



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Simulaciones numéricas hidrodinámicas relativistas de
Destellos de Rayos Gamma cortos lanzados desde un
objeto compacto en varios tipos de medios ambientes.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Julio César Sosa Mondragón

TUTOR

Dr. Diego López Cámara Ramírez



Índice general

Dedicatoria	V
Agradecimientos	VII
Resumen	IX
1. Introducción	1
1.1. Características de los GRBs	2
1.1.1. Emisión pronta	2
1.1.2. Emisión tardía	2
1.1.3. Energía y luminosidad	3
1.2. Características de los GRBs cortos	3
1.2.1. Progenitores	3
1.2.2. Propiedades de las explosiones de los SGRB	4
2. Teoría	7
2.1. Ecuaciones de la hidrodinámica	7
2.2. Hidrodinámica relativista	8
2.2.1. Primitivas	8
2.3. Desacoplamiento de las ecuaciones de la hidrodinámica	9
2.4. Desacoplamiento de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista	9
2.5. Diferencias finitas	13
2.5.1. Lax-Friederich	13
2.5.2. HLL	14
3. Verificación del código	17
3.1. Onda de choque	17
3.1.1. Caso newtoniano	18
3.1.2. Caso relativista	25
4. Jet en diferentes medios de densidad	33
4.1. Diferencia de los métodos numéricos sobre el jet	33
4.2. SGRB en medio de densidad bajo	33
4.3. SGRB en medio de densidad alto	36
5. Conclusiones	39
A. Código	41
A.1. Condición inicial	42
A.1.1. Condición de Courant	43

B. Condiciones de frontera	45
B.0.1. Condiciones de frontera <i>outflow</i>	46
B.0.2. Condiciones de frontera <i>reflexión</i>	46
B.0.3. Condiciones de frontera <i>Periódicas</i>	47
B.0.4. Condiciones de frontera <i>Jet</i>	48
C. Condiciones de Rankine-Hugoniot no relativistas	51
D. Condiciones de Rankine-Hugoniot relativistas	53
E. Velocidad de los métodos numéricos	59

Dedicatoria

*Dedicado a
mi familia*

Agradecimientos

¡Muchas gracias a todos!

Resumen

Una bonita historia

Capítulo 1

Introducción

Los destellos de rayos gamma (GRB por su acrónimo en inglés) son eyecciones de rayos gamma del orden de Mev, son cortos, intensos y no repetitivos. Estos consisten en la emisión de energías altas como los rayos γ y los rayos X, así como energías bajas como el óptico, el radio, entre otros. Fueron descubiertos por los satélites *Vela*¹ a finales de la década de los 60's, gracias a los datos recabados por el experimento BATSE² se logró identificar 2 grupos principales de GRBs, los cortos y los largos, en los cuales este último tiene una duración mayor a los 2 s.

El objetivo principal del estudio de los GRBs es analizar las propiedades de los estallidos de los rayos gamma, así como sus progenitores y determinar las propiedades básicas de estos, la fusión de objetos compactos es el modelo progenitor más atractivo. Las categorías de los GRBs largos y cortos son aproximadamente 75 % y 25 % de la población. La interacción de flujos de salida relativistas con el medio ambiente que lo rodea produce emisión sincrotrónica que va desde la banda de las ondas de radio a los rayos X, los GRBs son uno de los eventos que más libera energía en el universo, la energía liberada es del orden de 10^{52} ergs.

Aunque hay mucha información acerca de los GRBs largos, los cortos son aún un estudio nuevo en el área de astrofísica de altas energías ya que debido a su corta duración son difíciles de estudiar.

¹<https://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/heasarc/missions/vela5a.html>

²<https://gammaray.msfc.nasa.gov/batse/>

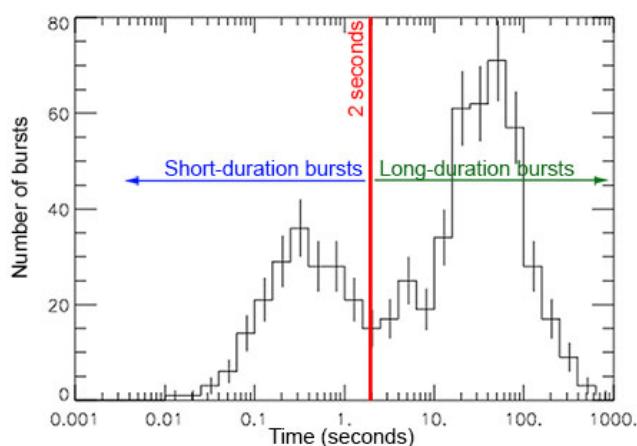


Figura 1.1: Gráfico que muestra la diferencia de tiempo que existe entre GRBs cortos y GRBs largos. Se pueden apreciar 2 picos que marcan la diferencia de duración entre los GRBs

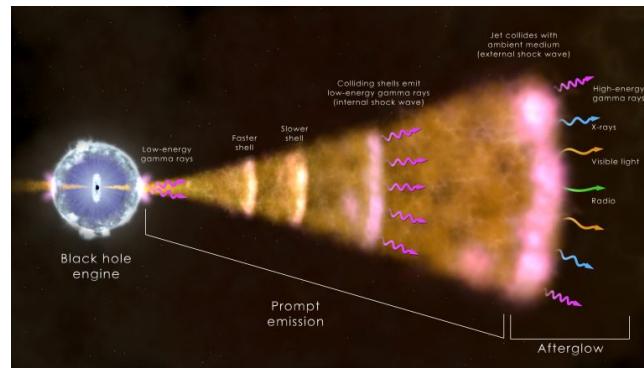


Figura 1.2: Diferentes partes de un GRB en general, mostrando las partes más características como el afterflow y la emisión prompt

1.1. Características de los GRBs

Muchas de las características de los GRBs ya sean estos largos o cortos, son la duración media que tienen, mientras que en los GRBs largos tienen un promedio de duración de 100 s, los GRBs cortos duran menos de 2 segundos. Los estallidos de Rayos gamma se encuentran a miles de años luz de nuestra galaxia por lo que se puede decir que tienen un origen cosmológico, mientras los GRBs largos se originan en los centros de las galaxias, los cortos lo hacen lejos de la galaxia donde se originaron y por consecuencia, estos tienen una densidad de ambiente muy bajo. El estudio de los SGRB ha sido muy difícil debido al tiempo de duración que llevan estos eventos y a la dificultad de asociarlo con galaxias anfitrionas.

1.1.1. Emisión pronta

La emisión pronta es definida como el periodo de tiempo donde el detector de rayos γ detecta una señal sobre el fondo. Estas consisten en fotones de alta energía, no tiene espectro térmico. El espectro térmico es producido por un gas en equilibrio térmico. Además, tiene bastantes características observacionales.

El flujo de energía varía dentro de cientos de Kev. La emisión de las curvas de luz son notoriamente irregulares sobre escalas de tiempo muy pequeñas (ver figura 1.3). En los GRBs cortos, su espectro de emisión, se ha encontrado más duro que en los GRBs largos, esto debido a que es una combinación de componentes espectrales duros de baja energía. Una característica principal es la duración de esta emisión, esta llega a ser del orden $\geq 10^{-2}$ s a 10^3 s. Los valores promedio de dichas emisiones son $t \sim 20$ s para GRBs largos y $t \sim 0.2$ s para los cortos.

1.1.2. Emisión tardía

La emisión tardía, conocida también como *afterglow*, es después de la emisión prompt en el cual se pueden detectar otras longitudes de onda como el óptico, radio y los rayos X. La propiedad de "multiples longitudes de onda", hace una propiedad única de la emisión tardía. Estos cubren un amplio rango de frecuencias, desde las ondas de radio hasta los Tev. El espectro de banda ancha es descrito como una ley de potencias inversa, ya que la fuerza del choque se reduce a medida que la onda expansiva va desacelerando. Con lo que se espera que todas las longitudes de onda de las curvas de luz decaigan como ley de potencias. Entonces la densidad de flujo es proporcional a:

$$F_\nu(t, \nu) \propto t^{-\alpha} \nu^\beta \quad (1.1)$$

Donde α y β son reales positivos.



Figura 1.3: Diferentes curvas de luz captadas por el detector Batse detectadas en la emisión pronta de los GRBs. Las curvas de luz difieren bastante unas de otras, mientras que BATSE 332 es un decaimiento exponencial , BATSE Trigger 1989 tiene 2 picos de intensidad.

En Mayo y Julio del 2005 datos de eyecciones recopiladas por el satélite *swift* al seguir al seguir al GRB 050509B, descubrieron las primeras fases tardías de los GRBs cortos, tiempo después el satélite HETE-2 junto con el observatorio *chandra* de rayos X siguieron al satélite 050709 el cual localizo la fase tardía en rayos X y despues en la banda óptica, con estos datos recabados de la fase tardía se pudo llegar a que los GRBs cortos tienen una escala de densidad y una energía mas baja que los GRBs largos, tambien se llego a la conclusión de que los GRBs cortos tienen orígenes cosmologicos y que las estrellas masivas no son sus progenitores como en el caso de GRBs cortos.

1.1.3. Energía y luminosidad

Los GRBs largos tienen una luminosidad isotrópica $L_{iso} \sim 10^{49} - 10^{54}$ ergs \cdot s⁻¹. También hay GRBs largos con una luminosidad baja, sus valores rondan acerca de $L_{iso} \sim 5 \times 10^{46} - 10^{49}$ ergs \cdot s⁻¹, pero estos son solo una pequeña fracción de los GRBs largos observados. Los GRBs cortos tienen generalmente una luminosidad de $L_{iso} \sim 10^{49}$ ergs \cdot s⁻¹.

La distribución de energías es amplia para los GRBs, estos cubren valores $E_{iso} \sim 10^{49} - 10^{55}$ ergs para los largos y para los cortos $E_{iso} \sim 3.3 \times 10^{46} - 10^{53}$ ergs.

1.2. Características de los GRBs cortos

Los GRBS cortos, aunque tiene muchas carcteristicas en común con los GRBs largos, también tienen sus propias peculiaridades que lo hacen único.

1.2.1. Progenitores

Los GRBs cortos por lo general se localizan en medios de baja formación estelar por lo que no se espera poder encontrarlos ambientes estelares jóvenes además de que, conllevan una carencia para poder asociarlos con SNs. El modelo más aceptado en la literatura de los progenitores de los GRBs cortos son la fusión de objetos compactos binarios. Estos pueden comprender a dos estrellas de neutrones (NS-NS), una estrella de neutrones y un agujero negro (NS-BH) o dos agujeros negros (BH-BH). La fusión se logra a cabo debido a la pérdida de momento angular y energía debido a

las ondas gravitacionales. La interacción de este fenómeno lleva a la extracción de energía por procesos magnetohidrodinámicos (MHD), los cuales impulsan un flujo relativista colimado.

Las patadas natales pueden ser las causantes de las distancias en las que estos nacen y los sitios de explosión de estos sistemas, la probabilidad para una galaxia de brillo m a ser localizada a una separación δR de la posición de un SGRB está dada por

$$P_{cc} = 1 - \exp^{-\pi(\delta R)^2 \Sigma(\leq m)} \quad (1.2)$$

Donde $\Sigma(\leq m) = 1.3 \cdot 10^{0.33(m-24)-2.44} \text{arcsec}^{-2}$ son el número de cuentas de la galaxia. Los SGRBs sin galaxias anfitrionas se exhiben cerca galaxias de campo con una baja probabilidad de coincidencia, generalmente las distancias medias de separación del SGRB con su galaxia anfitriona es de $\frac{\delta R}{r_e} \approx 1.5$ donde r_e es el radio estelar.

1.2.2. Propiedades de las explosiones de los SGRB

Los parámetros claves de interés de la emisión pronta y tardía:

- E_γ : Energía de rayos γ .
- E_k : Energía cinética de la onda de choque de la emisión tardía.
- θ_j : El ángulo de apertura del jet.
- n : Densidad del medio ambiente.

La emisión del sincrotrón de la emisión tardía incluye dos parámetros libres que tienen relación con la física del choque relativista:

- ϵ_B : Fracción de energía del post-choque de los campos magnéticos.
- ϵ_e : Radiación relativista de los electrones.

El flujo relativista interactuando con el medio circundante es el espectro de emisión sincrotónico. Esta se caracteriza por 3 frecuencias de corte:

- ν_a : Auto absorción
- ν_m : Factor mínimo de Lorentz
- ν_c : enfriamiento sincrotrónico

Tomando en cuenta los valores de estos parámetros y la pendiente del espectro para $\nu < \nu_m$ se pueden llegar a encontrar los siguientes valores $E_{k,\text{iso}}$, n , ϵ_B y ϵ_e . La evolución temporal del espectro también se puede usar para encontrar el ángulo de apertura del jet θ_j . La relación que existe entre el ángulo de apertura θ_j y el tiempo (t_j) al cual ocurre el jet break está dado por la siguiente fórmula.

$$\theta_j = 0.13 \left(\frac{t_{j,d}}{1+z} \right)^{3/8} \left(\frac{n_0}{E_{52}} \right)^{1/8} \quad (1.3)$$

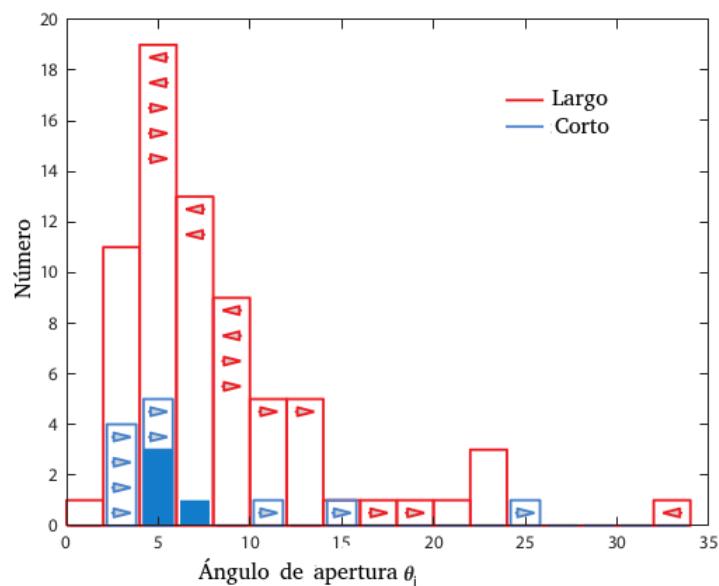


Figura 1.4: La figura muestra la distribución de los ángulos de apertura para los GRBs largos (rojos) y los GRBs cortos (azules). Las flechas muestran el límite superior e inferior de los ángulos.

Capítulo 2

Teoría

Para describir un sistema de partículas como un fluido bajo ciertas condiciones uno debe de conocer que el camino libre medio debe de ser mucho mas pequeño que la escala de longitud de las fluctuaciones de las variables macroscópicas.

$$\lambda_{mfp} \ll L \quad (2.1)$$

El tiempo entre las colisiones debe de ser pequeña comparada con la escala del tiempo de los cambios en el fluido

$$t_c \ll t_f \quad (2.2)$$

La distancia media entre las partículas tiene que ser mas pequeña que la longitud de escala de las variables macroscópicas

$$l = n^{-1/3} \ll L \quad (2.3)$$

2.1. Ecuaciones de la hidrodinámica

Considerando una serie de elementos de volumen fijos, las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido sin considerar efectos viscosos son:

La conservación de masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (2.4)$$

El momento

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (2.5)$$

Ecuación de la energía

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u}(E + p)] = G - L + \mathbf{f}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{u} \quad (2.6)$$

Ecuación de estado

$$E = \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \frac{p}{\Gamma - 1} \quad (2.7)$$

Con estas ecuaciones podemos formar una matriz de 5x5 escritas en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \mathbf{S} \quad (2.8)$$

Donde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E+P) \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + P \\ \rho vw \\ v(E+P) \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + P \\ w(E+P) \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ G - L + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

El término de \mathbf{U} son nuestras variables conservadas, los términos \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} son nuestros fluidos con velocidades en la dirección x , y y z y \mathbf{S} son los términos fuente. Para poder resolver computacionalmente estas ecuaciones diferenciales parciales vamos a utilizar el método de las diferencias finitas y el método de Lax sin considerar los términos fuente es decir $\mathbf{S} = 0$ en el siguiente capítulo si se trataran fuentes particulares.

2.2. Hidrodinámica relativista

En esta parte se añadirá a los códigos que ya hemos generado previamente, las próximas secciones abordara acerca de como cambian nuestras primitivas, como afectan a nuestras variables conservadas y como las podemos desacoplar así como varios ejemplos al cambiar varios valores de nuestros parámetros y de las condiciones iniciales

2.2.1. Primitivas

Las ecuaciones que teníamos para fluidos newtonianos se pueden modificar para hacerlos relativistas. Para esto vamos a partir de 2 ecuaciones importantes que son la ecuación de energía-momento y la ecuación de conservación de masa:

$$(\rho u^\alpha)_{,\alpha} = 0 \quad (2.9)$$

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0 \quad (2.10)$$

De la ecuación 2.9 tenemos la cuadrvelocidad para un sistema de 3 coordenadas y la velocidad $c = 1$ lo podemos ver como $u^\mu = \gamma(1, \mathbf{v})$ y sustituyendo este resultado (en 2 dimensiones espaciales) tendremos las ecuaciones u_1 , F_1 y G_1 . Para la ecuación 2.10 podemos escribir el tensor de energía-momento como $T^{\mu\nu} = \rho hu^\mu u^\nu + Pg^{\mu\nu}$ y usando la métrica de Minkowski

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Con lo que podemos escribir a $T^{\mu\nu}$ matricialmente como:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho h\gamma^2 - P & \rho h\gamma^2 v_x & \rho h\gamma^2 v_y & \rho h\gamma^2 v_z \\ \rho h\gamma^2 v_x & \rho h\gamma^2 v_x^2 + P & \rho h\gamma^2 v_x v_y & \rho h\gamma^2 v_x v_z \\ rho h\gamma^2 v_y & \rho h\gamma^2 v_y v_x & \rho h\gamma^2 v_y^2 + P & \rho h\gamma^2 v_y v_z \\ \rho h\gamma^2 v_z & \rho h\gamma^2 v_z v_x & \rho h\gamma^2 v_z v_y & \rho h\gamma^2 v_z^2 + P \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Entonces nuestras ecuaciones quedarían de la siguiente manera

$$u_1 = \rho\gamma \quad (2.13)$$

$$u_2 = \rho v_x \gamma^2 h \quad (2.14)$$

$$u_3 = \rho v_y \gamma^2 h \quad (2.15)$$

$$u_4 = \rho \gamma^2 h - P \quad (2.16)$$

Donde ρ es la densidad, γ es el factor de lorentz, v_x y v_y son las velocidades de nuestros fluidos (en 2 dimensiones pero se puede extender esto a 3 sin ningún problema), h es la entalpía y P es la presión. Para los fluidos quedan de la siguiente manera

$$F_1 = \rho v_x \gamma \quad (2.17)$$

$$F_2 = \rho v_x v_x \gamma^2 h + P \quad (2.18)$$

$$F_3 = \rho v_x v_y \gamma^2 h \quad (2.19)$$

$$F_4 = \rho v_x \gamma^2 h \quad (2.20)$$

$$G_1 = \rho v_y \gamma \quad (2.21)$$

$$G_2 = \rho v_y v_x \gamma^2 h \quad (2.22)$$

$$G_3 = \rho v_y v_y \gamma^2 h + P \quad (2.23)$$

$$G_4 = \rho v_y \gamma^2 h \quad (2.24)$$

$$H_1 = \rho v_z \gamma \quad (2.25)$$

$$H_2 = \rho v_z v_x \gamma^2 h \quad (2.26)$$

$$H_3 = \rho v_z v_y \gamma^2 h \quad (2.27)$$

$$H_4 = \rho v_z^2 \gamma^2 h + P \quad (2.28)$$

2.3. Desacoplamiento de las ecuaciones de la hidrodinámica

Al final del metodo de las diferencias finitas, obtenemos nuestras variables conservadas (U), pero para calcular nuestros flujos de nuevo necesitamos recuperar nuestras primitivas, es decir, calcular nuestras variables primitivas (ρ, u, v, w, P) en función de nuestras variables conservadas (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5).

