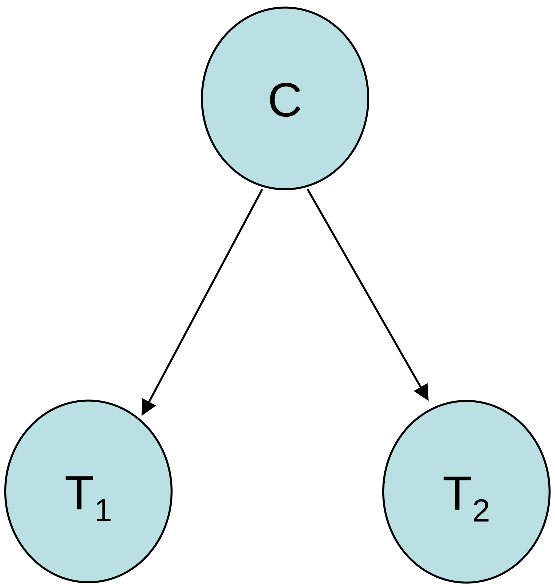
Reti di credenze

Esercizi

2-Test Cancer example

Sebastian Thrun – Peter Norvig Intro to AI



$P(C) = 0.01$	$P(\neg C) = 0.99$
$P(+\|C) = 0.9$	$P(-\|C) = 0.1$
$P(-\|\neg C) = 0.8$	$P(+\|\neg C) = 0.2$

Calcolare $P(C|T_1{=}+, T_2{=}+) = P(C|{+}{+})$

Calcolare $P(C|T_1=+, T_2=+) = P(C|++)$

$$P(C \mid T_1 = +, T_2 = +) =$$

$$= \frac{P(C, T_1, T_2)}{P(T_{1,}, T_2)} = \frac{P(C) \cdot P(T_1 \mid C) \cdot P(T_2 \mid C)}{P(C, T_1, T_2) + P(\neg C, T_1, T_2)} =$$

$$= \frac{P(C) \cdot P(T_1 \mid C) \cdot P(T_2 \mid C)}{P(C) \cdot P(T_1 \mid C) \cdot P(T_2 \mid C) + P(\neg C) \cdot P(T_1 \mid \neg C) \cdot P(T_2 \mid \neg C)} =$$

$$= \frac{0.01 \cdot 0.9 \cdot 0.9}{0.01 \cdot 0.9 \cdot 0.9 + 0.99 \cdot 0.2 \cdot 0.2} = \frac{0.0081}{0.0081 + 0.0396} =$$

$$= \frac{0.0081}{0.0477} = 0.1698$$

Metodo alternativo: si applica la regola di Bayes per le prove multiple

$\mathbf{P}(Z|X,Y) = \alpha\ \mathbf{P}(Z)\ \mathbf{P}(X|Z)\ \mathbf{P}(Y|Z)$

dove α è una costante di normalizzazione tale che i valori in $\mathbf{P}(Z|X,Y)$ sommati diano 1.

non normalizzata

	prior	+	+	P’	P(C|++)
C	0.01	0.9	0.9	0.0081	0.0081/ 0.0477
¬C	0.99	0.2	0.2	0.0396	

normalizzazione

0.0477

fattore di normalizzazione

2-Test Cancer example caso 2

Con i dati precedenti, calcolare

$P(C|T_1=+,T_2=-) = P(C|+-)$

non normalizzata

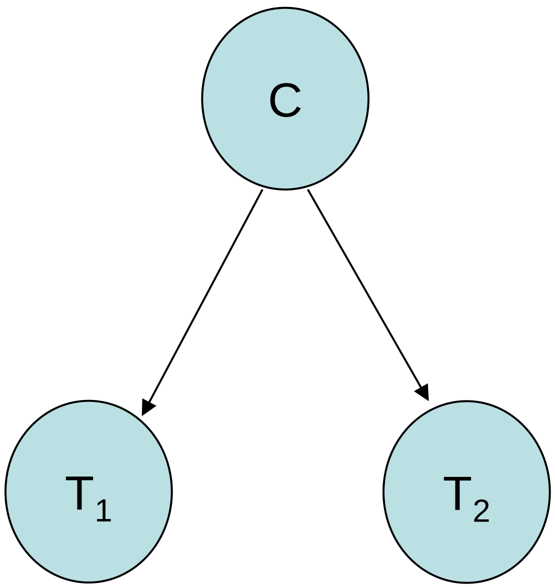
	prior	+	-	P’	P(C|++)
C	0.01	0.9	0.1	0.0009	0.0009/ 0.1593= 0.0056
¬C	0.99	0.2	0.8	0.1584	

