

Objectius

En aquesta quinzena aprendràs a:

- Distingir entre magnituds directament i inversament proporcionals.
- Resoldre diferents situacions sobre proporcionalitat directa i inversa amb dues o més magnituds.
- Fer repartiments directament i inversament proporcionals.
- Calcular percentatges.
- Calcular directament augmentos i disminucions percentuals.
- Resoldre diferents exercicis sobre percentatges.

Abans de començar

1. Proporció numèrica pàg. 4
Raó entre dos nombres
Proporcionalitat
2. Proporcionalitat directa pàg. 6
Raó de proporcionalitat
Regla de tres directa
Reducció a la unitat
3. Proporcionalitat inversa pàg. 8
Raó de proporcionalitat
Regla de tres inversa
Reducció a la unitat
4. Proporcionalitat composta pàg. 10
Proporcionalitat composta
5. Repartiments proporcionals pàg. 12
Directament proporcionals
Inversament proporcionals
6. Percentatges pàg. 14
Tant per cent d'una quantitat
Tant per cent corresponent a una proporció
7. Variacions percentuals pàg. 16
Augments percentuals
Disminucions percentuals
Encadenament d'augments i disminucions percentuals.

Exercicis per practicar

Para saber-ne més

Resum

Autoavaluació

Activitats per enviar al tutor

Abans de començar



Elaborar una recepta de cuina és una activitat de magnituds directament proporcionals



Calcular el preu d'una excursió és una activitat de magnituds inversament proporcionals



Planificar un treball per acabar-lo a temps és una activitat de proporcionalitat composta



Repartir els beneficis d'un treball entre els realitzadors és un repartiment directament proporcional



Repartir diners entre persones segons les seves necessitats és un repartiment inversament proporcional



Per mesurar la capacitat d'un pantà o d'un dipòsit es fan servir percentatges



Per calcular la pujada salarial dels treballadors s'aplica un augment percentual



Les rebaixes en supermercats i comerços es calculen aplicant una disminució percentual



Les variacions en el preu de l'habitatge s'expressen també mitjançant percentatges

Algunes aplicacions: ofertes de supermercats

Contínuament veiem diferents ofertes en supermercats i comerços que intenten atreure l'atenció del consumidor:

- Comprí'n 3 i pagui 2.
- La segona unitat a meitat de preu.
- Quatre pel preu de tres.
- 15% de descompte en tots els productes.

En aquesta unitat obtindràs els coneixements necessaris per saber la que més t'interessa.



Proporcionalitat

1. Proporció numèrica

Raó entre dos nombres

Si recordem el que vam estudiar el curso anterior, una **raó** entre dos nombres a i b és el quotient entre a i b .

$$\text{Raó entre } a \text{ i } b = \frac{a}{b}.$$

A la meva classe hi ha 18 noies i 12 nois. Quina és la raó entre noies i nois? I entre nois i noies?

Raó entre noies i nois

$$\frac{\text{noies}}{\text{nois}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Per cada tres noies hi ha dos nois.

Raó entre nois i noies

$$\frac{\text{nois}}{\text{noies}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Per cada dos nois hi ha tres noies.

Proporció numèrica

Una proporció numèrica és una igualtat entre dues raons numèriques.

En qualsevol proporció el producte dels extrems és igual al producte dels mitjans.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

a i d s'anomenen **extrems**, b i c **mitjans**.

La següent taula indica la quantitat d'aigua enregistrada en dues ciutats A i B, en un any complet i en un mes. Comparar les raons de l'aigua del mes de gener i de tot l'any.

	Any	Gener
Ciutat A	1200	150
Ciutat B	480	80

$$\text{Ciutat A: } \frac{\text{gener}}{\text{any}} = \frac{150}{1200} = \frac{1}{8}$$

$$\text{Ciutat B: } \frac{\text{gener}}{\text{any}} = \frac{80}{480} = \frac{1}{6}$$

Les raons obtingudes per les dues ciutats són diferents, per tant l'expressió:

$$\frac{150}{1200} = \frac{80}{480}$$

no és una proporció.

No és verifica que:

$$150 \cdot 480 = 1200 \cdot 80$$

$$72000 \neq 96000$$

EXERCICIS resolts

1. Un equip ha marcat 68 goles i n'ha encaixat 44. Quina és la raó entre les dues quantitats?

$$\text{Raó entre gols marcats i gols encaixats: } \frac{68}{44} = \frac{17}{11} = 1,55$$

$$\text{Raó entre gols encaixats i gols marcats: } \frac{44}{68} = \frac{11}{17} = 0,65$$

2. Calcular el valor de "x" per tal que les quantitats d'aigua enregistrades en un any complet i en un mes en ambdues ciutats siguin proporcionals.

	Any	Gener
Ciutat A	x	150
Ciutat B	480	80

$$\frac{150}{x} = \frac{80}{480} \Rightarrow 150 \cdot 480 = 80 \cdot x \Rightarrow x = \frac{150 \cdot 480}{80} = 900$$

3. Calcular el valor de "x" per tal que les quantitats d'aigua enregistrades en un anyo complet i en un mes en ambdues ciutats siguin proporcionals.

	Any	Gener
Ciutat A	1200	x
Ciutat B	480	80

$$\frac{x}{1200} = \frac{80}{480} \Rightarrow x \cdot 480 = 1200 \cdot 80 \Rightarrow x = \frac{1200 \cdot 80}{480} = 200$$

4. Calcular el valor de "x" per tal que les quantitats d'aigua enregistrades en un any complet i en un mes en ambdues ciutats siguin proporcionals.

	Any	Gener
Ciutat A	1200	150
Ciutat B	x	80

$$\frac{150}{1200} = \frac{x}{80} \Rightarrow 150 \cdot x = 1200 \cdot 80 \Rightarrow x = \frac{1200 \cdot 80}{150} = 640$$

5. Calcular el valor de "x" per tal que les quantitats d'aigua enregistrades en un any complet i en un mes en ambdues ciutats siguin proporcionals.

	Any	Gener
Ciutat A	1200	150
Ciutat B	480	x

$$\frac{150}{1200} = \frac{x}{480} \Rightarrow 150 \cdot 480 = 1200 \cdot x \Rightarrow x = \frac{150 \cdot 480}{1200} = 60$$

Proporcionalitat

2. Proporcionalitat directa

Constante de proporcionalidad

Dues magnituds són **directament proporcionals** si en multiplicar (o dividir) una d'elles per un nombre, l'altra queda multiplicada (o dividida) pel mateix nombre.

