线性规划文档

张臻

2008年11月16日

目录

Abstract

这里介绍了在GniMath软件中线性规划部分的实现原理和使用方法。

第 1 节
原理

1.1 将一般型线性规划改写为松弛型

在这里，我采用了单纯形法来计算一个线性规划的最优解。易知，任意一个线性规划都可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n} a_{0i}x_i \leqslant b_0\\&\sum_{i=0}^{n} a_{1i}x_i \leqslant b_1\\&\vdots\\&\sum_{i=0}^{n} a_{mi}x_i \leqslant b_m\\&z=\sum_{i=0}^{n} c_i x_i\end{aligned} \tag{1}$$

其约束条件写成矩阵形式就是

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n}\\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix} \tag{2}$$

其中，一个列向量小于另一个列向量表示其每一个分量分别小于另一个列向量的对应分量。

如果令$x_i = y_{2i+1} - y_{2i}, \forall i(y_i) \geqslant 0)$，则可以得到一个与原线性规划等价的线性规化，其约束条件用矩阵形式表示如下

$$\begin{pmatrix} a_{00} & -a_{00} & a_{01} & -a_{01} & \cdots & a_{0n} & -a_{0n}\\ a_{10} & -a_{10} & a_{11} & -a_{11} & \cdots & a_{1n} & -a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ a_{m0} & -a_{m0} & a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & a_{mn} & -a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_{2n+1}\end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix} \tag{3}$$

而目标函数则被改写为$z = \sum_{i=0}^{n} c_i(y_{2i+1} - y_{2i})$。这样，一般形式的线性规划就被改写成为标准型的线性规划，然后再将该标准型的线性规划中的不等号全部改为等号，则可以得到松弛型的线性规划，然后就可以直接利用单纯形法求解了。

1.2 利用单纯形法求解松弛型线性规划

通过上面的变换，我们可以得到一个的松弛型线性规划，下面说明单纯形法的求解过程[1]

若一个凸集仅包含有限个极点，则称此凸集为单纯形，而上述变换将一个一般的线性规划变换为松弛型的线性规划，使得求解域位于一个凸集上。线性规划单纯形解法的基本思路是：先求得一个初始基可行解，以这个初始基可行解在可行域中对应的极点为出发点，根据最优准则判断这个基可行解是否是最优解，如果不是转换到相邻的一个极点，即得到一个新的基可行解，并使目标函数值下降，这样重复进行有限次后，可找到最解或判断问题无最优解。

设：线性规划（LP）为：

$$\begin{array}{cc} min & cx \\ s.t. & Ax=b \\ x \geqslant 0 & \end{array} \tag{4}$$

A为（LP）的约束方程组的$m \times n$阶系数矩阵(设$n \geqslant m$)，A的秩为m；B是线性规划的一个基，不失普遍性，记

$$\begin{array}{c} A = \left[\begin{array}{cc} B & N \end{array}\right] \\ x = \left(\begin{array}{cc} x_B & x_N \end{array}\right) \\ c = \left(\begin{array}{cc} c_B & c_N \end{array}\right) \end{array} \tag{5}$$

定义

$$\begin{array}{rcl} \lambda & = & c_B B^{-1} A - c \\ & = & \left(\begin{array}{cccccccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_m & \lambda_{m+1} & \ldots & \lambda_n \end{array}\right) \end{array} \tag{6}$$

则：称λ，或者$\lambda_j, (j=1,2,\cdots,n)$为检验数。
若：$\lambda \leqslant 0$，即全部λ_i非正， 则：由B确定的基可行解是（LP）的最优解。

[1]参 考 http:// courseware.ecnudec.com/ zsb/ zgs/ zgs05/ zgs052/ zgs05203/ zgs052030.htm