תרגיל 7 אלגברה לינארית 1

מיכאל גרינבאום

211747639

1א. **צ"ל:** האם $(U_1+U_2)\cap W=(U_1\cap W)+(U_2\cap W)$?
נתונים: יהי $\mathbb{F}$ שדה, V מרחב וקטורי וU_1,U_2,W תתי מרחבים
הוכחה:
לא נכון! נבחר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^2$,
וגם $W=span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$, $U_1=span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$, $U_2=span\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$
נשים לב כי U_1,U_2,W תתי מרחבים של V
וגם $U_1+U_2=V$ ולכן $(U_1+U_2)\cap W=W$
וגם $U_1\cap W=U_2\cap W=\{0_V\}$
ולכן $(U_1+U_2)\cap W\neq(U_1\cap W)+(U_2\cap W)$

מ.ש.ל.א.☺

1ב. **צ"ל:** האם $(U_1\cap U_2)+W\subseteq(U_1+W)\cap(W+U_2)$?
נתונים: יהי $\mathbb{F}$ שדה, V מרחב וקטורי וU_1,U_2,W תתי מרחבים
הוכחה:
נכון! יהי $v\in(U_1\cap U_2)+W$
ולכן $\exists u\in U_1\cap U_2$ וגם $\exists w\in W$ כך ש$v=u+w$
נשים לב כי $v=u+w\in U_1+W$ כי $u\in U_1$
וגם כי $v=u+w\in U_2+W$ כי $u\in U_2$
ולכן $v\in(U_1+W)\cap(W+U_2)$ ולכן $(U_1\cap U_2)+W\subseteq(U_1+W)\cap(W+U_2)$

מ.ש.ל.ב.☺

1ג. **צ"ל:** האם $(U_1+W)\cap(W+U_2)\subseteq(U_1\cap U_2)+W$?
נתונים: יהי $\mathbb{F}$ שדה, V מרחב וקטורי וU_1,U_2,W תתי מרחבים
הוכחה:
לא נכון! נבחר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^3$,
וגם $W=span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, $U_1=span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, $U_2=span\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$
נשים לב כי U_1,U_2,W תתי מרחבים של V
נשים לב כי $U_1\cap U_2=0_V$ ולכן $(U_1\cap U_2)+W=W$
וגם $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\in(U_1+W)\cap(W+U_2)$ וגם $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\notin(U_1\cap U_2)+W$
ולכן $(U_1+W)\cap(W+U_2)\not\subseteq(U_1\cap U_2)+W$

מ.ש.ל.ג.☺

1ד. **צ"ל:** האם $U_1+W\subseteq U_2+W$?
נתונים: יהי $\mathbb{F}$ שדה, V מרחב וקטורי וU_1,U_2,W תתי מרחבים כך ש$U_1\subseteq U_2$
הוכחה:
נכון! יהי $v\in U_1+W$, אזי $\exists u\in U_1$ וגם $\exists w\in W$ כך ש$v=u+w$
נשים לב כי $u\in U_1\subseteq U_2$ ולכן $u\in U_2$ ולכן $v\in U_2+W$
כלומר $U_1+W\subseteq U_2+W$

מ.ש.ל.ד.☺

1ה. **צ"ל:** האם $U_1\subseteq U_2$?
נתונים: יהי $\mathbb{F}$ שדה, V מרחב וקטורי וU_1,U_2,W תתי מרחבים כך ש$U_1+W\subseteq U_2+W$
הוכחה:
לא נכון! נבחר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^3$,

וגם $W=V$, $U_1=span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, $U_2=span\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

נשים לב כי U_1,U_2,W תתי מרחבים של V וגם $U_1+W=W=U_2+W$

נשים לב כי $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\in U_1$ וגם $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\notin U_2$ ולכן $U_1\not\subseteq U_2$

מ.ש.ל.ה.☺

2. **צ"ל:** מה הערכים ל$\dim(U\cap W)$ ודוגמא לכל אחד?

