אינפי 2 ־ סמסטר א' תשע"ט
תרגיל בית 12

להגשה עד יום חמישי, 17 בינואר, בשעה 23:45, דרך תיבת ההגשה במודל

1. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים ובדקו האם ההתכנסות היא במ"ש בתחומים המצוינים:
   (א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n x}{n^n}$; תחומים לבדיקת התכנסות במ"ש: $(-\infty,\infty)$, (a,b) עבור $a<b$ ממשיים.
   (ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$; תחומים לבדיקת התכנסות במ"ש: $(-\infty,\infty)$, $[a,b]$ עבור $a<b$ ממשיים.
   רמז: הראו שלכל $y\geq 0$ מתקיים $\ln(1+y)\leq y$. גם שאלה 7ב' מתרגיל בית 11 יכולה להיות שימושית.

2. יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R.
   (א) הוכיחו שרדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ גם הוא R.
   (ב) הוכיחו שרדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ גם הוא R.

3. מצאו בכל סעיף את **רדיוס** ההתכנסות של טור החזקות ב־ x ואת **תחום ההתכנסות** הנקודתית:
   (א) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (ב) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n+6^n}x^n$ (ג) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n^2}+4^n}{5^n+6^n}x^n$ (ד) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^{2n+1}$
   (ה) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^{n\log n}x^n$ (ו) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^nx^{n^2}$, כש־ $a\in\mathbb{R}$ קבוע. (ו) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^{n^2}x^n$, כש־ $a\in\mathbb{R}$ קבוע.

4. מצאו דוגמא לטור חזקות המתכנס בקטע $[-1,1]$ ומקיים שבנקודות 1 ו־ -1 יש רק התכנסות בתנאי.

5. יהיו $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ו־ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ טורי חזקות עם רדיוסי התכנסות חיוביים וסופיים R_1 ו־ R_2 בהתאמה.
   יהי R_3 רדיוס ההתכנסות של $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$.
   (א) הראו כי $R_3\geqslant\min(R_1,R_2)$.
   (ב) הראו שאם $R_1\neq R_2$ אזי $R_3=\min(R_1,R_2)$.
   (ג) מצאו שני טורים שעבורם מתקיים אי שוויון חזק (כלומר $R_3>\min(R_1,R_2)$).

6. (א) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה. הראו ש ־ $\liminf\limits_{n\to\infty}(-a_n)=-\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$.
   (ב) עבור סדרה $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, הוכיחו ש ־ $\limsup\limits_{n\to\infty}|c_n|=0$ אם"ם $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$.
   (ג) הוכיחו: אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש ־ $\liminf\limits_{n\to\infty}a_n<\infty$ אז יש $L\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים: $a_n<L$ באופן שכיח.
   (ד) תהי $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=1$, ו תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה כלשהי. הוכיחו שמתקיים:
   $$\limsup_{n\to\infty}(\alpha_na_n)=\limsup_{n\to\infty}a_n .$$

7. יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות חסומות.
   (א) הראו כי קיימת סדרה עולה ממש של אינדקסים $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ ב־ $\mathbb{N}$ כך ששתי תתי־הסדרות $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, $(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסות.
   (ב) היעזרו בסעיף הקודם ע"מ להראות ש־ $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)+\liminf\limits_{n\to\infty}(b_n)\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$.