פתרון תרגיל מספר 3 - לינארית 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

3 באפריל 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** v וקטור עצמי של T^3 עם λ^3

הוכחה:

נשים לב כי

$$T^3(v) = T(T(T(v))) = T(T(\lambda v)) = T(\lambda \cdot T(v)) = T(\lambda \cdot \lambda v) = T(\lambda^2 v) = \lambda^2 T(v) = \lambda^3 \cdot v$$

כלומר קיבלנו כי $T^3(v) = \lambda^3 \cdot v$, לכן v וקטור עצמי של T^3 הערך העצמי λ^3

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם v וקטור עצמי של T^3 עם λ בהכרח טוען כי v וקטור עצמי של T?

הוכחה:

לא נכון! נגדיר $V = \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ נשים לב כי

$$T^3(v) = T^3\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(T\left(T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right)\right) = T\left(T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot v$$

לכן קיבלנו כי $T^3(v) = 0 \cdot v$, $v \neq 0$, לכן v וקטור עצמי של T^3 וגם

$$T(v) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \operatorname{span}\{v\}$$

לכן v אינו וקטור עצמי של T

מ.ש.ל.ב.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$

הוכחה:

נבחר $v \neq 0$ כך ש$f(v) = \lambda \cdot v$ אזי

$$\lambda \cdot v = f(v) = f^2(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda^2 \cdot v \Rightarrow \boxed{\lambda^2 \cdot v = \lambda \cdot v}$$
$$\Rightarrow \boxed{(\lambda^2 - \lambda) \cdot v = 0}$$

מהיות $v \neq 0$ וגם $(\lambda^2 - \lambda) \cdot v = 0$, נובע כי $\lambda^2 - \lambda = 0$, לכן $\lambda \cdot (\lambda - 1) = 0$,
מהיות $\mathbb{F}$ שדה, אין מחלקי 0, לכן מתקיים $\lambda = 0$ או $\lambda - 1 = 0$,
כלומר $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$, כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם 0 בהכרח ערך עצמי של f?
הוכחה:
לא נכון, נבחר $f = Id_V$, לכן $\forall v \in V \neq 0$ מתקיים $f(v) = v$, לכן v וקטור עצמי והערך העצמי שלו הוא 1 ולא 0.
וגם מתקיים $\boxed{f(v) = f^2(v)} \Leftarrow f^2(v) = f(f(v)) = f(v)$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $f(v), f(v) - v$ וקטורים עצמיים
הוכחה:
נשים לב כי

$$f(f(v)) = f^2(v) = f(v) \Rightarrow f(f(v)) = f(v)$$

לכן $f(v) \neq 0$ הוא וקטור עצמי של f עם ערך עצמי $\lambda = 1$ וגם מתקיים

$$f(f(v) - v) = f(f(v)) - f(v) = f^2(v) - f(v) = f(v) - f(v) = 0 = 0 \cdot (f(v) - v)$$

לכן $f(v) - v \neq 0$ הוא וקטור עצמי של f עם ערך עצמי $\lambda = 0$

מ.ש.ל.ג.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** U, W מרחבים עצמיים
הוכחה:
תחילה נרצה להוכיח כי $V_{\lambda=1} = U$,
יהי $v \in V_{\lambda=1}$, אזי $\exists u \in U, w \in W$ כך ש $v = u + w$ וגם

$$R_{U,W}(v) = u - w = v = u + w \Rightarrow 2 \cdot w = 0 \Rightarrow \boxed{w = 0}$$

נציב ונקבל כי $v = u + 0 = u \in U$, לכן $V_{\lambda=1} \subseteq U$
עתה יהי $u \in U$, ראינו בתרגיל 1 שאלה 7ב כי $R_{U,W}(u) = u = 1 \cdot u$, לכן $u \in V_{\lambda=1}$,
לכן $\boxed{V_{\lambda=1} = U}$, עתה נראה כי $V_{\lambda=-1} = W$,
יהי $v \in V_{\lambda=-1}$, אזי $\exists u \in U, w \in W$ כך ש $v = u + w$ וגם

$$R_{U,W}(v) = u - w = v = -(u + w) \Rightarrow 2 \cdot u = 0 \Rightarrow \boxed{u = 0}$$

