



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Simulaciones numéricas hidrodinámicas relativistas de
Destellos de Rayos Gamma cortos lanzados desde un
objeto compacto en varios tipos de medios ambientes.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Julio César Sosa Mondragón

TUTOR

Dr. Diego López Cámara



Índice general

Dedicatoria	V
Agradecimientos	VII
Resumen	IX
1. Introducción	1
1.1. Características de los GRBs	1
1.1.1. Emisión pronta	2
1.1.2. Emisión tardía	2
1.1.3. Energía y luminosidad	2
1.2. Características de los GRBs cortos	2
1.3. GRB del 17 de agosto del 2017	3
2. Teoría	5
2.1. Ecuaciones de la hidrodinámica	5
2.2. Hidrodinámica relativista	6
2.2.1. Primitivas	6
2.3. Desacoplamiento de las ecuaciones de la hidrodinámica	7
2.4. Desacoplamiento de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista	7
2.5. Diferencias finitas	11
2.5.1. Lax-Friederich	11
2.5.2. HLL	12
3. Verificación del código	15
3.1. Onda de choque	15
3.1.1. Prueba Lax	16
3.1.2. Prueba HLL	22
3.1.3. Puebas no relativistas Lax vs HLL	25
3.1.4. Puebas relativistas Lax vs HLL	27
3.2. Jet	28
4. Medios de densidad	29
4.1. Condiciones de frontera	29
4.1.1. SGRB en medio de densidad 1	29
4.1.2. SGRB en medio de densidad 2	29
4.2. Comparación con el GRB170817	29
5. Resultados	31
6. Conclusiones	33

A. Código	35
A.1. Condición inicial	36
A.1.1. Condición de Courant	37
B. Condiciones de frontera	39
B.0.1. Condiciones de frontera <i>outflow</i>	40
B.0.2. Condiciones de frontera <i>reflexión</i>	40
B.0.3. Condiciones de frontera <i>Periódicas</i>	41
B.0.4. Condiciones de frontera <i>Jet</i>	42
C. Condiciones de Rankine-Hugoniot no relativistas	45
D. Condiciones de Rankine-Hugoniot relativistas	47

Dedicatoria

*Dedicado a
mi familia*

Agradecimientos

¡Muchas gracias a todos!

Resumen

Una bonita historia

Capítulo 1

Introducción

Los destellos de rayos gamma (GRB por su acrónimo en inglés) son eyecciones de rayos gamma del orden de MeV, son cortos, intensos y no repetitivos, fueron descubiertos por los satélites *Vela*¹ a finales de la década de los 60's, gracias a los datos recabados por el experimento BATSE² se logró identificar 2 grupos principales de GRBs, los cortos y los largos, en los cuales este último tiene una duración mayor a los 2 s.

El objetivo principal del estudio de los GRBs es estudiar las propiedades de los estallidos de los rayos gamma, así como sus progenitores y determinar las propiedades básicas de estos, la fusión de objetos compactos es el modelo progenitor más atractivo. La interacción de flujos de salida relativistas con el medio ambiente que lo rodea produce emisión sincrotrónica que va desde la banda de las ondas de radio a los rayos X, los GRBs son uno de los eventos que más libera energía en el universo, la energía liberada es del orden de 10^{52} ergs.

Aunque hay mucha información acerca de los GRBs largos, los cortos son aún un estudio nuevo en el área de astrofísica de altas energías ya que debido a su corta duración son difíciles de estudiar.

1.1. Características de los GRBs

Muchas de las características de los GRBs ya sean estos largos o cortos, son la duración media que tienen, mientras que en los GRBs largos tienen un promedio de duración de 100 s, los GRBs

¹<https://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/heasarc/missions/vela5a.html>

²<https://gamma-ray.msfc.nasa.gov/batse/>

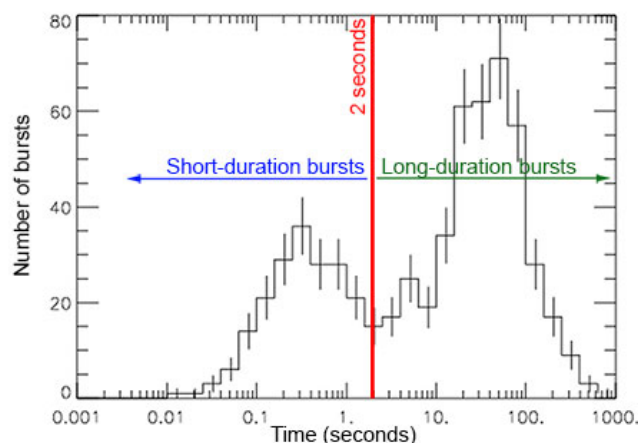


Figura 1.1: Gráfico que muestra la diferencia de tiempo que existe entre GRBs cortos y GRBs largos. Se pueden apreciar 2 picos que marcan la diferencia de duración entre los GRBs

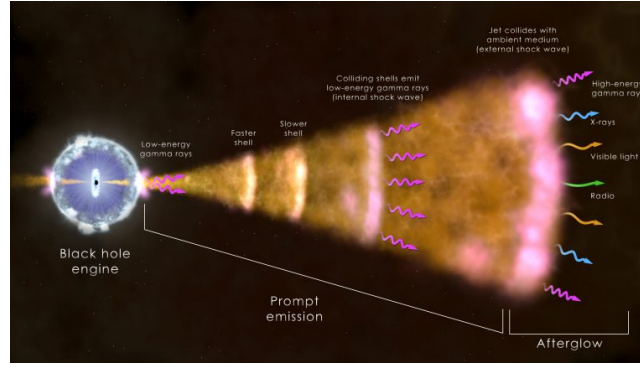


Figura 1.2: Diferentes partes de un GRB en general, mostrando las partes más características como el afterflow y la emisión prompt

cortos duran menos de 2 segundos. Los estallidos de Rayos gamma se encuentran a miles de años luz de nuestra galaxia por lo que se puede decir que tienen un origen cosmologico, mientras los GRBs largos se originan en los centros de las galaxias, los cortos lo hacen lejos de la galaxia donde se originaron y por consecuencia, estos tienen una densidad de ambiente muy bajo. El estudio de los SGRB ha sido muy difícil debido al tiempo de duración que conllevan estos eventos y a la dificultad de asociarlo con galaxias anfitrionas.

1.1.1. Emisión pronta

La emisión pronta es definido como el periodo de tiempo donde el detector de rayos γ detecta una señal sobre el fondo, mientras que la emisión afterglow es despues de la emisión prompt en el cual se pueden detectar otras longitudes de onda como el óptico, radio y los rayos X 1.2.

1.1.2. Emisión tardía

En Mayo y Julio del 2005 datos de eyecciones recopiladas por el satélite *swift* al seguir al GRB 050509B, descubrieron las primeras fases tardías de los GRBs cortos, tiempo después el satélite HETE-2 junto con el observatorio *chandra* de rayos X siguieron al satélite 050709 el cual localizo la fase tardía en rayos X y despues en la banda óptica, con estos datos recabados de la fase tardía se pudo llegar a que los GRBs cortos tienen una escala de densidad y una energía mas baja que los GRBs largos, tambien se lleo a la conclusión de que los GRBs cortos tienen orígenes cosmologicos y que las estrellas masivas no son sus progenitores como en el caso de GRBs cortos.

1.1.3. Energía y luminosidad

1.2. Características de los GRBs cortos

Los progenitores de los SGRBs tienen una amplia distribución de tiempo de retraso y su taza es influenciada en parte por la actividad de formación de las estrellas. Las patadas natales pueden ser las causantes de las distancias en las que estos nacen y los sitios de explosión de estos sistemas, la probabilidad para una galaxia de brillo m a ser localizada a una separación δR de la posición de un SGRB está dada por

$$P_{cc} = 1 - \exp^{-\pi(\delta R)^2 \Sigma(\leq m)} \quad (1.1)$$

Donde $\Sigma(\leq m) = 1.3 \cdot 10^{0.33(m-24)-2.44 \text{ arcsec}^{-2}}$ son el número de cuentas de la galaxia. Los SGRBs sin galaxias anfitrionas se exhiben cerca galaxias de campo con una baja probabilidad de coinci-

dencia, generalmente las distancias medias de separación del SGRB con su galaxia anfitriona es de $\frac{\delta R}{r_e} \approx 1.5$ donde r_e es el radio estelar. Otra característica que distingue también a las SGRB es que sus anfitriones tienden a ser mas largos que los anfitriones de los largos.

Los parámetros claves de interes de la emisión pronta y tardía:

- E_γ : Escala de energía
- E_k : Energía cinética de la onda de choque de la emisión tardía
- θ_j : El ángulo de apertura del jet
- n : Densidad del medio ambiente

El espectro de emisión sincrotrónica (flujo relativista interactuando con el medio circundante) se caracteriza por 3 frecuencias:

- ν_a : Auto absorción
- ν_m : Factor mínimo de Lorentz
- ν_c : enfriamiento sincrotrónico

La mayoría de estas frecuencias se encuentran entre $1 \sim 10$ GHz por lo cual ha sido difícil de detectarlas. La colimación del jet también influye en la tasa de los SGRBs y proporciona una restricción adicional al modelo progenitor, la firma de la colimación de los destellos de los SGRBs son los llamados "Jet Break" que ocurren al tiempo t_j cuando $\Gamma_j(t_j) = 1/\theta_j$, esto lidera al cambio de emisión del espectro sincrotrónico

$$F_\nu \propto t^{-1} \longrightarrow F_\nu \propto t^{-p} \quad (1.2)$$

La relación entre el "jet break" el ángulo de apertura esta dado por:

$$\theta_j = 0.13 \left(\frac{t_{j,d}}{1+z} \right)^{3/8} \left(\frac{n_0}{E_{52}} \right)^{1/8} \quad (1.3)$$

1.3. GRB del 17 de agosto del 2017

Capítulo 2

Teoría

Para describir un sistema de partículas como un fluido bajo ciertas condiciones uno debe de conocer que el camino libre medio debe de ser mucho mas pequeño que la escala de longitud de las fluctuaciones de las variables macroscópicas.

$$\lambda_{mfp} \ll L \quad (2.1)$$

El tiempo entre las colisiones debe de ser pequeña comparada con la escala del tiempo de los cambios en el fluido

$$t_c \ll t_f \quad (2.2)$$

La distancia media entre las partículas tiene que ser mas pequeña que la longitud de escala de las variables macroscópicas

$$l = n^{-1/3} \ll L \quad (2.3)$$

2.1. Ecuaciones de la hidrodinámica

Considerando una serie de elementos de volumen fijos, las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido sin considerar efectos viscosos son:

La conservación de masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (2.4)$$

El momento

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (2.5)$$

Ecuación de la energía

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u} (E + p)] = G - L + \mathbf{f}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{u} \quad (2.6)$$

Ecuación de estado

$$E = \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \frac{p}{\Gamma - 1} \quad (2.7)$$

Con estas ecuaciones podemos formar una matriz de 5x5 escritas en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \mathbf{S} \quad (2.8)$$

Donde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E+P) \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + P \\ \rho vw \\ v(E+P) \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + P \\ w(E+P) \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ G-L+\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

El término de \mathbf{U} son nuestras variables conservadas, los términos \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} son nuestros fluidos con velocidades en la dirección x , y y z y \mathbf{S} son los términos fuente. Para poder resolver computacionalmente estas ecuaciones diferenciales parciales vamos a utilizar el método de las diferencias finitas y el método de Lax sin considerar los términos fuente es decir $\mathbf{S} = 0$ en el siguiente capítulo si se trataran fuentes particulares.

2.2. Hidrodinámica relativista

En esta parte se añadirá a los códigos que ya hemos generado previamente, las próximas secciones abordará acerca de como cambian nuestras primitivas, como afectan a nuestras variables conservadas y como las podemos desacoplar así como varios ejemplos al cambiar varios valores de nuestros parámetros y de las condiciones iniciales

2.2.1. Primitivas

Las ecuaciones que teníamos para fluidos newtonianos se pueden modificar para hacerlos relativistas. Para esto vamos a partir de 2 ecuaciones importantes que son la ecuación de energía-momento y la ecuación de conservación de masa:

$$(\rho u^\alpha)_{,\alpha} = 0 \quad (2.9)$$

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0 \quad (2.10)$$

De la ecuación 2.9 tenemos la cuadrivelocidad para un sistema de 3 coordenadas y la velocidad $c = 1$ lo podemos ver como $u^\mu = \gamma(1, \mathbf{v})$ y sustituyendo este resultado (en 2 dimensiones espaciales) tendremos las ecuaciones u_1 , F_1 y G_1 . Para la ecuación 2.10 podemos escribir el tensor de energía-momento como $T^{\mu\nu} = \rho h u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}$ y usando la métrica de Minkowski

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Con lo que podemos escribir a $T^{\mu\nu}$ matricialmente como:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho h \gamma^2 - P & \rho h \gamma^2 v_x & \rho h \gamma^2 v_y & \rho h \gamma^2 v_z \\ \rho h \gamma^2 v_x & \rho h \gamma^2 v_x^2 + P & \rho h \gamma^2 v_x v_y & \rho h \gamma^2 v_x v_z \\ \rho h \gamma^2 v_y & \rho h \gamma^2 v_y v_x & \rho h \gamma^2 v_y^2 + P & \rho h \gamma^2 v_y v_z \\ \rho h \gamma^2 v_z & \rho h \gamma^2 v_z v_x & \rho h \gamma^2 v_z v_y & \rho h \gamma^2 v_z^2 + P \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Entonces nuestras ecuaciones quedarían de la siguiente manera

$$u_1 = \rho \gamma \quad (2.13)$$

$$u_2 = \rho v_x \gamma^2 h \quad (2.14)$$

$$u_3 = \rho v_y \gamma^2 h \quad (2.15)$$

$$u_4 = \rho \gamma^2 h - P \quad (2.16)$$

Donde ρ es la densidad, γ es el factor de lorentz, v_x y v_y son las velocidades de nuestros fluidos (en 2 dimensiones pero se puede extender esto a 3 sin ningún problema), h es la entalpía y P es la presión. Para los fluidos quedan de la siguiente manera

$$F_1 = \rho v_x \gamma \quad (2.17)$$

$$F_2 = \rho v_x v_x \gamma^2 h + P \quad (2.18)$$

$$F_3 = \rho v_x v_y \gamma^2 h \quad (2.19)$$

$$F_4 = \rho v_x \gamma^2 h \quad (2.20)$$

$$G_1 = \rho v_y \gamma \quad (2.21)$$

$$G_2 = \rho v_y v_x \gamma^2 h \quad (2.22)$$

$$G_3 = \rho v_y v_y \gamma^2 h + P \quad (2.23)$$

$$G_4 = \rho v_y \gamma^2 h \quad (2.24)$$

$$H_1 = \rho v_z \gamma \quad (2.25)$$

$$H_2 = \rho v_z v_x \gamma^2 h \quad (2.26)$$

$$H_3 = \rho v_z v_y \gamma^2 h \quad (2.27)$$

$$H_4 = \rho v_z^2 \gamma^2 h + P \quad (2.28)$$

2.3. Desacoplamiento de las ecuaciones de la hidrodinámica

Al final del metodo de las diferencias finitas, obtenemos nuestras variables conservadas (U), pero para calcular nuestros flujos de nuevo necesitamos recuperar nuestras primitas, es decir, calcular nuestras variables primitivas (ρ, u, v, w, P) en función de nuestras variables conservadas (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5).