Si a un valor m_1 de la primera magnitud li correspon un valor m_2 de la segona magnitud, es pot comprovar que el quocient o raó entre aquests dos valors és sempre constant. A aquesta quantitat se l'anomena **constant o raó de proporcionalitat directa**.

$$\text{Raó de proporcionalitat: } r = \frac{m_2}{m_1}.$$

Regla de tres directa

Una manera molt fàcil de resoldre una activitat de proporcionalitat directa és un procediment anomenat **regla de tres**.

Consisteix en aprofitar la raó o constant de proporcionalitat directa per calcular el quart terme.

Reducció a la unitat

La regla de tres es converteix en un procediment mecànic, que tot i que permet resoldre de manera fàcil qualsevol activitat, no ajuda a raonar de manera convenient la seva resolució.

Un altre procediment és el que anomenem de **reducció a la unitat**, i consisteix en calcular el valor de la segona magnitud corresponent a una unitat de la primera. aquest valor és el que anteriorment hem anomenat constant de proporcionalitat directa. A partir d'aquí, és més fàcil calcular el valor final de la segona magnitud.

Si 1 quilogram de pomes val 1,80 euros, quin serà el preu de la compra segons el pes?

Nombre de quilos	Preu	Raó de proporcional.
1	1,80	1,80/1=1,80
2	3,60	3,60/2=1,80
3	5,40	5,40/3=1,80
4	7,20	7,20/4=1,80
5	9,00	9,00/5=1,80

En dividir qualsevol valor de la segona magnitud pel valor de la primera magnitud s'obté el mateix quocient.

Si 8 quilos de pomes valen 10,40 euros, quant costaran 13 quilos?

Regla de tres directa

1a magnitud 2a magnitud
quilograms euros

$$8 \text{ ----- } 10,40$$

$$13 \text{ ----- } x$$

$$\frac{10,40}{8} = \frac{x}{13} \Rightarrow x = \frac{10,40 \cdot 13}{8} = 16,90$$

Solució: **16,90 euros.**

Si 8 quilos de pomes valen 10,40 euros, quant costarán 13 quilos?

Reducció a la unitat

1a magnitud 2a magnitud
Quilograms euros

$$8 \text{ ----- } 10,40$$

$$\downarrow : 8 \text{ } \downarrow : 8$$

$$1 \text{ ----- } 1,30$$

$$\downarrow \times 13 \text{ } \downarrow \times 13$$

$$13 \text{ ----- } 16,90$$

Solució: **16,90 euros.**

EXERCICIS resolts

6. Un cotxe ha donat 60 voltes a un circuit en 105 minuts. Calcula el temps que trigarà en recórrer en el mateix circuit 40 voltes.

Regla de tres directa

1a magnitud 2a magnitud
nombre de voltes minuts

$$\begin{array}{rcl} 60 & \cdots & 105 \\ 40 & \cdots & x \\ \hline \frac{105}{60} = \frac{x}{40} \Rightarrow x = \frac{105 \cdot 40}{60} = 70 \end{array}$$

Solució: 70 minuts.

Reducció a la unitat

1^a magnitud 2^a magnitud
nombre de voltes minuts

$$\begin{array}{rcl} 60 & \cdots & 105 \\ \downarrow : 60 & & \downarrow : 60 \\ 1 & \cdots & 1,75 \\ \downarrow \times 40 & & \downarrow \times 40 \\ 40 & \cdots & 70 \end{array}$$

Solució: 70 minuts.

7. Si 12 boles d' acer iguals tenen un pes de 7200 grams, quant pesaran 50 boles iguals a les anteriors?

Regla de tres directa

1a magnitud 2a magnitud
nombre de boles grams

$$\begin{array}{rcl} 12 & \cdots & 7200 \\ 50 & \cdots & x \\ \hline \frac{7200}{12} = \frac{x}{50} \Rightarrow x = \frac{7200 \cdot 50}{12} = 30000 \end{array}$$

Solució: 30000 grams = 30 kg.

Reducció a la unitat

1a magnitud 2a magnitud
nombre de boles grams

$$\begin{array}{rcl} 12 & \cdots & 7200 \\ \downarrow : 12 & & \downarrow : 12 \\ 1 & \cdots & 600 \\ \downarrow \times 50 & & \downarrow \times 50 \\ 50 & \cdots & 30000 \end{array}$$

Solució: 30000 grams = 30 kg.

8. A certa hora del dia un pal de 1,5 metres de llarg projecta una ombra de 60 centímetres. Quant mesura un arbre que a la mateixa hora projecta una ombra de 2,40 metres?

Regla de tres directa

1a magnitud 2a magnitud
ombra m. altura m.

$$\begin{array}{rcl} 0,60 & \cdots & 1,5 \\ 2,40 & \cdots & x \\ \hline \frac{1,5}{0,60} = \frac{x}{2,40} \Rightarrow x = \frac{1,5 \cdot 2,40}{0,60} = 6 \end{array}$$

Solució: 6 metres.

Reducció a la unitat

1a magnitud 2a magnitud
ombra m. altura m.

$$\begin{array}{rcl} 0,60 & \cdots & 1,5 \\ \downarrow : 0,60 & & \downarrow : 0,60 \\ 1 & \cdots & 2,5 \\ \downarrow \times 2,40 & & \downarrow \times 2,40 \\ 2,40 & \cdots & 6 \end{array}$$

Solució: 6 metres.

Proporcionalitat

3. Proporcionalitat inversa

Constant de proporcionalitat

Dues magnituds són **inversament proporcionals** si en multiplicar (o dividir) una d'elles per un nombre, l'altra queda dividida (o multiplicada) per el mateix nombre.

Si a un valor m_1 de la primera magnitud li correspon un valor m_2 de la segona magnitud, es pot comprovar que el producte d'aquests dos valors és sempre constant. A aquest producte se l'anomena **constant de proporcionalitat inversa**.

$$\text{Raó de proporcionalitat: } m_1 \cdot m_2.$$

Regla de tres inversa

Una manera molt fàcil de resoldre una activitat de proporcionalitat inversa és un procediment anomenat regla de tres inversa.

Consisteix enaprofitar la constant de proporcionalitat inversa per calcular el quart terme.

Reducció a la unitat

Però la regla de tres inversa es converteix en un procediment mecànic que, tot i permetre resoldre fàcilment qualsevol activitat, no afavoreix raonar de manera convenient aquesta resolució.