normalizzazione

0.1593

fattore di normalizzazione

2-Test Cancer example caso 3



P(C) = 0.01 P(¬C) = 0.99

P(+|C) = 0.9 P(-|C) = 0.1

P(-|¬C) = 0.8 P(+|¬C) = 0.2

Calcolare P(T2=+)|T_1=+)

I metodo:

Sapere che T1=+ modifica le probabilità di C:

$$P(C') = P(C \mid T_1) = \frac{P(T_1 \mid C) \cdot P(C)}{P(T_1)} =$$

$$= \frac{P(T_1 \mid C) \cdot P(C)}{P(T_1 \mid C) \cdot P(C) + P(T_1 \mid \neg C) \cdot P(\neg C)} =$$

$$= \frac{0.01 \cdot 0.9}{0.01 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.99} = \frac{0.009}{0.009 + 0.198} =$$

$$= \frac{0.009}{0.207} = 0.0434$$

$$P(\neg C') = P(\neg C \mid T_1) = 1 - P(C') = 0.956$$

Quindi:

$P(T_2\!=\!+) = P(T_2|C')\cdot P(C') + P(T_2|\neg C')\cdot P(\neg C) =$

$= 0.9 \cdot 0.0434 + 0.2 \cdot 0.956 = 0.2302$

Giustificazione formale:

$$P(T_2 \mid T_1) = \frac{P(T_2, T_1)}{P(T_1)} =$$

$$= \frac{P(T_2, T_1, C) + P(T_2, T_1, \neg C)}{P(T_1)} =$$

$$= \frac{P(C) \cdot P(T_2 \mid C) \cdot P(T_1 \mid C) + P(\neg C) \cdot P(T_2 \mid \neg C) \cdot P(T_1 \mid \neg C)}{P(T_1)}$$

ora

$$P(T_1) = P(T_2, T_1, C) + P(T_2, T_1, \neg C) +$$

$$+ P(\neg T_2, T_1, C) + P(\neg T_2, T_1, \neg C) =$$

$$= P(C) \cdot P(T_2 | C) \cdot P(T_1 | C) + P(\neg C) \cdot P(T_2 | \neg C) \cdot P(T_1 | \neg C) +$$

$$+ P(C) \cdot P(\neg T_2 | C) \cdot P(T_1 | C) + P(\neg C) \cdot P(\neg T_2 | \neg C) \cdot P(T_1 | \neg C) =$$

$$= P(C) \cdot P(T_1 | C) \cdot [P(T_2 | C) + P(\neg T_2 | C)] +$$

$$+ P(\neg C) \cdot P(T_1 | \neg C) \cdot [P(T_2 | \neg C) + P(\neg T_2 | \neg C)] =$$

$$= P(C) \cdot P(T_1 | C) + P(\neg C) \cdot P(T_1 | \neg C)$$

quindi

$$P(T_2 \mid T_1) =$$

$$= \frac{P(C)\cdot P(T_2 \mid C)\cdot P(T_1 \mid C) + P(\neg C)\cdot P(T_2 \mid \neg C)\cdot P(T_1 \mid \neg C)}{P(C)\cdot P(T_1 \mid C) + P(\neg C)\cdot P(T_1 \mid \neg C)} =$$

$$= \frac{P(C)\cdot P(T_2 \mid C)\cdot P(T_1 \mid C)}{P(C)\cdot P(T_1 \mid C) + P(\neg C)\cdot P(T_1 \mid \neg C)} +$$

