פתרון תרגיל מספר 9 ־ כלים מתמטיים

שם: מיכאל גרינבאום, **ת.ז:** 211747639

3 בינואר 2021

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_S}{T}-\pi_S\right|\ge\varepsilon\right)=0$

הוכחה:

תהי $X_0,X_1,\dots$ שרשרת מרקוב ארגודית,

נגדיר $f(X)=\begin{cases}1 & X=S\\ 0 & X=S\end{cases}$, נשים לב כי $T_S=\sum_{i=1}^{T}f(X_i)$ וגם כי

$$\mathbb{E}_{X\sim\pi}[f(X)]=\mathbb{P}_{X\sim\pi}(f(X)=1)=\pi_S$$

ולכן לפי המשפט הארגודי לשרשראות מרקוב נקבל כי

$$0=\lim_{T\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}f(X_i)-\mathbb{E}_{X\sim\pi}[f(X)]\right|\ge\varepsilon\right)=\lim_{T\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_S}{T}-\pi_S\right|\ge\varepsilon\right)$$

כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}f(X_i,X_{i+1})-\mathbb{E}_{Y_1\sim\pi\wedge Y_2\sim P_{Y_1}}[f(Y_1,Y_2)]\right|\ge\varepsilon\right)=0$

הוכחה:

תהי $X_0,X_1,\dots$ שרשרת מרקוב ארגודית,

נגדיר שרשרת $Y_0,Y_1,\dots$ באופן הבא $Y_i=(X_i,X_{i+1})$,

נשים לב כי

$$\mathbb{P}\left(Y_{k+1}=(i_{k+1},j)\mid\bigcup_{l=1}^{k}Y_l=(i_l,i_{l+1})\right)\overset{\text{no memory}}{=}\mathbb{P}(Y_{k+1}=(i_k,j))=\mathbb{P}(X_{k+1}=j\mid X_k=i_k)$$

כלומר Y_k היא שרשרת מרקוב,

מהיות X ארגודית קיים k כך שיש מסלול באורך k ב־ X בין כל i,j.

עתה נשים לב כי עבור $Y_1=(i,l),Y_2=(m,j)$ קיים מסלול באורך k בין l ל־ m ונקבל מסלול באורך $k+2$ בין Y_1 ל־ Y_2 לכל i,j,l,m ולכן Y היא גם ארגודית.

עתה לפי המשפט הארגודי לשרשראות מרקוב נקבל כי

$$0=\lim_{T\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}f(Y_i)-\mathbb{E}_{Y\sim\pi'}[f(Y)]\right|\ge\varepsilon\right)=\lim_{T\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}f(X_i,X_{i+1})-\mathbb{E}_{Y\sim\pi'}[f(Y)]\right|\ge\varepsilon\right)$$

נשים לב כי $Y\sim\pi'$ שזאת ההתפלגות הסטציונרית של השרשרת של Y.

נשים לב כי הקורדיאנטה הראשונה של Y מתפלגת בדיוק כמו X ונשים לב שאם $X_t\sim\pi$ אז

$$\mathbb{P}(Y_t=(a,b))=\mathbb{P}(X_{t+1}=b\wedge X_t=a)=\mathbb{P}(X_t=a)\cdot\mathbb{P}(X_{t+1}=b\mid X_t=a)=\pi_a\cdot P_{a,b}$$

וזה בדוק מה שרצינו להראות כלומר

$$0=\lim_{T\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}f\left(X_i,X_{i+1}\right)-\mathbb{E}_{Y\sim(a,b)|\mathbb{P}(Y=(a,b))=\pi_a\cdot P_{a,b}}\left[f\left(Y\right)\right]\right|\geq\varepsilon\right)$$

כנדרש.