Un altre procediment, que s'anomena de reducció a la unitat, consisteix en calcular el valor de la segona magnitud corresponent a una unitat de la primera. Aquest valor és el que anteriorment hem anomenat constant de proporcionalitat inversa. A partir d'aquí és més fàcil calcular el valor final de la segona magnitud.

Una alumna compra un regal de 72 euros per a una companya de la classe. Quant hauran de pagar els alumnes que hi participen?

Nre de persones	Preu	Constant de proporcional.
1	72	$1 \cdot 72 = 72$
2	36	$2 \cdot 36 = 72$
3	24	$3 \cdot 24 = 72$
4	18	$4 \cdot 18 = 72$
5	14,40	$5 \cdot 14,40 = 72$

En multiplicar els valors corresponents a les dues magnituds s' obté el mateix producte.

18 alumnes han pagat 6 euros cadascun per comprar un regal a una companya, quant haurà de pagar cada un si al final participen 24 alumnes?

Regla de tres directa

1a magnitud 2a magnitud
nre persones euros

$$\begin{array}{ccc} 18 & \cdots & 6 \\ 24 & \cdots & x \\ 18 \cdot 6 = 24 \cdot x \Rightarrow x = \frac{18 \cdot 6}{24} = 4,50 \end{array}$$

Solució: **4,50 euros.**

18 alumnes han pagat 6 euros cadascun pera comprar un regal a una companya, quant hauran de pagar cada un si al final participen 24 alumnes?

Reducció a la unitat

1a magnitud 2a magnitud
nre persones euros

$$\begin{array}{ccc} 18 & \cdots & 6 \\ \downarrow : 18 & & \downarrow \times 18 \\ 1 & \cdots & 108 \\ \downarrow \times 24 & & \downarrow : 24 \\ 24 & \cdots & 4,50 \end{array}$$

Solució: **4,50 euros**

EXERCICIS resultats

9. Un cotxe circulant a 90 km/h ha tardat 12 hores en realitzar un viatge. Quant temps tardarà en el mateix trajecte a una velocitat de 80 km/h?

Regla de tres inversa

1a magnitud Km/h	2a magnitud hores
90	12
80	x

$$90 \cdot 12 = 80 \cdot x \Rightarrow x = \frac{90 \cdot 12}{80} = 13,5$$

Solució: 13,5 hores.

Reducció a la unitat

1a magnitud Km/h	2a magnitud hores
90	12
$\downarrow : 90$	$\downarrow \times 90$
1	1080
$\downarrow \times 80$	$\downarrow : 80$
80	13,5

Solució: 13,5 hores.

10. 6 fotocopiadores tarden 6 hores en realitzar un gran nombre de còpies, quant temps tardarien 4 fotocopiadores en realitzar el mateix treball?

Regla de tres inversa

1a magnitud fotocopiadores	2a magnitud hores
6	6
4	x

$$6 \cdot 6 = 4 \cdot x \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 6}{4} = 9$$

Solució: 9 hores.

Reducció a la unitat

1a magnitud fotocopiadores	2a magnitud hores
6	6
$\downarrow : 6$	$\downarrow \times 6$
1	36
$\downarrow \times 4$	$\downarrow : 80$
4	9

Solució: 9 hores.

11. En repartir una quantitat d'euros entre 7 persones cada una rep 12 euros. Quant rebrien si el repartiment es fes entre 6 persones?

Regla de tres inversa

1a magnitud persones	2a magnitud euros
7	12
6	x

$$7 \cdot 12 = 6 \cdot x \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 12}{6} = 14$$

Solució: 14 euros.

Reducció a la unitat

1a magnitud persones	2a magnitud euros
7	12
$\downarrow : 7$	$\downarrow \times 7$
1	84
$\downarrow \times 6$	$\downarrow : 6$
6	14

Solució: 14 euros.

Proporcionalitat

4. Proporcionalitat composta

Proporcionalitat composta

Una activitat de proporcionalitat composta relaciona més de dues magnituds que poden ser directament o inversament proporcionals.

Para resoldre una activitat de proporcionalitat composta es fa de manera ordenada amb el procediment de reducció a la unitat.

Tres motors iguals funcionen 6 hores necessiten 9000 litres d'aigua per refrigerar-se. Quants litres d'aigua necessitaran 5 motors funcionant 8 hores?

1a magnitud motors	2a magnitud hores	3a magnitud litres
3	6	9000
$\downarrow : 3$	\downarrow	$\downarrow : 3$
1	6	3000
$\downarrow \times 5$	\downarrow	$\downarrow \times 5$
5	6	15000
\downarrow	$\downarrow : 6$	$\downarrow : 6$
5	1	2500
\downarrow	$\downarrow \times 8$	$\downarrow \times 8$
5	8	20000

Solució: **20000 litres d'aigua.**

Tres obrers treballant 8 hores diàries fan una feina en 15 dies. Quants dies trigaran en fer el treball 5 obrers treballant 9 hores?

1a magnitud obrers	2a magnitud hores	3a magnitud dies
3	8	15
$\downarrow : 3$	\downarrow	$\downarrow \times 3$
1	8	45
$\downarrow \times 5$	\downarrow	$\downarrow : 5$
5	8	9
\downarrow	$\downarrow : 8$	$\downarrow \times 8$
5	1	72
\downarrow	$\downarrow \times 9$	$\downarrow : 9$
5	9	8

Solució: **8 dies.**

Procediment de resolució:

En primer lloc, es deixa fixa la segona magnitud i es relaciona la primera amb la tercera.

En segon lloc, es deixa fixa la primera magnitud i es relaciona la segona amb la tercera.

1a magnitud: nombre de motors.

2a magnitud: nombre d' hores.

3a magnitud: nombre de litres.

Es deixa fixa la segona magnitud.

La primera i la tercera magnitud són directament proporcionals. Més motors necessitaran més litres d'aigua per refrigerar-se.

Es deixa fixa la primera magnitud.

La segona i la tercera magnitud són directament proporcionals. Si funcionen durant més hores necessitaran més litres d'aigua per refrigerar-se.

EXERCICIS resultats

12. Tres aixetes omplen un dipòsit de 10 m^3 en 5 hores. Quant trigaran en omplir un dipòsit de 8 m^3 dues aixetes iguals a les anteriors?

