GUIA 1 - Ej 1

TEOREMA 2.1: Transformada Inversa de Fourier

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ entonces:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwt} \, dw \qquad [2.8]$$

Como: $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$

$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)| dw < \infty$

$$[1] \qquad \hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} \, dt$$

Demostración

Reemplazando $\hat{f}(w)$ por su expresión [1] en [2.8]

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iwu} du \right) e^{iwt} \, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iw(t-u)} du \right) dw$$

Esta expresión no es integrable en $\mathbb{R}^2$, pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(u) e^{iw(t-u)}| \, du \right) dw = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| \cdot |e^{iw(t-u)}| \cdot du \right) dw \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{por prop.} \\ \text{valor} \\ \text{absoluto} \end{array} \right.$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| . |1| \, du \right) dw \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{módulo} \\ \text{exponencial} = 1 \end{array} \right.$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \|f\|_1 \, dw = \infty$$

Razón por la cual no se puede aplicar directamente el teorema de Fubini. Para evitar esto, multiplicamos por $e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}}$, que converge a 1 cuando ξ tiende a 0. Si definimos

$$I_\xi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}}\, e^{i\omega(t-u)}\, du\right)d\omega \qquad [2.9]$$

Ahora quisieramos ver si se puede aplicar el teo. de Fubini

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left| f(u)\, e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}}\, e^{i\omega(t-u)}\right| du\right)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|\left|e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}}\right|\left|e^{i\omega(t-u)}\right| du\right)d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|\cdot\left|e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}}\right|\cdot 1\, du\right)d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}}\right| \|f\|_1\, d\omega$$

como $\left|e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}}\right| = e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}}$ ...

$$= \|f\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}}\, d\omega = \|f\|_1 \cdot \frac{2\sqrt{\pi}}{\xi} < \infty$$

Lo que nos permite aplicar el teo. de Fubini en [2.9].
Vamos a calcular I_ξ de dos maneras utilizando el teo. de Fubini.

La integración con respecto a u da como resultado:

$$I_\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}}\, e^{i\omega t}\, d\omega \qquad \text{D}$$

Para ver si esta última expresión es integrable, utilizamos el teo. de la convergencia dominada

Definimos:

$$\{h_\xi\}_{\xi \in \mathbb{N}} = \left\{ \hat{f}(\omega) e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}} e^{i\omega t} \right\}_{\xi \in \mathbb{N}}$$

Se puede ver que:

$$\lim_{\xi \to 0} h_\xi(\omega) = \lim_{\xi \to 0} \hat{f}(\omega) e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}} e^{i\omega t} = \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}$$

y que

$$|\hat{f}(\omega) e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}} e^{i\omega t}| = |\hat{f}(\omega)| . \underbrace{|e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}}|}_{\leq 1} . \underbrace{|e^{i\omega t}|}_{=1} \leq |\hat{f}(\omega)|$$

y por [2.7] tenemos que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ (por hipótesis)

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty$$

por lo que podemos utilizar el teo. y decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \lim_{\xi \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}} e^{i\omega t} d\omega \qquad [2.10]$$

Ahora calculamos la integral [2.9] de otra manera aplicando el teorema de Fubini e integrando con respecto a ω.

$$I_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\xi(t-u) f(u) \, du \qquad [2.11]$$

con $g_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{-\frac{\xi^4\omega^4}{4}} d\omega.$ (A)

$$\boxed{\text{si } \xi=1 \quad g_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cancel{\tfrac{1}{2\pi}}\, e^{i\omega x} e^{-\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} d\omega}$$

Si realizamos un cambio de variable $\omega' = \xi\omega$

$$g_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\omega' x}{\xi}} e^{-\frac{\omega'^2}{4}} \frac{d\omega'}{\xi} = \xi^{-1} g_1(\xi^{-1}x) \qquad \text{(B)}$$

Utilizando [2.32] en $g_1(x)$, podemos ver:

$$f(t) = e^{-t^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4}} \qquad (2.32)$$

$$\underbrace{\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}}_{g_1(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

$$\boxed{\text{Entonces } g_\xi(x) = \frac{1}{\xi\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\xi^2}}}$$

