פתרון תרגיל מספר 4 - מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

שם: מיכאל גרינבאום, **ת"ז:** 211747639

6 באפריל 2019

1. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** A **לא בהכרח** מחזק את C

הוכחה:

נבחר $\Omega = \{H, T\}^3$, $A = \{HHT, HHH\}$, $B = \{THH, HHH\}$, $C = \{THH, TTH\}$,

נשים לב כי

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2} > \frac{2}{8} = \mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(C \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2} > \frac{2}{8} = \mathbb{P}(C)$$

ולכן הקבוצות הנ"ל מקיימות את הנדרש אבל $A \cap C = \emptyset$, לכן

$$\mathbb{P}(C \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{0}{\frac{2}{8}} = 0 < \mathbb{P}(C)$$

כלומר הראנו כי A מחזק את B, B מחזק את C ואילו A לא מחזק את C, כלומר הטענה לא נכונה

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** B **בהכרח** מחזק את A

הוכחה:

נתון כי A מחזק את B, לכן

$$\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

לכן

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} > \frac{\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

כלומר B מחזק את A

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** $\mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}\left(B \mid A^C\right) \neq 1$

הוכחה:

לא נכון! נבחר $\Omega = \{H, T\}$, $B = \Omega$, $A = \{H\}$, לכן

$$\mathbb{P}(\Omega \mid A) + \mathbb{P}\left(\Omega \mid A^C\right) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap A)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}\left(\Omega \cap A^C\right)}{\mathbb{P}(A^C)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}\left(A^C\right)}{\mathbb{P}(A^C)} = 1 + 1 \neq 1$$

לכן קיבלנו כי $\boxed{\mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}\left(B \mid A^C\right) \neq 1}$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(B \mid A\right)+\mathbb{P}\left(B^{C} \mid A^{C}\right)\neq 1$

הוכחה:

לא נכון! נבחר $\Omega=\{H,T\}$, $B=\{T\}$, $A=\{H\}$, לכן

$$\mathbb{P}\left(\Omega \mid A\right)+\mathbb{P}\left(\Omega \mid A^{C}\right)=\frac{\mathbb{P}\left(\{H\}\cap\{T\}\right)}{\mathbb{P}\left(A\right)}+\frac{\mathbb{P}\left(\{H\}^{C}\cap\{T\}^{C}\right)}{\mathbb{P}\left(A^{C}\right)}=\frac{\mathbb{P}\left(\emptyset\right)}{\mathbb{P}\left(A\right)}+\frac{\mathbb{P}\left(\emptyset\right)}{\mathbb{P}\left(A^{C}\right)}=0+0\neq 1$$

לכן קיבלנו כי $\boxed{\mathbb{P}\left(B \mid A\right)+\mathbb{P}\left(B \mid A^{C}\right)\neq 0}$

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** A,C **לא בהכרח** ב"ת

הוכחה:

לא נכון! נבחר $\Omega=\{H,T\}^{2}$, $B=\{HH,HT\}$, $A=C=\{HH,TH\}$, לכן

$$\mathbb{P}\left(A\cap B\right)=\mathbb{P}\left(\{HH\}\right)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)$$
$$\mathbb{P}\left(C\cap B\right)=\mathbb{P}\left(\{HH\}\right)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathbb{P}\left(C\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)$$

לכן מאורעות A,B ב"ת וגם B,C ב"ת, וגם נשים לב כי

$$\mathbb{P}\left(A\cap C\right)=\mathbb{P}\left(\{HH,TH\}\right)=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\mathbb{P}\left(C\right)$$

לכן קיבלנו כי A,C לא בהכרח ב"ת

מ.ש.ל.ה.☺

(ו) **צ"ל:** A,B,C **לא בהכרח** ב"ת לפי ההגדרה שהוצגה

הוכחה:

לא נכון! נבחר $\Omega=\{H,T\}^{2}$, $B=\{HH,HT\}$, $A=\{HH,TH\}$, $C=\{HT,TH\}$ לכן

$$\mathbb{P}\left(A\cap B\right)=\mathbb{P}\left(\{HH\}\right)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)$$
$$\mathbb{P}\left(C\cap B\right)=\mathbb{P}\left(\{HT\}\right)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathbb{P}\left(C\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)$$
$$\mathbb{P}\left(A\cap C\right)=\mathbb{P}\left(\{TH\}\right)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\mathbb{P}\left(C\right)$$

