# Camera Calibration

## Intrinsic Calibration Matrix

絵を描け。

まず、カメラのレンズの中心は**Center of Projection、つまりCOP**と呼ぶ。オブジェクトの、カメラ座標系での座標をとし、そのイメージプレーンへの写像点の、カメラ座標系での座標をとする。ただし、は焦点距離で、COPからイメージプレーンへの距離だ。また、**COP**からイメージプレーンへ下ろした垂線の足を、**principle point**と呼ぶ。Principle pointのカメラ座標系での座標をとする。この時、

よって、

これを、例によってHomogeneousなんとかの書き方にしてやると、

ここで、

が、カメラの**内部パラメータ行列**だ。しかし、レンズには一般的に歪みがあるので、もっと複雑になる。Radial distortionのみの歪を考える場合、半径方向に、半径の二乗に比例したズレが発生すると考えると、上の式は、次のように変わる。

よって、

同様に、homogeneousの書き方に変えると、

これが、より複雑な**内部パラメータ行列**で、スライドp.30の行列だ！

## Extrinsic calibration matrix

カメラ座標系とワールド座標系との関係を表す行列が、外部パラメータ行列だ。カメラが１個なら、カメラ座標系とワールド座標系を同じと見なしても良いんだけど、例えばカメラが２個ある場合などは、そうもいかないよね。

外部パラメータ行列は、単純に回転と平行移動の組合せで表される。つまり、ある点の、ワールド座標系での座標を、カメラ座標系での座標をとすると、

例のhomegeneousの書き方だと、もっときれに書ける。

スライドp.31で、この外部パラメータ行列を

と呼んでいる。

## Optimization

内部パラメータ行列と外部パラメータ行列をまとめると、

まず、大きく分けて２ステップでoptimizationを行う。ステップ１では、とみなすことで、線型方程式に変換し、すばやく行列をestimateする。ステップ２では、元の非線型方程式を使って、estimateした行列を初期値として、非線形最小二乗法で最適解を探す。ポイントは、スライドp.49にある通り、**「非線形最小二乗法の収束は、初期値の精度に依存する」**だ。つまり、ステップ１で良い精度で初期値を求めることが重要となる。

**ステップ１**

まず、とみなす。つまり、

１行目から２行目を割ると、

よって、

これで、未知パラメータに関して線形になった。後は、普通に最小二乗法で、行列をestimateするだけだ。

**ステップ２**

次に、estimateした行列を初期値とし、を初期値とし、以下の非線形方程式を使って、最小二乗法で最適解を探す。

## Zhangのアルゴリズム

こいつ、めちゃ難しい。

まず、以下のモデルを使用する。

なお、

(1)

は、カメラ内部パラメータ行列だ。

**ステップ１（Homography行列を解く）**

パッドは、ワールド座標系の平面上にあると見なしても一般性を失わないので、上のモデルでとおく。すると、

つまり、

(2)

よって、

となる。ここで、を**ホモグラフィ行列**と呼ぶ。ホモグラフィとは、２次元の座標から２次元の座標への変換のことだ。あとは、一般的なホモグラフィの解法を使って、ホモグラフィ行列を求めれば良い。具体的には、まず、上の式を以下のように分解する。

３番目の式を上の２つの式に代入してを消去してやると、

これを、以下のように行列の形に変形してやる。

思い出して欲しい。は、パッド上の点だったよね。１つの点につき、上のような式が１つできる。パッド上の個の点について、上のような式を積み重ねてやると、以下のようになる。

これをどうやって解くのか？なんと、左の行列に対して、の最小固有値に対応する固有ベクトルが、右のの解なのだ。

**ステップ２（行列を解く）**

まず、式(2)で、、は互いに直交し、ノルム（長さ）が同じだということから、制約条件を生成したい。式(2)で、とおいたよね。なので、

とおくと、

よって、、は互いに直交し、ノルム（長さ）が同じだということから、

式を変形して、

(3)

(4)

ここで、とおくと、行列は式(1)で定義しているので、実際に力ずくで計算できて、以下のように求まる。

(5)

これを見ると分かるとおり、行列は対称行列だ。なので、を以下のようにおく。

また、式(3)、(4)にを代入すれば、

ここで、一般に、について考えて見る。

これは、さらに以下のように変形できる。

(6)

左側のベクトルを、右側をとおくと、

と表される。これを、式(3), (4)に適用すれば、

行列の形にしてやると、

式(6)を思い出して欲しい。ベクトルは、homography行列の要素で構築されている。そして、それはステップ１で計算済みだ。つまり、上の式で、ベクトルだけが未知なのだ。さらに、１つの点について、上の式が１つできる。個の点があれば、上の式を個積み上げれば良い。そして、普通にベクトル、つまり、行列を解けばよい。

行列が求まれば、式(5)を使って、、、、、を計算すれば良い。つまり、

こうして、カメラ内部パラメータ行列が求まった。

次に、外部パラメータ行列を求めよう。思い出してくれ。Homography行列は、

よって、

つまり、

また、回転行列の３つ目の列については、

で、普通に解ける。

**ステップ３（推定値の改善）**

ここまでで、基本的には内部パラメータ行列、外部パラメータ行列は得られたが、iterativeな最適化により、更に推定値を改善できる。（なんで？）

個の画像を使用し、各画像内に個の点がある時、最適化に使用する目的関数は、

(10)

ただし、は番目の画像内での番目の点の座標、は3D座標から写像により得られた二次元座標だ。これを、Minpackのlmdif関数で解けば良い。

**ステップ４（レンズ歪みの推定）**

まず、レンズ歪みのモデルは、

ただし、は、歪みなしの二次元座標、は、歪みより実際に観測された二次元座標。

後は、Minpackを使って、以下の目的関数を最小化すれば良い。

(14) (10)