Programa de Finanzas Cuantitativas QUANt

Año 2021

Director del Programa: Dr. Manuel Maurette

Trabajo Final

Tema: Pricing de Opciones con Métodos de Monte Carlo

Alumnos: Germán Nicolás Montenegro
Omar Venerio

ÍNDICE

1- Propósito

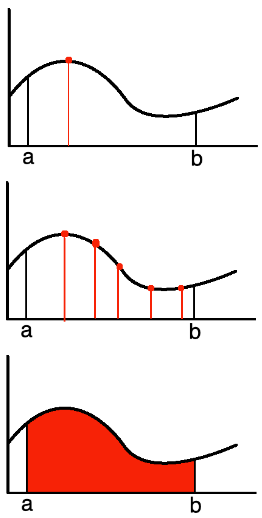
El propósito del trabajo es estudiar el método de Monte Carlo para el pricing de opciones y comparar su aplicación utilizando diferentes formas de implementación en Python. Buscamos comparar diferentes herramientas y analizar su viabilidad como su velocidad de procesamiento entre Python, QuantLib, y Tensorflow2.

2. Integración por Monte Carlo

Su idea básica es que es un método numérico que toma la idea de la ley de números grandes. Recordamos la definición del valor promedio de una función que depende de x, su promedio <f> es:

$$\langle f \rangle = 1/(b-a)\int_a^b f(x)\,dx$$

Imaginemos que ponemos esta función en una grilla, uniformemente distribuida, y tomamos el límite de la distancia entre las grillas a cero,



Esto se vuelve una integral, pero calcularla así es computacionalmente caro, especialmente en N dimensiones, ya que la cantidad de puntos necesarios será igual a N**d donde N es número de puntos y d es dimensión.

Lo que haremos ahora es usar la ley de los grandes números, y tomar una muestra aleatoria para aproximar esta integral mediante la siguiente definición:

$$(b-a)\ *\ 1/N\ *\ \sum_i f(xi)\ \approx \int_a^b f(x)\,dx$$

Es decir, reemplazamos <f> por el cálculo de su promedio para los puntos x_i en el intervalo [a,b]. Y si tomamos el límite con x -> ∞ es la idea de la integral.

Vamos a hacer un ejemplo, integrando la función seno(x) entre 0 y Pi. Para ello vamos a definir cuatro pasos:

- La función que queremos integrar
- Los límites de la integración
- Un generador de números aleatorios en el intervalo
- Un loop que computa la ecuación vía Monte Carlo.

El código en Python quedaría de la siguiente manera:

```
a=0
b= np.pi # a y b limites de la integracion
N = 1000 # cantidad de puntos
xrand = random.uniform(a,b,N) # numeros aleatorios del intervalo
# vamos a definir la funcion que queremos integrar
def func(x):
  return np.sin(x)
# Evaluamos la funcion en el intervalo con los puntos de la muestra
integral = 0.0
for i in range(N):
  integral += func(xrand[i]) # evaluamos la funcion en cada punto
# Luego necesitamos escalar este resultado por B-A sobre N.
answer = (b-a)/float(N) * integral
print("La integral de seno(x) de 0 a pi es", answer)
```

```
La integral de seno(x) de 0 a pi es 2.005221721145168
```

Si nosotros resolvemos la siguiente ecuación

$$\int_0^{\pi} seno(x)dx = [-\cos\pi] - [-\cos 0] = 1 + 1 = 2$$

nos da que la solución aproximada por Monte Carlo es muy cercana al resultado real

Entonces decimos que los métodos de Monte Carlo son técnicas numéricas que realizan muestras aleatorias para aproximar sus resultados. La integración de Monte Carlo aplica este proceso a la estimación numérica de integrales como lo hemos visto.

