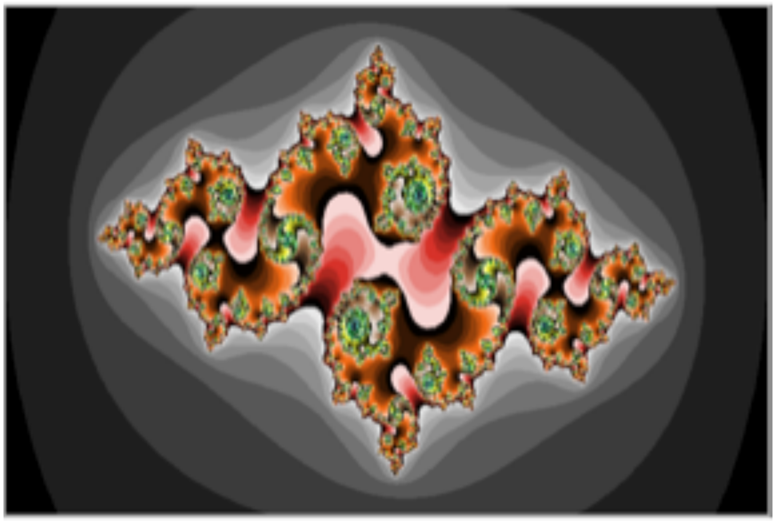
Tarea 4: Fractales

Guillermina Montanari

3/11/2017



1. Entregar un reporte sobre un fractal de Julia, modificar el programa de Mandelbrot para graficar un fractal de Julia.

El conjunto de Mandelbrot se genera con la siguiente formula recursiva:

$Z_n = Z_{n-1}^2 +** C **$

donde

$Z_0 = 0$

C es un numero arbitrario del plano complejo.

$Z_1 = Z_0^2 + C$

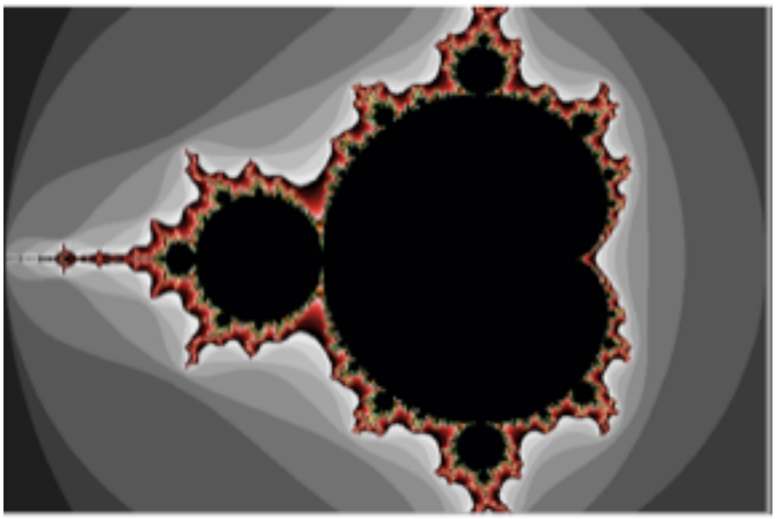
$Z_2 = Z_1^2 + C$

...

$Z_n = Z_{n-1}^2 + C$

Cada Z_n se genera a partir de ese Z_0 y C, y si ese numero crece mas alla del valor absoluto de 2 o 2i, entonces C no se considera parte del conjunto. El color asignado dependera de cuan rapido haya crecido.

Por otro lado, si el numero Z_n, a partir de ese Z_0, no crece dentro de los limites del valore absoluto de 2 o 2i, si se considera parte del conjunto, y se colorea en negro.



El conjunto de Julia es generado por la misma funcion recursiva:

$Z_n = Z_{n-1}^2 + C$

donde

$Z0 = C$, es un numero que ira cambiando en las iteraciones.

C es un numero fijo, que selecciono y que es el que sumo SIEMPRE en la funcion.

