Esercizio: generare N numeri casuali con distribuzione

di probabilita' *parabolica*

Derivazione di una qualunque distribuzione di probabilita' con funzione di distribuzione invertibile, a partire dalla distribuzione uniforme

La legge fondamentale di trasformazione delle probabilita' e'

$$|f(x)dx| = |g(y)dy| \qquad (1)$$

dove i numeri casuali *x* sono distribuiti secondo *f(x)* ed i numeri casuali *y* secondo *g(y)*. Da cui,

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \qquad (2)$$

Ovvero, per trovare numeri *y* distribuiti con *g(y)* occorre identificare l'appropriato cambio di variabile.

Utilizzando come partenza la distribuzione di probabilita' (pdf, probability distribution function) uniforme, la procedura e' la seguente.

La distribuzione di probabilita' uniforme e' *f(x)dx=dx* per *0<x<1*, 0 altrimenti, ed ha funzione di distribuzione

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = x \qquad (3)$$

Sia *g(y)* la pdf desiderata, ad esempio, $g(y)dy = e^{-y}dy$

Allora la sua funzione di distribuzione sara':

$$G(y) = \int_0^y e^{-x} dx = -e^{-x} \qquad (4)$$

A questo punto, se esiste la funzione inversa di *G(y):*

$$G^{-1}(x) = -\log x \qquad (5)$$

La trasformazione di variabile desiderata sara' semplicemente

$$y = G^{-1}(x) \qquad (6)$$

Ovvero in questo caso:

$$y = -\log x \qquad (7)$$

La regola e' semplice da ricavare. Ricordando che la funzione inversa di una funzione data e' quella per la quale vale:

$$H^{-1}[H(x)] = x \qquad (8)$$

Dalla (1) otteniamo, integrando, che *F(x)=G(y)*. Ma

$$G^{-1}[F(x)] = G^{-1}[G(y)] = y \qquad (9)$$

E ricordando che *F(x)=x*, si ottiene la (6).

Esercizi

- Scrivere un codice che estrae N numeri casuali y, distribuiti secondo una funzione *parabolica* tra 0 ed 1:

$$g(y) = ay^2 \qquad (10)$$

Come potete verificare che la distribuzione delle *y* sia quella desiderata?

Una pdf deve essere normalizzata ad uno. Come si ottiene tale risultato? Che conseguenze ha la normalizzazione sul coefficiente *a*?

- Calcolare il valore di π usando numeri casuali distribuiti in modo uniforme nel quadrato *{x,y}* ∈ *{(0,1), (0,1)}*. Quale sara' la precisione in funzione di N?

- Generare una distribuzione uniforme di punti in un cerchio di raggio R. Si ricordi che l'area del cerchio e':

$$\int_{o}^{R}\int_{0}^{2\pi} r dr d\varphi \qquad (11)$$

Come dovranno essere distribuiti *r*, φ ?

Una volta generata la distribuzione, si salvi il risultato in un file di testo e si provveda a fare un grafico del cerchio ottenuto.