CI 2 – SLCI : Systèmes Linéaires Continus et Invariants – Analyser, Modéliser, Résoudre

Chapitre 3 – Modélisation des SLCI par Schémas Blocs

Compétences

Modéliser : un système étant fourni, et les exigences définies, l'étudiant doit être capable de proposer un modèle de connaissance du système ou partie du système à partir des lois physiques.
Mod2 – C2.2 Représentation par fonction de transfert (formalisme de Laplace).
Résoudre : à partir des modèles retenus, mettre en œuvre une méthode de résolution.
Rés – C5.1 : Simplification d'un schéma bloc : déplacement d'un sommateur, déplacement d'un point de prélèvement.

Téléphérique Vanoise Express

D'après concours E3A – PSI – 2014.

Les ingénieurs du MIT ont mis au point une prothèse active permettant aux personnes amputées en dessous du genou d'avoir une marche s'approchant d'une marche d'une personne valide.

Objectifs

Dans le but de dimensionner le vérin à utiliser sur la prothèse, on cherche à dimensionner sa course utile. Par ailleurs, la connaissance du modèle mécanique de transmission est nécessaire afin de renseigner un modèle multiphysique.

On donne un extrait du cahier des charges.
Diagramme de cas des utilisations *Diagramme d'exigences*

La structure interne du système est donnée par les figures ci-contre. Le paramétrage géométrique est donné ci-dessous.

Modélisation du moteur électrique à courant continu

On notera :
- $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$;
- $u(t)$: la tension d'alimentation des moteurs ;
- $i(t)$: l'intensité traversant un moteur ;
- $e(t)$: la force contre électromotrice d'un moteur ;
- $\omega_m(t)$: vitesse de rotation d'un moteur ;
- $c_m(t)$: couple d'un seul moteur ;
- $c_r(t)$: couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

Hypothèses : on suppose les conditions initiales nulles et que les deux moteurs fonctionnent de manière parfaitement identique.

On note :
- $L = 0,59$ mH, inductance d'un moteur ;
- $R = 0,0386\,\Omega$: résistance interne d'un moteur ;
- $f = 6$ N·m·s/rad : coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- $J = 800$ kg·m^2 : moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs.

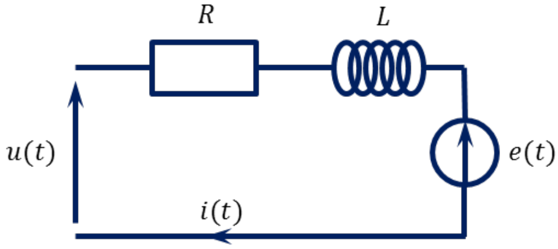


Schéma électrique du moteur à courant continu

Le fonctionnement électromécanique des deux moteurs est décrit par les équations suivantes :
- $c_m(t) = k_T \cdot i(t)$ avec $k_T = 5,67$ Nm/A (constante de couple d'un moteur) ;
- $e(t) = k_E \cdot \omega_m(t)$ avec $k_E = 5,77$ Vs/rad (constante électrique d'un moteur).

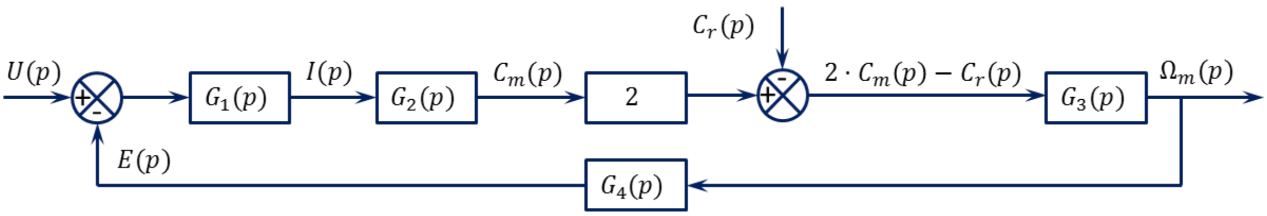
L'application des théorèmes de la dynamique permet d'écrire que :

$$2 \cdot c_m(t) - c_r(t) = J\dot{\omega}_m(t) + f \cdot \omega_m(t)$$

L'application de la loi des mailles dans le schéma électrique se traduit par l'équation suivante :

$$u(t) = e(t) + R\,i(t) + L \cdot \frac{d\,i(t)}{d\,t}$$

Question 1
Exprimer chacune des 4 équations dans le domaine de Laplace.



