

Beschleunigerphysik Teil 1

Shaukat Khan, TU Dortmund, Wintersemester 2016/2017

20. Januar 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen	5
1.1 Literatur	5
1.1.1 Einführende Lehrbücher	5
1.1.2 Geschichte der Beschleunigerphysik	6
1.1.3 Spezielle Themen	6
1.1.4 Beschleunigerschulen	7
1.1.5 Konferenzbeiträge	8
1.1.6 Zeitschriften	8
1.1.7 Internet-Seiten der Beschleunigerzentren	9
2 Einleitung	10
2.1 Warum beschleunigen?	10
2.2 Wichtige Kenngrößen und Einheiten	11
2.3 Kräfte zur Beschleunigung und Strahlfokussierung	12
2.4 Relationen der speziellen Relativitätstheorie	13
3 Der Zoo der Teilchenbeschleuniger	15
3.1 Elektrostatische Beschleuniger	17
3.2 Beschleunigung durch zeitliche Änderung des Magnetfelds	21
3.2.1 Das Betatron	21
3.2.2 Stabilität von Kreisbahnen im Magnetfeld	22
3.2.3 Der Induktions-Linearbeschleuniger	23
3.3 Beschleunigung durch Hochfrequenz: Allgemeines	24
3.4 Beschleunigung durch Hochfrequenz: Linearbeschleuniger	26
3.5 Beschleunigung durch Hochfrequenz: Kreisbeschleuniger	29
3.5.1 Zyklotron	30
3.5.2 Mikrotron	32
3.5.3 Synchrotron	33
3.5.4 Speicherring	34
3.6 Neue Beschleunigungskonzepte	37
3.6.1 Laser-basierte Methoden	37
3.6.2 Plasma-Wakefield-Beschleuniger	38
3.6.3 Zwei-Strahl-Beschleuniger	38
4 Teilchen im Hochfrequenzfeld, longitudinale Strahldynamik	39
4.1 Einschuss in das Hochfrequenzfeld	39
4.1.1 Teilchenquellen	39
4.1.2 Chopper und Prebuncher	40

4.2	Hohlraumresonatoren	41
4.3	Das „mitbewegte“ Koordinatensystem und Phasenraumkonzept	43
4.4	Longitudinaler Phasenraum – Näherung für kleine Abweichungen	44
4.5	Verallgemeinerung auf beliebige Abweichungen – die Separatrix	47
4.6	Longitudinale Strahldynamik in Linearbeschleunigern - Beispiel	51
5	Supraleitende Hochfrequenz-Resonatoren und Magnete	52
5.1	Supraleitende Resonatoren	52
5.2	Supraleitende Magnete	53
6	Teilchenoptik und transversale Strahldynamik	54
6.1	Magnete zur Strahlführung	55
6.2	Bewegungsgleichung im “mitbewegten“ System	57
6.3	Spezielle Lösungen der Bewegungsgleichung	60
6.4	Dispersion und Bahnlänge	63
6.5	Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung	65
6.6	Transformation der optischen Funktionen	68
6.7	Die Periodizitätsbedingung bei Speicherringen	68
6.8	Allgemeine Form der Transfermatrizen	70
6.9	Courant-Snyder-Invariante und Strahlemittanz	71
6.10	Feldfehler und optische Resonanzen	71
6.11	Chromatizität und Sextupole	73
6.12	Gebräuchliche Magnetstrukturen	76
6.12.1	Die FODO-Struktur	76
6.12.2	Das Mini- β -Prinzip	77
6.12.3	Achromate	77
6.13	Lokale Orbitbeulen und Injektion	78
7	Strahleigenschaften, Strahldiagnose und Kontrollsyste m	79
7.1	Überblick	79
7.2	Strahlstrom und Lebensdauer des gespeicherten Strahls	80
7.3	Phasenraumkoordinaten	83
7.4	Beschleunigerphysikalische Kenngrößen	86
7.5	Frequenzen	87
7.6	Sonstige Eigenschaften	88
7.7	Strahlinstabilitäten	88
7.7.1	Wake-Felder und Impedanz	89
7.7.2	Schwingungen innerhalb eines Teilchenpakets	91
7.7.3	Schwingungen mehrerer Teilchenpakete	93

8 Vakuumtechnologie	94
8.1 Allgemeines	94
8.2 Vakuumkammern	95
8.3 Vakuumerzeugung	97
8.3.1 Desorption	97
8.3.2 Vakuumpumpen	98
8.3.3 Vakuumprofil	100
8.4 Druckmessung und Lecksuche	101

1 Vorbemerkungen

Dieses Skript wurde parallel zur gleichnamigen Vorlesung an der TU Dortmund im Wintersemester 2016/2017 überarbeitet und ergänzt. Vorläufer des Skripts entstanden vor einigen Jahren an der Universität Hamburg und 2010 an der TU Dortmund. Im Gegensatz zur früheren einszemestrigen Vorlesung an der TU Dortmund wird nun ein Beschleunigerkurs angeboten, der aus einer zweisemestrigen Vorlesung (2 Semesterwochenstunden), Übungen (1 Semesterwochenstunde) sowie einem Seminar (1 Semesterwochenstunde) besteht. Obwohl sich der erste Teil des Kurses an die bisherige Vorlesung anlehnt, wurden die Inhalte erweitert und aktualisiert, so dass eine Überarbeitung des Skripts notwendig war. Hinweise auf unklare Formulierungen oder Fehler werden gerne entgegengenommen (z.B. per Email an shaukat.khan@tu-dortmund.de).

1.1 Literatur

Das Skript soll keinesfalls ein Lehrbuch ersetzen und es wird dringend empfohlen, die angesprochenen Themen mit Büchern, Artikeln aus Zeitschriften oder Beschleuniger-Schulen sowie dem Internet zu vertiefen.

1.1.1 Einführende Lehrbücher

Die folgenden Lehrbücher geben einen Überblick über die Beschleunigerphysik. Das Buch von K. Wille eignet sich hervorragend für einen schnellen Einstieg, aber die preiswerte deutsche Taschenbuchausgabe ist leider vergriffen. Das Buch von H. Wiedemann ist etwas ausführlicher, Teil I und II sind inzwischen in einem Band zusammengefaßt. Ältere Standardwerke, z.B. von M. Livingston und J. Blewett oder von W. Scharf, sind naturgemäß nicht mehr ganz aktuell, aber durchaus noch lesenswert, denn sie gehen ausführlicher auf die Funktionsweise klassischer Beschleuniger (Zyklotron etc.) ein als die neueren Bücher.

- K. Wille, *Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen* (Teubner, 1996)
- K. Wille, *The Physics of Particle Accelerators* (Oxford University Press, 2001)
- E. Wilson, *An Introduction to Particle Accelerators* (Oxford University Press, 2001)
- H. Wiedemann, *Particle Accelerator Physics I + II* (Springer, 1993 und 1995, 3. Auflage 2007)
- M. Conte, W. MacKay, *Introduction to the Physics of Particle Accelerators* (World Scientific 2008)
- S. Y. Lee, *Accelerator Physics* (World Scientific 2005)
- D. Edwards, M. Syphers, *An Introduction to ... High Energy Accelerators* (John Wiley, 1993)
- M. S. Livingston, J. P. Blewett, *Particle Accelerators* (McGraw-Hill, 1962)
- W. Scharf, *Particle Accelerators and their Uses, Part 1 + 2* (Harwood Acad. Publishers, 1986)



Abbildung 1: Ein beliebtes Lehrbuch der Beschleunigerphysik mit deutlichen Gebrauchsspuren.

1.1.2 Geschichte der Beschleunigerphysik

Die Beschleunigerphysik ist noch keine 100 Jahre alt und eng verknüpft mit der Geschichte der Kern- und Elementarteilchenphysik. Das Buch von P. Waloschek (früher Leiter der PR-Abteilung von DESY) beschreibt das Leben von Rolf Wideröe, einem der Superstars der Beschleunigerphysik. Die englische Ausgabe ist als DESY-Report erschienen, die deutsche Buchausgabe ist vergriffen, aber im Netz verfügbar. Das reich bebilderte Buch von A. Sessler und E. Wilson gehört zwingend in den Bücherschrank jedes Beschleuniger-Fans.

- P. Waloschek (ed.), *The Infancy of Particle Accelerators* (DESY 94-039)
- P. Waloschek (Hrsg.), *Als die Teilchen laufen lernten* (Vieweg, vergriffen) www-library.desy.de
- A. Sessler, E. Wilson, *Engines of Discovery* (World Scientific, 2007)

1.1.3 Spezielle Themen

Die folgenden weiterführenden Bücher sind für eine einführende Vorlesung weniger wichtig, sollen aber trotzdem genannt werden. Das *Handbook*, herausgegeben von A. Chao und M. Tigner, ist kein Lehrbuch, sondern eher ein enzyklopädisches Nachschlagewerk der Beschleunigerphysik. Das von E. Jaeschke et al. herausgegebene Handbuch enthält eine wachsende Zahl von Artikeln über Beschleunigerphysik und Forschung mit Photonen. Die Kapitel sind online verfügbar, die erste Printausgabe erschien 2016 in zwei Bänden. Die Bücher von D. Attwood, J. Als-Nielsen und D. McMorrow und sowie das (relativ neue) Buch von J. Falta und T. Möller befassen sich mit den Anwendungen der Synchrotronstrahlung.

- E. Jaeschke et al. (Hrsg.) *Synchrotron Light Sources and Free-Electron Lasers* (Springer 2016)
- H. Wiedemann, *Synchrotron Radiation* (Springer, 2003)
- A. Hofmann, *The Physics of Synchrotron Radiation* (Cambridge Monographs 2004)
- E. Saldin, E. Schneidmiller, M. Yurkov, *The Physics of Free Electron Lasers* (Springer, 2000)
- P. Schmüser, M. Dohlus, J. Rossbach, *Ultraviolet and Soft X-ray FELs* (Springer, 2008)
- M. Minty, F. Zimmermann, *Measurement and Control of Charges Particle Beams* (Springer 2003)
- A. Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in ... Accelerators* (John Wiley, 1993)
- S. Khan, *Collective Phenomena in Synchrotron Radiation Sources* (Springer, 2006)
- K. Y. Ng, in Physics of Intensity Dependent Beam Instabilities (World Sceintific, 2006)
- H. Padamsee, J. Knobloch, T. Hays, *RF Superconductivity for Accelerators* (Wiley, 2008)
- A. Chao, M. Tigner (Hrsg.), *Handbook of Accelerator Physics and ...* (World Scientific, 1998)
- D. Attwood, *Soft X-Ray and Extreme Ultraviolett Radiation* (Oxford University Press)
- J. Als-Nielsen, D. McMorrow, *Elements of Modern X-Ray Physics* (John Wiley, 2003)
- J. Falta, T. Möller (Hrsg.), *Forschung mit Synchrotronstrahlung* (Vieweg + Teubner, 2010)

1.1.4 Beschleunigerschulen

Beschleunigerschulen sind ein- oder mehrwöchige Kurse für Studierende und junge Wissenschaftler/innen, die regelmäßig stattfinden. Das Niveau ist hoch, die Inhalte gehen weit über das Standard-Lehrbuchwissen hinaus. Bei vielen Schulen werden die Vorträge schriftlich in Artikeln zusammengefaßt und sind im Netz verfügbar. Manche dieser Artikel sind berühmt geworden und werden wie Original-Publikationen zitiert.