נתונים: יהי $\mathbb{F}$ שדה, V מרחב וקטורי וU,W תתי מרחבים

כך ש$\dim V=10,\dim U=8,\dim W=7$

הוכחה:

תחילה נשים לב שממשפט המימדים הראשון מתקיים

ש $8\le\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)\le 10$

ולכן $5\le\dim(U\cap W)\le 7$

נבחר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^{10}$,

עבור $\dim(U\cap W)=5$, נבחר $W=span\{e_3,\ldots,e_{10}\}$ ו$U=span\{e_1,\ldots,e_7\}$

נשים לב כי התנאים מתקיימים ו$U\cap W=span\{e_3,\ldots,e_7\}$

כלומר $\dim(U\cap W)=5$

עבור $\dim(U\cap W)=6$, נבחר $W=span\{e_2,\ldots,e_9\}$ ו$U=span\{e_1,\ldots,e_7\}$

נשים לב כי התנאים מתקיימים ו$U\cap W=span\{e_2,\ldots,e_7\}$

כלומר $\dim(U\cap W)=6$

עבור $\dim(U\cap W)=7$, נבחר $W=span\{e_1,\ldots,e_8\}$ ו$U=span\{e_1,\ldots,e_7\}$

נשים לב כי התנאים מתקיימים ו$U\cap W=span\{e_1,\ldots,e_7\}$

כלומר $\dim(U\cap W)=7$

מ.ש.ל.☺

3. **צ"ל:** $v\in V$ ניתן להצגה יחידה בתור $u+w$ כש $u\in U$ ו$w\in W$

נתונים: יהי $\mathbb{F}$ שדה, V מרחב וקטורי וU,W תתי מרחבים

כך ש$U+W=V$ וגם $U\cap W=\{0_V\}$

הוכחה:

יהיו $u_1,u_2\in U$ ו$w_1,w_2\in W$ כך ש$u_1+w_1=v=u_2+w_2$

נעביר אגפים ונקבל $u_1-u_2=w_2-w_1$

נקבל ש$u_1-u_2\in W$ כי הוא מבוטא על ידי וקטורים מW

ולכן $u_1-u_2\in U\cap W=\{0_V\}$ ולכן $u_1=u_2$

נקבל ש$w_1-w_2\in U$ כי הוא מבוטא על ידי וקטורים מU

ולכן $w_1-w_2\in U\cap W=\{0_V\}$ ולכן $w_1=w_2$

ולכן קיימת הצגה יחידה לכל $v\in V$

מ.ש.ל.☺

4א. **צ"ל:** A,S מרחבים וקטוריים

נתונים: יהי $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ שדה, $V=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מרחב וקטורי וS אוסף המטריצות הסימטריות ובA את אוסף המטריצות האנטי סימטריות

הוכחה:

תחילה נשים לב כי $A,S\subseteq V$

נשים לב כי $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\in S$ וגם $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\in A$

יהיו $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{bmatrix}\in S$ ו$\begin{bmatrix}0&b_{12}\\-b_{12}&0\end{bmatrix}\in A$

יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, נשים לב כי $\begin{bmatrix}\alpha\cdot a_{11}&\alpha\cdot a_{12}\\\alpha\cdot a_{12}&\alpha\cdot a_{22}\end{bmatrix}\in S$ $=\alpha\cdot\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{bmatrix}$

וגם $\begin{bmatrix}0&\alpha\cdot b_{12}\\-\alpha\cdot b_{12}&0\end{bmatrix}\in A$ $=\alpha\cdot\begin{bmatrix}0&b_{12}\\-b_{12}&b_{22}\end{bmatrix}$

יהיו $\begin{bmatrix}0&d_{12}\\-d_{12}&0\end{bmatrix}\in A$ ו $\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{12}&c_{22}\end{bmatrix}\in S$

נשים לב כי $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12}+c_{12} \\ a_{12}+c_{12} & a_{22}+c_{22} \end{bmatrix} \in S$

וגם $\begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ -b_{12} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d_{12} \\ -d_{12} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12}+d_{12} \\ -(b_{12}+d_{12}) & 0 \end{bmatrix} \in A$

נשים לב כי A, S מכילות את וקטור האפס, סגורות לחיבור ולכפל בסקלר

ולכן הם תתי מרחבים של $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

מ.ש.ל.א.☺

4ב. **צ"ל:** $V = S \oplus A$

נתונים: יהי $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ שדה, $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מרחב וקטורי וS אוסף המטריצות הסימטריות ובA את אוסף המטריצות האנטי סימטריות

הוכחה:

תחילה נראה כי $S \cap A = \{0_V\}$

יהי $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in S \cap A$ אזי מהיות $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in A$ מתקיים $a = d = 0_F$

וגם $b = -c$, מהיות $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in S$ מתקיים $b = c$

ולכן $a = b = c = d = 0_F$, כלומר $S \cap A = \{0_V\}$

יהי $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V$ נשים לב כי $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & 0 \end{bmatrix}$

נשים לב כי $\begin{bmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & 0 \end{bmatrix} \in A$ וגם $\begin{bmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{bmatrix} \in S$ ולכן $V \subseteq S + A$

ברור כי $S + A \subseteq V$ ולכן $V = S \oplus A$

מ.ש.ל.ב.☺

5. **צ"ל:** האם $U = W = Z$?

