פתרון תרגיל מספר 6 - לינארית 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

24 באפריל 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** חלקו את הפולינום $3x^4-5x^3+2x^2-x+4$ ב$x-2$

הוכחה:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3x^3 & +x^2 & +4x & +7 & \\ \cline{2-6}
x-2 & 3x^4 & -5x^3 & +2x^2 & -x & +4 \\
 & 3x^4 & -6x^3 & +0 & +0 & +0 \\ \cline{2-6}
 & 0 & x^3 & +2x^2 & -x & +4 \\
 & & x^3 & -2x^2 & +0 & +0 \\ \cline{3-6}
 & & 0 & 4x^2 & -x & 4 \\
 & & & 4x^2 & -8x & +0 \\ \cline{5-6}
 & & & & 7x & +4 \\
 & & & & 7x & -14 \\ \cline{6-6}
 & & & & & 18
\end{array}
$$

לכן

$$\boxed{3x^4-5x^3+2x^2-x+4=(x-2)\cdot\left(3x^3+x^2+4x+7\right)+18}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** חלקו את הפולינום x^4-3x^2+5x-7 בx^2-2x+4

הוכחה:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & x^2 & +2x & -3 & & \\ \cline{2-6}
x^2-2x+4 & x^4 & 0 & -3x^2 & +5x & +7 \\
 & x^4 & -2x^3 & +4x^2 & +0 & +0 \\ \cline{2-6}
 & 0 & 2x^3 & -7x^2 & +5x & +7 \\
 & & 2x^3 & -4x^2 & +8x & +0 \\ \cline{3-6}
 & & 0 & -3x^2 & -3x & +7 \\
 & & & -3x^2 & 6x & -12 \\ \cline{5-6}
 & & & & -9x & +19
\end{array}
$$

לכן

$$\boxed{x^4-3x^2+5x-7=\left(x^2-2x+4\right)\cdot\left(x^2+2x-3\right)+-9x+19}$$

מ.ש.ל.ב.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** אם הדרגה של Q היא 3 אזי הוא אי פריק
הוכחה:
נכון! נניח בשלילה כי Q פריק, אזי קיימים $p,r\in\mathbb{F}[x]$ כך ש$Q=p\cdot r$ וגם $0<\min\{\deg(p),\deg(r)\}$,
נשים לב כי $0<\deg(p),\deg(r)<3$, וגם מתקיים

$$3=\deg Q=\deg r+\deg p$$

המספרים היחידים המקיימים את הנדרש הם $\deg p,\deg r=1,2$, נניח בלי הגבלת הכלליות כי $\deg p=1$,
אזי נוכל לסמן $p(x)=a\cdot x+b$ כאשר $a,b\in\mathbb{F}$, $a\neq 0$
נשים לב כי עבור $x_1=-b\cdot a^{-1}$ מתקיים

$$p(x_1)=a\cdot\left(-b\cdot a^{-1}\right)+b=-b+b=0$$

ולכן $\boxed{Q(x_1)=r(x_1)\cdot p(x_1)=r(x_1)\cdot 0=0}$,
כלומר x_1 הוא שורש של Q בסתירה להנחה שלQ אין שורשים.
לכן ההנחה שלנו לא נכונה, כלומר Q הוא אי פריק.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** אם הדרגה של Q היא 4 אזי הוא אי פריק
הוכחה:
לא נכון! נבחר $Q(x)=\left(x^2+x+1\right)^2$, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$,
אנחנו יודעים כי $p(x)=x^2+x+1$ ללא שורשים מעל $\mathbb{R}$ כי $\Delta=-3<0$,
לכן $Q(x)=p(x)\cdot p(x)$ הוא ללא שורשים אחרת השורש היה מחלק את $p(x)$ כי אין מחלקי 0,
בנוסף לכך מתקיים $\deg Q=\deg p\cdot p=\deg p+\deg p=2+2=4$,
וגם Q הוא פריק בסתירה לטענה כי ניתן לכתוב אותו בתור $Q(x)=p(x)\cdot p(x)$ כאשר $0<\deg p<4$

