פתרון תרגיל מספר 9 - לינארית 2

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

17 במאי 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** בסיס שרשראות וA נילפוטנטית
הוכחה:
תחילה נשים לב כי

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

לכן A נילפוטנטית וגם כי

$$\begin{aligned} e_1 - e_2 &\to 0 \\ e_4 &\to 0 \\ e_3 &\to e_5 \to 0 \end{aligned}$$

לכן מצאנו בסיס שרשראות שהוא $e_1 - e_2, e_3, e_4, e_5$ כי הם 5 וקטורים בת"ל במרחב ממימד 5.

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** בסיס שרשראות וA נילפוטנטית
הוכחה:
תחילה נשים לב כי

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

לכן A נילפוטנטית וגם כי

$$\begin{aligned} e_1 \to e_3 + e_5 \to e_5 \to 0 \\ e_2 \to e_4 \to 0 \end{aligned}$$

לכן מצאנו בסיס שרשראות שהוא $e_1, e_3 + e_5, e_5, e_2, e_4$ כי הם 5 וקטורים בת"ל במרחב ממימד 5.

מ.ש.ל.ב.☺

2. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** $X_T(X)=(X-\lambda)^l\cdot(X-\lambda')^{l'}$
הוכחה:
תחילה נשים לב שלמטריצת בלוקים מתקיים

$$\det(C)=\det\left(\begin{bmatrix}C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_r\end{bmatrix}\right)=\prod_{i=1}^{r}\det(C_i)$$

לכן,

$$\begin{aligned}\chi_T(X)&=\det(T_A-X\cdot I_n)\\ &=\det\left(\begin{bmatrix}J_{k_1}(\lambda)-X\cdot I & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_{k_r}(\lambda)-X\cdot I & & & \\ & & & J_{k'_1}(\lambda')-X\cdot I & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_{k'_{r'}}(\lambda')-X\cdot I\end{bmatrix}\right)\\ &=\prod_{i=1}^{r}\det(J_{k_i}(\lambda)-X\cdot I)\cdot\prod_{j=1}^{r'}\det\left(J_{k'_j}(\lambda)-X\cdot I\right)\\ &=(X-\lambda)^{\sum_{i=1}^{r}k_i}\cdot(X-\lambda')^{\sum_{i=1}^{r'}k'_i}=(X-\lambda)^l\cdot(X-\lambda')^{l'}\end{aligned}$$

כלומר $\boxed{X_T(X)=(X-\lambda)^l\cdot(X-\lambda')^{l'}}$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $\ker(X-\lambda)^l=\operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_l\}$
הוכחה:
תחילה נשים לב שלמטריצת בלוקים מתקיים

$$C^m=\begin{bmatrix}C_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & C_r^m\end{bmatrix}$$

לכן,

$$(T_A-\lambda\cdot Id_v)^l=\begin{bmatrix}(J_{k_1}(\lambda)-\lambda\cdot Id)^l & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & (J_{k_r}(\lambda)-\lambda\cdot Id)^l & & & \\ & & & \left(J_{k'_1}(\lambda')-\lambda\cdot Id\right)^l & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \left(J_{k'_{r'}}(\lambda')-\lambda\cdot Id\right)^l\end{bmatrix}$$

נשים לב כי $J_{k_i}(\lambda)-\lambda\cdot I$ נילפטונטיות מדרגה $k_i \le l$, לכן $\left(J_{k_i}(\lambda)-\lambda\cdot I\right)^l=0$, לכן המטריצה היא מהצורה

$$\left(T_A-\lambda\cdot Id_v\right)^l=\begin{bmatrix} 0 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 0 &&& \\ &&& \left(J_{k_1'}(\lambda')-\lambda\cdot Id\right)^l && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& \left(J_{k_{r'}'}(\lambda')-\lambda\cdot Id\right)^l \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 0 &&& \\ &&& \left(J_{k_1'}(\lambda'-\lambda)\right)^l && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& \left(J_{k_{r'}'}(\lambda'-\lambda)\right)^l \end{bmatrix}$$

