\varepsilon}$$

0אלא אלא א מקבלת לא קהם בהם fנשים נקודות וקן $\left|\frac{1}{\varepsilon}\right|$ נשים רק נסמן $A=\left\{1,\ldots,rac{1}{\left\lfloor rac{1}{arepsilon}
ight
floor}
ight\}$ והנקודות שבהם הפונקציה מחזירה 0), $[arepsilon,1]\setminus A$ נשים לב כי f רציפה

וגם [arepsilon,1ן אינטגרבילית עד כדי מספר סופי של נקודות מתקיים כי אינטגרבילית ב

$$\int_{\varepsilon}^{1} f(x) dx = \int_{\varepsilon}^{1} 3 \cdot dx = 3 \cdot (1 - \varepsilon)$$

אזי ,
- $\frac{1}{n}\in[-1,-\varepsilon]$ ע כך ש $n\in\mathbb{N}$ יהי ,
 $[-1,-\varepsilon]$ לקטע עתה נראה נראה אזי האופן באופן

$$-1 \le -\frac{1}{n} \le -\varepsilon \Rightarrow 1 \le n \le \frac{1}{\varepsilon}$$

0אלא אלא מקבלת לא לא בהם לב נשים נקודות נחוד $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ רק אלא לב שקיימים לב

נסמן $A = \left\{ -1, \dots, -rac{1}{\left\lfloor rac{1}{arepsilon}
ight
floor}
ight\}$ נסמן ונסמן אונקציה מחזירה (ווע פונקציה),

נשים לב כי fרציפה ב $[-1,-arepsilon]\setminus [-1,-arepsilon]$, וגם לב כי לב רציפה עד כדי מספר סופי של נקודות מתקיים כי לf אינטגרבילית מספר די מספר ולכן ממשפט של רציפה עד כדי מספר הופי של נקודות התקיים כי ל

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} f(x) \, dx = \int_{-1}^{-\varepsilon} 3 \cdot dx = 3 \cdot (-\varepsilon + 1)$$

@.2.ד.2.@

[-1,1] צ"ל: f אינטגרבילית ב iii

הוכחה:

נשים לב כי f אינטגרבילית לכל $|f\left(x
ight)|\leq3$ וגם 0<orall arepsilon<1, |0+arepsilon,1| מההגדרה, וגם [0,1] משאלה אינטגרבילית כי f אינטגרבילית מתקיים כי

$$\int_{0}^{1} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^{+}} \int_{0+\varepsilon}^{1} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^{+}} 3 \cdot (1-\varepsilon) = 3$$

 $\int_a^{b-arepsilon}f\left(x
ight)dx=\int_a^bf\left(x
ight)dx$ נשים לב ששאלה 4 מתקיימת גם לצ $g\left(x
ight)=f\left((b+a)-x
ight)$ ונשתמש נבחר (פשוט נבחר ל $g\left(x
ight)=f\left((b+a)-x
ight)$ 0< orall arepsilon < 1 ,[-1,-arepsilon]וגם נשים לב כי f אינטגרבילית לכן $\left|f\left(x\right)\right|\leq3$ וגם $\left[-1,-\varepsilon\right]$ מההגדרה לכן אינטגרבילית לכן $\left|f\left(x\right)\right|$ וגם 4 משאלה [-1,0] אינטגרבילית אינטגרבילים כי ולכן מתקיים כי

$$\int_{-1}^{0} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^{+}} \int_{-1}^{0-\varepsilon} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^{+}} 3 \cdot (1-\varepsilon) = 3$$

ולכן [0,1] ובנוסף לכך מתקיים: [-1,0] אינטגרבילית ב[-1,1] ובנוסף לכך מתקיים:

$$6 = \int_{-1}^{0} f(x) dx + \int_{0}^{1} f(x) dx = \int_{-1}^{1} f(x) dx$$

מ.ש.ל.ד.3.©

 $x_0=0$ נ צ"ל: $\int_{-1}^x f\left(x
ight) dx$ ו גזירה ב.iv

נשים לב שלפני 2 סעיפים מצאנו כי $\forall x \in [-1,0]$ מתקיים

$$\int_{-1}^{x} f(x) \, dx = 3 \cdot (1+x)$$

נשים לב כי שלפני סעיף גילינו כי $\forall x \in [0,1]$ מתקיים

$$\int_{-1}^{x} f(x) dx = \int_{-1}^{0} f(x) dx + \int_{0}^{x} f(x) dx = 3 + \int_{0}^{x} f(x) dx$$
$$= 3 + \left[\int_{0}^{1} f(x) dx - \int_{x}^{1} f(x) dx \right] = 3 + 3 - 3(1 - x) = 3 + 3 \cdot x = 3(1 + x)$$