Despejar la densidad es sencillo ya que es directo $u_1 = \rho$ por lo tanto:

$$\rho = u_1 \quad (2.29)$$

Para las velocidades $u_i = \rho v$, donde $i = 2, 3, 4$ y $v = u, v, w$, nos da $v = u_i / \rho$ y usando la ecuación 2.29 queda:

$$v = u_i / u_1 \quad (2.30)$$

Para la ecuacion de la energía $u_5 = E$ combinando con la ecuacion de estado y la ecuación 2.30 obtenemos

$$P = (\Gamma - 1) \left[u_5 - \frac{u_1 (\sum_{i=2}^4 u_i / u_1)^2}{2} \right] \quad (2.31)$$

2.4. Desacoplamiento de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista

Para poder desacoplar las ecuaciones, partimos de la relación de las densidades de energía total y del módulo de los momentos

$$E = W - p \quad (2.32)$$

$$|m|^2 = W^2 |v|^2 \quad (2.33)$$

Donde $W = Dh\gamma$ y $D = \rho\gamma$. Para evitar errores en el límite no relativista se debe resolver la ecuación conservada restando la densidad de masa a la energía para definir una nueva variable conservada ($E' = E - D$), para las cancelaciones en el límite ultra-relativista basados en $\gamma|v|^2$ que se tiene cuando $|v| \rightarrow 1$, se debe de crear otra variable, que en este caso sería $|u|^2 = \gamma|v|^2$ e introduciendo las variables $W' = W - D$. Podemos re-escribir la última ecuación de la siguiente manera

$$\begin{aligned} W' &= D(h\gamma - 1) \\ &= D \left[\left(1 - \epsilon + \frac{p}{\rho} \right) \gamma - 1 \right] \\ &= D(\gamma - 1) \frac{\gamma + 1}{\gamma + 1} + \frac{D\gamma}{\rho} (\rho\epsilon + p) \end{aligned}$$

Recordando que $D = \rho\gamma$ y que a partir de la variable introducida u^2 podemos re-scribir el factor de Lorentz como $\gamma^2 = 1 - u^2$

$$\begin{aligned} W' &= \frac{Du^2}{\gamma + 1} + \frac{\rho\gamma\gamma}{\rho} (\rho\epsilon + p) \\ &= \frac{Du^2}{\gamma + 1} + \gamma^2 \chi \end{aligned} \quad (2.34)$$

Donde $\chi = \rho\epsilon + p$, derivando con respecto a W' la ecuación 2.32 queda como

$$\frac{dE}{dW'} = 1 - \frac{dp}{dW'} \quad (2.35)$$

Nosotros no sabemos como es la expresión $\frac{dE}{dW'}$, así que asumiremos que $p = p(\rho, \chi)$ por lo que podemos aplicar la regla de la cadena (para mas detalles consulte)

$$\frac{dp}{dW'} = \left. \frac{\partial p}{\partial \chi} \right|_{\rho} \frac{d\chi}{dW'} + \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\chi} \frac{d\rho}{dW'} \quad (2.36)$$

Para calcular $\frac{dp}{d\chi}$ tenemos que por ser el caso de un gas ideal

$$h = 1 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (2.37)$$

Donde h también puede ser escrito como

$$h = 1 + \epsilon + \frac{p}{\rho} \quad (2.38)$$

Si combinamos estas 2 últimas ecuaciones podemos llegar a que

$$p(\chi, \rho) = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \chi \quad (2.39)$$

Con lo que al derivar con respecto de χ nos da como resultado

$$\frac{dp}{d\chi} = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \quad (2.40)$$

$$\frac{dp}{d\rho} = 0 \quad (2.41)$$

De la ecuación 2.34 podemos despejar χ , lo que queda como

$$\chi = \frac{W'}{\gamma} - \frac{Du^2}{(1+\gamma)\gamma^2} \quad (2.42)$$

Derivando implícitamente la ecuación 2.34 respecto a W' nos quedaría

$$\begin{aligned} W' &= D(\gamma - 1) + \chi\gamma^2 \\ &= D\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1\right) + \chi\frac{1}{1-v^2} \\ \frac{dW'}{dW'} &= D\frac{d(1-v^2)^{-1/2}}{dW'} + \frac{d\chi}{dW'}(1-v^2)^{-1} + \frac{d(1-v^2)^{-1}}{dW'}\chi \\ 1 &= \frac{D(1-v^2)^{-3/2}}{2} \frac{dv^2}{dW'} + \frac{d\chi}{dW'}(1-v^2)^{-1} + \chi(1-v^2)^{-2} \frac{dv^2}{dW'} \\ \frac{1}{\gamma^2} &= \frac{D\gamma}{2} \frac{dv^2}{dW'} + \frac{d\chi}{dW'} + \chi\gamma^2 \frac{dv^2}{dW'} \end{aligned}$$

Con lo que al final la ecuación se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{d\chi}{dW'} = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{\gamma}{2}(D - 2\gamma\chi) \frac{dv^2}{dW'} \quad (2.43)$$

Y para

$$\frac{d\rho}{dW'} = D \frac{d(1/\rho)}{dW'} = -\frac{D\gamma}{2} \frac{dv^2}{dW'} \quad (2.44)$$

despejando la ecuación 2.33 podemos llegar a escribir el módulo de la velocidad al cuadrado de la siguiente manera

$$|v^2| = \frac{|m^2|}{W'} \quad (2.45)$$

Donde $m_i = \rho v_i \gamma h$ para $i = x, y$.

Podemos demostrar que $\frac{d|v^2|}{W} = \frac{d|v^2|}{W'}$ para esto vamos a partir de de lo siguiente

$$\begin{aligned} |v^2| &= |m^2| \left(W' + D\right)^{-2} \\ \frac{d|v^2|}{dW'} &= \frac{-2|m|^2}{W' + D^3} \\ &= \frac{2|m|^2}{W^3} \\ &= \frac{d|v^2|}{dW'} \end{aligned}$$

Con lo que podemos decir que

$$\frac{d|v|^2}{dW'} = -\frac{2|m|^2}{W^3} \quad (2.46)$$

Con todo esto ya sabemos cuanto es lo que vale la ecuación 2.35, con esto ya podemos usar el método de Newton-Raphson para poder encontrar W' .

El método de Newton-Raphson es un algoritmo iterativo que se usa para encontrar raíces de una función real:

$$W'^{(k+1)} = W' - \frac{f(W')}{\frac{df(W')}{dW'}} \quad (2.47)$$

De la ecuación de la energía, podemos utilizarla como a la función a la que queremos encontrar la raíz

$$f(W') = W' - E' - p \quad (2.48)$$

Donde $E' = W' - p$ y que $\frac{df(W')}{dw} \equiv \frac{dE}{dW'}$ dado por la ecuación 2.35. Para iniciar el proceso de iteración se tiene que hacer una suposición, para esto, con ayuda de las ecuaciones 2.32 y 2.33 podemos llegar a que la presión es:

$$p = \frac{|m|^2 - W^2|v|^2 + 4W^2 - 4EW}{4W} \quad (2.49)$$

Como podemos ver el denominador es una función convexa cuadrática que depende $|v|^2$ y W y cumple con que W este fuera del intervalo de las raíces positivas y negativas.

Al denominador de la ecuación podemos encontrar W ya que $|v|^2 = 1 - 1/\gamma^2$ suponiendo $\gamma \rightarrow \infty$ podemos despejar W

$$W = \frac{-(-2E) + \sqrt{(-2E)^2 - (3)(|m|^2)}}{3} \quad (2.50)$$

Con esto ya se puede hacer las aproximaciones para obtener W , y podemos calcular las siguientes relaciones

$$|v|^2 = \frac{|m|^2}{W^2} \quad (2.51)$$

$$u^2 = \frac{|v|^2}{1 - |v|^2} \quad (2.52)$$

$$\gamma = \sqrt{1 + u^2} \quad (2.53)$$

Y las nuevas primitivas.

Velocidades:

$$v_x = \frac{u_2}{W} \quad (2.54)$$

$$v_y = \frac{u_3}{W} \quad (2.55)$$

$$(2.56)$$

Densidad de masa

$$\rho = \frac{D}{\gamma} \quad (2.57)$$

Presión térmica

$$\chi = \frac{W - D}{\gamma^2} - \frac{D|u|^2}{(1 + \gamma)\gamma^2} \quad (2.58)$$

$$p = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \chi \quad (2.59)$$

2.5. Diferencias finitas

Si tenemos una función $f(x)$ lo suficientemente diferenciable la podemos aproximar por el Teorema de Taylor en la vecindad de un punto $x_0 + \Delta x$ entonces si conocemos todas sus n derivadas de la función $f(x)$ en el punto x_0 podemos aproximar de la siguiente manera

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \sum_n \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \quad (2.60)$$

Si truncamos la serie de Taylor y quitamos los términos de segundo orden podemos escribir la ecuación 2.60 como:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f^{(1)}(x_0) + O(\Delta x) \quad (2.61)$$

Despejando $f(x_0)$ queda lo que se conoce como diferencia finita hacia adelante

$$f'_{fwd} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (2.62)$$

También se puede hacer en el entorno $x_0 - \Delta x$ y siguiendo los mismos pasos anteriores llegamos a lo que se le conoce como diferencia finita hacia atrás.

$$f'_{back} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad (2.63)$$

Si obtenemos el promedio de las ecuaciones 2.62 y 2.63 obtenemos la central:

$$f'_{central} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2.64)$$

2.5.1. Lax-Friedrich

Si consideramos la siguiente ecuación diferencial parcial

$$u_t + f(u)_t = 0 \quad (2.65)$$

Un método conservativo para resolver este tipo de ecuación diferencial es

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i-\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2}}) \quad (2.66)$$

Si hacemos la siguiente elección de flujo

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}(u_i, u_{i+1}) = \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1}) \quad (2.67)$$

Y para

$$f_{i-\frac{1}{2}} = f_{i-\frac{1}{2}}(u_i, u_{i-1}) = \frac{1}{2} (f_i + f_{i-1}) \quad (2.68)$$

Y lo sustituimos en la ecuación 2.66 nos queda el siguiente resultado

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1} - f_{i-1}) \quad (2.69)$$

Pero esta solución es inestable, por el primer término del lado derecho de la ecuación, para hacerlo estable Peter Lax y Kurt O. Friedrichs sustituyeron este término por $(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$ por lo que podemos reescribir la ecuación 2.69 como

$$u_i^{n+1} = (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1} - f_{i-1}) \quad (2.70)$$

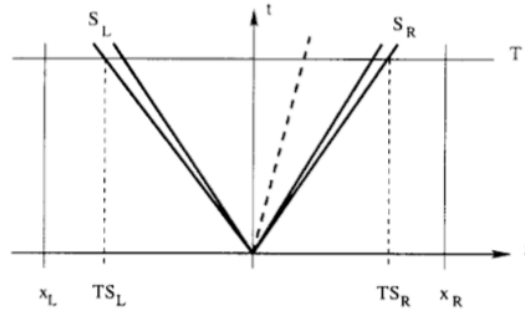


Figura 2.1: Plano x-t que muestra un volumen definido

2.5.2. HLL

Otro método para resolver las ecuaciones de la hidrodinámica es usar el método de Harten-Van-Leer. Definiendo el flujo numérico intercelda de Gudonov

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_{i+\frac{1}{2}}) \quad (2.71)$$

Para el cual $U_{i+\frac{1}{2}}(0)$ tiene la misma solución para $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$ con lo que el problema de Riemann se reduce a :

$$\begin{aligned} U_t + F(U)_x &= 0 \\ U(x, 0) &= \begin{cases} U_L & \text{si } x < 0 \\ U_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Si consideramos un control de volumen $[x_L, x_R] \times [0, T]$, tales que $x_L \leq TS_L$ y $x_R \geq TS_R$ (ver figura 2.1) donde S_L y S_R son las velocidades de las ondas mas rápidas de los estados iniciales U_L y U_R respectivamente y T es un tiempo definido. Si usamos la forma integral de la ecuacion 2.72 en nuestro volumen definido $[x_L, x_R] \times [0, T]$

$$\int_{x_L}^{x_R} [U(x, T) - U(x, 0)] dx = \int_0^T [F(U(x_L, t)) - F(U(x_R, t))] dt$$

Entonces

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = \int_{x_L}^{x_R} U(x, 0) dx + \int_0^T F(U(x_L, t)) dt - \int_0^T F(U(x_R, t)) dt \quad (2.73)$$

Usando las condiciones de la ecuación 2.72 podemos evaluar la integral

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = x_R U_R - x_L U_L + T F_L - T F_R$$

Donde $F_L = F(U_L)$ y $F_R = F(U_R)$, entonces

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = x_R U_R - x_L U_L + T (F_L - F_R) \quad (2.74)$$

Si separamos ahora la ecuación 2.73 en 3 integrales de la siguiente manera:

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = \int_{x_L}^{TS_L} U(x, T) dx + \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx + \int_{TS_R}^{x_R} U(x, T) dx \quad (2.75)$$

Si ahora evaluamos el tercer y el primer término en el lado derecho, obtenemos:

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx + (TS_L - x_L) U_L + (x_R - TS_R) U_R \quad (2.76)$$

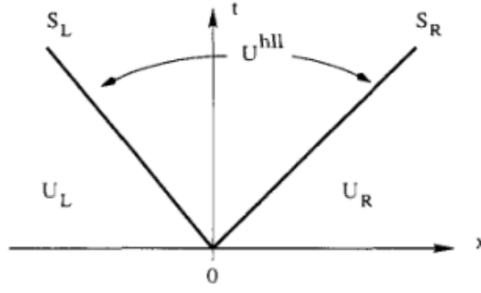


Figura 2.2: Aproximación de 3 estados distintos en el plano x-t, en el cual se trata de calcular los flujos en la región U^{hll} limitados por las velocidades de señal de la onda