Despejar la densidad es sencillo ya que es directo $u_1 = \rho$ por lo tanto:

$$\rho = u_1 \quad (2.29)$$

Para las velocidades $u_i = \rho v$, donde $i = 2, 3, 4$ y $v = u, v, w$, nos da $v = u_i / \rho$ y usando la ecuación 2.29 queda:

$$v = u_1 / u_i \quad (2.30)$$

Para la ecuacion de la energía $u_5 = E$ combinando con la ecuacion de estado y la ecuación 2.30 obtenemos

$$P = (\Gamma - 1) \left[u_5 - \frac{u_1 (\sum_{i=2}^4 u_i / u_i)^2}{2} \right] \quad (2.31)$$

2.4. Desacoplamiento de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista

Para poder desacoplar las ecuaciones, partimos de la relación de las densidades de energía total y del módulo de los momentos

$$E = W - p \quad (2.32)$$

$$|m|^2 = W^2 |\nu|^2 \quad (2.33)$$

Donde $W = Dh\gamma$ y $D = \rho\gamma$. Para evitar errores en el límite no relativista se debe resolver la ecuación conservada restando la densidad de masa a la energía para definir una nueva variable conservada ($E' = E - D$), para las cancelaciones en el límite ultra-relativista basados en $\gamma|\nu^2|$ que se tiene cuando $|\nu| \rightarrow 1$, se debe de crear otra variable, que en este caso sería $|u|^2 = \gamma|\nu^2|$ e introduciendo las variables $W' = W - D$. Podemos re-escribir la última ecuación de la siguiente manera

$$\begin{aligned} W' &= D(h\gamma - 1) \\ &= D \left[\left(1 - \epsilon + \frac{p}{\rho} \right) \gamma - 1 \right] \\ &= D(\gamma - 1) \frac{\gamma + 1}{\gamma + 1} + \frac{D\gamma}{\rho} (\rho\epsilon + p) \end{aligned}$$

Recordando que $D = \rho\gamma$ y que a partir de la variable introducida u^2 podemos re-scribir el factor de Lorentz como $\gamma^2 = 1 - u^2$

$$\begin{aligned} W' &= \frac{Du^2}{\gamma + 1} + \frac{\rho\gamma\gamma}{\rho} (\rho\epsilon + p) \\ &= \frac{Du^2}{\gamma + 1} + \gamma^2 \chi \end{aligned} \quad (2.34)$$

Donde $\chi = \rho\epsilon + p$, derivando con respecto a W' la ecuación 2.32 queda como

$$\frac{dE}{dW'} = 1 - \frac{dp}{dW'} \quad (2.35)$$

Nosotros no sabemos como es la expresión $\frac{dE}{dW'}$, así que asumiremos que $p = p(\rho, \chi)$ por lo que podemos aplicar la regla de la cadena (para mas detalles consulte)

$$\frac{dp}{dW'} = \frac{\partial p}{\partial \chi} \Big|_{\rho} \frac{d\chi}{dW'} + \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{\chi} \frac{d\rho}{dW'} \quad (2.36)$$

Para calcular $\frac{dp}{d\chi}$ tenemos que por ser el caso de un gas ideal

$$h = 1 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (2.37)$$

Donde h también puede ser escrito como

$$h = 1 + \epsilon + \frac{p}{\rho} \quad (2.38)$$

Si combinamos estas 2 últimas ecuaciones podemos llegar a que

$$p(\chi, \rho) = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \chi \quad (2.39)$$

Con lo que al derivar con respecto de χ nos da como resultado

$$\frac{dp}{d\chi} = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \quad (2.40)$$

$$\frac{dp}{d\rho} = 0 \quad (2.41)$$

De la ecuación 2.34 podemos despejar χ , lo que queda como

$$\chi = \frac{W'}{\gamma} - \frac{Du^2}{(1+\gamma)\gamma^2} \quad (2.42)$$

Derivando implícitamente la ecuación 2.34 respecto a W' nos quedaría

$$\begin{aligned} W' &= D(\gamma - 1) + \chi\gamma^2 \\ &= D\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1\right) + \chi\frac{1}{1-v^2} \\ \frac{dW'}{dW'} &= D\frac{d(1-v^2)^{-1/2}}{dW'} + \frac{d\chi}{dW'}(1-v^2)^{-1} + \frac{d(1-v^2)^{-1}}{dW'}\chi \\ 1 &= \frac{D(1-v^2)^{-3/2}}{2}\frac{dv^2}{dW'} + \frac{d\chi}{dW'}(1-v^2)^{-1} + \chi(1-v^2)^{-2}\frac{dv^2}{dW'} \\ \frac{1}{\gamma^2} &= \frac{D\gamma}{2}\frac{dv^2}{dW'} + \frac{d\chi}{dW'} + \chi\gamma^2\frac{dv^2}{dW'} \end{aligned}$$

Con lo que al final la ecuación se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{d\chi}{dW'} = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{\gamma}{2}(D - 2\gamma\chi)\frac{dv^2}{dW'} \quad (2.43)$$

Y para

$$\frac{d\rho}{dW'} = D\frac{d(1/\rho)}{dW'} = -\frac{D\gamma}{2}\frac{dv^2}{dW'} \quad (2.44)$$

despejando la ecuación 2.33 podemos llegar a escribir el módulo de la velocidad al cuadrado de la siguiente manera

$$|v^2| = \frac{|m^2|}{W'} \quad (2.45)$$

Donde $m_i = \rho v_i \gamma h$ para $i = x, y$.

Podemos demostrar que $\frac{d|v^2|}{W} = \frac{d|v^2|}{W'}$ para esto vamos a partir de lo siguiente

$$\begin{aligned} |v^2| &= |m^2|\left(W' + D\right)^{-2} \\ \frac{d|v^2|}{dW'} &= \frac{-2|m|^2}{W' + D^3} \\ &= \frac{2|m|^2}{W^3} \\ &= \frac{d|v^2|}{dW'} \end{aligned}$$

Con lo que podemos decir que

$$\frac{d|v|^2}{dW'} = -\frac{2|m|^2}{W^3} \quad (2.46)$$

Con todo esto ya sabemos cuanto es lo que vale la ecuación 2.35, con esto ya podemos usar el método de Newton-Raphson para poder encontrar W' .

El método de Newton-Raphson es un algoritmo iterativo que se usa para encontrar raíces de una función real:

$$W'^{(k+1)} = W' - \frac{f(W')}{\frac{df(W')}{dW'}} \quad (2.47)$$

De la ecuación de la energía, podemos utilizarla como a la función a la que queremos encontrar la raíz

$$f(W') = W' - E' - p \quad (2.48)$$

Donde $E' = W' - p$ y que $\frac{df(W')}{dW'} \equiv \frac{dE}{dW'}$ dado por la ecuación 2.35. Para iniciar el proceso de iteración se tiene que hacer una suposición, para esto, con ayuda de las ecuaciones 2.32 y 2.33 podemos llegar a que la presión es:

$$p = \frac{|m|^2 - W^2|\nu|^2 + 4W^2 - 4EW}{4W} \quad (2.49)$$

Como podemos ver el denominador es una función convexa cuadrática que depende $|\nu|^2$ y W y cumple con que W este fuera del intervalo de las raíces positivas y negativas.

Al denominador de la ecuación podemos encontrar W ya que $|\nu|^2 = 1 - 1/\gamma^2$ suponiendo $\gamma \rightarrow \infty$ podemos despejar W

$$W = \frac{-(-2E) + \sqrt{(-2E)^2 - (3)(|m|^2)}}{3} \quad (2.50)$$

Con esto ya se puede hacer las aproximaciones para obtener W , y podemos calcular las siguientes relaciones

$$|\nu|^2 = \frac{|m|^2}{W^2} \quad (2.51)$$

$$u^2 = \frac{|\nu|^2}{1 - |\nu|^2} \quad (2.52)$$

$$\gamma = \sqrt{1 + u^2} \quad (2.53)$$

Y las nuevas primitivas.

Velocidades:

$$\nu_x = \frac{u_2}{W} \quad (2.54)$$

$$\nu_y = \frac{u_3}{W} \quad (2.55)$$

$$(2.56)$$

Densidad de masa

$$\rho = \frac{D}{\gamma} \quad (2.57)$$

Presión térmica

$$\chi = \frac{W - D}{\gamma^2} - \frac{D|u|^2}{(1 + \gamma)\gamma^2} \quad (2.58)$$

$$p = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \chi \quad (2.59)$$

2.5. Diferencias finitas

Si tenemos una función $f(x)$ lo suficientemente diferenciable la podemos aproximar por el Teorema de Taylor en la vecindad de un punto $x_0 + \Delta x$ entonces si conocemos todas sus n derivadas de la función $f(x)$ en el punto x_0 podemos aproximar de la siguiente manera

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \sum_n \frac{(\Delta x)^2}{k!} f^{(k)}(x_0) \quad (2.60)$$

Si truncamos la serie de Taylor y quitamos los términos de segundo orden podemos escribir la ecuación 2.60 como:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) - \Delta x f^{(1)}(x_0) + O(\Delta x) \quad (2.61)$$

Despejando $f(x_0)$ queda lo que se conoce como diferencia finita hacia adelante

$$f'_{forward} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (2.62)$$

Tambien se puede hacer en el entorno $x_0 - \Delta x$ y siguiendo los mismos pasos anteriores llegamos a lo que se le conoce como diferencia finita hacia atrás.

$$f'_{backward} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad (2.63)$$

Si obtenemos el promedio de las ecuaciones 2.62 y 2.63 obtenemos la central:

$$f'_{central} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2.64)$$

2.5.1. Lax-Friedrich

Si consideramos la siguiente ecuación diferencial parcial

$$u_t + f(u)_t = 0 \quad (2.65)$$

Un método conservativo para resolver este tipo de ecuación diferencial es

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{i-\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2}} \right) \quad (2.66)$$

Si hacemos la siguiente elección de flujo

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}(u_i, u_{i+1}) = \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1}) \quad (2.67)$$

Y para

$$f_{i-\frac{1}{2}} = f_{i-\frac{1}{2}}(u_i, u_{i-1}) = \frac{1}{2} (f_i - f_{i-1}) \quad (2.68)$$

Y lo sustituimos en la ecuación 2.66 nos queda el siguiente resultado

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1} - f_{i-1}) \quad (2.69)$$

Pero esta solución es inestable, por el primer término del lado derecho de la ecuación, para hacerlo estable Peter Lax y Kurt O. Friedrichs sustituyeron este término por $(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$ por lo que podemos reescribir la ecuación 2.69 como

$$u_i^{n+1} = (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1} - f_{i-1}) \quad (2.70)$$

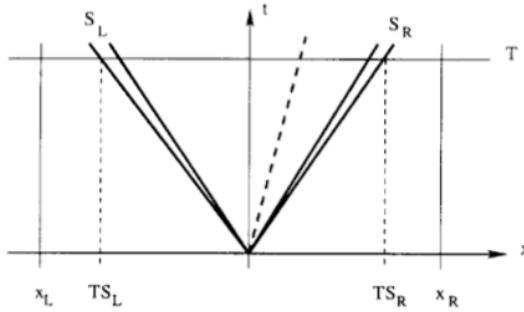


Figura 2.1: Plano x-t que muestra que muestra un volumen definido

2.5.2. HLL

Otro método para resolver las ecuaciones de la hidrodinámica es usar el método de Harten-Van-Leer. Definiendo el flujo numérico intercelda de Gudonov

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F\left(U_{i+\frac{1}{2}}\right) \quad (2.71)$$

Para el cual $U_{i+\frac{1}{2}}(0)$ tiene la misma solución para $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$ con lo que el problema de Riemann se reduce a :

$$\begin{aligned} U_t + F(U)_x &= 0 \\ U(x, 0) &= \begin{cases} U_L & \text{si } x < 0 \\ U_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Si consideramos un control de volumen $[x_L, x_R] \times [0, T]$, tales que $x_L \leq TS_L$ y $x_R \geq TS_R$ (ver figura 2.1) donde S_L y S_R son las velocidades de las ondas más rápidas de los estados iniciales U_L y U_R respectivamente y T es un tiempo definido. Si usamos la forma integral de la ecuación 2.72 en nuestro volumen definido $[x_L, x_R] \times [0, T]$

$$\int_{x_L}^{x_R} [U(x, T) - U(x, 0)] dx = \int_0^T [F(U(x_L, t)) - F(U(x_R, t))] dt$$

Entonces

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = \int_{x_L}^{x_R} U(x, 0) dx + \int_0^T F(U(x_L, t)) dt - \int_0^T F(U(x_R, t)) dt \quad (2.73)$$

Usando las condiciones de la ecuación 2.72 podemos evaluar la integral

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = x_R U_R - x_L U_L + T F_L - T F_R$$

Donde $F_L = F(U_L)$ y $F_R = F(U_R)$, entonces

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = x_R U_R - x_L U_L + T (F_L - F_R) \quad (2.74)$$

Si sepáramos ahora la ecuación 2.73 en 3 integrales de la siguiente manera:

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = \int_{x_L}^{TS_L} U(x, T) dx + \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx + \int_{TS_R}^{x_R} U(x, T) dx \quad (2.75)$$

Si ahora evaluamos el tercer y el primer término en el lado derecho, obtenemos:

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx + (TS_L - x_L) U_L + (x_R - TS_R) U_R \quad (2.76)$$

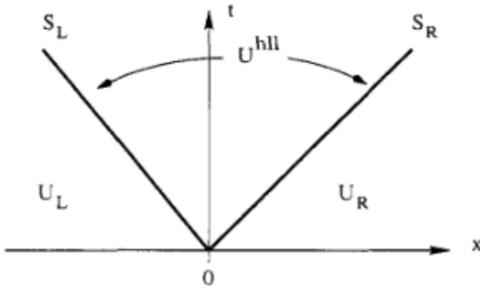


Figura 2.2: Aproximación de 3 estados distintos en el plano $x-t$, en el cual se trata de calcular los flujos en la región U^{hll} limitados por las velocidades de señal de la onda

Si combinamos la ecuación 2.74 y 2.76

$$x_R U_R - x_L U_L + T(F_L - F_R) = \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx + (TS_L - x_L) U_L + (x_L - TS_R) U_R$$

Entonces

$$\int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx = (TS_L - x_L) U_L + x_L U_L + (x_L - TS_R) U_R - x_R U_R - T(F_L - F_R)$$

Con lo que al final nos queda

$$\int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx = T(S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R) \quad (2.77)$$

Si dividimos la ecuación 2.77 por la diferencia de las velocidades máximas de las señales de las ondas, obtenemos el promedio de la función que está entre las velocidades de la onda, entonces

$$\frac{1}{T(S_R - S_L)} \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx = \frac{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R}{S_R - S_L} \quad (2.78)$$

Si conocemos las velocidades de la onda podemos escribir la ecuación como

$$U^{hll} = \frac{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R}{S_R - S_L} \quad (2.79)$$

Ahora si aplicamos la forma integral (como en el caso de la ecuación 2.74) a lado izquierdo de nuestro plano obtenemos lo siguiente

$$\int_{TS_L}^0 U(x, T) dx = -TS_L U_L + T(F_L - F_{0L}) \quad (2.80)$$

Donde F_{0L} es el flujo a lo largo del eje t . Si despejamos F_{0L} , nos queda lo siguiente

$$F_{0L} = F_L - S_L U_L + \frac{1}{T} \int_{TS_L}^0 U(x, T) dx \quad (2.81)$$

Esta última ecuación nos servirá para calcular los flujos usando el método de Harten-Van-Leer, el cual dividían el plano en tres espacios:

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L & \text{si } \frac{x}{t} < S_L \\ U^{hll} & \text{si } S_L < \frac{x}{t} < S_R \\ U_R & \text{si } \frac{x}{t} > S_R \end{cases} \quad (2.82)$$

Los flujos F_R y F_L pueden ser calculados directamente ya que solo dependen de U_R y U_L respectivamente pero $F_{hll} \neq F(U_{hll})$, así que resolvemos la integral de la ecuación 2.81 para así obtener el flujo a través del eje t

$$F_{hll} = F_L - S_L U_L + \frac{1}{T} U_{hll} (0 - T S_L)$$

Entonces

$$F_{hll} = F_L + S_L (U_{hll} - U_L) \quad (2.83)$$

Si sustituimos 2.79 en 2.83 obtenemos:

$$F_{hll} = F_L + S_L \left(\frac{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R}{S_R - S_L} - U_L \right)$$

Entonces

$$F_{hll} = \frac{F_L S_R - F_L S_L + S_L S_R U_R - S_L^2 U_L + S_L F_L - S_L F_R - S_R S_L U_L + S_L^2 U_L}{S_R - S_L}$$

Eliminando términos semejantes queda

$$F_{hll} = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L} \quad (2.84)$$

Con lo que el flujo intermedio de la celda de Godunov está dado por:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{hll} = \begin{cases} F_L & \text{si } 0 \leq S_L \\ \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L} & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_R \\ F_R & \text{si } 0 \geq S_R \end{cases} \quad (2.85)$$

Capítulo 3

Verificación del código

En este capítulo se van a realizar algunas pruebas de la funcionalidad de mi código, el objetivo de esto, es tener una idea de cual método, ya sea Lax o HLL, es mejor para la ejecución de los jets.

3.1. Onda de choque

La onda de choque se produce por la liberación rápida de energía comprimida dentro de un volumen de radio R . Esta explosión divide a nuestro dominio en 2 zonas distintas como se muestra en la figura 3.1. La zona I, estará determinado por la densidad, presión, y velocidades del medio ambiente ($\rho_m, P_m, v_{x_m}, v_{y_m}$, respectivamente). La zona II (i.e. dentro de la onda de choque), se produce al depositar una densidad de energía E_{in} dentro de una región definida por un radio interno (R_{in}) en reposo. Para ver más detalles véase el cuadro 3.1.

Parámetro	Descripción	valor
R_{in}	Radio interno de la onda expansiva	0.2 [cm]
ρ_{in}	Densidad interna de la onda expansiva	5.0 [$\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$]
ρ_{out}	Densidad del medio	1.0 [$\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$]
P_{int}	Presión interna de la onda expansiva	10.0 [$\text{erg} \cdot \text{cm}^{-2}$]
P_{out}	Presión del medio	0.1 [$\text{erg} \cdot \text{cm}^{-2}$]
$v_{x_{in}}$	Velocidad interna en el eje x de la onda expansiva	0.0 [$\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$]
$v_{y_{in}}$	Velocidad interna en el eje y de la onda expansiva	0.0 [$\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$]
$v_{x_{out}}$	Velocidad en el eje x del medio	0.0 [$\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$]
$v_{y_{out}}$	Velocidad en el eje y del medio	0.0 [$\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$]
Co	Número de Courant	0.7

Cuadro 3.1: Parámetros que se utilizarán en las siguientes pruebas que se van a realizar para la onda de choque, estos valores son para fluidos newtonianos.

La densidad de energía E_{in} de la onda de choque está determinada por ρ_{in} , P_{in} , y $v_{x_{in}}$ y $v_{y_{in}}$ ya que es la suma de la energía cinética más la energía térmica $E_{in} = \frac{1}{2}\rho_{in}v_{in}^2 + \frac{P_{in}}{\Gamma-1}$). Dado que la zona II está en reposo $v_{x_{in}} = 0$ y $v_{y_{in}} = 0$, se tiene: $E_{in} = \frac{P_{in}}{\Gamma-1}$). Cabe señalar que los valores de la densidad y presión del medio ambiente tendrán valores mas bajos que sus respectivos de la onda de choque.

La onda de choque se dejó evolucionar con el paso del tiempo, y se analizó la interacción que hay entre las zonas I y II. En específico, se siguió la evolución de una onda de choque con una velocidad de expansión muy por debajo de la velocidad de la luz (caso newtoniano), y además la evolución de una onda de choque cuya velocidad de expansión estaba cercana a la velocidad de la

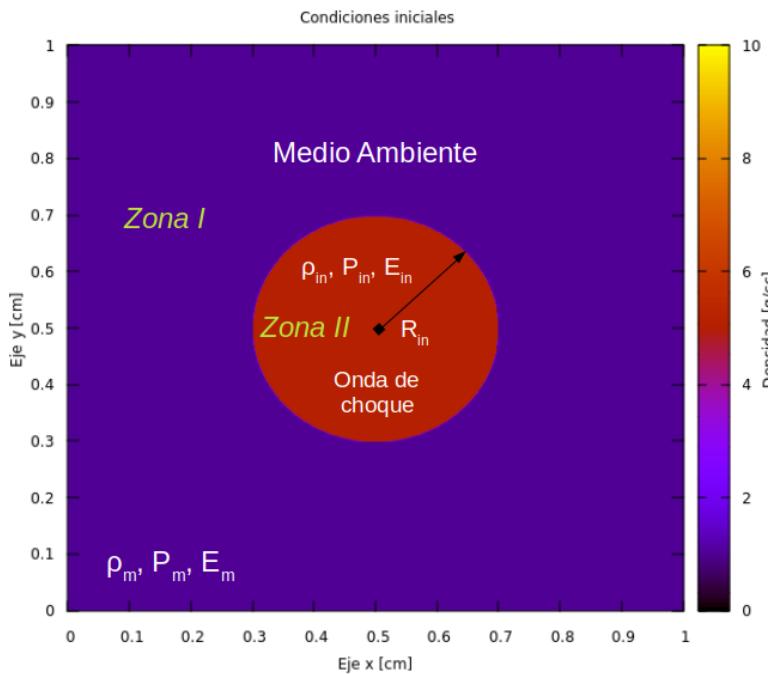


Figura 3.1: La zona I (medio ambiente), se caracterizará por tener valores de densidad, presión y velocidades ($\rho_m, P_m, v_{x_m}, v_{y_m}$, respectivamente) mostrados en el cuadro 3.1. La zona II (onda de choque) se produce al depositar una energía (E_{in}) y una presión (P_{in}) dentro de un círculo (con R_{in}).

luz (caso relativista). Cabe señalar que en ambos casos se siguieron los cambios que se produjeron utilizando los métodos numéricos de Lax y el de HLL (véase la Sección 2.5 para mayor información). La condición a la frontera utilizada en todos los bordes fue la de *outflow*¹.

