

# Logica

III parte

# Logica modale e logica intensionale

Una logica modale contiene dei connettivi come possibile e vincolato.

(possibile  $p$ ) è vero se  $p$  è possibile.

Esempio:

(possibile “*I sudisti vinsero la guerra civile*”)  
può essere considerato vero.

(Attenzione: l'accezione con cui è qui assunto possibile è quella che le cose avrebbero potuto andare in un modo diverso da come in realtà sono andate, e non nel senso che “crediamo una cosa contraria a quella creduta dalla maggioranza delle persone”).

(vincolato  $p$   $q$ ) significa che la verità di  $p$  comporta inevitabilmente la verità di  $q$ .

Esempio:

(vincolato “*vittoria di Nixon alle presidenziali del ‘60*”, “*Kennedy assassinato nel ‘63*”)

cioè si pensa che la vittoria di Nixon alle elezioni presidenziali del ‘60 comporti il fatto che Kennedy non sia stato assassinato nel ‘63.

La logica classica non è compatibile con siffatti connettivi:

non distingue tra un'affermazione falsa, ma possibilmente vera, da una necessariamente falsa ( $2 + 2 = 5$ );

non permette di trattare la situazione in cui un'affermazione falsa potrebbe, se vera, vincolarne un'altra ad essere vera a sua volta. Infatti l'espressione (if  $p$   $q$ ) è vera se  $p$  è falsa: se fosse stata utilizzata per l'affermazione su Nixon e Kennedy, avrebbe fornito un valore vero privo però di significato.

Nel 1959 Kripke fornì la prima analisi semantica accettabile di una logica modale, introducendo la nozione di *mondo possibile* (un mondo possibile è un mondo in cui le cose avrebbero potuto manifestarsi; il mondo reale è uno dei mondi possibili).

(possibile  $p$ ) è vera se  $p$  è vera in un mondo possibile.

Oggi è diffusa la convinzione che una *logica modale* possa essere coerente al punto di ammettere una semantica formale.

Nel 1964 Jaakko Hintikka propose di analizzare modalmente (conosce  $a$   $p$ ), ovvero “ $a$  conosce che  $p$ ”.

La semantica viene fornita attraverso un insieme di mondi possibili, fra i quali si distinguono quelli compatibili con ciò che  $a$  conosce.

Il significato di (conosce  $a$   $p$ ) è proprio che  $p$  è vero in tutti i mondi compatibili con ciò che  $a$  conosce.

Si dimostra che la struttura semantica che ne risulta può essere utilizzata per produrre una procedura di dimostrazione, analoga alla risoluzione, in grado di modellare il ragionamento su ciò che uno conosce.

In questo filone si inserisce l'analisi dei *condizionali controfattuali*, della forma “Se  $p$  fosse vero,  $q$  sarebbe vero”.

Analizzare questi condizionali nel senso che “In tutti i possibili mondi dove  $p$  fosse vero, anche  $q$  sarebbe vero” è troppo vincolante (non permette di modellare il senso comune).



Esempio: “Se la terra fosse stata più distante dal sole, la vita non si sarebbe mai evoluta” può non essere vera, se si immagina che, in caso di maggiore distanza, il sole avrebbe potuto sviluppare maggior calore.

Per conservare l’analisi basata sui mondi possibili, è necessario associare alla frase il significato di “In un qualsiasi mondo possibile in cui la terra risulta essere più lontana del sole, e *il resto è cambiato il meno possibile rispetto al modo con cui le cose sono possibili*, la vita non si sarebbe mai evoluta sulla terra”.

Nella logica standard per descrivere il significato di espressioni nel calcolo dei predicati si specifica ciò che esse *denotano*.

L'oggetto denotato da un termine è la sua *estensione*.

Il “significato”, o *intensione*, di un termine (nel senso più generale e quindi meno formale) diventa formalizzabile nella semantica dei mondi possibili:

l'intensione di un termine è una funzione che specifica la sua estensione in ogni mondo possibile.

