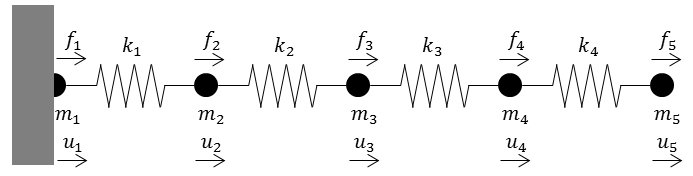
# Gaussの消去法

## 境界条件処理



各ボールに関する運動方程式は、

行列で表すと、

釣り合っている時は加速度が0なので、。よって、

(1)

テキストp.73の例1では、全てのバネ係数が1、、が与えられている。この時、上の式(1)は以下のようになる。

(2)

テキストに従って、既知の行（）をうまく削除すると、

(3)

ここでポイントは、は既知だが、あえて未知変数として残し、その代わり、その分の式を１つ追加している。これにより、5つの未知変数に対して5つの式があるようになる。

後は、普通に逆行列からを求めるだけ。

ここでさらに注目すべきは、得られたを再び式(2)の左辺に代入すると、

つまり、。アレ？って思うよね。だって、式(2)ではとしていた。本当はウソなんだけど、式(3)を見ると分かるとおり、1つ目の式は無効になるため、問題なしだった！

同様に、テキストp.73の例2では、全てのバネ係数が1、、が与えられている。この時、式(1)は以下のようになる。

(4)

テキストに従って、既知の行（）をうまく削除すると、

(5)

後は、普通に逆行列からを求めるだけ。

# 有限要素法の定式化

## 微分方程式の弱形式と有限要素法

以下の式を満たすを求めたい。

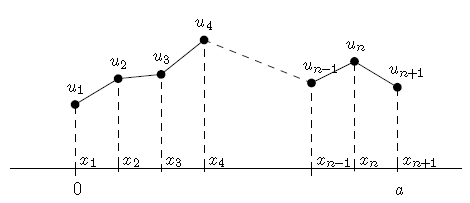
(2.1)

(2.2)

上の式を解くことは、任意のについて以下を満たすを求めることと同義である。証明は、テキストのp.96-97あたりを読め（よく理解できないけど）。

(2.12)

これを**弱形式**と呼ぶ。有限要素法は、この弱形式を基に近似解を求める方式だ。



区間を個の区間に分割し、さらに、との間でが線形変化すると仮定すると、

(2.14)

区間をと表し、パラメータを使って変数変換を行うと、

(2.15b)

ここで、

(2.16)

(2.17)

とおくと、

(2.15)

同様に、

(2.18)

(2.19)

式(2.18)の両辺をで微分すると、

(2.20)

ここで、とおくと、(2.14)の左辺は、

さらに、(2.20)を使って、

一方、(2.14)の右辺は、

さらに、(2.19)を使って、

以上をまとめると、結局(2.14)は以下のように変形できた。

(2.22)

やはに対して定数なので、積分の外に出してやると、

ここで、以下のように要素マトリックスを定義する。

(2.23)

(2.24)

つまり、

(2.22b)

でまでの和をでっかい行列でまとめて表現してやると、

任意ので成立する必要があるので、

(2.25)

結局、以下の線型方程式を解くことに帰着するわけだ。

## 有限要素解析コードのプロトタイプ

具体的な例で試してみよう。、の時について試してみよう。

この時、式(2.1)は、となる。解析的に積分を行うと、

さらに積分してやると、

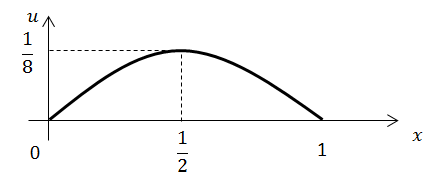
さて、境界条件(2.2)は、だ。まず、より、

また、より、。よって、

以上より、

(2.28)

となる。図で表すと以下のようになる。



以下で、これを有限要素法で解いて行く。

まず、だった。式(2.15b)より、

(2.32)

