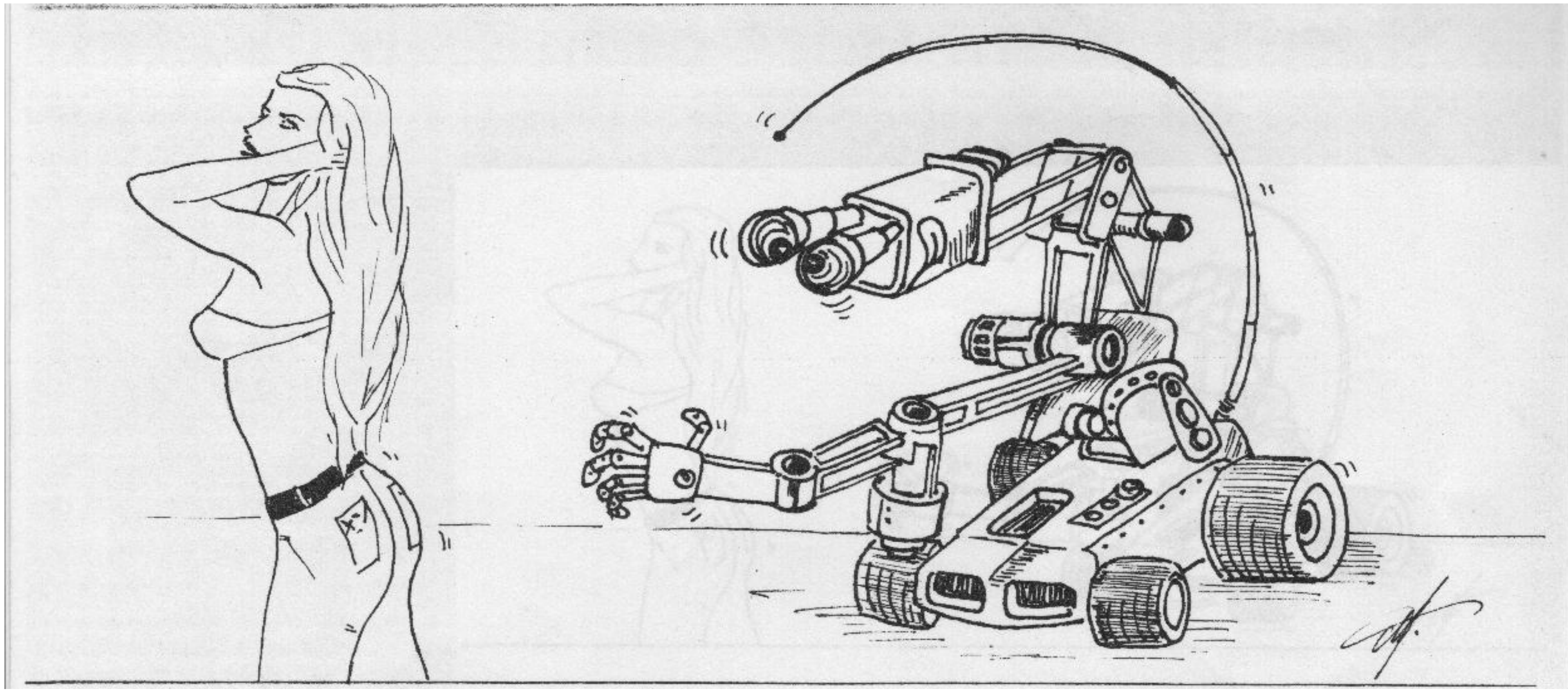
# PATTERN RECOGNITION
# (I PARTE)

# Riconoscimento di Forme



# CONCETTI DI BASE

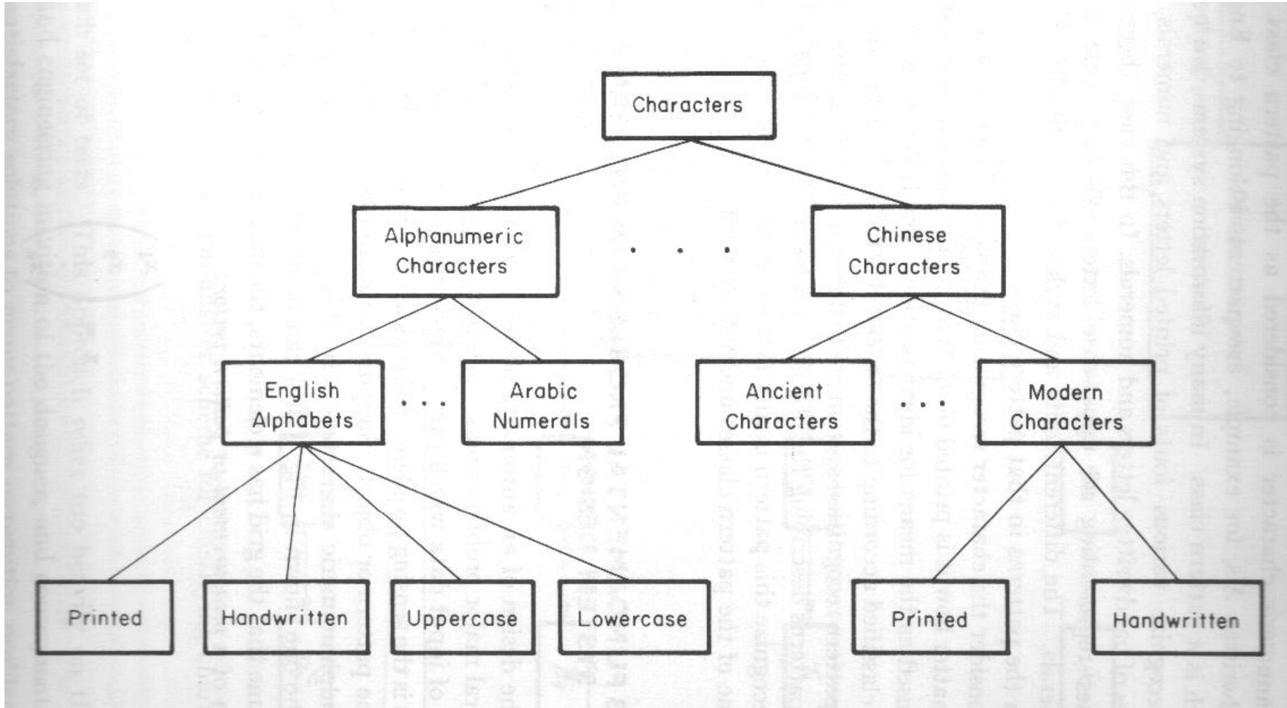
Col termine di *pattern* si intende genericamente una descrizione di un oggetto.

Le descrizioni possono provenire da fenomeni fisici catturati mediante sensori, oppure essere frutto di processi di astrazione. Qui interessano quelli del primo tipo (figure, suoni, ecc.).

# Applicazioni tipiche:

| **Task of Classification** | **Input Data** | **Output Response** |
|---|---|---|
| Character recognition | Optical signals or strokes | Name of character |
| Speech recognition | Acoustic waveforms | Name of word |
| Speaker recognition | Voice | Name of speaker |
| Water prediction | Water maps | Water forecast |
| Medical diagnosis | Symptoms | Disease |
| Stock market prediction | Financial news and charts | Predicted market ups and downs |

Una classe di pattern è una categoria determinata da alcuni attributi comuni.