נשים לב כי $e_1,\dots,e_l\in\ker\left(T_A-\lambda\cdot Id_V\right)^l$ כי הl העמודות הראשונות הם אפסים,
לכן $\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_l\}\subseteq\ker\left(T_A-\lambda\cdot Id_V\right)^l$, עתה נשים לב כי $\left(J_{k_i'}(\lambda'-\lambda)\right)^l$ היא משולשית עליונה עם אלכסון שונה מ0, לכן $\operatorname{Rank}\left(\left(J_{k_i'}(\lambda'-\lambda)\right)^l\right)=k_i'$, לכן

$$\operatorname{Rank}\left(T_A-\lambda\cdot Id_V\right)^l=\sum_{i=1}^{l'}\operatorname{Rank}\left(\left(J_{k_i'}(\lambda'-\lambda)\right)^l\right)=\sum_{i=1}^{l'}k_i'=l'$$

$$\Rightarrow\dim\ker\left(T_A-\lambda\cdot Id_V\right)^l=l+l'-\operatorname{Rank}\left(T_A-\lambda\cdot Id_V\right)^l=l$$

לכן מהיות ומצאנו l וקטורים בת"ל במרחב ממימד l, מתקיים שהם בסיס ולכן

$$\boxed{\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_l\}=\ker\left(T_A-\lambda\cdot Id_V\right)}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\ker(X-\lambda)^{k_1}=\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_l\}$
הוכחה:
תחילה נשים לב שלמטריצת בלוקים מתקיים

$$C^m=\begin{bmatrix} C_1^m && \\ & \ddots & \\ && C_r^m \end{bmatrix}$$

לכן,

$$\left(T_A-\lambda\cdot Id_v\right)^{k_1}=\begin{bmatrix} \left(J_{k_1}(\lambda)-\lambda\cdot Id\right)^{k_1} &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && \left(J_{k_r}(\lambda)-\lambda\cdot Id\right)^{k_1} &&& \\ &&& \left(J_{k_1'}(\lambda')-\lambda\cdot Id\right)^{k_1} && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& \left(J_{k_{r'}'}(\lambda')-\lambda\cdot Id\right)^{k_1} \end{bmatrix}$$

נשים לב כי $J_{k_i}(\lambda)-\lambda\cdot I$ נילפוטנטיות מדרגה $k_i\le k_1$, לכן $\left(J_{k_i}(\lambda)-\lambda\cdot I\right)^{k_1}=0$, לכן המטריצה היא מהצורה

$$\left(T_A-\lambda\cdot Id_v\right)^{k_1}=\begin{bmatrix}0&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&0&&&\\&&&\left(J_{k_1'}(\lambda')-\lambda\cdot Id\right)^{k_1}&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&\left(J_{k_{r'}'}(\lambda')-\lambda\cdot Id\right)^{k_1}\end{bmatrix}$$

נשים לב כי $e_1,\dots,e_l\in\ker\left(T_A-\lambda\cdot Id_V\right)^{k_1}$ כי הl העמודות הראשונות הם אפסים,
לכן

$$\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_l\}\subseteq\ker\left(T_A-\lambda\cdot Id_V\right)^{k_1}\overset{k_1\le l}{\subseteq}\ker\left(T_A-\lambda\cdot Id_V\right)^{l}\overset{\star}{\subseteq}\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_l\}$$

נשים לב כי $\star$ נובע מהסעיף הקודם, לכן קיבלנו כי

$$\boxed{\ker\left(T_A-\lambda\cdot Id_V\right)^{k_1}=\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_l\}=\ker\left(T_A-\lambda\cdot Id_V\right)^{l}}$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $g(T)=0$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי $\gcd\left((x-\lambda)^l,(x-\lambda')^{l'}\right)=1$ וגם $\chi_T(T)=0=(T-\lambda\cdot Id)^l\cdot(T-\lambda'\cdot Id)^{l'}$, לכן ממשפט שראינו בתרגול מתקיים

$$\ker(T-\lambda\cdot Id)^l\oplus\ker(T-\lambda'\cdot Id)^{l'}=V$$

מהסעיף הקודם נובע כי $\ker(T-\lambda'\cdot Id)^{l'}=\ker(T-\lambda'\cdot Id)^{k_1'}$, $\ker(T-\lambda\cdot Id)^l=\ker(T-\lambda\cdot Id)^{k_1}$, לכן