נציב ונקבל כי $v = 0 + w = w \in W$, לכן $V_{\lambda=-1} \subseteq W$
עתה יהי $w \in W$, ראינו בתרגיל 1 שאלה 7ב כי $R_{U,W}(w) = w = -1 \cdot w$, לכן $w \in V_{\lambda=-1}$,
לכן $\boxed{V_{\lambda=-1} = W}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** v וקטור עצמי אזי $v \in U \cup W$
הוכחה:
נסמן בλ את הערך העצמי של v, אזי $\exists u \in U, w \in W$ כך ש $v = u + w$ וגם

$$R_{U,W}(v) = u - w = \lambda \cdot v = \lambda \cdot (u + w) \Rightarrow (\lambda - 1) \cdot u - (\lambda + 1) w = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{(\lambda - 1) \cdot u = (\lambda + 1) \cdot w}$$

אם $\lambda \neq 1$, נקבל כי $u = \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \cdot w \in U \cap W = \{0\}$, לכן $u = 0$, נציב ונקבל $v = 0 + w = w \in W$,
אם $\lambda = 1$, אזי $\lambda \neq -1$, אז נקבל כי $w = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \cdot u \in U \cap W = \{0\}$,
לכן $w = 0$, נציב ונקבל $v = u + 0 = u \in U$,
כלומר קיבלנו כי $v \in U$ או $v \in W$, כלומר $v \in U \cup W$

מ.ש.ל.ב.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** האם $\lambda+\mu$ בהכרח ערך עצמי של $T+S$?

הוכחה:

לא נכון! נבחר $v=\mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$, $S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$,

נשים לב כי $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, לכן $\lambda=1$ הוא ערך עצמי של T,

וגם $S\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, לכן $\mu=1$ הוא ערך עצמי של S,

נשים לב כי $(T+S)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=0\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, לכן הערך העצמי היחיד הוא $0\neq\mu+\lambda=1+1=2$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם v בהכרח וקטור עצמי של $T+S$?

הוכחה:

נכון! נסמן בλ את הערך העצמי המתאים לv וT, אזי $T(v)=\lambda\cdot v$

נסמן בμ את הערך העצמי המתאים לv וS, אזי $S(v)=\mu\cdot v$ אזי

$$(T+S)(v)=T(v)+S(v)=\lambda\cdot v+\mu\cdot v=(\lambda+\mu)\cdot v$$

לכן $0\neq v$ הוא וקטור עצמי של $T+S$ עם הערך העצמי $\lambda+\mu$

מ.ש.ל.ב.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, ערכים עצמיים, מרחבים עצמיים וריבויים גאומטריים

הוכחה:

תחילה נחשב את הערכים העצמיים בעזרת הפולינום האופייני

$$\det(A-\lambda\cdot I)=\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}=-\lambda\cdot\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}-1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}=\lambda^4-1$$

לכן מהיות $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $\det(A-\lambda\cdot I)=\lambda^4-1=0$ רק אם $\lambda=1,-1$,

תחילה נחפש את $V_{\lambda=1}$, יהי $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\in V_{\lambda=1}$ אזי

$$A\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y \\ z \\ t \\ x \end{bmatrix}\Rightarrow x=y,y=z,z=t,t=x$$

כלומר מתקיים כי $x=y=z=t$, כלומר $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix}\in\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, לכן $\boxed{V_{\lambda=1}\subseteq\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$,

עתה יהי $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ span $\ni \begin{bmatrix}t\\t\\t\\t\end{bmatrix}$ אזי

$$A\cdot\begin{bmatrix}t\\t\\t\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}t\\t\\t\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\t\\t\\t\end{bmatrix}$$

לכן $\begin{bmatrix}t\\t\\t\\t\end{bmatrix}\in V_{\lambda=1}$, כלומר $\boxed{V_{\lambda=1}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}}$, לכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda=1$ הוא $\dim V_{\lambda=1}=1$

עתה נחפש את $V_{\lambda=-1}$, יהי $\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\in V_{\lambda=-1}$ אזי

$$A\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}y\\z\\t\\x\end{bmatrix}\Rightarrow x=-y,y=-z,z=-t,t=-x$$

כלומר מתקיים כי $x=-y=z=-t$, כלומר $\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\-x\\x\\-x\end{bmatrix}\in\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$, לכן $\boxed{V_{\lambda=1}\subseteq\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}}$,

עתה יהי $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ span $\ni\begin{bmatrix}t\\-t\\t\\-t\end{bmatrix}$ אזי

$$A\cdot\begin{bmatrix}t\\-t\\t\\-t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}t\\-t\\t\\-t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-t\\t\\t\\-t\end{bmatrix}=-1\cdot\begin{bmatrix}t\\-t\\t\\-t\end{bmatrix}$$