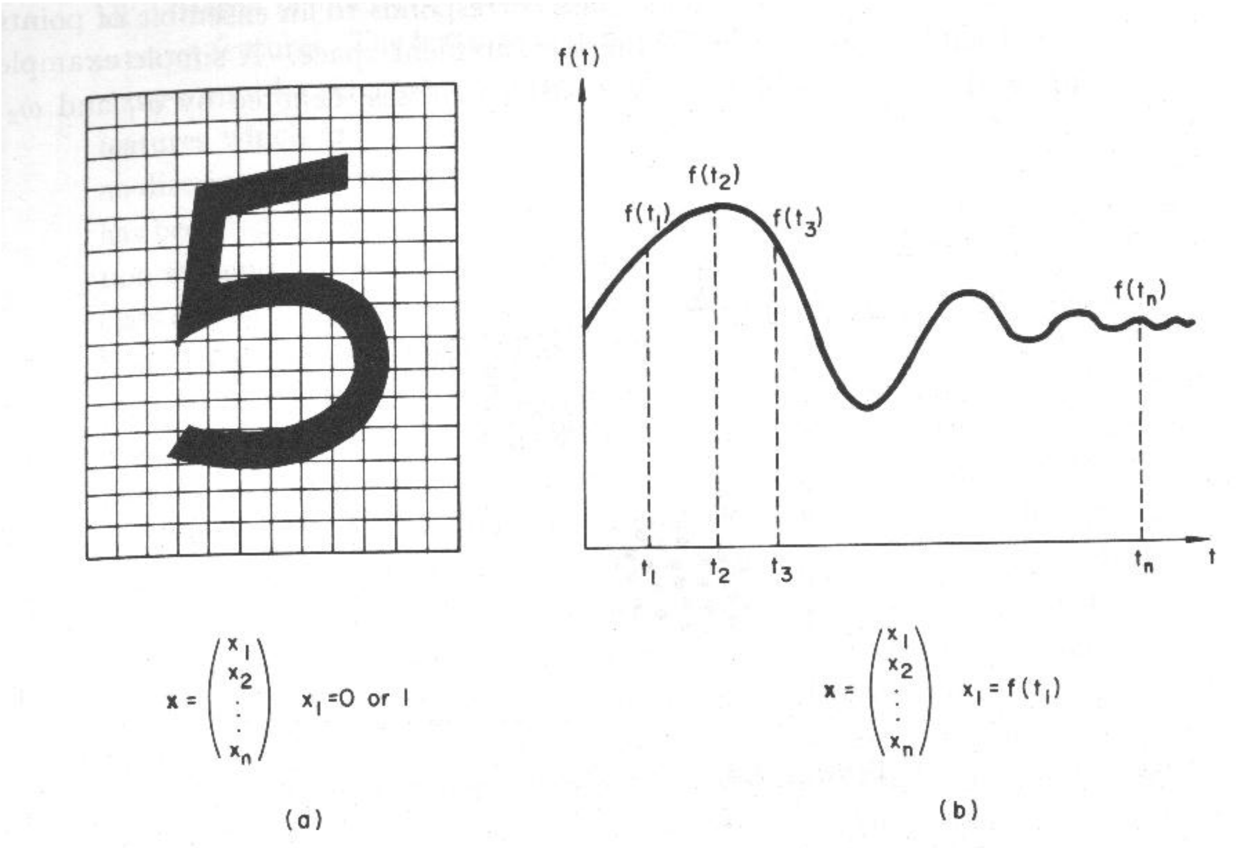



Riconoscere è pertanto ricondotto all'attribuzione di un pattern d'ingresso ad una data classe.

Un pattern è dato mediante la misura degli attributi che lo costituiscono, solitamente in forma vettoriale:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix}$$

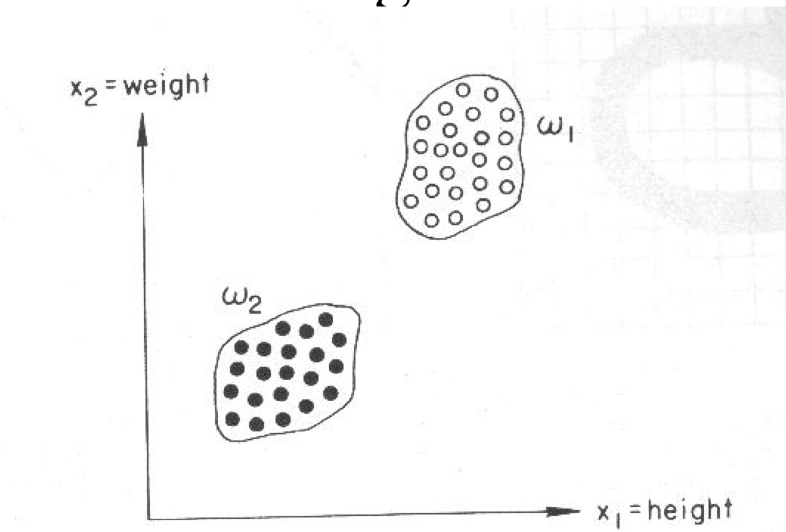
Ecco alcuni esempi di pattern:



# PROBLEMI IMPLICATI

Se le misure degli attributi sono forniti mediante numeri reali, è usuale pensare i vettori-pattern come punti in uno spazio Euclideo n-dimensionale.

Esempio: i calciatori e i fantini sono caratterizzati da altezza e peso secondo le seguenti distribuzioni caratteristiche.



Altro oggetto di studio è l'estrazione di caratteristiche distintive (*features*) o attributi dai dati in input.

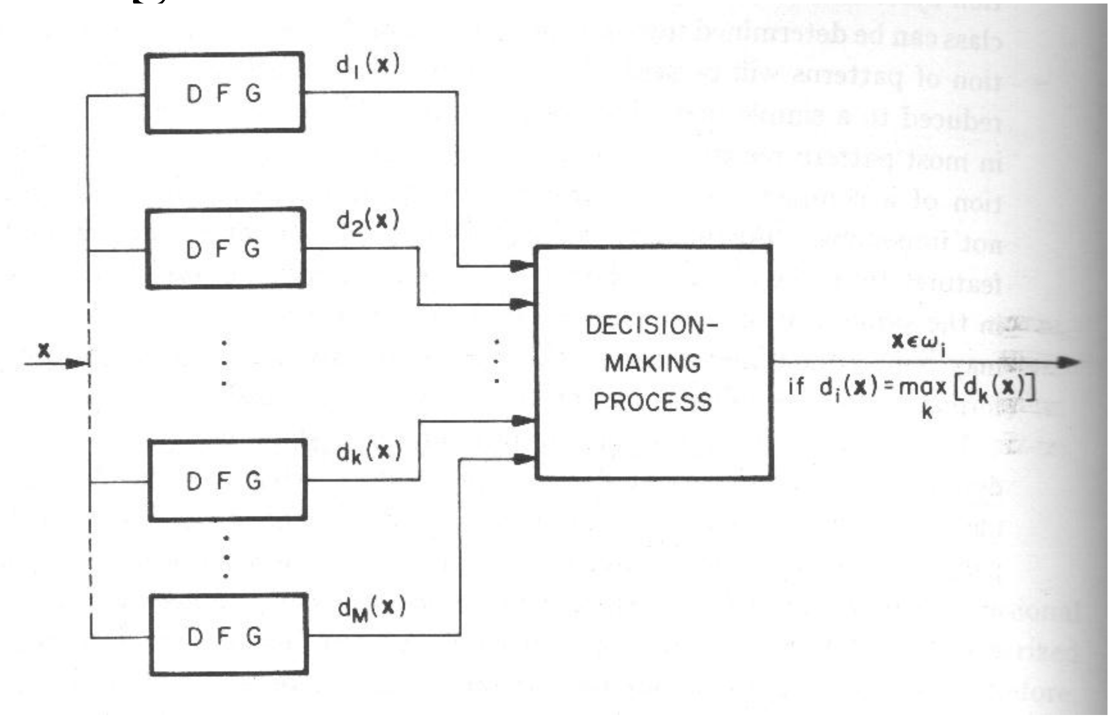
Quest'attività è solitamente accompagnata da una riduzione di dimensionalità del vettore del pattern.

Si parla di preelaborazione ed estrazione delle caratteristiche (*prepocessing* and *features extraction* problem).

Per il riconoscimento e la classificazione è necessario ancora disporre di una procedura per determinare la decisione ottima (criteri e algoritmi).

Il problema è ricondotto alla determinazione di superfici di separazione (*boundaries*) tra le classi a partire dall'osservazione di un certo numero di vettori.

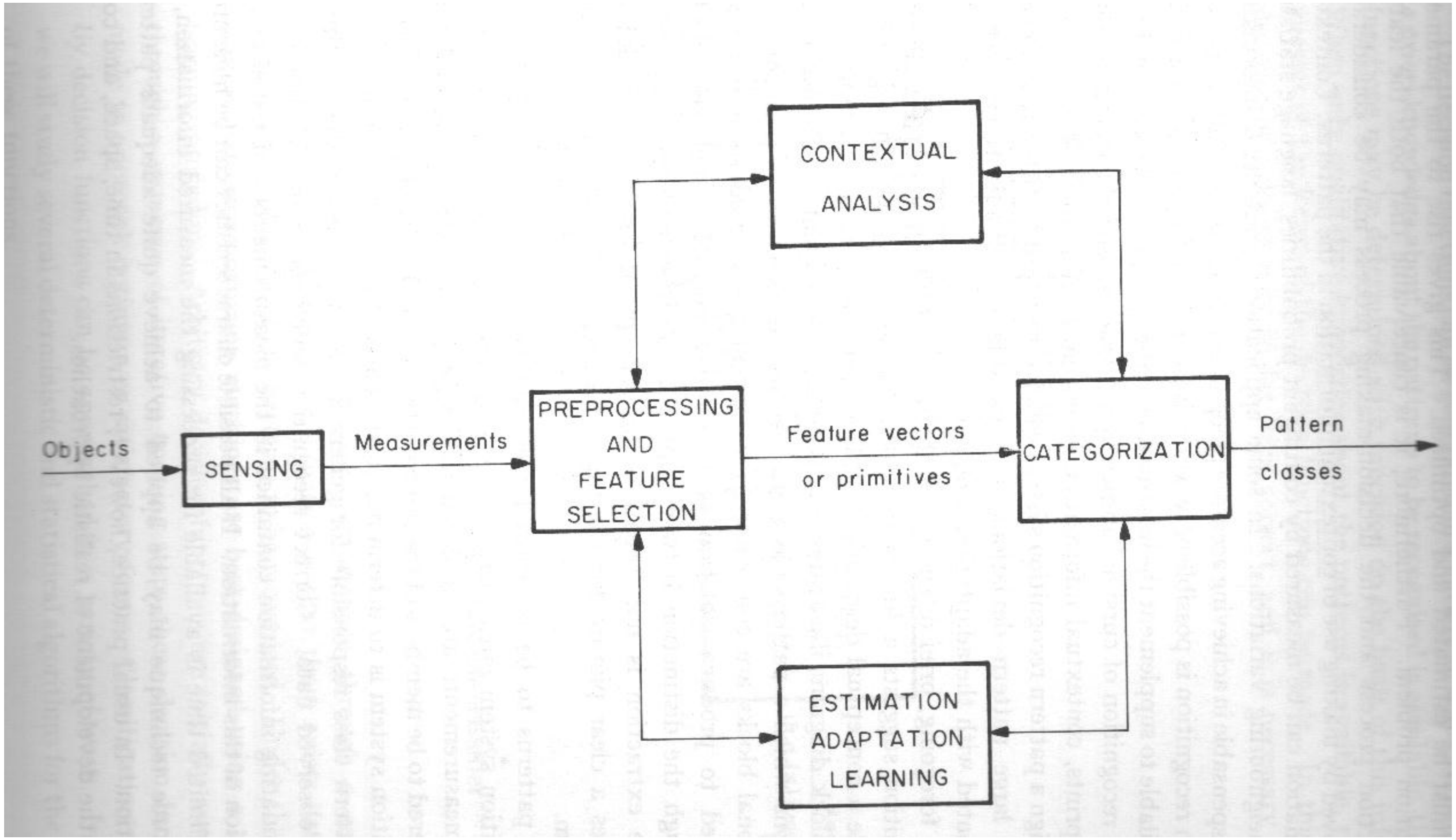
Se, ad esempio, si usa un criterio di decisione che fornisce un indice di somiglianza o vicinanza del pattern d'ingresso rispetto a ciascuna classe, lo schema di un classificatore di pattern è il seguente:




DFG → decision function generator

Associato al problema di preelaborazione ed estrazione delle caratteristiche è la stima e l'ottimizzazione dei parametri del riconoscitore (addestramento dei modelli).

Quando il sistema di riconoscimento deve essere resistente alle distorsioni, flessibile rispetto ad una grande deviazione dei pattern e capace di aggiustare da sè i parametri occorre affrontare il problema dell'adattamento.


CONTEXTUAL
ANALYSIS
Objects
SENSING
Measurements
PREPROCESSING
AND
FEATURE
SELECTION
Feature vectors
or primitives
CATEGORIZATION
Pattern
classes
ESTIMATION
ADAPTATION
LEARNING

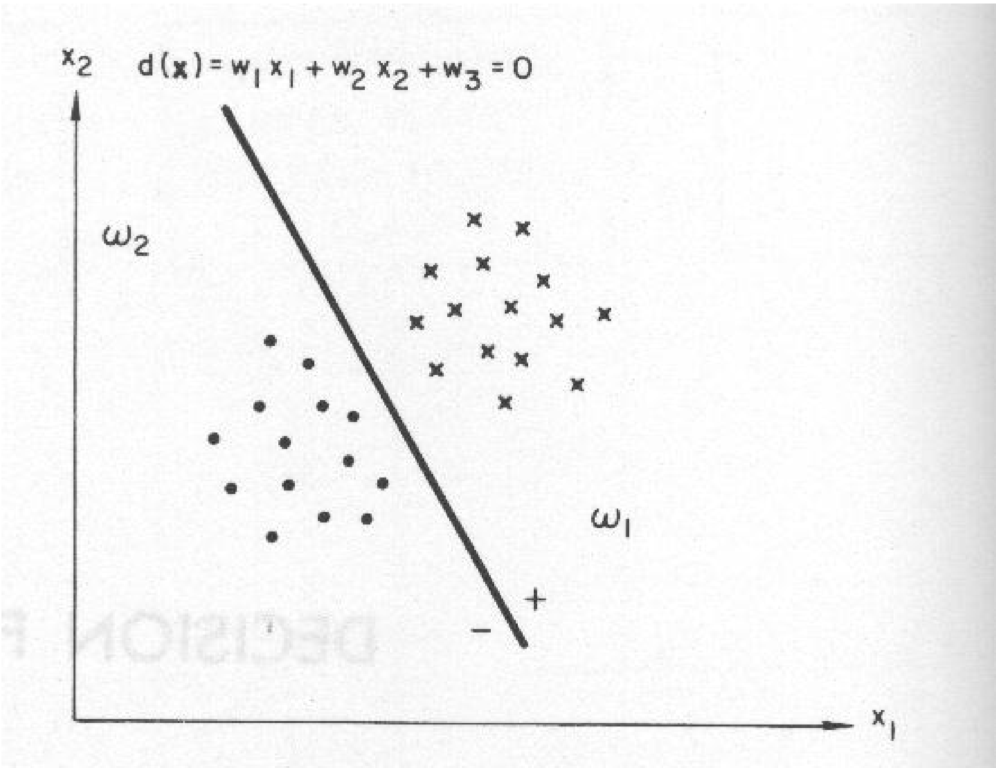
# FUNZIONI DI DECISIONE

Il compito principale di un sistema di riconoscimento è determinare  la classe di appartenenza dei pattern in  analisi.

Occorre stabilire le regole su cui basare queste decisioni.

Un possibile approccio è l'uso di funzioni di decisione.

Si considerino ad esempio il caso in cui vi sono due classi $\omega_1$ e $\omega_2$, separabili mediante una retta:



L'equazione della retta sia

$$d(\mathbf{x}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 = 0$$

dove $w_1$ e $w_2$ sono i parametri.

Sostituendo in $d(\mathbf{x})$ le coordinate di un punto che appartiene alla classe $\omega_1$, si ottiene un valore positivo.

Sostituendo in d(**x**) le coordinate di un punto che appartiene alla classe $\omega_2$, si ottiene un valore negativo.

Per i valori che cadono sulla linea di demarcazione, la classe è indeterminata.

Pertanto d(**x**) può essere usata come *funzione discriminante*.

Questo approccio si può estendere al caso in cui ci sono più di due classi, e si può scegliere come funzione discriminante qualsiasi funzione dello spazio euclideo, non necessariamente lineare.

# Funzioni di decisione lineari

Una funzione di decisione lineare nel caso più generale di $n$ dimensioni assume la forma:

$$d(\overline{x}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n + w_{n+1} = \overline{w}' \overline{x} + w_{n+1}$$

$\overline{w}$ è detto vettore dei pesi o dei parametri.

# Funzioni di decisione lineari

Per convenzione si aggiunge una componente unitaria (cioè un 1) al vettore pattern e il peso $w_{n+1}$

al vettore dei pesi, per cui:

$$\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, 1)'$$

$$\overline{w} = (w_1, w_2, ..., w_n, w_{n+1})' \qquad \text{e} \qquad d(\overline{x}) = \overline{w}'\,\overline{x}$$

Quindi nell'esempio precedente di una funzione di decisione per due classi si ha:

$$d(\bar{x}) = \bar{w}'\bar{x} \begin{cases} > 0 \; se \; \bar{x} \in \omega_1 \\ < 0 \; se \; \bar{x} \in \omega_2 \end{cases}$$

Cosa succede se vi sono più classi $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_M$ ?

***Caso 1:***

Le classi sono separabili mediante singole superfici di decisione. In questo caso si ha ancora:

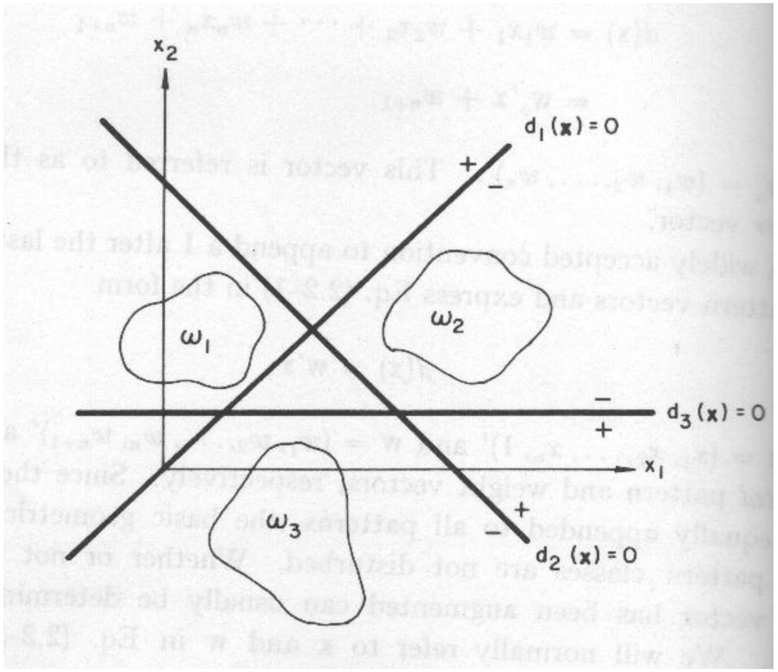
$$d_i(\overline{x}) = \overline{w}_i{}'\,\overline{x} \begin{cases} > 0 \; se \; \overline{x} \in \omega_i \\ < 0 \text{ altrimenti} \end{cases} \qquad \text{con } i=1,2,\ldots,M$$

dove:

$$w_i = \left(w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{i,n+1}\right)'$$

è il vettore pesi associato con la i-esima funzione di decisione.