3) La Probabilidad de Monte Carlo

3.1) Variables Aleatorias

Una variable random “X” es una función que mapea los resultados de un proceso aleatorio a números. Una variable random puede ser discreta o continua. La función acumulativa de una distribución o CDF de una variable aleatoria, es la probabilidad que un valor elegido de la distribución de la variable sea menor o igual a un límite x: $cdf\,(x) = Pr\{X <= x\}$

La correspondiente función de densidad probabilística (PDF) es la derivada de cdf(x):

$$pdf(x) \; = \; \frac{d}{dx} cdf(x)$$

Una relación importante entre estas dos ecuaciones, es que nos permiten computar la probabilidad de que una variable aleatoria se encuentre dentro del intervalo:

$$Pr\{ a \; <= \; X \; <= \; b \} \; = \; \int_a^b pdf(x)\, dx$$

3.2) Valor Esperado y Varianza

El valor esperado o la expectativa de una variable random Y = f(X) sobre un dominio μ(x) se define como: $E[Y] \; = \; \int_{\mu(x)} f(x)\, pdf(x)\, d\mu(x)$

y la varianza: $\sigma^2 \, [Y] \; = \; E[(Y \; - \; E[Y])^2]$

donde σ es la desviación estándar (la raíz de la varianza). De aquí podemos mostrar que:

E[aY] = a E[Y]

$$\sigma^2 \, [aY] \; = a^2 \, \sigma^2 \, [Y]$$

Además el valor esperado de la suma de variables aleatorias Y_i es la suma de sus valores esperados: $E[\sum_i Y_i] \; = \sum_i E[Y_i]$

Por estas propiedades podemos llegar a esta expresión para la varianza: $\sigma^2 \, [Y] \; = \; E[Y^2] \; - \; E[\, Y \,]^2$

Si las variables aleatorias son no correlacionadas, la siguiente propiedad de suma se mantiene para la varianza: $\sigma^2[\, \sum_i Y_i] \; = \sum_i \sigma^2 \, [Y_i]$

3.3) El Estimador Monte Carlo Multi-dimensional

La integración por Monte Carlo puede ser generalizada para usarse con variables aleatorias que vienen de arbitrarias PDFs para computar integrales multidimensionales, tal como:

$$F \; = \; \int_{\mu(x)} f(x)\, d\mu(x)$$

$$< F^N > \; = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(x_i)}{pdf(x_i)}$$

Vamos a mostrar que este estimador generalizado también tiene el correcto valor esperado:

$$E[\ <F^N>\ ] = E[\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{f(x_i)}{pdf(x_i)}] = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}E[\frac{f(x_i)}{pdf(x_i)}] = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{\Omega}\frac{f(x_i)}{pdf(x_i)}pdf(x)dx$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{\Omega}f(x)dx = \int_{\Omega}f(x)dx = F$$

El estimador Montecarlo tiene una convergencia constante $O(\sqrt{N})$ en cualquier dimensión. Pero esta eficiencia puede optimizarse usando técnicas como:

- Reducción de Varianza (Importance sampling)
- Control de Variantes
- Uniform Sample Placement
- Adaptive Sampling
- Biased Monte Carlo

4. Pricing de Opciones

En un contrato de opciones, el escritor (o vendedor) de la opción otorga al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar (call) o vender (put) un activo subyacente al escritor a una fecha especificada (vencimiento) a un precio especificado (precio strike). El escritor otorga este derecho a cambio de una cantidad de dinero llamado “precio de opción”.

El valor intrínseco de una opción es el valor de la opción si ésta fuera ejercida inmediatamente (sin considerar la prima)

El costo refleja *primordialmente el valor intrínseco* y cualquier otra suma por encima de dicho valor. El premio que se paga por encima del valor intrínseco es el *valor tiempo del dinero:* ***Option Price = Intrinsic Value + Time Value***

Algunas propiedades:

Calls:	Puts:
cT = Max (0; ST – X)	pT = Max (0; X – ST)
Si ST > X → cT = ST – X → Profit = cT – c0 = ST – X – c0	Si ST ≥ X → pT = 0 → Profit = – p0
Si ST ≤ X → cT = 0 → Profit = cT – c0 = – c0	Si ST < X → pT = X – ST → Profit = X – ST – p0
Max Profit = ∞	Max Profit = X – p0
Max Loss = c0	Max Loss = p0
Breakeven: ST = X + c0	Breakeven: ST = X – p0

4.1 Modelo de Black-Scholes: Opciones Europeas

Las opciones europeas son contratos de opciones que limitan su ejecución a su fecha de expiración. El método mayormente utilizado para su determinación de precio es Black-Scholes[1] (Premio Nobel de Economía de 1997). El valor de una opción de compra depende de 5 variables:

1) Cuanto mayor sea el precio del activo, más vale una opción para comprarlo.