$g_1(x)$ tiene integral igual a 1 y decaimiento rápido. Convergen a un delta de Dirac cuando $\xi \to 0$. (C)

Integrando I_ξ con respecto a ω:

$$I_\xi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}} e^{i\omega(t-u)} d\omega\right) du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2\omega^2}{4}} e^{i\omega(t-u)} d\omega\right) f(u)\, du$$

por def de g_ξ (A)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g_\xi(t-u) f(u)\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{t-u}{\xi}\right)^2} f(u)\, du \qquad \text{por def. (B)}$$

Tomando el límite cuando $1/\xi \to \infty$ a ambos lados de la igualdad:

$$\lim_{1/\xi\to\infty} I_\xi(t) = \lim_{1/\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{t-u}{\xi}\right)^2} f(u)\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\frac{1}{\xi}\to\infty}\frac{1}{\xi\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{t-u}{\xi}\right)^2} f(u)\, du \qquad \text{por (C)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-u) f(u)\, du = f(t) \qquad \text{(E)}$$

Igualando el lim $1/\xi \to \infty$ (D) ~~tom~~ e igualando con (E) tenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = f(t)$$

Teo 2.2 (CONVOLUCIÓN)

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $h \in L^1(\mathbb{R})$ la función $g = h * f$ está en $L^1(\mathbb{R})$ y

$$\hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega)$$

Demostración

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\,h(u)\,du\right)dt \qquad [1]$$

Si $f, h \in L^1(\mathbb{R})$, entonces f y h son medibles en $\mathbb{R}$. El producto de funciones medibles es medible. $F(t,u) = f(t)\,h(u)$ es medible. Sea $W(t,u) = (t-u, u)$ una transformación lineal, entonces $H(t,u) = (F \circ W)(t,u) = f(t-u)\,h(u)$ es medible y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(t,u)|\,dt\,du = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-u)\,h(u)|\,dt\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-u)|\,|h(u)|\,dt\,du \qquad \text{(por prop. valor absoluto)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-u)|\,dt\right)|h(u)|\,du$$

($\int |f(t-u)|dt = \int |f(t)|\,dt = \|f\|_1$ por invarianza de la integral de Lebesgue ante traslaciones y def. de L^1)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \|f\|_1\,|h(u)|\,du = \|f\|_1\,\|h\|_1$$

Entonces, $H(t,u) = f(t-u)\,h(u) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, por lo que puedo aplicar el teorema de Fubini, lo que dice que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\,h(u)\,du$ existe y es integrable para casi toda u

Entonces

$$\|f*h\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |(f*h)(t)|\, dt \leqslant \iint |f(t-u)\, h(u)|\, du\, dt = \|f\|_1 \|h\|_1$$

porque $\left|\int f\, d\mu\right| \leqslant \int |f|\, d\mu$

de esta manera $(f*h) \in L^1(\mathbb{R}^2)$

Como $|f(t-u)||h(u)|$ es integrable en $\mathbb{R}^2$ podemos utilizar el teorema de Fubini para quitar los paréntesis de [1] y realizar el cambio de variables $(t,u) \to (v = t-u, u)$, donde $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(t-u) = 1 \Rightarrow dv = dt$

$$\hat{g}(w) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(u+v)w} f(v) h(u)\, du\, dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuw} e^{-ivw} f(v)\, dv\, h(u)\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuw} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivw} f(v)\, dv \right) h(u)\, du$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivw} f(v)\, dv \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuw} h(u)\, du \right) = \hat{f}(w)\hat{h}(w)$$

Teorema 2.3

Si f y h $\in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) h^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\, \hat{h}^*(w)\, dw$$

Sea $g = f * \bar{h}$ con $\bar{h}(t) = h^*(-t)$.

