ΤΗΛ301: ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ

1η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

Λαζαρίδης Κωνσταντίνος 2016030102

Νίκου Γεώργιος Νεκτάριος 2016030125

Περιεχόμενα

Άσκηση 1

Ερώτημα 1.A

Από το σχήμα προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς είναι :

$$H(z) = G_1(z) \cdot G_2(z)$$

Γνωρίζουμε από την εκφώνηση ότι :

$$G_2(z) = \frac{1}{(z + 0.2)} \quad (1)$$

Για να βρούμε την συνάρτηση μεταφοράς πρέπει να υπολογίσουμε την $G_1(z)$. Γνωρίζοντας ότι :

$$k(n) = 0.9 \cdot k(n-1) + 0.2 \cdot x(n)$$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Z προκύπτει :

$$K(z) = 0.9 \cdot z^{-1} \cdot K(z) + 0.2 \cdot X(z) =>$$

$$=> 0.2 \cdot X(z) = K(z) - 0.9 \cdot z^{-1} \cdot K(z) =>$$

$$=> 0.2 \cdot X(z) = K(z)(1 - 0.9 \cdot z^{-1}) =>$$

$$=> \frac{K(z)}{X(z)} = \frac{0.2}{(1 - 0.9 \cdot z^{-1})} \quad (2)$$

Από το σχήμα γνωρίζουμε ότι :

$$G_1(z) = \frac{K(z)}{X(z)}$$

Αντικαθιστώντας με την σχέση (2) υπολογίζετε η $G_1(z)$:

$$G_1(z) = \frac{0.2}{(1 - 0.9 \cdot z^{-1})} \quad =>$$

$$=> G_1(z) = \frac{0.2 \cdot z}{(z - 0.9)} \quad (3)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την (1) με την (3)

$$H(z) = \frac{0.2 \cdot z}{(z + 0.2)(z - 0.9)} \quad =>$$

$$=> H(z) = \frac{0.2 \cdot z}{z^2 - 0.7 \cdot z - 0.18}$$

Για την εύρεση της εξίσωσης διαφορών πρέπει να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς σε αναλυτική έκφραση:

$$H(z) = \frac{0.2 \cdot z}{(z+0.2)(z-0.9)} =>$$

$$=> H(z) = z \cdot \left(\frac{A}{(z-0.9)} + \frac{B}{(z+0.2)}\right) =>$$

$$=> H(z) = z \cdot \left(\frac{A \cdot (z+0.2) + B \cdot (z-0.9)}{(z-0.9)(z+0.2)}\right) =>$$

$$=> H(z) = z \cdot \left(\frac{A \cdot z + A \cdot 0.2 + B \cdot z - B \cdot 0.9)}{(z-0.9)(z+0.2)}\right) =>$$

$$=> H(z) = z \cdot \left(\frac{(A+B) \cdot z + A \cdot 0.2 - B \cdot 0.9}{(z-0.9)(z+0.2)}\right) =>$$

$$=> H(z) = \frac{((A+B) \cdot z + A \cdot 0.2 - B \cdot 0.9) \cdot z}{(z-0.9)(z+0.2)} = \frac{0.2 \cdot z}{(z+0.2)(z-0.9)}$$

Απλοποιώντας τον παρανομαστή:

$$(A+B)z + A0.2 - B0.9) = 0.2$$

Έπειτα βρίσκουμε το A και το B λύνοντας τις εξισώσεις:

- $(A+B) = 0$
- $(A \cdot 0.2 + B \cdot 0.9) = 0.2$

- $A = -\frac{2}{11}$
- $B = \frac{2}{11}$

Τέλος η συνάρτηση μεταφοράς σε αναλυτική έκφραση είναι:

$$H(z) = \frac{-\frac{2}{11} \cdot z}{(z-0.9)} + \frac{\frac{2}{11} \cdot z}{(z+0.2)}$$