2) Cuanto menor sea el precio que se debe pagar para ejercer la compra, más vale la opción

3) No se necesita pagar el precio de ejercicio, sino hasta que la opción expira. Este retraso es más valioso cuando la tasa de interés es alta

4) Si el precio de la acción está por debajo del strike a su vencimiento, la opción perderá su valor. Sin embargo, por cada dólar que el precio de la acción se eleve sobre el strike, el tenedor de la opción gana un dólar adicional. Así, el valor de la opción de compra se incrementa con la volatilidad del precio de la acción.

5) Una opción de largo plazo vale más que una de corto plazo. Un vencimiento más largo incrementa la posibilidad de que haya un salto en el precio antes de vencimiento.

Los autores suponen que una opción se puede ejercer sólo al vencimiento; que no hay costos de transacción ni imperfecciones de mercado; que una acción ordinaria no paga dividendos; que existe una tasa de interés a corto plazo conocida a la que los participantes en el mercado pueden solicitar o conceder un préstamo y, por último, que los cambios en los precios de las acciones siguen un patrón aleatorio donde la distribución de probabilidad de los rendimientos es normal y la varianza es constante.

A partir de los supuestos, se puede determinar el valor de equilibrio de una opción. Si el precio real de la opción difiere del que indica el modelo, se puede establecer una posición de cobertura sin riesgo y obtener un rendimiento mayor que la tasa de interés a corto plazo. Si llegara a haber arbitraje, el rendimiento excedente se eliminará en algún momento y el precio de la opción será igual al valor que indica el modelo.

Una posición de cobertura libre de riesgo implica tener 2 activos financieros (una acción y una opción sobre esa acción). Así, con una combinación de ellas, los movimientos hacia arriba o hacia abajo en el precio de la acción se compensan por los movimientos opuestos en el valor de la opción. Si esto se hace de manera adecuada, se puede obtener una posición global (cobertura larga en acciones asociadas con opciones) casi libre de riesgo.

El **valor de una opción de compra estilo europeo** sobre una acción que no paga dividendos, C, se escribe como:

$$\boldsymbol{C = S \times \mathrm{N}(d1) - E \times e^{-Rf.t} \times \mathrm{N}(d2)}$$

[1] Fisher Black y Myron Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, Journal of Political Economy 81 (mayo-junio, 1973), pp. 637-654.

N(d1) es la probabilidad de que una variable aleatoria, estandarizada y distribuida normalmente (conocida como la variable “z”) es menor o igual que d1

N(d2) es la probabilidad de un valor menor o igual que d2.

N(d1) y N(d2) son probabilidades que deben calcularse

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Siendo In(S/E) el logaritmo natural del precio actual de la acción dividido entre el precio de ejercicio.

El valor de la opción en la ecuación aumenta con el incremento del precio de la acción, del tiempo al vencimiento (t), la desviación estándar (σ), y la tasa de interés libre de riesgo a corto plazo (r); pero no así del strike.

La incógnita clave es entonces el desvío estándar, que debe estimarse. El enfoque usual es emplear la volatilidad histórica como representante del futuro. Black y Scholes, al igual que otros, han probado el modelo usando desviaciones estándar estimadas a partir de datos pasados con cierto grado de éxito.

Para el caso del **valor de una opción de venta estilo europeo**, trabajaremos como si una opción de venta fuera una opción de compra y se utiliza la fórmula Black-Scholes para valuarla. Luego se emplea la condición de paridad entre opciones de venta y compra (*put-call parity*) para obtener el valor de la opción de venta.

La *put-call parity* establece la relación entre las opciones call, put y el precio del subyacente, de forma que en todo momento debe existir un equilibrio entre los precios, y cuando esta paridad se desequilibra, es cuando aparecen oportunidades de arbitraje. La ecuación que representa la put-call parity es: Opción de compra + valor presente del precio de ejercicio = Acción + opción de venta

Entonces para una Put Option se tiene: $\boldsymbol{P = Ke^{Rf.t} - St + C = N(-d2)PV(K) - N(-d1)St}$

siendo: $\boldsymbol{PV(K) = Ke^{Rf.t}}$ y N(.) es la función cumulativa de la distribución normal