מ.ש.ל.ב.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** אם הדרגה של Q היא 2 אזי הוא פריק
הוכחה:
לא נכון! נבחר $Q(x)=x^2+x+1$, נשים לב כי $\deg Q=2$
תחילה נשים לב כי $Q(0)=1,Q(1)=1+1+1=1$, כלומר לQ אין שורשים
נניח בשלילה כי Q פריק, אזי קיימים $p,r\in\mathbb{F}_2[x]$ כך ש$Q=p\cdot r$ וגם $0<\deg p,\deg r<2$ וגם

$$2=\deg Q=\deg r+\deg p$$

המספרים היחידים המקיימים את התנאים הינם $\deg r=\deg p=1$,
אזי נוכל לסמן $p(x)=a\cdot x+b$ כאשר $a,b\in\mathbb{F}$, $a\neq 0$
נשים לב כי עבור $x_1=-b\cdot a^{-1}$ מתקיים

$$p(x_1)=a\cdot\left(-b\cdot a^{-1}\right)+b=-b+b=0$$

ולכן $\boxed{Q(x_1)=r(x_1)\cdot p(x_1)=r(x_1)\cdot 0=0}$,
כלומר x_1 הוא שורש של Q בסתירה לכך שהראנו שלQ אין שורשים.
לכן ההנחה שלנו לא נכונה, כלומר Q הוא אי פריק, כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** אם הדרגה של Q היא 3 אזי הוא פריק
הוכחה:
לא נכון! נבחר $Q(x)=x^3+x+1$, נשים לב כי $\deg Q=3$
תחילה נשים לב כי $Q(0)=1,Q(1)=1+1+1=1$, כלומר לQ אין שורשים

נניח בשלילה כי Q פריק, אזי קיימים $p,r\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש$Q=p\cdot r$ וגם $0<\min\left\{\deg\left(p\right),\deg\left(r\right)\right\}$,
נשים לב כי $0<\deg\left(p\right),\deg\left(r\right)<3$, וגם מתקיים

$$3=\deg Q=\deg r+\deg p$$

המספרים היחידים המקיימים את הנדרש הם $\deg p,\deg r=1,2$, נניח בלי הגבלת הכלליות כי $\deg p=1$,
אזי נוכל לסמן $p\left(x\right)=a\cdot x+b$ כאשר $a,b\in\mathbb{F}$, $a\neq 0$
נשים לב כי עבור $x_1=-b\cdot a^{-1}$ מתקיים

$$p\left(x_1\right)=a\cdot\left(-b\cdot a^{-1}\right)+b=-b+b=0$$

ולכן $\boxed{Q\left(x_1\right)=r\left(x_1\right)\cdot p\left(x_1\right)=r\left(x_1\right)\cdot 0=0}$,
כלומר x_1 הוא שורש של Q בסתירה לכך שהראנו שלQ אין שורשים.
לכן ההנחה שלנו לא נכונה, כלומר Q הוא אי פריק.

מ.ש.ל.ב.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** פרקו לגורמים אי פריקים
הוכחה:

$$x^5-4x^3+2x=x\cdot\left(x^4-4x^2+2\right)\overset{t=x^2}{=}x\left(t^2-4t+2\right)=x\left(\left(t-\frac{4+\sqrt{8}}{2}\right)\cdot\left(t-\frac{4-\sqrt{8}}{2}\right)\right)$$
$$=x\left(\left(x^2-\left(2+\sqrt{2}\right)\right)\cdot\left(x^2-\left(2-\sqrt{2}\right)\right)\right)=$$
$$\overset{x^2-a^2=(x-a)\cdot(x+a)}{=}\boxed{x\cdot\left(x-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\cdot\left(x+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\cdot\left(x-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\cdot\left(x+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}$$

הערה: הכל אי פריקים כי הם ממעלה 1.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** פרקו לגורמים אי פריקים
הוכחה:
נשים לב כי עבור $x=1$ מתקיים $1-3+4-2=0$, לכן

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -2x & +2 & \\
\hline
x-1 & x^3 & -3x^2 & +4x & -2 \\
 & x^3 & -x^2 & +0 & +0 \\
\hline
 & 0 & -2x^2 & +4x^2 & -2 \\
 & & -2x^2 & +2x & +0 \\
\hline
 & & 0 & 2x & -2 \\
 & & & 2x & -2 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}$$

לכן

$$\boxed{x^3-3x^2+4x-2=\left(x-1\right)\cdot\left(x^2-2x+2\right)}$$

הערה: x^2-2x+2 לא פריק כי $\Delta=-4<0$, והשאר לא פריקים כי הם ממעלה 1.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** פרקו לגורמים אי פריקים
הוכחה:

$$x^3-4=x^3-\left(\sqrt[3]{4}\right)^3\overset{a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)}{=}\boxed{\left(x-\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(x^2+\sqrt[3]{4}\cdot x+\sqrt[3]{4}^2\right)}$$

הערה: $x^2+\sqrt[3]{4}\cdot x+\sqrt[3]{4}^2$ לא פריק כי $\Delta=\sqrt[3]{4}^2-4\cdot\sqrt[3]{4}^2<0$, והשאר לא פריקים כי הם ממעלה 1.