La primera i la tercera magnitud són inversament proporcionals. Més aixetes trigaran menys temps en omplir el dipòsit.

La segona i la tercera magnitud són directament proporcionals. Si el dipòsit és més gran es trigarà més temps en omplir-lo.

1a magnitud aixetes	2a magnitud metres cúbics	3a magnitud hores
3	10	5
$\downarrow : 3$	\downarrow	$\downarrow \times 3$
1	10	15
$\downarrow \times 2$	\downarrow	$\downarrow : 2$
2	10	7,5
\downarrow	$\downarrow : 10$	$\downarrow : 10$
2	1	0,75
\downarrow	$\downarrow \times 8$	$\downarrow \times 8$
2	8	6

Solució: 6 hores.

13. Amb 12 quilos de pinso 9 conills mengen durant 6 dies. Quants dies trigaran 4 conills en menjar 8 quilos de pinso?

La primera i la tercera magnitud són directament proporcionals. Més quilos de pinso suposa aliment per més dies.

La segona i la tercera magnitud són inversament proporcionals. Més conills menjant trigaran menys dies en menjar-se el pinso.

1a magnitud quilos de pinso	2a magnitud conills	3a magnitud dies
12	9	6
$\downarrow : 12$	\downarrow	$\downarrow : 12$
1	9	0,5
$\downarrow \times 8$	\downarrow	$\downarrow \times 8$
8	9	6
\downarrow	$\downarrow : 9$	$\downarrow \times 9$
8	1	36
\downarrow	$\downarrow \times 4$	$\downarrow : 4$
8	4	9

Solució: 9 dies.

5. Repartiments proporcionals

Repartiments directament proporcionals

Es vol repartir una certa quantitat en unes quantes parts amb unes determinades condicions.

Cadascuna de les parts ha de rebre una quantitat directament proporcional a uns valors inicials.

Si el valor inicial d'una part és més gran, li corresponderà una quantitat major en el repartiment.

1. En primer lloc cal sumar els valors inicials de cada una de les parts.
2. A continuació es divideix la quantitat a repartir entre la suma obtinguda.
3. Per acabar es multiplica el quocient obtingut pels valors inicials de cada una de les parts.

Repartiments inversament proporcionals

Es vol repartir una certa quantitat en unes quantes parts amb unes determinades condicions.

Cadascuna de les parts ha de rebre una quantitat inversament proporcional a uns valors inicials.

Si el valor inicial d'una part és més gran, li corresponderà una quantitat menor en el repartiment.

Fer un repartiment inversament proporcional a uns valors inicials és igual que fer un repartiment directament proporcional als inversos d'aquests valors inicials.

1. En primer lloc es calculen els inversos dels valors inicials de cadascuna de les parts.
2. Després cal sumar els inversos dels valors inicials que s'han calculat.
3. A continuació es divideix la quantitat a repartir entre la suma obtinguda.
4. Finalment, es multiplica el quocient obtingut pels inversos dels valors inicials de cadascuna de les parts.

Dues nenes ajunten 1,20 i 1,80 euros que tenien per comprar un paquet de cromos d'una sèrie de dibuixos animats. El paquet conté 120 cromos. Com s'han de repartir els cromos de manera justa?

1. Es sumen els valors inicials:

$$1,20 + 1,80 = 3$$

2. Es divideix 120 entre 3

$$120 : 3 = 40$$

3. Es multipliquen els valors inicials per 40.

$$1,20 \cdot 40 = 48 \text{ cromos}$$

$$1,80 \cdot 40 = 72 \text{ cromos}$$

Comprovació:

$$48 + 72 = 120$$

Els dos cambrers d'un bar es reparteixen un pot amb 136 euros de propina, de manera inversament proporcional al nombre de dies que han faltat, que han estat respectivament 3 i 5 dies. Quants euros els correspon a cadascú?

1. Es sumen els inversos dels valors inicials:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$$

2. Es divideix 136 entre 8/15

$$136 : \frac{8}{15} = \frac{2040}{15} = 255$$

3. Es multipliquen els inversos dels valors inicials per 255.

$$255 \cdot \frac{1}{3} = 85 \quad 255 \cdot \frac{1}{5} = 51$$

Comprovació:

$$85 + 51 = 136$$

EXERCICIS resultats

14. Per un reportatge fotogràfic tres fotògrafs van cobrar 6720 euros. Del reportatge, 14 fotos eren del primer fotògraf, 18 del segon i 24 del tercer. Quina quantitat d'euros li correspon a cadascun?

1. Es sumen els valors inicials: $14 + 18 + 24 = 56$

2. Es divideix 6720 entre 56: $6720 : 56 = 120$

3. Es multipliquen els valors inicials per 120.

$$120 \cdot 14 = 1680 \text{ euros}$$

$$120 \cdot 18 = 2160 \text{ euros}$$

$$120 \cdot 24 = 2880 \text{ euros}$$

15. Repartir 540 caramels entre quatre nens de manera directament proporcional a les edats de cadascun d'ells, que són 3, 4, 5 i 6 anys.

1. Es sumen els valors inicials: $3 + 4 + 5 + 6 = 18$

2. Es divideix 540 entre 18: $540 : 18 = 30$

3. Es multipliquen els valors inicials per 30.

$$30 \cdot 3 = 90 \text{ caramels}$$

$$30 \cdot 4 = 120 \text{ caramels}$$

$$30 \cdot 5 = 150 \text{ caramels}$$

$$30 \cdot 6 = 180 \text{ caramels}$$

16. Segons un testament una fortuna de 65000 euros es reparteix entre tres persones en parts inversament proporcionals al sou de cadascuna que és 900, 1350 i 1800 euros. Quina quantitat correspon a cadascun dels hereus?

1. Es sumen els inversos dels valors inicials: $\frac{1}{900} + \frac{1}{1350} + \frac{1}{1800} = \frac{13}{5400}$

2. Es divideix 65000 entre 13/5400: $65000 : \frac{13}{5400} = 27000000$

3. Es multipliquen els inversos dels valors inicials per 27000000.

$$27000000 \cdot \frac{1}{900} = 30000 ; 27000000 \cdot \frac{1}{1350} = 20000 ; 27000000 \cdot \frac{1}{1800} = 15000$$

17. Repartir 114 caramels entre quatre nens de forma inversament proporcional a les seves edats, que són 3, 4, 5 i 6 anys.