4.2 Pricing de una Opción Europea vía Método de MonteCarlo

Dado que el precio del activo en t = 0 es S_0, entonces el precio del subyacente a tiempo T puede ser expresado como: $S_T = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T}$

donde W_T sigue la distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma = T$. El *payoff* de una opción call es $\max(S_T - K ; 0)$ y para la opción put es $\max(K - S_T ; 0)$

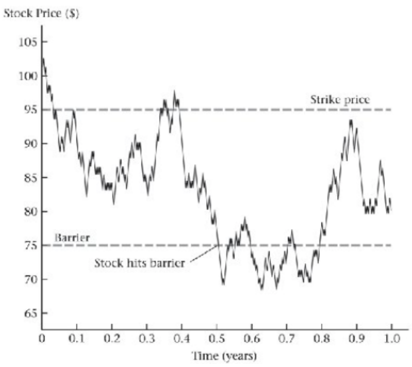
5. Opción Barrera

Las opciones barrera son opciones path-dependientes, esto es, que su payoff no es solo en función de la diferencia relativa entre el precio del subyacente y el strike, sino además dependiente si el stock llego o no a cierto nivel pre-especificado antes o en la maturity.

Las opciones barreras se consideran exóticas porque son más complejas que las opciones básicas americanas o europeas. Se consideran un tipo de opción path-dependiente de la ruta porque su valor fluctúa a medida que cambia el valor del subyacente durante el plazo del contrato de la opción. O sea el payoff de la opción barrera depende de la trayectoria del precio del subyacente.

Dos opciones barreras muy comunes son:

- Knock-Out (KO): “salen de existencia” - Son opciones que expiran sin valor cuando el subyacente cruza el nivel de barrera pre-especificada
- Knock-In (KI): “entran en existencia” - Son opciones que solo se vuelven disponibles o existentes si el nivel de barrera pre-especificada es cruzado por el subyacente.



Put Call Parity en opciones barrera

opción “knock-in” + opción “knock-out” = opción ordinaria

Opciones barrera Knock-In

Es un tipo de opción de barrera en que los derechos asociados con esa opción solo entran en vigencia si el precio del subyacente alcanza una barrera específica durante la vida de la opción. Una vez que cruza una barrera, la opción sigue existiendo hasta que expira.

Las opciones Knock-In pueden clasificarse como:

- <u>Up-and-in.</u> En una opción de barrera al alza, la opción solo existe si el precio del activo se eleva por encima de la barrera pre especificada, que se establece por encima del precio inicial del subyacente.
- <u>Down-and-in</u>: Por el contrario, una opción de barrera down-In solo existe cuando el precio del activo se mueve por debajo de una barrera predeterminada que se establece por debajo del precio inicial del subyacente.

Opciones barrera Knock-Out

A diferencia de las opciones barrera Knock-In, las Knock-out dejan de existir si el activo subyacente alcanza una barrera durante la vida de la opción. Las opciones barrera Knock-out pueden clasificarse como Up-down o down-out.

- Up-and-out: deja de existir cuando el valor subyacente se mueve por encima de una barrera que se establece por encima del precio inicial del subyacente.
- Down-and-out: deja de existir cuando el activo subyacente se mueve por debajo de una barrera que se establece por debajo del precio del subyacente. Si un activo subyacente alcanza la barrera en cualquier momento durante la vida de la opción, la opción se elimina o se cancela.

Otros tipos de opciones barrera

- Opciones de barrera de reembolso: (down rebates y up rebates) Tanto las opciones barrera Knock-In y Knock-Out pueden contener una disposición para proporcionar reembolsos a los tenedores, si la opción no alcanza el precio de barrera y deja de tener valor. Esas opciones se conocen como opciones barrera de reembolso. Los reembolsos, toman la forma de un porcentaje de la prima pagada por el tenedor de la opción.
- Opciones de barrera de Turbo Warrant: Los warrant turbo, que se negocian en Europa y Hong-Kong, son un tipo de opción a la baja que está muy apalancada y se caracteriza por una baja volatilidad. Son populares en Alemania y se usan con fines especulativos.
- Opciones Parisinas: depende del tiempo que el activo esté por encima (o por debajo) del strike.