Si combinamos la ecuación 2.74 y 2.76

$$x_R U_R - x_L U_L + T(F_L - F_R) = \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx + (TS_L - x_L) U_L + (x_L - TS_R) U_R$$

Entonces

$$\int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx = (TS_L - x_L) U_L + x_L U_L + (x_L - TS_R) U_R - x_R U_R - T(F_L - F_R)$$

Con lo que al final nos queda

$$\int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx = T(S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R) \quad (2.77)$$

Si dividimos la ecuación 2.77 por la diferencia de las velocidades maximas de las señales de las ondas, obtenemos el promedio de la funcion que esta entre las velocidades de la onda, entonces

$$\frac{1}{T(S_R - S_L)} \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx = \frac{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R}{S_R - S_L} \quad (2.78)$$

Si conocemos las velocidades de la onda podemos escribir la ecuación como

$$U^{hll} = \frac{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R}{S_R - S_L} \quad (2.79)$$

Ahora si aplicamos la forma integral (como en el caso de la ecuación 2.74) a lado izquierdo de nistro plano obtenemos lo siguiente

$$\int_{TS_L}^0 U(x, T) dx = -TS_L U_L + T(F_L - F_{0L}) \quad (2.80)$$

Donde F_{0L} es el flujo a lo largo del eje t . Si despejamos F_{0L} , nos queda lo siguiente

$$F_{0L} = F_L - S_L U_L + \frac{1}{T} \int_{TS_L}^0 U(x, T) dx \quad (2.81)$$

Esta última ecuación nos servira para calcular los flujos usando el método de Harteen-Van-Leer, el cual dividian el plano en tres espacios:

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L & \text{si } \frac{x}{t} < S_L \\ U^{hll} & \text{si } S_L < \frac{x}{t} < S_R \\ U_R & \text{si } \frac{x}{t} > S_R \end{cases} \quad (2.82)$$

Los flujos F_R y F_L pueden ser calculados directamente ya que solo dependen de U_R y U_L respectivamente pero $F_{hll} \neq F(U_{hll})$, así que resolvemos la integral de la ecuación 2.81 para así obtener el flujo a través del eje t

$$F_{hll} = F_L - S_L U_L + \frac{1}{T} U_{hll} (0 - T S_L)$$

Entonces

$$F_{hll} = F_L + S_L (U_{hll} - U_L) \quad (2.83)$$

Si sustituimos 2.79 en 2.83 obtenemos:

$$F_{hll} = F_L + S_L \left(\frac{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R}{S_R - S_L} - U_L \right)$$

Entonces

$$F_{hll} = \frac{F_L S_R - F_L S_L + S_L S_R U_R - S_L^2 U_L + S_L F_L - S_L F_R - S_R S_L U_L + S_L^2 U_L}{S_R - S_L}$$

Eliminando términos semejantes queda

$$F_{hll} = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L} \quad (2.84)$$

Con lo que el flujo intermedio de la celda de Gudonov esta dado por:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{hll} = \begin{cases} F_L & \text{si } 0 \leq S_L \\ \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L} & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_R \\ F_R & \text{si } 0 \geq S_R \end{cases} \quad (2.85)$$

Capítulo 3

Verificación del código

Las siguientes pruebas verifican el buen funcionamiento del código al hacer tanto Lax como HLL en relativista y no relativista

3.1. Onda de choque

La onda de choque se caracteriza por dividir nuestro dominio en 2 zonas distintas, la primera zona va a ser nuestro medio ambiente que se caracterizará por tener valores de sus variables primitivas $\rho_m, v_{xm}, v_{ym}, P_m$ relativamente bajas. Por otro lado, la otra zona tendrá valores muy distintos con respecto a la primera, los valores de las variables primitivas $\rho_{in}, v_{xin}, v_{yin}, P_{in}$ serán depositados en un círculo con un radio interno r_{in} . Estas distintas zonas se dejarán evolucionar a un determinado tiempo t para analizar su comportamiento cuando interactúan estas 2 zonas.

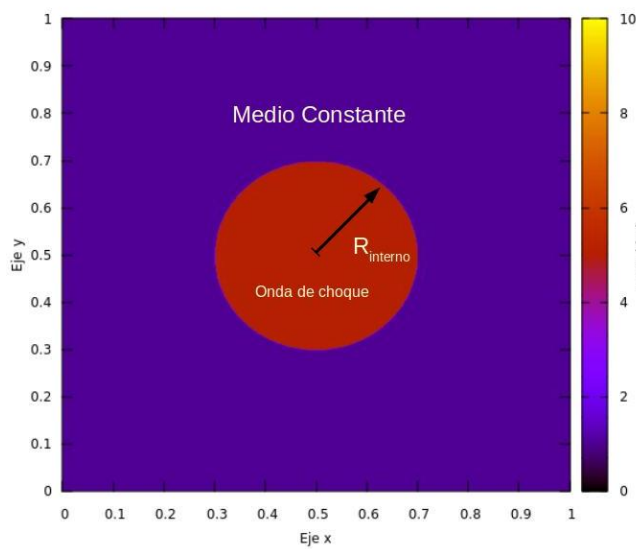


Figura 3.1: La onda de choque se caracteriza por depositar energía $E, \rho_{in}, v_{xin}, v_{yin}, P_{in}$ sobre un medio en forma circular con un radio R_{int} , la onda se dejará evolucionar con el paso del tiempo y veremos la interacción que hay entre estos 2 distintos medios.

En las siguientes pruebas se utilizarán los 2 métodos que ha hemos visto anteriormente que es el de Lax y el de HLL, en ambos métodos se usarán las ecuaciones de fluido no relativistas y las relativistas. La condición de frontera que nosotros vamos a utilizar va a ser la de *outflow*¹, dado que este tipo de bordes se encuentran más en los *jets* el cual es propósito principal al desarrollar

¹Para ver más detalles acerca de esta frontera y/o de otro tipo de fronteras veáse el apéndice B

este programa. Las simulaciones que vamos a realizar van a constatar de 2 distintos valores para nuestras variables primitivas, esto debido a que, necesitamos que la onda se expanda a velocidades cercanas a la velocidad de la luz, y así de este modo, comprobar la efectividad de nuestro código relativista. Los parámetros con los que corrió el código para el modo no relativista son los siguientes:

Parámetro	Descripción	valor
r_{in}	Radio interno de la onda expansiva	0.2
ρ_{in}	Densidad interna de la onda expansiva	5.0
ρ_{out}	Densidad del medio	1.0
P_{int}	Presión interna de la onda expansiva	10.0
P_{out}	Presión del medio	0.1
$v_{x_{int}}$	Velocidad interna en el eje x de la onda expansiva	0.0
$v_{y_{int}}$	Velocidad interna en el eje y de la onda expansiva	0.0
$v_{x_{out}}$	Velocidad en el eje x del medio	0.0
$v_{y_{out}}$	Velocidad en el eje y del medio	0.0
Co	Número de Courant	0.7

Cuadro 3.1: Parámetros que se utilizarán en las siguientes pruebas que se van a realizar para la onda de choque, estos valores son para fluidos no relativistas.

3.1.1. Prueba Lax

Las siguientes pruebas fueron usando el método de Lax, usando las ecuaciones relativistas con la constante de relación específica $\Gamma = 3/4$, así como las no relativistas $\Gamma = 5/3$, la descripción del fenómeno es de una onda expansiva sobre un medio constante (ver figura 3.2) con una densidad de energía de $E = 0.15 \frac{\text{g}}{\text{s}^2 \text{cm}}$, densidad $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, velocidad $\vec{v} = 0 \text{ cm/s}$ y una presión $P = 0.1 \frac{\text{g}}{\text{s}^2 \text{cm}}$ la simulación es sobre un dominio de 0 a 1 cm sobre el eje x y de 0 a 1 cm sobre el eje y , con una resolución de 200x200 celdas² al tiempo $t = 0 \text{ s}$ y en la onda interna, sus valor de la densidad es de $\rho = 5 \text{ g/cm}^3$, su velocidad interna será la misma que la del ambiente, la presión interna de la onda $P = 10 \frac{\text{g}}{\text{s}^2 \text{cm}}$ y una densidad de energía interna $E = 3.75 \frac{\text{g}}{\text{s}^2 \text{cm}}$, la onda de choque esta centrada en el punto $(x, y) = (0.5, 0.5) \text{ cm}$, y se correrá en el intervalo de tiempo $t \in [0, 0.5] \text{ s}$.

²Las celdas de nuestra malla miden dominio/200 = 0.005 cm

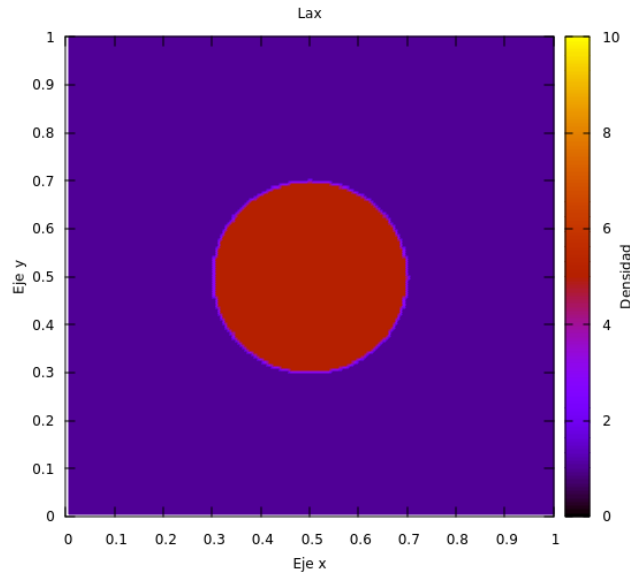


Figura 3.2: Condición inicial ($t = 0$) de una onda de choque (con E_{in} , ρ_{in} , P_{in} y r_{in}) que se va a expandir sobre un medio (con ρ_{out} y P_{out}) estático. Véase el Cuadro 3.1 para más detalles.

La evolución para la onda de choque no relativista muestra una expansión de la onda simétrica. El radio de la onda al tiempo inicial fue de $r = 0.2$ cm. A $t = 0.05$ s la onda se expandió a un radio de $r = 0.3$ cm mientras que para el tiempo $t = 0.10$ s se expandió a un radio de $r = 0.38$ cm. Debido a lo anterior, la velocidad de expansión de la onda fue de $v = 2.0$ cm/s y $v = 1.8$ cm/s, respectivamente. FALTA MENCIONAR A FORWARD SHOCK Y LA REVERSE SHOCK.. y por ende el HUECO (ver figura 3.3). ADMÁS FALTA MENCIONAR QUE LA PARTE CENTRAL SE DIFUMINA... LO CUAL ES ESPERABLE DEBIDO A LA VISCOSIDAD NUMERICA.

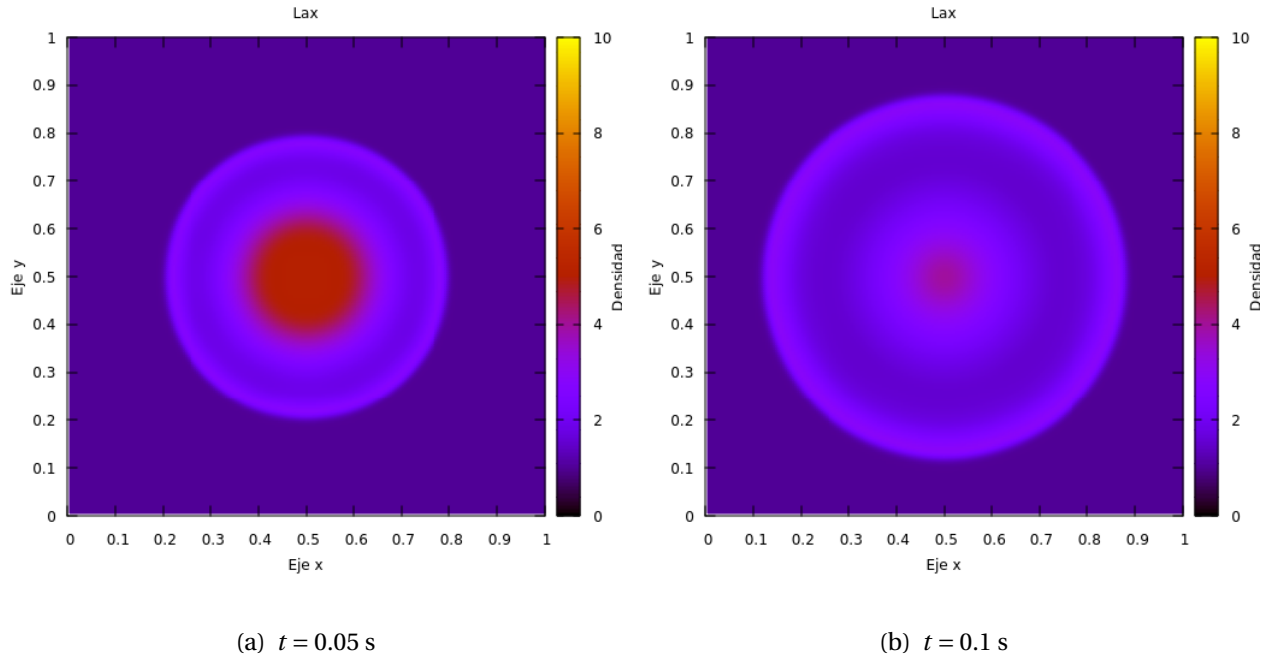


Figura 3.3: Evolución de la onda de choque mostrada en la Figura 3.1 usando el método de Lax no relativista. En el panel a) se muestra la onda de choque a $t=0.05$ s, mientras que en el panel b) se muestra para $t=0.10$ s.

Para el modo relativista, se nota una diferencia en el modo que se expande la onda, al tiempo $t = 0.05$ s el radio cambió a $r = 0.26$ cm y su velocidad $v = 1.2$ cm/s, el centro de la onda casi permanece constante a pesar del tiempo que transcurre a diferencia del no relativista, donde su centro casi desaparece después de 0.1 s y su radio crece a $r = 0.31$ cm y su velocidad $v = 1.1$ cm/s. Se ven 2 ondas una contra el medio y otra contra el centro.

