Exploración de la simulación de péndulos en vpython

Laura Viviana Alfonso Díaz, Gabriel Muriel, Julian David Osorio Carrillo, Felipe Ospina Suarez, Carolina Valenzuela
Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C.

(Dated: Noviembre 2020)

En este primer proyecto de la clase de "Programación e introducción a los métodos numéricos", se pretende ahondar en el estudio del movimiento oscilatorio del péndulo generando un camino constructivo desde el movimiento fundamental del oscilador armónico por medio de simulaciones, utilizando el lenguaje de Python. Se han empleado diversas herramientas, tanto de librerías ya desarrolladas de este mismo lenguaje como diferentes modelos matemáticos y gráficas, para así tener la capacidad de comprobar la dificultad que puede llegar a tener el movimiento de los péndulos.

I. INTRODUCCIÓN

Instrucciones de instalación

Todas las simulaciones se han llevado a cabo con el uso de la librería *vpython*, y algunas de las mismas necesitan de *math* y *matplotlib*, así que se recomienda el descargar estas librerías a *cmd*.

Instrucciones de uso

En Ïmplementación.py"se encontrarán todas las simulaciones creadas, en donde el usuario tendrá la opción de escoger el tipo de péndulo que desea simular y así mismo, la libertad de ingresar las condiciones iniciales que desee (sin embargo, los parámetros son opcionales, cada variable ya posee valores por defecto El usuario tiene la capacidad de simular tanto péndulos simples, como péndulos dobles y/o complejos para esto debe seguir los siguientes pasos:

- Si se desea simular un péndulo simple el usuario tendrá que:
  1. Ingresar el comando "s".
  2. Seleccionar si quiere que este sea péndulo simple libre (con el comando "Libre"), péndulo simple amortiguado (con el comando "Amortiguado") o péndulo simple forzado (con el comando "Forzado").
  3. Determinar los parámetros del sistema según la elección previa.
- Si se desea simular péndulos acoplados el usuario tendrá que:
  1. Ingresar el comando "a".
  2. Si se desea simular un sistema de péndulos acoplados simple:
     a) Responder a la pregunta con el comando "Libre".
     b) Elegir si desea que su acople sea por medio de una "Vara rígida" o un "Resorte" (tal como se encuentra dentro de las comillas).
     c) Asignar los parámetros correspondientes.
  3. Si se desea simular un péndulo acoplado amortiguado, tendrá que elegir "Amortiguado" y si este quiere que sea péndulo acoplado forzado, se tendrá que elegir "Forzado" y asignar los parámetros correspondientes.
- Finalmente el usuario también puede escoger "Doble"para simular un péndulo doble, asignando las condiciones iniciales correspondientes.

II. MARCO TEÓRICO

A. Péndulo simple

El modelo del péndulo simple esta compuesto por una masa puntual m suspendida de una varilla o cuerda fija (cualesquiera que sea se suponen con condiciones ideales) en uno de sus extremos. Es la primera aproximación del estudio del oscilador armónico en donde solo se hacen relevantes las fuerzas de la tensión ejercida por la cuerda o varilla y el peso (mg). Se ignora la fuerza de fricción y el efecto de retardo entre todos los puntos de la cuerda se ha de considerar mínimo, tampoco se considera ninguna fuerza ficticia cmo las debidas a la rotación de la tierra. Una de las maneras de expresar su movimiento es:

$$\theta(t) = Ae^{iw_0 t} + Be^{-iw_0 t} \tag{1}$$

En donde se representa una oscilación armónica de frecuencia angular o también llamada frecuencia natural w_0. Sea l la longitud del pivote y g la gravedad, la frecuencia esta definida como:

$$w_0^2 = \frac{g}{l} \tag{2}$$

Esta ecuación también puede expresarse en función de la coordenada horizontal x usando la aproximación:

$$x = l\sin(\theta) \approx l\theta \tag{3}$$

de la siguiente manera:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{g}{l}x(t) \tag{4}$$

B. Péndulo simple amortiguado

Nuestro día a día es lo único que necesitamos para reconocer que nuestra primera simulación posee un movimiento falso, puesto que si se hace un experimento de un oscilador, este eventualmente se dentendrá. Para reconocer este amortiguamiento basta adicionar un término en las ecuaciones de movimiento, el cuál puede ser expresado por la siguiente ecuación:

$$F_{fr} = -bv \tag{5}$$

Donde b es una constante cualesquiera y v es la velocidad de la masa m. Con está consideración la ecuación del movimiento del péndulo estará descrita como:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}x(t) - \frac{b}{m}\dot{\theta}(t) \tag{6}$$

Entonces, el movimiento del péndulo puede ser expresado por una ecuación diferencial ordinaria, linea homogénea de segundo orden respecto al tiempo, con dos soluciones. Se pueden presentar tres casos:

- Sobreamortiguamiento : Cuando la fricción domina el movimiento.
- Amortiguamiento crítico : El sistema no oscila cuando la fricción se contrarresta.
- Amortiguamiento débil : El sistema oscila libremente con una fuerza de fricción que detiene paulatinamente su movimiento.