6. Experimentación

Caso: Call Europeo

Implementamos la fórmula de pricing de un Call Europeo utilizando el método de Monte Carlo. Los parámetros de la opción fueron:
- Tipo: Call Europeo
- Strike : 296
- Spot: 295
- Volatility: 0.2435
- Risk free: 0.0017
- Tiempo de expiración: 39/365

Para el caso de QuantLib, calculamos una distancia de 39 días entre el día de pricing y el día de vencimiento de la opción

Los resultados fueron los siguientes:

	Option	Method	Execution Time	N simulations	price
0	European Call	Monte Carlo Python	28.395960	20000	8.474192
1	European Call	Monte Carlo QuantLib	1.419778	20000	8.938793
2	European Call	Monte Carlo Tensorflow2	0.062945	20000	8.851039

Utilizando tres métodos:

- **Python plano**: Consiste en una función utilizando simplemente librerías de uso común en el lenguaje como numpy y otras. Tardó 28 segundos dando un precio de 8.47 USD
- **QuantLib**: Es una librería especializada, donde el motor está programado en C++. Tardó menos tiempo con 1.41 segundos y dando un precio de 8.93USD
- **Tensorflow2**. Es una librería conocida en el ámbito de deep learning. Se utilizan aquí tensores en vez de arrays como en Python plano. Notamos que la generación de simulaciones es sumamente rápida. Si hubiéramos utilizado GPU la velocidad hubiera sido aún menor. El tiempo del pricing fue de 0.06 segundos dando un precio de 8.85 USD

Call Barrier Down And In

Implementamos el pricing de una opción barrera Call DownAndIn. Los parámetros utilizados fueron los siguientes:

- Spot: 100
- Risk free: 1%
- Volatility: 15%
- Strike: 20
- Barrier: 95
- Samples: 20000
- timestep: 365
- delta_T = 1/365
- Time to Expiration: 1 (1 año)

	Option	Method	Execution Time	N simulations	price
0	CallBarrierOptionDownandIn	QuantLib	5.518126	20000	54.957735
1	CallBarrierOptionDownandIn	Python	30.607119	20000	53.742246
2	CallBarrierOptionDownandIn	Tensorflow	0.814722	20000	54.565328

Se utilizaron 3 métodos:

- **QuantLib**: Para que la comparación sea cercana, configuramos que no tome en cuenta algún calendario especial, y que el cálculo sea como si los 365 días fueran hábiles a fines de facilitar la comparación. Tuvo un tiempo de ejecución de 5.5 segundos, y nos arrojó un precio de 54.95 USD.
- **Python**: Tomó un tiempo de ejecución de 30 segundos, con un precio de 53.74 USD.
- **Tensorflow**: En este caso usamos Tensorflow 2 Quant Finance para la generación del movimiento browniano. Tomó un tiempo mucho menor, solo 0.81 segundos y nos dio un precio cercano a QuantLib de 54.56 USD.

6. Conclusión

El objetivo del trabajo fue explorar y estudiar diferentes herramientas disponibles para la implementación del método de Montecarlo para el pricing de opciones europeas y barrera.

Las herramientas utilizadas fueron la programación del método en Python, y el uso de librerías como QuantLib y Tensorflow2 (TF). Debido al tiempo, solo implementamos Call de opción europea y Down And In de una Call opción barrera.

No se implementó Tensorflow2 Quant Finance para el cálculo de Call Europea porque el precio arrojado era unos dólares por encima del precio que nos daba el uso de estrictamente Tensorflow2. Pero creemos que es necesaria más investigación para determinar la causa o llegar a su implementación correcta.

La ventaja de QuantLib es que incluye muchos modelos y herramientas para el pricing de opciones, y requerirá tiempo programar todas estas herramientas en TF, como por ejemplo, los feriados por calendarios, los cuales, a modo solución, se podrían consumir via API usando algún servicio comercial. Es por ello que para este estudio se consideró 365 días hábiles en el año a fin de comparar las herramientas con parámetros iguales.

Dado los resultados, vemos prometedor la utilización de Tensorflow2 debido a su amplio rendimiento. Otra aplicación interesante no incluida en este estudio es que permite el paso de parámetros de tensores, los cuales nos permitirán el cálculo de no solo una opción, sino de miles por cada ejecución, además de la explotación y uso de GPUs si estuvieran disponibles.