$$\ker(T-\lambda\cdot Id)^{k_1}\oplus\ker(T-\lambda'\cdot Id)^{k_1'}=V$$

לכן $\forall v\in V$ מתקיים $v\in\ker(T-\lambda\cdot Id)^{k_1}$ או $v\in\ker(T-\lambda'\cdot Id)^{k_1'}$, נניח בלי הגבלת הכלליות כי $v\in\ker(T-\lambda'\cdot Id)^{k_1'}$, אזי

$$g(T)(v)=(T-\lambda\cdot Id)^l\cdot(T-\lambda'\cdot Id)^{l'}(v)=(T-\lambda\cdot Id)^l\left((T-\lambda'\cdot Id)^{l'}(v)\right)=(T-\lambda\cdot Id)^l(0)=0$$

כלומר $\forall v\in V$ מתקיים $g(T)(v)=0$, לכן $\boxed{g(T)=0}$

מ.ש.ל.ד.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** פולינום מינימלי של $J_k(\lambda)$

הוכחה:

תחילה נשים לב כי $\chi_{J_k(\lambda)}(x)=(x-\lambda)^k$, לכן $\chi_{J_k(\lambda)}(J_k(\lambda))=(J_k(\lambda)-\lambda\cdot I)^k=0$,
מהיות וכל ערך עצמי של המטריצה הוא שורש של הפולינום המינימלי, מתקיים כי הפולינום המינימלי הוא מהצורה $(x-\lambda)^l$, כאשר $l\neq0$ אחרת זה מטריצת האפס ואז הטענה נכונה באופן ברור,
נניח בשלילה שקיים פולינום $(x-\lambda)^l$ כך ש$l<k$ המאפס את המטריצה.
אזי מהיות $J_k(0)\cdot e_j=e_{j+1}$ נקבל כי

$$0\cdot e_1=(J_k(\lambda)-\lambda\cdot I)^l\cdot e_1=J_k^l(0)\cdot e_1=e_l$$

סתירה כי $e_l\neq0$, לכן הפולינום המינימלי הוא מהצורה $(x-\lambda)^l$ כך ש$l\ge k$, וראינו שעבור $l=k$ המטריצה מתאפסת,
ולכן הפולינום המינימלי הוא $\chi_{J_k(\lambda)}(x)=(x-\lambda)^k$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** $g\left(X\right)$ פולינום מינימלי בשאלה הקודמת

הוכחה:

קיים פולינום מינימלי מהצורה $m_T=\left(x-\lambda\right)^l\left(x-\lambda'\right)^{l'}$ (כי כל ערך עצמי מאפס את הפולינום המינימלי) וגם מתקיים $l\le k_1$, $l'\le k_1'$,

נניח בשלילה כי $g\left(X\right)$ לא פולינום מינימלי, לכן $l'<k_1'$ או $l<k_1$ (כי ראינו ש$g\left(T\right)=0$),

נניח בלי הגבלת הכלליות כי $l<k_1$,

לכן מהיות $m_T\left(T\right)=0$, $\gcd\left(\left(x-\lambda\right)^l,\left(x-\lambda'\right)^{l'}\right)=1$, מתקיים

$$\ker\left(T-\lambda\cdot Id\right)^l\oplus\ker\left(T-\lambda' Id\right)^{l'}=V$$

מהשאלה הקודמת אנחנו יודעים כי $\ker\left(T-\lambda\cdot Id\right)^l\subseteq\ker\left(T-\lambda\cdot Id\right)^{k_1}=\operatorname{span}\left\{e_1,\ldots,e_l\right\}$,

וגם $\ker\left(T-\lambda'\cdot Id\right)^{l'}\subseteq\ker\left(T-\lambda'\cdot Id\right)^{k_1'}=\operatorname{span}\left\{e_{l+1},\ldots,e_{l'+l}\right\}$, לכן מהיות

$$\ker\left(T-\lambda\cdot Id\right)^l\oplus\ker\left(T-\lambda'\cdot Id'\right)^{l'}=V$$

