GUIA 2 - EJ 1

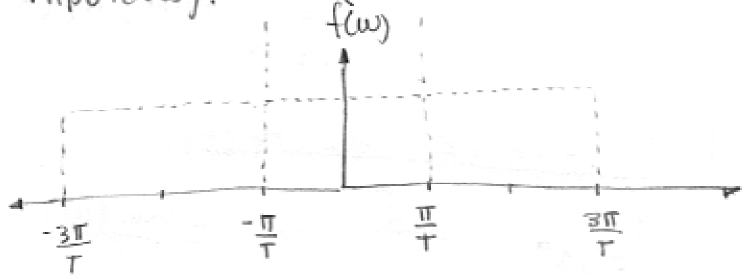
Teorema 3.1 : Si el soporte de $\hat{f}$ está incluido en $[-\pi/T, \pi/T]$ entonces

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(nT)\, h_T(t-nT) \qquad (3.7)$$

con
$$h_T(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \qquad (3.8)$$

Demostración:

Si $n \neq 0$ el soporte de $\hat{f}(\omega - 2n\pi/T)$ no intersecta el soporte de $\hat{f}(\omega)$ porque $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \pi/T$ (por hipótesis).



La formula (3.3):

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) \qquad (3.3)$$

Aplicada a nuestra $\hat{f}(\omega)$ de soporte compacto implica que

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T}\hat{f}(\omega) \qquad \text{si } |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \qquad [3.9]$$

La transformada de Fourier de h_T es $\hat{h}_T = T\, 1_{[-\pi/T, \pi/T]}$ (por [2.28] y propiedades de escalado) y como el soporte de $\hat{f}$ está en $\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$, resulta de [3.9] que

$$\hat{h}_T(\omega)\, \hat{f}_d(\omega) = T \cdot 1_{[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]} \cdot \frac{\hat{f}(\omega)}{T}$$

$$\hat{h}_T(\omega) \cdot \hat{f}_d(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier y el teo. de convolución [2.16]:

$$f(t) = h_T(t) * f_d(t)$$

$$= h_T(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) \qquad \text{Por ecuación 3.1}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h_T(t-u) \sum_{-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(u-nT)\,du$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_T(t-u)\, f(nT)\, \delta(u-nT)\,du$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, h_T(t-nT) \qquad \text{por def. delta de Dirac}$$

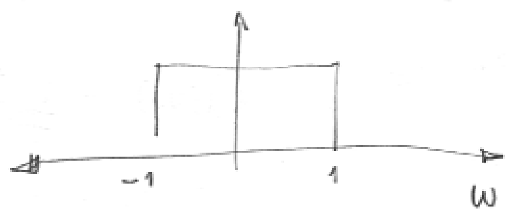
Transformada de $h_T(t)$.

$$1_{[-1,1]} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\sin(\omega)}{\omega}$$

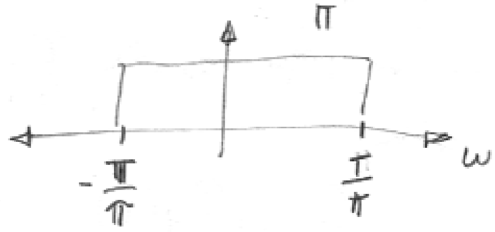
$$\frac{2\sin(t)}{t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\, 1_{[-1,1]} \qquad \text{prop (2.15)}$$

$$\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\frac{\pi}{T}t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\pi . T}{\pi}\, 1_{\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]} \qquad \text{prop (2.20) con } s = \frac{T}{\pi}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\frac{\pi}{T}t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} T \cdot 1_{\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]}$$



multiplico por $\frac{T}{\pi}$



Para que valga 1 ó -1,

$\omega \in \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$

Aliasing

Si el soporte de $\hat{f}$ no está incluido en $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$, la fórmula (3.7) no reconstruye correctamente f.

La proposición 3.1 demuestra que la transf. de Fourier de la señal discreta obtenida a partir de muestrear f a intervalos T es:

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right).$$

Demostración

como $\delta(t-nT)$ es cero fuera de $t = nT$

$$f(nT)\,\delta(t-nT) = f(t)\,\delta(t-nT)$$

entonces se puede reescribir 3.1 como una multiplicación con un tren de impulsos:

$$f_d(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = f(t)\,c(t)$$

Su transformada de Fourier es:

[1] $$\hat{f}_d(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega) * \hat{c}(\omega)}{2\pi}$$ por 2.17

La fórmula de Poisson demuestra que

$$\hat{c}(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$ por 2.37

reemplazando en [1], obtenemos:

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega) * \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

por def. de convolución

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(u)\,\delta\left(u + \frac{2\pi k}{T} - \omega\right)du$$