REHACER

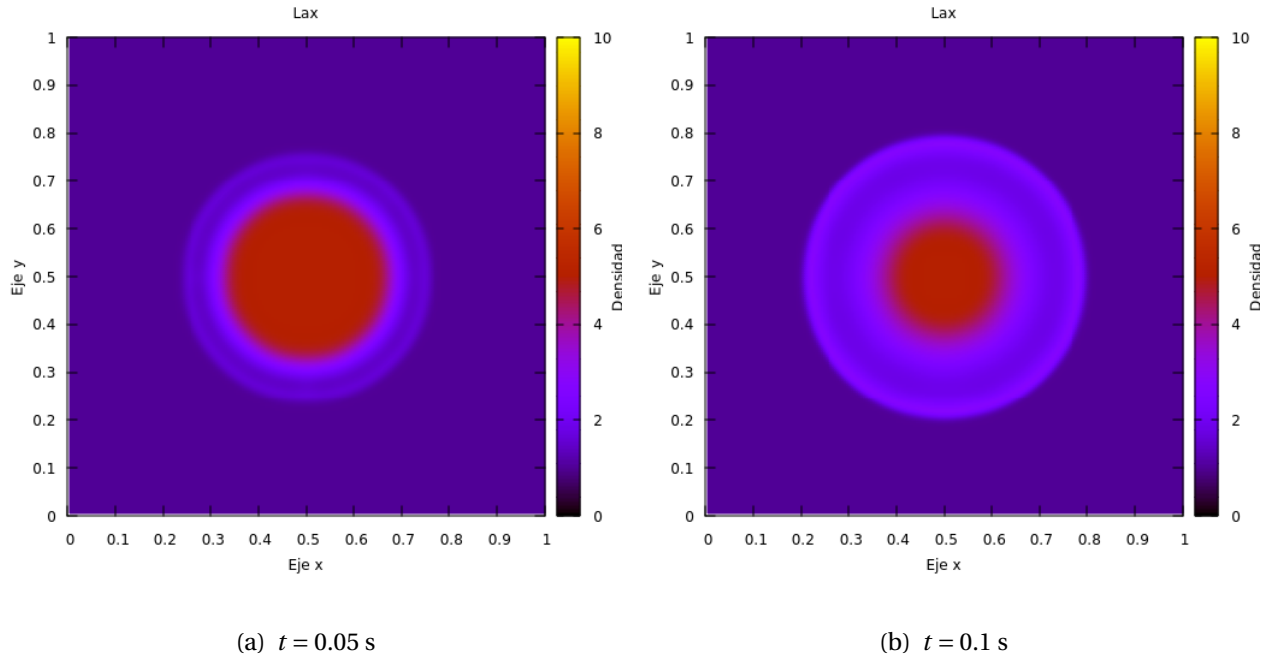


Figura 3.4: Primera prueba de una onda de choque centrada relativista, se puede ver un desarrollo de la onda más lento que en el no relativista

La segunda prueba consiste en realizar la misma prueba de la onda de choque resuelta con el método de Lax pero ubicando a la onda de choque en una esquina para poder analizar como se comporta la misma al interaccionar con las condiciones a la frontera. El centro de la nueva prueba se colocó en las coordenadas $(x, y) = (0.8, 0.8)$. Cabe señalar que las condiciones a la fronteras tienen la configuración de *outflow*.

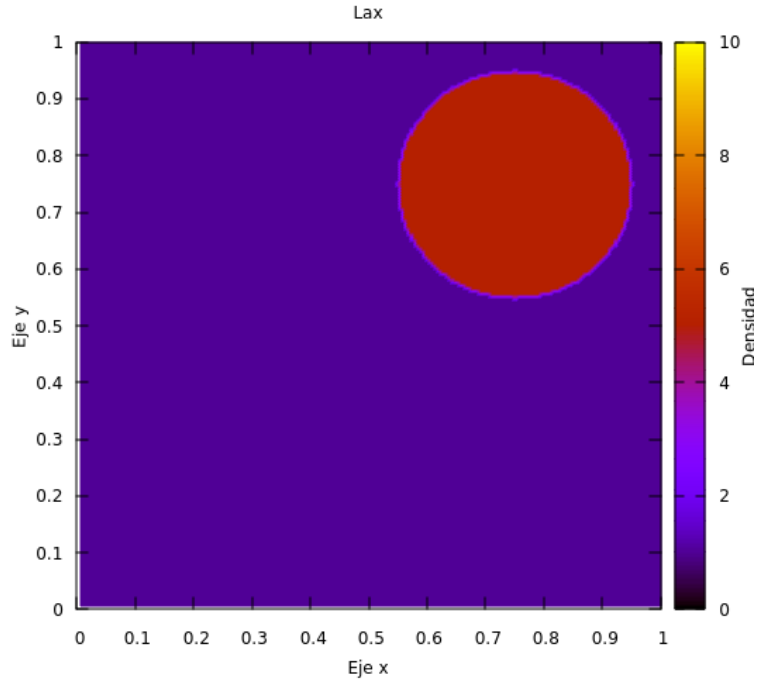


Figura 3.5: Condición inicial de la prueba número 2 para el resolovedor Lax no relativista. En esta prueba se tiene la misma condición inicial que la mostrada en la Figura 3.1, pero con las coordenadas de la onda de choque ubicadas en $(x, y) = (0.8, 0.8)$.

LAS FRONTERAS NO METEN RUIDO. Y LA EVOLUCIÓN ES CONSISTENTE CON LOS RESULTADOS DE ANTES, Y POR ENDE ESTA BIEN. Se puede observar que al evolucionar la onda de choque esta no muestra ninguna anomalía en las fronteras(ver apéndice B) y se nota un buen funcionamiento del código no relativista usando Lax DEBIDO A QUE... El radio al tiempo $t = 0.07$ s es $r = 0.34$ cm y su velocidad es $v = 2$ cm/s y para el tiempo $t = 0.14$ s el radio $r = 0.42$ y su velocidad $v = 1.83$ cm/s.

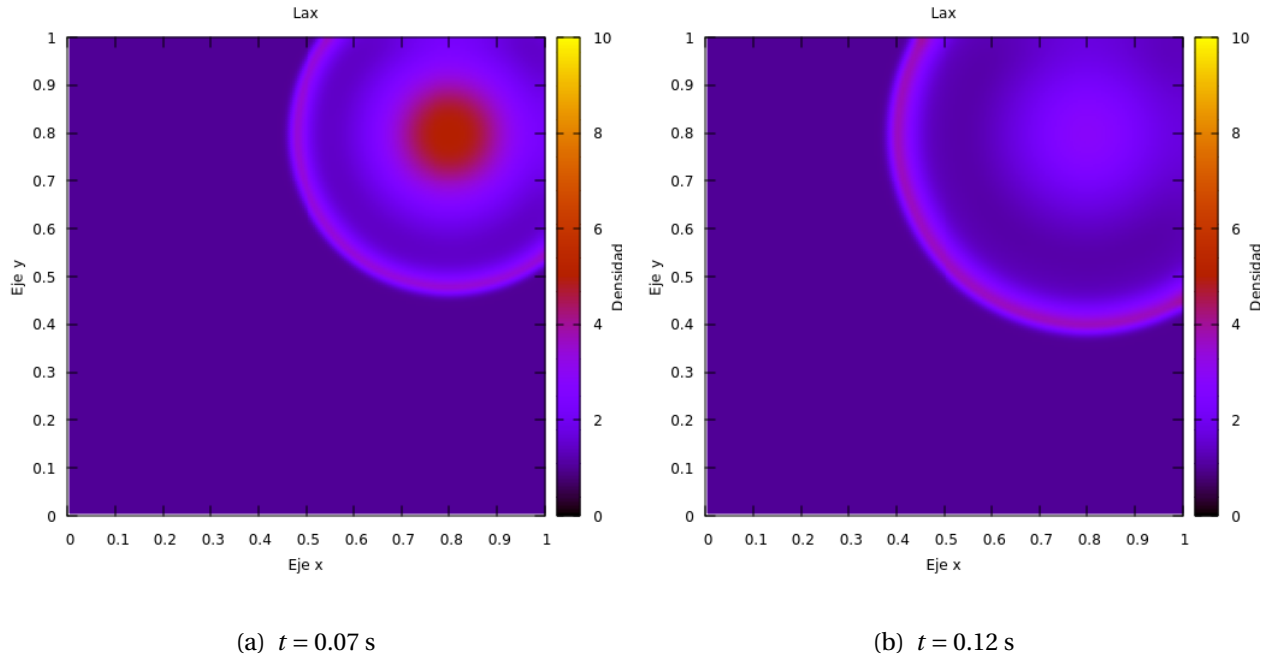


Figura 3.6: Evolución de la onda de choque mostrada en la Figura 3.4 usando el método de Lax no relativista. En el panel a) se muestra la onda de choque a $t=0.07$ s, mientras que en el panel b) se muestra para $t=0.12$ s.

La evolución de onda relativista, así como no relativista, tienen la misma evolución temporal para la centrada, es decir no importa donde se coloque el centro de la onda, esta evolucionará de igual modo para una que este centrada o no. Al tiempo $t = 0.07$ su radio es de $r = 0.29$ cm y su velocidad $v = 1.28$ cm/s, y en el tiempo $t = 0.12$ s el radio $r = 0.33$ cm y su velocidad $v = 1.08$ cm/s.

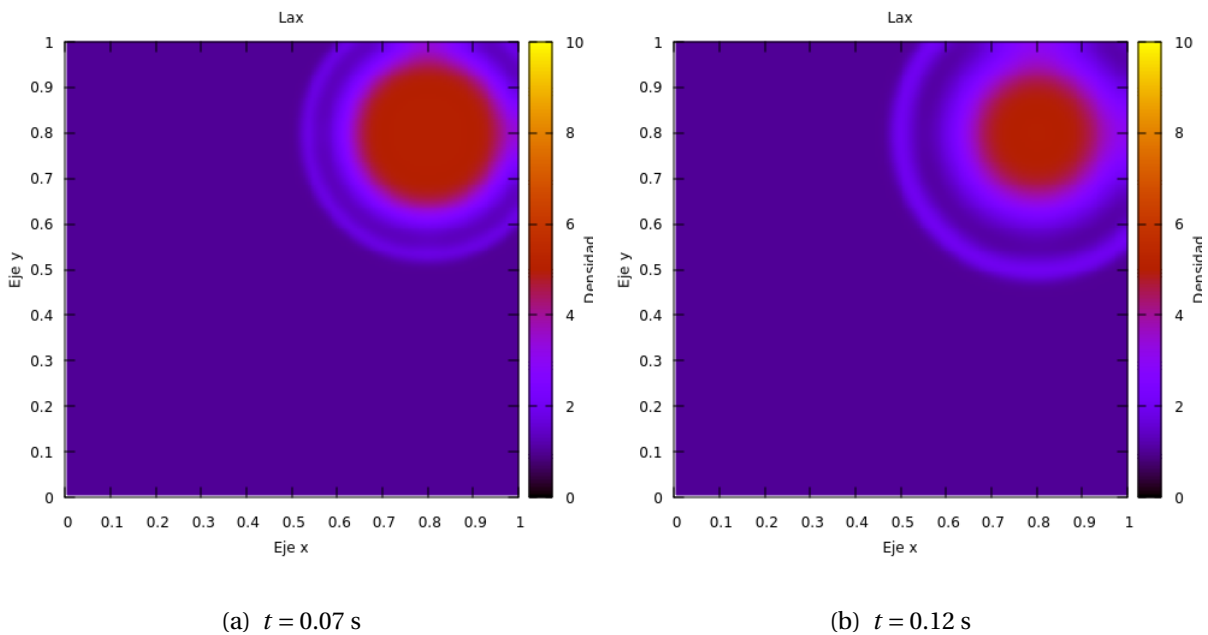


Figura 3.7: Evolución de nuestra onda relativista, se puede apreciar que, al igual que la onda no relativista, esta no presenta fallos al cruzar nuestra frontera.

3.1.2. Prueba HLL

Las siguientes pruebas son usando HLL, similarmente como en el caso de Lax, se presentarán casos relativistas y no relativistas. La condicion inicial es la misma que la de Lax, es decir, nuestra onda de choque tendra los mismos valores en la que habiamos dicho en la sección 3.1.1

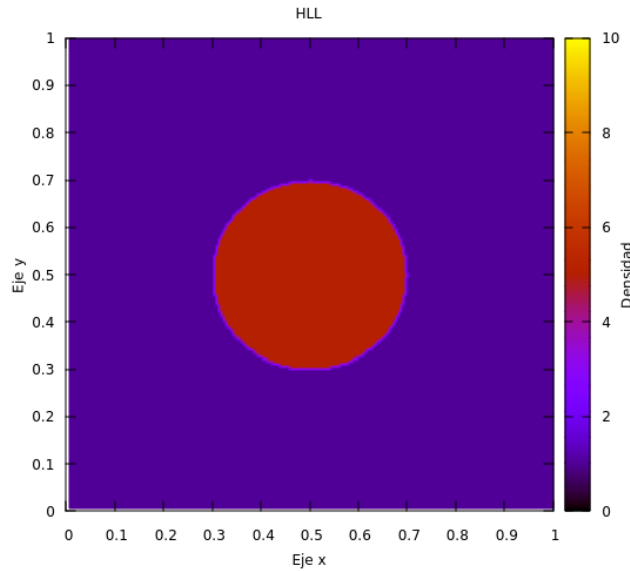


Figura 3.8: Onda de choque en el tiempo $t = 0$

La onda de choque fue centrada en el punto $(x, y) = (0.5, 0.5)$ cm, su radio es de $r = 0.2$ cm y al igual que en Lax se presentan 2 ondas, una onda contra el medio, la cual tiene una velocidad constante de $\vec{v} = 2$ cm/s y una onda contra el centro, el radio de la onda se expande a $r = 0.3$ cm al tiempo $t = 0.05$ s, mientras que al tiempo $t = 0.1$ s, su radio aumenta hasta $r = 0.38$ cm y disminuye la velocidad de la onda a más de la mitad $\vec{v} = 1.8$ cm/s, entre estas 2 ondas se va creando un vacio (vea figura 3.10).