$Z1 = Z_0^2 + C$

$Z2 = Z_1^2 + C$

...

$Zn = Z_{n-1}^2 + C$

Cada Z_n se genera a partir de ese Z_0 y C, y si ese numero crece mas alla del valor absoluto de 2 o 2i, entonces C no se considera parte del conjunto. El color asignado dependera de cuan rapido haya crecido.

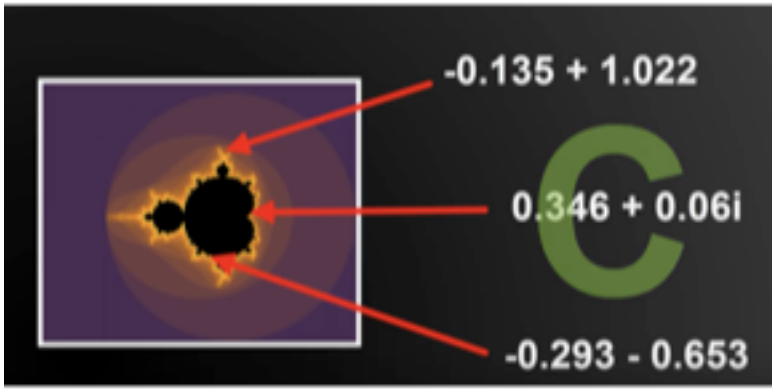
Por otro lado, si el numero Z_n, a partir de ese Z_0, no crece dentro de los limites del valore absoluto de 2 o 2i, si se considera parte del conjunto, y se colorea en negro.

Va anexo a este documento el archivo de Netlogo, la funcion que cambie es iteration:

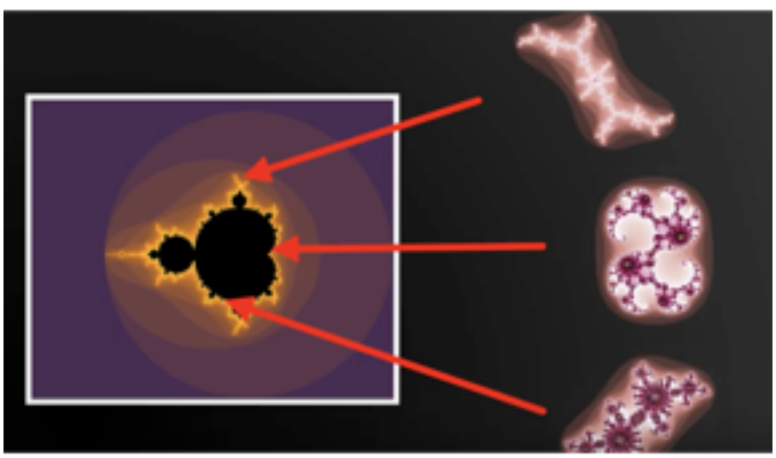
1. La Condicion inicial z0 es un valor arbitrario, que es el que varia, yo tomo los valores del patch actual.

2. La constante C la fijo en el inicio con los sliders en las variables c-re y c-im, este valor no cambia.

La relacion entre ambos conjuntos, es que si tomamos uno a uno los puntos C del Conjunto de Mandelbrot:



Y asi generar un conjunto de Julia



diferente:

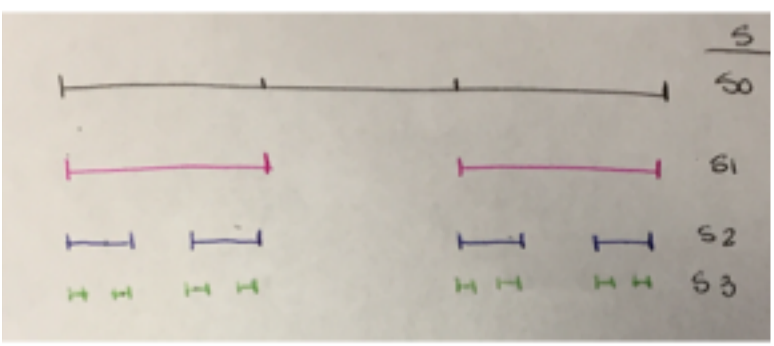
2. Investigue que es el numero de enrollamiento (winding number) del conjunto de Mandelbrot.