נסיק כי $\ker\left(T-\lambda\cdot Id\right)^l=\operatorname{span}\left\{e_1,\ldots,e_l\right\}$, לכן $e_1\in\ker\left(T-\lambda\cdot Id\right)^l$, אבל

$$\left(T_A-\lambda\cdot Id_v\right)^l\cdot e_1=\begin{bmatrix}\left(J_{k_1}\left(\lambda\right)-\lambda\cdot Id\right)^l\cdot e_1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(J_{k_1}\left(0\right)\right)^l\cdot e_1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_l\\0\\0\end{bmatrix}\neq0$$

סתירה כי $e_1\notin\ker\left(T-\lambda\cdot Id\right)^l$, כלומר $g\left(T\right)$ פולינום מינימלי כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

4. **צ"ל:** הפולינום המצוין הוא מינימלי

הוכחה:

ראינו כי A היא המטריצה המלווה של $Z\left(T,v\right)$ כאשר הגודל שלה היא האינדקס המקסימלי כך ש$\left(v,T\left(v\right),\ldots,T^k\left(v\right)\right)$ בת"ל, ונסמן דרגה זאת בn.

תחילה ראנו שהפולינום המצוין הוא הפולינום האופייני ולכן מאפס את המטריצה,

לכן, עתה נניח בשלילה שקיים פולינום מינימלי מדרגה $k<n$, ונסמנו $p\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k-1}a_ix^i+x^k$,

לכן

$$0=p\left(T\right)\left(v\right)=\sum_{i=0}^{k-1}a_iT^i\left(v\right)+T^k\left(v\right)\Rightarrow T^k\left(v\right)=\sum_{i=0}^{k-1}-a_iT^i\left(v\right)$$
$$\Rightarrow T^k\left(v\right)\in\operatorname{span}\left\{v,T\left(v\right),\ldots,T^{k-1}\left(v\right)\right\}$$

כלומר $T^k\left(v\right)$ תלוי לינארית בקודמיו, בסתירה לכך שהנחנו כי $v,T\left(v\right),\ldots,T^{n-1}\left(v\right)$ בת"ל. כלומר הפולינום האופייני הוא אכן הפולינום המינימלי, כנדרש

מ.ש.ל.☺

5. **צ"ל:** לכסין אם"ם מתפרק לגורמים לינאריים שונים

הוכחה:

תחילה נניח כי A לכסין ונוכיח כי הוא מתפרק לגורמים לינאריים שונים, מהיות A לכסין, בצורה המז'ורדנת שלו הוא מהצורה

$$\begin{bmatrix}J_{1_1}\left(\lambda_1\right)&&&&\\&\ddots&&&\\&&J_{1_{k_1}}\left(\lambda_{k_1}\right)&&\\&&&\ddots&\\&&&&J_{1_{k_t}}\left(\lambda_{k_t}\right)\end{bmatrix}$$

ראינו שהפולינום המינימלי של מטריצה עם 2 ערכים עצמיים (משאלה 3ב) היא מהצורה $(x-\lambda_1)^{k_1}\cdot(x-\lambda_1')^{k_1'}$,
ניתן להוכיח באינדוקציה באותו האופן שהפולינום המינימלי עבור r ערכים עצמיים הוא מהצורה $(x-\lambda_1)^{k_1}\cdot\dots\cdot(x-\lambda_r)^{k_r}$,
ולכן במקרה שלנו מתקיים שהפולינום המינימלי הוא $(x-\lambda_1)\cdot\dots\cdot(x-\lambda_r)$ (כי $k_1=\dots=k_r=1$), כלומר הפולינום המינימלי מתפרק לגורמים לינאריים,
עתה נניח שהפולינום המינימלי מתפרק לגורמים לינאריים, לכן מאותו הנימוק שהצגנו בשורות לעיל, החזקה הנילפוטנטית המקסימלית היא 1 של כל בלוק ז'ורדן, אחרת נקבל סתירה לכך שהפולינום הוא מינימלי (שאלה 3 סעיף ב),
ולכן המטריצה המז'ורדנת היא מהצורה

$$\begin{bmatrix} J_{1_1}(\lambda_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{1_{k_1}}(\lambda_{k_1}) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{1_{k_t}}(\lambda_{k_t}) \end{bmatrix}$$