, $F\left(x\right)$ עבור $x\in\left[-1,0\right]$ ו גשים לב קיבלנו אותה נוסחא ל , א $x\in\left[-,1,1\right]$, $F\left(x\right)=3\left(1+x\right)$ ולכן ולכן מתקיים הלי $F'\left(0\right)=3$, ולכן מתקיים הליט ולכן

מ.ש.ל.ד.4.©

לא גזירה $F=\int_{-1}^x f\left(x\right)dx$ ו $x_0=0$ שני מסדר שני בעלת אי רציפות אינטגרבילית אינטגרבילית אינטגרבילית ליינת $f:[-1,1] o\mathbb{R}$ $x_0 = 0$

הוכחה:

נסמן ב $\left(x
ight)$ את הפונקציה שהוגדרה בסעיף הקודם,

, [-1,1], אזי מהיות h רציפה עד כדי נקודה אחת מתקיים כי h אינטגרבילית ב, $h\left(x\right)=egin{cases}1&x\geq0\\0&x<0\end{cases}$ נגדיר

,
$$f\left(x
ight)=g\left(x
ight)+h\left(x
ight)= egin{cases} 0 & \exists n\in\mathbb{N}, rac{1}{n}=x \\ 4 & x\geq 0; \forall n\in\mathbb{N}, rac{1}{n}\neq x \end{cases}$$
 נגדיר $x=0$ גדיר $x=0$ גדיר $x=0$ גדיר $x=0$

נניח בשלילה שf היא א בעלת אי רציפות מסוג שני, אזי וווו $\lim_{x\to 0^+}f(x)$ קיים במובן הרחב. נגדיר $y_n=rac{2}{2n+1}$, $x_n=rac{1}{n}$ נשים לב כי

$$\lim_{n \to \infty} y_n = 0 = \lim_{n \to \infty} x_n$$

אזי מהיינה מתקיים

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} f\left(\frac{2}{2n+1}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} 4 = 4$$

, $0=\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(y_n\right)=4$ מחה שלנו f מסוג שני, מתקיים מסוג שני, מתקיים מחוג שני, בעלת אי רציפות מסוג שני, מתקיים כי $0\neq4$

f אני שני מסוג מסוג אי רציפות אי $x_0=0$

נראה שF לא גזירה ב0=0 ושf אינטגרבילית ונסיים.

נשים לב שf אינטגרבילית ב[-1,1] מסכום של אינטגרביליות,

ולכן

$$\int_{-1}^{x} h(x) dx = \begin{cases} \int_{-1}^{0} h(x) dx + \int_{0}^{x} h(x) dx & x \ge 0 \\ \int_{-1}^{x} h(x) dx & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \int_{-1}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} 1 \cdot dx & x \ge 0 \\ \int_{-1}^{x} 0 \cdot dx & x < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 + x & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ולכן

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(x) dx = \int_{-1}^{x} [g(x) + h(x)] dx = \int_{-1}^{x} g(x) dx + \int_{-1}^{x} h(x) dx$$
$$= 3(1+x) + \begin{cases} x & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3 + 4x & x \ge 0 \\ 3 + 3x & x < 0 \end{cases}$$

ולכן

$$\lim_{h \to 0^{-}} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \lim_{x \to 0^{-}} \frac{3 + 3x - 3}{x} = 3$$

$$\lim_{h \to 0^{+}} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{3 + 4x - 3}{x} = 4$$

וונות שלה שונות הצדדיות כי $x_0=0$ לא גזירה ב $F\left(x\right)$ ולכן

מ.ש.ל.ה.☺