1. Es sumen els inversos dels valors inicials: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20}$

2. Es divideix 114 entre 19/20: $114 : \frac{19}{20} = 120$

3. Es multipliquen els inversos dels valors inicials per 120.

$$120 \cdot \frac{1}{3} = 40 ; 120 \cdot \frac{1}{4} = 30 ; 120 \cdot \frac{1}{5} = 24 ; 120 \cdot \frac{1}{6} = 20$$

Proporcionalitat

6. Percentatges

Tant per cent d'una quantitat

Calcular el r % d'una quantitat Q equival a resoldre una activitat de magnituds directament proporcionals: "Si al valor 100 de la primera magnitud li correspon el valor Q de la segona, aleshores al valor r de la primera magnitud li correspon el valor buscat r % de Q".

$$\begin{array}{ccc} 100 & \cdots & Q \\ r & \cdots & r \% \text{ de } Q \end{array}$$

Però, en desenvolupar aquest procediment es pot comprovar que per calcular el r % de Q es multiplica Q per r i es divideix per 100.

$$r \% \text{ de } C = \frac{r \cdot C}{100}$$

Tant per cent corresponent a una proporció

Calcular el % que representa una quantitat P d'un total Q equival a resoldre una activitat de magnituds directament proporcionals: "Si al valor Q de la primera magnitud li correspon el valor 100 de la segona, aleshores al valor P de la primera magnitud li correspon el percentatge buscat.

$$\begin{array}{ccc} Q & \cdots & 100 \\ P & \cdots & ? \end{array}$$

Però, en desenvolupar aquest procediment, es pot comprovar que para calcular el % es divideix P per Q i es multiplica per 100.

$$\frac{P}{C} \cdot 100 \%$$

La capacitat d'un embassament és de 53 hm³. Quants litres d'aigua té si està ple en un 15%?

Regla de tres directa

1a magnitud 2a magnitud
Percentatge hm³

$$100 \cdots \cdots \cdots 53$$

$$15 \cdots \cdots \cdots x$$

$$\frac{53}{100} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{53 \cdot 15}{100} = 7,95$$

Solució: 7,95 hm³ =
= 795000000 litres

Directament:

$$15\% \text{ de } 53 = \frac{15 \cdot 53}{100} = 7,95$$

A classe hi ha 32 estudiants. Si 20 d'ells són noies, quin percentatge del total representen?

Regla de tres directa

1a magnitud 2a magnitud
estudiants percentatge

$$32 \cdots \cdots \cdots 100$$

$$20 \cdots \cdots \cdots x$$

$$\frac{100}{32} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 20}{32} = 62,5$$

Directament:

$$\frac{20}{32} \cdot 100 = 62,5 \%$$

Solució:

Alumnes: 20 de 32 → 62,5 %

EXERCICIS resolts

18. a) Calcula el 32 % de 125. b) Calcula el 78 % de 4960.

$$32\% \text{ de } 125 = \frac{32 \cdot 125}{100} = 125 \cdot 0,32 = 40$$

$$78\% \text{ de } 4960 = \frac{78 \cdot 4960}{100} = 4960 \cdot 0,78 = 3868,8$$

19. a) Quin percentatge representa 396 d'un total de 600?
 b) Quin percentatge representa 3576 d'un total de 4622?

$$\frac{396}{600} \cdot 100 = 66\% \quad \frac{3576}{4622} \cdot 100 = 77,37\%$$

20. a) El 83 % d'una quantitat és 9130. Calcula aquesta quantitat.
 b) El 12 % d'una quantitat es 8,4. Calcula aquesta quantitat.

$$C \cdot 0,83 = 9130 \Rightarrow C = \frac{9130}{0,83} = 11000$$

$$C \cdot 0,12 = 8,4 \Rightarrow C = \frac{8,4}{0,12} = 70$$

21. El cens electoral d'una població és de 24600 persones. En unes eleccions un partit polític ha obtingut el 42,5 % dels vots. Quantes persones l'han votat?

$$42,5\% \text{ de } 24600 = \frac{42,5 \cdot 24600}{100} = 24600 \cdot 0,425 = 10455 \text{ personas}$$

22. Una màquina fabrica al dia 450 peces, de les quals 18 presenten algun defecte i no es fan servir. Quin percentatge de peces defectuosos fabrica la màquina?

$$\frac{18}{450} \cdot 100 = 4\%$$

23. El 34% de les persones presents en un congrés són espanyols. Si sabem que hi ha 85 espanyols, quantes persones hi ha en el congrés?

$$C \cdot 0,34 = 85 \Rightarrow C = \frac{85}{0,34} = 250$$

7. Variacions percentuals

Augments percentuals

Per augmentar una quantitat Q un $r\%$, es calcula el $r\%$ de Q i es suma el resultat obtingut a la quantitat Q .

També es pot calcular directament. Per fer-ho, es calcula l'augment que correspon a una unitat, anomenat **índex de variació**:

$$\text{Índex de variació: I.V.} = 1 + \frac{r}{100}$$

Per calcular el valor augmentat d'una quantitat inicial Q , n'hi haurà prou amb multiplicar Q per l'índex de variació.

Disminucions percentuals

Per disminuir una quantitat Q , un $r\%$, es calcula el $r\%$ de Q i després es resta el resultat obtingut a la quantitat Q .

També es pot calcular directament. Per fer-ho, es calcula la disminució que correspon a una unitat, anomenada **índex de variació**:

$$\text{Índex de variació: I.V.} = 1 - \frac{r}{100}$$

Per a calcular el valor disminuït que correspon a una quantitat inicial Q , n'hi haurà prou amb multiplicar Q per l'índex de variació.

Augments i disminucions percentuals encadenats

Ara es tracta d'aplicar de forma consecutiva dos o més augmentos o disminucions percentuals a una quantitat.

El primer augment o disminució s'aplicarà a la quantitat inicial i el segon a la quantitat resultant en el pas anterior.

El preu d'una bicicleta era de 240 euros. A aquest preu se li ha d'afegir el 16% d' IVA. Quin és el preu final?

Pas a pas:

$$16\% \text{ de } 240 = \frac{16 \cdot 240}{100} = 38,40$$

$$240 + 38,40 = 278,40 \text{ euros}$$

Directament:

$$\text{I.V.} = 1 + \frac{16}{100} = 1 + 0,16 = 1,16$$

$$240 \cdot 1,16 = 278,40 \text{ euros}$$

Solució: 278,40 euros

El preu d'un ordinador era de 1200 euros, però m'han fet un 15% de descompte. Quin és el preu final?