לכן מאורעות A,B ב"ת, B,C ב"ת, וגם A,C ב"ת וגם נשים לב כי

$$\mathbb{P}\left(A\cap B\cap C\right)=\mathbb{P}\left(\emptyset\right)=0\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)\cdot\mathbb{P}\left(C\right)$$

לכן קיבלנו כי A,B,C לא בהכרח ב"ת לפי ההגדרה שהוצגה

מ.ש.ל.ו.☺

(ז) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(A\cap\left(C\cap B^{C}\right)\right)=\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\left(\mathbb{P}\left(C\cap B^{C}\right)\right)$

הוכחה:

נכון!

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\left(\mathbb{P}\left(C\cap B^{C}\right)\right)&=\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\left[\mathbb{P}\left(C\right)-\mathbb{P}\left(B\cap C\right)\right]=\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\left[\mathbb{P}\left(C\right)-\mathbb{P}\left(B\right)\cdot\mathbb{P}\left(C\right)\right]\\&=\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\mathbb{P}\left(C\right)-\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)\cdot\mathbb{P}\left(C\right)=\mathbb{P}\left(A\cap C\right)-\mathbb{P}\left(A\cap B\cap C\right)\\&=\mathbb{P}\left(\left(A\cap C\right)\cap B^{C}\right)=\mathbb{P}\left(A\cap\left(C\cap B^{C}\right)\right)\end{aligned}$$

כלומר $\boxed{\mathbb{P}\left(A\cap\left(C\cap B^{C}\right)\right)=\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\left(\mathbb{P}\left(C\cap B^{C}\right)\right)}$

מ.ש.ל.ז.☺

(ח) **צ"ל:** $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right)$

הוכחה:

נכון!

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^{C}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right)$$

כלומר $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right)}$

מ.ש.ל.ח.☺

2. **צ"ל:** מה ההסתברות שקודם הוצאנו n_1 שחורים ולאחר מכן n_2 לבנים?

הוכחה:

נגדיר A_i = כדור i יצא שחור, וB_i = כדור i יצא לבן נרצה לחשב (נוסחת כפל ההסתבריות)

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n_1} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} B_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(B_n \mid \left(\bigcap_{i=1}^{n_1} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=n_1+1}^{n_2-1} B_i\right)\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(B_{n_1+1} \mid \bigcap_{i=1}^{n_1} A_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(A_1\right)$$

נשים לב כי עבור $1 \leq j \leq n_1$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(A_j \mid \bigcap_{i=1}^{j-1} A_i\right) = \frac{b + c \cdot (j-1)}{b + r + c \cdot (j-1)}$$

כי יש $b + r + c \cdot (j-1)$ כדורים וr מהם לבנים,

וגם $n_1 + 1 \leq j \leq n_1 + n_2$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(B_j \mid \left(\bigcap_{i=1}^{n_1} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=n_1+1}^{j-1} B_i\right)\right) = \frac{r + c \cdot (j - n_1 - 1)}{b + r + c \cdot (j-1)}$$

כי יש $b + r + c \cdot (j-1)$ כדורים (בכל בחירה נוספים c כדורים) ו$r + (j - n_1 - 1) \cdot c$ מהם אדומים,

נציב ונקבל

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n_1} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} B_i\right)\right) = \prod_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{r + c \cdot (j - n_1 - 1)}{b + r + c \cdot (j-1)} \cdot \prod_{j=1}^{n_1} \frac{b + c \cdot (j-1)}{b + r + c \cdot (j-1)}}$$

מ.ש.ל.☺

3. **פתרון:**

(א) **צ"ל:** מה ההסתברות שגם הגרב השני במגירה הוא לבן?