また、(2.16)より、

また、(2.16)より

さらに、(2.15b)の両辺をで微分すると、

よって、

したがって、

(2.33)

同様に、

(2.34)

これを使うと、式(2.23)の積分の中は、

(2.35)

よって、で積分すると、

(2.36)

同様に、式(2.24)は、

(2.37)

いよいよ実装してみるが、さらに簡単化するために、区間を等間隔とする。つまり、

となる。ここで、区間の間隔をとおくと、

まず、要素マトリックス(2.36)は、

これをまとめたでっかい行列は、以下のようになる。

同様に、(2.37)は、

そして、これをまとめたやつは、以下のようになる。

後は、により、で解くだけだ。ここで、1.8でやったように、式をうまいこと変形して正則化し、逆行列を計算して解く。

### ？？

テキストでは2.3.3と2.3.4で記載されている内容だが、を数値積分を使って計算するように変更する。擬似コードは、テキストのp.143に記載されている。

ポイントは、まずの計算だ。に、式(2.15)を代入し、

さらに、式(2.16)、(2.17)より、

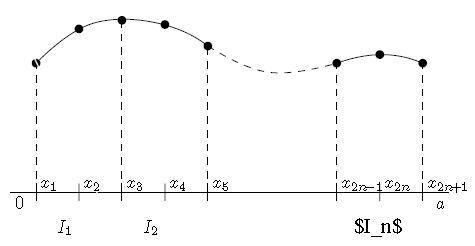
よって、

次のポイントは、の計算で、積分を数値積分を使って計算する。例えば、

という感じに、離散化して、重み付きの和で計算する。

## 高次有限要素補間関数と数値積分

### 高次補間



各区間を2次曲線で表現する。従って、区間内に3点必要となる。区間の点を、、とする。これを、線形補間の時と同様に、、、と表す。さらに、パラメータを使ってを以下のように表す。

(2,42)

ただし、

(2.43)

(2.44)

(2.45)

でも、どうやってこれを導出したの？自信はないけど、おそらく以下の方法で導出したのではないだろうか？

まず、各がの2次関数と仮定する。つまり、

例えばについて、以下の条件を仮定する。

この条件を上の式に代入して各係数を求めると、  
つまり、  
となり、式(2.43)が得られた。、も同様にして求めることが出来る。

同様に、

(2.46)

(2.46b)

ryourya

両辺をで微分すると、

(2.47)

さて、線形補間の時に出てきた弱形式をもう一度思い出してほしい。区間に分割した場合の式(2.14)を再掲する。

(2.41)

まずは、この左辺について、線形補間の時と同様に、を使って変換すると、

さらに、式(2.47)を代入すると、

次に、式(2.41)の右辺についても、を使って変換すると

式(2.46)を代入すると、

以上をまとめると、

(2.49)

やはに対して定数なので、積分の外に出してやると、

ここで、以下のように要素マトリックスを定義する。

(2.50)

(2.51)

つまり、

でまでの和をでっかい行列でまとめて表現してやると、

(2.52b)

任意ので成立する必要があるので、

結局、以下の線型方程式を解くことに帰着するわけだ。

線形補間の時との違いは、とだけ。

、のときについて考える。

まず、解析的に積分を行った解は、2.2節と同様で、

(2.55)

次に、剛性マトリックスを作成する。

まず、、、をで微分する。式(2.43)、(2.44)、(2.55)より、

(2.56)

(2.57)

(2.58)

これを使って、式(2.42)をで微分する。

(2.59)

ここで、をとの中点とすると、

(2.60)

と簡単になる。さて、より、

(2.61)

となる。

次に、式(2.42)の両辺をで微分すると、

をとの中点とすると、

よって、

したがって、式(2.43)、(2.44)、(2.45)をで微分すると、

いよいよ、を作成する。式(2.50)より、

**編集途中。。。**

続いて、を作成する。式(2.51)は、

(2.62)

### 数値積分