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}f\left(X_i,X_{i+1}\right)-\mathbb{E}_{Y_1\sim\pi\wedge Y_2\sim P_{Y_1}}\left[f\left(Y_1,Y_2\right)\right]\right|\geq\varepsilon\right)=0$
הוכחה:
תהי $X_0,X_1,\ldots$ שרשרת מרקוב ארגודית,
נגדיר $f\left(X_1,X_2\right)=\begin{cases}1 & X_1=a\wedge X_2=b\\ 0 & else\end{cases}$, נשים לב כי $T_{a,b}=\sum_{i=1}^{T}f\left(X_i,X_{i+1}\right)$ וגם כי

$$\mathbb{E}_{Y\sim\pi'}\left[f\left(Y\right)\right]=\mathbb{P}_{Y\sim\pi'}\left(X_1=a\wedge X_2=b\right)=\pi_a\cdot P_{a,b}$$

ולכן לפי המשפט הארגודי לשרשראות מרקוב של הסעיף הקודם נקבל כי

$$0=\lim_{T\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}f\left(X_i,X_{i+1}\right)-\mathbb{E}_{Y\sim\pi'}\left[f\left(Y_1,Y_2\right)\right]\right|\geq\varepsilon\right)=\lim_{T\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_{a,b}}{T}-\pi_a\cdot P_{a,b}\right|\geq\varepsilon\right)$$

כנדרש.

מ.ש.ל.ג.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** מטריצת המעברים ושהיא לא ארגודית
הוכחה:
נשים לב שעבור $1\leq i\leq n-1$ מתקיים שחצי מהזמן נעבור ל- $i-1$ וחצי מהזמן נעבור ל- $i+1$,
לכן $P_{i,i-1}=P_{i,i+1}=1$,
וגם עבור $i=0,n$, נשאר באותו המצב ולכן $P_{0,0}=P_{n,n}=1$, כלומר המטריצה היא מהצורה $\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$,
נשים לב כי $e_0=e_0\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$ וגם $e_n=e_n\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$,
כלומר מצאנו 2 וקטורים עצמיים חיוביים שונים, אם נניח בשלילה שהמטריצה ארגודית אז ממשפט פרון פורבליוס קיים וקטור עצמי חיובי יחיד בסתירה למה שהראנו.
כלומר המטריצה לא ארגודית, כנדרש.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\lim_{t\to\infty}\left(q^T\cdot P^t\right)_i=0$ לכל $1\leq i\leq n-1$
הוכחה:
נשים לב שאם אנחנו במצב $1,\ldots,n-1$ אז שחקן 1 יפסיד על ידי הטלה של head n פעמים ברצף ואז נתקע במצב 0 או מצב n,

כלומר $\left(q^T\cdot P^t\right)_i$ הוא לכל היותר הסיכוי שלא נטיל head n פעמים ברצף

$$\begin{aligned}
\left(q^T\cdot P^T\right)_i &\le \mathbb{P}\left(\text{doesn't land head } n \text{ times in a row}\right)\\
&\le \mathbb{P}\left(\text{doesn't land head in all throws in times } [k\cdot n,(k+1)\cdot n], k\in\left[0,\frac{t}{n}-1\right]\right)\\
&\overset{\text{disjoint events}}{\le} \prod_{k=0}^{\frac{t}{n}-1}\mathbb{P}\left(\text{doesn't land head in all throws in times } [k\cdot n,(k+1)\cdot n]\right)\\
&= \prod_{k=0}^{\frac{t}{n}-1}\left(1-\mathbb{P}\left(\text{lands head in all throws in times } [k\cdot n,(k+1)\cdot n]\right)\right)\\
&= \prod_{k=0}^{\frac{t}{n}-1}\left(1-2^{-n}\right)=\left(1-2^{-n}\right)^{\frac{t}{n}}
\end{aligned}$$