- CERN Accelerator School (CAS)
as.web.cern.ch/cas/Proceedings.html
- US Particle Accelerator School (USPAS)
uspas.fnal.gov/course-materials
- Joint Universities Accelerator School (JUAS)
juas.in2p3.fr

1.1.5 Konferenzbeiträge

Ein guter Teil der Kommunikation in der Beschleunigerphysik findet über drei- bis fünfseitige Konferenzberichte statt. Die amerikanische Particle Accelerator Conference (PAC) und die European Particle Accelerator Conference (EPAC), die im jährlichen Wechsel stattfanden, wurden 2010 von der International Particle Accelerator Conference (IPAC) abgelöst, die abwechselnd in Europa, Amerika und Asien (bzw. 2019 Australien) stattfindet. Darüber hinaus gibt es die FEL-Konferenz und andere. Die Beiträge zu den wichtigsten Konferenzen sind über eine gemeinsame Plattform (www.jacow.org) offen verfügbar, z.B.:

- PAC *Particle Accelerator Conference*
(zuletzt 2009 in Vancouver/Kanada)
- EPAC *European Particle Accelerator Conference*
(zuletzt 2008 in Genua/Italien)
- IPAC *International Particle Accelerator Conference*
(z.B. 2018 in Vancouver/Kanada, 2019 in Melbourne/Australien)
- FEL *Free-Electron Laser Conference*
(z.B. 2017 in Santa Fe/USA; 2019 in Hamburg)
- LINAC *Linear Accelerator Conference*
(z.B. 2018 in Beijing/China)
- ICALEPS *International Conference on Accelerator and Large Exp. Phys. Control Systems*
(z.B. 2019 in New York/USA)
- BIW *Beam Instrumentation Workshop*
(zuletzt 2012 in Newport News/USA)
- IBIC *International Beam Instrumentation Conference*
(z.B. 2019 in Lund/Schweden)

1.1.6 Zeitschriften

Gelegentlich publizieren auch Beschleunigerphysiker ihre Ergebnisse in prestigeträchtigen Journals wie *Science*, *Nature* und anderen, die einem strengen Begutachtungsverfahren unterliegen. Das Erscheinen von *Particle Accelerators* wurde leider in den 1990er Jahren eingestellt. *PRST-AB* (vor einigen Jahren in *PRAB* umbenannt) existiert nicht in Papierform, sondern ist eine reine Online-Zeitschrift mit freiem Zugang.

- *Science*
www.sciencemag.org
- *Nature, Nature Physics, Nature Photonics, Nature Materials*
www.nature.com

- *Physical Review Letters*, *Physical Review*
prl.aps.org
- *Physical Review Special Topics – Accelerators and Beams (PRST-AB)*
journals.aps.org/prab/
- *Physical Review Accelerators and Beams (PRAB, früher PRST-AB)*
journals.aps.org/prab/
- *Nuclear Instruments & Methods in Physics Research A*
www.elsevier.com/locate/nima
- *Particle Accelerators* (eingestellt)
- *Scientific American* bzw. *Spektrum der Wissenschaft*
www.scientificamerican.com, www.spektrum.de

1.1.7 Internet-Seiten der Beschleunigerzentren

Die Internetseiten der Institute, die Teilchenbeschleuniger betreiben, können sehr informativ sein, z.B. www.desy.de. Oft kann man den Betriebszustand einer Beschleunigeranlage online verfolgen. Es gibt verschiedene Zusammenstellungen von Links zu den Beschleunigerzentren weltweit, z.B.

- www-elsa.physik.uni-bonn.de/Informationen/accelerator_list.html
- www.lightsources.org (speziell Synchrotronstrahlungsquellen)
- sbfel3.ucsbd.edu/www/vl_fel.html (speziell Freie-Elektronen-Laser)

2 Einleitung

2.1 Warum beschleunigen?

Am Abend des 8. November 1895 entdeckte Wilhelm Conrad Röntgen ein schwaches Glimmen auf einem Fluoreszenzschirm, das vom Betrieb einer Gasentladungsröhre verursacht wurde. Er erkannte sofort, dass es sich um eine bislang unbekannte Form von Strahlung handelte, die undurchsichtiges Material (Karton, Holz oder auch menschliches Körpergewebe) durchdrang [1]. Da die Strahlung weder von Magnetfeldern (wie geladene Teilchen) noch von einem Prisma (wie Licht) merklich abgelenkt wurde, spekulierte er: „Sollten nun die neuen Strahlen nicht longitudinalen Schwingungen im Aether zuzuschreiben sein?“. Wie sich später herausstellte, handelte es sich um kurzwellige elektromagnetische Wellen, die bald zu einem unverzichtbaren Werkzeug zur Erforschung der Struktur der Materie wurden. Typische Anwendungen werden im Kapitel über Synchrotronstrahlung beschrieben.

Etwa zur gleichen Zeit wurde die Radioaktivität entdeckt, mit der nun auch hochenergetische Teilchenstrahlung zur Verfügung stand. Ein erster Beweis des Nutzens solcher Strahlung waren Rutherfords Streuversuche [2]. Mit Alpha-Teilchen, d.h. Heliumkernen, die monoenergetisch von manchen Substanzen emittiert werden, wurde die Existenz des Atomkerns nachgewiesen. Beta-Strahlung (Elektronen, Positronen) ist weniger brauchbar, da sie wegen der gleichzeitigen Aussendung von Neutrinos in einem breiten Spektrum emittiert wird. Die Energie der Strahlung radioaktiver Präparate entspricht den Abständen von Energieniveaus in Atomkernen und liegt im MeV-Bereich (zu den Einheiten siehe weiter unten). Eine weitere natürliche Quelle von Teilchenstrahlung ist die kosmische Strahlung, in der z.B. das Positron erstmals nachgewiesen wurde [3]. Hier treten Energien bis zu 10^{20} eV auf, doch ist der Fluss von wenigen Teilchen pro km^2 und Jahr für systematische Experimente zu klein.

Teilchenbeschleuniger erzeugen gerichtete Strahlen geladener Teilchen (i.d.R. Elektronen und Positronen, Protonen und Antiprotonen sowie leichte und schwere Ionen). Diese werden entweder direkt verwendet oder dienen dazu, sekundäre Strahlung von Teilchen zu erzeugen, die sich nicht direkt beschleunigen lassen (z.B. Photonen als Synchrotronstrahlung, Neutronen, Neutrinos) oder die in der Natur nicht in stabiler Form existieren (z.B. Pionen, Myonen oder kurzlebige Radionuklide).

Die folgende Liste der vielfältigen Anwendungen von Teilchenstrahlung ist sicherlich unvollständig:

- Aufklärung extrem kleiner Strukturen durch Beugungsexperimente
- Spektroskopie, d.h. Erzeugung und Beobachtung angeregter Zustände
- Kernreaktionen und Erzeugung neuer Elemente
- Erzeugung neuer Elementarteilchen

- Erzeugung extremer Materiezustände, z.B. Quark-Gluonen-Plasma
- Technische Anwendung, z.B. Ionen-Implantation in Halbleitern
- Medizinische Anwendung, z.B. Strahlentherapie

Bei den Anwendungen sekundärer Strahlung wiederholt sich die Einteilung in ähnlicher Weise, z.B. für die Synchrotronstrahlung:

- Beugungsexperimente zur Strukturaufklärung, z.B. von Proteinen
- Spektroskopie atomarer Zustände mit Photonen und Photoelektronen
- Abbildende Techniken, z.B. Röntgenmikroskopie, Röntgenholographie
- Technische Anwendungen, z.B. Röntgen-Lithographie
- Medizinische Anwendungen, z.B. Koronar-Angiographie ohne Herzkatheter
- weitere Anwendungen, z.B. Metrologie (Synchrotronstrahlung als Eichnormal)

2.2 Wichtige Kenngrößen und Einheiten

In den gängigen Lehrbüchern findet man meist SI-Einheiten, in amerikanischen Büchern auch oft cgs-Einheiten. Hier sollen durchweg SI-Einheiten verwendet werden [4]. Eigenschaften von zu beschleunigenden Teilchen (Elektronen, Positronen, Protonen, Antiprotonen, Ionen) sind

- Masse m (z.B. Elektron $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, Proton $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg)
- Ladung q (Vielfaches der Elementarladung $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C)
- Spin bzw. magnetisches Moment μ
- Kinetische Energie E oder Impuls p
- evtl. Lebensdauer τ (radioaktive Strahlen, zukünftige $\mu^+\mu^-$ -Collider)

Teilchenströme werden in A (bzw. mA oder μ A) angegeben. An Beispiel des Elektronenspeicherrings DELTA in Dortmund mit 115.2 m Umfang sei der Strahlstrom $I = 130$ mA. Bei nahezu Lichtgeschwindigkeit ($c = 2.998 \cdot 10^8$ m/s) beträgt die Umlaufzeit ca. 384 ns und die Umlauffrequenz ist $f = 2.6$ MHz. Die umlaufende Ladung ist $I/f = Q = 5 \cdot 10^{-8}$ C, die Zahl der Elektronen ist $Q/e = 3.12 \cdot 10^{11}$.

Es ist praktisch, die kinetische Energie nicht in Joule, sondern in eV (bzw. keV, MeV oder GeV) anzugeben, z.B. für die Elektronenenergie in DELTA

$$E = 1.5 \text{ GeV} = 1.5 \cdot 10^9 \text{ eV} = 1.5 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^9 \text{ J/C} = 2.4 \cdot 10^{-10} \text{ J.} \quad (1)$$

Die Elektronen des 130-mA-Strahls in obigem Beispiel besitzen bei 1.5 GeV eine Gesamtenergie von 75 J. Die Teilchenmasse wird aufgrund der Masse-Energie-Äquivalenz ($E = m_0 c^2$) oft in Energieeinheiten/ c^2 angegeben, z.B. für ein Proton

$$0.938 \text{ GeV}/c^2 = 0.938 \cdot 10^9 \text{ J/C} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}/(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (2)$$

und für ein Elektron 511 keV/ c^2 . Bei hohen Geschwindigkeiten $v \approx c$ ist der Teilchenimpuls der kinetischen Energie annähernd proportional ($E \approx p \cdot c$), so dass der Impuls in Energieeinheiten/ c ausgedrückt werden kann, z.B.

$$1 \text{ GeV}/c = 10^9 \text{ J/C} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}/(3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) = 5.34 \cdot 10^{-19} \text{ kgm/s.} \quad (3)$$

Oft wird die Konvention $c = 1$ verwendet, so dass auch Masse und Impuls in „eV“ angegeben werden.

Die magnetische Feldstärke (auch Flussdichte oder Induktion genannt) wird in Tesla (1 T = 1 Vs/m² = 10⁵ Gauss) gemessen. Entsprechend wird das magnetische Moment (Energie pro Feldstärke) in eV/T, oder aber in Einheiten des Bohrschen Magnetons ($\mu_B = e\hbar/2m_e = 5.79 \cdot 10^{-5}$ eV/T) bzw. des Kern-Magnetons ($\mu_N = e\hbar/2m_p = 3.15 \cdot 10^{-8}$ eV/T) angegeben.

