CI 2 – SLCI : SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS ET INVARIANTS – ANALYSER, MODÉLISER, RÉSOUDRE

CHAPITRE 3 – MODÉLISATION DES SLCI PAR SCHÉMAS BLOCS

Compétences

Modéliser : un système étant fourni, et les exigences définies, l'étudiant doit être capable de proposer un modèle de connaissance du système ou partie du système à partir des lois physiques.
Mod2 – C2.2 Représentation par fonction de transfert (formalisme de Laplace).
Résoudre : à partir des modèles retenus, mettre en œuvre une méthode de résolution.
Rés – C5.1 : Simplification d'un schéma bloc : déplacement d'un sommateur, déplacement d'un point de prélèvement.

1 Téléphérique Vanoise Express

D'après concours E3A – PSI – 2014.

Depuis 2003, le téléphérique Vanoise Express relie les domaines de La Plagne et des Arcs séparés, par les airs, d'une distance de 1 830 mètres.

Objectifs

Le but de ces travaux est de vérifier que, conformément au cahier des charges, l'écart de traînage, en vitesse, en l'absence de perturbation est nul.

On donne un extrait du cahier des charges.

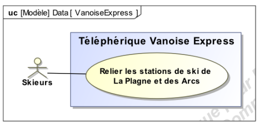


Diagramme des cas d'utilisation

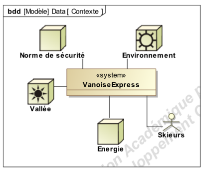


Diagramme de contexte

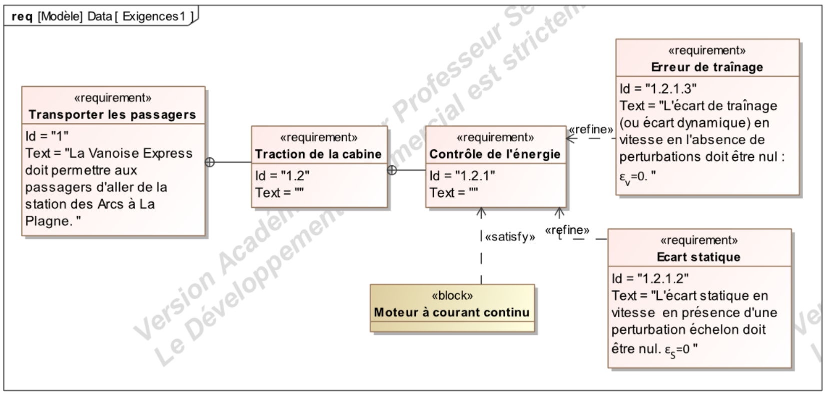


Diagramme partiel des exigences

On donne deux schémas de principe illustrant le fonctionnement d'une ligne de téléphérique :

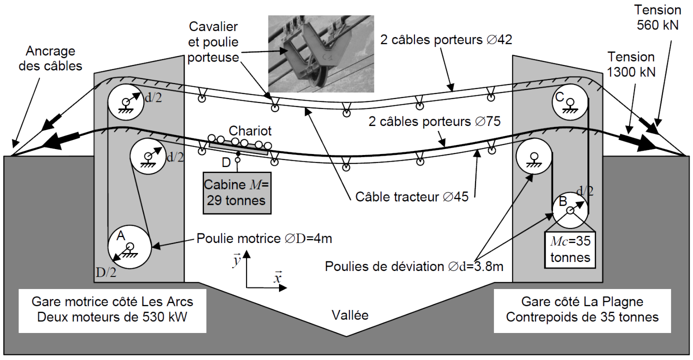


Schéma de principe d'une ligne de téléphérique

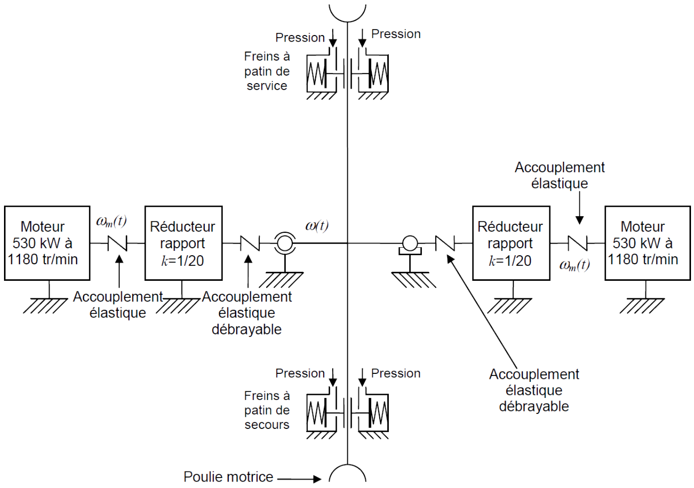


Schéma de la salle des machines

1.1 Modélisation du moteur électrique à courant continu

On notera :