Prop. 2.20 : $h(t/s) \xrightarrow{\mathcal{F}} |s|\, \hat{h}(s w)$

Prop 2.23 : $h^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{h}^*(-w)$

Entonces $\bar{h}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} |-1|\, \hat{h}^*((-1)(-w)) = \hat{h}^*(w)$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(t-u) f(u)\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h^*(-(t-u)) f(u)$$

cuando $t = 0$,

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(u) f(u)\, du$$

por definición de transformada inversa de Fourier

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(w)\, e^{iwt}\, dw$$

haciendo $t=0$ $\quad (e^0 = 1)$

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(w)\, dw$$

Por teo. 2.2.

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\, \bar{h}(w)\, dw$$

Por prop. 2.20 y 2.23

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\, \hat{h}^*(w)\, dw$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, h^*(t)\, dt = g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\, \hat{h}^*(w)\, dw$$

Extensión de densidad en $L^2(\mathbb{R})$ GUIA 1 - EJ 4

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ podemos utilizar la fórmula (2.6)
Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ pero $f \notin L^1(\mathbb{R})$, no podemos utilizar (2.6)

Hipótesis: $f \in L^2(\mathbb{R}) \wedge f \notin L^1(\mathbb{R})$

Tesis: 1) Podemos encontrar una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ que converge a $f \in L^2(\mathbb{R})$

2) $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$

Demostración: Elegimos funciones truncadas de f.

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & |t| \leq n \\ 0, & |t| > n \end{cases}$$

- Por construcción, $f_n(t) \in L^2(\mathbb{R})$: $\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)|^2 dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$
- Como $f_n(t)$ tiene soporte compacto y energía finita, entonces $f_n(t) \in L^1(\mathbb{R})$.
- De esta forma, $f_n(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

Observación: Página 597 del Mallat

Un espacio V es denso en H si para cualquier $f \in H$ existe $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ con $f_m \in V$ tal que

$$\lim_{m \to \infty} \| f - f_m \| = 0$$

Utilizando el teo. de la convergencia dominada, sea

$h_n = |f - f_n|^2$

y $\lim_{n\to\infty} |f - f_n|^2 = 0$ como $|f - f_n|^2 \leqslant |f|^2$ y $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ $(f \in L^2(\mathbb{R}))$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_n(t)|^2 dt = 0$$

de esta forma se comprueba que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$ y que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f.

Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, es de Cauchy, lo que significa que $\|f_n - f_p\|$ es tan pequeño como se desee si n y p son lo suficientemente grandes. Además, como $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ su transformada de Fourier existe y es $\hat{f}_n$. La formula de Plancherel [2.26] demuestra que $\{\hat{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es una secuencia de Cauchy porque

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_p\| = \sqrt{2\pi}\, \|f_n - f_p\|$$

es tan pequeño como se desee para n y p suficientemente grandes. Como un espacio de Hilbert es completo, entonces existe una función $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\hat{f} - \hat{f}_n\| = 0$$

y por definición, $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de f en $L^2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 2.1 GUIA 1 - EJ 5

Demuestre que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $\hat{f}(\omega)$ es una función continua de ω y si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $f(t)$ es continua.

Hipotesis

1) $f \in L^1(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ Tesis 1 $\hat{f}(\omega)$ es función continua de ω

2) $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ Tesis 2 $f(t)$ es función continua de t

Demostración parte 1

$\hat{f}$ es acotada porque

prop int. de Lebesgue | prop val. abs. y $|e^{-i\omega t}|=1$ | $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$

$$|\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-i\omega t} dt| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Para evaluar continuidad

$$|\hat{f}(\xi+\omega) - \hat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(e^{-it(\xi+\omega)} - e^{-it\omega}\right) dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\omega} (e^{-it\xi} - 1) dt \right|$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot \underbrace{|e^{-it\omega}|}_{=1} \underbrace{|e^{-it\xi} - 1|}_{\substack{|e^{-it\omega}| \leqslant 1, \\ |\pm 1 - 1| \leqslant 2}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||e^{-it\xi} - 1| dt \leqslant 2 \|f\|_1$$

Al aplicar el teorema de la convergencia dominada:

Sea $\{d_\xi\}_{\xi \in \mathbb{N}} = \{|f(t)||e^{-it\xi} - 1|\}_{\xi \in \mathbb{N}}$ y $\lim_{\xi \to 0} d_\xi = 0$

como $|d_\xi| \leqslant 2|f(t)|$ y $\int_{-\infty}^{\infty} 2|f(t)| dt < \infty$

$$\lim_{\xi \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||e^{-it\xi} - 1| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\xi \to 0} |f(t)||e^{-it\xi} - 1| dt$$

que tiende a cero cuando $\xi \to 0$, con lo que se concluye que $\hat{f}(\omega)$ es continua si $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$

Demostración parte 2

$f(t)$ es acotada porque

$$|f(t)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwt}\, dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)||e^{iwt}|\, dw \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|\, dw < \infty$$

$\hat{f}(w) \in L^1(\mathbb{R})$

Para evaluar continuidad

$$|f(\xi+t) - f(t)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\left(e^{iw(\xi+t)} - e^{iwt}\right) dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)||e^{iwt}||e^{iw\xi} - 1|\, dt \leq \frac{2\|\hat{f}(w)\|_1}{2\pi}$$

Aplicando el teorema de la convergencia dominada de forma similar al paso anterior

$$\lim_{\xi \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)||e^{iw\xi} - 1|\, dw = \int_{-\infty} \lim_{\xi \to 0} |\hat{f}(w)||e^{iw\xi} - 1|\, dw$$

que tiende a cero cuando $\xi \to 0$, de esta manera

$f(t)$ es continua si $\hat{f}(w) \in L^1(\mathbb{R})$

Ejercicio 2.5

GUIA 1 - Ej 6

Prop. 2.21: $f'(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)\hat{f}(\omega)$

Prop 2.22 $(-it)f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}'(\omega)$

$$f(t) = e^{-(a-ib)t^2}$$

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a-ib}}\, e^{-\frac{a+ib}{(a^2+b^2)}\frac{\omega^2}{4}}$$

$$\underbrace{f'(t)}_{i\omega \hat{f}(\omega)} = -2(a-ib)\underbrace{t\, e^{-(a-ib)t^2}}_{\frac{\hat{f}'(\omega)}{-i}}$$

, entonces $(i\omega)\hat{f}(\omega) = -2(a-ib)\dfrac{\hat{f}'(\omega)}{-i} \cdot \dfrac{i}{i}$

$$\omega \hat{f}(\omega) = -2(a-ib)\hat{f}'(\omega)$$

$$\omega \hat{f}(\omega) + 2(a-ib)\hat{f}'(\omega) = 0$$

$$\hat{f}'(\omega) + \frac{\omega}{2(a-ib)}\hat{f}(\omega) = 0$$

Utilizo factor integrante $e^{\frac{-\omega^2}{4(a-ib)}}$

$$\hat{f}'(\omega)e^{\frac{-\omega^2}{4(a-ib)}} + \frac{\omega}{2(a-ib)}e^{\frac{-\omega^2}{4(a-ib)}}\hat{f}(\omega) = 0$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(e^{\frac{-\omega^2}{4(a-ib)}}\hat{f}(\omega)\right) = 0 \Rightarrow e^{\frac{-\omega^2}{4(a-ib)}}\hat{f}(\omega) = C$$

$$\hat{f}(\omega) = C e^{\frac{-\omega^2}{4(a-ib)}}$$

Si evaluamos en $\omega = 0$, tenemos que

$\hat{f}(0) = C$. y $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a-ib)t^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{(a-ib)}}$

de esta forma,

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a-ib}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4(a-ib)}}$$

Ejercicio 2.10 [GUIA 1 - Ej 7]

a) Demuestre que si $\hat{f}(\omega) = \frac{2}{i\omega}$ entonces $f(t) = \text{signo}(t) = \frac{t}{|t|}$