הוכחה:

נגדיר A = גרב שנבחר הוא לבן

נגדיר B_i = המגירה i נבחרה

נגדיר C = גרב שנשאר במגירה הוא לבן,
לכן מנוסחת ההסתברות השלמה נקבל כי

$$\mathbb{P}\left(A\right)=\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}\left(A\mid B_i\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)=\frac{1}{3}\cdot\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}\left(A\mid B_i\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(0+1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}\left(A\cap C\right)=\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}\left(A\cap C\mid B_i\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)=\frac{1}{3}\cdot\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}\left(A\cap C\mid B_i\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(0+0+1\right)=\frac{1}{3}$$

לכן

$$\boxed{\mathbb{P}\left(C\mid A\right)=\frac{\mathbb{P}\left(A\cap C\right)}{\mathbb{P}\left(A\right)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}}$$

מ.ש.ל.א.☺

(ב) **צ"ל:** מה ההסתברות לבחור n כדורים לבנים ואז 1 שחור?
הוכחה:
בבעיה שלנו נתון כי יש $2k$ כדורים ומהם k שחורים וk לבנים, נתון כי הוצאנו n לבנים.
כלומר נשארו $2k-n$ כדורים ומתוכם k שחורים ועתה נרצה להוציא כדור שחור אחד,
מהיות וזהו מרחב הסתברות אחיד מתקיים כי

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\text{black}\right)=\frac{\left|\text{black}\right|}{\left|\Omega\right|}=\frac{k}{2k-n}}$$

מ.ש.ל.ב.☺

(ג) **צ"ל:** מה ההסתברות שהצד השני שלו שחור?
הוכחה:
נגדיר A = חלקו עליון של הקלף הנבחר הוא אדום
נגדיר B_i = הקלף הi נבחר
נגדיר C = חלקו תחתון של הקלף הנבחר הוא שחור,
לכן מנוסחת ההסתברות השלמה נקבל כי

$$\mathbb{P}\left(A\right)=\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}\left(A\mid B_i\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)=\frac{1}{3}\cdot\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}\left(A\mid B_i\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(0+1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}\left(A\cap C\right)=\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}\left(A\cap C\mid B_i\right)\cdot\mathbb{P}\left(B\right)=\frac{1}{3}\cdot\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}\left(A\cap C\mid B_i\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(0+0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$$

לכן

$$\boxed{\mathbb{P}\left(C\mid A\right)=\frac{\mathbb{P}\left(A\cap C\right)}{\mathbb{P}\left(A\right)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}}$$

מ.ש.ל.ג.☺

(ד) **צ"ל:** מה ההסתברות שלפחות אחד עשיר או מפורסם?
הוכחה:
נגדיר בA_i אדם עשיר או מפורסם, מנוסחת ההכלה וההדחה מתקיים

$$\mathbb{P}\left(A_i\right)=0.1+0.05-0.02=0.13$$

עתה נרצה לחשב מה ההסתברות שלפחות אחד מ10 אנשים הוא עשיר או מפורסם, נשים לב שהמארעות הם ב"ת ולכן

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{10} A_i\right) \overset{\star}{=} 1-\prod_{i=1}^{10} \mathbb{P}\left(A_i^C\right) = 1-\prod_{i=1}^{10} \left(1-\mathbb{P}\left(A\right)\right) = 1-\prod_{i=1}^{10} \left(1-0.13\right) = 1-\left(1-0.13\right)^{10} \approx 0.7515765858085643$$

לכן ההסתברות לפגוש לפחות אדם עשיר או מפורסם מתוך 10 הוא $\boxed{0.7515765858085643}$,
עתה נרצה לחשב מתי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) > 0.9$,
נשים לב כי

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1-\prod_{i=1}^{n} \left(1-0.13\right) = 1-\left(1-0.13\right)^{n} > 0.9$$

התנאי מתקיים עבור $\boxed{n \geq 17}$
הערה: נשים לב כי $\star$ מתקיים מסעיף ח' שאלה 1

מ.ש.ל.ד.☺

(ה) **צ"ל:** מה ההסתברות שלבית החולים יש חשמל?
הוכחה:
נגדיר A_i = הגנרטור הi עובד, לכן מהיות המאורעות ב"ת מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \overset{\star}{=} 1-\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i^C\right) = 1-\prod_{i=1}^{n} \left(1-\mathbb{P}\left(A_i\right)\right) = \boxed{1-\prod_{i=1}^{n} \left(1-p_i\right)}$$

הערה: נשים לב כי $\star$ מתקיים מסעיף ח' שאלה 1

מ.ש.ל.ה.☺