En matematica, una funcion iterativa es una funcion X → X, tal que se aplica a un conjunto de X en si misma, por lo tanto se obtiene una funcion compuesta de ella misma, un cierto numero de veces. La funcion para generar el conjunto de Mandelbrot $Z_n = Z_{n-1}^2 + C$ es de este tipo.

El numero de enrollamiento (winding number) de una funcion nos da el numero de veces que la curva definida por nuestra funcion pasa, en el sentido de las agujas del reloj, alrededor de Z_0.

3. Aqui hay otra forma de mostrar que el conjunto de Cantor tiene longitud total cero, en la primera etapa de construcción del conjunto de Cantor quitamos un intervalo de tamaño 1/3 del intervalo unitario [0,1]. Al siguiente intervalo quitamos dos intervalos cada uno de longitud 1/9. Sumando una serie infinita apropiada, demuestre que la longitud total de todos los intervalos removidos es 1, y por lo tanto, el conjunto de puntos que queda (Conjunto de Cantor) debe tener longitud cero.

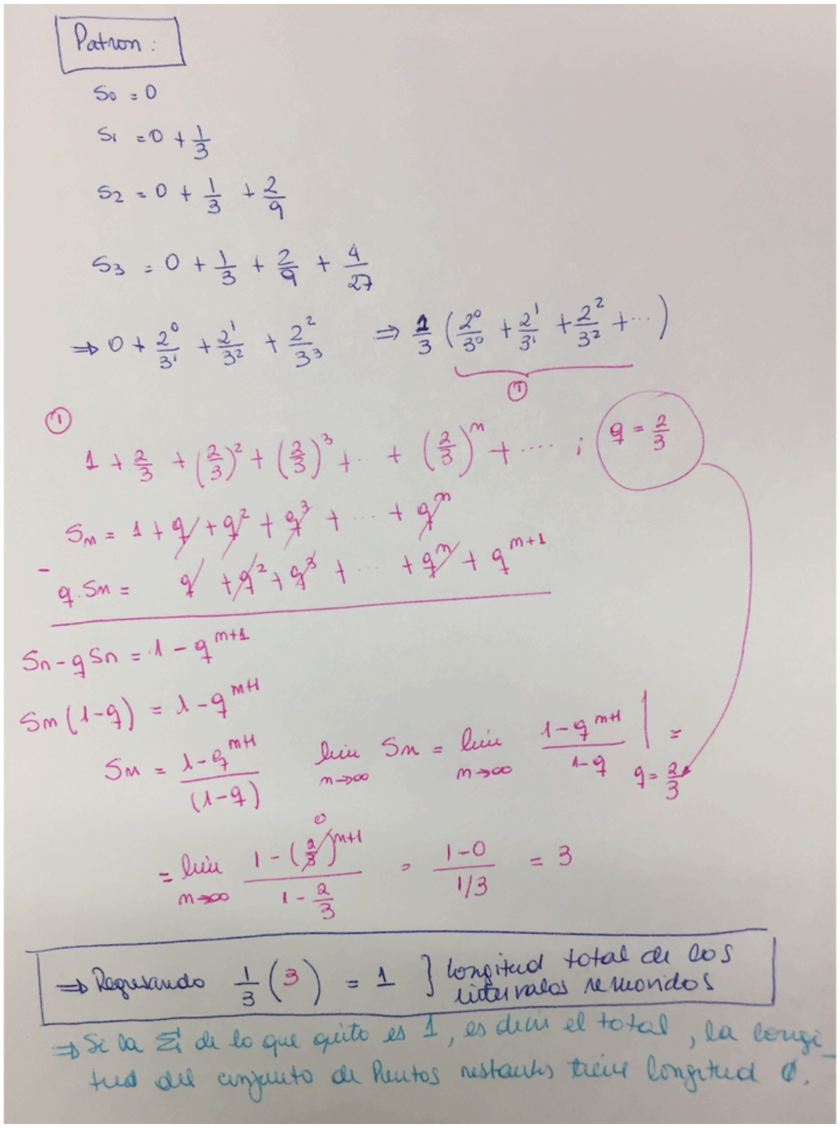
Tomando la grafica como base, vamos a hacer lo siguiente:



- Primera Iteracion: remuevo 1/3.
- Segunda Iteracion: remuevo 1/3 de cada parte -> Si tenia dos partes de un tercio, las divido en tres y remuevo una, de cada una de ellas estaria removiendo 1/9 de la original, como son dos, entonces serian $2 * 1/9$ que es lo mismo que $2 * 1/3^2$

- Tercera Iteracion: remuevo 1/3 de cada parte -> tenia cuatro partes, las divido en tres y remuevo una, de cada una de ellas estaria removiendo 1/27 de la original, como son cuatro, entonces serian 4/27 $2^2 * 1/27$ que es lo mismo que $2^2 * 1/3^3$

S	L	$\bar{L}$
S_0	1	0
S_1	2/3	1/3+0
S_2	4/9	2/9 + 1/3 + 0
S_3	8/27	2/9+1/3+ 4/27 +0



Patron:

$S_0 = 0$

$S_1 = 0 + \frac{1}{3}$

$S_2 = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9}$

$S_3 = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27}$

$$\Rightarrow 0 + \frac{2^0}{3^1} + \frac{2^1}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} \Rightarrow \frac{1}{3}\underbrace{\left(\frac{2^0}{3^0} + \frac{2^1}{3^1} + \frac{2^2}{3^2} + \cdots\right)}_{(1)}$$

(1)

$$1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \cdots \; ; \; q = \frac{2}{3}$$

$$S_n = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \cdots + \cancel{q^n}$$

$$- \; q \cdot S_n = \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \cdots + \cancel{q^n} + q^{n+1}$$

$$S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{(1-q)} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right|_{q=\frac{2}{3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1-0}{1/3} = 3$$

$$\boxed{\Rightarrow \text{Regresando } \frac{1}{3}(3) = 1 \; \} \text{ longitud total de los intervalos removidos}}$$

⇒ Si la Σ de lo que quito es 1, es decir el total, la longitud del conjunto de puntos restantes tiene longitud $\emptyset$.

4. Calcular la dimensión fractal del Conjunto de Cantor de quintos pares

La dimension fractal del conjunto de Cantor de 5 pares seria:

m = cantidad de copias que tengo= 3 (eran 5 y quite 2)

r = factor de escala = 5 (por cuanto lo tengo que multilicar para regresar al 1 inicial.)

$Dim = Ln(m)/Ln(r) = Ln(3)/Ln(5) = 0.68$

5. (Sin dígitos impares) Encuentre la dimensión de similitud del subconjunto de [0,1] que consiste en los números reales con sólo dígitos pares en su desarrollo decimal.

Conjunto de reales de decimos impares:

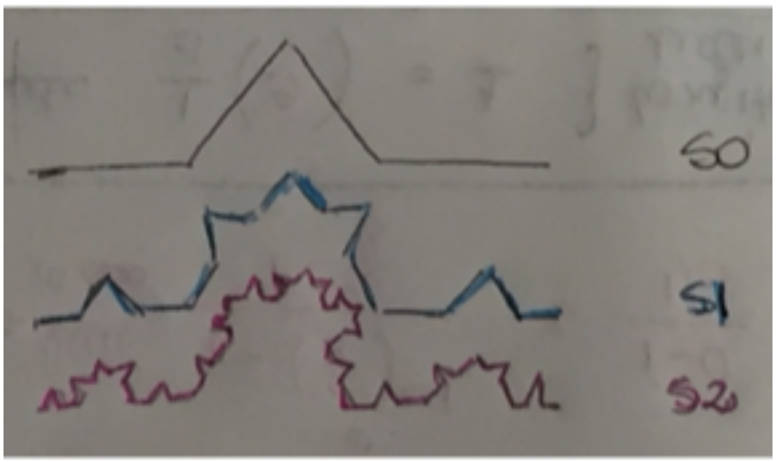
m = cantidad de copias que tengo = 5 (eran 10 y quite 5)

r = factor de escala = 10 (por cuanto lo tengo que multilicar para regresar al 1 inicial.)