2.3 Kräfte zur Beschleunigung und Strahlfokussierung

Fast alle Vorgänge in Beschleunigern ergeben sich aus den Maxwellschen Gleichungen (James Clerk Maxwell 1831-1879). Im Prinzip stehen zur Beschleunigung folgende Kräfte zur Verfügung:

1. Lorentzkraft: $\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$
2. Magnetisches Moment im inhomogenen B -Feld: $\vec{F} = \mu \cdot d\vec{B}/dz$
3. Elektrisches Dipolmoment im inhomogenen E -Feld: $\vec{F} = d \cdot d\vec{E}/dz$

Da die magnetische Komponente der Lorentzkraft (Hendrik Antoon Lorentz 1853-1928, Nobelpreis 1902) stets senkrecht zur Teilchengeschwindigkeit \vec{v} gerichtet ist, kann sie die kinetische Energie nicht ändern. Geladene Teilchen werden also durch elektrische Felder beschleunigt. Neutronen können durch inhomogene B -Felder, neutrale Moleküle mit einem elektrischen Dipolmoment durch inhomogene E -Felder beschleunigt werden. Auf dieser Grundlage wurde z.B. ein kleiner Speicherring für neutrale Moleküle gebaut [5].

Zur Führung und Fokussierung geladener Teilchen stehen beide Komponenten der Lorentzkraft zur Verfügung. Ein beschleunigtes Elektron mit $v \approx c$ erfährt durch ein leicht realisierbares Magnetfeld von $B = 1$ T dieselbe Kraft wie durch ein enorm hohes elektrisches Feld von $E = 300$ MV/m. Zur Führung und Fokussierung werden daher i.d.R. Magnete verwendet. Es

gibt aber Ausnahmen. Will man z.B. vermeiden, dass gegenläufige Elektronen und Positronen gleicher Energie sich in einem gemeinsamen magnetischen Führungsfeld begegnen, muss man sie mit elektrischen Feldern ablenken. Niederenergetische Elektronen mit $v \ll c$, z.B. in einem Elektronenmikroskop, werden oft mit elektrostatischen Linsen fokussiert.

2.4 Relationen der speziellen Relativitätstheorie

Beschleunigte Teilchen erreichen i.d.R. Geschwindigkeiten, bei denen relativistische Effekte nicht vernachlässigt werden können. Oft ist sogar die ultrarelativistische Näherung $v \approx c$ angebracht. Hier sei an die Lorentz-Transformation zwischen zwei Systemen erinnert, die sich mit konstanter Geschwindigkeit v relativ zueinander bewegen (hier $v = v_z$):

$$x' = x \quad y' = y \quad z' = \gamma(z - vt) \quad t' = \gamma(t - vz/c^2) \quad (4)$$

mit der Abkürzung $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, wobei $\beta = v/c$ ist. Gelegentlich werden folgende Beziehungen verwendet:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad \xrightarrow{\text{inv:}} \quad \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 \quad \xrightarrow{\cdot \gamma^2} \quad \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1. \quad (5)$$

Das Newtonsche Gesetz $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \cdot \vec{a}$ gilt weiterhin, wenn die Masse eine Funktion der Geschwindigkeit ist:

$$m = \gamma \cdot m_{\circ} \quad \text{und damit} \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v} = \gamma \cdot m_{\circ} \cdot \vec{v} = \gamma \cdot m_{\circ} \cdot \vec{\beta} \cdot c, \quad (6)$$

wobei m_{\circ} die Ruhemasse ist. Für die Gesamtenergie eines Objekts gelten folgende Beziehungen:

$$E = m c^2 = \gamma m_{\circ} c^2 = m_{\circ} c^2 + T, = \sqrt{m_{\circ}^2 c^4 + p^2 c^2} = \frac{c}{\beta} p, \quad (7)$$

wobei T die kinetische Energie ist und der letzte Ausdruck nur für $\beta > 0$ sinnvoll ist.

Die Konvention $c = 1$ erlaubt es, Energie, Impuls und Masse in eV (bzw. GeV) auszudrücken und Faktoren c oder c^2 wegzulassen, was in den folgenden Zeilen geschehen soll. Die Größe

$$E^2 - \vec{p}^2 = m_{\circ}^2 \quad (8)$$

ist eine Invariante, d.h. ihr Betrag ändert sich unter Lorentz-Transformationen nicht. Die Kollision zweier Teilchen, z.B. der Ruhemasse m_1 und m_2 , kann man in verschiedenen Koordinatensystemen betrachten. Von Interesse ist z.B.

1. das Laborsystem, in dem die Energie zur Beschleunigung aufgebracht werden muss:
Teilchenenergien E'_1 und E'_2 , Impulse p'_1 und p'_2
2. das Schwerpunktssystem, in dem die Energiesumme gleich der Invarianten m_{\circ} ist:
Teilchenenergien E_1 und E_2 , Impulse $p_1 = -p_2$ (per def.)

Durch geeignete Wahl der Koordinatenachsen verschwinden die anderen Impulskomponenten. Damit gilt für das Quadrat der invarianten Masse

$$m_o^2 = (E_1 + E_2)^2 - 0 = (E'_1 + E'_2)^2 - (p'_1 + p'_2)^2 = (m_1 \gamma'_1 + m_2 \gamma'_2)^2 - (m_1 \beta'_1 \gamma'_1 + m_2 \beta'_2 \gamma'_2)^2 \quad (9)$$

Zunächst seien *fixed-target*-Experimente betrachtet, bei denen ein Teilchen im Laborsystem ruht ($\beta'_2 = 0, \gamma'_2 = 1$). Die Ruhemassen der beiden Teilchen seien gleich ($m_1 = m_2$). Mit der Relation $\beta^2 \gamma^2 = \gamma^2 - 1$ gilt:

$$m_o^2 = m_1^2 (\gamma'_1 + 1)^2 - m_1^2 (\gamma'^2_1 - 1) = 2m_1^2 (\gamma'_1 + 1). \quad (10)$$

Die Erzeugung z.B. von Antiprotonen durch Beschuss ruhender Targetkerne mit Protonen ($p+p \rightarrow p+p+p+\bar{p}$) erfordert beispielsweise $m_o = 4 m_p$, d.h. $\gamma'_1 = 7$ und damit eine kinetische Energie der Protonen von $T \approx 6$ GeV.

Kollisionsexperimente nutzen die Energie beschleunigter Teilchen effizienter. Für symmetrische Kollisionen ($m_1 = m_2, \beta'_1 = -\beta'_2, \gamma'_1 = \gamma'_2$) ist

$$m_o^2 = 4 E'_1{}^2 = 4 E'_2{}^2, \quad (11)$$

so dass sich im obigen Beispiel mit $m_o = 4 m_p$ ein kleinerer Lorentz-Faktor ($\gamma'_1 = \gamma'_2 = 2$) ergibt. Für Kollisionsexperimente mit asymmetrischer Teilchenenergie (z.B. asymmetrische B-Mesonen-Fabriken bei SLAC/USA und KEK/Japan) und/oder unterschiedlicher Teilchenmasse (HERA bei DESY/Hamburg) ergibt sich in der Näherung $E \approx p$ für ultrarelativistische Teilchen:

$$m_o^2 = E'_1{}^2 + 2E'_1 E'_2 + E'_2{}^2 - p'_1{}^2 + 2p'_1 p'_2 - p'_2{}^2 \approx 4 E_1 E_2. \quad (12)$$

Die B-Mesonen-Fabriken sind asymmetrische $e^+ e^-$ -Collider, die $B\bar{B}$ -Paare über die $\Upsilon(4S)$ -Resonanz produzieren, d.h. die Strahlenergien werden zu $m_o = 10.6$ GeV kombiniert, also entweder zweimal 5.3 GeV oder z.B. 7 GeV mit 4 GeV. Der Betrieb der asymmetrischen B-Fabrik PEP-II bei SLAC wurde 2008 eingestellt [6].

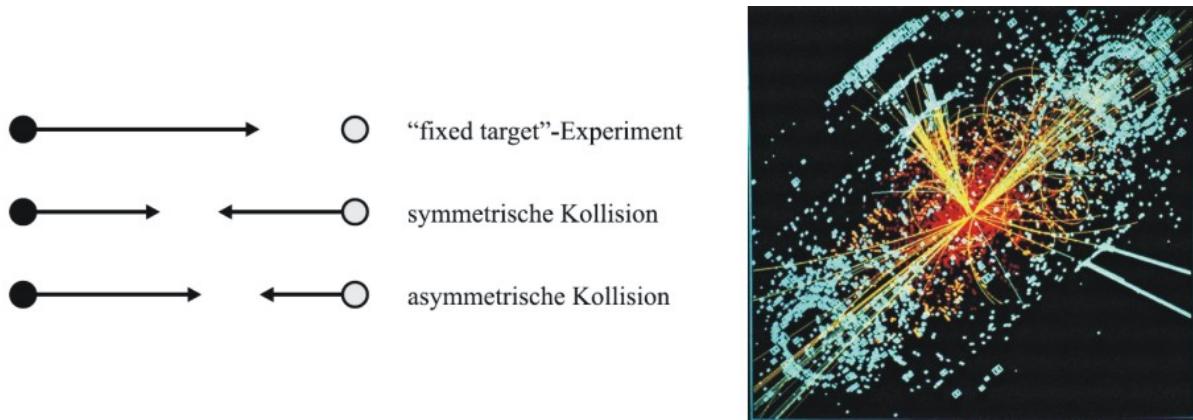


Abbildung 2: Verschiedene kinematische Möglichkeiten der Kollision zwischen zwei Teilchen. Rechts: Simulierte Teilchenspuren nach einer Proton-Proton-Kollision im CMS-Detektor am LHC/CERN.

3 Der Zoo der Teilchenbeschleuniger

Die Beschleunigung geladener Teilchen erfordert ein elektrisches Feld in deren Flugrichtung. Man kann Teilchenbeschleuniger nach der Methode klassifizieren, mit der das elektrische Feld zur Verfügung gestellt wird:

- Elektrostatische Beschleuniger
 - einfache Ausnutzung der Potentialdifferenz:
Cockcroft-Walton-Generator, Marx-Generator, Van-de-Graaff-Generator
 - zweifache Ausnutzung der Potentialdifferenz: Van-de-Graaff-Tandem
- Elektrisches Feld durch zeitliche Magnetfeldänderung
 - Betatron, linearer Induktionsbeschleuniger
- Beschleuniger mit hochfrequenten elektromagnetischen Wellen
 - mehrere Strukturen hintereinander – Linearbeschleuniger:
Elektronen-Linac, Protonen/Ionen-Linac, Radio Frequency Quadrupole (RFQ)
 - mehrfacher Durchlauf derselben Struktur – Kreisbeschleuniger:
Zyklotron, Mikrotron, Synchrotron
- Neue Beschleuniger-Konzepte
 - Wakefeldbeschleuniger, Plasmawellenbeschleuniger, inverser FEL

Ein besonderes Tier im Zoo der Teilchenbeschleuniger ist der Speicherring, dessen Bauweise einem Synchrotron ähnelt. In vielen Speicherringen wird auch beschleunigt, weil der eigentliche Beschleuniger nicht die erforderliche Endenergie erreicht. In Elektronenspeicherringen muss die durch Synchrotronstrahlung verlorene Energie durch Hochfrequenz(Hf)-Resonatoren wieder zugeführt werden. In Protonen- und Schwerionenspeicherringen sind diese Verluste vernachlässigbar, doch werden auch hier Hf-Resonatoren eingesetzt, um den Strahl zu kurzen Paketen zu bündeln.