Question 2
Exprimer les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.

On considère que $C_r(p) = 0$ et $U(p) \neq 0$.

Question 3
Calculer la fonction de transfert $F_1(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$, $G_4(p)$.

On considère que $C_r(p) \neq 0$ et $U(p) = 0$.

Question 4
Retracer le schéma bloc.

Question 5
Calculer la fonction de transfert $F_2(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$, $G_4(p)$.

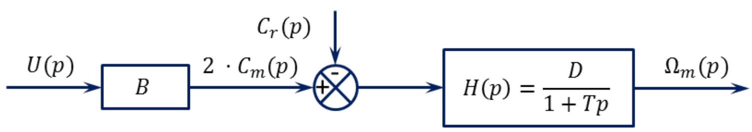
On considère que $C_r(p) \neq 0$ et $U(p) \neq 0$.

Question 6
Exprimer $\Omega_m(p)$ en fonction de $F_1(p)$, $F_2(p)$, $C_r(p)$ et $U(p)$.

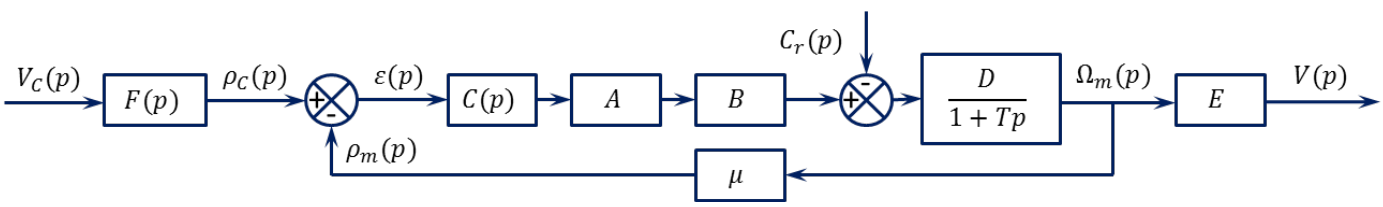
Modélisation des deux moteurs à courant continu

Dans certaines conditions particulières, il est possible de mettre le moteur sous la forme ci-dessous avec :

- $B = 297{,}4\ \mathrm{N \cdot m/V}$;
- $D = 5{,}8\ 10^{-4}\ \mathrm{rad/s \cdot N \cdot m}$;
- $T = 0{,}47\ \mathrm{s}$.



La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement.



La consigne de vitesse $v_c(t)$ est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension $\rho_c(t)$ avec le gain F. Une génératrice tachymétrique de gain $\mu = 0{,}716\ \mathrm{V \cdot s/rad}$ transforme la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du moteur en une tension $\rho_m(t)$. Un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ corrige la différence $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$ et l'envoie à un amplificateur de gain A, qui alimente les deux moteurs électriques. La vitesse de rotation des moteurs $\omega_m(t)$ est transformée en vitesse du téléphérique $v(t)$ avec le gain E.

Question 7
Déterminer l'expression du gain E. Faire une application numérique.

Question 8
Déterminer l'expression du gain F pour que $\varepsilon(t)=0$ entraîne $v_c(t)=v(t)$. Faire une application numérique.

On considère que $C_r(p)=0$ et $A\cdot C(p)=1$. On réalise les applications numériques. Le schéma bloc peut alors se mettre sous la forme :

$$H(p)=\frac{V(p)}{V_c(p)}=\frac{\dfrac{AK_1}{1+K_1A}}{1+\dfrac{T}{1+K_1A}p}$$

Avec $K_1=0,123$ SI et $T=0,47$ s.
On sollicite le système avec en entrée un échelon unitaire. C'est-à-dire que $v_c(t)$ est un échelon unitaire.

Question 9
Calculer $V(p)$ puis $V_c(p)$.

Question 10
Déterminer la valeur finale de $v(t)$ en fonction de A.

Question 11
Si tel n'est pas le cas, calculer A pour que la valeur finale de $v(t)$ soit 1.
On sollicite le système avec une entrée en rampe de pente 1.

Question 12
Montrer que $V(p)$ peut se mettre sous la forme $\dfrac{H(p)}{p^2}$.

Question 13
Déterminer la valeur finale, la valeur initiale et la tangente à l'origine de $v(t)$ en fonction de A.

Question 14
Mettre $V(p)$ sous la forme suivante :

$$V(p)=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{}$$

Question 15
Déterminer $v(t)$.