$$+ \frac{P(\neg C)\cdot P(T_2 \mid \neg C)\cdot P(T_1 \mid \neg C)}{P(C)\cdot P(T_1 \mid C) + P(\neg C)\cdot P(T_1 \mid \neg C)} =$$

$$\frac{P(C)\cdot P(T_1 \mid C)}{P(C)\cdot P(T_1 \mid C) + P(\neg C)\cdot P(T_1 \mid \neg C)}\cdot P(T_2 \mid C) +$$

$$+ \frac{P(\neg C)\cdot P(T_1 \mid \neg C)}{P(C)\cdot P(T_1 \mid C) + P(\neg C)\cdot P(T_1 \mid \neg C)}\cdot P(T_2 \mid \neg C) =$$

$$Interpretazione:$$

$$\frac{P(C)\cdot P(T_1|C)}{P(C)\cdot P(T_1|C)+P(\neg C)\cdot P(T_1|\neg C)}=P(T_1|C)=P(C')$$

$$+\frac{P(\neg C)\cdot P(T_1|\neg C)}{P(C)\cdot P(T_1|C)+P(\neg C)\cdot P(T_1|\neg C)}=P(T_1|\neg C)=P(\neg C')$$

Il metodo intuitivo è quindi corretto.

II metodo (S. Thrun)

Si applica la probabilità totale:

$P(T_2|T_1) =$
$P(T_2|T_1,C)\cdot P(C|T_1)+P(T_2|T_1,\neg C)\cdot P(\neg C|T_1)$

Per l'indipendenza condizionale, vale:

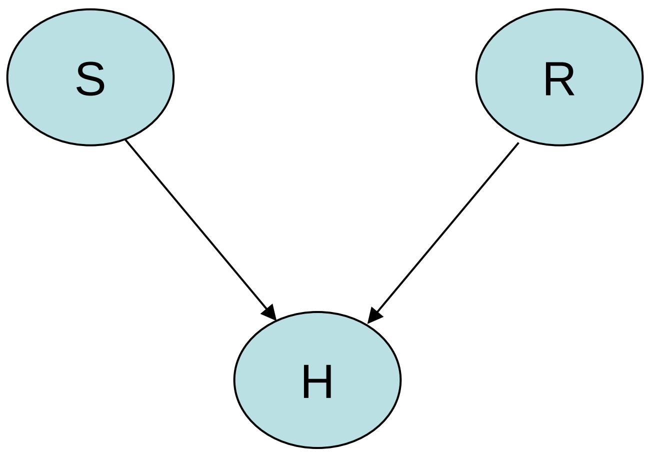
$P(T_2|T_1,C)= P(T_2|C)$

$P(T_2|T_1,\neg C)= P(T_2|\neg C)$

e i valori di $P(C|T_1)$ e $P(\neg C|T_1)$ si calcolano come visto sopra.

Happiness example

Sono felice (happy) se è soleggiato (sunny) e ricevo un aumento (raise).



Dati della rete:

$P(S) = 0.7$

$P(R) = 0.01$

$P(R/S) = P(R) = 0.01$ sono indipendenti

$P(H|S,R) = 1$

$P(H|\neg S,R) = 0.9$

$P(H|S, \neg R) = 0.7$

$P(H| \neg S, \neg R) = 0.1$

Se mia moglie mi vede felice e vede che è soleggiato, è portata a credere di meno al fatto che abbia ricevuto un aumento. È un comportamento supportato dalla rete?