Probamos qué pasa con la integral y sumatoria intercambiadas:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(u)\,\delta(u+\tfrac{2\pi k}{T}-w)|\,du = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(u)|\cdot\delta(u+\tfrac{2\pi k}{T}-w)\,du$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(w-\tfrac{2\pi k}{T})| < \infty$$

Por prop. convolución con δ, $\hat{f} * \delta(w-\varepsilon) = \hat{f}(w-\varepsilon)$

Los teoremas de Fubini y Tonelli nos permiten intercambiar el orden de la integral y la sumatoria. De esta forma, teniendo en cuenta el resultado anterior:

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(u)\,\delta(u+\tfrac{2\pi k}{T}-w)\,du = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(u)\,\delta(u+\tfrac{2\pi k}{T}-w)\,du = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(w-\tfrac{2\pi k}{T})$$

De esta forma, tenemos que

$$\hat{f}_d(w) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(w-\tfrac{2\pi k}{T}) \qquad [A]$$

Si sucede que el soporte de $\hat{f}$ se sale del intervalo $[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}]$, los componentes de $\hat{f}$ en las frecuencias altas se van a solapar con los componentes de $\hat{f}$ en las frecuencias bajas. Este fenómeno se denomina "aliasing".

[GUIA 2 - E] 2)

En presencia de alias, la señal interpolada

$$h_T * f_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, h_T(t-nT) \qquad \text{(por teo. 3.1)}$$

Tiene transformada de Fourier

$$\hat{f}_d(\omega)\cdot\hat{h}_T(\omega) = T\, 1_{[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}]}(\omega)\, \hat{f}_d(\omega) \qquad \text{por def. de } \mathcal{F}\{h_T\}$$

(3.11) $$= 1_{[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}]}(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) \qquad \text{por [A]}$$

que puede ser muy distinto a $\hat{f}(\omega)$ sobre el intervalo $[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}]$.

Proposición 3.2: El conjunto de funciones $\{h_T(t-nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, con las funciones interpolantes $h_T(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$ forma una base ortogonal para las señales cuya transformada de Fourier tienen soporte incluidos en $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$.

Demostración

$\{h_T(t-nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es ortogonal

Como $\hat{h}_T = T\,1_{[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}]}$ por (2.28) y propiedades de escalado, aplicando la formula de Parseval (2.25) se obtiene:

$$\langle h_T(t-nT), h_T(t-pT)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_T(t-nT)\,\hat{h}_T^*(t-pT)\,d\omega$$

como $\mathcal{F}\{h_T(t-nT)\} = T\,1_{[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}]}\,e^{-inT\omega}$ y $\hat{h}_T^* = T\,1_{[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}]}\,e^{inT\omega}$

$$\langle h_T(t-nT), h_T(t-pT)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T^2\,1_{[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}]}\,e^{-i(n-p)T\omega}\,d\omega$$

$$= \frac{T^2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{-i(n-p)T\omega}\,d\omega$$

Cuando $n=p$, $\frac{T^2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} 1\,d\omega = T.$

Cuando $n\neq p$, si llamamos $A=(n-p)$

$$\frac{T^2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{-iAT\omega}\,d\omega = \frac{T^2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \cos(AT\omega)\,d\omega - \underbrace{i\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \sin(AT\omega)\,d\omega}_{=0}$$

$$= \frac{T^2}{2\pi}\cdot\left(\left[\frac{\sin AT\omega}{AT}\right]_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}\right)$$

como $n,p\in\mathbb{Z}$, $n\pm p\in\mathbb{Z}$ y $\sin(n-p)\pi = 0$.

$$= \frac{T^2}{2\pi}\left(\frac{2\sin A\pi}{AT}\right) = 0$$

De esta forma, vemos que

$$\langle h_T(t-nT), h_T(t-pT)\rangle = \begin{cases} T & \text{si } n=p \\ 0 & \text{si } n\neq p \end{cases}$$

y podemos escribir

$$\langle h_T(t-nT), h_T(t-pT)\rangle = T\,\delta[n-p]$$

claramente, la familia $\{h_T(t-nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es ortogonal y el teorema de Shannon-Whittaker (3.7) demuestra que cualquier f con soporte en $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ puede ser expresada como combinación lineal de $\{h_T(t-nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Entonces, los $\{h_T(t-nT)\}$ son una base ortogonal para las f cuya transformada tiene soporte en $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$, es decir

$$f(nT) = \frac{1}{T}\langle f(t), h_T(t-nT)\rangle \quad [2]$$

<u>Demostración [2]</u>: Utilizando la fórmula de Parseval (2.25)

$$\langle f(t), h_T(t-nT)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, \hat{h}_T^*(t-nT)\, d\omega$$

$$= \frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\cdot 1_{[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]}\, e^{inT\omega}\, d\omega$$

como el escalón y $\hat{f}(\omega)$ tienen soporte en $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$

$$= \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \hat{f}(\omega)\, e^{inT\omega}\, d\omega = T\, f(nT)$$

por def. de Transf. inversa de Fourier

Teorema 3.3

Si $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$ entonces $g = f * h \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y

$$\hat{g}(w) = \hat{f}(w) \cdot \hat{h}(w)$$

¿ $g[n] \in \ell^1(\mathbb{Z})$?