כלומר היא לכסינה, כנדרש

מ.ש.ל.☺

6. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** בסיס מז'רדן
הוכחה:

$$\chi_T(\lambda)=\det(\lambda\cdot I_n-A)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda-2&0&0&0\\0&\lambda&2&-2\\2&-1&\lambda-3&3\\2&-1&-1&\lambda+1\end{bmatrix}\right)=(\lambda-2)\cdot\det\left(\begin{bmatrix}\lambda&2&-2\\-1&\lambda-3&3\\-1&-1&\lambda+1\end{bmatrix}\right)$$
$$\overset{C_2\to C_2+C_3}{=}(\lambda-2)\cdot\det\left(\begin{bmatrix}\lambda&0&-2\\-1&\lambda&3\\-1&\lambda&\lambda+1\end{bmatrix}\right)=\lambda\cdot(\lambda-2)\cdot\det\left(\begin{bmatrix}\lambda&0&-2\\-1&1&3\\-1&1&\lambda+1\end{bmatrix}\right)$$
$$\overset{C_1\to C_2+C_1}{=}\lambda\cdot(\lambda-2)\cdot\det\left(\begin{bmatrix}\lambda&0&-2\\0&1&3\\0&1&\lambda+1\end{bmatrix}\right)=\lambda^2\cdot(\lambda-2)\cdot\det\left(\begin{bmatrix}1&3\\1&\lambda+1\end{bmatrix}\right)$$
$$=\lambda^2\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-2)=\lambda^2\cdot(\lambda-2)^2$$

נשים לב שיש לכל היותר 2 בלוקי ז'ורדן ל$\lambda=0,2$ (משאלה 3 סעיף ב),
נחפש בסיס שרשראות ל$\ker T^2,\ker(T-2Id)^2$,
תחילה נחפש ל$\ker T^2$, נשים לב כי

$$T^2=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&-4&4\\-4&0&4&-4\\-4&0&0&0\end{bmatrix}$$

לכן $\ker T^2=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, בסיס שרשאות לדוגמא הוא

$$e_2\to e_3-e_4\to 0$$

לכן $e_2, e_3 - e_4$ הוא בסיס שרשאות של T^2 (כי 2 וקטורים בת"ל במרחב ממימד 2),
עתה נחפש ל$\ker\left(T-2Id\right)^2$, נשים לב כי

$$\left(T-2Id\right)^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-2&-2&2\\-2&1&1&-3\\-2&1&1&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-2&-2&2\\-2&1&1&-3\\-2&1&1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&4&4&-4\\4&-4&-4&8\\4&-4&-4&8\end{bmatrix}=4\cdot\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&-1\\1&-1&-1&2\\1&-1&-1&2\end{bmatrix}$$

לכן $\ker\left(T-2Id\right)^2=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, בסיס שרשאות לדוגמא הוא

$$-2e_1+e_2+e_4\to 0$$
$$e_2-e_3\to 0$$

לכן $-2e_1+e_2+e_4, e_2-e_3$ הוא בסיס שרשאות של $\left(T-2Id\right)^2$ (כי 2 וקטורים בת"ל במרחב ממימד 2),
לכן מהיות $\ker T^2\cap\ker\left(T-2Id\right)^2=\{0\}$,
נסיק כי $B=\left(-2e_1+e_2+e_4, e_2-e_3, e_2, e_3-e_4\right)$ בת"ל ובסיס במרחב ממימד 4 ומתקיים

$$[T]_B^B=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

כנדרש

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** בסיס מז'ורדן
הוכחה:

$$\chi_T(\lambda)=\det\left(\lambda\cdot I_n-A\right)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda-1&-1&1&0\\-1&\lambda-1&1&-1\\-1&0&\lambda&-2\\0&0&0&\lambda-1\end{bmatrix}\right)=(\lambda-1)\cdot\det\left(\begin{bmatrix}\lambda-1&-1&1\\-1&\lambda-1&1\\-1&0&\lambda\end{bmatrix}\right)$$

$$\overset{C_2\to C_2+C_3}{=}(\lambda-1)\cdot\det\left(\begin{bmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-1&\lambda\\-1&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot\det\left(\begin{bmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$\overset{C_1\to C_1+C_3}{=}\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot\det\left(\begin{bmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}\right)=\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot\det\left(\begin{bmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\lambda\cdot(\lambda-1)^3$$