לכן $\begin{bmatrix}t\\-t\\t\\-t\end{bmatrix}\in V_{\lambda=-1}$, כלומר $\boxed{V_{\lambda=-1}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}}$, לכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda=-1$ הוא $\dim V_{\lambda=-1}=$
1

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, ערכים עצמיים, מרחבים עצמיים וריבויים גאומטריים
הוכחה:
בסעיף א' ראינו שהפולינום האופייני הוא λ^4-1, לכן הערכים העצמיים האפשריים הם $\lambda=1,-1,i,-i$,

תחילה נחפש את $V_{\lambda=1}$, יהי $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in V_{\lambda=1}$ אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ t \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow x = y, y = z, z = t, t = x$$

כלומר מתקיים כי $x = y = z = t$, כלומר $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, לכן $\boxed{V_{\lambda=1} \subseteq \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$,

עתה יהי $\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

לכן $\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} \in V_{\lambda=1}$, כלומר $\boxed{V_{\lambda=1} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$, לכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 1$ הוא $\dim V_{\lambda=1} = 1$

עתה נחפש את $V_{\lambda=-1}$, יהי $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in V_{\lambda=-1}$ אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} y \\ z \\ t \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow x = -y, y = -z, z = -t, t = -x$$

כלומר מתקיים כי $x = -y = z = -t$, כלומר $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ x \\ -x \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$, לכן $\boxed{V_{\lambda=1} \subseteq \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$,

עתה יהי $\begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \\ -t \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \\ -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \\ -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \\ -t \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \\ -t \end{bmatrix}$$

לכן $\begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \\ -t \end{bmatrix} \in V_{\lambda=-1}$, כלומר $\boxed{V_{\lambda=-1} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}}$, לכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda = -1$ הוא $\dim V_{\lambda=-1} = 1$,

עתה נחפש את $V_{\lambda=i}$, יהי $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in V_{\lambda=i}$ אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \cdot y \\ i \cdot z \\ i \cdot t \\ i \cdot x \end{bmatrix} \Rightarrow x = i \cdot y, y = i \cdot z, z = i \cdot t, t = i \cdot x$$

כלומר מתקיים כי $x = i \cdot y = -z = -i \cdot t$, כלומר $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ ix \\ -x \\ -ix \end{bmatrix} \in \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}$, לכן $\boxed{V_{\lambda=i} \subseteq \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}}$,

עתה יהי $\begin{bmatrix} t \\ it \\ -t \\ -it \end{bmatrix} \in \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}$ אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} t \\ it \\ -t \\ -it \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ it \\ -t \\ -it \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} it \\ -t \\ -it \\ t \end{bmatrix} = i \cdot \begin{bmatrix} t \\ it \\ -t \\ -it \end{bmatrix}$$

לכן $\begin{bmatrix} t \\ it \\ -t \\ -it \end{bmatrix} \in V_{\lambda=i}$, כלומר $\boxed{V_{\lambda=i} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}}$, לכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda = i$ הוא $\dim V_{\lambda=i} = 1$,

עתה נחפש את $V_{\lambda=-i}$, יהי $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in V_{\lambda=-i}$ אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \cdot y \\ i \cdot z \\ i \cdot t \\ i \cdot x \end{bmatrix} \Rightarrow x = -i \cdot y, y = -i \cdot z, z = -i \cdot t, t = -i \cdot x$$

כלומר מתקיים כי $x = -i \cdot y = -z = i \cdot t$, כלומר $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -ix \\ -x \\ ix \end{bmatrix} \in \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$, לכן $\boxed{V_{\lambda=-i} \subseteq \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix} \right\}}$,

עתה יהי $\begin{bmatrix} t \\ -it \\ -t \\ it \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix}\right\}$ אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} t \\ -it \\ -t \\ it \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ -it \\ -t \\ it \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it \\ -t \\ it \\ t \end{bmatrix} = -i \cdot \begin{bmatrix} t \\ -it \\ -t \\ it \end{bmatrix}$$

לכן $\begin{bmatrix} t \\ -it \\ -t \\ it \end{bmatrix} \in V_{\lambda=-i}$, כלומר $\boxed{V_{\lambda=-i} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}\right\}}$, לכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda = -i$ הוא $\dim V_{\lambda=-i} =$ 1