3.1.1. Caso newtoniano

Las siguientes pruebas fueron usando el método de Lax, como este es un caso newtoniano, La constante de relación específica es $\Gamma = 5/3$. La descripción del fenómeno es de una onda expansiva sobre un medio constante (ver figura 3.1) con una densidad de energía de $E = 0.15 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}$, densidad $\rho = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, velocidades $v = 0 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ y una presión $P = 0.1 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}$. La simulación es sobre un dominio de 0 a 1 cm sobre el eje x y de 0 a 1 cm sobre el eje y , con una resolución de 500x500 pixeles² al tiempo $t = 0 \text{ s}$ y en la onda interna. La densidad de la onda es $\rho = 5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, la velocidad interna será la misma que la del ambiente, la presión interna $P = 10 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}$ y una densidad de energía interna $E = 3.75 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}$. La onda de choque está centrada en el punto $(x, y) = (0.5, 0.5) \text{ cm}$, y se corrió en el intervalo de tiempo $t \in [0, 0.2] \text{ s}$.

Lax

La evolución para la onda de choque newtoniano muestra una expansión simétrica como se ve en la figura 3.2. La velocidad de la onda en los primeros instantes es rápida, pero se vuelve constante y mantiene una velocidad $v_{lax} = 1.50 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ (ver figura 3.13).

Cuando la onda se empieza a expandir por el medio constante, aparecen 5 áreas distintas que interactúan entre nuestro medio ambiente y la onda. El área 1 (ver figura 3.3) es el material al cual la onda no ha tocado y que se cataloga como la del medio ambiente. En el área 2, se muestra una onda que va chocando con el material del medio ambiente, a esta onda la llamaremos *forward*

¹Para ver más detalles acerca de esta frontera y/o de otro tipo de fronteras véase el apéndice B

²Los pixeles de nuestra malla miden $l_x \cdot 500^{-1} = l_y \cdot 500^{-1} = 1 \text{ cm} \cdot 500^{-1} = 0.005 \text{ cm}$

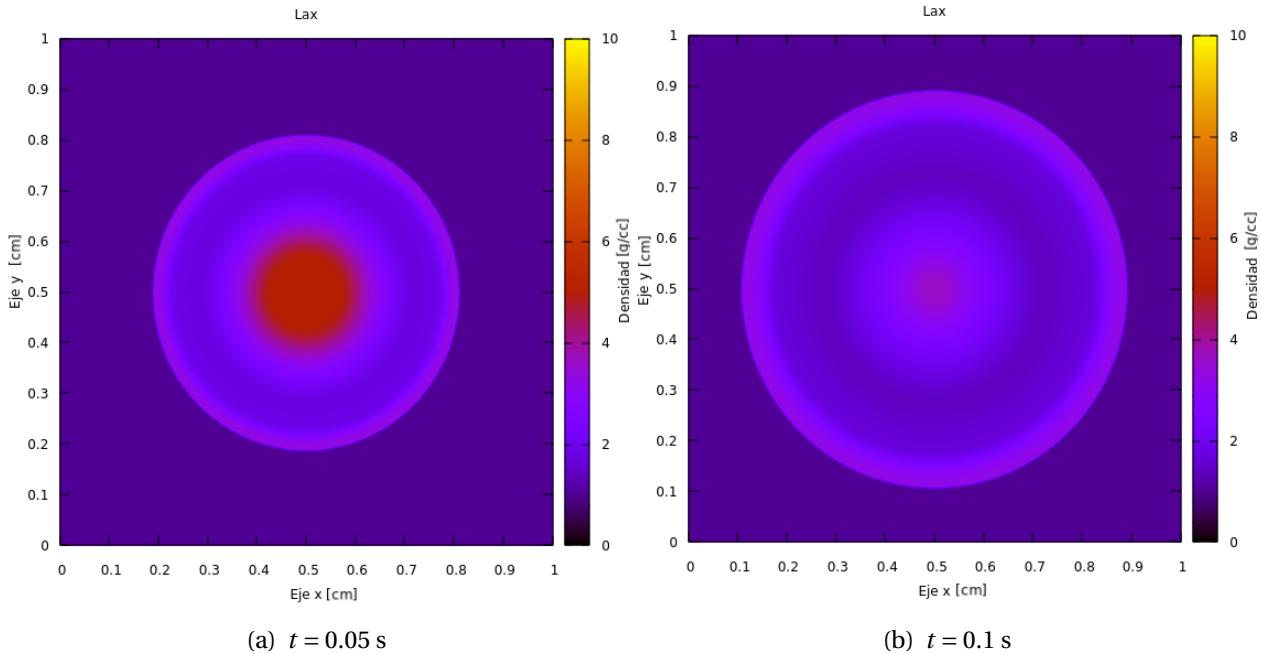


Figura 3.2: Evolución de la onda de choque mostrada en la figura 3.1 usando el método de Lax newtoniano. En el panel a) se muestra la onda de choque a $t=0.05$ s, mientras que en el panel b) se muestra para $t=0.10$ s. En la figura 3.3 se analizará más a fondo las partes que se forman al desarrollarse dicha onda.

*shock*³. El área 3 presenta el material chocado con el mismo centro de la onda, esta se caracteriza por ir en reversa y llamaremos *reverse shock*⁴. El material contra el cual aún no ha chocado la onda es el área 5. La separación que hay entre estas 2 ondas vas creando un vacío que se ve difuminado, esto debido a la viscosidad que presenta nuestro resolvedor de Riemann.

La siguiente prueba consiste en realizar el mismo proceso descrito anteriormente de la onda de choque resuelta con el método de Lax pero, ubicando a la onda de choque en una esquina para poder analizar como se comporta con las condiciones a la frontera, asi como verificar que tiene el mismo comportamiento independientemente de que se mueva de lugar. El centro de la onda se colocó en las coordenadas $(x, y) = (0.25, 0.75)$ [cm], como se ve en la figura 3.4. Cabe señalar que las condiciones a la fronteras tienen la configuración de *outflow*⁵.

En la figura 3.6, al salir del dominio computacional, la onda sigue conservando su forma y las áreas que habíamos visto en la figura 3.3. El aspecto de la onda no se deforma a pesar de que se sale del dominio computacional. Al evolucionar la onda de choque en la figura 3.5, esta no muestra ninguna anomalía en las fronteras (ver apéndice B). Las áreas presentadas en la figura 3.6 son las mismas presentes en la figura 3.3 Con lo que podemos observar que tiene las mismas particularidades que la onda mostrada en la figura 3.2 y puedo concluir que las condiciones a la frontera no introducen errores numéricos para el caso newtoniano usando Lax.

HLL

En la siguiente parte, las pruebas se harán usando el método de HLL, similarmente como en el caso de Lax. La condición inicial es la misma que se mencionó en la sección anterior, es decir, la onda de choque tendrá los mismos valores en la que se habían dicho en el cuadro 3.1.

³ La palabra *forward shock* viene del inglés y la podemos interpretar como choque hacia adelante.

⁴La palabra *reverse shock* viene del inglés y la podemos traducir como choque hacia atrás

⁵Para este y otros tipos de frontera vea el apéndice B

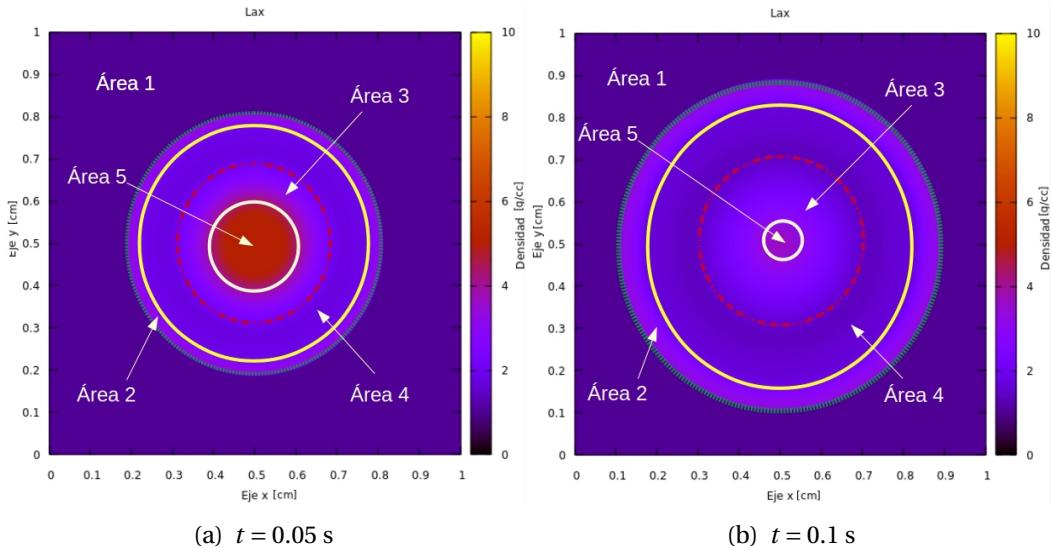


Figura 3.3: En la evolución de la onda usando el método de Lax, se encuentran 5 áreas distintas. El área 1 la identificaremos como el material que no ha sido chocado todavía por nuestra onda. El área 2 será el material que es chocado por nuestra onda, esta onda que se llama *forward shock*. En el área 3 podemos ver una onda que va contra si misma que es la *reverse shock*, esta onda arrastra el interior de la onda, va en sentido contrario a la *forward shock*, el material que esta onda aun no ha chocado es al área 5 y el área 4 es el vacío que se va formando cuando se separan la *forward shock* y *reverse shock*.

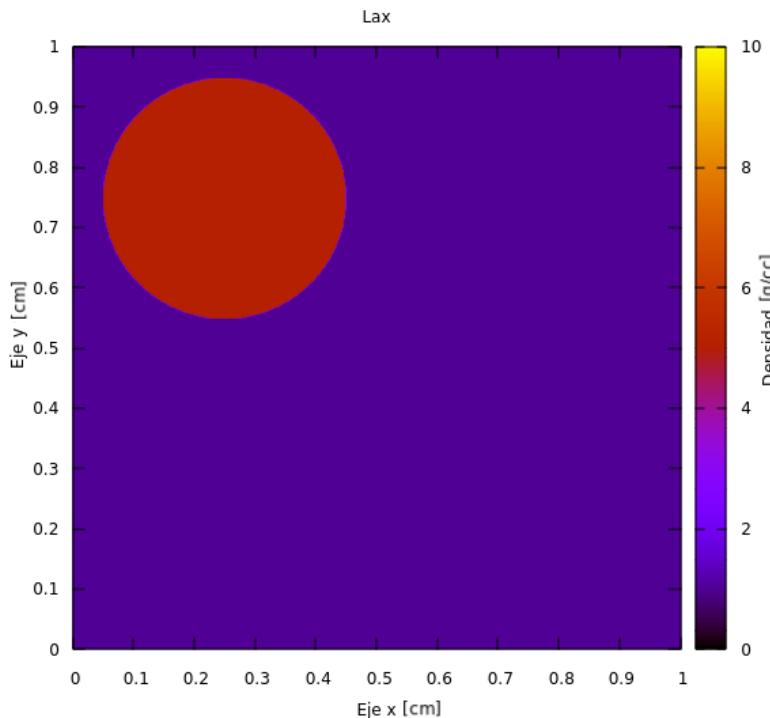


Figura 3.4: Condición inicial de la prueba número 2 para el resolvedor Lax newtoniano. En esta prueba se tiene la misma condición inicial que la mostrada en la figura 3.1, pero con las coordenadas de la onda de choque ubicadas en $(x, y) = (0.25, 0.75)$ [cm]. Esto con la finalidad de mostrar que sin importar donde se coloquen la onda de choque, esta se comportará de igual manera que si estuviera centrado.

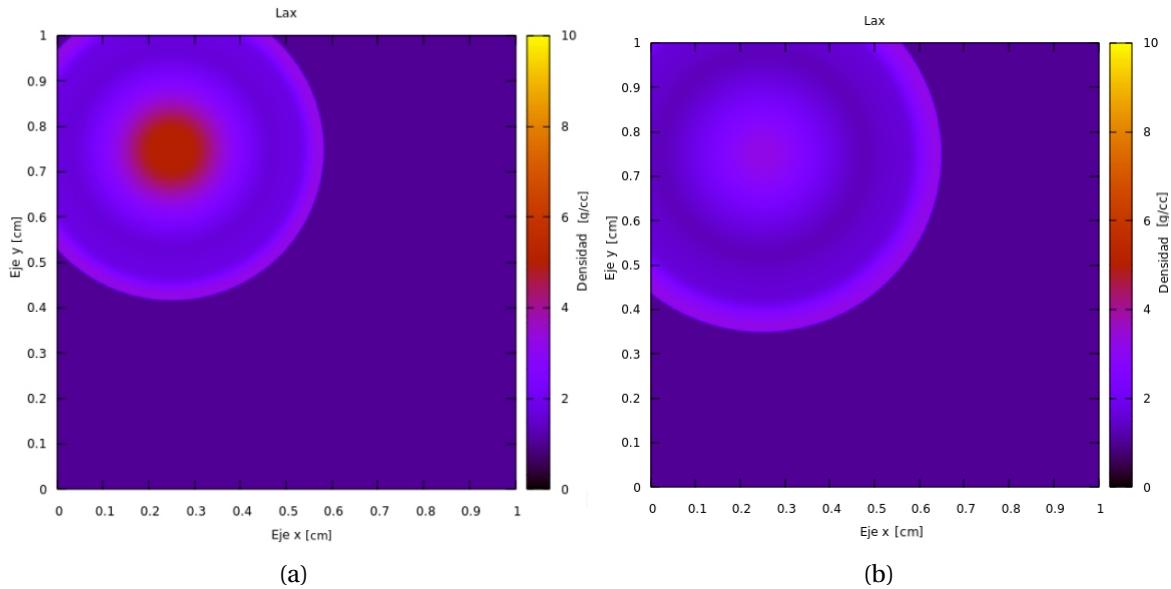


Figura 3.5: Evolución de la onda de choque mostrada en la Figura 3.4 usando el método de Lax newtoniano. En el panel a) se muestra la onda de choque a $t=0.07\text{s}$, mientras que en el panel b) se muestra para $t=0.12\text{s}$. Al evolucionar la onda se observa que al pasar la frontera no hay ruido o errores y que la velocidad así como el radio son los mismos que en la onda centrada.

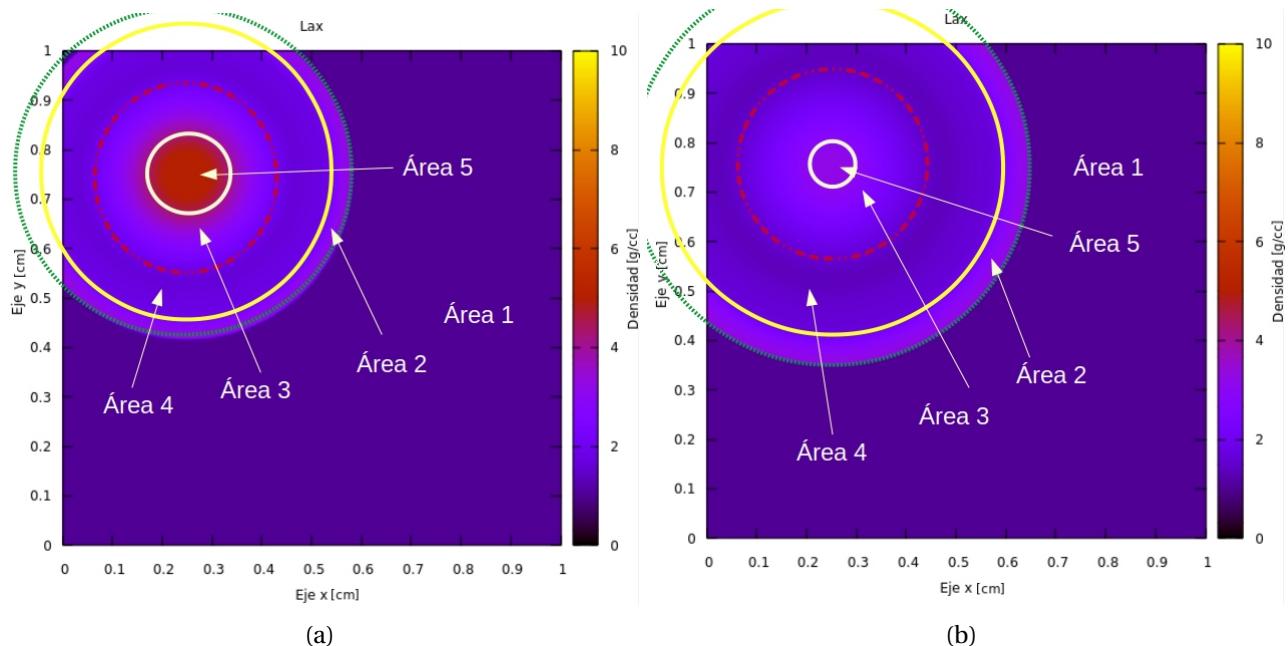


Figura 3.6: Al igual que en la figura 3.3, la onda presenta 5 áreas descritas, y estas se vuelven más grandes con el paso del tiempo. En el área 4 se puede ver la difuminidad que presenta la onda, al separarse la *forward shock* y la *reverse shock*.

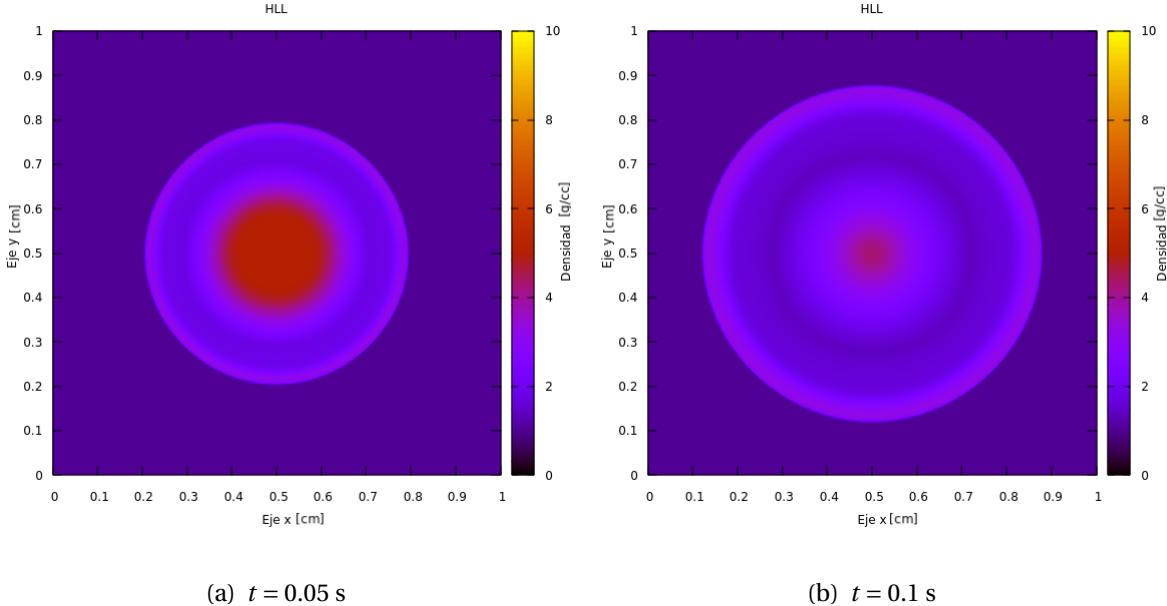


Figura 3.7: Evolución de la onda de choque mostrada en la figura 3.1 usando el método de HLL newtoniano. En el panel a) se muestra la onda de choque a $t=0.05$ s, mientras que en el panel b) se muestra para $t=0.10$ s.