מ.ש.ל.ב.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** מצאו gcd, S,M
הוכחה:

$$\begin{array}{r|cccccc}
 & x & -1 & & & & \\
\hline
x^4+x^3+2x^2+x+1 & x^5 & +0 & -2x^3 & -x^2 & +0 & +2 \\
 & x^5 & x^4 & 2x^3 & +x^2 & +x & +0 \\
\hline
 & 0 & -x^4 & -4x^3 & -2x^2 & -x & 2 \\
 & & -x^4 & -x^3 & -2x^2 & -x & -1 \\
\hline
 & & 0 & -3x^3 & +0 & +0 & +3
\end{array}$$

לכן

$$x^5-2x^3-x^2+2=(x-1)\cdot\left(x^4+x^3+2x^2+x+1\right)-3x^3+3$$
$$\Rightarrow\boxed{P-(x-1)\cdot Q=-3x^3+3}$$

$$\begin{array}{r|ccccc}
 & -\frac{1}{3}x & -\frac{1}{3} & & & \\
\hline
-3x^3+3 & x^4 & +x^3 & +2x^2 & +x & +1 \\
 & x^4 & +0 & +0 & -x & +0 \\
\hline
 & 0 & x^3 & 2x^2 & 2x & +1 \\
 & & x^3 & 0 & +0 & -1 \\
\hline
 & & 0 & 2x^2 & +2x & +2
\end{array}$$

לכן

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=\left(-3x^3+3\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)+2x^2+2x+2$$
$$\Rightarrow\boxed{x^4+x^3+2x^2+x+1-\left(-3x^3+3\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)=2x^2+2x+2}$$

$$\begin{array}{r|cccc}
 & -\frac{3}{2}x & \frac{3}{2} & & \\
\hline
2x^2+2x+2 & -3x^3 & +0 & +0 & +3 \\
 & -3x^3 & -3x^2 & -3x & +0 \\
\hline
 & 0 & 3x^2 & 3x & +3 \\
 & & 3x^2 & 3x & +3 \\
\hline
 & & +0 & +0 & +0
\end{array}$$

לכן

$$-3x^3+3=\left(2x^2+2x+2\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right)$$

כלומר $\boxed{\gcd(P,Q) = \frac{2x^2+2x+2}{2} = x^2+x+1}$, לכן

$$\begin{aligned}
x^2+x+1 = \frac{2}{2}\cdot\left(x^2+x+1\right) &= \frac{1}{2}\left[2x^2+2x+2\right] \\
=&\frac{1}{2}\left[x^4+x^3+2x^2+x+1-\left(-3x^3+3\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)\right] \\
=&\frac{1}{2}\left[Q-\left[P-(x-1)\cdot Q\right]\cdot\left(-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)\right] \\
=&\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)P+\frac{1}{2}\cdot\left[1-(x-1)\cdot\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)\right]Q \\
=&\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}\right)P+\frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{x^2}{3}+\frac{4}{3}\right]Q
\end{aligned}$$

לכן עבור $\boxed{M = \frac{1}{6}x+\frac{1}{6}}$ ו $\boxed{S = -\frac{x^2}{6}+\frac{2}{3}}$ מתקיים

$$\gcd(P,Q) = MP+SQ$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** מצאו $\gcd$, S, M
הוכחה:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & x & -2 & & & \\
\hline
x^3+2x^2+3x+1 & x^4 & +0 & +0 & +0 & -1 \\
 & x^4 & +2x^3 & +3x^2 & +x & +0 \\
\hline
 & 0 & -2x^3 & -3x^2 & -x & -1 \\
 & & -2x^3 & -4x^2 & -6x & -2 \\
\hline
 & & 0 & x^2 & +5x & +1
\end{array}$$

לכן

$$\begin{aligned}
&P = (x-2)\cdot Q + x^2+5x+1 \\
\Rightarrow&\boxed{P-(x-2)\cdot Q = x^2+5x+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x & -3 & & \\
\hline
x^2+5x+1 & x^3 & +2x^2 & +3x & +1 \\
 & x^3 & +5x^2 & +x & +0 \\
\hline
 & 0 & -3x^2 & 2x & 1 \\
 & & -3x^2 & -15x^2 & -3 \\
\hline
 & & 0 & 17x & +4
\end{array}$$