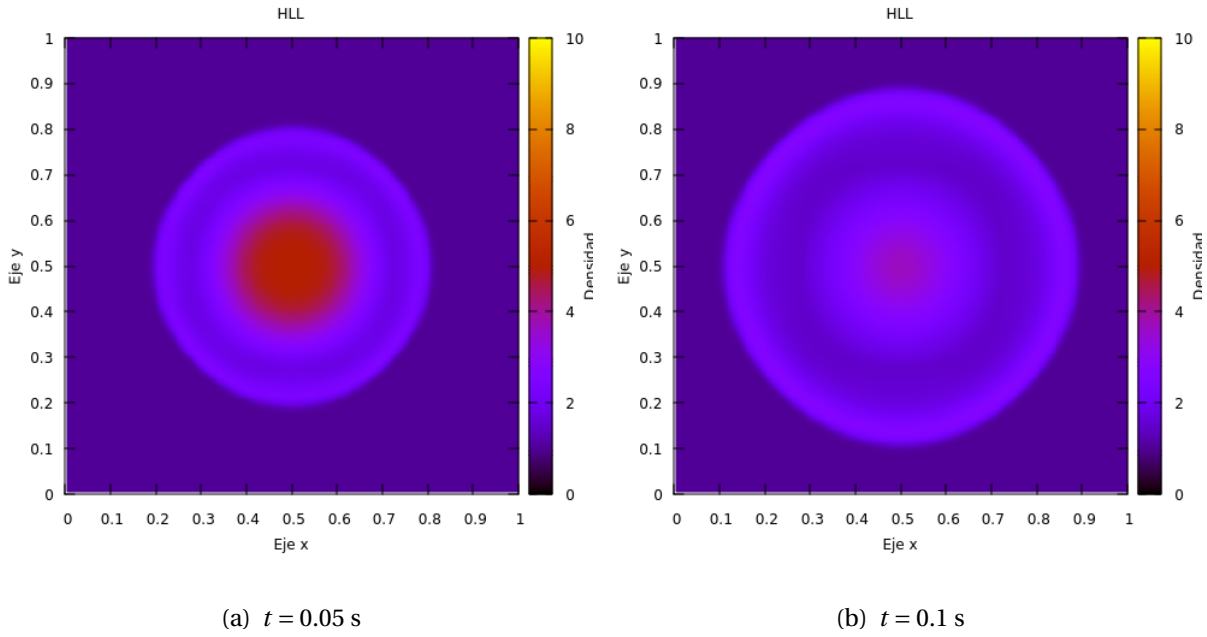


Figura 3.9: Onda de choque centrada usando el método HLL, la evolución de la onda fue a distintos tiempos

La evolución de la onda usando relatividad, fue más lenta que la newtoniano, su expansión al tiempo $t = 0.05$ s es de $r = 0.26$ cm, y una velocidad $\vec{v} = 1.2$ cm/s, para el tiempo $t = 0.1$ s, el radio de la onda se expandió a $r = 0.31$ cm y su velocidad correspondiente es de $\vec{v} = 1.1$ cm/s, se pueden ver 2 ondas una contra el medio y otra en reversa que va dirigida hacia el centro provocando un vacío en el centro de la onda.

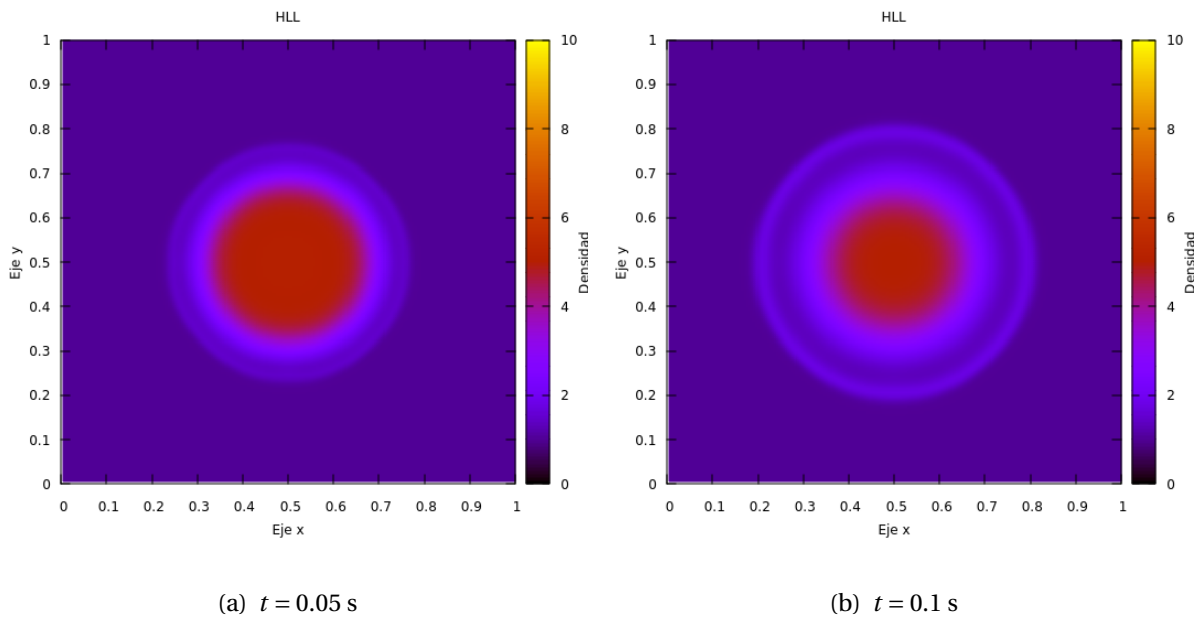


Figura 3.10: La explosión de la onda relativista es más lenta que la newtoniana, casi se desarrolla a la mitad de velocidad de la misma

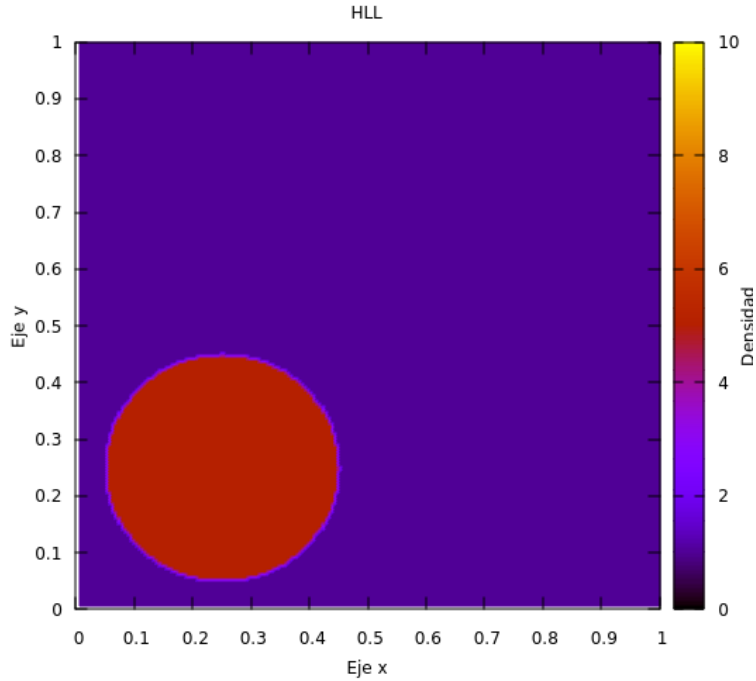


Figura 3.11: Onda de choque en el tiempo $t = 0$

En la siguiente prueba se movió el centro de la onda de choque y este se colocó en el punto $(x, y) = (0.25, 0.25)$, las fronteras funcionaron apropiadamente, el radio de la expansión de la onda al tiempo $t = 0.05$ s es de $r = 0.30$ cm y su velocidad a ese instante es de $v = 2.0$ cm/s. En el tiempo $t = 0.1$ el radio de la onda se expandió a $r = 0.38$ cm, su velocidad de $v = 1.6$ cm/s

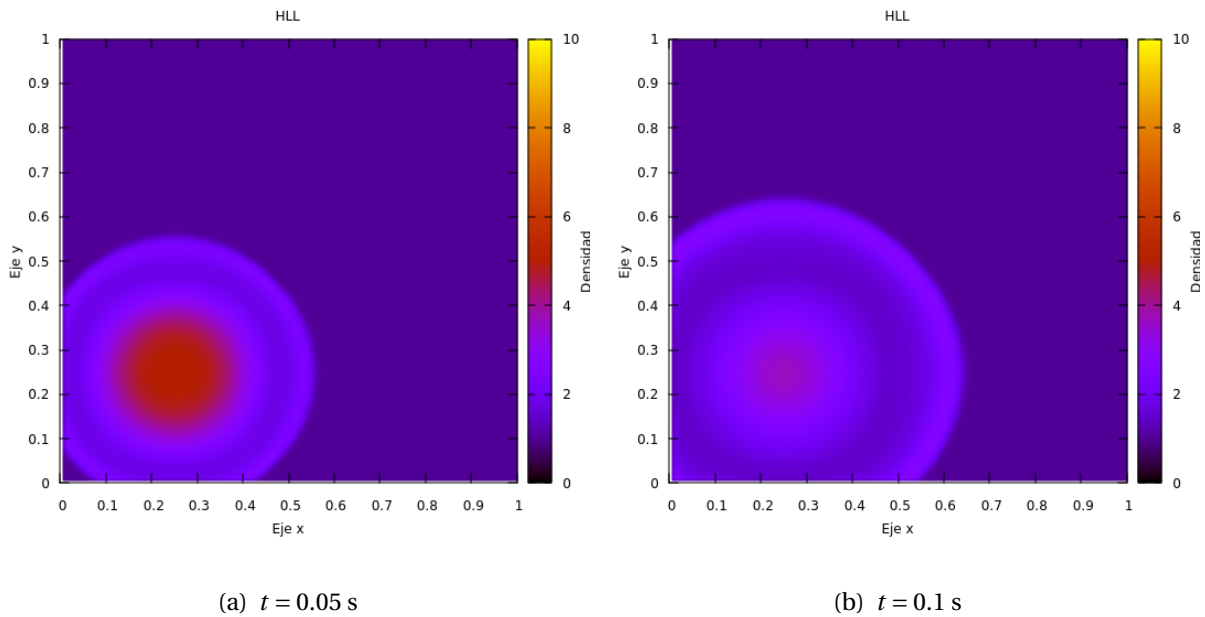


Figura 3.12: La velocidad de la onda tiene el mismo comportamiento que la onda centrada.

El radio para la onda relativista al tiempo $t = 0.05$ aumenta a $r = 0.26$ cm, su velocidad es de $v = 1.2$ cm/s. En el tiempo $t = 0.1$ su radio se expande a $r = .31$ cm y su velocidad fue de $v = 1.1$ cm/s

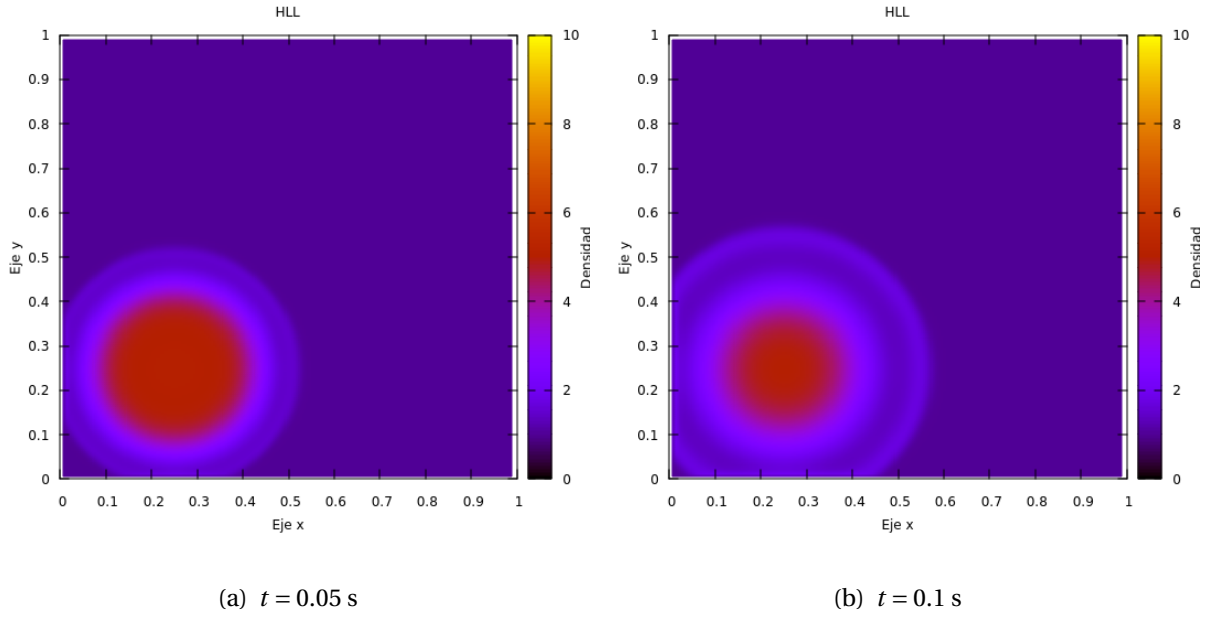


Figura 3.13: La onda sigue siendo casi la mitad de la velocidad de la onda no relativista.

3.1.3. Puebas no relativistas Lax vs HLL

En esta sección, vamos a comparar las diferencias que hay entre el método de Lax y el HLL, la onda de choque tendrá los valores iniciales del cuadro 3.1 y el centro se situará en el punto $(x, y) = (0.5, 0.75)$ cm.

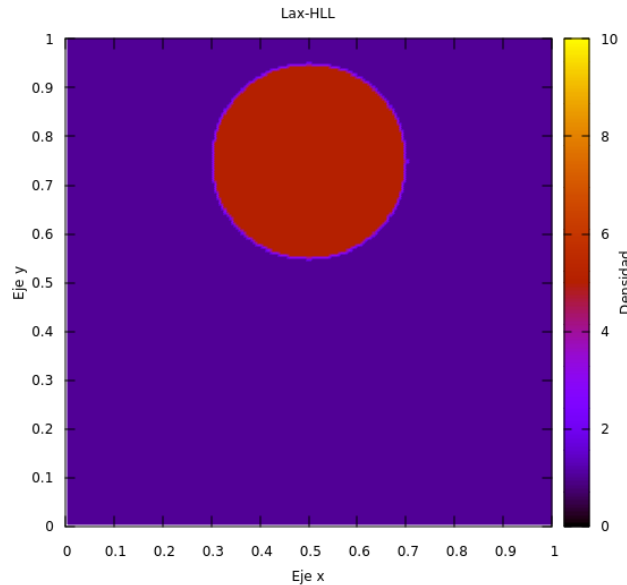


Figura 3.14: Onda de choque en el tiempo $t = 0$

La onda de Lax al tiempo $t = 0.05$ s tiene un radio $r = 0.31$ cm y una velocidad $v = 2.2$ cm/s, mientras que la onda de HLL tiene un radio $r = 0.31$ y una velocidad $v = 2.2$ cm/s. Al avanzar la onda se ve una diferencia entre el método de Lax y HLL, la onda contra el centro de la onda se ve más

difusa en HLL que con Lax, por lo que HLL es menos viscoso y resuelve mejor las discontinuidades.