Sea $g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]h[n-k]| \leq$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[k]||h[n-k]|$$

$$\leq \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]|}_{<\infty} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n-k]|}_{<\infty} < \infty$$

de esta forma, $g[n] \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

$$\hat{g}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inw} g[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inw} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k] \right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-inw} f[k]h[n-k]$$

si $v = n-k$
$n = v+k$

$$= \sum_{v+k=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i(v+k)w} f[k]h[v]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikw} f[k] \sum_{v+k=-\infty}^{\infty} e^{-ivw} h[v]$$

$$= \hat{f}(w) \cdot \hat{h}(w)$$

Si $f \in \ell^1(\mathbb{Z}) \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f| < \infty$

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} f[k] \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |e^{-i\omega k} f[k]|$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |e^{-i\omega k}||f[k]|$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]| < \infty$$

Sea $g[n] = (-1)^n h[n]$. Encuentre la relación entre $\hat{g}(w)$ y $\hat{h}(w)$. Si h es un filtro pasabajos, ¿puede $\hat{g}(w)$ ser también pasabajos?

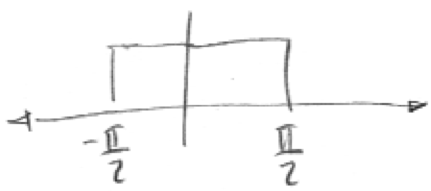
$$\hat{g}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h[n] e^{-jnw}$$

como $(-1)^n = e^{-i\pi n}$

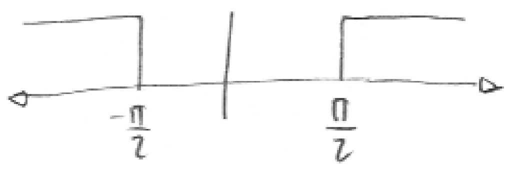
$$\hat{g}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{i\pi n} e^{inw} = \hat{h}(w+\pi)$$

Si h es un filtro pasa bajos entonces g es un pasa altos

h(w) pasabajos ideal :



$g(w) = h(w+\pi)$
pasa altos



Demuestre que si $f_a(t)$ es una función analítica, entonces está enteramente caracterizada por su parte real $f = Re[f_a]$ y es

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\hat{f}_a(\omega) + \hat{f}_a^*(-\omega)}{2}$$

$$f = Re[f_a] = \frac{f_a + f_a^*}{2}$$

$\boxed{f_a^* \text{ es el conjugado complejo}}$

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{f_a + f_a^*}{2}\right)$$

por linealidad de $\mathcal{F}$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}(f_a) + \mathcal{F}(f_a^*)\right]$$

[2.23] $f^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} f^*(-\omega)$

$$= \frac{\hat{f}_a(\omega) + \hat{f}_a^*(-\omega)}{2}$$

Demuestre que si $f(t) = a\cos(\omega_0 t + \phi)$, entonces la función analítica asociada es $f_a(t) = a\, e^{i(\omega_0 t + \phi)}$

Guia 2 - Ej 8

$$f(t) = a\cos(\omega_0 t + \phi)$$

por identidad de Euler

como $\cos(\omega_0 t + \phi) = \dfrac{e^{i(\omega_0 t + \phi)} + e^{-i(\omega_0 t + \phi)}}{2}$, podemos escribir

$$f(t) = \frac{a}{2}\left[e^{i(\omega_0 t + \phi)} + e^{-i(\omega_0 t + \phi)}\right]$$

$$e^{i\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\hat{f}(\omega) = \pi a\left[e^{i\phi}\delta(\omega - \omega_0) + e^{-i\phi}\delta(\omega + \omega_0)\right]$$

Una función f es analítica si $\hat{f}(\omega) = 0$ cuando $\omega < 0$. [Mallat p. 84]

Del ejercicio anterior y la ecuación [4.47] de Mallat tenemos que

$$\hat{f}_a(\omega) = \begin{cases} 2\hat{f}(\omega), & \text{si } \omega \geq 0 \\ 0, & \text{si } \omega < 0 \end{cases}$$

Por lo que $\hat{f}_a(\omega) = 2a\pi\, e^{i\phi}\delta(\omega - \omega_0)$ y antitransformando obtenemos que

$$f_a(t) = 2a\pi\, e^{i\phi}\left(\frac{e^{i\omega_0 t}}{2\pi}\right) = a \cdot e^{i(\omega_0 t + \phi)}$$