נתונים: יהי $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ שדה, V מרחב וקטורי וU, W, Z תתי מרחבים של V

כך ש$\dim Z = \dim(U+W), \dim(W) = \dim(Z+U), \dim(U) = \dim(W+Z)$

הוכחה:

נכון! ממשפט המימדים הראשון מתקיים $\dim(U) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$

וגם $\dim(Z) = \dim(W) + \dim(U) - \dim(W \cap U)$

וגם $\dim(W) = \dim(U) + \dim(Z) - \dim(U \cap Z)$

נסמן $d = \dim(U) + \dim(W) + \dim(Z)$

נחבר את כולם ונקבל $d = 2d - (\dim(U \cap Z) + \dim(W \cap Z) + \dim(U \cap W))$

ולכן $\dim(U) + \dim(W) + \dim(Z) = \dim(U \cap Z) + \dim(W \cap Z) + \dim(U \cap W)$

נשים לב כי $\dim(U \cap Z) \le \dim(U)$ ושוויון מתקיים אם ורק אם $U \subseteq Z$

וגם $\dim(W \cap Z) \le \dim(Z)$ ושוויון מתקיים אם ורק אם $Z \subseteq W$

וגם $\dim(W \cap U) \le \dim(W)$ ושוויון מתקיים אם ורק אם $W \subseteq U$

לכן אם $U \ne W$ או $Z \ne W$ או $U \ne Z$

נקבל ש$\dim(U) + \dim(W) + \dim(Z) > \dim(U \cap Z) + \dim(W \cap Z) + \dim(U \cap W)$

בסתירה לשוויון שקיבלנו.

ולכן $U = W = Z$

מ.ש.ל.☺

6א. **צ"ל:** מצאו בסיס לU

נתונים: יהי $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ שדה, $V = \mathbb{R}^3$ מרחב וקטורי וגם $U = span\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}\right\}$

הוכחה:

נשים לב כי $\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = -7 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

ולכן $span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}\right\} = span\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}\right\} = span\left\{\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}\right\} = U$

נראה כי $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ בת"ל ונסיק שהם הבסיס של U (כי פורשים)

יהי $a \in \mathbb{R}$ כך ש $a \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

ולכן מהשורה הראשונה נקבל $a = \frac{1}{2}$ ומהשנייה $a = \frac{3}{5}$

ולכן אין a המקיים את הדרוש, כלומר $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ בת"ל

ולכן $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ בסיס של U

מ.ש.ל.א.☺

6ב. **צ"ל:** מצאו בסיס לU

נתונים: יהי $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ שדה, $V = \mathbb{C}^3$ מרחב וקטורי

וגם $U = span\left\{ \begin{bmatrix} 2i \\ 1+i \\ -3+2i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3-i \\ 5+2i \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9+5i \\ -11-2i \\ -12+5i \end{bmatrix} \right\}$

הוכחה:

$$\begin{bmatrix} 2i & 3-i & -9+5i \\ 1+i & 5+2i & -11-2i \\ -3+2i & i & -12+5i \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} -3+2i & i & -12+5i \\ 1+i & 5+2i & -11-2i \\ 2i & 3-i & -9+5i \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + (\frac{-4}{13} + \frac{6i}{13})R_1]{R_2 \to R_2 + (\frac{1}{13} + \frac{5i}{13})R_1}$$

$$\begin{bmatrix} -3+2i & i & -12+5i \\ 0 & \frac{60}{13} + \frac{27}{13}i & -\frac{180}{13} - \frac{81}{13}i \\ 0 & \frac{33}{13} - \frac{17}{13}i & -\frac{99}{13} - \frac{27}{13}i \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + (-\frac{13}{37} + \frac{49}{111}i)R_2} \begin{bmatrix} -3+2i & i & -12+5i \\ 0 & \frac{60}{13} + \frac{27}{13}i & -\frac{180}{13} - \frac{81}{13}i \\ 0 & 0 & 6i \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -6iR_3} \begin{bmatrix} -3+2i & i & -12+5i \\ 0 & \frac{60}{13} + \frac{27}{13}i & -\frac{180}{13} - \frac{81}{13}i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 + (12-5i)R_3]{R_2 \to R_2 + (\frac{180}{13} + \frac{81}{13}i)R_2} \begin{bmatrix} -3+2i & i & 0 \\ 0 & \frac{60}{13} + \frac{27}{13}i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to (\frac{20}{111} - \frac{3}{37}i)R_2} \begin{bmatrix} -3+2i & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - iR_2} \begin{bmatrix} -3+2i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{-3+2i}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ולכן $\left\{ \begin{bmatrix} 2i \\ 1+i \\ -3+2i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3-i \\ 5+2i \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9+5i \\ -11-2i \\ -12+5i \end{bmatrix} \right\}$ בת"ל ופורשים את U