לכן

$$\begin{aligned}
&Q = (x-3)\cdot\left(x^2+5x+1\right)+17x+4 \\
\Rightarrow&\boxed{Q-(x-3)\cdot\left(x^2+5x+1\right) = 17x+4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{r|lll}
 & \frac{1}{17}x & +\frac{81}{17^2} & \\ \hline
17x+4 & x^2 & +5x & +1 \\
 & x^2 & +\frac{4}{17}x^2 & +0 \\ \hline
 & 0 & \left(\frac{81}{17}\right)x & 1 \\
 & & \left(\frac{81}{17}\right)x & \frac{81\cdot 4}{17^2} \\ \hline
 & & 0 & \frac{-35}{289}
\end{array}
$$

לכן

$$x^2+5x+1=\left(\frac{1}{17}x+\frac{81}{17^2}\right)\cdot(17x+4)-\frac{35}{289}$$
$$\Rightarrow \boxed{x^2+5x+1-\left(\frac{1}{17}x+\frac{81}{17^2}\right)\cdot(17x+4)=-\frac{35}{289}}$$

לכן $\boxed{\gcd(P,Q)=1}$ (לאחר תיקון הפולינום), ולכן

$$
\begin{aligned}
1&=-\frac{289}{35}\cdot-\frac{35}{289}=-\frac{289}{35}\cdot\left[x^2+5x+1-\left(\frac{1}{17}x+\frac{81}{17^2}\right)\cdot(17x+4)\right]\\
&=-\frac{289}{35}\cdot\left[(P-(x-2)\cdot Q)-\left(\frac{1}{17}x+\frac{81}{17^2}\right)\cdot\left(Q-(x-3)\cdot\left(x^2+5x+1\right)\right)\right]\\
&=-\frac{289}{35}\cdot\left[(P-(x-2)\cdot Q)-\left(\frac{1}{17}x+\frac{81}{17^2}\right)\cdot(Q-(x-3)\cdot(P-(x-2)\cdot Q))\right]\\
&\overset{\text{algebra}}{=}P\cdot\left(-\frac{17}{35}x^2-\frac{30}{35}x-\frac{46}{35}\right)+Q\cdot\left(\frac{17}{35}x^3-\frac{4}{35}x^2+\frac{3}{35}x-\frac{11}{35}\right)
\end{aligned}
$$

לכן עבור $\boxed{M=-\frac{17}{35}x^2-\frac{30}{35}x-\frac{46}{35}}$ ו $\boxed{S=\frac{17}{35}x^3-\frac{4}{35}x^2+\frac{3}{35}x-\frac{11}{35}}$ מתקיים

$$\gcd(P,Q)=MP+SQ$$

מ.ש.ל.ב.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** הוכיחו שלP,Q אין שורשים משותפים

הוכחה:

נכון! נניח בשלילה שלP,Q יש שורש משותף $\alpha\in\mathbb{F}$, אזי

$$1=(MP+SQ)(\alpha)=M(\alpha)\cdot P(\alpha)+S(\alpha)\cdot Q(\alpha)=M(\alpha)\cdot 0+S(\alpha)\cdot 0=0$$

סתירה כי $1\neq 0$, לכן לP,Q איו שורשים משותפים.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** קיימים P,Q כך ש $MP+SQ=1$, וגם לP,Q אין שורשים משותפים

הוכחה:

לא נכון! נבחר $P(x)=x^2+1$, $Q(x)=x\cdot P(x)=x^3+x$, ברור שלP אין שורשים ב$\mathbb{R}$ ולכן לP,Q אין שורשים משותים.

נניח בשלילה כי $\exists M,S\in\mathbb{R}[x]$ כך ש$MP+SQ=1$ לכן

$$1=MP+SQ=MP+S\cdot x\cdot P=P\cdot(M+S\cdot x)$$

לכן

$$0=\deg(1)=\deg(P\cdot(M+S\cdot x))=\deg(P)+\deg((M+S\cdot x))=2+\deg((M+S\cdot x))$$
$$\Rightarrow\deg((M+S\cdot x))=-1$$