Pas a pas:

$$15\% \text{ de } 1200 = \frac{15 \cdot 1200}{100} = 180$$

$$1200 - 180 = 1020 \text{ euros}$$

Directament:

$$\text{I.V.} = 1 - \frac{15}{100} = 1 - 0,15 = 0,85$$

$$1200 \cdot 0,85 = 1020 \text{ euros}$$

Solució: 1020 euros

Per aplicar augmentos i disminucions percentuals encadenats es calcula l'índex de variació de cada variació percentual. La quantitat final es calcula multiplicant la quantitat inicial pels índexs de variació:

$$QF = QI \cdot IV_1 \cdot IV_2$$

EXERCICIS resolts

24. En pujar el preu d'una bicicleta un 20%, el preu final és ara de 360 euros. Quin era el seu preu inicial?

$$\text{Índex de variació: } I.V. = 1 + \frac{20}{100} = 1 + 0,20 = 1,20$$

$$C.I. \cdot I.V. = C.F. \Rightarrow C.I. \cdot 1,20 = 360 \Rightarrow C.I. = \frac{360}{1,20} = 300 \text{ euros}$$

25. En augmentar el preu d'una bicicleta ha passat de 450 a 504 euros. Quin tant per cent ha pujat?

$$C.I. \cdot I.V. = C.F. \Rightarrow 450 \cdot I.V. = 504 \Rightarrow I.V. = \frac{504}{450} = 1,12 = 1 + \frac{12}{100} \Rightarrow 12\%$$

26. Després de rebaixar el preu d'un ordinador un 8%, m'ha costat 1196 euros. Quin era el seu preu inicial?

$$\text{Índex de variació: } I.V. = 1 - \frac{8}{100} = 1 - 0,08 = 0,92$$

$$C.I. \cdot I.V. = C.F. \Rightarrow C.I. \cdot 0,92 = 1196 \Rightarrow C.I. = \frac{1196}{0,92} = 1300 \text{ euros}$$

27. En rebaixar el preu d'un ordinador ha passat de 1100 euros a 957 euros. Quin tant per cent ha baixat?

$$C.I. \cdot I.V. = C.F. \Rightarrow 1100 \cdot I.V. = 957 \Rightarrow I.V. = \frac{957}{1100} = 0,87 = 1 - \frac{13}{100} \Rightarrow 13\%$$

28. Una jocuina val en una botiga de joguines 40 euros. Durant les festes de Nadal puja un 22% i un cop passat festes, baixa un 9%. Calcula el seu preu final.

$$\text{Augment del 22\%: } \text{Índex de variació: } I.V.1 = 1 + \frac{22}{100} = 1 + 0,22 = 1,22$$

$$\text{Disminució del 9\%: } \text{Índex de variació: } I.V.2 = 1 - \frac{9}{100} = 1 - 0,09 = 0,91$$

$$C.F. = C.I. \cdot I.V.1 \cdot I.V.2 = 40 \cdot 1,22 \cdot 0,91 = 44,41 \text{ euros}$$

29. El preu d'un mòbil era de 420 euros. M'han rebaixat un 16%, però després m'han carregat el 16% de IVA. Quant m'ha costat?

$$\text{Disminució del 16\%: } \text{Índex de variació: } I.V.1 = 1 - \frac{16}{100} = 1 - 0,16 = 0,84$$

$$\text{Augment del 16\%: } \text{Índex de variació: } I.V.2 = 1 + \frac{16}{100} = 1 + 0,16 = 1,16$$

$$C.F. = C.I. \cdot I.V.1 \cdot I.V.2 = 420 \cdot 0,84 \cdot 1,16 = 409,25 \text{ euros}$$

Proporcionalitat



Per practicar

1. S'han pagat 255 euros per la compra de 3 calculadores. Quant valen 7 calculadores? I 30? I 23?
2. Un automòbil consumeix 56 litres de gasolina en recórrer 800 quilòmetres, quants litres de gasolina consumirà en un viatge de 500 quilòmetres?
3. Una canonada té una fuita d'aigua i perd 322 litres d'aigua cada 7 minuts. Quant trigarà en perdre 2300 litres?
4. Disposem de 420 litres d'aigua emmagatzemats en 7 dipòsits iguals. Quants litres d'aigua hi haurà en 13 dipòsits iguals als anteriors?
5. Una màquina envasa 1200 llaunes de refresc en una jornada de 8 hores. Quantes llaunes de refresc envasarà en un dia si treballa 5 hores?
6. Completa la taula sabent que les dues magnituds són directament proporcionals:

24	8	b	40	d	6,6	f
60	a	30	c	75	e	0,25
7. Nou persones realitzen un treball en 16 dies. Quant de temps tardaran en realitzar el mateix treball 8 persones?
8. Una aixeta deixa anar 20 litres d'aigua en un minut i tarda una hora i 30 minuts en omplir un dipòsit. Quant de temps tardarà en omplir el mateix dipòsit una aixeta que deixa anar 30 litres d'aigua cada minut?
9. Quatre persones tarden 40 dies en pintar la paret exterior d'un camp de futbol, quants dies tardaran 5 persones en fer el mateix treball?
10. Un tren circulant a 120 km/h ha tardat 6 hores en fer un recorregut. Quant de temps tardarà en fer el mateix recorregut un tren que circula a una velocitat de 90 km/h?
11. Un rectangle té 25 centímetres de base i 18 centímetres d'altura. Quina altura ha de tenir un rectangle de 15 centímetres de base per tenir la mateixa superfície?
12. Completa la taula sabent que les dues magnituds són directament proporcionals:

15	40	b	180	d	0,5	f
24	a	60	c	120	e	0,01
13. Sis obrers enllosen 1200 m² de terra en 4 dies. Quants metres quadrats de terra enllosaran 12 obrers en 5 dies?
14. En una campanya publicitària 6 persones reparteixen 5000 fullets en 5 dies. Quants dies tardaran 2 persones en repartir 3000 fullets?
15. Per construir 4 cases iguals en 30 dies fan falta 60 paletes. Quants paletes es necessitaran per construir 6 cases en 90 dies
16. Per imprimir uns fullets publicitaris, 9 impressores han funcionat 8 hores diàries durant 40 dies. Quants dies tardaran en imprimir el mateix treball 6 impressores funcionant 10 hores diàries?
17. Vint obrers han col·locat durant 6 dies 400 metres de cable treballant 8 hores diàries. Quantes hores diàries hauran de treballar 24 obrers durant 14 dies per estendre 700 metres de cable?
18. Reparteix 2100 euros de forma directament proporcional a:
 - 1 i 2
 - 1, 2 i 3
 - 1, 2, 3 i 4
 - 1, 2, 3, 4 i 5
 - 1, 2, 3, 4, 5 i 6

