

אלגברה לינארית (2) תשע"ט 2018-2019 - סמסטר ב' - תרגיל 8

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז. יש לציין כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל. סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 15.5.19 בשעה 21:00.

אלא אם נאמר אחרת, בכל התרגיל V מסמן מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה \mathbb{F} ו- $T: V \rightarrow V$ אופרטור לינארי.

1. נתון ש- $\dim V = n$, ויהי $B = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס ל- V .
 נתונים $s_j, m \in \mathbb{N}$ כך ש- $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m = n$ ו- $s_j - s_{j-1} \geq s_{j+1} - s_j$ לכל $1 \leq j \leq m-1$.
 T מוגדר ע"י $T(b_i) = b_{i+1}$ אם $i \notin \{s_1, \dots, s_m\}$ ו- $T(b_i) = 0$ אם $i \in \{s_1, \dots, s_m\}$.
 (א) הוכיחו כי $\ker T = \text{Span}(b_{s_1}, b_{s_2}, \dots, b_{s_m})$.
 (ב) מצאו בסיס של $\text{Im } T$.
 (ג) לכל $1 \leq k \leq s_1$, $k \in \mathbb{N}$, מצאו נוסחה שמבטאת את מספר השרשראות באורך k בבסיס השרשראות עבור T דרך המספרים $\text{rk}(T), \text{rk}(T^2), \text{rk}(T^3), \dots, \text{rk}(T^{s_1})$ ($\text{rk} = \text{rank}$).
 $\dim V = 18$ ו- $T^4 = 0$, $\text{rk}(T^3) = 2$, $\text{rk}(T^2) = 4$, $\text{rk}(T) = 9$.
 לכל k מצאו את מספר השרשראות באורך k בבסיס השרשראות עבור T .
 3. נתון ש- T נילפוטנטי ו- $s \in \mathbb{N}$ מקיים $\text{rk}(T^s) = \text{rk}(T^{s+1})$. הוכיחו כי $T^s = 0$.
 4. נתון: $\dim V = 10$, T נילפוטנטי, $\text{rk}(T) = 4$ ו- $\text{rk}(T^2) = 1$.
 לכל k מצאו את מספר השרשראות באורך k בבסיס השרשראות עבור T .
 5. עבור כל אחת מהמטריצות $A \in M_{5 \times 5}(\mathbb{R})$, הוכיחו כי $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ המוגדר ע"י $T(x) = Ax$ לכל $x \in \mathbb{R}^5$ הנו נילפוטנטי, ולכל k מצאו את מספר השרשראות באורך k בבסיס השרשראות עבור T .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ג})$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{א})$$

 6. (א) מצאו את כל בלוקי ז'ורדן הנילפוטנטיים $J(0)$ בגודל 5×5 .
 (ב) מצאו את כל בלוקי ז'ורדן הנילפוטנטיים $J(0)$ בגודל 6×6 כך ש- $J(0)^3 \neq O_6$.
 (ג) מצאו את כל בלוקי ז'ורדן הנילפוטנטיים $J(0)$ בגודל 8×8 כך ש- $\text{rk}(J(0)) = 3$.
 7. נתונה $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ כך ש- $A^k = 0$. הוכיחו כי $\text{rk}(A) \leq \frac{(k-1)n}{k}$.
 8. (א) הוכיחו שהמטריצה $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 8 & -5 \end{bmatrix}$ נילפוטנטית.
 (ב) מהי צורת ז'ורדן של המטריצה A ?
 (ג) נגדיר $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ על ידי $T(x) = A \cdot x$ לכל $x \in \mathbb{R}^4$. מצאו בסיס השרשראות לאופרטור T .