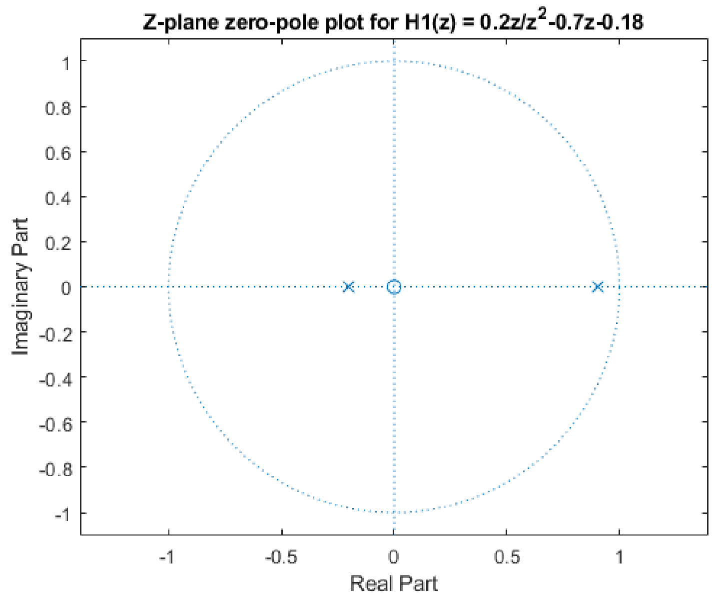
Λόγω του ότι το σύστημα είναι δεξιόπλευρο λόγω της αιτιατότητας ισχύει:

$$\frac{k_i \cdot z}{z - a_i} <=> k_i \cdot {a_i}^n \cdot u(n)$$

$$h(n) = (0.9^n + 0.2^n)\frac{2}{11} \cdot u(n)$$

Ερώτημα 1.Β

Σε αυτό το ερώτημα ζητήθηκε να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων και μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς. Με την βοήθεια της tf δημιουργούμε τα G_1 και G_2, των οποίων το γινόμενο μας δίνει την H(z). Έπειτα ορίζουμε τους πόλους και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα και με την βοήθεια της zplane απεικονίζονται στο z-επίπεδο οι πόλοι και τα μηδενικά. Συγκεκριμένα απεικονίζονται οι πόλοι στα σημεία (-0.2,0) και (0.9,0) και ένα μηδενικό στο σημείο (0,0). Στο διάγραμμα παρατηρείται ότι τα θεωρητικά αποτελέσματα των πόλων είναι ταυτόσημα με αυτά του διαγράμματος