19. Cinc concursants participen en una competició en la que han de trobar objectes en el fons d'una piscina. Per ordre d'actuació aconsegueixen respectivament 8, 12, 13, 7 i 10 objectes. El premi de la prova consisteix en 150 punts repartits de forma proporcional als objectes que trobin. Quants punts corresponen a cada participant?
20. Tres socis van posar en marxa un negoci aportant, 5000 euros el primer, 25000 euros el segon i 20000 euros el tercer. El primer any s'obtenen 60000 euros de benefici, com se'ls han de repartir?
21. Realitza els següents repartiments inversament proporcionals:
a) Reparteix 144 entre 1 i 2
b) Reparteix 132 entre 1, 2 i 3
c) Reparteix 175 entre 1, 2, 3 i 4
d) Reparteix 137 entre 1, 2, 3, 4 i 5
e) Reparteix 294 entre 1, 2, 3, 4, 5 i 6
22. Tres amics es reparteixen una pizza de forma inversament proporcional als seus pesos que són respectivament 60, 72 i 90 quilograms. Quina part de pizza s'ha de menjar cadascú?
23. Un professor lliura una relació de 86 exercicis a quatre alumnes per repartir-se'ls amb la condició que cada u en resolgui una quantitat inversament proporcional a les qualificacions obtingudes en un examen. Les qualificacions han estat 2, 4, 5 i 8. Quants exercicis ha de resoldre cadascú?
24. La factura de dos mesos de llum d'una família és de 65 euros, sense afegir el 16 % de IVA. Quant euros cal afegir d'IVA.? Quin és el preu final de la factura?
25. El 45 % de l'alumnat d'un institut ha aprovat totes les matèries a final de curs. Si han aprovat 234 alumnes, quants estudiants hi ha a l'institut?
26. Un treball fet en un taller d'automòbils val 80 euros. Si es paga al comptat ens fan un descompte del 7 %. Quant ens han descomptat? Quant hem de pagar?
27. Un rellotge valia 32 euros, però el rellotger me l'ha rebaixat i he pagat finalment 28.80 euros. Quin tant per cent m'ha rebaixat?
28. Durant un incendi s'han cremat el 40 % dels arbres d'un bosc. Si després de l'incendi contem 4800 arbres, quants arbres hi havia al principi?
29. El preu d'un vestit és de 360 euros. En les rebaixes es fa primer un descompte del 30% i després es torna a rebaixar un 20%. Quin és el preu final?
30. El preu d'un cotxe és de 11400 euros. En comprar-lo m'han fet un descompte del 22 %, però després s'havia de pagar un 17% d' impostos de matriculació. Quin és el preu final?
31. Un article que val 50 euros té els següents canvis de preu: primer puja un 30 %, a continuació baixa un 15 %, torna a baixar un 25 %, i finalment té una pujada del 10 %. Quin és el seu preu final? Quin percentatge ha variat respecte del preu inicial?
32. Un empleat ha tingut dues pujades de sou en un any per un percentatge d'un 5 % i un 4 % respectivament. El sou final és de 2184. Quin era el sou a principi d'any?
33. En diferents supermercats ens hem trobat les següents ofertes. Decideix raonadament la que més interessa al consumidor:
a) Paga dos i emporta-te'n tres.
b) Paga 3 i emporta-te'n quatre.
c) La segona a meitat de preu.

Proporcionalitat



Per saber-ne més

Són moltes les situacions de la vida quotidiana i les aplicacions a qualsevol branca del saber de la Proporcionalitat i els Percentatges. Per posar algun exemple podem citar la Llei de Gravitació Universal:



Sir Isaac Newton, (4 de gener de 1643 – 31 de març de 1727).

Fou un científic, físic, filòsof, inventor, alquimista i matemàtic anglès, autor dels *Philosophiae naturalis principia mathematica*, més coneguts com els *Principia*, on va descriure la **Llei de Gravitació Universal** i va establir les bases de la Mecànica Clàssica mitjançant les lleis que porten el seu nom.

Diu així:

La força que exerceix un objecte de massa m_1 sobre un altre de massa m_2 és **directament proporcional** al producte de les masses, i **inversament proporcional** al quadrat de la distància (d) que separa els centres de gravetat.

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

G és la constant de gravitació.
El seu valor és: $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

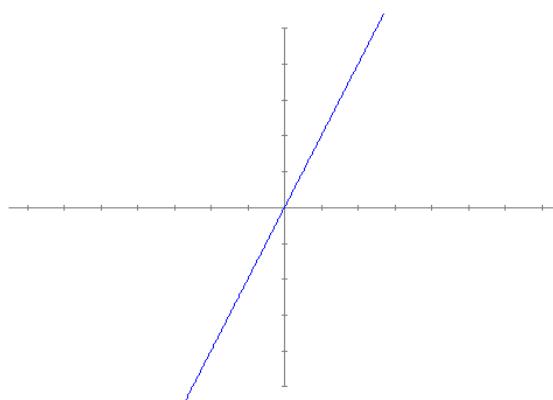


A més a més, en aquest curs estudiaràs la **funció de proporcionalitat directa** i la **funció de proporcionalitat inversa** en la unitat 11.

La funció de proporcionalitat directa és de la forma $f(x) = m \cdot x$, on m és la constant de proporcionalitat directa.

Para $m=2$, una taula de valors és:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	4	6	8	10	12	14	16	18

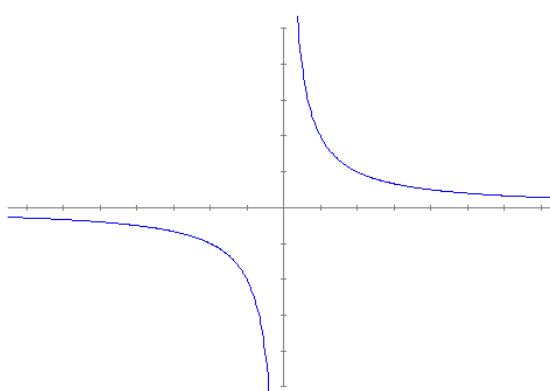


La gràfica és una línia recta.