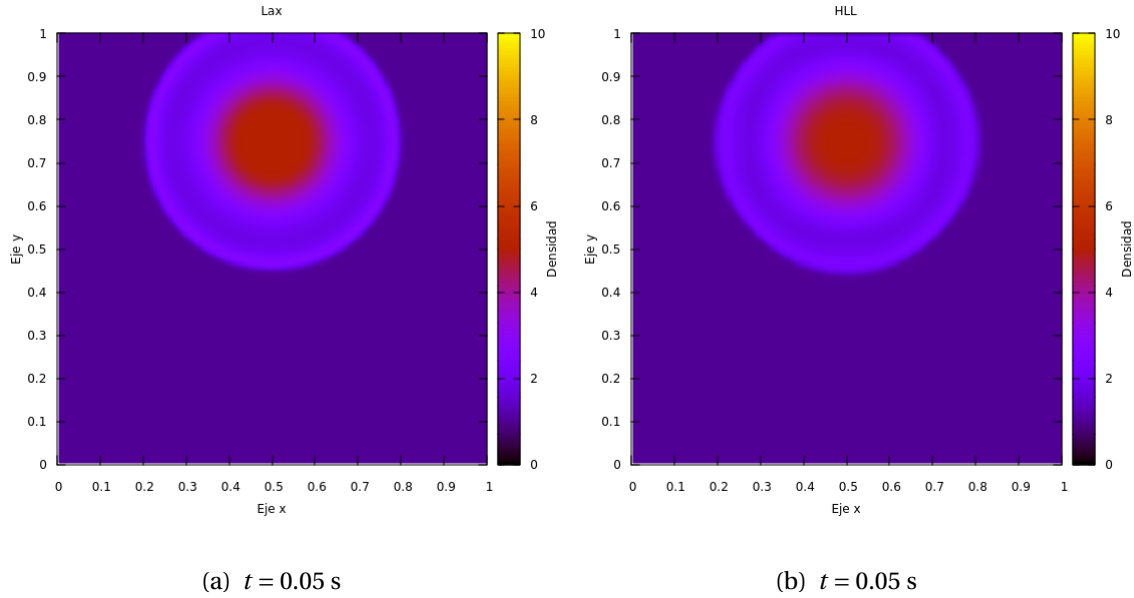


Figura 3.15: Ambos métodos tienen los mismos valores en cuestión de radio y velocidad de la onda.

Al dispersarse por completo el centro de la onda, se puede ver con mejor claridad que hay 2 diferentes tipos de onda, una contra el medio y otra contra el centro de la misma, para Lax, el radio toma el valor $r = 0.38$ y una velocidad $v = 1.8$ cm/s. En el caso de HLL es el mismo radio $r = 0.38$ cm y la misma velocidad $v = 1.8$ cm/s

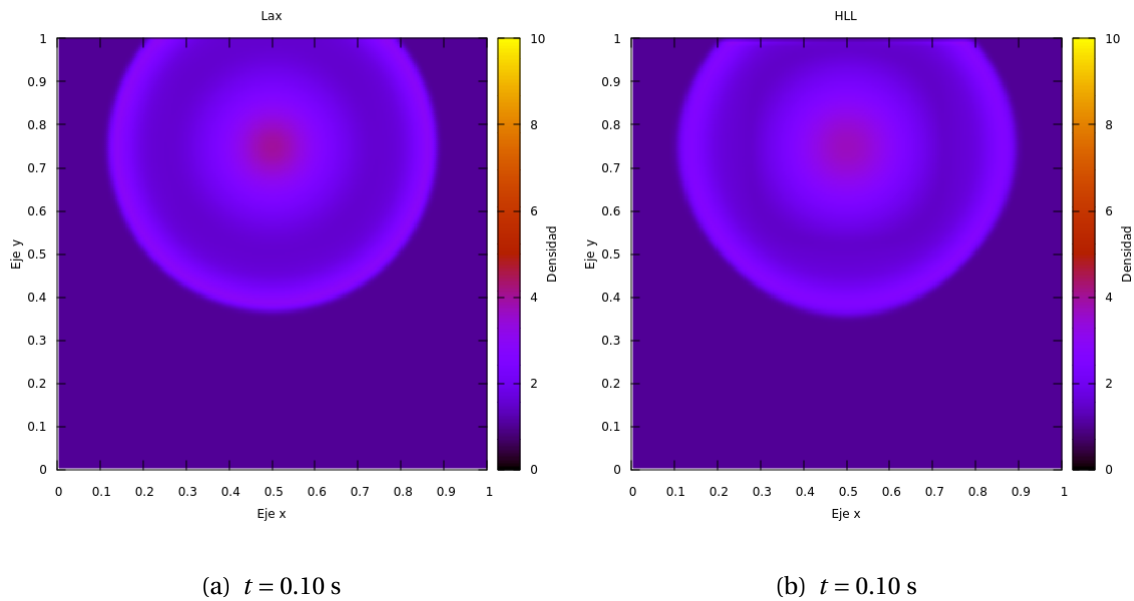


Figura 3.16: Al desvanecerse casi por completo la onda se puede notar que se descompone en 2 ondas una contra el medio y otra contra el centro de la onda.

3.1.4. Puebas relativistas Lax vs HLL

La onda de choque usando relatividad tiene su centro en el punto $(x, y) = (0.5, 0.2)$ y sus valores son los mismos propuestos en el cuadro 3.1

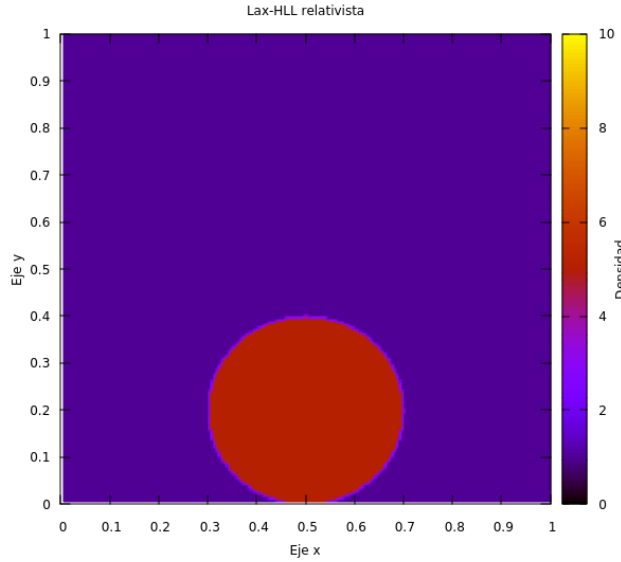


Figura 3.17: Onda de choque en el tiempo $t = 0$

En las coordenadas $(x, y) = (0.5, 0.0)$ se puede ver que el algoritmo de Lax tiene algunos errores puesto que el centro de la onda se deforma en estos puntos, mientras que HLL es casi imperceptible, el radio al tiempo $t = 0.06$ s usando el método de Lax es $r = 0.26$ cm y su velocidad $v = 1.0$ cm/s, mientras que usando HLL su radio es de $r = 0.26$ y su velocidad $v = 1.0$ cm/s

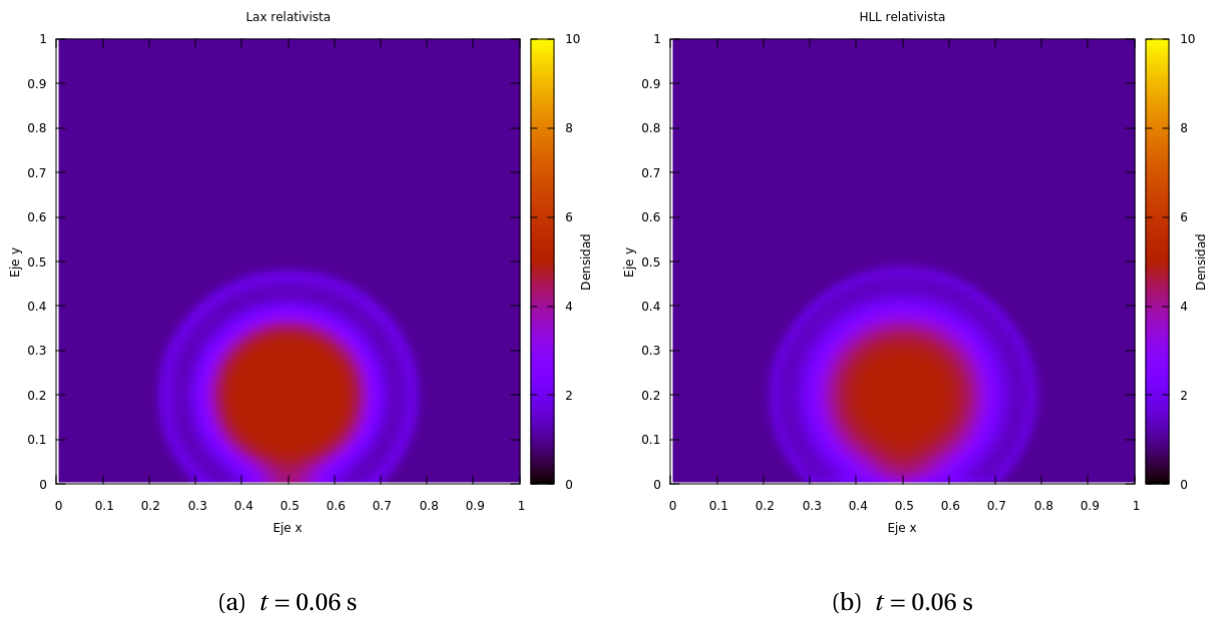


Figura 3.18: En las pruebas relativistas, al comparar las imágenes se pueden apreciar una diferencia entre los métodos mas significativa.

Al avanzar la onda, al tiempo $t = 0.2$ s, en ambos métodos se sigue mostrando 2 ondas una contra el medio y una contra el centro, el radio para Lax $r = 0.39$ cm su velocidad $v = 0.95$ cm/s el radio usando HLL es de $r = 0.39$ cm y su velocidad $v = 0.95$ cm/s

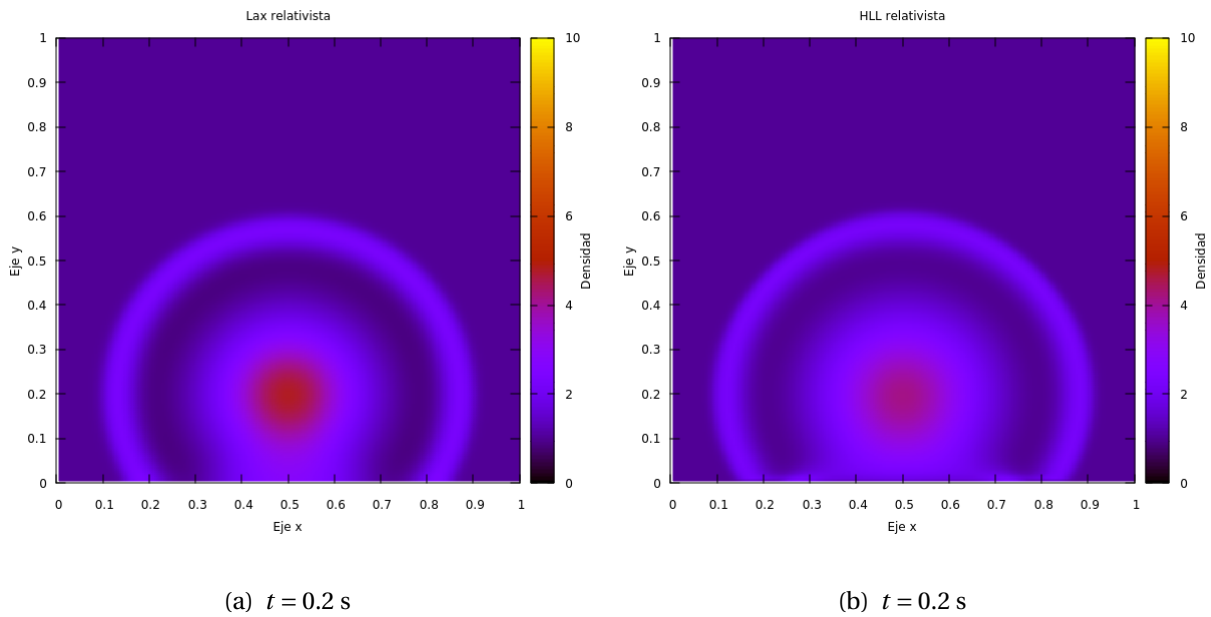


Figura 3.19: El centro de la onda de HLL se ve más difuminada que al usar Lax

3.2. Jet

En esta parte vamos a simular un jet con las siguientes características

Capítulo 4

Medios de densidad

4.1. Condiciones de frontera

4.1.1. SGRB en medio de densidad 1

4.1.2. SGRB en medio de densidad 2

4.2. Comparación con el GRB170817

Capítulo 5

Resultados

Capítulo 6

Conclusiones

Apéndice A

Código

El programa está escrito en lenguaje FORTRAN se compone de un módulo principal el cual está compuesto de un programa principal y este a su vez llamará a varias subrutinas:

- **initconds:** Esta subrutina calculará los valores iniciales que le demos al programa
- **output:** Devuelve un archivo con los datos que se calculan con el método de Lax
- **Courant:** Calcula el paso temporal
- **ulax:** Calcula el paso siguiente de las variables conservadas
- **boundaries:** En esta parte puedes definir las fronteras a utilizar como outflow o las condiciones para las del jet
- **fluxes:** Calculo de los flujos

Al usar las ecuaciones hidrodinámica relativistas, se agregan 2 subrutinas más:

- **uprim:** Este módulo es agregado para poder desacoplar las variables conservadas
- **newraph:** Calcula el método de Newton-Rapson será de gran utilidad en el desacoplamiento de las variables conservadas y así obtener nuestras primitivas

```
1 do i=0,nx+1
2   do j=0,ny+1
3
4     x=float(i)*dx      ! obtain the position x_i
5     y=float(j)*dy      ! obtain the position y_j
6     rad=sqrt((x-xc)**2+(y-yc)**2)
7
8     if (rad < 0.1) then
9
10      lorin=1/sqrt(1-(vxin**2+vyin**2))
11      hin=1.+gamma/(gamma-1.)*pin/rhoi
12
13      u(1,i,j)=rhoi*lorin
14      u(2,i,j)=rhoi*vxin*lorin**2*hin
15      u(3,i,j)=rhoi*vyin*lorin**2*hin
16      u(4,i,j)=rhoi*lorin**2*hin-pin
17
18    else
19
20      lorout=1./sqrt(1.-(vxout**2+vyout**2))
```

```

21 hout=1.+gamma/(gamma-1.)*pout/rhoout
22
23 u(1,i,j)=rhoout*lorout
24 u(2,i,j)=rhoout*vxout*lorout**2*hout
25 u(3,i,j)=rhoout*vyout*lorout**2*hout
26 u(4,i,j)=rhoout*lorout**2*hout-pout

```

y para los fluidos en la subrutina de fluxes

```

1      f(1,i,j)=rho*vx*lor
2      f(2,i,j)=rho*vx*vx*lor**2*h+P
3      f(3,i,j)=rho*vx*vy*lor**2*h
4      f(4,i,j)=rho*vx*lor**2*h
5
6      g(1,i,j)=rho*vy*lor
7      g(2,i,j)=rho*vx*vy*lor**2*h
8      g(3,i,j)=rho*vy*vy*lor**2*h+P
9      g(4,i,j)=rho*vy*lor**2*h

```

Como el código es una iteración, solo la primera vez que itere estaremos bien, pero, al siguiente bucle saldrá mal debido a que nuestros resultados nos están arrojando en principio las variables conservadas, y lo que se requiere es obtener las primitivas.

