אלגברה לינארית (2) תשע"ט 2018-2019 - סמסטר ב' - תרגיל 2

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז.** יש לציין **כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 27.3.19 בשעה 21:00.

1. אופרטור לינארי $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ מוגדר ע"י $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \end{bmatrix}$.

   (א) האם תת-המרחב U הוא T-אינווריאנטי כאשר

   (i) $U = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$? (ii) $U = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$? (iii) $U = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$?

   (ב) אלו תת-מרחבים מהסעיף הקודם הם T-ציקליים?

2. אופרטור לינארי $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ מוגדר ע"י $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z \\ x \\ -y \end{bmatrix}$.

   יהי $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ו- $\vec{0} \neq \vec{v}$ $U = Z(f, \vec{v})$ תת-המרחב ה-f-ציקלי הנוצר ע"י $\vec{v}$.

   נסמן ב- $f_U\colon U \to U$ את הצמצום של f ל- U . מצאו בסיס B של U כך ש- $[f_U]_B^B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \alpha_{k-1} \end{bmatrix}$,

   כאשר (א) $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ב) $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, ויהיו U, W תת-מרחבים שלו כך ש- $U \oplus W = V$.

   נסמן $f = R_{U,W}\colon V \to V$ אופרטור השיקוף סביב U במקביל ל-W כמו שהוגדר בשאלה 7 של תרגיל 1.

   (א) יהי Y תת-מרחב f-אינווריאנטי של V ממימד 1. הוכיחו כי Y מוכל ב- U או Y מוכל ב- W.

   (ב) יהי Z תת-מרחב f-ציקלי של V. הוכיחו כי $\dim Z \leqslant 2$.

4. יהי V מרחב וקטורי, יהי $T\colon V \to V$ אופרטור לינארי. יהיו U, W תת-מרחבים T-אינווריאנטיים של V כך ש- $U \oplus W = V$.

   נניח Y תת-מרחב T-אינווריאנטי של V ממימד 1. האם בהכרח Y מוכל ב- U או Y מוכל ב- W ?

5. יהי V מרחב וקטורי, ויהי $f\colon V \to V$ אופרטור לינארי. האם תת-מרחב Y של V בהכרח f-אינווריאנטי כאשר נתון כי

   (א) $\operatorname{Im} f$ מוכל ב- Y?

   (ב) $\ker f$ מוכל ב- Y?

   (ג) Y מוכל ב- $\operatorname{Im} f$?

   (ד) Y מוכל ב- $\ker f$?

6. יהי V מרחב וקטורי ו- $f\colon V \to V$ אופרטור לינארי. הוכיחו או הפריכו:

   (א) אם $\vec{u}, \vec{w} \in V$ מקיימים $f(\vec{u}) \in \operatorname{Span}\{\vec{w}\}$ וגם $f(\vec{w}) \in \operatorname{Span}\{\vec{u}\}$, אזי $\operatorname{Span}\{\vec{u}, \vec{w}\}$ הוא f-אינווריאנטי.

   (ב) אם U, W תת-מרחבים f-אינווריאנטיים של V , אזי תת-המרחב $U + W$ בהכרח f-אינווריאנטי.

   (ג) אם U, W תת-מרחבים f-ציקליים של V , אזי תת-המרחב $U + W$ בהכרח f-ציקלי.

7. יהי V מרחב וקטורי, יהי $f\colon V \to V$ אופרטור לינארי, ויהי U תת-מרחב f-אינווריאנטי של V . האם בהכרח קיים תת-מרחב f-אינווריאנטי W של V כך ש- $V = U \oplus W$?

8. מצאו דוגמה למרחב וקטורי V ולאופרטור לינארי $T\colon V \to V$ כך שקיים $\vec{v} \in V$ עבורו תת-המרחב ה-T-ציקלי $Z(T, \vec{v})$ הנוצר ע"י $\vec{v}$ **איננו** נוצר סופית.