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, ערכים עצמיים, מרחבים עצמיים וריבויים גאומטריים

הוכחה:

בסעיף א' ראינו שהפולינום האופייני הוא $\lambda^4 - 1$, לכן הערכים העצמיים האפשריים הם $\lambda = 1$,

עתה נחפש את $V_{\lambda=1}$, יהי $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in V_{\lambda=1}$ אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ t \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow x = y, y = z, z = t, t = x$$

כלומר מתקיים כי $x = y = z = t$, כלומר $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, לכן $\boxed{V_{\lambda=1} \subseteq \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$,

עתה יהי $\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ אזי

$$A \cdot \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

לכן $\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} \in V_{\lambda=1}$, כלומר $\boxed{V_{\lambda=1} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$, לכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 1$ הוא $\dim V_{\lambda=1} = 1$

מ.ש.ל.ג.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, ערכים עצמיים, מרחבים עצמיים וריבויים גאומטריים
הוכחה:
תחילה נחשב את הערכים העצמיים בעזרת הפולינום האופייני

$$\det(A-\lambda\cdot I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & -4-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)\cdot(-4-\lambda)-6=\lambda^2+3\lambda-10=(\lambda-2)\cdot(\lambda+5)$$

לכן מהיות $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $\det(A-\lambda\cdot I)=(\lambda-2)\cdot(\lambda+5)=0$ רק אם $\lambda=2,-5$,
תחילה נחפש את $V_{\lambda=2}$, יהי $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\in V_{\lambda=2}$ אזי

$$A\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2y\\ 3x-4y\end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Rightarrow\boxed{x+2y=2x,3x-4y=2y}$$
$$\Rightarrow 2y=x,3x=6y\Rightarrow\boxed{x=2y}$$

כלומר מתקיים כי $x=2y$, כלומר $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y\\ y\end{bmatrix}\in\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\right\}$, לכן $\boxed{V_{\lambda=2}\subseteq\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\right\}}$,
עתה יהי $\begin{bmatrix}2t\\ t\end{bmatrix}\in\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ אזי

$$A\cdot\begin{bmatrix}2t\\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2t\\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2t+2t\\ 6t-4t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4t\\ 2t\end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix}2t\\ t\end{bmatrix}$$

לכן $\begin{bmatrix}2t\\ t\end{bmatrix}\in V_{\lambda=2}$, כלומר $\boxed{V_{\lambda=2}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\right\}}$, לכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda=2$ הוא $\dim V_{\lambda=2}=1$,
עתה נחפש את $V_{\lambda=-5}$, יהי $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\in V_{\lambda=-5}$ אזי

$$A\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2y\\ 3x-4y\end{bmatrix}=-5\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Rightarrow\boxed{x+2y=-5x,3x-4y=-5y}$$
$$\Rightarrow 2y=-6x,3x=-9y\Rightarrow\boxed{y=-3x}$$

כלומר מתקיים כי $y=-3x$, כלומר $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ -3x\end{bmatrix}\in\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}\right\}$, לכן $\boxed{V_{\lambda=5}\subseteq\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}\right\}}$,
עתה יהי $\begin{bmatrix}t\\ -3t\end{bmatrix}\in\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}\right\}$ אזי

$$A\cdot\begin{bmatrix}t\\ -3t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}t\\ -3t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t-6t\\ 3t+12t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5t\\ 15t\end{bmatrix}=-5\cdot\begin{bmatrix}t\\ -3t\end{bmatrix}$$

לכן $\begin{bmatrix}t\\ -3t\end{bmatrix}\in V_{\lambda=-5}$, כלומר $\boxed{V_{\lambda=-5}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}\right\}}$, לכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda=-5$ הוא $\dim V_{\lambda=5}=1$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{F}=\mathbb{F}_7$, ערכים עצמיים, מרחבים עצמיים וריבויים גאומטריים
הוכחה:
תחילה נחשב את הערכים העצמיים בעזרת הפולינום האופייני

$$\det(A-\lambda\cdot I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & -4-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)\cdot(-4-\lambda)-6=\lambda^2+3\lambda-10=(\lambda-2)\cdot(\lambda+5)$$

לכן מהיות $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $\det(A-\lambda\cdot I)=(\lambda-2)\cdot(\lambda+5)=0$ רק אם $\lambda=2,-5$, אבל $-5=2$ ולכן יש רק ערך עצמי אחד $\lambda=2$