עתה נשים לב כי $\lim_{t\to\infty}\left(1-2^{-n}\right)^{\frac{t}{n}}=0$ וגם $0\le\left(q^T\cdot P^t\right)_i\le\left(1-2^{-n}\right)^{\frac{t}{n}}$,
לכן ממשפט סנדוויץ' נקבל כי $\lim_{t\to\infty}\left(q^T\cdot P^t\right)_i=0$, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\pi=\alpha\cdot e_0+(1-\alpha)\cdot e_n$
הוכחה:
נשים לב שלפי הסעיף הקודם מתקיים $\pi_i^T=\lim_{t\to\infty}\pi_i^T=\lim_{t\to\infty}\left(\pi^T\cdot P^t\right)_i=0$ לכל $i\neq 0,n$,
כלומר קיבלנו $1=\sum_{i=0}^{n}\pi_i=\pi_0+\pi_n$,
וגם

$$\pi=\sum_{i=0}^{n}\pi_i\cdot e_i=\pi_0\cdot e_0+\pi_n\cdot e_n=\pi_0\cdot e_0+(1-\pi_0)\cdot e_n$$

כנדרש

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\lim_{t\to\infty}e_k^T\cdot P^t=\frac{k}{n}$
הוכחה:
נסמן ב־ p_k את הסיכוי ששחקן 1 ינצח,
נשים לב כי $p_0=0$ (לא נשאר לו כסף אז הוא הפסיד), $p_n=1$ (הוא זכה בכל הכסף ולכן ניצח),
וגם $p_k=\frac{1}{2}\cdot p_{k-1}+\frac{1}{2}\cdot p_{k+1}$ לכל $1\le k\le n-1$,
עתה נוכיח באינדוקציה כי $p_k=\frac{k}{k+1}\cdot p_{k+1}$
<u>בסיס:</u> $k=0$, נשים לב כי $p_0=\frac{0}{0+1}=0$, כנדרש
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל־ k ונוכיח שהיא נכונה ל־ $k+1$

$$\begin{aligned}
p_{k+1}&=\frac{1}{2}p_k+\frac{1}{2}p_{k+2}\overset{\text{induction}}{=}\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{k+1}p_{k+1}+\frac{1}{2}p_{k+2}\\
\Rightarrow& p_{k+1}\left(1-\frac{k}{2k+2}\right)=\frac{1}{2}p_{k+2}\\
\Rightarrow& p_{k+1}\left(\frac{2k+2-k}{2(k+1)}\right)=\frac{1}{2}p_{k+2}\\
\Rightarrow& p_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}p_{k+2}
\end{aligned}$$

כלומר הראנו שהטענה נכונה ל־ $k+1$,
עתה קיבלנו נוסחא שתלויה רק באיבר הבא ולא הקודם.

עתה נוכיח באינדוקציה כי $p_k = \frac{k}{n}$,
<u>בסיס:</u> $k = n$, נשים לב כי $p_n = \frac{n}{n}$ כנדרש
<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה ל־ $k+1$ ונוכיח ל־ k,

$$p_k = \frac{k}{k+1} \cdot p_{k+1} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{n} = \frac{k}{n}$$

כנדרש.
דרך אחרת לפתרון שהראו בקורס בהסתברות, ננחש שהפתרון לינארי כי כל נקודה רחוקה באותו מרחק מהקודמת והבאה ונסמן נחפש פתרון $p_k = c_1 + c_2 \cdot k$, נשים לב כי $p_0 = 0 = c_1$,
ועתה $1 = p_n = c_2 \cdot n$ ולכן $c_2 = \frac{1}{n}$ ונקבל כי $p_k = \frac{1}{n} \cdot k$, כנדרש.