- $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$;
- $u(t)$: la tension d'alimentation des moteurs ;
- $i(t)$: l'intensité traversant un moteur ;
- $e(t)$: la force contre électromotrice d'un moteur ;
- $\omega_m(t)$: vitesse de rotation d'un moteur ;
- $c_m(t)$: couple d'un seul moteur ;
- $c_r(t)$: couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

Hypothèses : on suppose les conditions initiales nulles et que les deux moteurs fonctionnent de manière parfaitement identique.

On note :

- $L = 0,59$ mH, inductance d'un moteur ;
- $R = 0,0386\,\Omega$: résistance interne d'un moteur ;
- $f = 6$ N·m·s/rad : coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- $J = 800$ kg·m^2 : moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs.

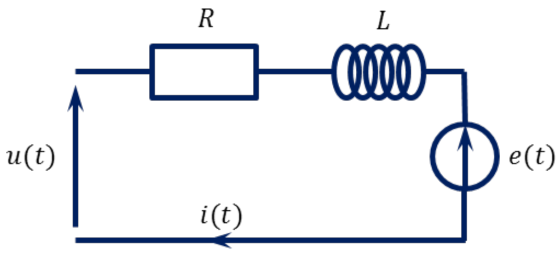


Schéma électrique du moteur à courant continu

Le fonctionnement électromécanique des deux moteurs est décrit par les équations suivantes :

- $c_m(t) = k_T \cdot i(t)$ avec $k_T = 5,67$ Nm/A (constante de couple d'un moteur) ;
- $e(t) = k_E \cdot \omega_m(t)$ avec $k_E = 5,77$ Vs/rad (constante électrique d'un moteur).

L'application des théorèmes de la dynamique permet d'écrire l'équation suivante :

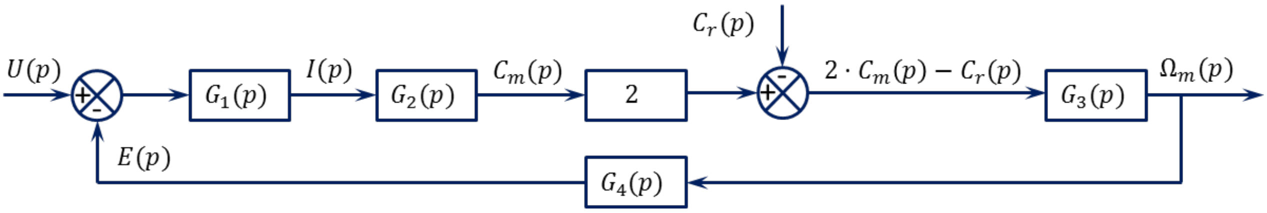
$$2 \cdot c_m(t) - c_r(t) = J\frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \cdot \omega_m(t)$$

L'application de la loi des mailles dans le schéma électrique se traduit par l'équation suivante :

$$u(t) = e(t) + Ri(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Question 1

Exprimer chacune des 4 équations dans le domaine de Laplace.



Question 2
Exprimer les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.

1.1.1 On considère que $C_r(p) = 0$ et $U(p) \neq 0$.

Question 3
Calculer la fonction de transfert $F_1(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$, $G_4(p)$.

1.1.2 On considère que $C_r(p) \neq 0$ et $U(p) = 0$.

Question 4
Retracer le schéma bloc.

Question 5
Calculer la fonction de transfert $F_2(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$, $G_4(p)$.

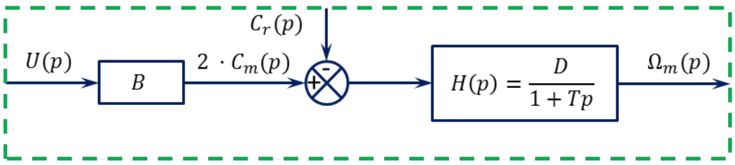
1.1.3 On considère que $C_r(p) \neq 0$ et $U(p) \neq 0$.