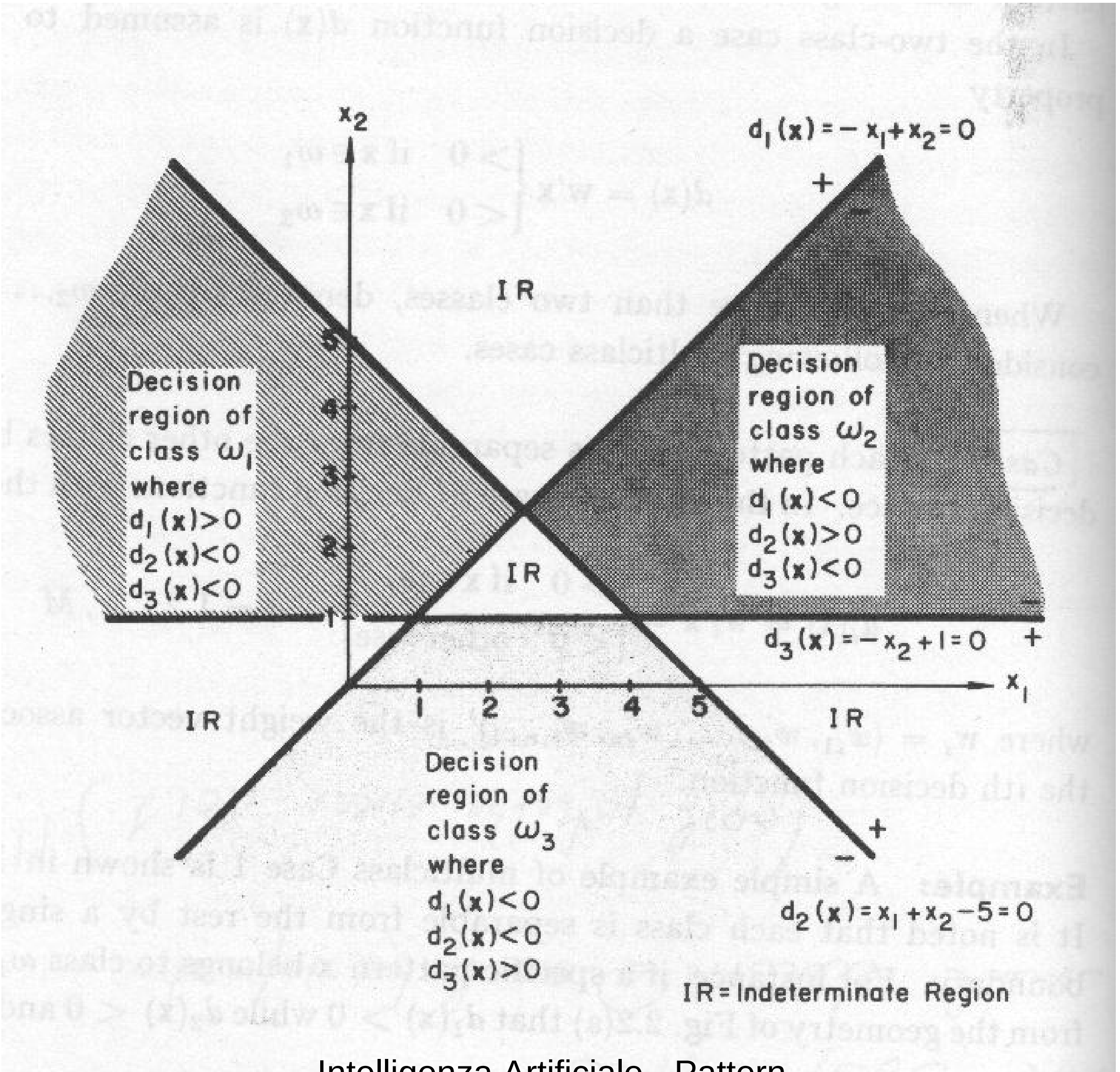
## *Esempio*




Se $\bar{x}$ appartiene ad $\omega_1$ è chiaro dalla geometria che

$d_1(\bar{x}) > 0$ mentre $d_2(\bar{x}) < 0$ e $d_3(\bar{x}) < 0$

# *Esempio numerico*



Le funzioni di decisione sono:

$$d_1(\bar{x}) = -x_1 + x_2 \qquad d_2(\bar{x}) = x_1 + x_2 - 5 \qquad d_3(\bar{x}) = -x_2 + 1$$

I limiti di decisione sono le rette:

$$-x_1 + x_2 = 0 \qquad x_1 + x_2 - 5 = 0 \qquad -x_2 + 1 = 0$$

Se $\bar{x} = (6,5)$, sostituendo si ha:

$$d_1(\bar{x}) = -1 \qquad d_2(\bar{x}) = 6 \qquad d_3(x) = -4$$

il punto appartiene a $\omega_2$

Si osservi che:

Tutti i punti per cui è $d_{i=k}(\overline{x}) > 0$ e $d_{i \neq k}(\overline{x}) < 0$ sono assegnati alla classe $\omega_k$ : le superfici determinano cioè *una regione di decisione*;

Ci possono essere punti per cui più di una $d_i(\overline{x})$ è maggiore di zero (oppure tutte le $d_i(\overline{x})$ sono minori di zero); per questi punti non si può avere una decisione adottando questo schema di classificazione.

***Caso 2:***

Ogni classe è separabile da ciascuna altra mediante una distinta superficie di decisione, cioè le classi sono separabili a coppie.

In questo caso ci sono $\frac{M(M-1)}{2}$ superfici di decisione

(la combinazione di M classi prese a due a due).

Le funzioni di decisione sono qui nella forma:

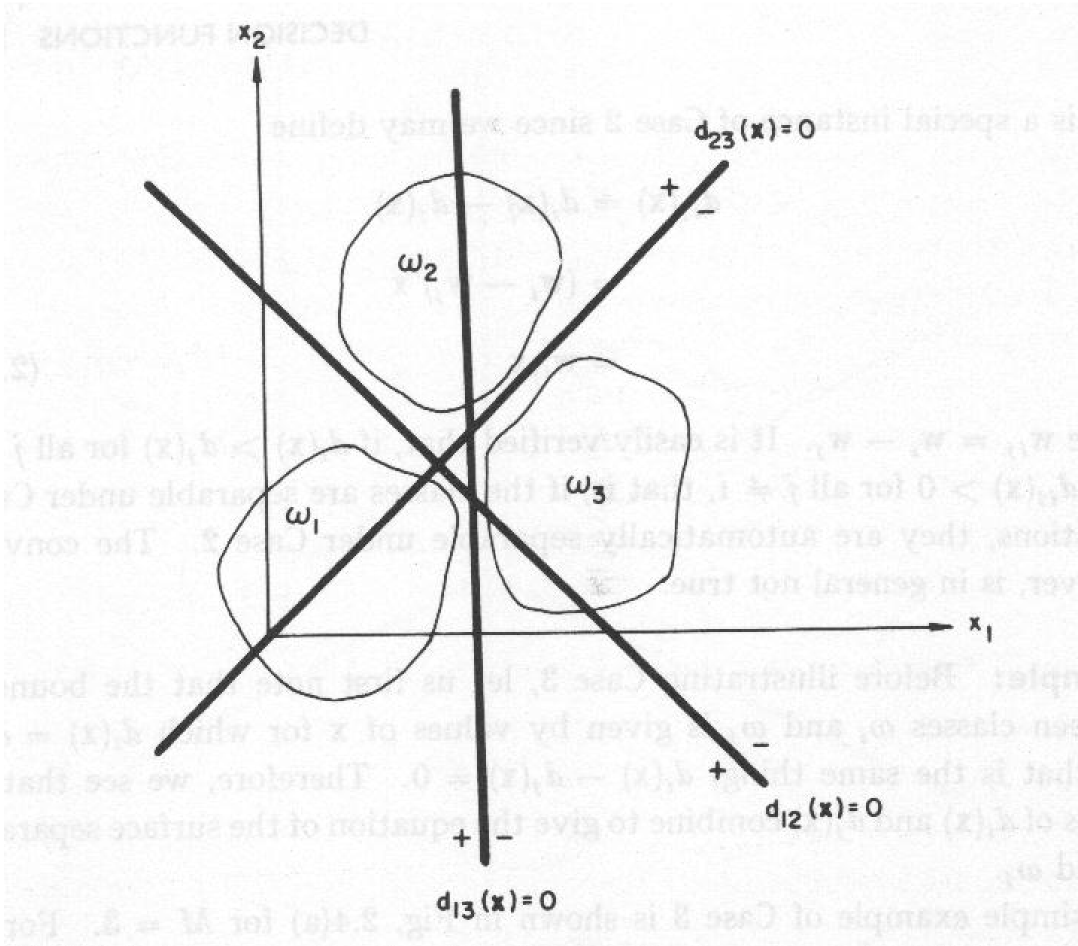
$$d_{ij}(\overline{x}) = \overline{w}'_{ij}\, \overline{x}$$

Se $\overline{x}$ appartiene alla classe $\omega_i$ allora $d_{ij}(\overline{x}) > 0$ per tutti i $j \neq i$.