סתירה כי אין פולינום מדרגה -1, לכן לא קיימים M,S כך ש$MP+SQ=1$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** קיימים P,Q כך ש $MP+SQ=1$ אם"ם לP,Q אין שורשים משותפים
הוכחה:
נכון!
$\Rightarrow$: נניח כי $MP+SQ=1$, מסעיף א' ראינו כי אם לP,Q יש שורשים משותפים אז $MP+SQ\neq 1$, לכן לP,Q אין שורשים משותפים.
$\Leftarrow$: נניח כי לP,Q אין שורשים משותפים, נסמן $d(x)=\gcd(P,Q)$.
אם $\deg d\neq 0$, אז לd יש שורש מעל $\mathbb{C}$ שנסמנו בα. לכן קיימים M,S כך ש$P=M\cdot d$, $Q=S\cdot d$

$$P(\alpha)=M(\alpha)\cdot d(\alpha)=M(\alpha)\cdot 0=0$$
$$Q(\alpha)=S(\alpha)\cdot d(\alpha)=S(\alpha)\cdot 0=0$$

לכן α שורש משותף של P,Q בסתירה להנחה. לכן $\deg d(x)=0$, נסמן $d(x)=a$, כאשר $0\neq a\in\mathbb{R}$,
לכן קיימים M_1,S_1 כך שמתקיים

$$a=M_1\cdot P+S_1\cdot Q$$

נגדיר $M=\frac{M_1}{a}$, $S=\frac{S_1}{a}$ אזי

$$\boxed{1=\frac{a}{a}=\frac{M_1\cdot P+S_1\cdot Q}{a}=\frac{M_1}{a}\cdot P+\frac{S_1}{a}\cdot Q=M\cdot P+S\cdot Q}$$

כלומר הראנו שקיימים M,S כך ש$MP+SQ=1$ כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

7. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $V=U\oplus W$
הוכחה:
תחילה נראה כי $V=U+W$, יהי $v\in V$, נסתכל על

$$u=\frac{v+T(v)+T^2(v)}{3}\Rightarrow T(u)=\frac{T(v)+T^2(v)+T^3(v)}{3}=\frac{T(v)+T^2(v)+v}{3}=u$$
$$\Rightarrow T(u)=u\Rightarrow\boxed{u\in U}$$

מותר לחלק ב3 כי $\mathrm{char}\mathbb{F}\neq 3$, וגם על

$$w=\frac{2}{3}v-\frac{T(v)}{3}-\frac{T^2(v)}{3}\Rightarrow T(w)=\frac{2}{3}T(v)-\frac{T^2(v)}{3}-\frac{T^3(v)}{3}=\frac{2}{3}T(v)-\frac{T^2(v)}{3}-\frac{v}{3}$$
$$\Rightarrow T^2(w)=\frac{2}{3}T^2(v)-\frac{v}{3}-\frac{T(v)}{3}=-\left(\frac{2}{3}T(v)-\frac{T^2(v)}{3}-\frac{v}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}v-\frac{T(v)}{3}-\frac{T^2(v)}{3}\right)=-T(w)-w$$
$$\Rightarrow T^2(w)=-T(w)-w\Rightarrow\boxed{w\in W}$$

נשים לב כי

$$u+w=\left(\frac{v+T(v)+T^2(v)}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}v-\frac{T(v)}{3}-\frac{T^2(v)}{3}\right)=v$$

כלומר הראנו כי לכל $v\in V$, קיימים $u\in U, w\in W$ כך ש $u+w=v$, לכן $\boxed{U+W=V}$.
יהי $v\in U\cap W$, לכן מהיות $v\in U$ מתקיים $T(v)=v$, מהיות $v\in W$ מתקיים

$$\begin{aligned}&-2v=-T(v)-v=T^2(v)=T(T(v))=T(v)=v\\&\Rightarrow 0=3\cdot v\end{aligned}$$

מהיות $0\neq 3$ מהיות $\mathrm{char}\mathbb{F}\neq 3$, לכן $v=0$, לכן $\boxed{U\cap W=\{0\}}$, לכן $\boxed{U\oplus W=V}$ כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם בהכרח $V=U\oplus W$?
הוכחה:
לא נכון! נבחר $\mathbb{F}=\mathbb{F}_3$, $V=\mathbb{F}$, $T=Id$. נשים לב כי $\boxed{T^3=Id}$,
וגם

$$\begin{aligned}&T(0)=0\Rightarrow 0\in U; T(0)=-0-0\Rightarrow 0\in W\\&T(1)=1\Rightarrow 1\in U; T(1)=-1-1\Rightarrow 1\in W\\&T(2)=2\Rightarrow 2\in U; T(2)=-2-2\Rightarrow 2\in W\end{aligned}$$

לכן $U=W=V$, כלומר $\boxed{U\cap W=V\neq\{0\}}$ בסתירה למה שנדרש להוכיח.