Las condiciones iniciales para la onda de choque son las mismas que las que se había tenido en la figura 3.1, centrada en el punto $(x, y) = (0.5, 0.5)$ cm, su radio es de $r = 0.2$ cm y al igual que en Lax se presentan 2 ondas. La onda presenta una expansión simétrica (ver figura 3.7). La velocidad con la que se expande es constante y haciendo una aproximación lineal obtenemos una velocidad $v_{hll} = 1.48 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ (ver figura 3.13).

Al igual que lo que paso con Lax, el método HLL muestra el mismo comportamiento. Se pueden ver 2 ondas distintas, una que avanza hacia adelante (*forward shock*) y otra que avanza en sentido contrario, es decir, se contrae y choca con la misma onda (*reverse shock*), la cavidad que se va formando entre estas 2 ondas es prueba de la viscosidad que tiene nuestro método.

En la siguiente prueba se movió el centro de la onda de choque (ver figura 3.9) y este se colocó en el punto $(x, y) = (0.25, 0.25)$ [cm], las fronteras funcionaron apropiadamente, y no hubo ruido o distorsión de la onda que afectara la simetría de la misma (ver figura 3.10).

Al expandirse la onda, al igual que Lax se separan en 2 ondas. La *forward shock* que va contra el medio a la que hemos llamado el área 1 (veáse figura 3.11). El área 2, es el material del área 1 que va barriendo la *forward shock*. El área 3 es lo contrario, es decir, es el material barrido del área 5 por la *reverse shock* y entre estas 2 ondas se va formando un hueco entre estas 2 ondas que es el área 4 muestra la viscosidad de nuestro método. Dado que no se muestran anomalías en la evolución de nuestra onda cerca de las fronteras y que se expanden simétricamente, puedo concluir que el código, usando HLL, funciona correctamente.

Lax vs HLL

En esta sección, vamos a comparar las diferencias que hay entre el método de Lax y el HLL. Las ondas que vamos a ocupar son las de las figuras 3.2 y la 3.7. La onda esta centrada en el punto $(x, y) = (0.5, 0.5)$ cm.

El radio de la onda, usando el método de Lax, al expandirse es más rápido que HLL, obteniendo la pendiente de las rectas de la figura 3.13 podemos obtener velocidad con las que se expande la onda. La velocidad para Lax es $v_{lax} = 1.50 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ mientras que la velocidad con HLL es ligeramente menor.

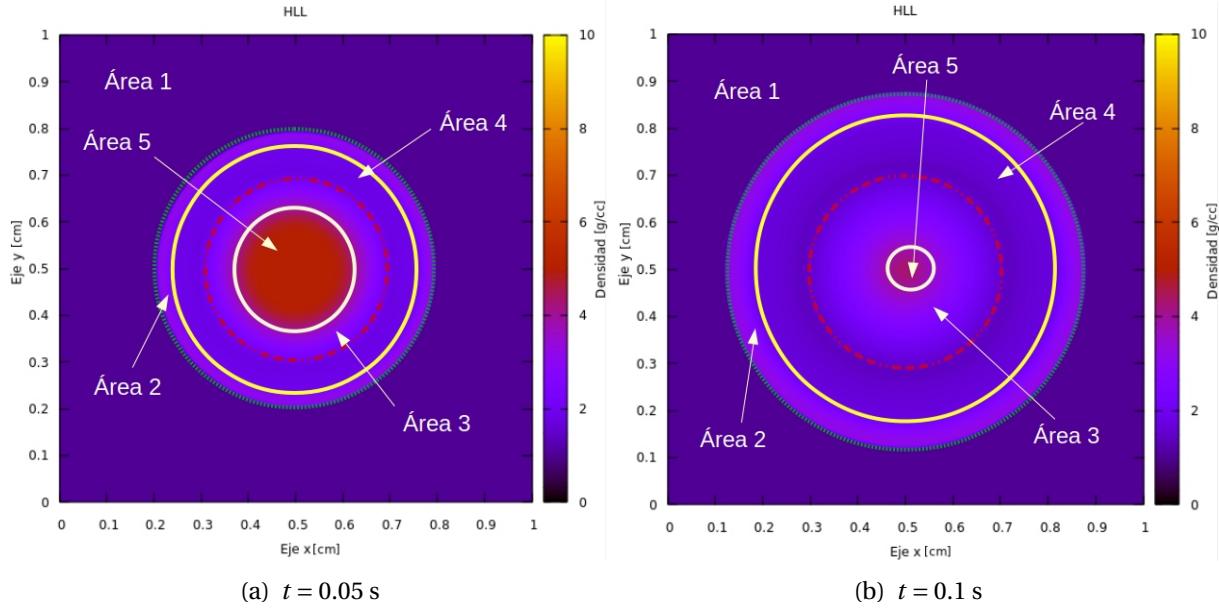


Figura 3.8: En la onda se logran distinguir 2 ondas distintas al evolucionar la misma. Una onda hacia adelante (*forward shock*) y otra onda que se contrae (*reverse shock*), la separación entre las 2 ondas dejan ver un hueco en la onda de menor densidad. La discusión de las áreas de las ondas es la misma que ya habíamos dicho en figura 3.3 y 3.6. Se puede ver también como, con el paso del tiempo, las áreas donde barren las ondas incrementan su tamaño.

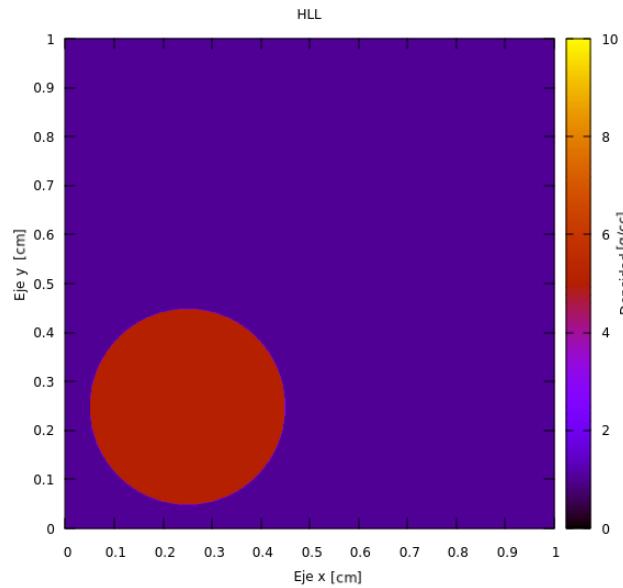


Figura 3.9: Onda de choque en el tiempo $t = 0$, centrado en los puntos $(x, y) = (0.25, 0.25)$ cm. Los valores con los que fue suministrado nuestra onda de choque son los mismos que se habían propuesto en el Cuadro 3.1

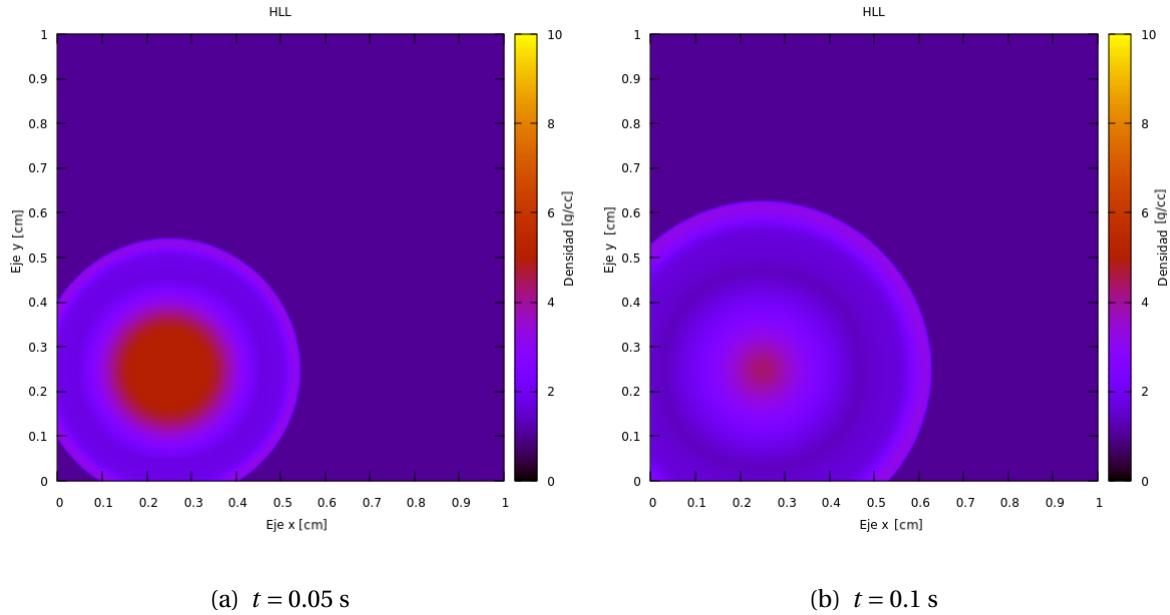


Figura 3.10: Evolución de la onda de choque mostrada en la figura 3.9 usando el método de HLL newtoniano. En el panel a) se muestra la onda de choque a $t=0.05\text{s}$, mientras que en el panel b) se muestra para $t=0.10\text{s}$.

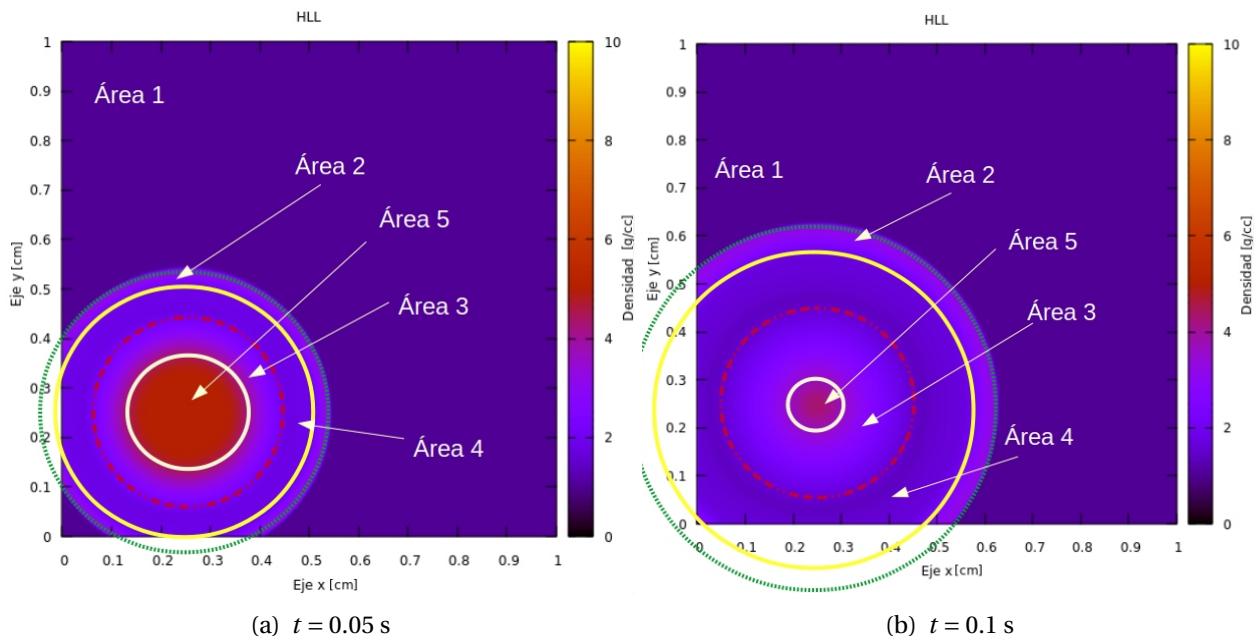


Figura 3.11: Las áreas mostradas en el panel a) y en el panel b) son las mismas discutidas en la figura 3.8.

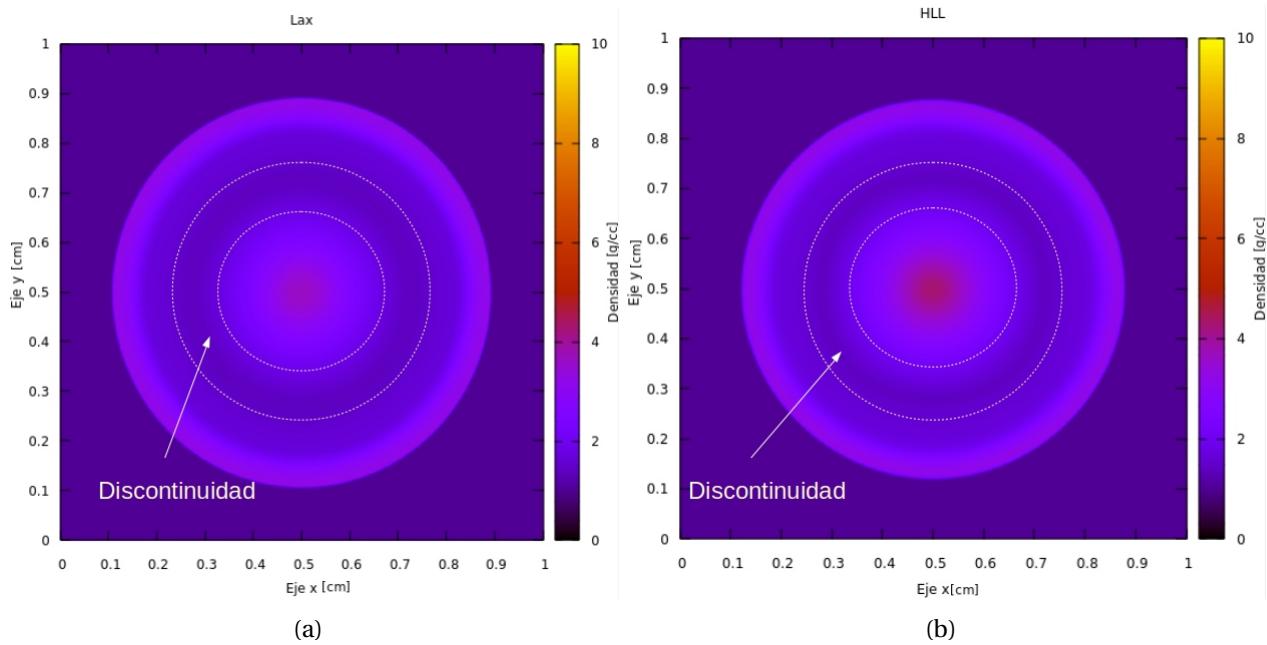


Figura 3.12: Las ondas de choque están establecidas al tiempo $t = 0.5$, ambas imágenes tienen una resolución de 500x500, mientras que Lax (panel a) es un poco más rápido que HLL (panel b)), HLL tiene menor viscosidad en la zona de discontinuidad.

mante menor $\nu_{hll} = 1.48 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, por lo que su error relativo es $\delta = 0.013$, el error es muy pequeño y no afecta de manera tan significante la simulación numérica.

La zona de discontinuidad es donde tanto la *forward shock* y la *reverse shock* se separan. En las 2 imágenes (ver la figura 3.12), aunque es mínima, se puede notar una difuminación mayor en Lax en esta zona.

Se realizó un perfil radial de la onda a diferentes tiempos de la expansión (ver figura 3.14) de la onda. Se observó valores similares en casi toda la onda, excepto en las discontinuidades. Donde los valores de densidad para máximos locales son más grandes para Lax que para HLL. En los mínimos locales HLL es más bajo que Lax (ver paneles a) y b) de la figura 3.14) en el panel c) de la respectiva figura se muestra que el máximo ubicado en el punto $x = 0.5 \text{ cm}$ HLL es más grande que Lax. En los mínimos locales ubicados entre $x \in [0.2, 0.8] \text{ cm}$ HLL es mas pequeño que Lax. Los errores relativos para los mínimos y máximos locales en el gráfico son pequeños $\delta \lesssim 0.05$.

Por esto podemos decir que HLL, es un método para resolver este tipo de discontinuidades, pero la diferencia entre ambos métodos es muy pequeña por lo que usar Lax o HLL para resolver las ecuaciones de la hidrodinámica con mi código es válido para cualquiera de los dos métodos.

3.1.2. Caso relativista

Para el caso relativista, se usaran valores completamente distintos que los que se tenian en el caso newtoniano debido a que queremos que la velocidad con la que se expande nuestra onda tenga velocidades cercanas a la de la luz. Para que la onda se expanda a altas velocidades, se debe tener una velocidad del sonido cercana a la velocidad de la luz. La velocidad del sonido c_s es definida como:

$$c \sim c_s = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \quad (3.1)$$

Por lo que podemos hacer la siguiente aproximación

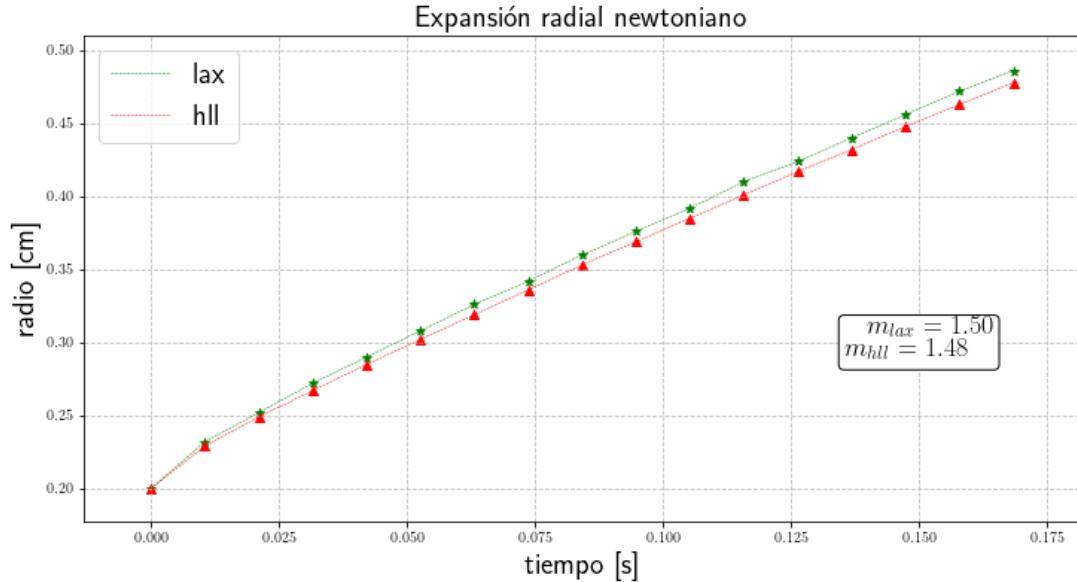


Figura 3.13: Expansión del radio de la onda de choque conforme avanza el tiempo. La recta verde representa el crecimiento del radio de la onda, usando el método de Lax, mientras que la recta roja representa a HLL. Las variables m_{lax} y m_{hll} son las pendientes de las rectas respectivamente y en consecuencia las velocidades de la expansión de la onda.

