פתרון תרגיל מספר 6 - מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

9 במאי 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** התפלגות X

הוכחה:

תחילה נשים לב כי $\text{Range}\left(X\right)=\mathbb{N}$ מההגדרה,

וגם כי עבור $k\in\mathbb{N}$ מתקיים שהסיכוי שההצלחה הראשונה היא בk אם $X\sim Geo\left(p,k\right)$, כלומר

$$\mathbb{P}_X\left(k\right)=\left(1-p\right)^{k-1}\cdot p$$

לכן ההתפלגות הינה $\boxed{\left(\left(\left(1-p\right)^{k-1}\cdot p\right)_{k=1}^{\infty}\right)}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{E}\left[X\right]$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\right]&=\sum_{x\in\text{Im}X}x\cdot\mathbb{P}_X\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\mathbb{P}_X\left(k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(1-p\right)^{k-1}\cdot p\\&=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(1-p\right)^{k-1}=p\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\left(1-p\right)^{k-1}\right]\\&\overset{\star}{=}p\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(n-1\right)\left(1-p\right)^{n}-n\cdot\left(1-p\right)^{n-1}+1}{\left(p\right)^{2}}\right]\\&=\frac{p}{p^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(n-1\right)\left(1-p\right)^{n}-n\cdot\left(1-p\right)^{n-1}+1\right]\\&=\frac{1}{p}\cdot1=\frac{1}{p}\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{1}{p}}$,

הערה: המעבר $\star$ נכון כי הוכחנו בהרצאה כי $\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot q^{k-1}=\frac{(n-1)q^{n}-n\cdot q^{n-1}+1}{(q-1)^{2}}$

מ.ש.ל.ב.☺

2. **צ"ל:** הסתברות שבדיוק 2 קנו טלוויזיה ו1 קנה מקרר

הוכחה:

נפתור בעיה באופן כללי ואז נציב, נניח כי היו n מבקרים, t מהם רצו טלוויזיה, f מהם רצו מקרר.

נרצה לדעת את $p\left(t,f\right)$,

נשים לב שההסתברות שבדיוק t מהם קנו טלוויזיה היא $0.45^{t}\cdot\binom{n}{t}$,

לאחר שt מהם קנו טלוויזיה, ההסתברות שf מהם יקנו מקרר היא $0.15^{f}\cdot\binom{n-t}{f}$,

לבסוף, נרצה שכל השאר לא יקנו לא מקרר ולא טלוויזיה, ההסתברות לכך היא 0.4^{n-t-r},

מהיות המאורעות בלתי תלויים, נקבל כי $p\left(t,f\right)=0.45^{t}\cdot\binom{n}{t}\cdot0.15^{f}\cdot\binom{n-t}{f}\cdot0.4^{n-t-r}$,
נציב את הנתונים: $n=5$, $f=1$, $t=2$ ונקבל

$$\boxed{p\left(2,1\right)=\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1}\cdot0.45^{2}\cdot0.15\cdot0.4^{2}}$$

מ.ש.ל.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** התפלגות X

הוכחה:

נשים לב כי $\text{Range}\left(X\right)=\left(0,\ldots,\min\left(M,n\right)\right)$, מהיות ויש לכל היותר M כדורים כחולים ואנחנו לוקחים לכל היותר n כדורים.

לכן יהי $k\in\left(0,\ldots,\min\left(M,n\right)\right)$, אזי

$$\mathbb{P}_{X}\left(k\right)=\frac{\underbrace{\binom{N-M}{n-k}}_{\text{options n-k red balls}}\cdot\underbrace{\binom{M}{k}}_{\text{options k blue balls}}}{\underbrace{\binom{N}{n}}_{\text{options choose n}}}$$

לכן ההתפלגות היא $\boxed{\left(\left(\frac{\binom{N-M}{n-k}\cdot\binom{M}{k}}{\binom{N}{n}}\right)_{k=0}^{\min\left(M,n\right)}\right)}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{E}\left[X\right]$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\right] & =\sum_{x\in\text{Im}X}x\cdot\mathbb{P}_{X}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\min\left(M,n\right)}k\cdot\mathbb{P}_{X}\left(k\right)=\sum_{k=0}^{\min\left(M,n\right)}k\cdot\frac{\binom{N-M}{n-k}\cdot\binom{M}{k}}{\binom{N}{n}}\\ & =\sum_{k=0}^{n}k\cdot\frac{\binom{N-M}{n-k}\cdot\binom{M}{k}}{\binom{N}{n}}\overset{\text{wolfram}}{=}\frac{M\cdot n}{N}\end{aligned}$$

מ.ש.ל.ב.☺

4. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $\mathbb{E}\left[X\right]$

הוכחה:

נגדיר $X:\left\{1,2,3\right\}\to\mathbb{R}$ - מספר העוגיות בצנצנת i, לכן $\text{Range}\left(X\right)=\left(9,15,18\right)$ וגם מתקיים מהנתון