A.1. Condición inicial

En la subrutina *initconds* se calcularán las condiciones iniciales, tomando los valores de los parámetros del módulo de *globals*, que en este caso son: la densidad (ρ), las velocidades tanto en x como en y (v_x, v_y), la presión (p) y Γ . Con estas constantes dadas se calcularán nuestras variables conservadas.

```

1! =====
2! In this module we set the initial condition
3! =====
4      subroutine initconds(time, tprint, itprint)
5      use globals
6      implicit none
7      real, intent(out) :: time, tprint
8      integer, intent(out) :: itprint
9      integer :: i, j
10     real :: x, y, rad
11
12! =====
13! For the 2D circular blast:
14! u(1,i,j) = rho(i,j)
15! u(2,i,j) = vx(i,j)
16! u(3,i,j) = vy(i,j)
17! u(4,i,j) = etot(i,j) = eint + ekin = P/(gamma-1)
18! =====
19     do i=0, nx+1
20     do j=0, ny+1
21         x=float(i)*dx      ! obtain the position $x_i$
22         y=float(j)*dy      ! obtain the position $y_j$
23         rad=sqrt((x-xc)**2+(y-yc)**2)
24
25         if (rad < 0.3) then
26             u(1,i,j)=rhoin
27             u(2,i,j)=rhoin*vxin
28             u(3,i,j)=rhoin*vyin

```

```

29      u(4,i,j)=pin/(gamma-1.)+0.5*u(2,i,j)*u(2,i,j)/u(1,i,j) + 0.5/u(1,i,j)*u(3,i,j)*
    u(3,i,j)
30      else
31          u(1,i,j)=rhoout
32          u(2,i,j)=rhoout*vxout
33          u(3,i,j)=rhoout*vyout
34          u(4,i,j)=pout/(gamma-1.) + 0.5/u(1,i,j)*u(2,i,j)*u(2,i,j) + 0.5/u(1,i,j)*u(3,i,
    j)*u(3,i,j)
35
36      end if
37
38      end do
39      end do
40
41  -----
42  end of the 2D circular blast initial condition
43  reset the counters and time to 0
44  -----
45      time=0
46      tprint=0
47      itprint=0
48
49      return
50      end subroutine initconds
51  -----
52  end of the init condition module
53  =====

```

En esta parte dan los valores iniciales para nuestra malla tanto en x como en y en el tiempo $t = 0$

A.1.1. Condición de Courant

Esta parte del código tiene que ver con los incrementos Δt , los cuales se van a calcular en este módulo, para poder calcularlos tenemos que tener en cuenta la convergencia y la estabilidad de nuestras ecuaciones diferenciales parciales (ecuación ??). La condición de convergencia establece que la solución de la ecuación numérica se aproxima a la solución con ecuación diferencial parcial original si todos los intervalos finitos tienden a cero, una condición necesaria para la convergencia es que los errores, por ejemplo los debidos al redondeo, no se incrementen con en tiempo. Esta es la llamada la condición de estabilidad. Es una condición tan importante que implica ciertas restricciones al tamaño del paso de tiempo en un proceso explícito. Un análisis de estabilidad para esquemas explícitos a partir de la teoría de las características para soluciones continuas lleva a la conclusión que dichos esquemas, para ser estables, deben cumplir la condición de Courant, que es:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u + C} \quad (\text{A.1})$$

Donde C es el número de Courant y nos limita a que nuestros Δt no sean tan grandes

```

1  !=====
2  CFL criterium module
3  -----
4      subroutine courant(dt)
5      use globals
6      implicit none
7      real, intent(out) :: dt
8      real :: rho, vx, vy, P, cs
9      integer :: i, j
10

```

```
11. |
12. | Calculate the CFL criterium
13. |
14. | dt=1E30
15. | do i=0,nx+1
16. |   do j=0,ny+1
17. |     rho=u(1,i,j)
18. |     vx=u(2,i,j)/rho
19. |     vy=u(3,i,j)/rho
20. |     P=(u(4,i,j)-0.5*rho*(vx**2+vy**2))*(gamma-1.)
21. |     cs=sqrt(gamma*P/rho) !Speed of sound
22. |     dt=min( dt,Co*dx/(abs(vx)+cs) )
23. |     dt=min( dt,Co*dy/(abs(vy)+cs) )
24. |
25. |   end do
26. | end do
27. |
28. | return
29. | end subroutine courant
```


Apéndice B

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera se usará para obtener los valores de nuestras variables conservadas en los extremos de nuestra malla de puntos, con el fin de evitar errores numéricos, las condiciones de frontera que generalmente se usan son de cuatro tipos las de *outflow*, las de *reflexión*, las *periódicas* y las de *jet*. Las del tipo *outflow* serán aquellas en las que una vez los valores sobre la malla (ondas) queden fuera de esta, ya no sabremos que pasó después con estos datos, las de *reflexión* serán aquellas en las que nuestros datos en vez de salir se reflejarán y las *periódicas* serán parecidas a las de *reflexión* solo que en vez de reflejarse las ondas, estas entrarán del lado contrario de donde salieron y las de tipo *jet*, será para que de un lado de nuestra malla salga una fuente de partículas.

Para entender lo que son las condiciones de frontera, vamos suponer una malla de puntos, esta malla tendrá $n + 2$ filas y $m + 2$ columnas, para identificar los puntos vamos a indexarlos empezando desde el 0 hasta $n + 1$ en el caso de las filas y de 0 hasta $m + 1$ para el de las columnas.

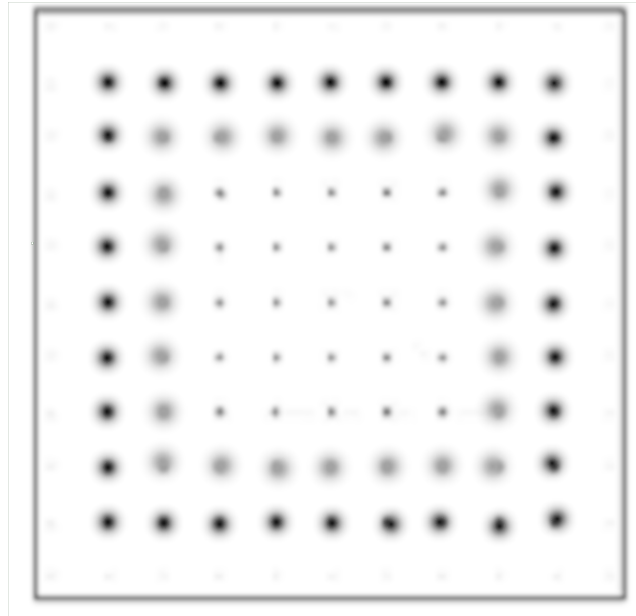


Figura B.1: Malla de puntos que resalta las fronteras, los puntos más oscuros representan una frontera *fantasma*, es decir, ese conjunto de puntos estará allí como apoyo para resolver los cálculos que hará la computadora dado que tanto el método de Lax, como el método de HLL usan los puntos posteriores y anteriores en el espacio del punto que queremos saber su valor, pero no se graficarán

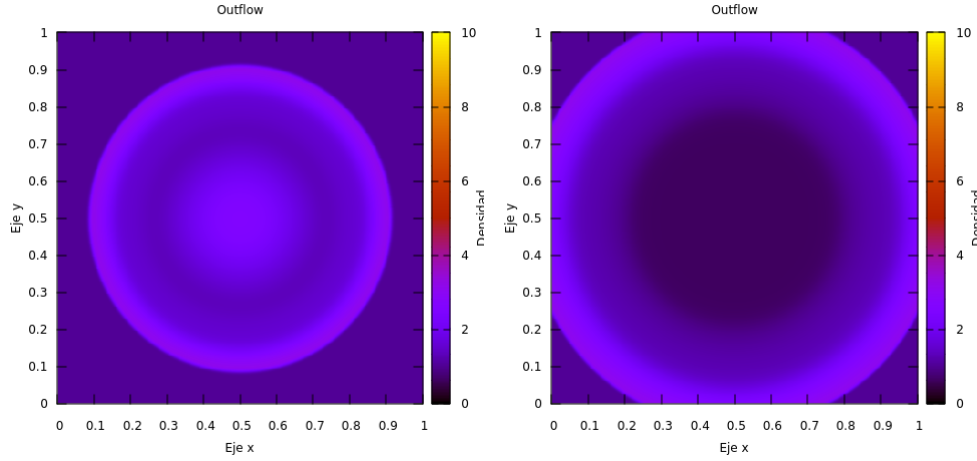
La figura B.1 muestra los puntos más negros como unos puntos que nos van a servir de apoyo para calcular los valores de los puntos más grises, esto debido a que para calcular los valores de

algún punto (x_i, y_j) necesitamos el punto posterior x_{i+1}, y_{j+1} y el punto anterior x_{i-1}, y_{j-1} .

Ahora, cuando llegamos a los últimos puntos de nuestra frontera, por ejemplo, el punto x_0, y_0 , no podremos calcularlo debido a que no tendremos conocimiento acerca del punto anterior $x_{(-1)}, y_{(-1)}$, entonces tendremos que darles valores específicos a estos puntos, pero no podemos darles cualquier valor, en las siguientes secciones vamos a ver que valores válidos le podemos dar para el funcionamiento del código.

B.0.1. Condiciones de frontera *outflow*

Las condiciones *outflow*, son en las que los valores de nuestra frontera fantasma (puntos negros) que toman los mismos valores que su antecesor (puntos grises), los fenómenos físicos que atraviesan nuestra frontera, pasarán como si tuvieramos más dominio hacia afuera y una vez que salgan perderemos información sobre esta.



(a) onda expandiéndose antes de cruzar la frontera (b) onda expandiéndose después de cruzar la frontera

Figura B.2: Al pasar la onda nuestra frontera, esta sigue su trayecto normal como si el dominio fuera infinito

Las ecuaciones que obedece nuestra frontera son las siguientes:

$$\mathbf{U}(0, j) = \mathbf{U}(1, j) \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{U}(n+1, j) = \mathbf{U}(n, j) \quad (\text{B.2})$$

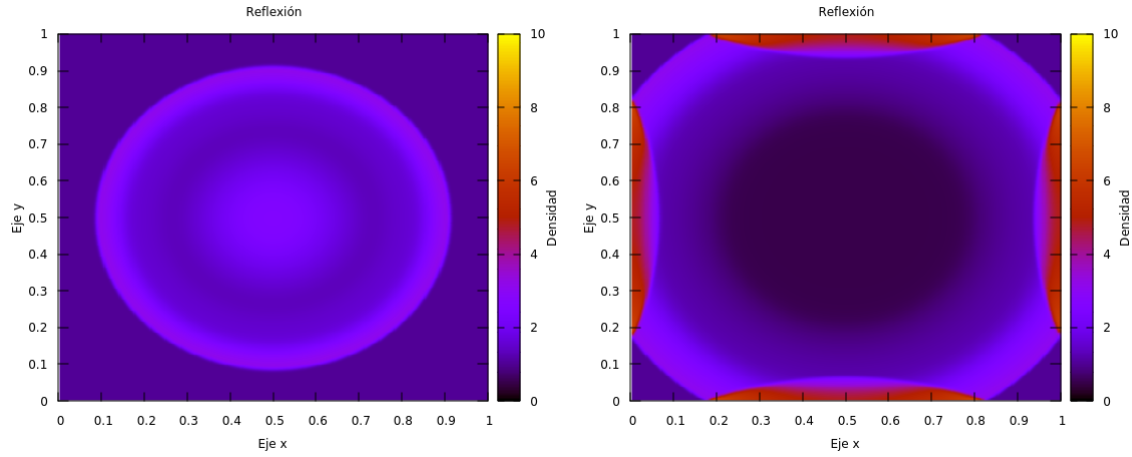
$$\mathbf{U}(i, 0) = \mathbf{U}(i, 1) \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{U}(i, m+1) = \mathbf{U}(i, m) \quad (\text{B.4})$$

Donde $i, j \leq n, m \in \mathbb{N}$

B.0.2. Condiciones de frontera *reflexión*

Las condiciones de reflexión funcionan como una pared en la que no se le permite al fenómeno físico escapar y al toparse con estas fronteras se reflejarán. Los valores que tendrán los puntos negros, serán los valores negativos de los puntos grises.