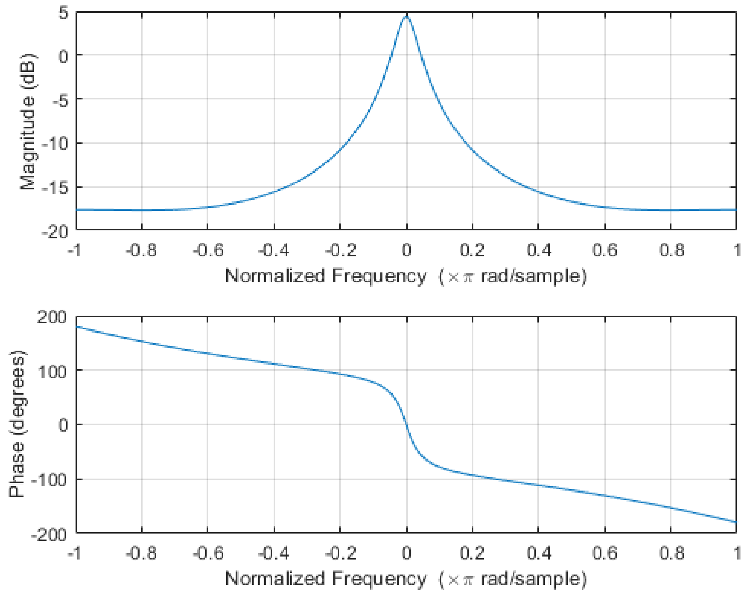


Ερώτημα 1.Γ

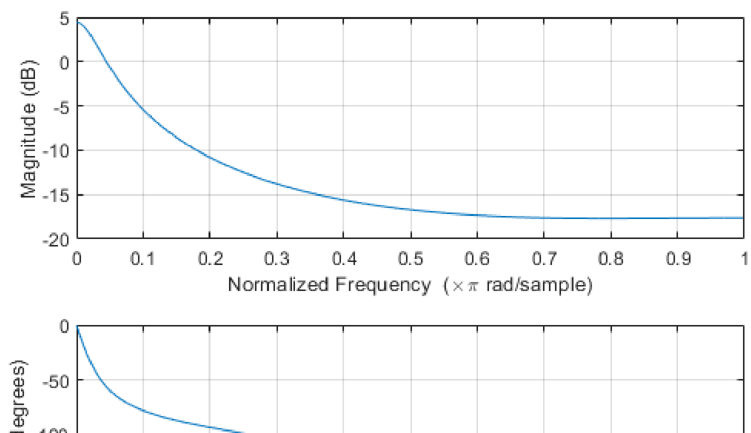
Εφόσον το σύστημα είναι αιτιατό, η περιοχή σύγκλισης του είναι δεξιόπλευρη με $|z|>0.9$. Επομένως το σύστημα είναι ευσταθές καθώς η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο

Ερώτημα 1.Δ

Στο ερώτημα αυτό ζητήθηκε να σχεδιαστεί το διάγραμμα απόκρισης συχνότητας. Αρχικά ορίζουμε τον άξονα της συχνότητας για διάστημα από [-π π] με βήμα π/128. Ορίζουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου για αριθμητή και παρονομαστή και τους περνάμε ως όρισμα στη freqz μαζί με τον άξονα που φτιάξαμε προηγουμένως. Η freqz απεικονίζει τα διαγράμματα μέτρου και φάσης του δοθέντος συστήματος για τις συχνότητες που δόθηκαν με το 3ο όρισμα.



Αν δεν δώσουμε το 3ο όρισμα στη freqz απεικονίζεται μονο το θετικο ημιεπίπεδο της συχνότητας και αποκόβεται το αρνητικό.



Η απόκριση συχνότητας παίρνει την μέγιστη τιμή της στη συχνότητας που βρίσκεται το μηδενικό (ω=0) ενώ στις συχνότητες που βρίσκονται οι πόλοι παίρνει χαμηλές τιμές. Όσον αφορά την φάση για την συχνότητα του μηδενικού έχουμε απότομη μεταβολή της φάσης ενώ για τις συχνότητες των πόλων η μεταβολή της φάσης είναι πιο γραμμική.