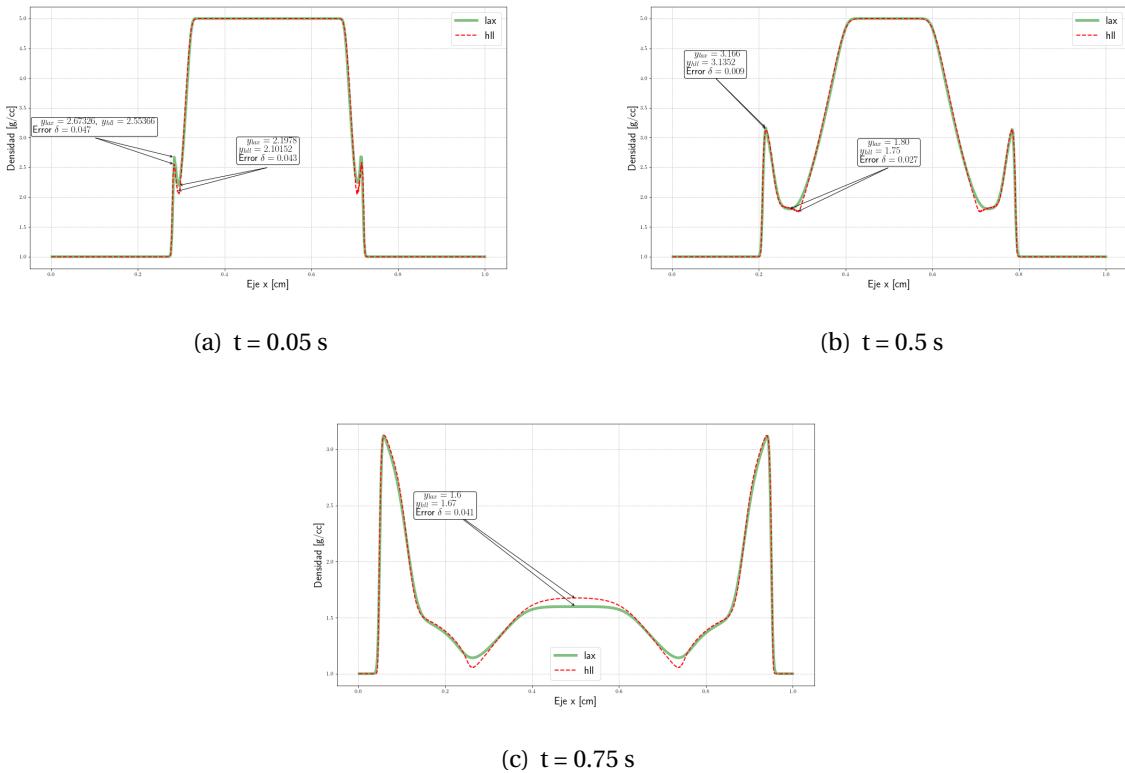


Figura 3.14: Perfil radial de la onda de choque newtoniano. El gráfico muestra la densidad ρ vs eje x, tanto de Lax (línea verde) como de hll (línea punteada roja). Los paneles muestran distintos tiempos para la expansión de la onda.

$$\frac{P}{\rho} \sim c^2 = 10^{21} \quad (3.2)$$

Entonces si suponemos una presión es $P = 10^{17} \text{ ergs} \cdot \text{cm}^{-3}$, por lo que la densidad tendría que ser $\rho = 10^{-4} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$

Parámetro	Descripción	valor
R_{in}	Radio interno de la onda expansiva	$0.2 \times 10^{10} \text{ [cm]}$
ρ_{in}	Densidad interna de la onda expansiva	$10^{-4} \text{ [g} \cdot \text{cm}^{-3}\text{]}$
ρ_{out}	Densidad del medio	$10^{-10} \text{ [g} \cdot \text{cm}^{-3}\text{]}$
P_{int}	Presión interna de la onda expansiva	$10^{17} \text{ [erg} \cdot \text{cm}^{-3}\text{]}$
P_{out}	Presión del medio	$\rho_{in} \times 10^{-13} \text{ [erg} \cdot \text{cm}^{-3}\text{]}$
$v_{x_{int}}$	Velocidad interna en el eje x de la onda expansiva	$0.0 \text{ [cm} \cdot \text{s}^{-1}\text{]}$
$v_{y_{int}}$	Velocidad interna en el eje y de la onda expansiva	$0.0 \text{ [cm} \cdot \text{s}^{-1}\text{]}$
$v_{x_{out}}$	Velocidad en el eje x del medio	$0.0 \text{ [cm} \cdot \text{s}^{-1}\text{]}$
$v_{y_{out}}$	Velocidad en el eje y del medio	$0.0 \text{ [cm} \cdot \text{s}^{-1}\text{]}$
Co	Número de Courant	0.7

Cuadro 3.2: Parámetros que se utilizarán en las siguientes pruebas que se van a realizar para la onda de choque, estos valores son para fluidos relativistas.

Lax

La onda de choque tendrá más densidad y presión que el medio ambiente (ver figura 3.15). Las dimensiones del dominio tambien se modificarán para esta prueba, dado que, como se requiere observar la expansión de la onda, este alcanzará valores del orden de magnitud de la velocidad de la luz. Los valores de nuestras coordenadas x,y tienen valores entre 0 y $2 \times 10^{10} \text{ cm}$. La presión interna de la onda incrementa 17 órdenes de magnitud y la densidad disminuye a cuatro órdenes de magnitud, para ver más detalles vea el cuadro 3.2. Su radio inicial es de $r = 0.2 \times 10^{10} \text{ cm}$ y estaba centrada en los puntos $(x, y) = (10^{10}, 10^{10}) \text{ cm}$ (ver figura 3.15). La forma que se expande la onda es simétrica (ver figura 3.16). La velocidad de la onda alcanza velocidades cercanas a la de la luz pero decrecen muy rápido. Haciendo una aproximación lineal (ver figura 3.22) en el tiempo en que su velocidad no cambia tanto, es decir para $t \in [0.1, 0.5] \text{ s}$ la velocidad de la onda es $v_{lax} = 0.34c$. Casi un tercio de la velocidad de la luz.

Para revisar si la onda, usando el método de Lax, no tiene problemas en la frontera por usar velocidades muy altas; se movió el centro de la misma al punto $(x, y) = (0.3 \times 10^{10}, 0.3 \times 10^{10}) \text{ cm}$. Cuando la onda toca las fronteras, esta evoluciona con normalidad, ya que no se observa alguna anomalía cuando las traspasa. Y sigue manteniendo su simetría (ver figura 3.17). Recordemos que aún seguimos usando la condición de *outflow*.

HLL

Se hicieron las mismas pruebas usando el método de HLL. Los valores de la onda y del medio ambiente son los mismos referidos en el cuadro 3.2. La onda se expande simétricamente y en los primeros instantes $t < 0.1 \text{ s}$ alcanza velocidades $v_{hll} = 0.7c$. Para tiempos posteriores $t > 0.1$ la velocidad se vuelve constante y baja a $v_{hll} = 0.25c$ (ver figura 3.22).

Se movió el centro de la onda, para revisar que, al igual que el método de Lax, el método de HLL no tuviera problemas con las fronteras (ver figura 3.19). La onda se expande simétricamente al igual que la onda centrada. También muestra las ondas *forward* y *reverse shock*.

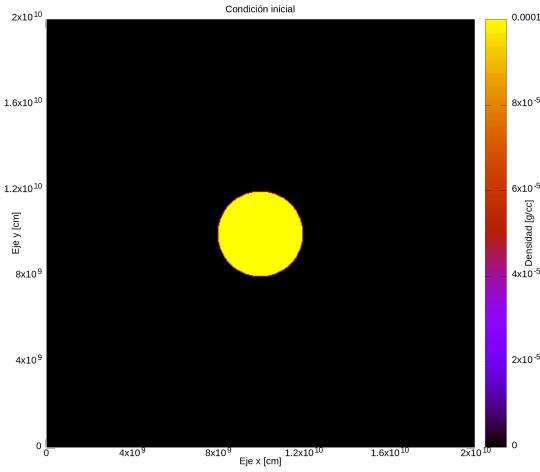


Figura 3.15: Condición inicial para nuestra onda de choque relativista, tanto para Lax como para HLL. Las condiciones de densidad y presión son muy distintas a las de las condiciones newtonianas. La densidad $\rho_{in} = 0.001 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ y la presión $P_{in} = 2 \times 10^{18} \text{ ergs} \cdot \text{cm}^{-3}$.

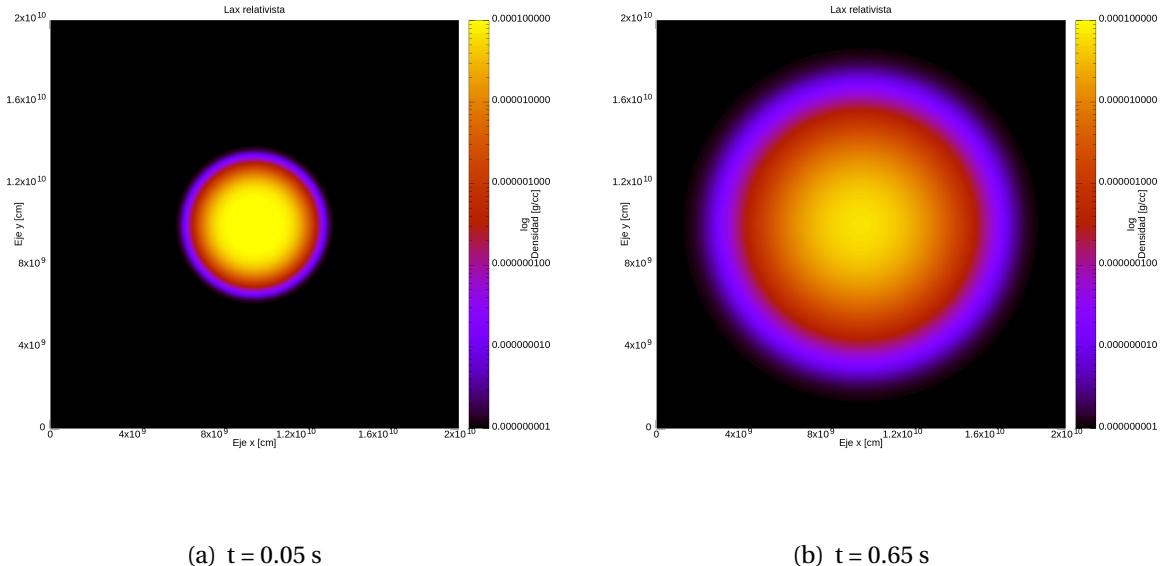


Figura 3.16: El radio de la expansión de la onda se está moviendo a 79 % de la velocidad de la luz al tiempo $t = 0.05 \text{ s}$. Al tiempo $t = 0.65 \text{ s}$ la velocidad de la onda decrece rápidamente al 19 % de la velocidad de la luz.

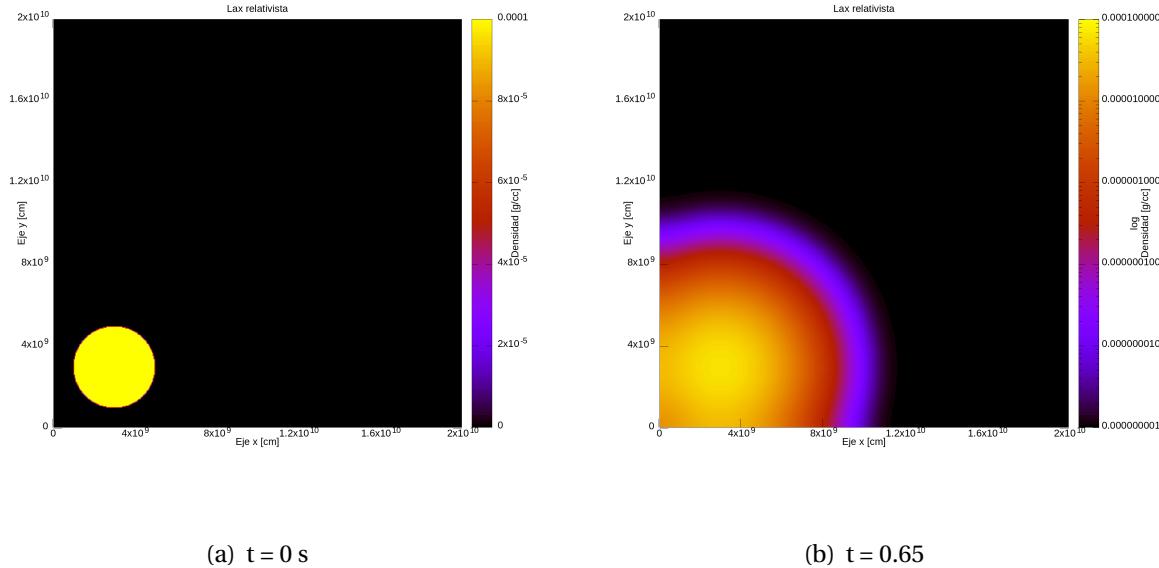


Figura 3.17: La evolución de la onda no centrada se comporta igual que onda de la figura 3.16, no hay un cambio diferente en la velocidad y desarrollo de la misma que si estuviera centrada.

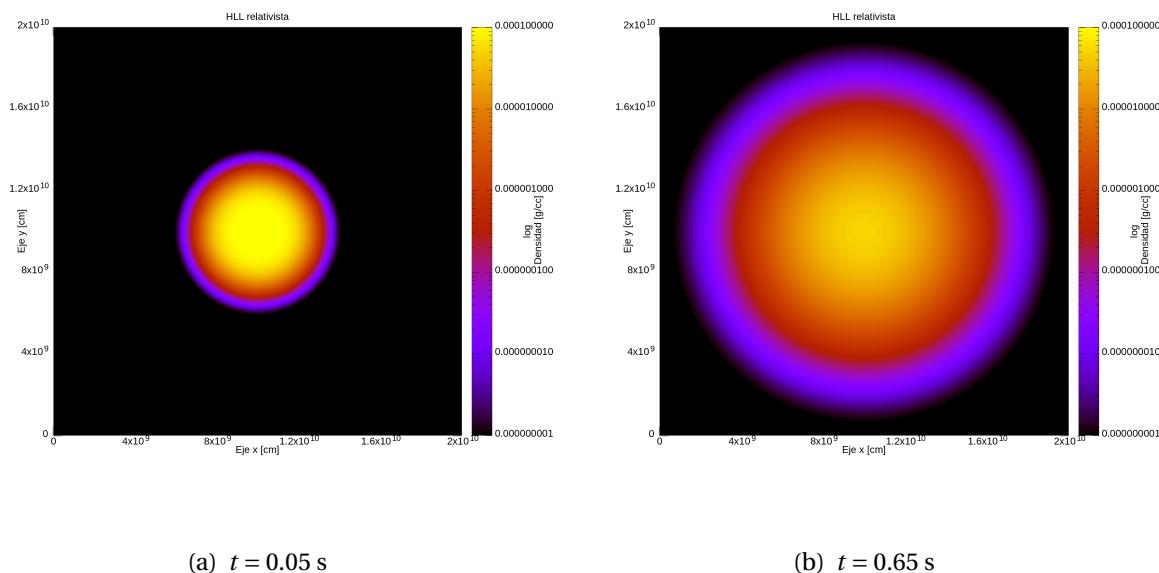


Figura 3.18: Expansión de la onda de choque. En el panel a) se muestra la onda de choque al tiempo $t = 0.05$. En el panel b) se muestra al instante $t = 0.65$ s. La velocidad de la onda decrece rápidamente.

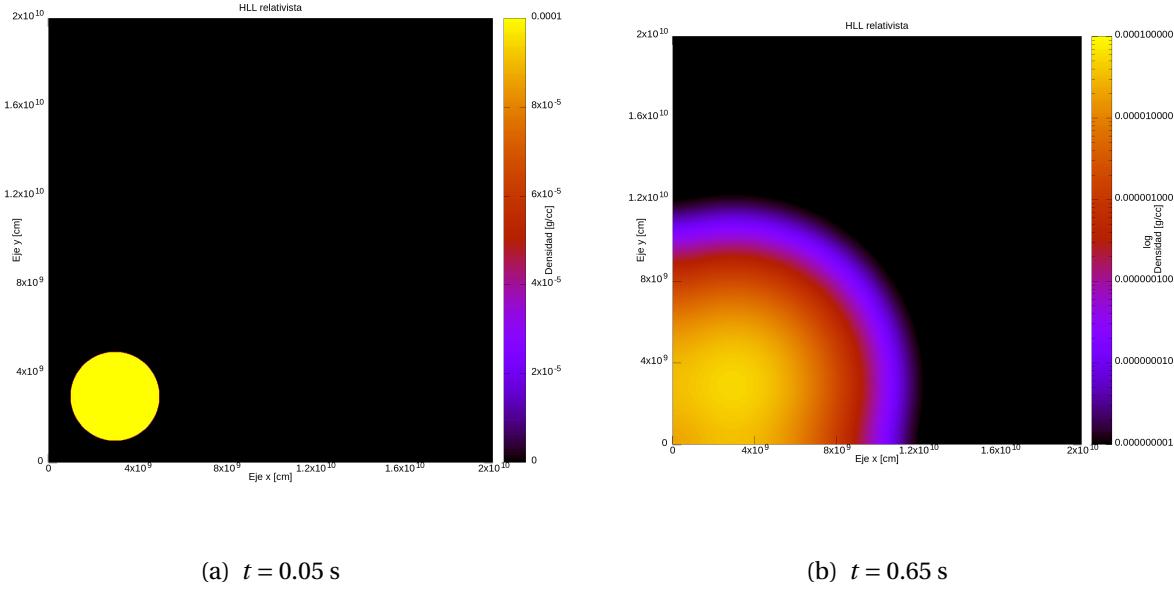


Figura 3.19: Evolución de la onda de choque centrada en el punto $x = y = 0.3 \times 10^{10}$ cm. La onda se expande cerca del dominio computacional sin ningun error sobre las mismas.

Lax vs HLL

En la última parte del caso relativista vamos a comparar los dos métodos que hemos visto hasta ahora.

Para el caso relativista, la onda sigue mostrando las áreas que el caso newtoniano. El área 1 es el medio que no ha sido tocado, el área 2 el material barrido por la *forward shock*, que podemos notar que su densidad es casi la misma que el medio ambiente. El área 3 es el material que ha sido tocado por la *reverse shock*. El área 4 muestra la discontinuidad que se genera entre estas 2 ondas y el área 5 el material que no ha sido tocado por la *reverse shock* (ver figura 3.21).

La velocidad de expansión, para ambos casos (ver figura 3.22), es cercana $v = 0.7c$ para tiempos $t < 0.1$ s, para tiempos $t > 0.1$ s la velocidad se vuelve constante pero a diferencia del caso newtoniano, donde $\delta v_{newt} = 0.013$, la diferencia del caso relativista es mayor $\delta v_{rel} = 0.26$.

Los perfiles de densidad muestran una notoria diferencia entre los máximos globales de la onda de choque, sobre todo el panel c) de la figura 3.23. Una diferencia importante entre el caso newtoniano y relativista es que, los perfiles de densidad, tanto para Lax y HLL, se diferencian en que el caso newtoniano tiene 2 máximos locales y uno global mientras que el relativista tiene un sólo máximo global.

Por lo tanto en mi código se puede utilizar, en caso newtoniano, ambos métodos numéricos. Pero para el caso relativista es mejor usar Lax, dado que HLL aparte de que su tiempo de ejecución es mucho mayor que Lax, las diferencias entre ambos son más notorias conforme avanza el tiempo y muestra una menor viscosidad Lax.

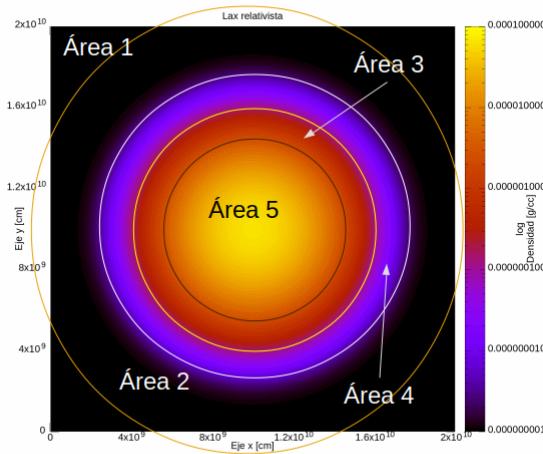


Figura 3.20: Análisis de la onda de choque al tiempo $t = 0.65$ s. Las áreas de la onda de choque son las mismas que el caso newtoniano.