$Dim = Ln(m)/Ln(r) = Ln(5)/Ln(10) = 0.69$

6. (Copo de Nieve-snowflake) Para construir el famoso fractal conocido como la curva copo de nieve de Koch, usamos un tríangulo equilátero para S0, entonces hacemos la iteración de la curva de Koch en cada lado del triángulo:

a) Dibuje a S1 y S2.



b) La curva de copo de nieve es la curva límite S = S∞. Muestre que longitud de arco es infinita.

Para la curva de KOCH, cada iteración aumenta en 1/3 la longitud inicial.

Si llamamos Lo e la longitud inicial:

1) $L_1 = \frac{4}{3} \cdot L_0$

2) $L_2 = \frac{4}{3} \cdot L_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} L_0 = \frac{4^2}{3^2} L_0$

3) $L_3 = \frac{4}{3} L_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{4^2}{3^2} L_0 = \frac{4^3}{3^3} \cdot L_0$

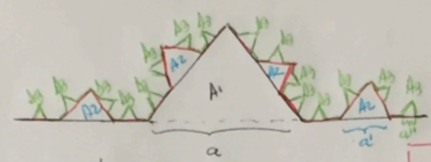
$\vdots$

m) $L_m = \frac{4}{3} \cdot L_{n-1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4^{m-1}}{3^{m-1}} \cdot L_0 = \frac{4^m}{3^m} \cdot L_0$

$$L_\infty = L_0 \lim_{m \to \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^m = \infty$$

c) Encuentre el área de la región delimitada por S.

Determinar el area bajo la curva de KOCH:



$\boxed{a = \frac{L_0}{3}}$

$\boxed{a' = \frac{L_0}{3} \cdot \frac{1}{3}}$

$\boxed{a'' = \frac{L_0}{3} \cdot \frac{1}{3} \frac{1}{3}}$

Area de Δ equilátero:

$$A_1 = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1$$

$$A_2 = a'^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4$$

$$A_3 = a''^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 16$$

La curva de KOCH en la 3era iteración tendrá una area de:

$$A_1 + A_2 + A_3$$

$$\underbrace{\left(\frac{L_0}{3^1}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \overset{4^0}{1}}_{L_1} + \underbrace{\left(\frac{L_0}{3^2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \overset{4^1}{4}}_{L_2} + \underbrace{\left(\frac{L_0}{3^3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \overset{4^2}{16}}_{L_3}$$

$$\Rightarrow A_m = \sum_{k=1}^{m} 4^{k-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{10}{3^k}\right)^2 \qquad m = 1, 2, \ldots$$

$$\text{Para } A_\infty = \lim_{m\to\infty} A_m = \frac{\sqrt{3}}{4^2} 10^2 \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{4}{3^2}\right)^k$$

$$= \frac{4}{3^2} \frac{\sqrt{3}}{4^2} 10^2 \cdot \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{4}{3^2}\right)^k$$

$$A_\infty = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4^2} 10^2 \frac{1}{1-\frac{4}{3^2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} 10^2$$

$\frac{1}{5}$ (Δ lado $= \frac{L_0}{1}$)

d) Encuentre la dimensión de similitud de la curva perímetro de S.

m = cantidad de copias que tengo= 4 (eran 3 y agregue 1)

r = factor de escala = 0.75 (por cuanto lo tengo que multilicar para regresar al 1 inicial.)

$Dim = Ln(m)/Ln(r) = Ln(4)/Ln(0.75) = -4.82$

El copo de nieve es continuo, pero no diferenciable, hablando sueltamente ”todo son esquinas”.