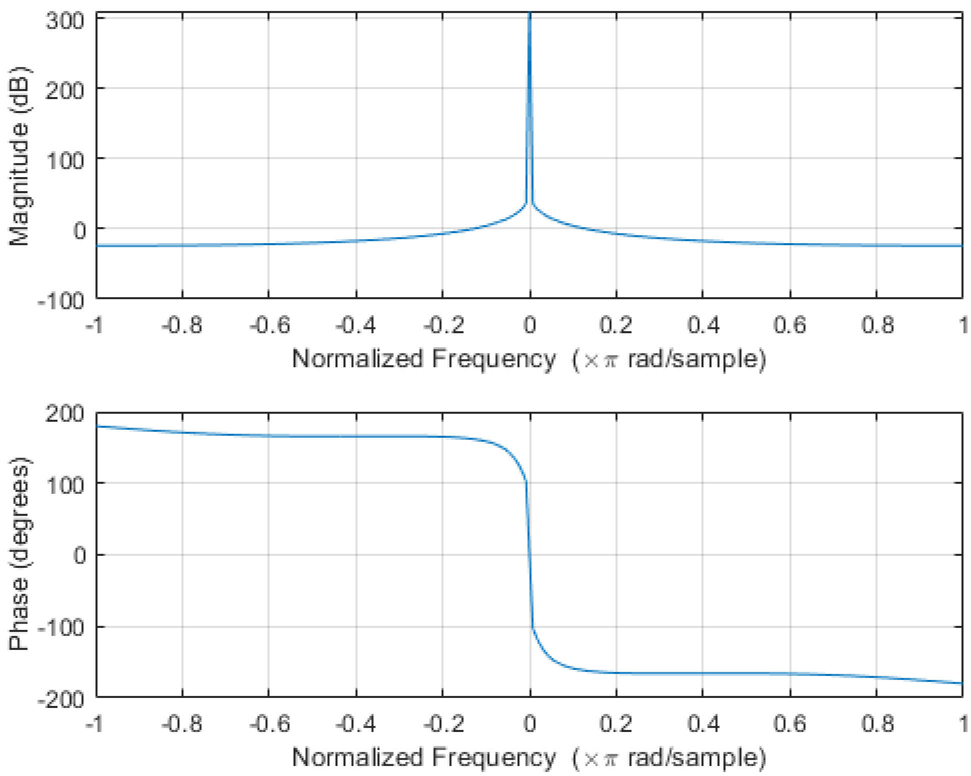
Ερώτημα 1.Ε

Τέλος ζητήθηκε να σχεδιαστεί ξανά το διάγραμμα απόκρισης συχνότητας προσθέτοντας έναν ακόμα πόλο στο z=1. Αυτό επιτυγχάνετε με τον πολλαπλασιασμό της συνάρτησης μεταφοράς με :

$$\frac{1}{z-1}$$

Η νέα συνάρτηση μεταφοράς είναι :

$$H(z) = \frac{0.2 \cdot z}{(z+0.2)(z-0.9)(z-1)}$$



Παρατηρούμε ότι το μέγιστο πλάτος της απόκρισης για ω=0 το πλάτος παίρνει μεγάλη τιμή προσεγγίζοντας το άπειρο. Επιπλέον στο διάγραμμα φάσης για ω=0 υπάρχει μεγαλύτερη μεταβολή της φάσης σε σχέση με την προηγουμένη συνάρτηση μεταφοράς.

Άσκηση 2

Ερώτημα 2.Α

Στην άσκηση αυτή ζητήθηκε να βρεθεί με το Matlab η αναλυση σε απλά κλάσματα της συνάρτησης μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{4 - 3{,}5 \cdot z^{-1}}{1 - 2{,}5z^{-1} + z^{-2}} \text{ , } \mu\varepsilon \quad |z| > 2$$

Για να υπολογιστεί η ανάλυση σε απλά κλάσματα βρίσκουμε τους πόλους (ρίζες στον παρανομαστή) :

$$1 - 2{,}5z^{-1} + z^{-2} =>$$

$$=> (\frac{2}{z} - 1)(\frac{0.5}{z} - 1)$$

Η τελική μορφή της έκφρασης πρέπει να είναι:

$$\frac{A}{\frac{2}{z} - 1} + \frac{B}{\frac{0.5}{z} - 1}$$

Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα:

$$\frac{A\left(\frac{0.5}{z} - 1\right) + B(\frac{2}{z} - 1)}{(\frac{2}{z} - 1)(\frac{0.5}{z} - 1)} = \frac{4 - 3{,}5 \cdot z^{-1}}{1 - 2{,}5z^{-1} + z^{-2}}$$

Και στη συνέχεια πρέπει ο αριθμητής του αριστερού κλάσματος να ισούται με τον αριθμητή του δεξιού κλάσματος:

$$A\left(\frac{0.5}{z} - 1\right) + B\left(\frac{2}{z} - 1\right) = 4 - 3{,}5 \cdot z^{-1} =>$$

$$=> (-A - B) + (A \cdot 0.5 + B \cdot 2) \cdot z^{-1} = 4 - 3{,}5 \cdot z^{-1}$$

Τέλος βρίσκουμε το Α και το Β λύνοντας τις εξισώσεις:

- $(-A - B) = 4$
- $(A \cdot 0.5 + B \cdot 2) = -3.5$

- $A = -3$
- $B = -1$

Οπότε η συνάρτηση μεταφοράς σε αναλυτική έκφραση είναι :

$$H(z) = \frac{-3}{\frac{2}{z} - 1} + \frac{-1}{\frac{0.5}{z} - 1} =>$$

$$=> H(z) = \frac{-3z}{-z+2} + \frac{-1z}{-z+0.5} =>$$

$$=> H(z) = \frac{3z}{z-2} + \frac{z}{z-0.5}$$

Ερώτημα 2.B

Τέλος ζητήθηκε να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της H(z). Αυτό επετεύχθη χρησιμοποιώντας την ιδιότητα:

$$\frac{k_i \cdot z}{z - a_i} <=> k_i \cdot {a_i}^n \cdot u(n)$$

Γνωρίζοντας ότι $k_{1,2}$ = 3, 1 και $a_{1,2}$ = 2, 0.5 αντιστοίχως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της H(z) είναι:

$$(3 \cdot 2^n + 1 \cdot 0.5^n)u(n)$$