מ.ש.ל.ב.☺

8. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** למצוא פולינום אופייני והאם T לכסינה
הוכחה:

$$\begin{aligned}\chi_T(\lambda)&=\det(\lambda I-A)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&2&-1\\-2&2&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda&+1-2&1\\2&\lambda-2&2\\-1&2&\lambda-1\end{bmatrix}\right)\\&\overset{R_1\to R_1+R_3}{=}\det\left(\begin{bmatrix}\lambda&0&\lambda\\2&\lambda-2&2\\-1&2&\lambda-1\end{bmatrix}\right)=\lambda\cdot\det\left(\begin{bmatrix}\lambda-2&2\\2&\lambda-1\end{bmatrix}\right)+\lambda\cdot\det\left(\begin{bmatrix}2&\lambda-2\\-1&2\end{bmatrix}\right)\\&=\lambda((\lambda-1)\cdot(\lambda-2)-4+4+(\lambda-2))\\&=\lambda(\lambda-1+1)\cdot(\lambda-2)=\boxed{\lambda^2\cdot(\lambda-2)}\end{aligned}$$

לכן ערכים העצמיים הם $\lambda=0,2$

$$\begin{aligned}V_0&=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid A\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{matrix}-x+2y-z=0\\-2x+2y-2z=0\\x-2y+z=0\end{matrix}\right\}\\&=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{matrix}x-2y+z=0\\2x-2y+2z=0\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{matrix}x-2y+z=0\\x+z=0\end{matrix}\right\}\\&=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\-x\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid x-2y+-x=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\-x\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid y=0\right\}\\&=\left\{\begin{bmatrix}x\\0\\-x\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\right\}=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}\end{aligned}$$

וגם

$$V_2=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid A\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\2y\\2z\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{matrix}-x+2y-z=2x\\-2x+2y-2z=2y\\x-2y+z=2z\end{matrix}\right\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{matrix}2y-z=3x\\-2x-2z=0\\x-2y=z\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\-x\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{matrix}2y+x=3x\\x-2y=-x\end{matrix}\right\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\-x\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\ 2y=2x\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\x\\-x\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

לכן יש רק 2 וקטורים עצמיים, כלומר אין בסיס של וקטורים עצמיים, כלומר T **לא לכסינה.**

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** מצאו M,P,S,Q המקיימים את התנאים
הוכחה:
נשים לב כי

$$\left(\frac{1}{4}\right)\cdot x^2+\left(-\frac{1}{4}(x+2)\right)\cdot(x-2)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x^2+1=1$$

לכן עבור $M=\frac{1}{4}$, $S=\frac{-1}{4}(x+2)$, $P=x^2$, $Q=x-2$,
מתקיים $\chi_T=Q\cdot P$, $\deg P\geq 1$, $\deg Q\geq 1$, וגם $1=MP+SQ$, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** מצאו בסיס של $\ker(P(T))$, $\ker(Q(T))$ והראו שביחד זהו הבסיס של $\mathbb{R}^{\nVdash}$
הוכחה:
ראינו בסעיף א' כי

$$\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}=V_2=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid A\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\2y\\2z\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)-2\cdot Id\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=0\right\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid Q\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=0\right\}=\ker(Q(T))$$

כלומר הבסיס של $\ker(P(T))$ הוא $\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$, עתה נחשב $\ker(P(T))$,

$$\ker(P(T))=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid P\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid A^2\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\right\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{bmatrix}-4&4&-4\\-4&4&-4\\4&-4&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{matrix}-4x+4y-4z=0\\-4x+4y-4z=0\\4x-4y+4z=0\end{matrix}\right\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\ x-y+z=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix}y-z\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

כלומר הבסיס של $\ker\left(P\left(T\right)\right)$ הוא $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, לכן האיחוד ייתן את הוקטורים $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$,

נראה שהם בת"ל בכך שנחשב $\det$ ונראה שזה שונה מ0

$$\det\left(\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&-1&-1\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}1&0\\-1&-1\end{bmatrix}\right)-\det\left(\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\right)=-1-(-1+1)=-1\neq0$$

לכן מצאנו 3 וקטורים בת"ל ב$\mathbb{R}^3$, לכן $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ בסיס של $\mathbb{R}^3$, כנדרש.

מ.ש.ל.ג.☺