Queste funzioni hanno la proprietà che

$$d_{ij}(\overline{x}) = -d_{ji}(\overline{x})$$

## *Esempio*



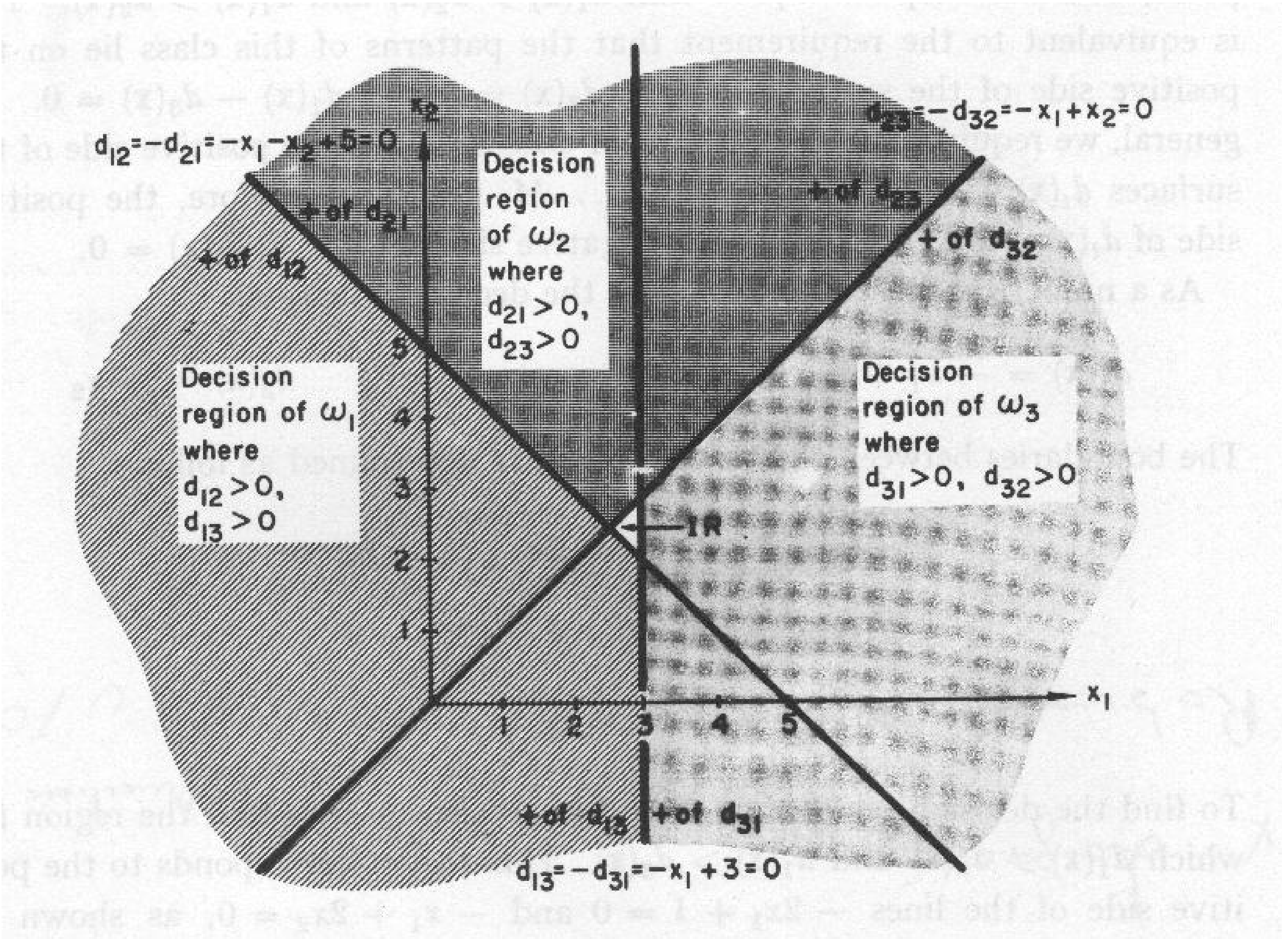
***Esempio numerico***

$$d_{12}(\bar{x}) = -x_1 - x_2 + 5$$

$$d_{13}(\bar{x}) = -x_1 + 3$$

$$d_{23}(\bar{x}) = -x_1 + x_2$$

# Graficamente:



Ad esempio, la regione della classe $\omega_1$ è determinata dai valori di $\overline{x}$ per i quali è

$$d_{12}(\overline{x}) > 0 \quad \text{e} \quad d_{13}(\overline{x}) > 0$$

($d_{23}(\overline{x})$ in questo caso è irrilevante).

Si rammenti che vale la relazione

$$d_{ij}(\overline{x}) = -d_{ji}(\overline{x})$$

Pertanto se si deve classificare

$$\bar{x} = (4,3)'$$

sostituendo si ha:

$$d_{12}(\bar{x}) = -2 \qquad d_{13}(\bar{x}) = -1 \qquad d_{23}(\bar{x}) = -1$$

e dalla relazione precedente si desume:

$$d_{21}(\bar{x}) = 2 \qquad d_{31}(\bar{x}) = 1 \qquad d_{32}(\bar{x}) = 1$$

Essendo

$$d_{3j}(\overline{x}) > 0 \quad \text{per } j=1,2$$

allora il pattern è assegnato alla classe $\omega_3$.

***Caso 3:***

Esistono M funzioni di decisione $d_k(\bar{x}) = \bar{w}'_k \, \bar{x}$ con

$k = 1,2,\ldots M$ con la proprietà che se $\bar{x}$ appartiene alla

classe $\omega_i$, sia $d_i(\bar{x}) > d_j(\bar{x})$ per tutti i $j \neq i$

Può essere considerato una particolarizzazione del caso 2, poiché si può definire:

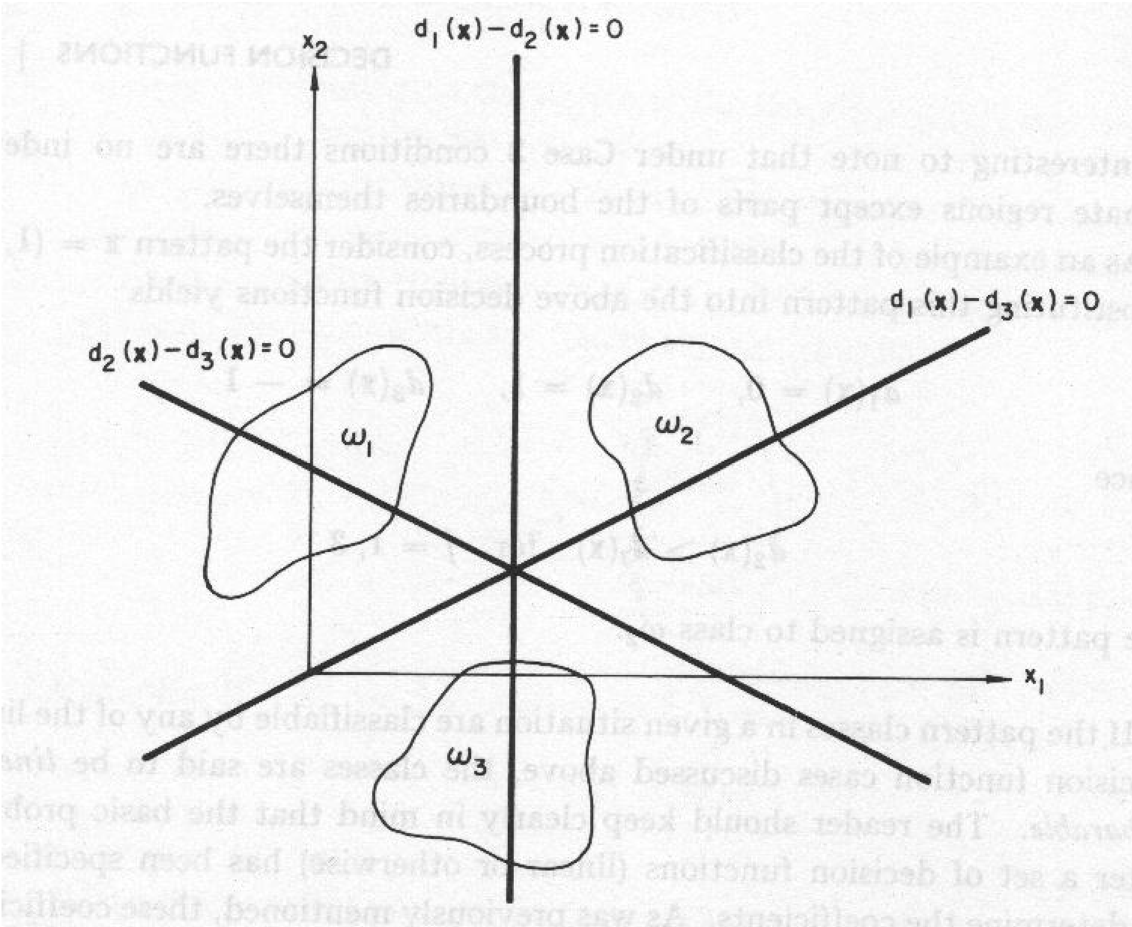
$$d_{ij}(\bar{x}) = d_i(\bar{x}) - d_j(\bar{x})$$

$$= (\bar{w}_i - \bar{w}_j)' \bar{x}$$

$$= \bar{w}'_{ij} \, \bar{x}$$

Si può verificare facilmente che se $d_i(\bar{x}) > d_j(\bar{x})$ per tutti i $j \neq i$, allora si verifica anche che $d_{ij}(\bar{x}) > 0$ per tutti i $j \neq i$: se una classe è separabile con le condizioni del caso 3, lo è anche con quelle del caso 2 (il viceversa non è generalmente vero).