(a) onda expandiéndose antes de llegar a la frontera

(b) onda reflejándose en las fronteras

Figura B.3: Al llegar la frontera la onda se reflejará y chocará con la misma

Las ecuaciones que obedece nuestra frontera son las siguientes:

$$\mathbf{U}(0, j) = -\mathbf{U}(1, j) \quad (\text{B.5})$$

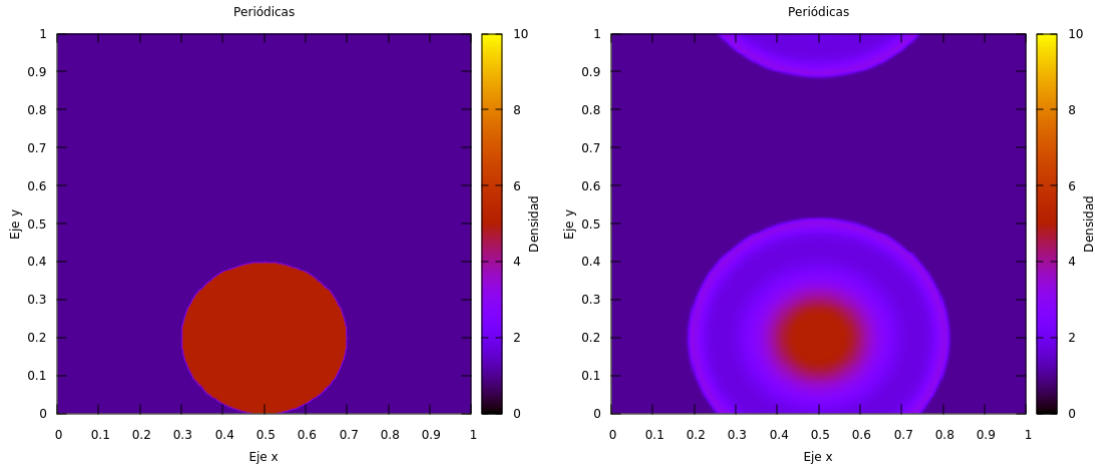
$$\mathbf{U}(n+1, j) = -\mathbf{U}(n, j) \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{U}(i, 0) = -\mathbf{U}(i, 1) \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{U}(i, m+1) = -\mathbf{U}(i, m) \quad (\text{B.8})$$

B.0.3. Condiciones de frontera *Periódicas*

Las condiciones periódicas son cuando nuestra frontera fantasma toma los valores de la frontera opuesta del lado que estan, es decir, si un fenómeno físico pasa a través de la parte de arriba de nuestro dominio (ver figura B.5), este, saldrá por la parte de abajo y viceversa, lo mismo aplica para los fenómenos pasen por la parte izquierda o derecha de nuestro dominio.



(a) Onda antes de tocar la frontera de abajo (b) La onda pasa la frontera de abajo y sale por la parte de arriba

Figura B.4: Al llegar la onda abajo se puede ver que se transporta al lado de arriba, se eligió esa posición de la onda, solo para resaltar la periodicidad de la onda, ya que si se hubiera puesto en el centro, la onda chocaría contra si mismo y no podriamos ver el paso de la onda.

Las ecuaciones que representan este tipo de frontera son las siguientes:

$$\mathbf{U}(0, j) = \mathbf{U}(n, j) \quad (\text{B.9})$$

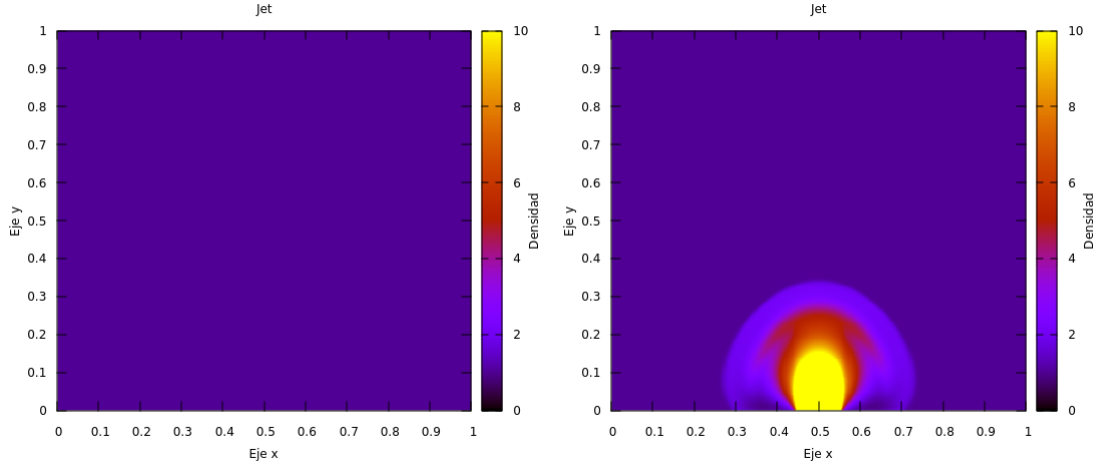
$$\mathbf{U}(n+1, j) = \mathbf{U}(1, j) \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{U}(i, 0) = \mathbf{U}(i, m) \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{U}(i, m+1) = \mathbf{U}(i, 1) \quad (\text{B.12})$$

B.0.4. Condiciones de frontera *Jet*

Las condiciones de tipo jet, son en las que dado un lado de nuestra frontera (pueden ser varios), se va a inyectar una energía y masa a una cierta velocidad constante todo el tiempo en una de las partes de la frontera.



(a) La densidad del medio sin la inyección del jet

(b) Jet inyectándose en el medio

Figura B.5: El jet, es basicamente inyectar masa y energía en una parte de nuestra frontera, a cada tiempo que evoluciona.

Para obtener las ecuaciones de esta frontera, igualamos los valores de la frontera *fantasma* con las variables primitivas de nuestro jet, las siguientes ecuaciones son para la parte de abajo de nuestro dominio.

No relativista

$$\mathbf{U}(1,0,j) = \rho_{jet} \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{U}(2,0,j) = \rho_{jet} v_{x_{jet}} \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{U}(3,0,j) = \rho_{jet} v_{y_{jet}} \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{U}(4,0,j) = E_{jet} \quad (\text{B.16})$$

Relativista

$$\mathbf{U}(1,0,j) = \rho_{jet} \gamma \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{U}(2,0,j) = \rho_{jet} v_{x_{jet}} \gamma^2 h \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{U}(3,0,j) = \rho_{jet} v_{y_{jet}} \gamma^2 h \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{U}(4,0,j) = \rho_{jet} \gamma^2 h - P \quad (\text{B.20})$$

donde $j \in [a, b]$ y $a \geq 0, b \leq n + 1$. Los puntos de la frontera que no sean del jet se pueden combinar con los 3 tipos de frontera mencionados anteriormente.

Apéndice C

Condiciones de Rankine-Hugoniot no relativistas

Las ecuaciones de Rankine-Hugoniot parten de las ecuaciones de la hidrodinámica considerando un sistema cerrado usando las ecuaciones 2.4, 2.5 y 2.6 donde no varia con el tiempo, es decir, que $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, con lo que se pueden reescribir de la siguiente manera:

La conservación de masa

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{C.1})$$

El momento

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \nabla p = 0 \quad (\text{C.2})$$

Ecuación de la energía

$$\nabla \cdot [\mathbf{u} (E + P)] = 0 \quad (\text{C.3})$$

Considerando una dimensión:

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{d(\rho u^2)}{dx} + \frac{dP}{dx} = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{d(u[E + P])}{dx} = 0 \quad (\text{C.6})$$

Si integramos, la ecuaciones se van a igualar a constantes y podemos reescribir las ecuaciones del siguiente modo usando la ecuación de estado $E = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{P}{\Gamma - 1}$ donde $E \left[\frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}^2} \right]$ es la densidad de energía por unidad de volumen

$$\rho_j u_j = \rho_m u_m \quad (\text{C.7})$$

$$\rho_j u_j^2 + P_j = \rho_m u_m^2 + P_m \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{1}{2} u_j^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{P_j}{\rho_j} = \frac{1}{2} u_m^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{P_m}{\rho_m} \quad (\text{C.9})$$

Donde $\rho \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right]$ representa la densidad, $u \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$ la velocidad, $P \left[\frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}} \right]$ la presión, Γ el índice adiabático adimensional donde para velocidades ultrarrelativistas $\Gamma = 4/3$ y para no relativistas $\Gamma = 5/3$

y los índices j, m que relacionan a las propiedades del jet y del medio respectivamente. Usando la ecuación C.7, podemos definir el flujo como $j \equiv \rho_j u_j = \rho_m u_m$, sustituyendo en la ecuación C.8 podemos reescribirla como:

$$P_j + \frac{j^2}{\rho_j} = P_m + \frac{j^2}{\rho_m} \quad (C.10)$$

y la ecuación C.9 llegamos a:

$$\frac{1}{2} \frac{j^2}{\rho_j^2} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{P_j}{\rho_j} = \frac{1}{2} \frac{j^2}{\rho_m^2} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{P_m}{\rho_m} \quad (C.11)$$

Despejando j de la ecuación C.10 obtenemos:

$$-j^2 = \frac{P_j - P_m}{\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_j}} \quad (C.12)$$

Ahora sustituyendo la ecuación en C.12 en C.11 obtenemos:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{P_m - P_j}{\frac{1}{\rho_j} - \frac{1}{\rho_m}} \right) \left(\frac{1}{\rho_j^2} - \frac{1}{\rho_m^2} \right) = \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \left(\frac{P_m}{\rho_m} - \frac{P_j}{\rho_j} \right)$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{2} (P_m - P_j) \left(\frac{1}{\rho_j} + \frac{1}{\rho_m} \right) = \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \left(\frac{P_m}{\rho_m} - \frac{P_j}{\rho_j} \right)$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{\rho_m} \left(\frac{1}{2} P_m - \frac{1}{2} P_j - \frac{\Gamma}{\Gamma-1} P_m \right) = \frac{1}{\rho_j} \left(\frac{1}{2} P_j - \frac{1}{2} P_m - \frac{\Gamma}{\Gamma-1} P_j \right)$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{\rho_m} \left[\left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma-1} \right) P_m + P_j \right] = \frac{1}{\rho_j} \left[\left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma-1} \right) P_j + P_m \right]$$

Con lo que nos queda:

$$\frac{\rho_m}{\rho_j} = \frac{(\Gamma+1) P_m + (\Gamma-1) P_j}{(\Gamma+1) P_j + (\Gamma-1) P_m} = \frac{u_j}{u_m} \quad (C.13)$$

Si consideramos choque fuerte, es decir, $P_j \gg P_m$, implicaría que $P_m \simeq 0$, por lo que

$$\rho_j = \frac{\Gamma+1}{\Gamma-1} \rho_m \quad (C.14)$$

Tomando a $\Gamma = 5/3$ da

$$\rho_j = 4 \rho_m \quad (C.15)$$

$$u_j = \frac{1}{4} u_m \quad (C.16)$$

$$P_j = \frac{3}{4} \rho_m u_m^2 \quad (C.17)$$

Apéndice D

Condiciones de Rankine-Hugoniot relativistas

Para poder encontrar las relaciones de Rankine-Hugoniot, usaremos la siguiente ecuación de estado:

$$\Gamma = 1 + \frac{P}{\rho\epsilon} \quad (\text{D.1})$$

Donde $\epsilon \left[\frac{\text{s}^2}{\text{cm}^2} \right]$ es la energía interna del sistema

Ecuación de conservación de número de partículas o de masa:

$$n_j u_j = n_m u_m \quad (\text{D.2})$$

Donde $n [\text{cm}^{-3}]$ es la densidad del número de partículas y u es la cuadrivelocidad donde $u = \beta\gamma$, teniendo en cuenta que $\beta = \frac{v}{c}$ y $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ es el factor de lorentz.

Ecuación de momento:

$$\omega_j u_j^2 + P_j = \omega_m u_m^2 + P_m \quad (\text{D.3})$$

Donde $\omega = e + P$ es la entalpia específica por unidad de volumen, donde e es la densidad de energía interna, usando la ecuación D.1 que puede ser escrita como:

$$e = \rho (c^2 + \epsilon) = n m_0 c^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} P \quad (\text{D.4})$$

Donde m_0 es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz

Ecuación de la Energía

$$\omega_j \gamma_j u_j = \omega_m \gamma_m u_m \quad (\text{D.5})$$

Definiendo una nueva variable $x = \frac{\omega}{n^2}$ y usando la ecuación D.2 tenemos $\bar{j} = n_j u_j = n_m u_m$, por lo que usando la ecuación D.3 la podemos escribir como:

$$n_j^2 x_j u_j^2 + P_j = n_m^2 x_m u_m^2 + P_m$$

\Rightarrow

$$x_j \bar{j}^2 + P_j = x_m \bar{j}^2 + P_m \quad (\text{D.6})$$

Con lo que al final nos queda:

$$-\bar{j}^2 = \frac{P_m - P_j}{x_m - x_j} \quad (\text{D.7})$$

Ahora usando la ecuación D.5 podemos reescribirla como:

$$\frac{\omega_j}{n_j} \gamma_j \bar{j} = \frac{\omega_m}{n_m} \gamma_m \bar{j}$$

\Rightarrow

$$\frac{\omega_m^2}{n_j^2} \gamma_m^2 - \frac{\omega_m^2}{n_j^2} \gamma_j^2 = 0 \quad (D.8)$$

La ecuación D.8 la usaremos mas tarde, ahora volviendo a D.7 la podemos multiplicar por $x_m^2 - x_j^2$ queda lo siguiente:

$$- \left(x_m^2 \bar{j}^2 - x_j^2 \bar{j}^2 \right) = \frac{P_m - P_j}{x_m - x_j} (x_m - x_j) (x_m + x_j)$$

\Rightarrow

$$- x_m^2 u_m^2 n_m^2 + x_j^2 u_j^2 n_j^2 = (P_m - P_j) (x_m + x_j) \quad (D.9)$$

restando la ecuación D.8 de la D.9

$$- \left(\frac{\omega_m}{n_m^2} \right)^2 u_m^2 n_m^2 + \left(\frac{\omega_j}{n_j^2} \right)^2 u_j^2 n_j^2 - \frac{\omega_m^2}{n_j^2} \gamma_m^2 + \frac{\omega_m^2}{n_j^2} \gamma_j^2 = (P_m - P_j) (x_m + x_j) \quad (D.10)$$

\Rightarrow

$$- \frac{\omega_m}{n_m^2} (u_m^2 - \gamma_m^2) + \frac{\omega_j}{n_j^2} (u_j^2 - \gamma_j^2) = (P_m - P_j) (x_m + x_j) \quad (D.11)$$

Sabemos que:

$$u = \beta \gamma \quad (D.12)$$

\Rightarrow

$$u^2 = \beta^2 \gamma^2 \quad (D.13)$$

\Rightarrow

$$u^2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \quad (D.14)$$

\Rightarrow

$$u^2 - \gamma^2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} - \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (D.15)$$

Entonces al final:

$$u^2 - \gamma^2 = -1 \quad (D.16)$$

Sustituyendo la ecuación D.16 a la D.8 nos queda:

$$x_m \omega_m - x_j \omega_j = (P_m - P_j) (x_m + x_j) \quad (D.17)$$

Podemos reescribir a x usando la ecuación como D.4 como:

$$x = \frac{m_0^2 c^2}{\rho} + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{m_0^2 P}{\rho^2} \quad (D.18)$$

Sustituyendo la ecuación D.18 en D.7

Bibliografía

- [1] E. Berger, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **52**, 43 (2014) doi:10.1146/annurev-astro-081913-035926 [arXiv:1311.2603 [astro-ph.HE]].