Bevor die einzelnen Beschleunigertypen besprochen werden, sollen hier ein paar historische Daten ohne Anspruch auf Vollständigkeit aufgelistet werden:

- 1873 Veröffentlichung von „Treatise on Electricity and Magnetism“ (J. C. Maxwell)
- 1886 Karlsruhe: erster Nachweis elektromagnetischer Wellen (H. Hertz)
- 1895 Würzburg: Entdeckung der Röntgenstrahlung (W. C. Röntgen)
- 1908 erste Theorie der Synchrotronstrahlung (G. A. Schott)
- 1896 Paris: Entdeckung der Radioaktivität (A. H. Becquerel)
- 1910 Manchester: Entdeckung des Atomkerns (E. Rutherford)
- 1920 Zürich: erster Kaskaden-Generator (H. Greinacker)
- 1922 Grundidee des Betatrons patentiert (J. Slepian)
- 1924 Konzept des Linearbeschleunigers publiziert (G. Ising)
- 1928 Aachen: erster Linearbeschleuniger (R. Wideröe)
- 1929 Prinzip des Zyklotrons (E. O. Lawrence, N. Edlefsen)
- 1931 Princeton: erster Van-de-Graaf-Generator (van de Graaf)
- 1931 Berkeley: erstes Zyklotron (E. O. Lawrence, M. S. Livingston)
- 1932 Cambridge: Cockcroft-Walton-Generator, erste Kernreaktion (J. Cockcroft, E. Walton)
- 1937 Stanford University: Erfindung des Klystrons (W. W. Hansen, R. Varian, S. Varian)
- 1940 University of Illinois: erstes Betatron (D. W. Kerst, R. Serber)
- 1943 Prinzip des Speicherrings („Kernmühle“) patentiert (R. Wideröe)
- 1944 Prinzip des Mikrotrons publiziert (V. I. Veksler)
- 1945 Prinzip des Synchrotrons publiziert (E. M. McMillan, V. I. Veksler)
- 1946 Woolwich: erstes Elektronen-Synchrotron (F. K. Goward, D. E. Barnes)
- 1947 Stanford University: erster Elektronen-Linearbeschleuniger (E. L. Ginzton et al.)
- 1947 New York: erste direkte Beobachtung von Synchrotronstrahlung (F. R. Elder)
- 1947 Studie über Protonen-Synchrotron (M. L. Oliphant)

- 1948 Berkeley: erster Protonen-Linearbeschleuniger (L. Alvarez)
- 1949 Theorie der Synchrotronstrahlung (J. Schwinger)
- 1950 Prinzip der „starken Fokussierung“ patentiert (N. Christphilos)
- 1953 Birmingham: erstes Protonen-Synchrotron in Brookhaven (M. L. Oliphant)
- 1952 erste Publikation zur „starken Fokussierung“ (E. D. Courant et al.)
- 1953 Stanford University: erster Undulator (H. Motz)
- 1957 Palo Alto: „Ubitron“, Vorläufer des Freie-Elektronen-Lasers (R. M. Phillips)
- 1961 Frascati: erster Elektronen-Positronen-Speicherring (B. Touschek)
- 1961 Washington, D.C.: „SURF I“, erste parasitäre Nutzung von Synchrotronstrahlung
- 1965 Prinzip des Energy Recovery Linac publiziert (M. Tigner)
- 1968 University of Wisconsin: erste dedizierte Synchrotronstrahlungsquelle „Tantalus I“
- 1971 Prinzip des Freie-Elektronen-Laser publiziert (J. M. J. Madey)
- 1977 Stanford University: erster Freie-Elektronen-Laser (J. M. J. Madey et al.)
- 2000 DESY/Hamburg: „TTF“, erster Freie-Elektronen-Laser im UV-Bereich (J. Roßbach et al.)
- 2000 Jeffersen Lab: erster Energy Recovery Linac (G. Neil et al.)
- 2006 Berkeley: 1 GeV Elektronen mit Laser-Plasma-Beschleunigung (W. Leemans et al.)
- 2009 SLAC: „LCLS“ erster Freie-Elektronen-Laser in Röntgenbereich (J. Galayda et al.)

Zusammenfassend kann man sagen, dass die „klassischen“ Beschleuniger in den 1930-50er Jahren, und die Synchrotronstrahlungsquellen in den 1960-90er Jahren ihre heutige Form annahmen. Natürlich gibt es weiterhin Verbesserungen und neue Ideen, die an dieser Stelle nicht alle gewürdigt werden können, aber im Verlauf der Vorlesung angesprochen werden sollen. Zurzeit findet eine stürmische Entwicklung bei den neuartigen Strahlungsquellen, insbesondere den Freie-Elektronen-Lasern, statt. Außerdem zeigen neue Beschleunigungskonzepte wie die Laser-Plasma-Beschleunigung erste Erfolge.

3.1 Elektrostatische Beschleuniger

Im konzeptionell einfachsten Fall werden geladene Teilchen durch ein statisches elektrisches Feld beschleunigt. Beim Cockroft-Walton-Generator [7] (Sir John Cockroft 1897-1967, Ernest Walton 1903-1995) wird eine Beschleunigungsspannung im MV-Bereich durch eine sog. Greinacher-Schaltung (Heinrich Greinacher 1880-1974) erzeugt, die man z.B. in Fernsehgeräten (mit Bildröhre) und allgemein zur Erzeugung von Hochspannung gerne verwendet. Mit einem Cockroft-Walton-Generator wurde 1932 erstmals eine Kernreaktion mit einem Beschleuniger nachgewiesen (Nobelpreis 1951): ${}^7\text{Li} + \text{p} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$.

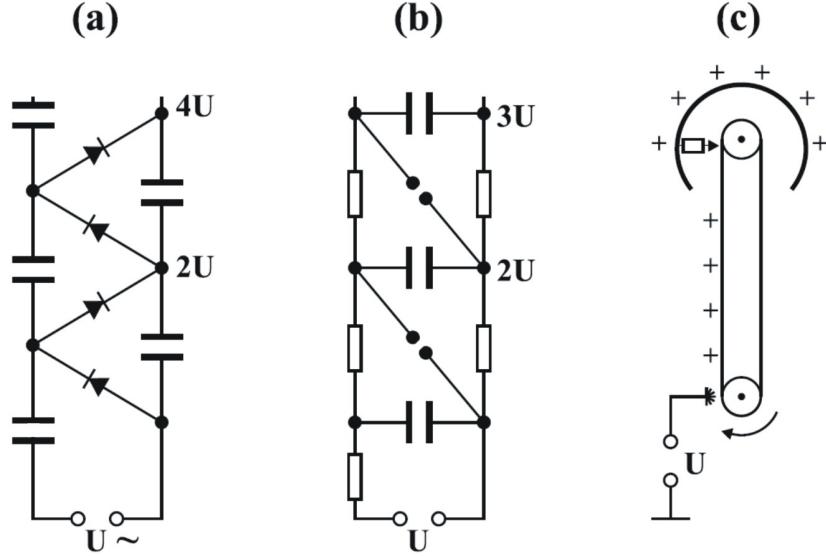


Abbildung 3: Erzeugung der Hochspannung für elektrostatische Beschleuniger a) Cockcroft-Walton-Generator (Greinacher-Schaltung) b) Marx-Generator (Entladung über Funkenstrecken) c) Van-de-Graaff-Generator (mechanischer Transport von Ladung).

Gelegentlich werden Cockcroft-Walton-Generatoren auch heute noch als Vorbeschleuniger verwendet (z.B. Protonenquelle am PSI/Schweiz, Abb. 4 links). Die Schaltung ist in Abb. 3a dargestellt. Kondensatoren werden in einer Halbwelle durch eine Wechselspannung aufgeladen, wobei Diolen verhindern, dass die Ladung wieder abfließen kann. Dadurch addieren sich die Spannungen der in Reihe geschalteten Kondensatoren zu $U = 2nU_0$, wobei n die Zahl der Stufen (je zwei Kondensatoren und Diolen) und U_0 die Amplitude der Wechselspannung ist. Wird dem Generator ein Strom I entnommen, ergibt sich eine etwas geringere Maximalspannung

$$U = 2nU_0 - \frac{2\pi I}{\omega C} \left(\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{12}n \right), \quad (13)$$

wobei ω die Kreisfrequenz der Wechselspannung und C die Kapazität der einzelnen Kondensatoren ist. Diese beiden Größen sollen möglichst groß sein, um den Spannungsverlust klein zu halten.

Beim Marx-Generator (Erwin Otto Marx 1893-1980) werden parallelgeschaltete Kondensatoren aufgeladen und dann schlagartig durch eine Funkenentladung in Reihe geschaltet. Die in Abb. 3b gezeigten Funkenstrecken wirken also wie niederohmige Schalter. Dadurch entsteht für kurze Zeit (einige μs) eine hohe Spannung, während der Aufladevorgang mehrere Sekunden erfordert. Marx-Generatoren werden heutzutage in der Beschleunigerphysik kaum verwendet.

Beim Van-de-Graaff-Generator [8] (Robert Van de Graaff 1901-1967) entsteht die Hochspan-

nung durch mechanischen Transport von elektrischer Ladung mit einem Band oder einer Kette (Abb. 3c) und 4 rechts). Bei Spannungen von einigen MV werden Entladungen durch ein Schutzgas (üblicherweise SF₆) unterdrückt. Van-de-Graaff-Beschleuniger werden oft als Vorbeschleuniger für Teilchen aller Art oder als Ionenbeschleuniger in der Kernphysik eingesetzt.

Wenn ein zunächst negativ geladenes Ion nach Durchlaufen der Beschleunigungsstrecke Elektronen abstreift (*stripping*-Folie oder -Gas), kann die Hochspannung ein weiteres Mal ausgenutzt werden. Diese sog. Tandem-Beschleuniger werden in der Kernphysik eingesetzt. Der größte Beschleuniger dieser Art ist das Vivitron in Strasbourg/Frankreich mit einer Beschleunigungsspannung von 35 MV [9].

Die Beschleunigungsspannung wird bei elektrostatischen Beschleunigern durch die Durchschlagsfeldstärke des umgebenden Mediums begrenzt. Bei dieser Feldstärke kommt es zum Funkenüberschlag. An Luft beträgt sie ca. 3 MV/m, mit SF₆ als Isolergas kann sie auf etwa 8 MV/m erhöht werden.

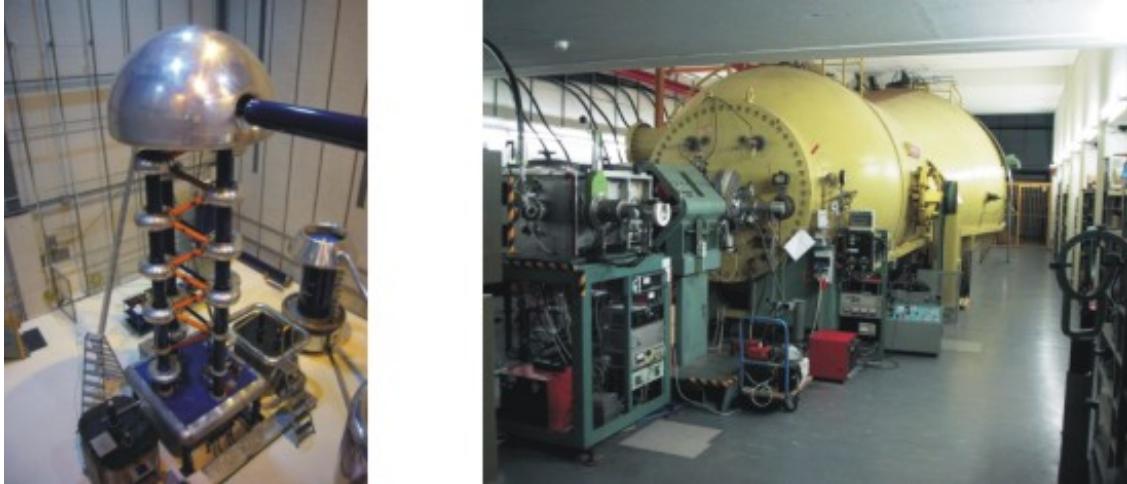


Abbildung 4: Elektrostatische Beschleuniger. Links: Cockcroft-Walton-Generator als Vorbeschleuniger für Protonen (800 kV) am Paul-Scherrer-Institut (Schweiz). Rechts: Tandem-van-de-Graaf-Beschleuniger für Ionen am MPI für Kernphysik in Heidelberg (max. Hochspannung 12 MV, Ende 2012 stillgelegt).