תחילה נחפש את $V_{\lambda=2}$, יהי $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\in V_{\lambda=2}$ אזי

$$A\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+2y \\ 3x-4y \end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\Rightarrow\boxed{x+2y=2x,3x-4y=2y}$$
$$\Rightarrow 2y=x,3x=6y\Rightarrow\boxed{x=2y}$$

כלומר מתקיים כי $x=2y$, כלומר $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2y \\ y \end{bmatrix}\in\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, לכן $\boxed{V_{\lambda=2}\subseteq\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$,

עתה יהי $\begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}\in\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ אזי

$$A\cdot\begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2t+2t \\ 6t-4t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4t \\ 2t \end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}$$

לכן $\begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}\in V_{\lambda=2}$, כלומר $\boxed{V_{\lambda=2}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$, לכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda=2$ הוא $\dim V_{\lambda=2}=1$

מ.ש.ל.ב.☺

7. **צ"ל:** $\det(A)=\det(B)$

הוכחה:

מהיות A,B מטריצות דומות, קיימת מטריצה הפיכה P כך ש$A=P\cdot B\cdot P^{-1}$, לכן

$$\det(A)=\det\left(P\cdot B\cdot P^{-1}\right)=\det(P)\cdot\det(B)\cdot\det\left(P^{-1}\right)=\det(B)\cdot\det\left(P\cdot P^{-1}\right)=\det(B)\cdot\det(I_n)$$
$$=1\cdot\det(B)=\det(B)\Rightarrow\boxed{\det(A)=\det(B)}$$

מ.ש.ל.☺

8. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** האם מטריצות דומות גוררות מטריצות שקולות שורה?

הוכחה:

לא נכון! נבחר $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. נשים לב כי עבור $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ מתקיים $P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ וגם

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=P^{-1}\cdot A\cdot P$$

לכן A,B דומות. אבל A,B לא שקולות שורה כי שניהן כבר מטריצות קנוניות (מדורגות מצומצמות) ולא אותה אחת, ויש משפט מלינארית 1 שאומר שA,B שקולות שורה אם"ם בעלות אותה מטריצה קנונית. לכן A,B לא שקולות שורה, כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** האם מטריצות שקולות שורה גוררות מטריצות דומות ?

הוכחה:

לא נכון! נבחר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $A=I_2,B=2\cdot I_2$, ברור שהן שקולות שורה כי $R_i\to\frac{1}{2}R_i$.
נניח בשלילה שA,B דומות אזי קיימת מטריצה הפיכה P כך ש$A=P^{-1}\cdot B\cdot P$ אזי

$$I_2=A=P^{-1}\cdot B\cdot P=P^{-1}\cdot(2I_2)\cdot P=2\cdot P^{-1}\cdot P=2I_2$$

בסתירה לכך ש$I_2\neq 2I_2$, לכן A,B לא דומות, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

9. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathrm{tr}\left(A\cdot B\right)=\mathrm{tr}\left(B\cdot A\right)$

הוכחה:

$$\mathrm{tr}\left(A\cdot B\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[A\cdot B\right]_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(a_{i,j}\cdot b_{j,i}\right)\right]=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i,j}\cdot b_{j,i}\right)\right]$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(b_{j,i}\cdot a_{i,j}\right)\right]=\sum_{j=1}^{n}\left[B\cdot A\right]_{j,j}=\mathrm{tr}\left(B\cdot A\right)$$
$$\Rightarrow\boxed{\mathrm{tr}\left(A\cdot B\right)=\mathrm{tr}\left(B\cdot A\right)}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathrm{tr}\left(A\right)=\mathrm{tr}\left(B\right)$

הוכחה:

מהיות A,B מטריצות דומות, קיימת מטריצה הפיכה P כך ש$A=P\cdot B\cdot P^{-1}$, לכן

$$\mathrm{tr}\left(A\right)=\mathrm{tr}\left(P\cdot B\cdot P^{-1}\right)=\mathrm{tr}\left(P\cdot\left(B\cdot P^{-1}\right)\right)=\mathrm{tr}\left(\left(B\cdot P^{-1}\right)\cdot P\right)=\mathrm{tr}\left(B\cdot\left(P^{-1}\cdot P\right)\right)=\mathrm{tr}\left(B\cdot I_n\right)=\mathrm{tr}\left(B\right)$$
$$\Rightarrow\boxed{\mathrm{tr}\left(A\right)=\mathrm{tr}\left(B\right)}$$

מ.ש.ל.ב.☺