נשים לב שיש לכל היותר 3 בלוקי ז'ורדן ל$\lambda=1$ (משאלה 3 סעיף ב) ו1 ל$\lambda=0$,
נחפש בסיס שרשראות ל$\ker T, \ker\left(T-Id\right)^3$, תחילה נחפש ל$\ker T$, נשים לב כי

$$e_2+e_3\to 0$$

לכן מהיות יש לכל היותר וקטור אחד נסיק כי e_2+e_3 הוא בסיס שרשראות ל$\ker T$,
עתה נחפש ל$\ker\left(T-Id\right)^3$, נשים לב כי

$$\left(T-Id\right)^3=\begin{bmatrix}0&1&-1&0\\1&0&-1&1\\1&0&-1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}0&1&-1&0\\1&0&-1&1\\1&0&-1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\-1&1&0&-2\\-1&1&0&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&-1&0&1\\1&-1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

לכן $\ker\left(T-Id\right)^{3}=\operatorname{span}\left\{ e_{3},e_{1}+e_{2},e_{1}-e_{4}\right\}$, בסיס שרשאות לדוגמא הוא

$$e_{1}-e_{4}\rightarrow-e_{3}\rightarrow e_{1}+e_{2}+e_{3}\rightarrow0$$

לכן $e_{1}-e_{4},-e_{3},e_{1}+e_{2}+e_{3}$ הוא בסיס שרשאות של $\left(T-Id\right)^{3}$ (כי 3 וקטורים בת"ל במרחב ממימד 3),
לכן מהיות $\ker T\cap\ker\left(T-Id\right)^{3}=\left\{ 0\right\}$,
נסיק כי $B=\left(e_{1}-e_{4},-e_{3},e_{1}+e_{2}+e_{3},e_{2}+e_{3}\right)$ בת"ל ובסיס במרחב ממימד 4 ומתקיים

$$\left[T\right]_{B}^{B}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

כנדרש

מ.ש.ל.ב.☺

7. **צ"ל:** $V_{I}=V_{I}',V_{N}=V_{N}'$
הוכחה:
יהי $v\in V_{N}$, אזי מהיות $V_{I}'\oplus V_{N}'=0$, קיימים $v_{i}\in V_{I}',v_{n}\in V_{N}'$ כך ש$v=v_{i}+v_{n}$,
נשים לב כי $v\in V_{n}$ ולכן $g\left(v\right)=0$ וגם $g\left(v_{n}\right)=0$, לכן

$$0=g\left(v\right)=g\left(v_{i}\right)+g\left(v_{n}\right)=g\left(v_{i}\right)$$

מהיות $g\mid_{V_{I}'}$ הפיך, מתקיים כי $g\left(v_{i}\right)=0\Leftrightarrow v_{i}=0$, לכן $v_{i}=0$, כלומר $v_{n}=v$, כלומר $v=v_{n}\in V_{N}'$,
כלומר הראנו שלכל $v\in V_{n}$ מתקיים כי $v\in V_{N}'$, לכן $V_{n}\subseteq V_{N}'$,
באותו האופן נסיק כי $V_{N}'\subseteq V_{N}'$, כלומר $\boxed{V_{N}'=V_{N}}$, לכן מהיות $V_{I}\oplus V_{N}=V=V_{I}'\oplus V_{N}'$ נסיק כי

$$v\in V_{I}\Leftrightarrow v\notin V_{N}\Leftrightarrow v\notin V_{N}'\Leftrightarrow v\in V_{I}'$$

כלומר קיבלנו כי $v\in V_{I}$ אם"ם $v\in V_{I}'$, כלומר $\boxed{V_{I}=V_{I}'}$

מ.ש.ל.☺