CI 2 – SLCI : Systèmes Linéaires Continus et Invariants – Analyser, Modéliser, Résoudre

Chapitre 3 – Modélisation des SLCI par Schémas Blocs

Compétences

Modéliser : un système étant fourni, et les exigences définies, l'étudiant doit être capable de proposer un modèle de connaissance du système ou partie du système à partir des lois physiques.
Mod2 – C2.2 Représentation par fonction de transfert (formalisme de Laplace).
Résoudre : à partir des modèles retenus, mettre en œuvre une méthode de résolution.
Rés – C5.1 : Simplification d'un schéma bloc : déplacement d'un sommateur, déplacement d'un point de prélèvement.

1 Téléphérique Vanoise Express

D'après concours E3A – PSI – 2014.

1.1 Modélisation du moteur électrique à courant continu

Question 1
Exprimer chacune des 4 équations dans le domaine de Laplace.

Corrigé

1. $C_m(p) = k_T \cdot I(p)$
2. $E(p) = k_E \cdot \Omega_m(p)$
3. $2 \cdot C_m(p) - C_r(p) = J p \Omega_m(p) + f \cdot \Omega_m(p)$
4. $U(p) = E(p) + R I(p) + L p I(p)$

Question 2
Exprimer les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.

Corrigé

On a :

1. $G_1(p) = \dfrac{1}{R + Lp}$
2. $G_2(p) = k_T$
3. $G_3(p) = \dfrac{1}{Jp + f}$
4. $G_4(p) = k_E$

1.1.1 On considère que $C_r(p) = 0$ et $U(p) \neq 0$.

Question 3
Calculer la fonction de transfert $F_1(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$, $G_4(p)$.

Corrigé

On calcule la fonction de transfert en boucle fermée :

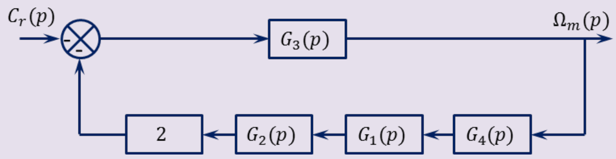
$$F_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{2 \cdot G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot G_3(p)}{1 + 2 \cdot G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot G_3(p) \cdot G_4(p)}$$

1.1.2 On considère que $C_r(p) \neq 0$ et $U(p) = 0$.

Question 4

Retracer le schéma bloc.

Corrigé



Question 5

Calculer la fonction de transfert $F_2(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}$ *en fonction de* $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$, $G_4(p)$.

Corrigé

$$F_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = -\frac{G_3(p)}{1 + 2 \cdot G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot G_3(p) \cdot G_4(p)}$$

1.1.3 On considère que $C_r(p) \neq 0$ et $U(p) \neq 0$.

Question 6

Exprimer $\Omega_m(p)$ *en fonction de* $F_1(p)$, $F_2(p)$, $C_r(p)$ *et* $U(p)$.

Corrigé

Par superposition, on a :

$$\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) + F_2(p)C_r(p)$$

1.2 Modélisation des deux moteurs à courant continu

Question 7

Déterminer l'expression du gain E. *Faire une application numérique.*

Corrigé

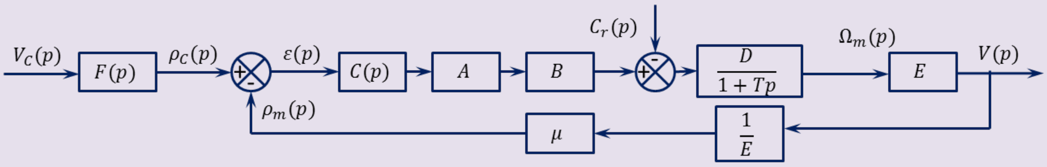
On a $v(t) = \omega_m(t) \cdot \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{D}{2}$. En conséquence, $E = \dfrac{v(t)}{\omega_m(t)} = \dfrac{D}{2k} = 0,1\,\text{m}$.

Question 8

Déterminer l'expression du gain F *pour que* $\varepsilon(t) = 0$ *entraîne* $v_c(t) = v(t)$. *Faire une application numérique.*

Corrigé

En modifiant la position du point de prélèvement, il vient :



On peut donc exprimer $\varepsilon(p) = V_c(p) \cdot F(p) - V(p) \cdot \dfrac{\mu}{E}$.