C. Péndulo simple amortiguado y forzado

Si se considera una fuerza externa, es relativamente sencillo el incorporar este nuevo término en la ecuación (). De esta manera, la ecuación de movimiento que define el movimiento es:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}x(t) - \frac{b}{m}\dot{\theta}(t) + \frac{F(t)}{ml} \tag{7}$$

Al resolver la ecuación, se encuentra que la solución homogénea de la misma de la solución general decae exponencialmente con una rapidez que depender del parámetro, así que después de un tiempo transcurriedo, la amplitud de la oscilación se ha amortiguado de manera considerable. Es decir que las condiciones iniciales no son tan importantes en esta simulación, pues siempre el péndulo sin importar sus características iniciales, llegará a un estado estacionario idéntico.

D. Sistema libre de dos osciladores acoplados no amortiguados

Sea un sistema de dos masas iguales, las cuales en equilibrio se encuentran a una distancia determinada ya sea por un resorte o una barra rígida. Con la aproximación para ángulos muy pequeños, las ecuaciones de movimiento para un sistema acoplado se pueden escribir como:

$$\ddot{x}_1 + w_0^2 x_1 + w_c^2(x_1 - x_2) = 0 \tag{8}$$

$$\ddot{x}_2 + w_0^2 x_2 + w_c^2(x_1 - x_2) = 0 \tag{9}$$

Donde

$$w_0^2 = \frac{g}{l} \tag{10}$$

$$y w_c^2 = \frac{k_c}{m} \tag{11}$$

con k_c como constante del resorte

Al resolver el sistema de forma general, nos damos cuenta que efectivamente el péndulo 1 depende del segundo e inversa. El sistema de péndulos acoplado libres se puede resolver por medio de dos modelos matemáticos, uno de ellos utiliza conceptos de Mecánica Newtoniana y expresa el movimiento en función del ángulo que describe el movimiento de los péndulos.Entonces, sea α la posición de cada péndulo, l la longitud de cada pivote, y θ el ángulo inicial, el movimiento puede ser expresado como:

$$\alpha_1 = \frac{-1}{(2l_p) + l_o}(l_o\alpha_2 + 2g\theta_1) \tag{12}$$

$$\alpha_2 = \frac{-1}{(2l_p) + l_o}(l_o\alpha_1 + 2g\theta_2) \tag{13}$$

E. Sistema libre de dos osciladores acoplados amortiguados

La única diferencia con respectoa los sistemas no amortiguados reside en que las coordenadas normales satisfacen ahora ecuaciones del oscilador simple amortiguado. Entonces, al resolver el sistema de ecuaciones de movimiento, se logra llegar a la expresión de la aceleración de cada uno de los péndulos, las cuales regiran el movimiento. Estas están expresadas como:

$$a_1 = \frac{-1}{(2l_p) + l_o}(l_o a_2 + \gamma)(\frac{-1}{(2l_p) + l_o}\omega_1 + l_o\omega_2 + 2g\theta_1) \tag{14}$$

$$a_2 = \frac{-1}{(2l_p) + l_o}(l_o a_1 + \gamma)(\frac{-1}{(2l_p) + l_o}\omega_2 + l_o\omega_1 + 2g\theta_2) \tag{15}$$

Donde γ es el coeficiente de decaimiento, ω las velocidades angulares iniciales correspondientes. Y de una manera análoga al sistema acoplado sin amortiguamiento, se describe la trayectoria del sistema acoplado amortiguado.

III. CONCLUSIONES

- La simulacion más simple del péndulo predice la existencia de un movimiento perpetuo y rigurosamente periódico.
- Una oscilación amortiguada no es un movimiento armónico, ni siquiera periódico y eso se puede observar en la gráfica de la simulación realizada.
- Si en la simulación del péndulo simple forzado, el pivote se desea cambiar de material, esta diferencia no tendrá repercusiones al graficar el movimiento del mismo. Sin embargo, sí es notorio en la imagen realizada.
- El movimiento de los dos osciladores acoplados no será armónico a menos que se excite adecuadamente.
- Al describir la trayectoria de los sistemas acoplados no amortiguados y amortiguados, se hace notoria la dependendencia de esta a la altura de la varilla o resorte de acople, siendo inversamente proporcional a la frecuenca de oscilación.

[1] Guerrero, A. Oscilaciones y Ondas.(2005) Universidad Nacional de Colombia. Bogotá D.C.