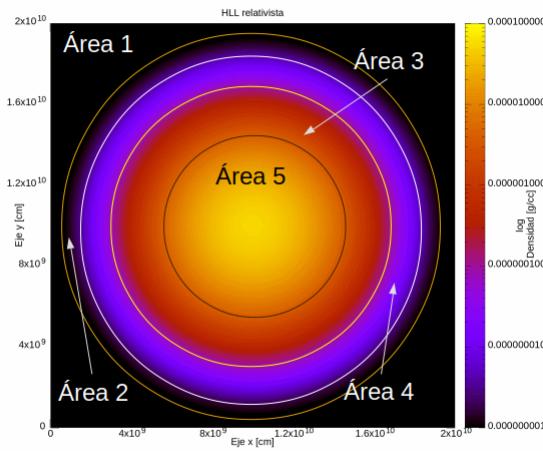


Figura 3.21: Las áreas apreciadas son muy parecidos al método de Lax. También se muestran la *forward shock* y *reverse shock* pero no se muestran las discontinuidades como en la figura 3.12

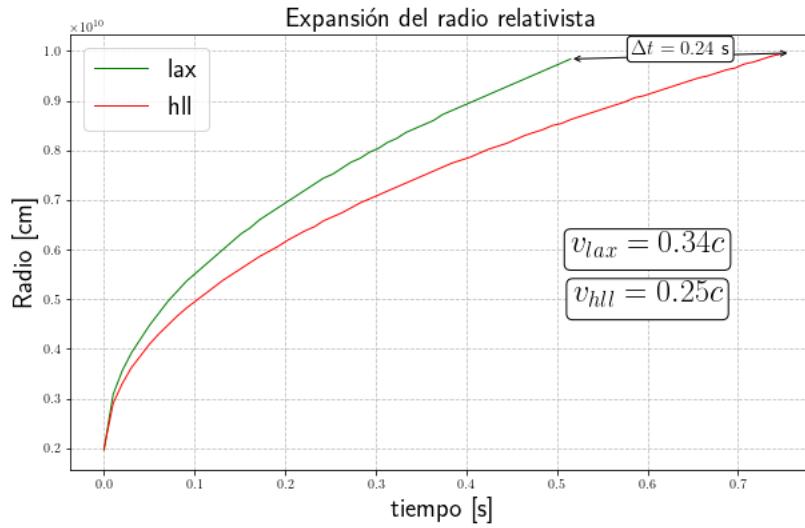


Figura 3.22: La expansión del radio para tiempos $t < 0.1$ s es $v = 0.7c$. Para $t > 0.1$ s la velocidad se hace constante y sus velocidades respectivamente son $v_{lax} = 0.34c$ y $v_{hll} = 0.25c$

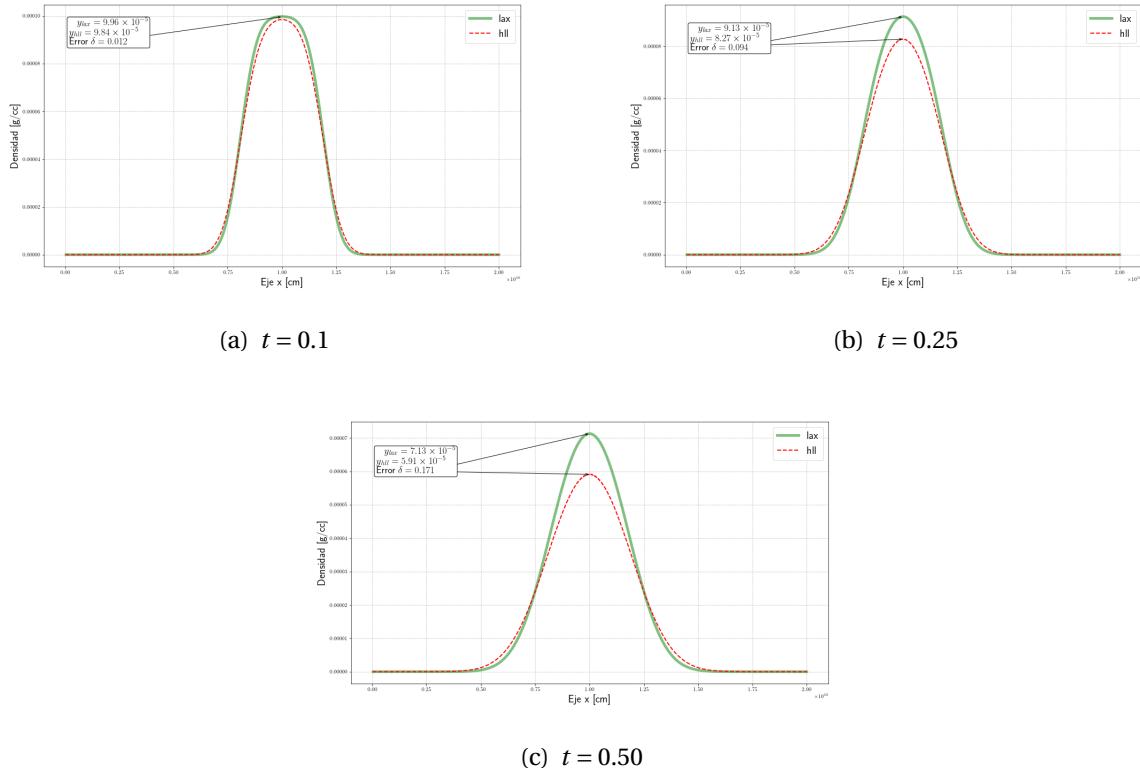


Figura 3.23: Perfil de densidad radial de la onda de choque. Cada panel muestra distintas fases de tiempo. La linea verde muestra la densidad sobre el eje x del método de Lax, mientras la linea punteada roja muestra el método de HLL. Las diferencias entre ambos métodos son mayores conforme avanza el tiempo.

Capítulo 4

Jet en diferentes medios de densidad

En este capítulo se utilizará un jet, que se mueve a velocidades relativistas, para probar el programa con distintos medios de densidad, en los cuales, la densidad del medio varía de ser menos que el jet, hasta ser diez veces más denso que el mismo jet. El jet se modelará como un flujo de densidad ρ con velocidad $v \approx c$, que se propaga en un medio ambiente con $\rho = \text{cte}$. Para poder simular el jet, se le inyectará presión y densidad continuamente con una velocidad constante cercana a la de la luz. En la figura 4.1 se muestra las condiciones iniciales del jet. El cual tendrá una eyección a la mitad del dominio sobre el eje x y cuyo radio será $r = 4 \times 10^8 \text{ cm}$.

4.1. Diferencia de los métodos numéricos sobre el jet

Antes de realizar las pruebas con distintos medios de densidad, se usará Lax y HLL para determinar el método más eficiente en cuanto a simulación de jets (ver figura 4.1). Las pruebas de esta sección y del capítulo en general se usarán jets con velocidades relativistas $\gamma = 5.0$. Los jets tendrán una densidad $\rho_{jet} = 1000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ y una presión $P_{jet} = 20 \times |\rho_{jet}| \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2}$. La densidad del medio ambiente será $\rho_{ma} = 1 \times 10^4 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ y, similarmente al jet, $P_{ma} = 20 \times |\rho_{ma}| \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2}$.

En la figura 4.2, en ambos métodos, se observa un jet con un radio $r_{jet} = 4 \times 10^8 \text{ cm}$ y un capullo que lo envuelve completamente. El capullo en el panel a) de la misma figura alcanza la altura $y \approx 1 \times 10^{10} \text{ cm}$. En el panel b) el capullo alcanza la altura aproximadamente $y \approx 7 \times 10^9 \text{ cm}$. A diferencia de HLL, en el cual se observa que la densidad del capullo alcanza densidades cercanas a $\rho \approx 7000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, con Lax, las densidades bajan a $\rho \approx 4000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

En la eyección del jet, la densidad que muestra el gráfico 4.2 usando Lax es aproximadamente $\rho = 1000 \sim 2000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Pero en el caso de HLL, la densidad se eleva a $\rho = 7000 \sim 8000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Como la densidad del jet que se propuso del jet fue $\rho = 1000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, la densidad de Lax es la mas cercana a los valores propuestos. Y tambien dado que HLL es aproximadamente 18 veces más lento que Lax para simular el jet, se usará el método de Lax de aquí en adelante. Para ver especificaciones de cuan más rapido es Lax que HLL se recomienda ver el apéndice E.

4.2. SGRB en medio de densidad bajo

Las pruebas del jet van a ser en un medio con una densidad de ambiente muy bajo . En general para todas las pruebas la densidad del jet será de $\rho_{jet} = 1000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$, la presión $P_{jet} = 20 \times |\rho_{jet}| \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}$, es decir, la presión sera 20 veces más grande que la magnitud de la densidad. Para nuestro medio ambiente, la densidad tendrá un valor de $\rho_{ma} = 10^{-10} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$, y al igual que el jet la presión será $P_{ma} = 20 \times |\rho_{ma}| \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}$. La velocidad de los jets tendrán dirección solo en el eje y, con una velocidad de $v_{jety} = 0.9797959c \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

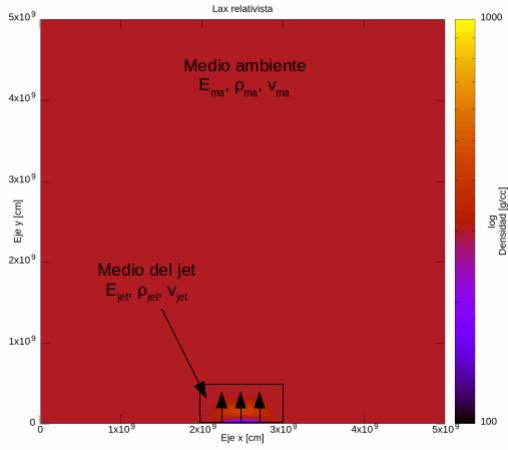


Figura 4.1: Para poder simular el jet, se inyectará masa y energía constante del lado de la parte de abajo de nuestro dominio. Sobre esta parte, sólo se inyectara a una pequeña fracción de este lado en el centro. El jet tendrá un diámetro $D_{jet} = 4 \times 10^8$ cm.

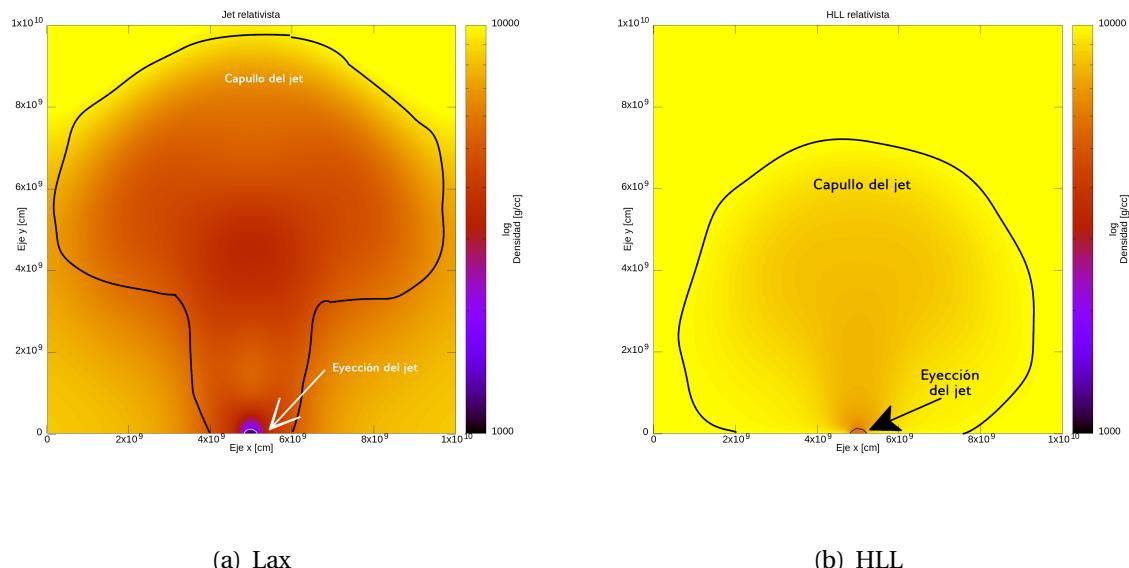


Figura 4.2: Jet al tiempo $t = 0.8$ s. La altura del capullo de Lax es cercana a $y = 1 \times 10^{10}$ cm, mientras con HLL la altura apenas alcanza $y = 7 \times 10^9$ cm. Las densidad en la eyección de es aproximadamente $\rho \lesssim 2000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, para el caso de HLL la densidad es $\rho \lesssim 8000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

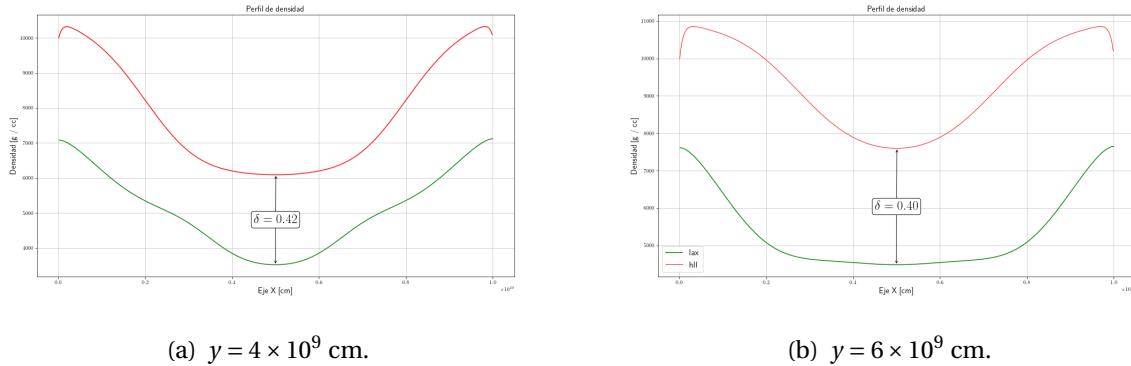


Figura 4.3: En el panel a) se observa la densidad que hay sobre el eje x, a la altura del eje $y = 4 \times 10^9$ cm. En el panel b) es similar que el panel a) solo que cambia la altura $y = 6 \times 10^9$ cm.

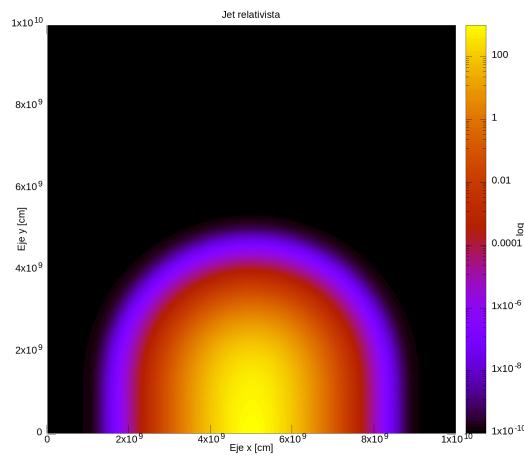


Figura 4.4: Eyección del jet relativista al tiempo $t = 0.8$ s. Debido a la poca densidad del medio ambiente que lo rodea no hay una formación del capullo, además de que el jet es colimado.

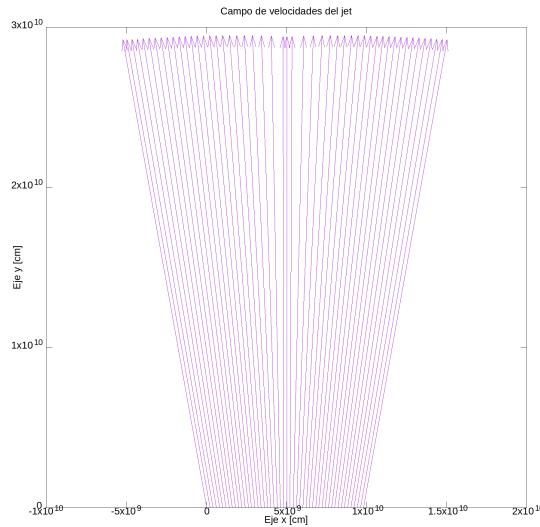


Figura 4.5: Eyección del jet relativista al tiempo $t = 0.8$ s

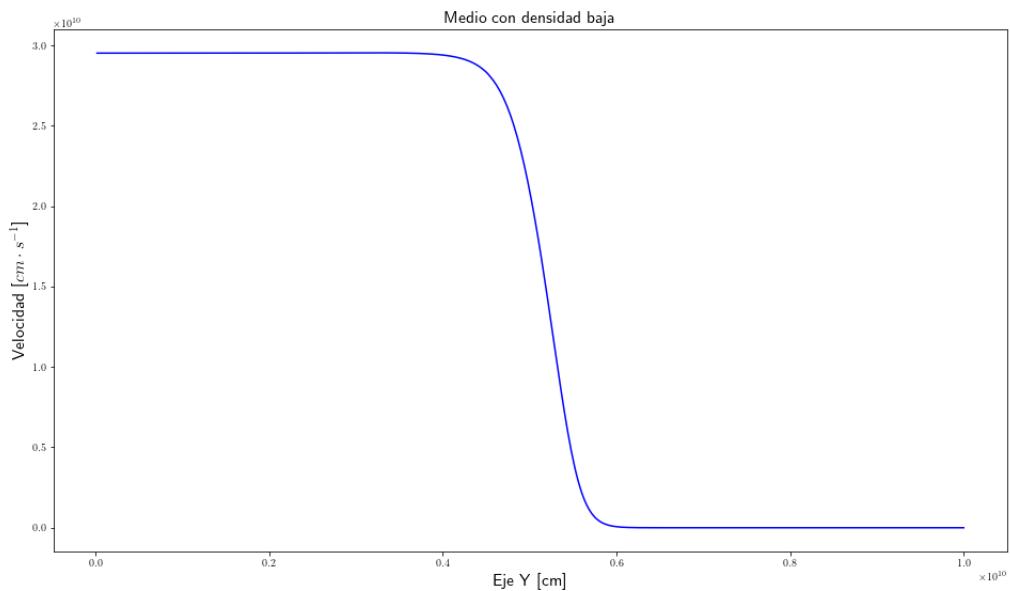
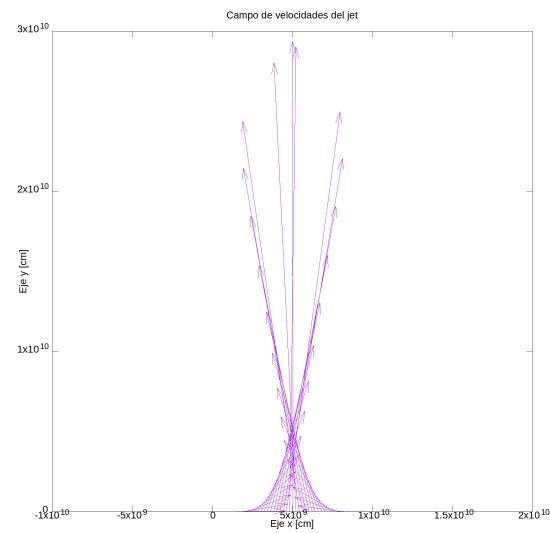
Se observa en la figura 4.4 que en el jet, debido a la baja densidad del medio ambiente, no hay una formación de un capullo que lo envuelva.