מ.ש.ל.ד.☺

3. **צ"ל:** $|e(S,T) - d \cdot |S| \cdot |T|| \leq \lambda^* \cdot \sqrt{|S| \cdot |T|}$
הוכחה:
נסמן ב־ $v_1, \ldots, v_n$ בסיס אורתונורמלי של A_G עם ערכים עצמיים $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$,
נשים לב כי

$$\begin{aligned}1_S^T \cdot A_G \cdot 1_T &= \sum_{i,j} [1_S]_i \cdot a_{i,j} \cdot [1_T]_j = \sum_{(i,j)\in E} [1_S]_i \cdot [1_T]_j = \sum_{(i,j)\in E} 1_{i\in S} \cdot 1_{j\in T} = \sum_{(i,j)\in E} 1_{i\in S \wedge j \in T} \\ &= \#\text{number of edges from S to T} = e(S,T)\end{aligned}$$

עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}e(S,T) &= 1_S^T \cdot A_G \cdot 1_T = 1_S^T \cdot A_G \cdot \left(\sum_{i=1}^n \langle 1_T, v_i\rangle \cdot v_i\right) = 1_S^T \cdot \left(\sum_{i=1}^n \langle 1_T, v_i\rangle \cdot \lambda_i \cdot v_i\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \langle 1_S, v_i\rangle \cdot v_i\right)^T \cdot \left(\sum_{i=1}^n \langle 1_T, v_i\rangle \cdot \lambda_i \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \langle 1_S, v_i\rangle \cdot \langle 1_T, v_i\rangle \\
&= \lambda_1 \cdot \langle 1_S, v_1\rangle \cdot \langle 1_T, v_1\rangle + \sum_{i=2}^n \lambda_i \cdot \langle 1_S, v_i\rangle \cdot \langle 1_T, v_i\rangle \\
&\overset{\lambda_1 = d, v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}}{=} d \cdot \left\langle 1_S, \frac{1}{\sqrt{n}}\right\rangle \cdot \left\langle 1_T, \frac{1}{\sqrt{n}}\right\rangle + \sum_{i=2}^n \lambda_i \cdot \langle 1_S, v_i\rangle \cdot \langle 1_T, v_i\rangle \\
&= d \cdot |S| \cdot |T| + \sum_{i=2}^n \lambda_i \cdot \langle 1_S, v_i\rangle \cdot \langle 1_T, v_i\rangle \leq d \cdot |S| \cdot |T| + \lambda^* \cdot \sum_{i=2}^n \cdot \langle 1_S, v_i\rangle \cdot \langle 1_T, v_i\rangle \\
&\leq d \cdot |S| \cdot |T| + \lambda^* \cdot \sum_{i=1}^n \cdot \langle 1_S, v_i\rangle \cdot \langle 1_T, v_i\rangle \\
&= d \cdot |S| \cdot |T| + \lambda^* \cdot \sum_{i=1}^n \cdot \langle 1_S, v_i\rangle \cdot v_i^T \cdot v_i \cdot \langle 1_T, v_i\rangle \\
&= d \cdot |S| \cdot |T| + \lambda^* \cdot 1_S^T \cdot 1_T = d \cdot |S| \cdot |T| + \lambda^* \cdot \langle 1_S, 1_T\rangle \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz inequality}}{\leq} d \cdot |S| \cdot |T| + \lambda^* \cdot \sqrt{\|1_S\|^2 \cdot \|1_T\|^2} = d \cdot |S| \cdot |T| + \lambda^* \cdot \sqrt{|S| \cdot |T|}\end{aligned}$$

כלומר הראנו כי $e(S,T) \leq d \cdot |S| \cdot |T| + \lambda^* \cdot \sqrt{|S| \cdot |T|}$, ולכן

$$|e(S,T) - d \cdot |S| \cdot |T|| \leq \lambda^* \cdot \sqrt{|S| \cdot |T|}$$

כנדרש.

מ.ש.ל.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $c\left(G\right)\leq\frac{n\cdot\left(d-\lambda_{n}\right)}{4}$

הוכחה:

נסמן ב- $v_{1},\ldots,v_{n}$ בסיס אורתונורמלי של A_{G} עם ערכים עצמיים $\lambda_{n}\geq\cdots\geq\lambda_{2}\geq\lambda_{1}$,
תחילה נשים לב כי

$$\begin{aligned}1_{S}^{T}\cdot A_{G}\cdot1_{S} & =\left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle 1_{S},v_{i}\right\rangle \cdot v_{i}\right)^{T}\cdot A_{G}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle 1_{S},v_{i}\right\rangle \cdot v_{i}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle 1_{S},v_{i}\right\rangle \cdot v_{i}\right)^{T}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle 1_{S},v_{i}\right\rangle \cdot\lambda_{i}\cdot v_{i}\right)\\
 & =\left\langle \sum_{i=1}^{n}\left\langle 1_{S},v_{i}\right\rangle \cdot v_{i},\sum_{i=1}^{n}\left\langle 1_{S},v_{i}\right\rangle \cdot\lambda_{i}\cdot v_{i}\right\rangle =\sum_{i=1}^{n}\left\langle 1_{S},v_{i}\right\rangle ^{2}\cdot\lambda_{i}=d\cdot\left\langle 1_{S},v_{1}\right\rangle ^{2}+\sum_{i=2}^{n}\left\langle 1_{S},v_{i}\right\rangle ^{2}\cdot\lambda_{i}\\
 & \overset{v_{1}=n^{-1}\cdot1}{=}d\cdot\left\langle 1_{S},\frac{1}{n}\right\rangle ^{2}+\sum_{i=2}^{n}\left\langle 1_{S},v_{i}\right\rangle ^{2}\cdot\lambda_{i}=\frac{d}{n}\cdot\left|S\right|+\sum_{i=2}^{n}\left\langle 1_{S},v_{i}\right\rangle ^{2}\cdot\lambda_{i}\\
 & \geq\frac{d}{n}\cdot\left|S\right|^{2}+\sum_{i=2}^{n}\left\langle 1_{S},v_{i}\right\rangle ^{2}\cdot\lambda_{n}=\frac{d}{n}\cdot\left|S\right|^{2}+\lambda_{n}\cdot\sum_{i=2}^{n}\left\langle 1_{S},v_{i}\right\rangle ^{2}\\
 & =\frac{d}{n}\cdot\left|S\right|^{2}+\lambda_{n}\cdot\left[\left\Vert 1_{S}\right\Vert ^{2}-d\cdot\left\langle 1_{S},v_{1}\right\rangle ^{2}\right]=\frac{d}{n}\cdot\left|S\right|^{2}+\lambda_{n}\cdot\left[\left|S\right|-\frac{\left|S\right|^{2}}{n}\right]\\
 & =\frac{d}{n}\cdot\left|S\right|^{2}+\lambda_{n}\cdot\left|S\right|-\lambda_{n}\cdot\frac{\left|S\right|^{2}}{n}=\frac{d}{n}\cdot\left|S\right|^{2}+\lambda_{n}\cdot\left|S\right|\left[1-\frac{\left|S\right|}{n}\right]
\end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned}1_{S}^{T}\cdot A_{G}\cdot1_{S^{C}} & =1_{S}^{T}\cdot A_{G}\cdot\left[1-1_{S}\right]=1_{S}^{T}\cdot A_{G}\cdot1-1_{S}^{T}\cdot A_{G}\cdot1_{S}\\
 & =1_{S}^{T}\cdot d\cdot1-1_{S}^{T}\cdot A_{G}\cdot1_{S}=d\cdot\left|S\right|-1_{S}^{T}\cdot A_{G}\cdot1_{S}\\
 & =d\cdot\left|S\right|-1_{S}^{T}\cdot A_{G}\cdot1_{S}\leq d\cdot\left|S\right|-\left[\frac{d}{n}\cdot\left|S\right|^{2}+\lambda_{n}\cdot\left|S\right|\left[1-\frac{\left|S\right|}{n}\right]\right]\\
 & =d\cdot\left|S\right|\cdot\left(1-\frac{\left|S\right|}{n}\right)-\lambda_{n}\cdot\left|S\right|\cdot\left(1-\frac{\left|S\right|}{n}\right)=\left(1-\frac{\left|S\right|}{n}\right)\cdot\left(d\cdot\left|S\right|-\lambda_{n}\cdot\left|S\right|\right)\\
 & =\left(n-\left|S\right|\right)\cdot\left|S\right|\cdot\frac{d-\lambda_{n}}{n}
\end{aligned}$$