Anmerkung zur Berechnung elektrostatischer Felder

Die metallischen Elektroden eines elektrostatischen Beschleunigers befinden sich auf bestimmten Potenzialwerten, wobei sich die beweglichen Elektronen im Metall so umverteilen, daß die elektrischen Feldlinien senkrecht auf den Oberflächen enden. Da die Elektronenverteilung nicht bekannt ist, kann man das elektrische Feld nicht einfach mit dem Coulombschen Gesetz berechnen, sondern man muss vielmehr die Laplace-Gleichung

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (14)$$

für den gesamten Raum lösen, wobei φ das elektrostatische Potenzial ist, aus dem das elektrische Feld durch Bildung des Gradienten hervorgeht. In einer numerischen Näherung für äquidistante Gitterpunkte mit Abstand d kann die Laplace-Gleichung für einen mit den Indizes i, j, k bezeichneten Punkt im 3-dimensionalen Raum folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{\varphi_{i+1,j,k} - \varphi_{i,j,k}}{d} - \frac{\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i-1,j,k}}{d} \right) \\ & + \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{\varphi_{i,j+1,k} - \varphi_{i,j,k}}{d} - \frac{\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i,j-1,k}}{d} \right) \\ & + \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{\varphi_{i,j,k+1} - \varphi_{i,j,k}}{d} - \frac{\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i,j,k-1}}{d} \right) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Mit d^2 multipliziert und nach $\varphi_{i,j,k}$ aufgelöst ergibt sich

$$\varphi_{i,j,k} = \frac{1}{6} (\varphi_{i+1,j,k} + \varphi_{i-1,j,k} + \varphi_{i,j+1,k} + \varphi_{i,j-1,k} + \varphi_{i,j,k+1} + \varphi_{i,j,k-1}), \quad (16)$$

d.h. jeder Wert des elektrostatischen Potenzials ist das arithmetische Mittel der Werte der umgebenden Gitterpunkte. Beim sog. Gauß-Seidel-Verfahren wird, ausgehend von willkürlichen Anfangswerten, die Mittelwertbildung in einer Schleife über alle Gitterpunkte ausgeführt (siehe z.B. [10]). Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis sich die Potenzialwerte nicht mehr signifikant (gemäß eines vorgegebenen Kriteriums) ändern.



Abbildung 5: Historisches 6-MeV-Betatron (Deutschland 1942-46) und Schema der Funktionsweise.

3.2 Beschleunigung durch zeitliche Änderung des Magnetfelds

3.2.1 Das Betatron

Das Prinzip von Beschleunigern nach dem Induktionsprinzip (Betatron und Induktions-Linac) ähnelt dem des Transformatoren, wobei der Elektronenstrahl die Rolle der Sekundärspule übernimmt. Das Induktionsgesetz lautet

$$\oint \vec{E} d\vec{r} = - \int_A \dot{\vec{B}} d\vec{a}. \quad (17)$$

Für eine Kreisbahn mit Radius R und einem vom Radius abhängigen Magnetfeld $B(r)$ senkrecht auf der eingeschlossenen Fläche gilt

$$2\pi R E = -\pi R^2 \langle \dot{B} \rangle \quad \text{d.h.} \quad E = -\frac{1}{2} R \langle \dot{B} \rangle, \quad (18)$$

wobei $\langle \dot{B} \rangle$ die Änderung des über die Fläche gemittelten Magnetfelds ist. Beim Betatron wird das Magnetfeld zeitlich so variiert, dass (i) eine Beschleunigung durch Induktion entlang einer Kreisbahn stattfindet und (ii) der Bahnradius konstant bleibt. Aus der Gleichsetzung von Zentripetalkraft und Lorentzkraft mit $v \perp B$ ergibt sich für den Impuls $p = eRB_R$, wobei B_R das Magnetfeld bei $r = R$ ist. Die zeitliche Ableitung des Impulses ist gleich der Kraft $-eE$:

$$\dot{p} = eR\dot{B}_R = \frac{1}{2}eR\langle \dot{B} \rangle. \quad (19)$$

Nach \dot{B}_R aufgelöst und integriert findet man

$$B_R = \frac{1}{2}\langle B \rangle + B_0. \quad (20)$$

Diese nach Rolf Wideröe (1902-1996) benannte Bedingung besagt, dass das Feld auf der Kreisbahn gleich dem halben gemittelten Feld plus einem konstanten Feld B_0 ist [11]. Das erste funktionierende Betatron wurde 1940 gebaut (Donald Kerst 1911-1993) und beschleunigte Elektronen bis auf 2.3 GeV [12]. Auch in Deutschland wurde seit ca. 1935 an Betatrons gearbeitet. Abbildung 5 zeigt eine dieser sog. „Elektronenschleudern“, die 1946 in Göttingen in Betrieb genommen wurde. Betatrons werden heute zur Durchstrahlung von Werkstoffen und zur Strahlentherapie mit Elektronen verwendet, wobei sie zunehmend von kompakten Linearbeschleunigern verdrängt werden.

Die zeitliche Änderung des Magnetfelds ergibt sich aus dem sinusförmigen Strom durch die Spule eines Elektromagneten, wobei der Teilchenstrahl quasi die Sekundärspule eines Transformatoren bildet. Die Beschleunigung von Elektronen erfolgt nur während einer viertel Periode, solange das Magnetfeld und seine zeitliche Ableitung ihr Vorzeichen nicht umkehren. Die erreichbare Endenergie ist durch die Sättigung des Magneteisens begrenzt. Eine höhere Schwingungsfrequenz erhöht zwar die elektrische Feldstärke, verringert aber die Zahl der Umläufe. Da

Protonen und schwerere Ionen langsamer umlaufen und damit weniger Energie gewinnen, sind Betatronen für diese Teilchen nicht geeignet.

3.2.2 Stabilität von Kreisbahnen im Magnetfeld

Das Betatron ist ein erstes Beispiel für einen Kreisbeschleuniger. In einem vertikalen Magnetfeld $B_z(r)$ ist die auf Teilchen mit Ladung q wirkende Zentripetalkraft $F_Z = mv^2/r$ durch die Lorentzkraft

$$F_L = q \cdot v \cdot B_z(r) \quad \text{mit} \quad B_z(r) = B_{z0} \cdot r^{-n} \quad (21)$$

gegeben, wobei $B_z \perp v$ angenommen wurde. Der sog. Feldindex n bestimmt die radiale Abhängigkeit des Magentfelds:

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = -n \cdot B_{z0} \frac{r^{-n}}{r} = -n \cdot \frac{B_z}{r} \quad \text{und damit} \quad n = -\frac{r}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r}, \quad (22)$$

d.h. der Feldindex kann als relative Änderung des Magnetfelds $\partial B_z/B_z$ bezogen auf eine relative Radiusänderung $\partial r/r$ aufgefasst werden.

Teilchen, die von der idealen Kreisbahn abweichen, führen eine Schwingung um diese Bahn aus, die – auch bei anderen Kreisbeschleunigern – als Betatron-Oszillation bezeichnet wird. In einem homogenen Magnetfeld befindet sich ein solches Teilchen einfach auf einer versetzten Kreisbahn, die die ideale Bahn in zwei Punkten schneidet. Das Teilchen oszilliert um die ideale Bahn, als ob eine rücktreibende Kraft existieren würde. Dieser rein geometrische Effekt wird als schwache Fokussierung bezeichnet.

Im Gleichgewicht gilt $F_Z = F_L$ für einen bestimmten Bahnradius r_0 . Mit Feldindex $n \neq 0$ sollte bei einem zu großen Radius die Lorentzkraft die dem Radius entsprechende Zentripetalkraft übersteigen, damit sich der Radius verringert: $r > r_0 \rightarrow F_Z > F_L$. Umgekehrt gilt: $r < r_0 \rightarrow F_Z < F_L$, d.h. $F_Z \sim 1/r$ muss steiler mit dem Radius abfallen als F_L , so dass $n < 1$ sein muss.

Eine Komponente der Gleichung $\text{rot} \vec{B} = 0$ ist

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0. \quad (23)$$

Daraus folgt

$$B_r = \int \frac{\partial B_z}{\partial r} dz = - \int n \frac{B_z}{r} dz = -n \frac{B_z}{r} z, \quad (24)$$

so dass $n > 0$ sein muss, denn dann ergibt sich z.B. für $B_z > 0$ (Magnetfeld nach oben) und $z > 0$ eine nach innen gerichtete radiale Komponente des Felds und die Lorenzkraft zeigt zur Mittelebene hin. Anders ausgedrückt, das Feld muss radial abnehmen, damit die Feldlinien so

gekrümmt sind, daß Teilchen mit $z \neq 0$ eine Kraftkomponente zur Mittelebene des Kreisbeschleunigers erfahren.

Die Änderung der Kraft, die auf die Teilchen wirkt, entspricht für Bahnen, die vom Sollradius r_o abweichen, in linearer Näherung dem Hookeschen Gesetz mit einer „Federkonstanten“, aus der wiederum die Frequenz der Betatron-Oszillation berechnet werden kann. Die Zentripetalkraft für Teilchen mit abweichendem Radius $r_o + \Delta r$ ist

$$F_Z(r_o + \Delta r) = \frac{mv^2}{r_o + \Delta r} \cdot \frac{r_o - \Delta r}{r_o - \Delta r} \approx \frac{mv^2}{r_o^2} (r_o - \Delta r) = \frac{mv^2}{r_o} \left(1 - \frac{\Delta r}{r_o}\right). \quad (25)$$

Für die Lorentzkraft gilt

$$\begin{aligned} F_L(r_o + \Delta r) &= qv (B_{z0} + \Delta B_z) = qv \left(B_{z0} + \Delta r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \\ &\approx qv \left(B_{z0} - n B_{z0} \frac{\Delta r}{r_o} \right) = \frac{mv^2}{r_o} \left(1 - n \frac{\Delta r}{r_o} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

Die resultierende Gesamtkraft $\Delta F = F_Z - F_L$ ist

$$\Delta F(r_o + \Delta r) = -\frac{mv^2}{r_o^2} (1 - n) \cdot \Delta r \equiv -k \cdot \Delta r. \quad (27)$$

Mit k als „Federkonstante“ ist die Kreisfrequenz der horizontalen Betatron-Oszillation

$$\omega_\beta = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{v}{r_o} \sqrt{1 - n} = \omega_o \sqrt{1 - n}, \quad (28)$$

wobei ω_o die Kreisfrequenz der Umläufe ist. Der Quotient $\omega_\beta/\omega_0 = \sqrt{1 - n}$ gibt die Zahl der Schwingungen pro Umlauf an und wird als horizontaler Arbeitspunkt bezeichnet. Ohne Beweis sei hier angegeben, dass der vertikale Arbeitspunkt \sqrt{n} ist (siehe z.B. [13]). Für $n = 1/2$ ist demnach die Fokussierung in beiden Richtungen gleich stark.