Question 6
Exprimer $\Omega_m(p)$ en fonction de $F_1(p)$, $F_2(p)$, $C_r(p)$ et $U(p)$.

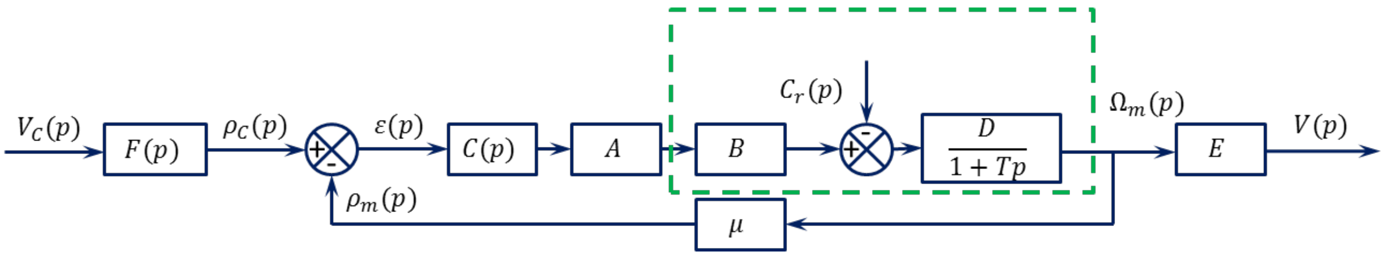
1.2 Modélisation des deux moteurs à courant continu

Dans certaines conditions particulières, il est possible de mettre le moteur sous la forme ci-dessous avec :

- $B = 297,4\ \mathrm{N \cdot m/V}$;
- $D = 5,8\ 10^{-4}\ \mathrm{rad/s \cdot N \cdot m}$;
- $T = 0,47\ \mathrm{s}$.



La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement.



La consigne de vitesse $v_c(t)$ est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension $\rho_c(t)$ avec le gain F. Une génératrice tachymétrique de gain $\mu = 0,716\ \mathrm{V \cdot s/rad}$ transforme la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du moteur en une tension $\rho_m(t)$. Un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ corrige la différence $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$ et l'envoie à un amplificateur de gain A, qui alimente les deux moteurs électriques. La vitesse de rotation des moteurs $\omega_m(t)$ est transformée en vitesse du téléphérique $v(t)$ avec le gain E via :

- un réducteur de rapport de transmission $\dfrac{\omega_p(t)}{\omega_m(t)} = k = \dfrac{1}{20}$;
- l'arbre du réducteur est relié à une poulie motrice (tournant à une vitesse $\omega_m(t)$ de diamètre $D = 4\ m$ (voir schéma de la salle des machines).

Question 7
Déterminer l'expression du gain E. Faire une application numérique.

Question 8
Déterminer l'expression du gain F pour que $\varepsilon(t)=0$ entraîne $v_c(t)=v(t)$. Faire une application numérique.

On considère que $C_r(p)=0$ et $A\cdot C(p)=C$. On réalise les applications numériques. Le schéma bloc peut alors se mettre sous la forme :

$$H(p)=\frac{V(p)}{V_c(p)}=\frac{\dfrac{BCDEF}{1+BCD\mu}}{1+\dfrac{T}{1+BCD\mu}p}$$

1.2.1 Réponse indicielle

On sollicite le système avec en entrée un échelon unitaire. C'est-à-dire que $v_c(t)$ est un échelon unitaire.

Question 9
Calculer $V_c(p)$ puis $V(p)$.

Question 10
Déterminer la valeur finale de $v(t)$ en fonction de A et des autres constantes.

Question 11
Si tel n'est pas le cas, calculer A pour que la valeur finale de $v(t)$ soit 1. Conclure.

1.2.2 Sollicitation du système par une rampe

On sollicite le maintenant système avec une entrée en rampe de pente 1.

Question 12
Montrer que $V(p)$ peut se mettre sous la forme $\dfrac{H(p)}{p^2}$.

Question 13
Déterminer la valeur finale, la valeur initiale et la tangente à l'origine de $v(t)$ en fonction de A.

Question 14
Mettre $V(p)$ sous la forme suivante :

$$V(p)=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{...}$$

Question 15
Déterminer $v(t)$.