Esempio: esistono mondi possibili in cui unicorni e sedie volanti “esistono”. In questi mondi le estensioni di “unicorno” e “sedia volante” sono quindi non vuote e disgiunte.

Pertanto la funzione da ogni mondo possibile all'estensione di “unicorno” in quel mondo è un oggetto completamente diverso dall'analogia funzione per “sedia volante”, il che rende i due concetti differenti in intensione, correttamente.

Utilizzando la semantica modale si possono approssimare molti concetti, ma non in modo del tutto soddisfacente.

Ad esempio, è una inevitabile e dimostrabile conseguenza della logica di conosce che, se  $a$  conosce un insieme di affermazioni,  $a$  conosce ogni conseguenza di questo insieme.

Questo significa che se uno è convinto della verità dei postulati di Peano, uno conosce tutto ciò che da essi può essere concluso (compreso l'ultimo teorema di Fermat, se esso consegue da tali postulati!). Nella realtà non è proprio così.

# La logica di ordine superiore

La logica del primo ordine ha come referente i predicati, proprietà asserite circa il mondo.

Se si estende la logica permettendo asserzioni sui predicati, si ha una logica di ordine superiore.

In questa logica si possono operare  
quantificazioni sui predicati stessi :  
ad esempio, si può definire l'uguaglianza  
asserendo “Due oggetti sono diversi se e solo  
se (iff) differiscono per almeno una proprietà”,  
ovvero

$$(\text{perogni } (xy) (\text{iff } (=xy) \\ (\text{perogni } (p) (\text{iff } (px) (py) ) ) ) )$$



Le logiche di ordine superiori, se estese in modo imprudente, presentano gravi problemi, portando facilmente a paradossi.

Si consideri quello famoso di B. Russell :

la proprietà che una qualsiasi proprietà ha se non descrive se stessa è

$$PP = (\lambda (x) (\text{not } (xx) ) )$$

PP è una proprietà di proprietà, per cui può essere applicata a se stessa : ma (PP PP) è vera se e solo se essa è falsa (paradosso).

Gli studiosi di logica sono pervenuti alla conclusione che le nozioni di *estensione* ed *intensione* di una proprietà (corrispondenti rispettivamente ad *insiemi* e *formule logiche*) devono essere separate e generare due tipi di teorie, una sugli insiemi, considerati come collezioni di oggetti, ed una sui predicati-come-oggetti (rispettivamente *teoria assiomatica degli insiemi* e *logica di ordine superiore*).

## Appendice: *intensione* ed *estensione*.

“Il padre di Chelsea Clinton” e “il presidente degli Stati Uniti nel 1997” indicano la stessa persona (stessa *estensione*) ma si riferiscono a questa entità comune in modo diverso (diversa *intensione*).

“Triangolo equilatero” e “triangolo equiangolo” hanno la stessa, diversa intensione.

## Appendice: *intensione* ed *estensione*.

“Il padre di Chelsea Clinton” e “il presidente degli Stati Uniti nel 1997” indicano la stessa persona (stessa *estensione*) ma si riferiscono a questa entità comune in modo diverso (diversa *intensione*).

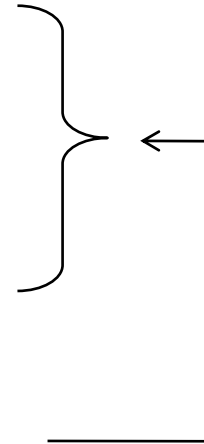
“Triangolo equilatero” e “triangolo equiangolo” hanno la stessa, diversa intensione.

*Intensione* vuol dire “significato”. D. C. Dennet, “La mente e le Menti”, Sansone.

Altro esempio della differenza tra estensione e  
intensione:

gamba → parte del corpo

gamba → parte di un tavolo



2 denotazioni  
(ovvero estensioni)

gamba → parte estrema che serve a sorreggere  
intensione (= significato generale)