3.2.3 Der Induktions-Linearbeschleuniger

Beim Induktions-Linearbeschleuniger(-Linac) ist der gerade Teilchenstrahl von ringförmigen magnetischen Kernen umgeben, in denen das magnetische Feld variiert. Der erste Induktions-Linac, Astron genannt, wurde 1963 von N. Christofilos am Radiation Laboratory der University of California (dem späteren Livermore Laboratory) fertig gestellt [14]. Es lieferte 3.5-MeV-Elektronen in 300 ns langen Pulsen mit einem Spitzenstrom von 350 A. Bei Hochfrequenz-Linacs (s.u.) ist die Ladung pro Puls viel geringer und vergleichbare Spitzenströme werden nur für sehr kurze Zeiten (~ 100 fs) erreicht. Induktions-Linacs werden für Hochstrom-Anwendungen verwendet, z.B. in der militärischen Forschung oder in Experimenten zur kontrollierten Kernfusion.

3.3 Beschleunigung durch Hochfrequenz: Allgemeines

Beim wiederholten Durchlauf eines hochfrequenten elektrischen Wechselfelds zum richtigen Zeitpunkt können im Prinzip beliebig hohe Teilchenenergien erreicht werden. Dies wird beim Linearbeschleuniger durch die wiederholte Anordnung gleichartiger Hochfrequenz(Hf)-Strukturen realisiert, bei Kreisbeschleunigern durch den wiederholten Durchlauf derselben Hf-Struktur.

Im Folgenden wird das elektrische und magnetische Feld in einem Wellenleiter beschrieben [15]. Rechteckige Wellenleiter werden oft zum Transport elektromagnetische Wellen verwendet, die z.B. in einem Klystron verstärkt wurden. Beschleunigende Strukturen sind zylindrischen Wellenleitern vergleichbar, weisen aber i.d.R. etwas kompliziertere Bauformen auf.

Allgemein gilt für die Komponente des elektrischen Felds parallel zu einer metallischen Oberfläche $E^{\parallel} = 0$, d.h. die Feldlinien enden senkrecht auf der Oberfläche, weil sich sonst die frei beweglichen Ladungen entlang der Oberfläche verschieben würden. Für die Komponente des Magnetfelds senkrecht zur Oberfläche gilt $B^{\perp} = 0$, weil sie wegen $\text{div} \vec{B} = 0$ gleich der senkrechten Komponente unter der Oberfläche sein müsste. Im Metall ist aber das elektrische Feld $\vec{E} = 0$ und wegen $\text{rot} E = -\partial \vec{B} / \partial t$ ist \vec{B} konstant bzw. bleibt null, wenn es anfangs null war.

Der allgemeine Ansatz für eine elektromagnetische Welle in z -Richtung ist

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x(x, y) \\ E_y(x, y) \\ E_z(x, y) \end{pmatrix} \cdot e^{i(k_z z - \omega t)} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x(x, y) \\ B_y(x, y) \\ B_z(x, y) \end{pmatrix} \cdot e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (29)$$

Dies in jeweils zwei Komponenten der Maxwellgleichungen $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B} = (1/c^2) \partial \vec{B} / \partial t$ eingesetzt ergibt

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_z E_y = i\omega B_x \quad ik_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega B_y \quad (30)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - ik_z B_y = -\frac{i\omega}{c^2} E_x \quad ik_z B_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{i\omega}{c^2} E_y \quad (31)$$

und nach $E_{x,y}$ bzw. $B_{x,y}$ aufgelöst

$$E_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k_z^2} \left(k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \quad E_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k_z^2} \left(k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \quad (32)$$

$$B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k_z^2} \left(k_z \frac{\partial B_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad B_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k_z^2} \left(k_z \frac{\partial B_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial E_z}{\partial x} \right). \quad (33)$$

Auf der rechten Seite jeder Gleichung stehen nur longitudinale Feldkomponenten. Es genügt also, die Ableitungen der longitudinalen Komponenten nach x und y zu kennen, um die transversalen Komponenten zu berechnen. Einsetzen in $\vec{\nabla} \vec{E} = 0$ (mit Ladungsdichte null) und $\vec{\nabla} \vec{B} = 0$ sowie Verwendung des allgemeinen Ansatzes für E_z und B_z entkoppelt die obigen Gleichungen:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_z^2 \right\} E_z = 0 \quad \text{und} \quad \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_z^2 \right\} B_z = 0. \quad (34)$$

Aus den Lösungen für $E_z(x, y)$ und $B_z(x, y)$ ergeben sich sofort die übrigen Feldkomponenten $E_{x,y}(x, y)$ und $B_{x,y}(x, y)$. Es zeigt sich, dass innerhalb der Äquipotentialfläche eines Wellenleiters $E_z = 0$ (transversal-elektrische TE-Welle) oder $B_z = 0$ (transversal-magnetische TM-Welle) ist, während $E_z = B_z = 0$ (transversal-elektromagnetische TEM-Welle) eine zusätzliche Randbedingung erfordert, z.B. einen weiteren Leiter auf anderem Potential, wie dies in einem Koaxialleiter der Fall ist.

Für den Fall eines rechteckigen Hohlleiters mit den Begrenzungen $0 \leq x \leq a$ und $0 \leq y \leq b$ soll eine TE-Welle explizit berechnet werden. Mit einem Separationsansatz $E_z(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ oder $B_z(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ und Division der obigen Gleichung für E_z oder B_z durch $X \cdot Y$ ergibt sich

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dX^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dY^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_z^2 = 0 \quad \text{und} \quad -k_x^2 - k_y^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_z^2 = 0, \quad (35)$$

wobei die Abkürzungen

$$k_x \equiv \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dX^2} \quad \text{und} \quad k_y \equiv \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dY^2} \quad (36)$$

für die beiden ersten Terme eingeführt wurden, die jeweils konstant sein müssen, um die Gleichung für jeden Wert von x und y zu erfüllen. Im Fall einer TE-Welle ($E_z = 0$) wird eine Lösung für $B_z = X \cdot Y$ gesucht. Die allgemeine Lösung ist

$$X = X_s \cdot \sin(k_x x) + X_c \cdot \cos(k_x x) \quad \text{und} \quad Y = Y_s \cdot \sin(k_y y) + Y_c \cdot \cos(k_y y), \quad (37)$$

aber mit den Feldkomponenten senkrecht zu den Wänden $B_x(x = 0) = B_x(x = a) = B_y(y = 0) = B_y(y = b) = 0$ müssen die Sinusterme verschwinden, da hier auch $\partial B_z / \partial x = 0$ und $\partial B_z / \partial y = 0$ sein muss. Somit gilt

$$X_s = Y_s = 0 \quad B_z(x, y) = B_0 \cdot \cos(k_x x) \cdot \cos(k_y y) \quad \text{mit} \quad k_x = \frac{n\pi}{a} \quad \text{und} \quad k_y = \frac{m\pi}{b}, \quad (38)$$

wobei n und m ganze Zahlen sind und die Welle mit TE_{nm} bezeichnet wird. Für $a > b$ ist die TE_{10} Welle diejenige mit der niedrigsten Frequenz $\omega_{10} = ck_x = c\pi/a$. Mit $B_z(x, y) = B_0 \cos(\pi x/a)$ sind die übrigen Feldkomponenten

$$E_x = \frac{i\omega}{(\omega/c)^2 - k_z^2} \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \quad E_y = -\frac{i\omega}{(\omega/c)^2 - k_z^2} \frac{\partial B_z}{\partial y} = E_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \quad (39)$$

$$B_x = \frac{ik_z}{(\omega/c)^2 - k_z^2} \frac{\partial B_z}{\partial y} = -B_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \quad B_y = -\frac{ik_z}{(\omega/c)^2 - k_z^2} \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0. \quad (40)$$

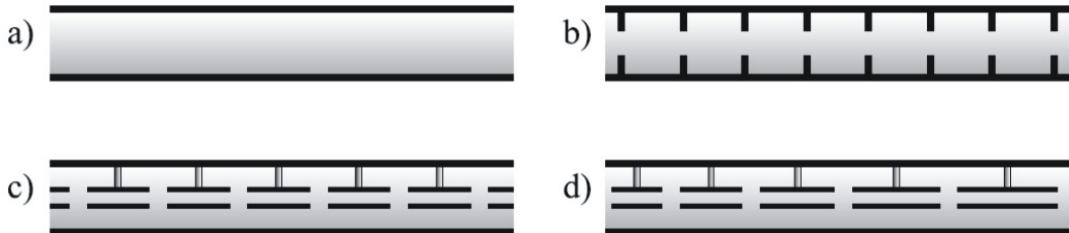


Abbildung 6: Schematische Darstellung zylindrischer Wellenleiter a) einfaches Rohr mit $v_{\text{Ph}} > c$, keine Beschleunigung möglich, b) Wellenleiter mit Irisblenden und damit $v_{\text{Ph}} \approx c$ als Elektronen-Linearbeschleuniger, c) äquidistante Driftröhren für relativistische Protonen mit geringen Geschwindigkeitszuwachs, d) Driftröhren variabler Länge für nicht-relativistische Protonen und schwere Ionen.

Die Wellenzahl k_z entlang des Wellenleiters ist

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{nm}}{c}\right)^2} \quad (41)$$

mit einer Grenzfrequenz ω_{nm} , wobei für eine Welle mit $\omega < \omega_{nm}$ das Argument der Wurzel negativ wird, d.h. die Welle propagiert nicht, sondern wird exponentiell gedämpft. Bemerkenswert ist, dass die Phasengeschwindigkeit

$$v_{nm} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{(\omega/c)^2 - (\omega_{nm}/c)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{nm}/\omega)^2}} \quad (42)$$

stets größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist, was u.a. auch für zylinderförmige Wellenleiter gilt.

3.4 Beschleunigung durch Hochfrequenz: Linearbeschleuniger

Der erste Linearbeschleuniger (vorgeschlagen 1924 von G. Ising [16], gebaut 1928 von Rolf Wideröe [11]) kann als Abfolge elektrostatisch geladener Röhren mit abwechselnder Polarität verstanden werden. Die Beschleunigung findet in den Spalten zwischen den Röhren statt. Während sich die Teilchen in einer Röhre befinden, wird die Polung umgedreht, so dass eine vor dem Durchlauf anziehende Röhre nun abstoßend wirkt. Der Abstand von einem Spalt zum nächsten ist durch die halbe Hf-Periodendauer T_{Hf} und die Teilchengeschwindigkeit v_i in der Röhre i gegeben

$$\Delta L_i = \frac{1}{2} T_{\text{Hf}} v_i = \frac{1}{2\nu_{\text{Hf}}} v_i. \quad (43)$$



Abbildung 7: Der Zwei-Meilen-Linearbeschleuniger am SLAC (Menlo Park, USA) ist seit seiner Fertigstellung im Jahr 1966 bis heute der größte Linearbeschleuniger weltweit. Ursprünglich wurden Elektronen für *fixed-target*-Experimente auf 50 GeV beschleunigt. In den 1990er Jahren wurden Elektronen und Positronen aus demselben Beschleuniger durch zwei gegenläufige Bögen zur Kollision gebracht (SLAC Linear Collider, SLC). Von 1999 bis 2008 diente die Maschine als Injektor für die asymmetrische B-Mesonen-Fabrik PEP II. Seit 2009 wird das letzte Drittel genutzt, um Elektronen für den Freie-Elektronen-Laser LCLS auf 14 GeV zu beschleunigen.