ולכן $\left\{ \begin{bmatrix} 2i \\ 1+i \\ -3+2i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3-i \\ 5+2i \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9+5i \\ -11-2i \\ -12+5i \end{bmatrix} \right\}$ בסיס של U

מ.ש.ל.ב.☺

6ג. **צ"ל:** מצאו בסיס לU

נתונים: יהי $\mathbb{F} = \mathbb{F}_3$ שדה, $V = \mathbb{F}_3^3$ מרחב וקטורי

וגם $U = span\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

הוכחה:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to 2R_2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ולכן $\left\{\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ בת"ל ופורשים את U

ולכן $\left\{\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ בסיס של U

מ.ש.ל.ג.☺

7א. **צ"ל:** מצאו בסיס ל$U+W$ ומימד

נתונים: יהי $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ שדה, $V=\mathbb{R}^4$ מרחב וקטורי

וגם $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}span = \left\{\begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}U=span$ ו $W=span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\2\\2\end{bmatrix}\right\}$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי $U+W=span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

נשים לב כי $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ ולכן $U+W=span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&3&2&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-\frac{1}{3}R_2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&3&2&1\\0&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to 3R_3}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&3&2&2\\0&1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&3&2&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&3&0&3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{3}R_2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

נשים לב כי המטריצה קנונית ללא שורות אפסים ולכן בת"ל

ולכן $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ בת"ל ופורשים את $U+W$

ולכן $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ בסיס של $U+W$

וגם $\dim(U+W)=3$

מ.ש.ל.א.☺

7ב. **צ"ל:** מצאו בסיס ל$U+W$ ומימד

נתונים: יהי $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ שדה, $V=\mathbb{R}^4$ מרחב וקטורי

וגם U,W המוגדרים בתרגיל

הוכחה:

תחילה נבטא את W בתור ספאן של וקטורים

נסמן $x_4=t$ ו$x_3=s$ ונקבל $x_1=-t, x_2=-s-3t$

כלומר $\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\0\\-1\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\} W = span$

תחילה נבטא את U בתור ספאן של וקטורים

נסמן $x_4 = t$ ו$x_3 = s$ ונקבל $x_1 = t, x_2 = s - t$

כלומר $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\} U = span$

ולכן $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\} U + W = span$

יהיו $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

כך ש $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} d + \begin{bmatrix}1\\3\\0\\-1\end{bmatrix} c + \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix} b + \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix} a = \begin{bmatrix}a+c\\-a-b+3c+d\\b+d\\a-c\end{bmatrix}$

מהמשוואות ה$1,4$ נקבל ש$a = c = 0$

נציב ונקבל $d - b = 0$, $b + d = 0$ ולכן $b = d = 0$

ולכן $a = b = c = d = 0$ ולכן $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ בת"ל

ולכן $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ בת"ל ופורשים את $U + W$

ולכן $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ בסיס של $U + W$

וגם $\dim(U + W) = 4$

מ.ש.ל.ב.☺

8א. **צ"ל:** מצאו $[v]_B$

נתונים: יהי $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ שדה, $V = \mathbb{R}^2$ מרחב וקטורי, $v = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $B = \left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$

הוכחה:

נשים לב ש $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \cdot 1 + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \cdot 0 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = v$

ולכן $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = [v]_B$

מ.ש.ל.א.☺

8ב. **צ"ל:** מצאו $[v]_B$

נתונים: יהי $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ שדה, $V = \mathbb{R}^2$ מרחב וקטורי, $v = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $B = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

הוכחה:

נשים לב ש $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \cdot 1 - \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \cdot 1 - \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \cdot 3 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = v$

ולכן $\begin{bmatrix}3\\-1\\-1\end{bmatrix} = [v]_B$

מ.ש.ל.ב.☺

8ג. **צ"ל:** מצאו $[v]_B$

נתונים: יהי $\mathbb{F} = \mathbb{F}_3$ שדה, $V = \mathbb{F}_3^2$ מרחב וקטורי, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

הוכחה:

נשים לב ש$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 \\ 2+4 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ולכן $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

מ.ש.ל.ג.☺