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X}\left(9\right) & =\frac{9}{9+15+18}=\frac{3}{3+5+6}=\frac{3}{14}\\ \mathbb{P}_{X}\left(15\right) & =\frac{15}{9+15+18}=\frac{5}{3+5+6}=\frac{5}{14}\\ \mathbb{P}_{X}\left(18\right) & =\frac{18}{9+15+18}=\frac{6}{3+5+6}=\frac{6}{14}\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\right] &= \sum_{x\in\mathrm{Im}X} x\cdot\mathbb{P}_X\left(x\right) = 9\cdot\mathbb{P}_X\left(9\right)+15\cdot\mathbb{P}_X\left(15\right)+18\cdot\mathbb{P}_X\left(18\right)\\ &= 9\cdot\frac{3}{14}+15\cdot\frac{5}{14}+18\cdot\frac{6}{14}=15\end{aligned}$$

כלומר $\boxed{\mathbb{E}\left[X\right]=15}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{E}\left[X\right]$

הוכחה:

נגדיר $X:\{1,2,3\}\to\mathbb{R}$ - מספר העוגיות בצנצת i, לכן $\mathrm{Range}\left(X\right)=\left(9,15,18\right)$ וגם מתקיים מהנתון

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X\left(9\right)&=\frac{1}{3}\\ \mathbb{P}_X\left(15\right)&=\frac{1}{3}\\ \mathbb{P}_X\left(18\right)&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\right] &= \sum_{x\in\mathrm{Im}X} x\cdot\mathbb{P}_X\left(x\right) = 9\cdot\mathbb{P}_X\left(9\right)+15\cdot\mathbb{P}_X\left(15\right)+18\cdot\mathbb{P}_X\left(18\right)\\ &= 9\cdot\frac{1}{3}+15\cdot\frac{1}{3}+18\cdot\frac{1}{3}=3+5+6=14\end{aligned}$$

כלומר $\boxed{\mathbb{E}\left[X\right]=14}$

מ.ש.ל.ב.☺

5. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** התפלגות X,Y

הוכחה:

נשים לב כי

$$\left|\Omega\right|=\left|\left\{(i,j)\mid 1\le i\le j,1\le j\le 10\right\}\right|=\sum_{j=1}^{10}\left|\left\{(i,j)\mid 1\le i\le j\right\}\right|=\sum_{j=1}^{10}j=\frac{10\cdot 11}{2}=55$$

תחילה נחשב את ההתפלגות של Y, נשים לב כי $\mathrm{Range}\left(Y\right)=\left(0,\ldots,10\right)$ וגם

$$\mathbb{P}_Y\left(j\right)=\frac{\left|\left\{(i,j)\mid 1\le i\le j\right\}\right|}{\left|\Omega\right|}=\frac{j}{55}$$

כלומר ההתפלגות של Y היא $\boxed{\left(\left(\frac{k}{55}\right)_{k=0}^{10}\right)}$,

עתה נחשב את ההתפלגות של X, נשים לב כי $\mathrm{Range}\left(X\right)=\left(0,\ldots,10\right)$ וגם

$$\mathbb{P}_X\left(j\right)=\frac{\left|\left\{(i,j)\mid i\le j\le 10\right\}\right|}{\left|\Omega\right|}=\frac{10-i+1}{55}=\frac{11-i}{55}=\frac{1}{5}-\frac{i}{55}$$

כלומר ההתפלגות של X היא $\boxed{\left(\left(\frac{1}{5}-\frac{k}{55}\right)_{k=0}^{10}\right)}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\mathbb{E}[X]$

הוכחה:

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{x\in\mathrm{Im}X}x\cdot\mathbb{P}_X(x)=\sum_{k=1}^{10}k\cdot\mathbb{P}_X(k)=\sum_{k=1}^{10}k\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{k}{55}\right)$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=1}^{10}k-\frac{1}{55}\cdot\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{55}{5}-\frac{385}{55}=11-7=4$$

כלומר $\boxed{\mathbb{E}[X]=4}$

מ.ש.ל.ב.☺

6. **צ"ל:** $\mathbb{E}[X]$

הוכחה:

נסמן בN את הפעם שקיבלנו בה 6

נגדיר A_i - הסיכוי שבזריקה הi נקבל 1

$$\mathbb{P}(A_i\mid N=k)=\frac{\mathbb{P}(A_i\cap(N=k))}{\mathbb{P}(N=k)}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}}{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}}=\frac{1}{5}$$

לכן

$$\mathbb{E}[X]\overset{\star}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[X\mid N=k]\cdot\mathbb{P}(N=k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k-1}I_{A_i}\mid N=k\right]\cdot\mathbb{P}(N=k)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\mathbb{E}[I_{A_i}\mid N=k]\cdot\mathbb{P}(N=k)\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\mathbb{P}(A_i\mid N=k)\cdot\mathbb{P}(N=k)\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right)\right]=\frac{1}{5}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left((k-1)\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{5}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(k\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right)\right]=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left(k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right)\right]-1\right]$$
$$\overset{\star\star}{=}\frac{1}{5}\left[\frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^n-n\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+1}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}\right]-1\right]=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{6}\cdot 6-1\right]=\frac{5}{5}=1$$

כלומר קיבלנו כי $\boxed{\mathbb{E}[X]=1}$

הערות: נשים לב כי $\star$ מתקיים מנוסחת התוחלת תחת התנייה

נשים לב כי $\star\star$ מתקיים כי הוכחנו בהרצאה כי $\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot q^{k-1}=\frac{(n-1)q^n-n\cdot q^{n-1}+1}{(q-1)^2}$

מ.ש.ל.☺