Bis zur Entwicklung des Klystrons und den Fortschritten der Hochfrequenz-Technik im 2. Weltkrieg (insbesondere Radar) war die Hf-Frequenz $\nu_{\text{Hf}} = 1/T_{\text{Hf}}$ auf wenige MHz begrenzt, so dass die Abstände ΔL_i für relativistische Teilchen extrem groß wären.

Bei heute üblichen Frequenzen im GHz-Bereich folgt die elektrische Energie nicht mehr den metallischen Strukturen, sondern breitet sich vorwiegend im freien Raum aus, was einen Wechsel der Anschauung von elektrisch aufgeladenen Röhren zu einem Wellenleiter erfordert.

In einem zylindrischen Wellenleiter ist die Phasengeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle entlang der Achse $v_{\text{ph}} > c$, so dass ein geladenes Teilchen der Welle nicht folgen kann. Bei Elektronen-Linearbeschleunigern wird die Phasengeschwindigkeit durch eine Änderung der Randbedingung mittels Irisblenden auf $v_{\text{ph}} \approx c$ herabgesetzt (*disk-loaded waveguide*, dt. auch als „Runzelröhre“ bezeichnet), siehe Abb. 6. Der weltweit größte Linearbeschleuniger am SLAC/USA besteht aus über 80000 kurzen Zylindern mit Irisblenden aus Kupfer (Abb. 7) [17]. Für Protonen und Ionen mit $v \ll c$ genügt das nicht, sondern hier wird das elektrische Feld bei falscher Phasenlage durch sog. Driftröhren abgeschirmt, während die Beschleunigung zu den phasenrichtigen Zeitpunkten in den Spalten stattfindet [18]. Eine solche Anordnung wird als Alvarez-Struktur bezeichnet (Luis Alvarez 1911-1988, Nobelpreis 1968). Abbildung 8 zeigt den Linearbeschleuniger UNILAC an der GSI/Darmstadt.

Beschleunigende Schwingungsmoden in Wellenleitern besitzen ein elektrisches Feld in longitudinaler Richtung und heißen bei laufenden Wellen TM_{ij} -Moden (transversal magnetisch, azimutale Knotenzahl i , radiale Knotenzahl j) und bei stehenden Wellen TM_{ijk} (longitudinale

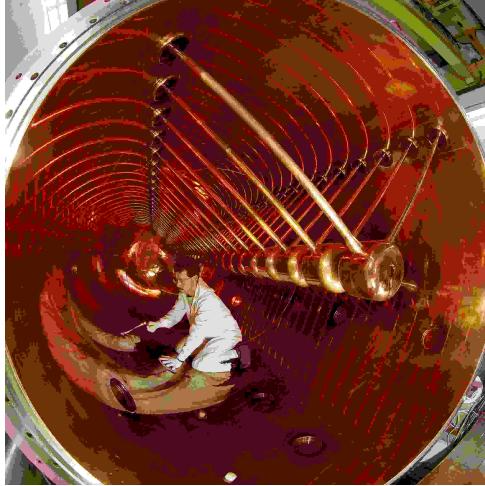


Abbildung 8: Blick in das Innere des 120 m langen Linearbeschleunigers UNILAC für schwere Ionen, eine sog. Alvarez-Struktur mit Hf-Frequenz 108 MHz. Zur Strahlfokusierung sind Quadrupolmagnete in die Driftröhren integriert. (Bild: A. Zschau. Rechte: GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH)

Knotenzahl k). In einem kurzen zylindrischen Hohlraum-Resonator (sog. *pillbox cavity*) wird i.d.R. die TM_{010} -Mode verwendet. Das mit der Kreisfrequenz ω oszillierende elektrische Feld parallel zur Zylinderachse ist

$$E_z(t, r) = E_0 e^{i\omega t} J_0(\omega r/c), \quad (44)$$

wobei J_0 die Besselfunktion 1. Art der Ordnung null ist. Ein radialer Knoten für $J(\omega R/c \approx 2.405) = 0$ verknüpft den Radius R der metallischen Wand mit der Kreisfrequenz ω .

Abbildung 9 verdeutlicht den gedanklichen Übergang von einem Plattenkondensator mit konstantem Feld zu einem hochfrequenten Wechselfeld. Das zeitabhängige elektrische Feld erzeugt ein Gegenfeld, so dass das Gesamtfeld $\sim J_0(kr)$ radial abnimmt, wobei $k = \omega/c$ ist, und sogar sein Vorzeichen wechselt. Die zylindrische Wand des Hohlraumresonators befindet sich an der ersten Nullstelle der Besselfunktion (siehe z.B. [19]).

Neben einzelnen Hohlraumresonatoren werden auch Strukturen verwendet, bei denen mehrere Einzelresonatoren (Zellen) gekoppelt sind und gemeinsam mit Hf-Leistung gespeist werden. Die am Freie-Elektronen-Laser FLASH bei DESY/Hamburg als Elektronenbeschleuniger eingesetzte Struktur ist in Abb. 10 gezeigt. Ein sog. Kryomodul besteht aus acht supraleitenden 9-zelligen Resonatoren, die aus hochreinem Niob bestehen und mit flüssigem Helium gekühlt werden. Die Resonanzfrequenz beträgt 1.3 GHz. Ein Modul erhöht die Elektronenenergie um 200-250 MeV. Der Beschleuniger des Europäischen Röntgenlasers XFEL, der zurzeit in Hamburg gebaut wird, wird aus ca. 100 Kryomodulen bestehen, was hohe Anforderungen an die Serienfertigung mit

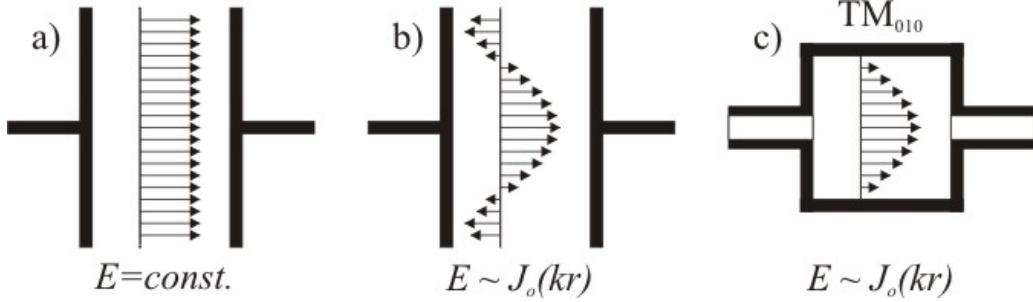


Abbildung 9: Gedanklicher Übergang vom Plattenkondensator mit zeitlich konstantem homogenen Feld zu einem Kondensator mit einem zeitlich oszillierenden Feld, dessen radiale Abhängigkeit der Bessel-Funktion $J_0(kr)$ folgt. Eine intuitive Herleitung findet man in [19], Vol. II, Chapter 23. Mit einer metallischen Wand bei der Nullstelle $r = 2.405/k$ ergibt sich ein Hohlraumresonator.

einem geforderten Gradienten von mindestens 23.6 MV/m stellt [20].

3.5 Beschleunigung durch Hochfrequenz: Kreisbeschleuniger

Bei Kreisbeschleunigern wird dieselbe Beschleunigungsstruktur mehrmals ausgenutzt. Verschiedene Möglichkeiten hierfür sind in Abb. 11 skizziert. Für zukünftige Elektronenbeschleuniger (Kollisionsmaschinen und Synchrotronstrahlungsquellen) zeichnet sich jedoch eine Renaissance der Linerabeschleuniger ab, denn:

- Beim e^+e^- -Speicherring LEP am CERN wurde Elektronen und Positronen auf je 50 GeV (zuletzt sogar 100 GeV) beschleunigt. Die durch Synchrotronstrahlung abgegebene Leistung ist proportional zu E^4/R , so dass eine weitere Erhöhung der Energie E bei gleichen Verlusten eine enorme Vergrößerung des Bahnradius R erfordern würde. Um mit Leptonen zu noch höherer Schwerpunktsenergie zu gelangen, bieten sich zwei gegenläufige Linearbeschleuniger an, die zurzeit unter dem Namen ILC (International Linear Collider) in einer weltweiten Kollaboration entwickelt werden. Daneben werden auch $\mu^+\mu^-$ -Speicherringe diskutiert, da die Strahlungsverluste mit der Teilchenmasse gemäß $1/m^4$ abnehmen.
- Für Speicherringe als Synchrotronstrahlungsquellen ergeben sich Strahleigenschaften wie transversale Größe, Energiebreite und Teilchenpaketlänge aus einem Gleichgewicht von Aufheizung und Dämpfung durch Synchrotronstrahlung. Bei Linearbeschleunigern ist die Strahlqualität durch die Eigenschaften der Quelle gegeben und kann die in Speicherringen erreichbaren Parameter übertreffen. Insbesondere kann die Teilchenpaketlänge ca. 1000-fach kleiner und der Spitzenstrom entsprechend höher sein, was für Freie-Elektronen-Laser von entscheidender Bedeutung ist.

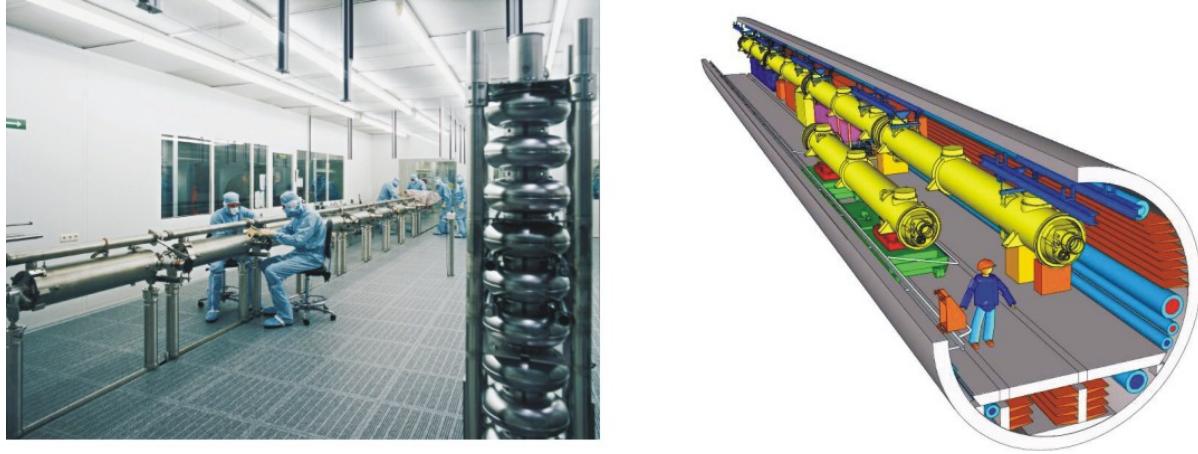


Abbildung 10: Supraleitende Struktur aus hochreinem Niob zur Beschleunigung von Elektronen, bestehend aus neun gekoppelten Resonatoren (sog. TESLA-Cavity). Links Montage im Reinraum, rechts Beschleunigerstrukturen im zukünftigen Tunnel des Europäischen Röntgenlasers (DESY).