# *Esempio*



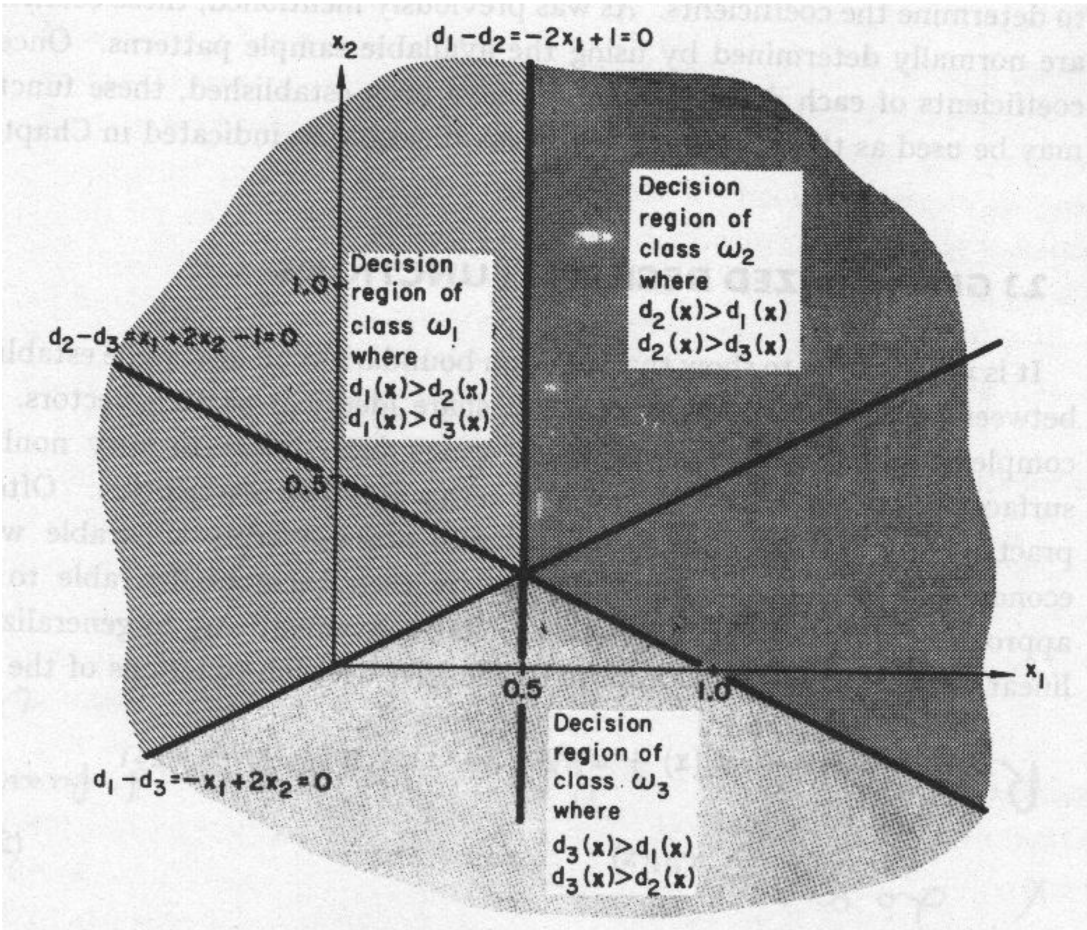
Per i pattern della classe $\omega_1$, si richiede che $d_1(\bar{x}) > d_2(\bar{x})$ e $d_1(\bar{x}) > d_3(\bar{x})$ , ovvero si richiede che questi pattern cadano sul lato positivo della superficie $d_1(\bar{x}) - d_2(\bar{x}) = 0$ e $d_1(\bar{x}) - d_3(\bar{x}) = 0$.

In generale si richiede che i pattern della classe $\omega_i$ cadano sul lato positivo delle superfici $d_i(\bar{x}) - d_j(\bar{x}) = 0$ con $j = 1 \ldots M$ e $j \neq i$

Anche qui vale che il lato positivo di $d_i(\overline{x}) - d_j(\overline{x}) = 0$

è il lato negativo di $d_j(\overline{x}) - d_i(\overline{x}) = 0$

# *Esempio numerico*



Le funzioni di decisione siano:

$$d_1(\overline{x}) = -x_1 + x_2$$

$$d_2(\overline{x}) = x_1 + x_2 - 1$$

$$d_3(\overline{x}) = -x_2$$

I confini tra le classi si determinano così:

$$d_1(\overline{x}) - d_2(\overline{x}) = -2x_1 + 1 = 0$$

$$d_1(\overline{x}) - d_3(\overline{x}) = -x_1 + 2x_2 = 0$$

$$d_2(\overline{x}) - d_3(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 - 1 = 0$$

Per trovare la regione che corrisponde alla classe $\omega_1$ occorre trovare la regione per cui $d_1(\overline{x}) > d_2(\overline{x})$ e $d_1(\overline{x}) > d_3(\overline{x})$, cioè la regione che cade sul lato positivo dei piani $-2x_1 + 1 = 0$ e $-x_1 + 2x_2 = 0$

Se poi è richiesto di classificare il pattern $\overline{x} = (1,1)'$, sostituendo si ha: $d_1(\overline{x}) = 0$, $d_2(\overline{x}) = 1$, $d_3(\overline{x}) = -1$

Essendo $d_2 > d_1$ e $d_2 > d_3$, il pattern appartiene alla classe $\omega_2$.

# Funzioni di decisione generalizzate

I confini tra le classi non sono sempre esprimibili mediante piani.

Si può stabilire una funzione di discriminazione non lineare

introducendo opportune funzioni $f_i(\bar{x})$, così

$$d(\bar{x}) = w_1 f_1(\bar{x}) + w_2 f_2(\bar{x}) + \ldots + w_k f_k(\bar{x}) + w_{k+1}$$

Le $f_i(\bar{x})$ sono funzioni reali a singolo valore.

Poiché una volta valutate le $f_i(\overline{x})$ forniscono un solo valore, si può porre:

$$\overline{x}^* = \begin{pmatrix} f_1(\overline{x}) \\ f_2(\overline{x}) \\ \vdots \\ f_k(\overline{x}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

e riscrivere l'espressione precedente come $d(\overline{x}) = \overline{w}'\,\overline{x}^*$

Se, ad esempio, $\overline{x} = (x_1, x_2)'$, una funzione discriminante quadratica è :

$$d(\overline{x}) = w_{11}x_1^2 + w_{12}x_1x_2 + w_{22}x_2^2 + w_1x_1 + w_2x_2 + w_3$$

allora ponendo $\overline{x}^* = \left(x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1, x_2, 1\right)'$

$$\overline{w} = \left(w_{11}, w_{12}, w_{22}, w_1, w_2, w_3\right)'$$

si ha: $d(\overline{x}^*) = \overline{w}'\overline{x}^*$

(si osservi che la dimensionalità *k* di $\overline{x}^*$ è maggiore della dimensionalità *n* di $\overline{x}$).

Si può generalizzare la forma quadratica così:

$$d(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} w_{jj} x_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} w_{jk} x_j x_k + \sum_{j=1}^{n} w_j x_j + w_{n+1}$$

(ci sono $n + \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ termini pesi)

Confrontando l'espressione precedente con quella generale:

$$d(\overline{x}) = w_1 f_1(\overline{x}) + w_2 f_2(\overline{x}) + \ldots + w_k f_k(\overline{x}) + w_{k+1}$$

si deduce che $f_i(\overline{x}) = x_p^s \cdot x_q^t$ con $p, q = 1,2,\ldots,n$ e $s,t = 0,1$

Si può dedurre per induzione una forma generale per funzioni polinomiali di ordine r:

$$f_i(\overline{x}) = x_{p_1}^{s_1} x_{p_2}^{s_2} \ldots x_{p_r}^{s_r}$$

con $p_1, p_2, \ldots p_r = 1,2,\ldots,n$ e $s_1, s_2, \ldots, s_r = 0,1$

e ancora una forma recursiva per ricavare *d(x)*:

$$d^r(\overline{x}) = \sum_{p_1=1}^{n} \sum_{p_2=p_1}^{n} \ldots \sum_{p_r=p_r-1}^{n} w_{p_1 p_2 \ldots p_r} x_{p_1} x_{p_2} \ldots x_{p_r} + d^{r-1}(\overline{x})$$

dove *r* è il grado di non linearità e $d^0(\overline{x}) = w_{n+1}$

# Lo spazio dei pattern e lo spazio dei pesi

Si supponga che esistano solo due classi $\omega_1$ e $\omega_2$,

ciascuna rappresentata da due punti $(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1)$ e $(\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2)$.

Se le classi sono linearmente separabili esiste una funzione $d(\bar{x})$ che, se è $d(\bar{x}) > 0$ per una classe è $d(\bar{x}) < 0$ per l'altra.

Quindi il vettore dei pesi $\overline{w} = (w_1, w_2, w_3)'$ deve soddisfare le relazioni:

$$w_1 x_{11}^1 + w_2 x_{12}^1 + w_3 > 0$$

$$w_1 x_{21}^1 + w_2 x_{22}^1 + w_3 > 0$$

$$w_1 x_{11}^2 + w_2 x_{12}^2 + w_3 < 0$$

$$w_1 x_{21}^2 + w_2 x_{22}^2 + w_3 < 0$$

$\overline{w}$ è pertanto la soluzione del sistema di disuguaglianze.