Al realizar un campo vectorial de las velocidades del jet (ver figura 4.5). La velocidad en sus extremos $v_y = 0.97354 c \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ con lo que la velocidad baja un 0.63% con respecto a la velocidad que se había establecido en el jet. La velocidad en el eje x es $v_x = 0.1745 c \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Con lo que puedo concluir que el jet, a pesar de ser colimado, tiene un ángulo con respecto al jet de $\theta = 10.16^\circ$

4.3. SGRB en medio de densidad alto

En esta sección el jet va a tener las mismas condiciones que el de la figura 4.2. Dado que el medio ambiente es 10 veces mayor que el jet se puede observar un capullo que envuelve a la misma. El capullo alcanza una densidad de cercana a los $\rho = 7000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

La velocidad del jet en el centro es $v_y = 0.9780 c \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ mientras a los extremos va bajando al 70% de la velocidad de la luz. Una diferencia con la propagación del medio bajo es que las velocidades del medio ambiente con las que el jet está interactuando tienen una dirección opuesta

Figura 4.6: Eyección del jet relativista al tiempo $t = 0.1$ sFigura 4.7: Eyección del jet relativista al tiempo $t = 0.8$ s

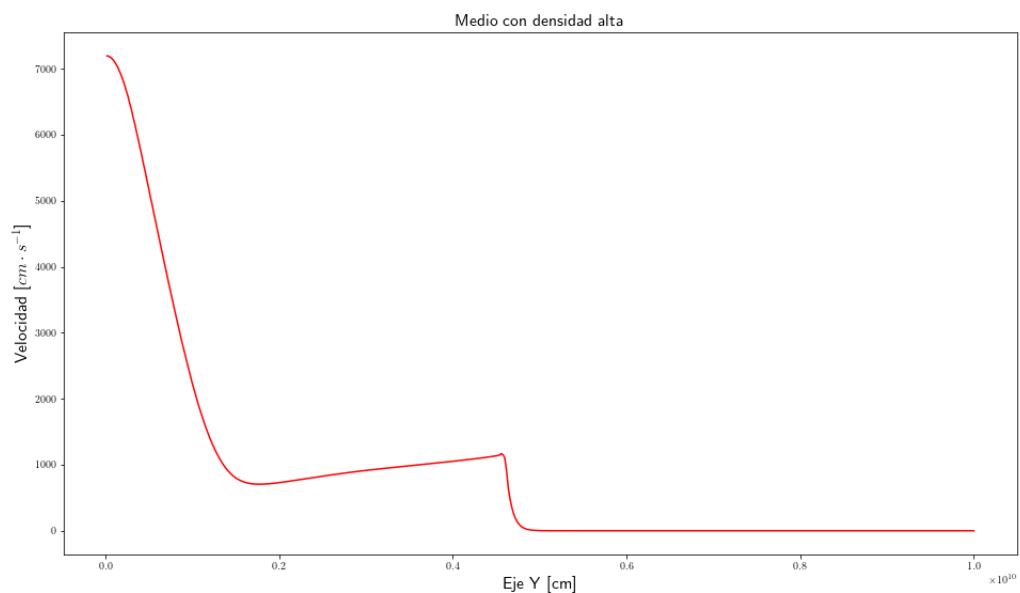


Figura 4.8: Eyección del jet relativista al tiempo $t = 0.1$ s

Capítulo 5

Conclusiones

Apéndice A

Código

El programa está escrito en lenguaje FORTRAN se compone de un módulo principal el cual está compuesto de un programa principal y este a su vez llamará a varias subrutinas:

- **initconds:** Esta subrutina calculará los valores iniciales que le demos al programa
- **output:** Devuelve un archivo con los datos que se calculan con el método de Lax
- **Courant:** Calcula el paso temporal
- **ulax:** Calcula el paso siguiente de las variables conservadas
- **boundaries:** En esta parte puedes definir las fronteras a utilizar como outflow o las condiciones para las del jet
- **fluxes:** Calculo de los flujos

Al usar las ecuaciones hidrodinámica relativistas, se agregan 2 subrutinas más:

- **uprim:** Este módulo es agregado para poder desacoplar las variables conservadas
- **newraph:** Calcula el método de Newton-Rapson será de gran utilidad en el desacoplamiento de las variables conservadas y así obtener nuestras primitivas

```
do i=0,nx+1
2 do j=0,ny+1
3
4 x=float(i)*dx          ! obtain the position x_i
5 y=float(j)*dy          ! obtain the position y_j
6 rad=sqrt((x-xc)**2+(y-yc)**2)
7
8 if (rad < 0.1) then
9
10 lorin=1./sqrt(1.-(vxin**2+vyin**2))
11 hin=1.+gamma/(gamma-1.)*pin/rhoin
12
13 u(1,i,j)=rhoin*lorin
14 u(2,i,j)=rhoin*vxin*lorin**2*hin
15 u(3,i,j)=rhoin*vyin*lorin**2*hin
16 u(4,i,j)=rhoin*lorin**2*hin-pin
17
18 else
19
20 lorout=1./sqrt(1.-(vxout**2+vyout**2))
```

```

21 hout=1.+gamma/(gamma-1.)*pout/rhoout
22
23 u(1,i,j)=rhoout*lorout
24 u(2,i,j)=rhoout*vxout*lorout**2*hout
25 u(3,i,j)=rhoout*vyout*lorout**2*hout
26 u(4,i,j)=rhoout*lorout**2*hout-pout

```

y para los fluidos en la subrutina de fluxes

```

1 f(1,i,j)=rho*vx*lor
2 f(2,i,j)=rho*vx*vx*lor**2*h+P
3 f(3,i,j)=rho*vx*vy*lor**2*h
4 f(4,i,j)=rho*vx*lor**2*h

5
6 g(1,i,j)=rho*vy*lor
7 g(2,i,j)=rho*vx*vy*lor**2*h
8 g(3,i,j)=rho*vy*vy*lor**2*h+P
9 g(4,i,j)=rho*vy*lor**2*h

```

Como el código es una iteración, solo la primera vez que itere estaremos bien, pero, al siguiente bucle saldrá mal debido a que nuestros resultados nos están arrojando en principio las variables conservadas, y lo que se requiere es obtener las primitivas.

A.1. Condición inicial

En la subrutina *initconds* se calcularán las condiciones iniciales, tomando los valores de los parámetros del módulo de *globals*, que en este caso son: la densidad (ρ), las velocidades tanto en x como en y (v_x, v_y), la presión (p) y Γ . Con estas constantes dadas se calcularán nuestras variables conservadas.

```

!=====
2! In this module we set the initial condition
3!
4 subroutine initconds(time,tprint,itprint)
5 use globals
6 implicit none
7 real, intent(out) :: time, tprint
8 integer, intent (out) :: itprint
9 integer :: i,j
10 real :: x,y, rad
11
12!
13! For the 2D circular blast:
14 u(1,i,j) = rho(i,j)
15 u(2,i,j) = vx(i,j)
16 u(3,i,j) = vy(i,j)
17 u(4,i,j) = etot(i,j) = eint + ekin = P/(gamma-1)
18!
19 do i=0,nx+1
20   do j=0,ny+1
21     x=float(i)*dx           ! obtain the position $x_i$
22     y=float(j)*dy           ! obtain the position $y_j$
23     rad=sqrt((x-xc)**2+(y-yc)**2)
24
25     if (rad < 0.3) then
26       u(1,i,j)=rhoin
27       u(2,i,j)=rhoin*vxin
28       u(3,i,j)=rhoin*vyin

```

```

29      u(4,i,j)=pin/(gamma-1.)+0.5*u(2,i,j)*u(2,i,j)/u(1,i,j) + 0.5/u(1,i,j)*u(3,i,j)*
30      u(3,i,j)
31      else
32          u(1,i,j)=rhoout
33          u(2,i,j)=rhoout*vxout
34          u(3,i,j)=rhoout*vyout
35          u(4,i,j)=pout/(gamma-1.) + 0.5/u(1,i,j)*u(2,i,j)*u(2,i,j) + 0.5/u(1,i,j)*u(3,i,
36          j)*u(3,i,j)
37
38      end if
39
40
41!-----+
42! end of the 2D circular blast initial condition
43! reset the counters and time to 0
44!
45      time=0
46      tprint=0
47      itprint=0
48
49      return
50  end subroutine initconds
51!-----+
52! end of the init condition module
53=====+

```

En esta parte dan los valores iniciales para nuestra malla tanto en x como en y en el tiempo $t = 0$

A.1.1. Condición de Courant

Esta parte del código tiene que ver con los incrementos Δt , los cuales se van a calcular en este módulo, para poder calcularlos tenemos que tener en cuenta la convergencia y la estabilidad de nuestras ecuaciones diferenciales parciales (ecuación ??). La condición de convergencia establece que la solución de la ecuación numérica se aproxima a la solución con ecuación diferencial parcial original si todos los intervalos finitos tienden a cero, una condición necesaria para la convergencia es que los errores, por ejemplo los debidos al redondeo, no se incrementen con el tiempo. Esta es la llamada la condición de estabilidad. Es una condición tan importante que implica ciertas restricciones al tamaño del paso de tiempo en un proceso explícito. Un análisis de estabilidad para esquemas explícitos a partir de la teoría de las características para soluciones continuas lleva a la conclusión que dichos esquemas, para ser estables, deben cumplir la condición de Courant, que es:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u + C} \quad (\text{A.1})$$

Donde C es el número de Courant y nos limita a que nuestros Δt no sean tan grandes

```

1 =====+
2! CFL criterium module
3!
4      subroutine courant(dt)
5      use globals
6      implicit none
7      real, intent(out) :: dt
8      real :: rho, vx, vy, P, cs
9      integer :: i, j
10

```

```
11!

---



```
12! Calculate the CFL criterium
13!
14 dt=1E30
15 do i=0,nx+1
16 do j=0,ny+1
17 rho=u(1,i,j)
18 vx=u(2,i,j)/rho
19 vy=u(3,i,j)/rho
20 P=(u(4,i,j)-0.5*rho*(vx**2+vy**2))*(gamma-1.)
21 cs=sqrt(gamma*P/rho) !Speed of sound
22 dt=min(dt,Co*dx/(abs(vx)+cs))
23 dt=min(dt,Co*dy/(abs(vy)+cs))
24
25 end do
26 end do
27
28 return
29 end subroutine courant
```


```

Apéndice B

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera se usarán para obtener los valores de nuestras variables conservadas en los extremos de nuestra malla de puntos, con el fin de evitar errores numéricos, las condiciones de frontera que generalmente se usan son de cuatro tipos las de *outflow*, las de *reflexión*, las *periódicas* y las de *jet*. Las del tipo *outflow* serán aquellas en las que una vez los valores sobre la malla (ondas) queden fuera de esta, ya no sabremos qué pasó después con estos datos, las de *reflexión* serán aquellas en las que nuestros datos en vez de salir se reflejarán y las *periódicas* serán parecidas a las de *reflexión* solo que en vez de reflejarse las ondas, estas entrarán del lado contrario de donde salieron y las de tipo *jet*, será para que de un lado de nuestra malla salga una fuente de partículas.

Para entender lo que son las condiciones de frontera, vamos suponer una malla de puntos, esta malla tendrá $n+2$ filas y $m+2$ columnas, para identificar los puntos vamos a indexarlos empezando desde el 0 hasta $n+1$ en el caso de las filas y de 0 hasta $m+1$ para el de las columnas.

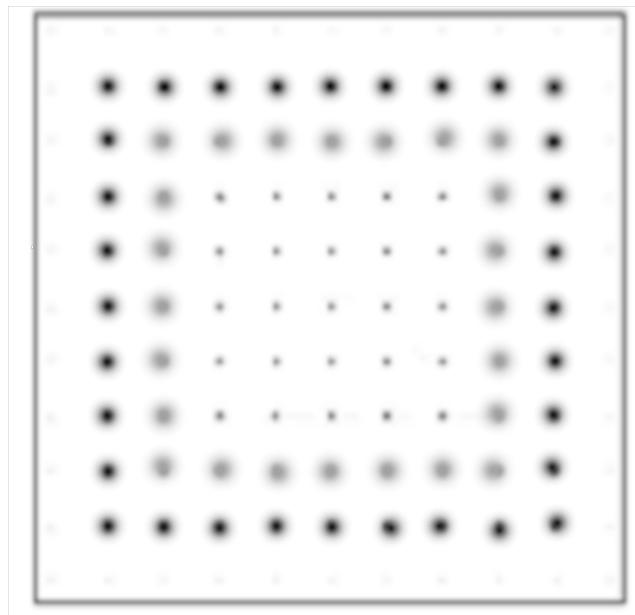


Figura B.1: Malla de puntos que resalta las fronteras, los puntos más oscuros representan representan una frontera *fantasma*, es decir, ese conjunto de puntos estará allí como apoyo para resolver los cálculos que hará la computadora dado que tanto el método de Lax, como el método de HLL usan los puntos posteriores y anteriores en el espacio del punto que queremos saber su valor, pero no se graficarán

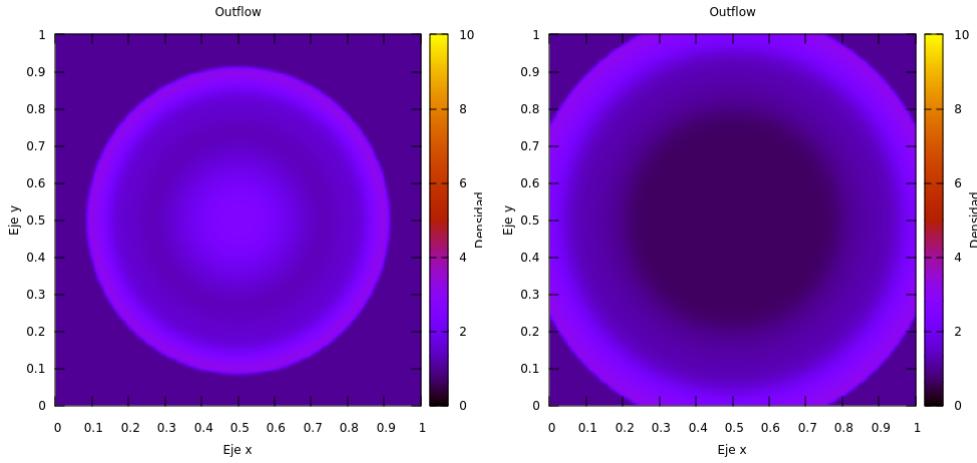
La figura B.1 muestra los puntos más negros como unos puntos que nos van a servir de apoyo para calcular los valores de los puntos más grises, esto debido a que para calcular los valores de

algún punto (x_i, y_j) necesitamos el punto posterior x_{i+1}, y_{j+1} y el punto anterior x_{i-1}, y_{j-1} .

Ahora, cuando llegamos a los últimos puntos de nuestro frontera, por ejemplo, el punto x_0, y_0 , no podremos calcularlo debido a que no tendremos conocimiento acerca del punto anterior $x_{(-1)}, y_{(-1)}$, entonces tendremos que darles valores específicos a estos puntos, pero no podemos darles cualquier valor, en las siguientes secciones vamos a ver que valores válidos le podemos dar para el funcionamiento del código.

B.0.1. Condiciones de frontera *outflow*

Las condiciones *outflow*, son en las que los valores de nuestra frontera fantasma(puntos negros) que toman los mismos valores que su antecesor (puntos grises), los fenómenos físicos que atraviesan nuestra frontera, pasarán como si tuvieramos más dominio hacia afuera y una vez que salgan perderemos información sobre esta.



(a) onda expandiéndose antes de cruzar la frontera (b) onda expandiéndose después de cruzar la frontera

Figura B.2: Al pasar la onda nuestra frontera, esta sigue su trayecto normal como si el dominio fuera infinito

Las ecuaciones que obedece nuestra frontera son las siguientes:

$$\mathbf{U}(0, j) = \mathbf{U}(1, j) \quad (B.1)$$

$$\mathbf{U}(n+1, j) = \mathbf{U}(n, j) \quad (B.2)$$

$$\mathbf{U}(i, 0) = \mathbf{U}(i, 1) \quad (B.3)$$

$$\mathbf{U}(i, m+1) = \mathbf{U}(i, m) \quad (B.4)$$

Donde $i, j \leq n, m \in \mathbb{N}$

B.0.2. Condiciones de frontera *reflexión*

Las condiciones de reflexión funcionan como una pared en la que no se le permite al fenómeno físico escapar y al toparse con estas fronteras se reflejarán. Los valores que tendrán los puntos negros, serán los valores negativos de los puntos grises.

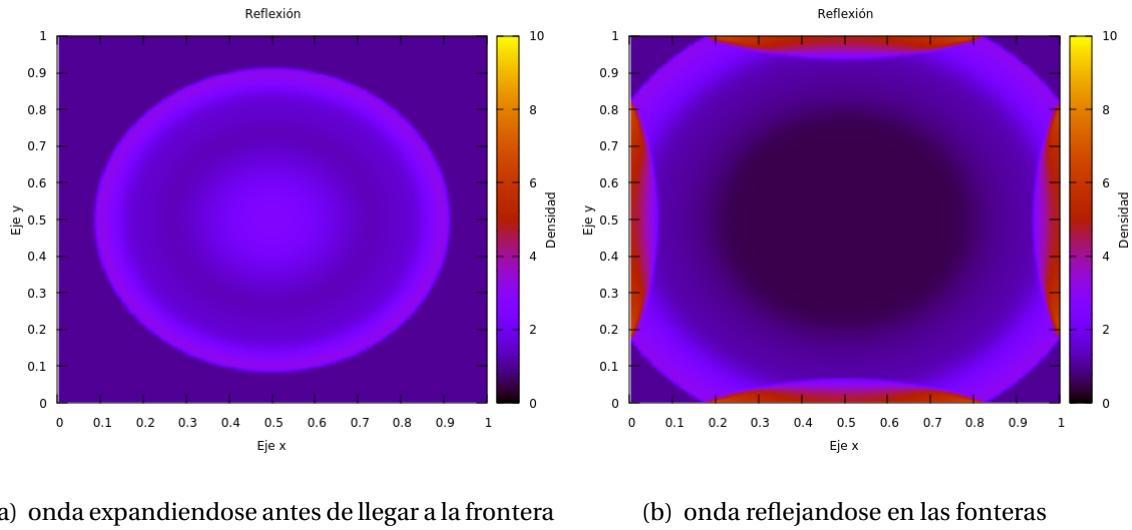


Figura B.3: Al llegar la frontera la onda se reflejará y chocará con la misma

Las ecuaciones que obedece nuestra frontera son las siguientes:

$$\mathbf{U}(0, j) = -\mathbf{U}(1, j) \quad (\text{B.5})$$

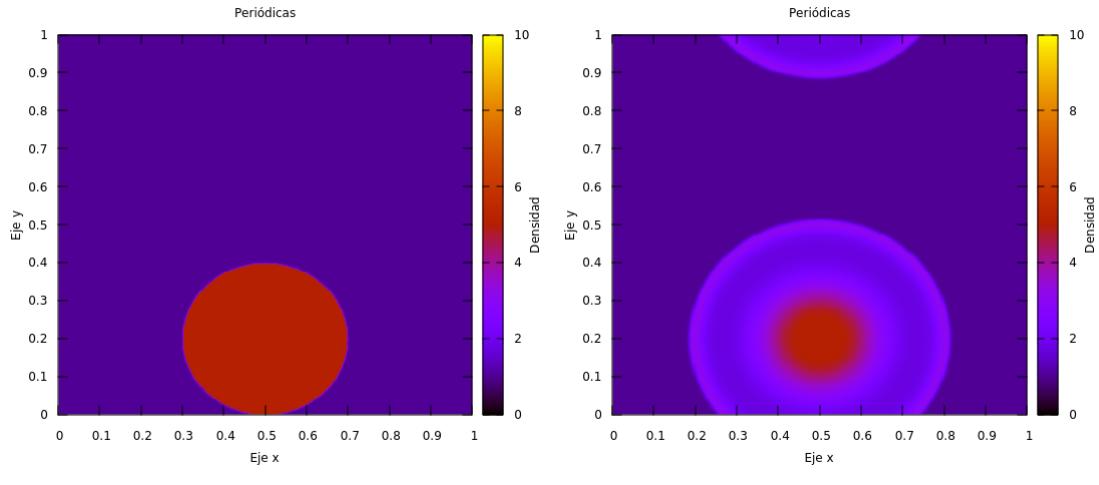
$$\mathbf{U}(n + 1, j) = -\mathbf{U}(n, j) \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{U}(i, 0) = -\mathbf{U}(i, 1) \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{U}(i, m + 1) = -\mathbf{U}(i, m) \quad (\text{B.8})$$

B.0.3. Condiciones de frontera *Periódicas*

Las condiciones periódicas son cuando nuestra frontera fantasma toma los valores de la frontera opuesta del lado que estan, es decir, si un fenómeno físico pasa a través de la parte de arriba de nuestro dominio (ver figura B.5), este, saldrá por la parte de abajo y viceversa, lo mismo aplica para los fenómenos pasen por la parte izquierda o derecha de nuestro dominio.



(a) Onda antes de tocar la frontera de abajo (b) La onda pasa la frontera de abajo y sale por la parte de arriba

Figura B.4: Al llegar la onda abajo se puede ver que se transporta al lado de arriba, se eligió esa posición de la onda, solo para resaltar la periodicidad de la onda, ya que si se hubiera puesto en el centro, la onda chocaría contra si mismo y no podríamos ver el paso de la onda.

Las ecuaciones que representan este tipo de frontera son las siguientes:

$$\mathbf{U}(0, j) = \mathbf{U}(n, j) \quad (B.9)$$

$$\mathbf{U}(n+1, j) = \mathbf{U}(1, j) \quad (B.10)$$

$$\mathbf{U}(i, 0) = \mathbf{U}(i, m) \quad (B.11)$$

$$\mathbf{U}(i, m+1) = \mathbf{U}(i, 1) \quad (B.12)$$

B.0.4. Condiciones de frontera *Jet*

Las condiciones de tipo jet, son en las que dado un lado de nuestra frontera (pueden ser varios), se va a inyectar un energía y masa a una cierta velocidad constante todo el tiempo en una de las partes de la frontera.

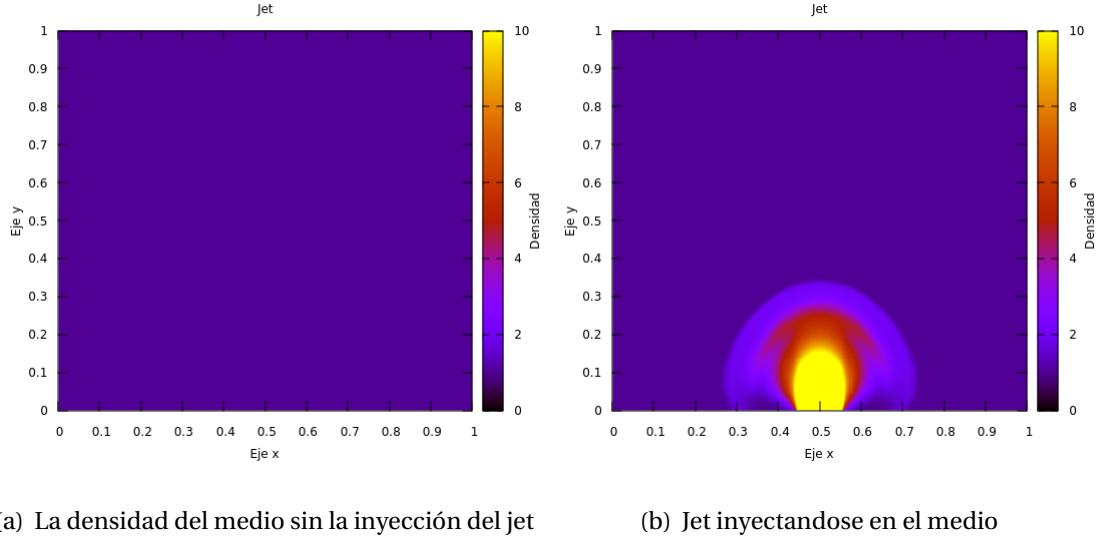


Figura B.5: El jet, es basicamente inyectar masa y energía en una parte de nuestra frontera, a cada tiempo que evoluciona.