נשים לב שזה נכון לכל קבוצה S, וזה פולינום ממעלה 2 שהמקסימום שלו מתקבל עבור $\left|S\right|=\frac{n}{2}$, נציב ונקבל

$$1_{S}^{T}\cdot A_{G}\cdot1_{S^{C}}\leq\left(n-\frac{n}{2}\right)\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{d-\lambda_{n}}{n}=\frac{n}{4}\cdot\left(d-\lambda_{n}\right)$$

עתה נשים לב כי

$$\begin{aligned}1_{S}^{T}\cdot A_{G}\cdot1_{T} & =\sum_{i,j}\left[1_{S}\right]_{i}\cdot a_{i,j}\cdot\left[1_{T}\right]_{j}=\sum_{(i,j)\in E}\left[1_{S}\right]_{i}\cdot\left[1_{T}\right]_{j}=\sum_{(i,j)\in E}1_{i\in S}\cdot1_{j\in T}=\sum_{(i,j)\in E}1_{i\in S\land j\in T}\\
 & =\#\text{number of edges from S to T}=e\left(S,T\right)
\end{aligned}$$

ולכן נקבל כי

$$c\left(G\right)=\max_{S\subseteq[n]}e\left(S,S^{C}\right)\leq\max_{S\subseteq[n]}e\left(\left|\left\{ 1,\ldots,\frac{n}{2}\right\} \right|,\left|\left\{ \frac{n}{2}+1,\ldots,n\right\} \right|\right)=1_{\left\{ 1,\ldots,\frac{n}{2}\right\} }^{T}\cdot A_{G}\cdot1_{\left\{ 1,\ldots,\frac{n}{2}\right\} ^{C}}\leq\frac{n}{4}\cdot\left(d-\lambda_{n}\right)$$

כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $c\left(G\right)\geq\frac{nd}{4}$

הוכחה:

תהי $S\subseteq V$ וכל צלע תהיה קיימת ב־ G בהסתברות $\frac{1}{2}$, כלומר $G\sim G\left(n,\frac{1}{2}\right)$,
נשים לב שכל צלע בהסתברות חצי תהיה בחתך $c\left(S,V\setminus S\right)$.
נגדיר X משתנה מקרי שסופרת את $c\left(S,V\setminus S\right)$ כש־ $S\subseteq V$ נדגם אקראית,
מהאבחנה שכל צלע תהיה בחתך בהסתברות $\frac{1}{2}$ נקבל לכן נקבל כי

$$\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{\left|E\right|}{2}=\frac{\frac{1}{2}\sum_{v\in V}\deg\left(v\right)}{2}=\frac{\sum_{v\in V}d}{4}=\frac{nd}{4}$$

כלומר $\mathbb{E}\left[c\left(S,V\setminus S\right)\right]=\frac{nd}{4}$ ולכן קיימת קבוצה S כך ש־ $c\left(S,V\setminus S\right)\geq\frac{nd}{4}$,
אחרת אם לכל קבוצה S מתקיים $c\left(S,V\setminus S\right)<\frac{nd}{4}$ אז בגלל סופיות V נקבל כי

$$\frac{nd}{4}=\mathbb{E}\left[c\left(S,V\setminus S\right)\right]<\mathbb{E}\left[\frac{nd}{4}\right]=\frac{nd}{4}$$

ונקבל סתירה.
כלומר הראנו שקיימת קבוצה S כך ש־ $c\left(S,V\setminus S\right)\geq\frac{nd}{4}$ ולכן

$$c\left(G\right)=\max_{S'\subseteq[n]}c\left(S',V\setminus S'\right)\geq c\left(S,V\setminus S\right)=\frac{nd}{4}$$

כלומר הראנו כי $c\left(G\right)\geq\frac{nd}{4}$, כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