אלגברה לינארית (2) תשע"ט 2018-2019 - סמסטר ב' - תרגיל 5

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז.** יש לציין **כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל־ 17.4.19 בשעה 21:00.

1. יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ו־$T : V \longrightarrow V$ אופרטור לינארי. יהי U תת־מרחב T־אינווריאנטי של V ויהי $p(X) \in \mathbb{F}[X]$. הוכיחו כי U הוא תת־מרחב $p(T)$־אינווריאנטי.

2. יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $T : V \longrightarrow V$ אופרטור לינארי ו־ $p(X), q(X), r(X) \in \mathbb{F}[X]$ המקיימים $p(X) = q(X) \cdot r(X)$. הראו כי $\operatorname{Im}(p(T)) \subseteq \operatorname{Im}(r(T))$.

3. יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $T : V \longrightarrow V$ אופרטור לינארי ו־$p(X) \in \mathbb{F}[X]$ פולינום המקיים $\deg(p) = k \geqslant 1$. נניח ש־ $p(T) = 0$ ויהי $\vec{v} \in V$. הוכיחו כי $\dim Z(T, \vec{v}) \leqslant k$.

4. יהיו V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, $T : V \longrightarrow V$ אופרטור לינארי ו־$p(X) \in \mathbb{F}[X]$ פולינום המקיים $\deg(p) = k \geqslant 1$. הראו שאם $p(T)$ איננו "על" אז קיים תת־מרחב T־אינווריאנטי U של V כך ש־ $0 < \dim U \leqslant k$.

5. פולינום $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ נקרא **אי־פריק** אם לכל $q(X), r(X) \in \mathbb{F}[X]$ המקיימים $p(X) = q(X) \cdot r(X)$ בהכרח $\deg(q) = 0$ או $\deg(r) = 0$ (במילים אחרות, אם אחד מבין $q(X)$ ו־ $r(X)$ הוא פולינום קבוע. למשל, הפולינום $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ הוא פולינום אי־פריק).

   יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ המקיים $2 \leqslant \dim V < \infty$ ו־$T : V \longrightarrow V$ אופרטור לינארי. יהי $p(x) \in \mathbb{F}[X]$ פולינום אי־פריק המקיים $\deg p = 2$. הראו שאם $p(T)$ איננו "על" אז קיים תת־מרחב T־אינווריאנטי U של V כך ש־ $\dim U = 2$.

6. יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $T : V \longrightarrow V$ אופרטור לינארי ו־U, W תתי־מרחבים T־אינווריאנטיים של V כך ש־ $V = U \oplus W$. יהי $q(X) \in \mathbb{F}[X]$.

   (א) הוכיחו כי אם $W \subseteq \ker q(T)$ אז $\operatorname{Im}(q(T)) \subseteq U$.

   (ב) נניח בנוסף כי V נוצר סופית. הוכיחו כי אם $U \subseteq \operatorname{Im}(q(T))$ אז $\ker q(T) \subseteq W$.

7. יהי $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ אופרטור לינארי כך שהערכים העצמיים שלו הם λ, μ ו־$\lambda \neq \mu$. יהי $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}$.

   הוכיחו כי מתקיים אחד מהשניים הבאים: (א) $\vec{v}$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי μ.

   (ב) $T(\vec{v}) - \mu\vec{v}$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי λ.

8. עבור מטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ נגדיר העתקה $T_A : M_{n\times n}(\mathbb{F}) \longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{F})$ על ידי

   $$\forall Y \in M_{n\times n}(\mathbb{F}) \quad T_A(Y) = A \cdot Y.$$

   נסמן $Z_A = Z(T_A, A)$, כלומר Z_A הוא התת־מרחב ה־T_A־ציקלי הנוצר על ידי A. מצאו חסם הדוק עבור $\dim Z_A$, כלומר מצאו $k \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\dim Z_A \leqslant k$ לכל $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ ומצאו מטריצה ספציפית $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש־ $\dim Z_A = k$.

9. תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F}))$ מטריצה כך ש־$A - I$ הפיכה. נגדיר את ה**רזולבנטה** של A בתור $\mathscr{R}(A) = (A - I)^{-1}$.

   בשאלה זו נמצא נוסחה ל־$\mathscr{R}(A)$ כתלות ב־$A, A^2, ..., A^{n-1}$ ומקדמי הפולינום האופייני של A.

   (א) השתמשו בעובדה ש־ $X^k - 1 = (X - 1) \cdot (1 + X + X^2 + \cdots + X^{k-1})$ כדי להראות שלכל $k \in \mathbb{N}$,

   $$\mathscr{R}(A) \cdot A^k = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} + \mathscr{R}(A)$$

   (ב) נסמן $\chi_A(X) = c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n$ (כאשר $c_n = 1$).

   הסתכלו על $\chi_A(A) \cdot \mathscr{R}(A)$ והוכיחו בעזרת משפט קיילי־המילטון כי $\left(\sum_{i=0}^{n} c_i\right)\mathscr{R}(A) = -\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(\sum_{m=k+1}^{n} c_m\right)A^k\right)$.

   הסבירו מדוע $\sum_{i=0}^{n} c_i \neq 0$ והסיקו כי $\mathscr{R}(A) = -\dfrac{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(\sum_{m=k+1}^{n} c_m\right)A^k\right)}{\left(\sum_{i=0}^{n} c_i\right)}$.