In pratica, si chiede di calcolare $P(R|H,S)$ e di confrontarlo con $P(R)$.

$$P(R \mid H,S) = \frac{P(R,H,S)}{P(H,S)} =$$

$$= \frac{P(R,H,S)}{P(R,H,S) + P(\neg R,H,S)} =$$

$$= \frac{P(H \mid R,S) \cdot P(R) \cdot P(S)}{P(H \mid R,S) \cdot P(R) \cdot P(S) + P(H \mid \neg R,S) \cdot P(\neg R) \cdot P(S)} =$$

$$= \frac{P(H \mid R,S) \cdot P(R)}{P(H \mid R,S) \cdot P(R) + P(H \mid \neg R,S) \cdot P(\neg R)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 0.01}{1 \cdot 0.01 + 0.7 \cdot 0.99} =$$

$$= \frac{0.01}{0.01 + 0,693} = \frac{0.01}{0.703} = 0.0142$$

Per la rete la confidenza aumenta, anche se di poco: risultato controintuitivo.

Altra soluzione (S. Thrun), assumendo prima S come contesto condizionante e poi ricorrendo alla probabilità totale:

$$P(R \mid H, S) = \frac{P(H \mid R, S) \cdot P(R \mid S)}{P(H \mid S)} =$$

$$= \frac{P(H \mid R, S) \cdot P(R)}{P(H \mid R, S) \cdot P(R) + P(H \mid \neg R, S) \cdot P(\neg R)}$$

Happiness example 2

Con gli stessi dati, calcolare P(R|H).

$$P(R \mid H) = \frac{P(H \mid R) \cdot P(R)}{P(H)}$$

$$P(H \mid R) = P(H \mid R, S) \cdot P(S) + P(H \mid R, \neg S) \cdot P(\neg S) =$$

$$= 1 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.3 = 0.7 + 0.27 = 0.97$$

$$P(H) = P(H,R,S) + P(H,R,\neg S) + P(H,\neg R,S) + P(H,\neg R,\neg S) =$$

$$= P(H \mid R,S) \cdot P(R) \cdot P(S) +$$

$$+ P(H \mid R,\neg S) \cdot P(R) \cdot P(\neg S) +$$

$$+ P(H \mid \neg R,S) \cdot P(\neg R) \cdot P(S) +$$

$$+ P(H \mid \neg R,\neg S) \cdot P(\neg R) \cdot P(\neg S) =$$

$$= 1 \cdot 0.01 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.01 \cdot 0.3 +$$

$$+ 0.7 \cdot 0.99 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.99 \cdot 0.3 =$$

$$= 0.007 + 0.0027 + 0.4851 + 0.0297 = 0.5245$$

$$P(R \mid H) = \frac{0.97 \cdot 0.01}{0.5245} = 0.0185$$

Infine calcolare P(R|H,¬S).

$$P(R \mid H, \neg S) = \frac{P(H \mid R, \neg S) \cdot P(R \mid \neg S)}{P(H \mid \neg S)}$$

$$P(R \mid \neg S) = P(R)$$

$$P(H \mid \neg S) = \frac{P(H, \neg S)}{P(\neg S)} = \frac{P(H, R, \neg S) + P(H, \neg R, \neg S)}{P(\neg S)} =$$

$$= P(H \mid R, \neg S) \cdot P(R) + P(H \mid \neg R, \neg S) \cdot P(\neg R) =$$

$$= 0.9 \cdot 0.01 + 0.1 \cdot 0.99 = 0.108$$

quindi

$$P(R \mid H, \neg S) = \frac{P(H \mid R, \neg S) \cdot P(R \mid \neg S)}{P(H \mid \neg S)} =$$

$$= \frac{0.9 \cdot 0.01}{0.108} = \frac{0.009}{0.108} = 0.0833$$

Considerazioni finali

Notare:

$P(R) = 0.01$

$P(R|H,S) = 0.0142$ crescente, come intuitivo.

$P(R|H) = 0.0185$

$P(R|H,\neg S) = 0.0833$

Inoltre $R \perp S$, ma conoscere H li rende in qualche modo “dipendenti”:

$P(R|H,S) \neq P(R|H)$

Considerazioni finali (2)

In pratica,

l'indipendenza condizionale non implica l'ortogonalità

$A \perp B | C \rightarrow A \perp B$ Falso (si sapeva già)

e

l'ortogonalità non implica l'indipendenza condizionale

$A \perp B \rightarrow A \perp B | C$ Falso