La funció de proporcionalitat inversa és de la forma $f(x) = k/x$, on k és la constant de proporcionalitat inversa.

Para $k=2$, una taula de valors és:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	1	0,67	0,5	0,4	0,33	0,29	0,25	0,22



La gràfica és una corba anomenada hipèrbola.

Recorda el més important



1. Proporció numèrica

S'anomena **raó** entre a i b al quotient $\frac{a}{b}$.

Una **proporció numèrica** és una igualtat entre dues raons numèriques.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es verifica que $ad=bc$.

3. Proporcionalitat inversa

Magnituds inversament proporcionals.

Si es multiplica o divideix una d'elles per un nombre, l'altra queda dividida o multiplicada pel mateix nombre.

El producte entre cada parella de valors de les dues magnituds és constant. S'anomena **constant de proporcionalitat inversa**.

5a. Repartiments direct. proporcionals

Consisteixen en repartir una quantitat en parts, de manera que cada una d'elles rebi una quantitat directament proporcional al valor inicial de cada part.

Es divideix la quantitat a repartir per la suma dels valors inicials de cada part i es multiplica el resultat per cada valor inicial.

6. Tant por cent

Per a aplicar un **percentatge $r\%$** a una quantitat Q , es pot plantejar una activitat de magnituds directament proporcionals.

$$r\% \text{ de } C = \frac{C \cdot r}{100} = C \cdot \frac{r}{100}$$

Amb aquesta fórmula es pot deduir que per calcular un percentatge només cal multiplicar la quantitat Q per $r/100$.

(Es pot aplicar la fórmula inferior substituint **índex de variació** per $r/100$)

$$\text{Quantitat inicial} \cdot \text{Índex de variació} = \text{Quantitat final}$$

2. Proporcionalitat directa

Magnituds directament proporcionals.

Si es multiplica o divideix una d'elles per un nombre, l'altra queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.

El quotient entre cada parella de valors de les dues magnituds és constant. S'anomena **raó de proporcionalitat directa**.

4. Proporcionalitat composta

La proporcionalitat composta consisteix en relacionar tres o més magnituds.

En resoldre una activitat de proporcionalitat composta es relacionen les magnituds de dues en dues i es mantenen constants les altres.

5b. Repartiments invers. proporcionals

Consisteixen en repartir una quantitat en parts, de manera que cada una d'elles rebi una quantitat inversament proporcional a un valor inicial.

Es fa el repartiment de manera directament proporcional als inversos dels valors inicials de cada una de les parts.

7. Variacions percentuals

Per augmentar o disminuir un percentatge $r\%$ a una quantitat Q , es pot calcular el $r\%$ de Q i sumar o restar aquesta quantitat a la inicial.

Es pot calcular "directament" la quantitat final calculant la variació corresponent a cada unitat, anomenada **índex de variació**, i multiplicar-lo per la quantitat inicial.

$$\text{Per a un augment: I.V.} = 1 + \frac{r}{100}$$

$$\text{Per a una disminució: I.V.} = 1 - \frac{r}{100}$$

Autoavaluació



1. En una canalització, les fuites fan perdre 96 litres d'aigua cada 15 minuts. En quant temps es perdran 2078 litres?

2. Dotze persones fan una feina en 3 dies. Quant de temps trigaran en fer la mateixa feina 3 persones?

3. En una campanya publicitària 10 persones reparteixen 8000 fullletons en 12 dies. Quants dies trigaran 6 persones en repartir 2000 fullletons?

4. Reparteix 344 objectes de manera directament proporcional a 10, 14 i 19.

5. Reparteix 70 objectes de manera inversament proporcional a 6 i 8.

6. A una reunió assisteixen 340 persones. El 50 % són dones. Quantes dones hi ha a la reunió?

7. El 75 % dels arbres d'un bosc són pins. Si sabem que hi ha 900 pins, quants arbres té el bosc?

8. El curs passat, a l'institut hi havia 750 alumnes i aquest any ha augmentat un 12 %. Quants alumnes hi ha ara?

9. La població del meu poble ha passat en un any de 2600 a 2678 habitants. Quin tant per cent ha augmentat?

10. El preu d'una bicicleta era de 360 euros. En primer lloc, s'aplica un augment del 25% i després una rebaixa del 15%. Quin és el seu preu final?

Solucions dels exercicis per practicar

1. 595 €, 2550 €, 1955 €
2. 35 litres
3. 50 minuts
4. 780 litres
5. 750 llaunes
6. $a=20$, $b=12$, $c=100$,
 $d=30$, $e=16,5$, $f=0,1$
7. 18 dies
8. 60 minuts
9. 32 dies
10. 8 hores
11. 30 centímetres
12. $a=9$, $b=6$, $c=2$, $d=3$,
 $e=720$, $f=36000$
13. 3000 metres²
14. 9 dies
15. 30 paletes
16. 48 dies
17. 10 hores
18. a) 700 i 1400 €
b) 350, 700 i 1050 €
c) 210, 420, 630 i 840 €
d) 140, 280, 420, 560 i 700 €
e) 100, 200, 300, 400, 500 i 600 €
19. 24, 36, 39, 21 i 30 punts
20. 6000, 30000 i 24000 euros
21. a) 96 i 48
b) 72, 36 i 24
c) 84, 42, 28 i 21
d) 60, 30, 20, 15 i 12
d) 120, 60, 40, 30, 24 i 20
22. $2/5$, $1/3$ i $4/15$ de pizza
23. 40, 20, 16 i 10 exercicis
24. IVA.: 10,40 €.
Preu final: 75,40 €
25. 520 estudiants
26. Descompte: 5,6 €
Preu final: 74,4 €
27. 10 %
28. 8000 arbres
29. 201,60 €
30. 10403,64 €
31. Preu final: 45,58 €
Descompte: 8,8375 %
32. 2000 euros
33. a) paga: 66,67%, rebaixa: 33,33%
b) paga: 75%, rebaixa: 25%
c) paga: 75%, rebaixa: 25 %

Solucions AUTOAVALUACIÓ

1. 45 minuts
2. 20 dies
3. 10 dies
4. 80, 112 i 152 objectes respectivament
5. 40 i 30 objectes respectivament
6. 238 dones
7. 1200 arbres
8. 840 alumnes
9. 3 %
10. 382,5 euros