Si definimos a $f(t)$ como $f(t) = h(t) + g(t)$

donde

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t<0 \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t\geq 0 \end{cases}$$

podemos notar que $f(t) = h(t) - h(-t)$

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} h(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega t}\, 1\, dt = \left.\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{-i\omega}[0-1] = \frac{1}{i\omega}$$

por la propiedad 2.20

$$f(t/s) \xrightarrow{\mathcal{F}} |s|\hat{f}(s\omega) \quad , \text{entonces}$$

$$f((-1).t) \xrightarrow{\mathcal{F}} |-1|\ \hat{f}((-1).t)$$

con lo que sabemos que $h(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{h}(-\omega)$

De esta forma:

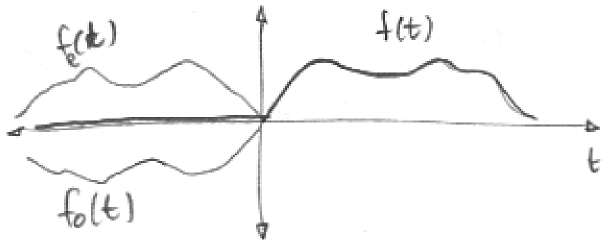
$$\hat{f}(t) = \hat{h}(\omega) - \hat{h}(-\omega) = \frac{1}{i\omega} - \left(\frac{1}{-i\omega}\right) = \frac{2}{i\omega}$$

b) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ una función causal ($f(t)=0$ para $t<0$).

Sea $\hat{f}_r(w) = \text{Real}[\hat{f}(w)]$ y $\hat{f}_i(w) = \text{Ima}[\hat{f}(w)]$.

Demuestre que $\hat{f}_r = H\hat{f}_i$ y $\hat{f}_i = -H\hat{f}_r$, donde H es el operador de la transformada de Hilbert

$$Hg(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(u)}{x-u}\,du$$



Demostración

Como $f(t)$ es causal, puede expresarse como suma de su parte par y su parte impar:

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

donde $f_e(t)$ es la parte par y $f_o(t)$ es la parte impar.

Utilizando la función signo, podemos reescribir $f_e(t)$ y $f_o(t)$ como:

$$f_e(t) = \text{sign}(t)\, f_o(t)$$

$$f_o(t) = \text{sign}(t)\, f_e(t)$$

Como $\mathcal{F}\{\text{sign}(t)\} = \frac{2}{iw}$ (por inciso a),

$$\mathcal{F}\{f_e(t)\} = \mathcal{F}\{\text{sign}(t)\, f_o(t)\} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{iw} * \hat{f}_o(w)\right) \qquad \text{por prop [2.17]}$$

$$\mathcal{F}\{f_i(t)\} = \mathcal{F}\{\text{sign}(t)\, f_e(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{iw} * \hat{f}_e(w)\right)$$

Como la transformada de Fourier de una función par es igual a la parte real de la transformada de Fourier de la función y la transf. de Fourier de una función impar es igual a la parte imaginaria de la función, tenemos:

$$\text{Real}[\hat{f}(w)] = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{iw} * \hat{f}_o(w)\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{iw} * i\,\text{Imag}[\hat{f}(w)]\right)$$

$$i\,\text{Imag}[\hat{f}(w)] = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{iw} * \hat{f}_e(w)\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{iw} * \text{Real}[\hat{f}(w)]\right)$$

GUIA 3 - EJ 7

por def. de convolución

$$\text{Real}\left[\hat{f}(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2.\frac{\text{Imag}\left[\hat{f}(v)\right]}{\omega - v}\, dv = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{Imag}\left[\hat{f}(v)\right]}{\omega - v}\, dv$$

$$= H\ \text{Imag}\left[\hat{f}(\omega)\right] = H\,\hat{f}_i(t)$$

De la misma forma

$$\text{Imag}\left[\hat{f}(\omega)\right] = \frac{-1}{i\,2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\,\frac{\text{Real}\left[\hat{f}(v)\right]}{\omega - v}\, dv = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{Real}\left[\hat{f}(v)\right]}{\omega - v}\, dv$$

$$= -H\ \text{Real}\left[\hat{f}(\omega)\right]\} = -H\,\hat{f}_e(t)$$