Si $\varepsilon(t) = 0 \Rightarrow v_c(t) = v(t)$ alors, $F(p) - \cdot \dfrac{\mu}{E} = 0$ et donc $F(p) = \dfrac{\mu}{E} = 7,16\,\text{V} \cdot \text{s/m}$.

On considère que $C_r(p)=0$ et $A\cdot C(p)=C$. On réalise les applications numériques. Le schéma bloc peut alors se mettre sous la forme :

$$H(p)=\frac{V(p)}{V_c(p)}=\frac{\dfrac{BCDEF}{1+BCD\mu}}{1+\dfrac{T}{1+BCD\mu}p}$$

1.2.1 Réponse indicielle

On sollicite le système avec en entrée un échelon unitaire. C'est-à-dire que $v_c(t)$ est un échelon unitaire.

Question 9
Calculer $V_c(p)$ puis $V(p)$.

Corrigé

Si $v_c(t)$ est un échelon unitaire alors $V_c(p)=\dfrac{1}{p}$. On a donc $V(p)=\dfrac{1}{p}\cdot H(p)$.

Question 10
Déterminer la valeur finale de $v(t)$ en fonction de A et des autres constantes.

Corrigé

D'après le théorème de la valeur finale, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} v(t)=\lim_{p\to 0} p\cdot V(p)=\frac{BCDEF}{1+BCD\mu}$$

Question 11
Si tel n'est pas le cas, calculer A pour que la valeur finale de $v(t)$ soit 1. Conclure.

Corrigé

$$\frac{BCDEF}{1+BCD\mu}=1 \Longleftrightarrow BCDEF=1+BCD\mu \Longleftrightarrow C\left(BDEF-BD\mu\right)=1 \Longleftrightarrow C=\frac{1}{BDEF-BD\mu}$$

Une valeur finale de 1 permet de satisfaire l'exigence d'avoir un écart statique nul sans perturbation. Il faudrait ensuite vérifier l'écart statique lorsqu'il y a une perturbation pour pouvoir vérifier l'exigence 1.2.1.3.

1.2.2 Sollicitation du système par une rampe

On sollicite le maintenant système avec une entrée en rampe de pente 1.

Question 12
Montrer que $V(p)$ peut se mettre sous la forme $\dfrac{H(p)}{p^2}$. Á quelle comportement cela correspond-il ?

Corrigé

La fonction de transfert d'une rampe de pente 1 est égale à $V_c(p)=\dfrac{1}{p^2}$. On a donc $V(p)=\dfrac{H(p)}{p^2}$.

La sollicitation en rampe correspond ici à l'accélération de la cabine pour aller d'une vitesse nulle à une vitesse définie au préalable.

Question 13
Déterminer la valeur finale, la valeur initiale et la tangente à l'origine de $v(t)$ et donner l'allure de la courbe.

Corrigé

$$V(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{\dfrac{BCDEF}{1+BCD\mu}}{1+\dfrac{T}{1+BCD\mu}p}$$

- Valeur finale : $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = \lim\limits_{p\to 0} pV(p) = +\infty$
- Valeur initiale : $\lim\limits_{t\to 0} v(t) = \lim\limits_{p\to+\infty} pV(p) = 0$
- Valeur de la pente à l'origine : $\lim\limits_{t\to 0} \dot{v}(t) = \lim\limits_{p\to+\infty} p^2 V(p) = 0$

On a :

$$V(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{1+\tau p}$$

Question 14
Mettre $V(p)$ sous la forme suivante :

$$V(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1+\tau p}$$

Corrigé

En multipliant par p^2 et en posant $p = 0$ on trouve $B = 1$.
En multipliant par $1+\tau p$ et en posant $p = -\dfrac{1}{\tau}$ on trouve $C = \tau^2$.
En $p = 1$ on a : $\dfrac{1}{1+\tau} = A + 1 + \dfrac{\tau^2}{1+\tau} \Longleftrightarrow A = \dfrac{1}{1+\tau} - 1 - \dfrac{\tau^2}{1+\tau} = -\tau$.

Question 15
Déterminer $v(t)$.

Corrigé

On a donc, $\forall t > 0$:

$$v(t) = u(t) \cdot \left(-\tau + t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$