Para obtener las ecuaciones de esta frontera, igualamos los valores de la frontera *fantasma* con las variables primitivas de nuestro jet, las siguientes ecuaciones son para la parte de abajo de nuestro dominio.

No relativista

$$\mathbf{U}(1, 0, j) = \rho_{jet} \quad (B.13)$$

$$\mathbf{U}(2, 0, j) = \rho_{jet} v_{x_{jet}} \quad (B.14)$$

$$\mathbf{U}(3, 0, j) = \rho_{jet} v_{y_{jet}} \quad (B.15)$$

$$\mathbf{U}(4, 0, j) = E_{jet} \quad (B.16)$$

Relativista

$$\mathbf{U}(1, 0, j) = \rho_{jet} \gamma \quad (B.17)$$

$$\mathbf{U}(2, 0, j) = \rho_{jet} v_{x_{jet}} \gamma^2 h \quad (B.18)$$

$$\mathbf{U}(3, 0, j) = \rho_{jet} v_{y_{jet}} \gamma^2 h \quad (B.19)$$

$$\mathbf{U}(4, 0, j) = \rho_{jet} \gamma^2 h - P \quad (B.20)$$

donde $j \in [a, b]$ y $a \geq 0, b \leq n + 1$. Los puntos de la frontera que no sean del jet se pueden combinar con los 3 tipos de frontera mencionados anteriormente.

Apéndice C

Condiciones de Rankine-Hugoniot no relativistas

Las ecuaciones de Rankine-Hugoniot parten de las ecuaciones de la hidrodinámica considerando un sistema cerrado usando las ecuaciones 2.4, 2.5 y 2.6 donde no varia con el tiempo, es decir, que $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, con lo que se pueden reescribir de la siguiente manera:

La conservación de masa

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{C.1})$$

El momento

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \nabla p = 0 \quad (\text{C.2})$$

Ecuación de la energía

$$\nabla \cdot [\mathbf{u} (E + P)] = 0 \quad (\text{C.3})$$

Considerando una dimensión:

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{d(\rho u^2)}{dx} + \frac{dP}{dx} = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{d(u [E + P])}{dx} = 0 \quad (\text{C.6})$$

Si integramos, las ecuaciones se van a igualar a constantes y podemos reescribir las ecuaciones del siguiente modo usando la ecuación de estado $E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{P}{\Gamma-1}$ donde $E \left[\frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}^2} \right]$ es la densidad de energía por unidad de volumen

$$\rho_j u_j = \rho_m u_m \quad (\text{C.7})$$

$$\rho_j u_j^2 + P_j = \rho_m u_m^2 + P_m \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{1}{2} u_j^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{P_j}{\rho_j} = \frac{1}{2} u_m^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{P_m}{\rho_m} \quad (\text{C.9})$$

Donde $\rho \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right]$ representa la densidad, $u \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$ la velocidad, $P \left[\frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}} \right]$ la presión, Γ el índice adiabático adimensional donde para velocidades ultrarelativistas $\Gamma = 4/3$ y para no relativistas $\Gamma = 5/3$

y los índices j, m que relacionan a las propiedades del jet y del medio respectivamente. Usando la ecuación C.7, podemos definir el flujo como $j \equiv \rho_j u_j = \rho_m u_m$, sustituyendo en la ecuación C.8 podemos reescribirla como:

$$P_j + \frac{j^2}{\rho_j} = P_m + \frac{j^2}{\rho_m} \quad (\text{C.10})$$

y la ecuación C.9 llegamos a:

$$\frac{1}{2} \frac{j^2}{\rho_j^2} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{P_j}{\rho_j} = \frac{1}{2} \frac{j^2}{\rho_m^2} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{P_m}{\rho_m} \quad (\text{C.11})$$

Despejando j de la ecuación C.10 obtenemos:

$$-j^2 = \frac{P_j - P_m}{\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_j}} \quad (\text{C.12})$$

Ahora sustituyendo la ecuación en C.12 en C.11 obtenemos:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{P_m - P_j}{\frac{1}{\rho_j} - \frac{1}{\rho_m}} \right) \left(\frac{1}{\rho_j^2} - \frac{1}{\rho_m^2} \right) = \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \left(\frac{P_m}{\rho_m} - \frac{P_j}{\rho_j} \right)$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{2} (P_m - P_j) \left(\frac{1}{\rho_j} + \frac{1}{\rho_m} \right) = \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \left(\frac{P_m}{\rho_m} - \frac{P_j}{\rho_j} \right)$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{\rho_m} \left(\frac{1}{2} P_m - \frac{1}{2} P_j - \frac{\Gamma}{\Gamma-1} P_m \right) = \frac{1}{\rho_j} \left(\frac{1}{2} P_j - \frac{1}{2} P_m - \frac{\Gamma}{\Gamma-1} P_j \right)$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{\rho_m} \left[\left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma-1} \right) P_m + P_j \right] = \frac{1}{\rho_j} \left[\left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma-1} \right) P_j + P_m \right]$$

Con lo que nos queda:

$$\frac{\rho_m}{\rho_j} = \frac{(\Gamma+1)P_m + (\Gamma-1)P_j}{(\Gamma+1)P_j + (\Gamma-1)P_m} = \frac{u_j}{u_m} \quad (\text{C.13})$$

Si consideramos choque fuerte, es decir, $P_j \gg P_m$, implicaría que $P_m \approx 0$, por lo que

$$\rho_j = \frac{\Gamma+1}{\Gamma-1} \rho_m \quad (\text{C.14})$$

Tomando a $\Gamma = 5/3$ da

$$\rho_j = 4\rho_m \quad (\text{C.15})$$

$$u_j = \frac{1}{4} u_m \quad (\text{C.16})$$

$$P_j = \frac{3}{4} \rho_m u_m^2 \quad (\text{C.17})$$

Apéndice D

Condiciones de Rankine-Hugoniot relativistas

Para poder encontrar las relaciones de Rankine-Hugoniot, usaremos la siguiente ecuación de estado:

$$\Gamma = 1 + \frac{P}{\rho\epsilon} \quad (\text{D.1})$$

Donde $\epsilon \left[\frac{\text{s}^2}{\text{cm}^2} \right]$ es la energía interna del sistema

Ecuación de conservación de número de partículas o de masa:

$$n_j u_j = n_m u_m \quad (\text{D.2})$$

Donde $n \left[\text{cm}^{-3} \right]$ es la densidad del número de partículas y u es la cuadrivelocidad donde $u = \beta\gamma$, teniendo en cuenta que $\beta = \frac{v}{c}$ y $\gamma = (1 - \beta)^{-1/2}$ es el factor de lorentz.

Ecuación de momento:

$$\omega_j u_j^2 + P_j = \omega_m u_m^2 + P_m \quad (\text{D.3})$$

Donde $\omega = e + P$ es la entalpia específica por unidad de volumen, donde e es la densidad de energía interna, usando la ecuación D.1 que puede ser escrita como:

$$e = \rho (c^2 + \epsilon) = nm_0 c^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} P \quad (\text{D.4})$$

Donde m_0 es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz

Ecuación de la Energía

$$\omega_j \gamma_j u_j = \omega_m \gamma_m u_m \quad (\text{D.5})$$

Definiendo una nueva variable $x = \frac{\omega}{n^2}$ y usando la ecuación D.2 tenemos $\bar{j} = n_j u_j = n_m u_m$, por lo que usando la ecuación D.3 la podemos escribir como:

$$n_j^2 x_j u_j^2 + P_j = n_m^2 x_m u_m^2 + P_m$$

\Rightarrow

$$x_j \bar{j}^2 + P_j = x_m \bar{j}^2 + P_m \quad (\text{D.6})$$

Con lo que al final nos queda:

$$-\bar{j}^2 = \frac{P_m - P_j}{x_m - x_j} \quad (\text{D.7})$$

Ahora usando la ecuación D.5 podemos reescribirla como:

$$\frac{\omega_j}{n_j} \gamma_j \bar{j} = \frac{\omega_m}{n_m} \gamma_m \bar{j}$$

\Rightarrow

$$\frac{\omega_m^2}{n_j^2} \gamma_m^2 - \frac{\omega_m^2}{n_j^2} \gamma_j^2 = 0 \quad (\text{D.8})$$

La ecuación D.8 la usaremos mas tarde, ahora volviendo a D.7 la podemos multiplicar por $x_m^2 - x_j^2$ queda lo siguiente:

$$-\left(x_m^2 \bar{j}^2 - x_j^2 \bar{j}^2\right) = \frac{P_m - P_j}{x_m - x_j} (x_m - x_j)(x_m + x_j)$$

\Rightarrow

$$-x_m^2 u_m^2 n_m^2 + x_j^2 u_j^2 n_j^2 = (P_m - P_j)(x_m + x_j) \quad (\text{D.9})$$

restando la ecuación D.8 de la D.9

$$-\left(\frac{\omega_m}{n_m^2}\right)^2 u_m^2 n_m^2 + \left(\frac{\omega_j}{n_j^2}\right)^2 u_j^2 n_j^2 - \frac{\omega_m^2}{n_j^2} \gamma_m^2 + \frac{\omega_m^2}{n_j^2} \gamma_j^2 = (P_m - P_j)(x_m + x_j) \quad (\text{D.10})$$

\Rightarrow

$$-\frac{\omega_m}{n_m^2} (u_m^2 - \gamma_m^2) + \frac{\omega_j}{n_j^2} (u_j^2 - \gamma_j^2) = (P_m - P_j)(x_m + x_j) \quad (\text{D.11})$$

Sabemos que:

$$u = \beta \gamma \quad (\text{D.12})$$

\Rightarrow

$$u^2 = \beta^2 \gamma^2 \quad (\text{D.13})$$

\Rightarrow

$$u^2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \quad (\text{D.14})$$

\Rightarrow

$$u^2 - \gamma^2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} - \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (\text{D.15})$$

Entonces al final:

$$u^2 - \gamma^2 = -1 \quad (\text{D.16})$$

Sustituyendo la ecuación D.16 a la D.8 nos queda:

$$x_m \omega_m - x_j \omega_j = (P_m - P_j)(x_m + x_j) \quad (\text{D.17})$$

Podemos reescribir a x usando la ecuación como D.4 como:

$$x = \frac{m_0^2 c^2}{\rho} + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{m_0^2 P}{\rho^2} \quad (\text{D.18})$$

Sustituyendo la ecuación D.18 en D.7

$$-\bar{j}^2 = (x_m - x_j) = P_m - P_j \quad (\text{D.19})$$

\Rightarrow

$$-n_j^2 u_j^2 \left(\frac{m_0^2 c^2}{\rho_m} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{m_0^2 P_m}{\rho_m^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\rho_j} - \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{m_0^2 P_j}{\rho_j^2} \right) = P_m - P_j \quad (\text{D.20})$$

\Rightarrow

$$-n_j^2 u_j^2 \left[m_0^2 c^2 \left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_j} \right) + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} m_0^2 \left(\frac{P_m}{\rho_m^2} - \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \right] = P_m - P_j \quad (\text{D.21})$$

\Rightarrow

$$-u_j^2 \left[\rho_j^2 c^2 \left(\frac{\rho_j}{\rho_m} - 1 \right) + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \left(P_m \frac{\rho_j^2}{\rho_m^2} - P_j \right) \right] = P_m - P_j \quad (\text{D.22})$$

\Rightarrow

$$-u_j^2 \left[\frac{\rho_j^2 c^2}{P_j} \left(\frac{\rho_j}{\rho_m} - 1 \right) + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \left(\frac{P_m}{P_j} \frac{\rho_j^2}{\rho_m^2} - 1 \right) \right] = \frac{P_m}{P_j} - 1 \quad (\text{D.23})$$

Sabemos que $V = \frac{m_0}{\rho}$ y e introduciendo la siguiente notación $\hat{P} = P_m/P_j$, $\hat{V} = V_m/V_j = \rho_j/\rho_m$ y $\hat{c} = \frac{c}{\sqrt{P_j V_j}}$ llegamos a la relación de Rayleigh

$$-u_j^2 \left[\hat{c} (\hat{V} - 1) + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} (\hat{P} \hat{V}^2 - 1) \right] = \hat{P} - 1 \quad (\text{D.24})$$

Para obtener la ecuación de Rankine-Hugoniot vamos a sustituir la ecuación D.18 en D.17 y obtenemos la siguiente ecuación

$$\underbrace{\left(\frac{m_0^2 c^2}{\rho_m} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{m_0^2 P_m}{\rho_m^2} \right)}_{x_m} \underbrace{\left(n_m m_0 c^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} P_m \right)}_{w_m} - \underbrace{\left(\frac{m_0^2 c^2}{\rho_j} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{m_0^2 P_j}{\rho_j^2} \right)}_{x_j} \underbrace{\left(n_j m_0 c^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} P_j \right)}_{w_j} = \\ (P_m - P_j) \underbrace{\left(\frac{m_0^2 c^2}{\rho_m} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} m_0^2 P_m \rho_m^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\rho_j} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{m_0^2 P_j}{\rho_j^2} \right)}_{x_m} \quad (\text{D.25})$$

Ahora, la ecuación D.25 la vamos a desarrollar por pasos: primero, vamos a tomar el lado izquierdo de esta ecuación, con lo que nos va a quedar lo siguiente.

$$\frac{m_0^2 c^4}{\rho_m} \rho_m + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{m_0^2 c^2}{\rho_m} P_m + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{m_0^2 c^2}{\rho_m^2} P_m \rho_m + \left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right)^2 \left(\frac{m_0^2}{\rho_m^2} P_m^2 \right) - \\ \frac{m_0^2 c^4}{\rho_j} \rho_j - \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{m_0^2 c^2}{\rho_j} P_j - \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{m_0^2 c^2}{\rho_j^2} P_j \rho_j - \left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right)^2 \left(\frac{m_0^2}{\rho_j^2} P_j^2 \right) \quad (\text{D.26})$$

Ahora, desarrollando la parte derecha de la ecuación D.25 obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} & \frac{m_0^2 c^2 P_m}{\rho_m} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{m_0^2 P_m^2}{\rho_m^2} + \frac{m_0^2 c^2 P_m}{\rho_j} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} m_0^2 P_m \frac{P_j}{\rho_j^2} \\ & \frac{m_0^2 c^2 P_j}{\rho_m} - \frac{\Gamma}{\Gamma-1} m_0^2 P_m \frac{P_j}{\rho_m^2} - m_0^2 c^2 \frac{P_j}{\rho_j} - \left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \left(\frac{m_0^2}{\rho_j^2} P_j^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Si sumamos únicamente los términos que contengan en factor c^2 de las ecuaciones D.26 y D.27 llegamos a

$$m_0^2 c^2 \left[\left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \left(\frac{P_m}{\rho_m} \right) + \left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \left(\frac{P_m}{\rho_m} \right) - \left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \left(\frac{P_j}{\rho_j} \right) - \left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \left(\frac{P_j}{\rho_j} \right) - \left(\frac{P_m}{\rho_m} \right) - \left(\frac{P_m}{\rho_j} \right) - \left(\frac{P_j}{\rho_m} \right) - \left(\frac{P_j}{\rho_j} \right) \right]$$

Entonces

$$m_0^2 c^2 \left[\left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma-1} \right) \left(\frac{P_m}{\rho_m} - \frac{P_j}{\rho_j} \right) - \left(\frac{P_m}{\rho_j} - \frac{P_j}{\rho_m} \right) \right] \quad (\text{D.28})$$

Tomando ahora todos los términos de las ecuaciones D.26 y D.27 que no contengan el factor c^2 , podemos llegar a la siguiente ecuación

$$m_0^2 \left[- \left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right)^2 \left(\frac{P_m}{\rho_m} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right)^2 \left(\frac{P_j}{\rho_j} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \left(\frac{P_m}{\rho_m} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) P_m \frac{P_j}{\rho_j^2} - \left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) P_j \left(\frac{P_m}{\rho_m^2} \right) - \left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \left(\frac{P_j}{\rho_j} \right)^2 \right]$$

Entonces

$$m_0^2 \left[\left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) P_m P_j \left(\frac{1}{\rho_j^2} - \frac{1}{\rho_m^2} \right) - \left(\frac{P_m}{\rho_m} \right)^2 \left(\frac{\Gamma^2}{(\Gamma-1)^2} - \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) + \left(\frac{P_j}{\rho_j} \right)^2 \left(\frac{\Gamma^2}{(\Gamma-1)^2} - \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \right]$$

Entonces

$$m_0^2 \left[\left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) P_m P_j \left(\frac{1}{\rho_j^2} - \frac{1}{\rho_m^2} \right) - \frac{\Gamma}{(\Gamma-1)^2} \left[\left(\frac{P_m}{\rho_m} \right)^2 - \left(\frac{P_j}{\rho_j} \right)^2 \right] \right] \quad (\text{D.29})$$

Al igualar las ecuaciones D.28 y D.29 obtenemos una versión más simplificada de la ecuación D.25, con lo que nos queda.

$$\begin{aligned} & c^2 \left[\left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma-1} \right) \left(\frac{P_m}{\rho_m} - \frac{P_j}{\rho_j} \right) - \left(\frac{P_m}{\rho_j} - \frac{P_j}{\rho_m} \right) \right] \\ & = \left[\left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) P_m P_j \left(\frac{1}{\rho_j^2} - \frac{1}{\rho_m^2} \right) - \frac{\Gamma}{(\Gamma-1)^2} \left[\left(\frac{P_m}{\rho_m} \right)^2 - \left(\frac{P_j}{\rho_j} \right)^2 \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

Multiplicando por $\left(\frac{\rho_j}{P_j} \right)^2$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_j}{P_j} c^2 \left[\left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma-1} \right) \left(\frac{P_m}{P_j} \frac{\rho_j}{\rho_m} - 1 \right) - \left(\frac{P_m}{P_j} - \frac{\rho_1}{\rho_m} \right) \right] \\ & = \left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \frac{P_m}{P_j} \left(1 - \frac{\rho_j^2}{\rho_m^2} \right) - \frac{\Gamma}{(\Gamma-1)^2} \left[\left(\frac{P_m}{P_j} \frac{\rho_j}{\rho_m} \right)^2 - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

Con lo que al final nos queda.

$$\hat{c}^2 \left[\left(\frac{\Gamma + 1}{\Gamma - 1} \right) (\hat{P} \hat{V} - 1) - (\hat{P} - \hat{V}) \right] = \left(\frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \right) \hat{P} (1 - \hat{V}^2) - \frac{\Gamma}{(\Gamma - 1)^2} [\hat{p}^2 \hat{V}^2 - 1] \quad (\text{D.32})$$

Si tomamos el límite no relativista, es decir, que $\hat{c} \rightarrow \infty$, el lado derecho de la ecuación desaparece y nos queda.

$$(\Gamma + 1) \hat{P} \hat{V} - (\Gamma + 1) = (\Gamma - 1) \hat{P} - (\Gamma - 1) \hat{V}$$

Entonces

$$(\Gamma + 1) \hat{P} \hat{V} + (\Gamma - 1) \hat{V} = (\Gamma + 1) + (\Gamma - 1) \hat{P}$$

Entonces

$$\hat{V}[(\Gamma + 1) \hat{P} + (\Gamma - 1)] = (\Gamma + 1) + (\Gamma - 1) \hat{P}$$

Entonces

$$\hat{V} = \frac{(\Gamma + 1) + (\Gamma - 1) \hat{P}}{(\Gamma + 1) \hat{P} + (\Gamma - 1)} \quad (\text{D.33})$$

Con lo que volvemos a la ecuación C.13

Apéndice E

Velocidad de los métodos numéricos

Esto está en construcción

Bibliografía

- [1] E. Berger, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **52**, 43 (2014) doi:10.1146/annurev-astro-081913-035926 [arXiv:1311.2603 [astro-ph.HE]].