Si preferisce porre il sistema moltiplicando per -1 le ultime due disuguaglianze:

$$w_1 x_{11}^1 + w_2 x_{12}^1 + w_3 > 0$$
$$w_1 x_{21}^1 + w_2 x_{22}^1 + w_3 > 0$$
$$-w_1 x_{11}^2 - w_2 x_{12}^2 - w_3 > 0$$
$$-w_1 x_{21}^2 - w_2 x_{22}^2 - w_3 > 0$$

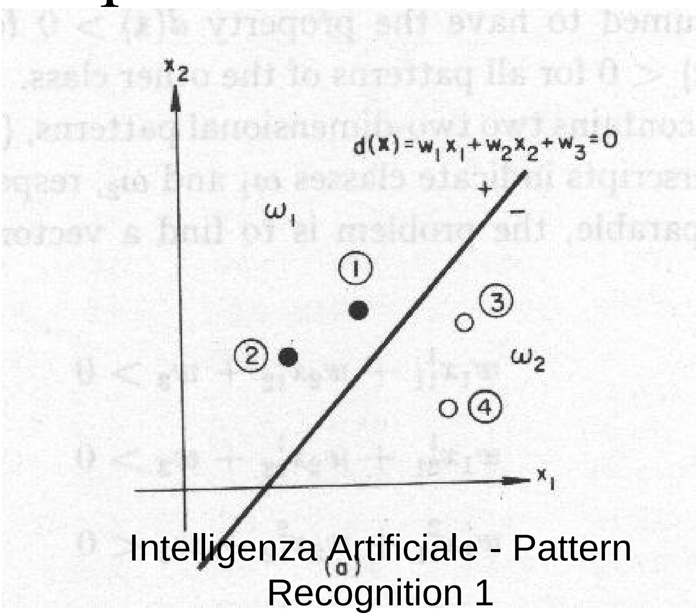
Si osservi che le *x* sono i coefficienti e le *w* le variabili.

Il luogo dei punti che soddisfa le disuguaglianze è detto *spazio dei pesi*.

***Osservazione***

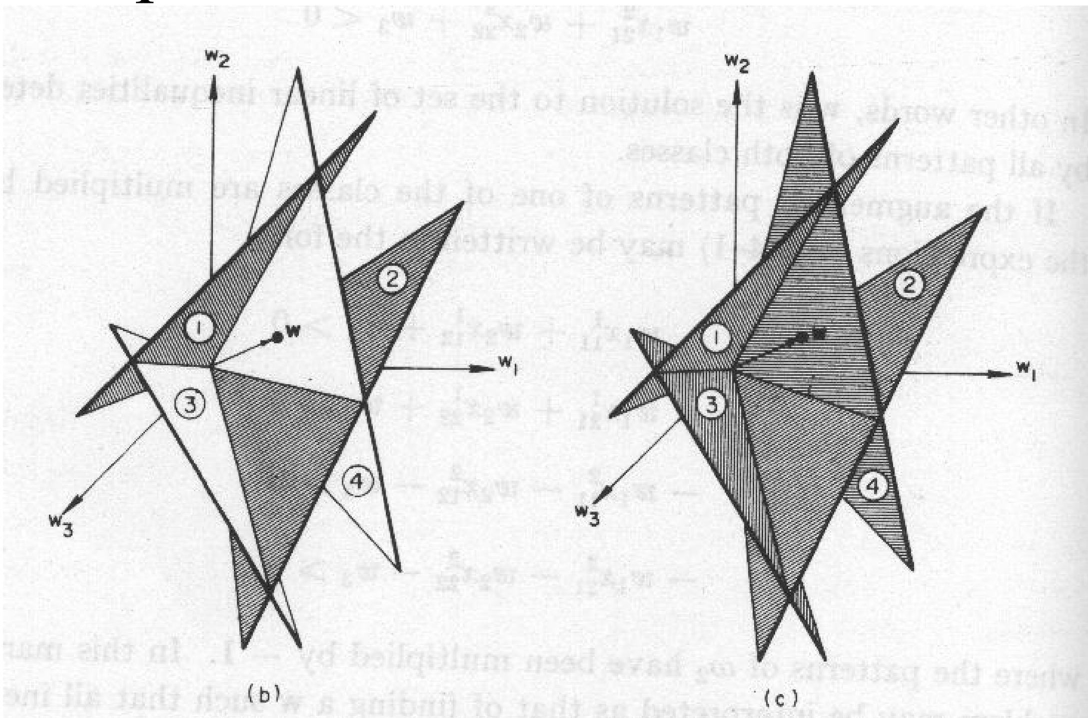
Lo spazio dei pattern è uno spazio euclideo n-dimensionale.

In questo spazio, $\overline{w}$ è un insieme di coefficienti che determinano una superficie di decisione:



Lo spazio dei pesi è uno spazio euclideo *(n+1)-dimensionale.*

In questo spazio, ogni disuguaglianza rappresenta il lato positivo o negativo di un iperpiano che passa per l'origine (con equazioni tipo $w_1 x_{11}' + w_2 x_{12}' + w_3 = 0$).



Nota alla figura precedente:

posizione  e lato positivo degli iperpiani: la figura *b)* corrisponde al primo set di disuguaglianze, la figura *c)* al secondo set: la soluzione ovviamente è la stessa.

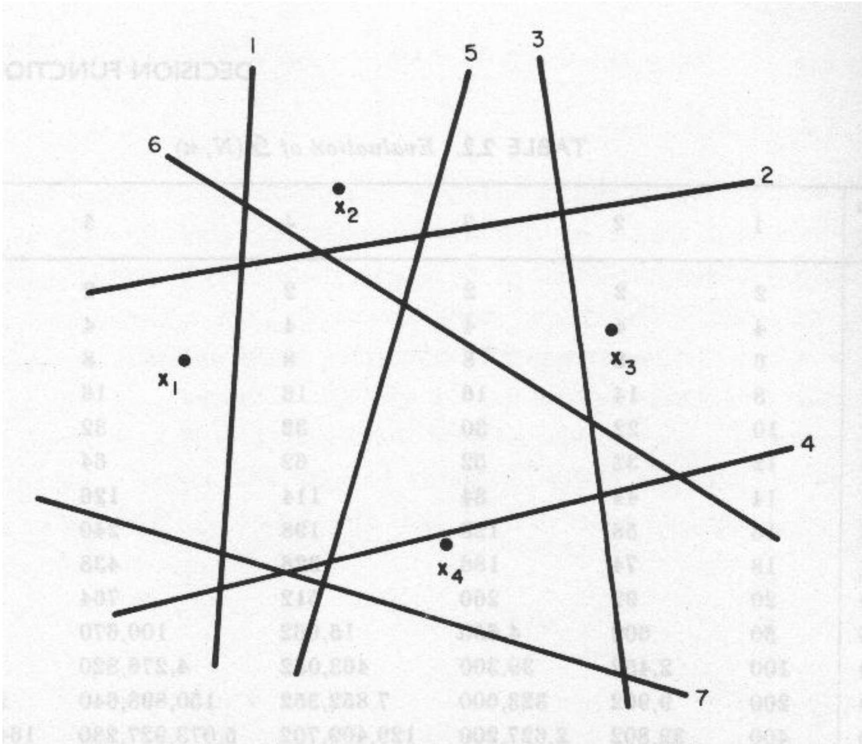
La regione delle soluzioni è caratterizzata dall'essere una figura conica (più precisamente, un *cono poliedrico convesso*).

# Dicotomia

Una misura del potere discriminante delle funzioni di decisione è il numero di modi con cui possono classificare un dato set di pattern.

Si consideri uno spazio bidimensionale con 4 pattern

$x_1, x_2, x_3, x_4$




Ciascuna linea corrisponde ad una differente classificazione dei pattern in due classi.

Ad esempio, la linea 1 separa $x_1$ dal gruppo $x_2, x_3, x_4$.

Poiché possiamo decidere di assegnare $x_1$ o ad $\omega_1$ o ad $\omega_2$, la linea 1 produce due possibili classificazioni.

In questo caso il numero di raggruppamenti in due classi (dicotomie) è 14 (cioè due in meno di $2^4 = 16$).

Si può dimostrare che il numero di dicotomie lineari di N punti in uno spazio euclideo n-dimensionale, se i punti sono ben distribuiti, è dato da:

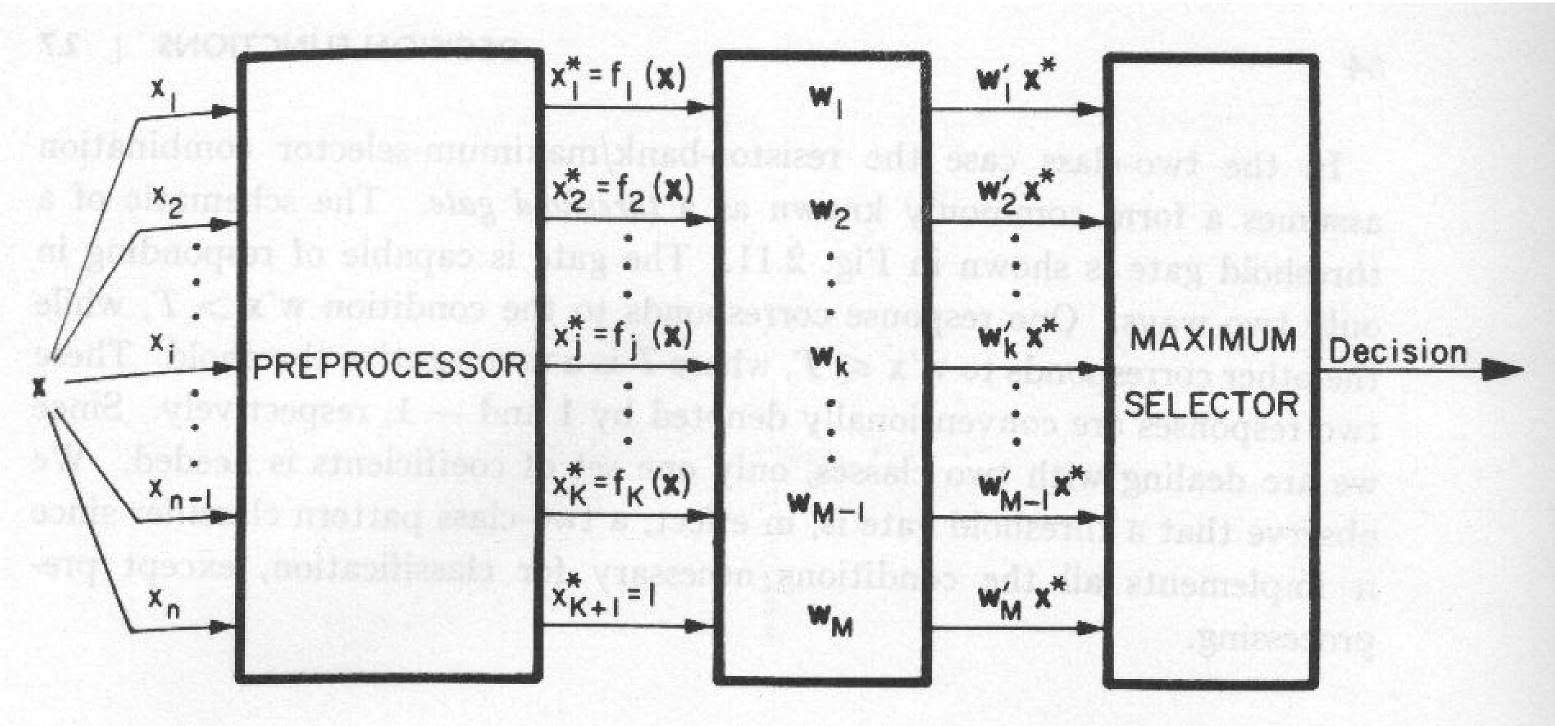
$$D(N,n) = \begin{cases} 2\sum_{k=0}^{n} C_k^{N-1} \ se\ N > n+1 \\ 2^N \ se\ N \le n+1 \end{cases} \quad \text{con } C_k^{N-1} = \frac{(N-1)!}{(N-1-k)!\,k!}$$

$D(N,n)$ cresce rapidamente al crescere di N e n!

# Realizzazione delle funzioni di decisione

Se la determinazione dei parametri delle funzioni di decisione è complessa, la realizzazione di classificatori multiclasse è relativamente semplice.

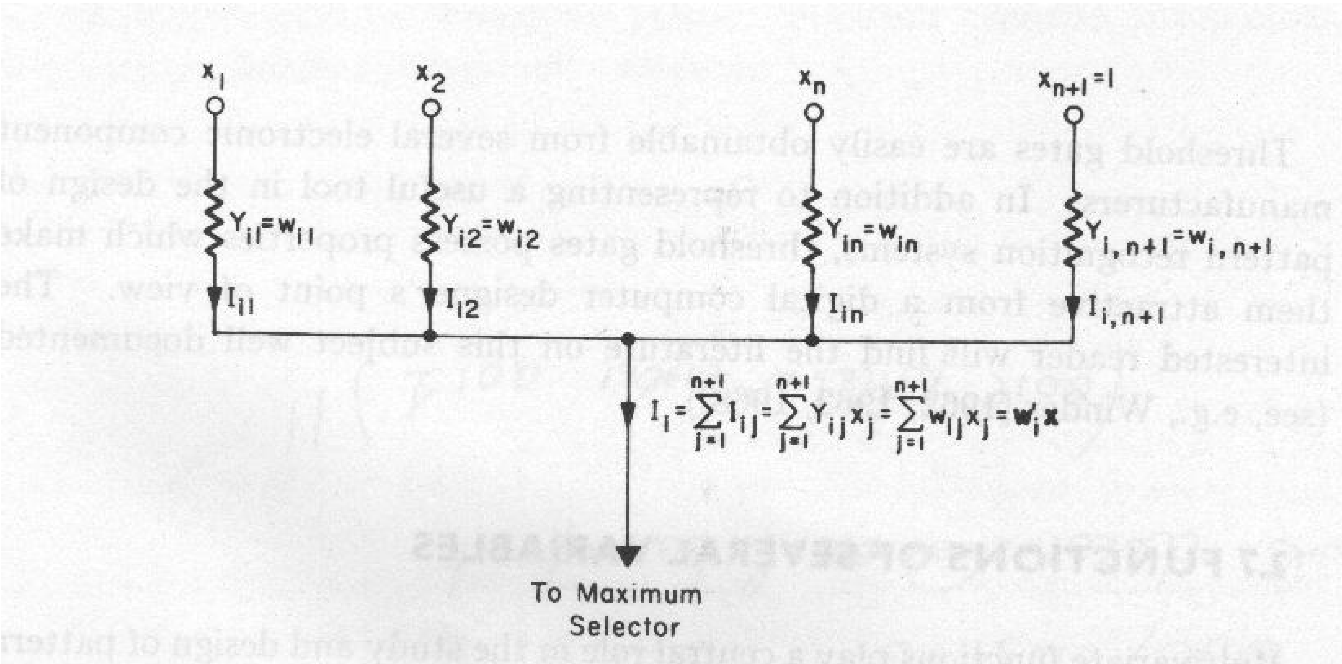
Un possibile diagramma a blocchi, ipotizzando di trattare una multiclasse di tipo 3 ($d_i(\bar{x}) > d_j(\bar{x})$ per tutti i $j \neq i$) è nella figura seguente.



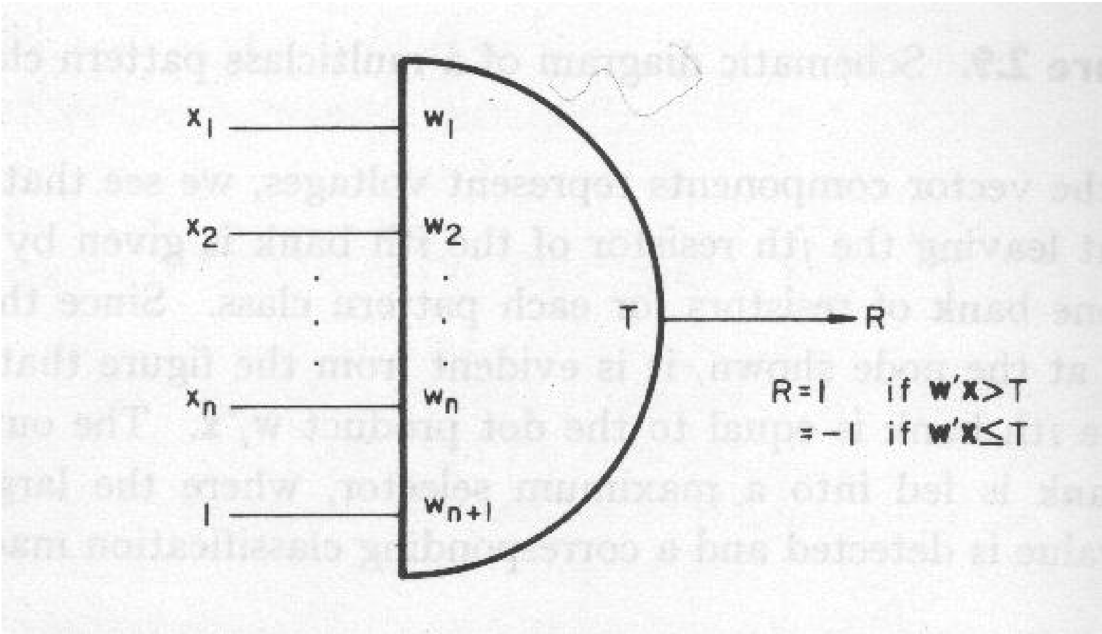

Se la funzione di decisione è di tipo qualsiasi, il preprocessor realizza il calcolo necessario in:

$$d(\bar{x}) = w_1 \underline{f_1(\bar{x})} + w_2 \underline{f_2(\bar{x})} + \ldots + w_k \underline{f_k(\bar{x})} + w_{k+1}$$

Se la funzione di valutazione è lineare si può avere una realizzazione semplice e poco costosa in hardware: per ogni classe si utilizza una rete resistiva:



Se poi si hanno solo due classi, il sistema si semplifica ulteriormente mediante l'uso di "threshold gate":




$$\text{Valore } 1 \Rightarrow \text{ classe } \omega_1$$

$$\text{Valore } -1 \Rightarrow \text{ classe } \omega_2$$