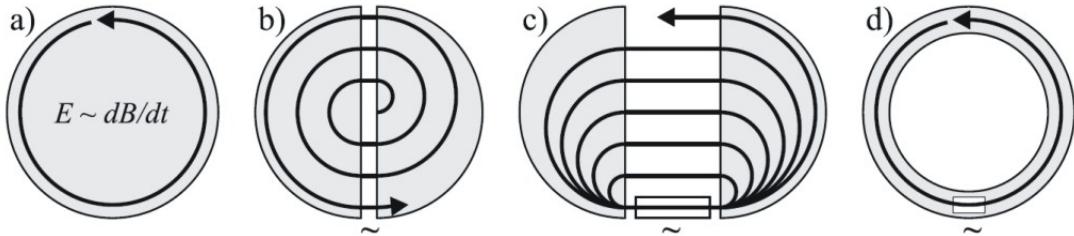


Abbildung 11: Schematische Darstellung verschiedener Kreisbeschleuniger: a) Betatron, b) Zyklotron, c) Mikrotron, d) Synchrotron. Die graue Fläche wird jeweils von einem magnetischen Feld ausgefüllt.

3.5.1 Zyklotron

Das Zyklotron wurde 1929 als Beschleuniger für Protonen vorgeschlagen [21] und erstmals 1932 verwirklicht. Für ein Teilchen (Ladung q , Masse $m = m_0\gamma$, Geschwindigkeit v) auf einer Kreisbahn mit Radius r im Magnetfeld $B \perp v$ gilt

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \quad \frac{1}{r} = \frac{qB}{mv} = \frac{qB}{p} = \frac{qB}{m_0\gamma\beta c}. \quad (45)$$

Im einfachsten Fall (Abb. 12) besteht ein Zyklotron aus zwei halbkreisförmigen Segmenten („Dee's“), zwischen denen eine Wechselspannung besteht. Die Teilchen erfahren jeweils nach

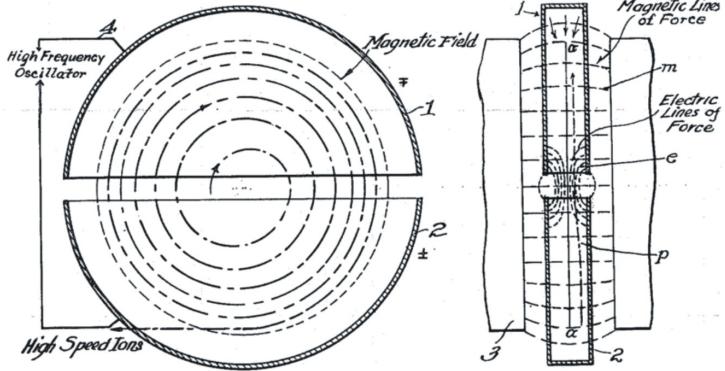


Abbildung 12: Prinzip des Zyklotrons, aus dem US-Patent „Method and Apparatus for the Acceleration of Ions“ (E. O. Lawrence, 1934).

einem Halbkreis eine Beschleunigung und bewegen sich anschließend auf einem Halbkreis mit größerem Radius. Die Frequenz ω_{Hf} der Wechselspannung muß ein ganzzahliges Vielfaches h der Umlaufsfrequenz ω_0 sein:

$$\omega_{\text{Hf}} = h \omega_0 = h 2\pi f_0 = h 2\pi \frac{v}{2\pi r} = h \frac{q B}{m_o \gamma}. \quad (46)$$

Das klassischen Zyklotron mit $\gamma \approx 1$ und konstanter Hochfrequenz ist auf schwere Teilchen (Protonen, Ionen) bei niedriger Energie begrenzt, die sich in einem konstanten Magnetfeld B unabhängig von der Geschwindigkeit v oder der Energie mit konstanter Frequenz (der sog. Zyklotronfrequenz)

$$\omega_z = 2\pi \frac{v}{2\pi R} = \frac{q}{m} B \quad (47)$$

bewegen, solange $m \approx m_o$ gilt. Um höhere Energien zu erreichen bietet sich an, die Hochfrequenz $\omega_{\text{Hf}} \sim 1/\gamma$ zu variieren. Ein solches Synchro-Zyklotron liefert allerdings keinen kontinuierlichen Strahl. Aus der höheren Energie und der zwangsläufig längeren Bahn ergibt sich die Notwendigkeit, den Strahl zu fokussieren. Dies kann mit Hilfe der „schwachen“ Fokussierung geschehen, die horizontal und vertikal simultan wirkt. Horizontal ergibt sich ein rein geometrischer Fokusseffekt aus der Tatsache, dass versetzte Kreisbögen gleichen Durchmessers einander kreuzen. Vertikal bewirkt das mit zunehmendem Radius abfallende Feld, dass vertikal abweichende Teilchen eine Kraftkomponente zur Mittelebene hin erfahren.

Ein kontinuierlicher Strahl lässt sich mit dem Isochron-Zyklotron erreichen, bei dem die Hochfrequenz konstant gehalten wird, das Magnetfeld aber $\sim \gamma$ mit zunehmendem Radius steigt. Da dies vertikal defokussiert wirkt, ist ein neues Fokussierschema erforderlich, bei der das Magnetfeld sowohl vom Radius als auch vom Azimutalwinkel abhängt $B = B(r, \varphi)$, wie bereits 1938

erkannt wurde [22]. Dies ist noch nicht die ‘‘starke‘‘ Fokussierung, die erst um 1950 gefunden wurde, sondern ein Effekt, der auftritt, wenn die Teilchenbahn nicht senkrecht auf die Kante eines Magneten trifft. Diese ‘‘Kantenfokussierung‘‘ wird weiter unten beschrieben. Durch die azimutale Segmentierung des Magneten in Sektoren mit abwechselnd hohem Feld (‘‘hill‘‘ oder ‘‘ridge‘‘) und niedrigem Feld (‘‘valley‘‘) entsteht der sog. Thomas-Winkel, d.h. eine Abweichung vom senkrechten Auftreffen auf die Sektorengrenzen. Diese Winkel kann dadurch vergrößert werden, dass die Kanten spiralförmig gestaltet werden, was bei vielen Isochron-Zyklotrons oft der Fall ist.

Bei schweren Ionen ist die kinetische Energie pro Nukleon T/A von Interesse, wobei T die kinetische Energie

$$T = m_o c^2 (\gamma - 1) = \frac{p^2}{(\gamma + 1)m_o} = \frac{B^2 r^2 Z^2 e^2}{(\gamma + 1)A m_u}, \quad (48)$$

A die atomare Massenzahl, m_u die atomare Masseneinheit und Z die Ladungszahl ist. Für den Impuls wurde $p = B r q = B r Z e$, für die Masse $m_o = A \cdot m_u$ eingesetzt. Damit ist die kinetische Energie pro Nukleon für ein Zyklotron mit Radius $r = R$

$$\frac{T}{A} = \frac{B^2 R^2 Z^2 e^2}{(\gamma + 1)A^2 m_u} = K \left(\frac{Z}{A} \right)^2. \quad (49)$$

Der Parameter K wird i.d.R. in MeV angegeben und entspricht der kinetischen Energie, die ein Proton in dem betreffenden Zyklotron erreichen kann. Diese Energie wird durch die ‘‘magnetische Steifigkeit‘‘ $B \cdot R$ der Protonen am Außenrand des Zyklotrons begrenzt.

3.5.2 Mikrotron

Da sich beim Zyklotron der Lorentz-Faktor nicht wesentlich ändern darf, ist es zur Beschleunigung von Elektronen ungeeignet. Das Mikrotron ist ebenfalls ein Kreisbeschleuniger mit einem Bahnradius, der mit der Teilchennnergie zunimmt. Die Geschichte seiner Entwicklung ist z.B. in [23] beschrieben. Im Gegensatz zum Zyklotron ändert sich hier $\gamma = E/(m_o c^2)$ bei jedem Umlauf um eine ganze Zahl (mindestens $h = 1$). Da dies nur mit Elektronen ($m_o c^2 = 511$ keV) erreichbar ist, ist das Mikrotron für schwerere Teilchen nicht geeignet. Die Zeitdifferenz zweier Umläufe

$$\Delta t = \frac{2\pi r_{i+1}}{v_{i+1}} - \frac{2\pi r_i}{v_i} = 2\pi \frac{m_o(\gamma_{i+1} - \gamma_i)}{qB} = 2\pi \frac{E_{i+1} - E_i}{qBc^2} \quad \text{mit} \quad \frac{r_i}{v_i} = \frac{m_o \gamma_i}{qB}. \quad (50)$$

muß ein ganzzahliges Vielfaches der Hochfrequenzperiode sein. Mit der Bedingung $\Delta t = h \cdot T_{\text{HF}} = h/f_{\text{HF}}$ ist der pro Umlauf notwendige Energiegewinn gegeben durch

$$\Delta E = E_{i+1} - E_i = h \cdot \frac{qBc^2}{2\pi f_{\text{HF}}}. \quad (51)$$

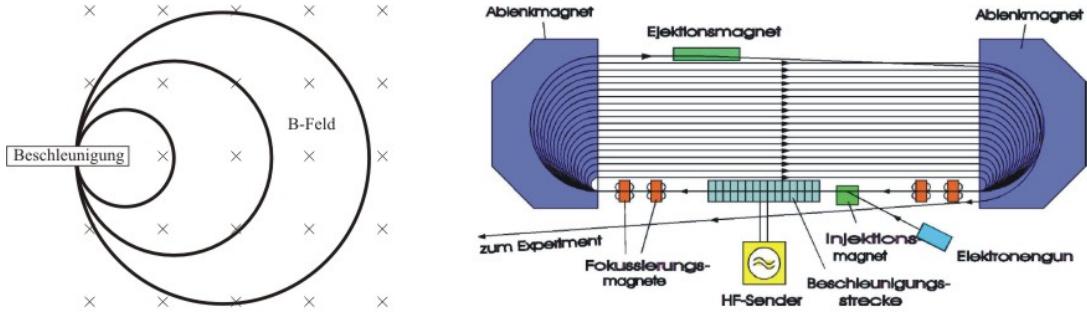


Abbildung 13: Prinzip des Mikrotrons (links) und sog. Racetrack-Mikrotron (rechts). Die geraden Strecken des Racetrack-Mikrotrons bieten Platz für einen kurzen Linearbeschleuniger sowie für Einrichtungen zur Fokusierung und Diagnose des Strahls.

Neben dem „klassischen“ Mikrotron mit kreisförmigen Bahnen ist das sog. Rennbahn(*racetrack*)-Mikrotron eine weit verbreitete Bauform (siehe Abb. 13), bei dem sich zwischen zwei Ablenk magneten, in denen die Elektronen halbkreisförmige Bahnen beschreiben, gerade Strecken befinden. Dies ermöglicht den Einbau eines Linearbeschleunigers als Hf-Strecke und bietet auch Platz für fokussierende Magnete sowie Instrumente zur Strahldiagnose. Weitere Bauformen sind das *double-sided*-Mikrotron mit vier Ablenk magneten, das als 1,5-GeV-Beschleuniger an der Universität Mainz aufgebaut wurde [24], sowie das Hexatron mit sechs Ablenk magneten, das als 4-GeV-Maschine am Argonne National Laboratory/USA vorgeschlagen, aber nicht verwirklicht wurde. Die Aufteilung in mehr als zwei Ablenk magneten reduziert die Gesamtmasse des Magnetjochs.

Allen Mikrotrons ist gemeinsam, dass die Elektronenpakete kontinuierlich aufeinander folgen können, was insbesondere für Koinzidenzexperimente von Interesse ist. Gängige Synonyme für „kontinuierlich“ in diesem Sinne sind: Dauerstrich, DC (*direct current*), CW (*continuous wave*).

3.5.3 Synchrotron

Während beim Mikrotron und Zyklotron der Materialaufwand etwa mit der dritten Potenz des äußeren Radius steigt, ist beim Synchrotron der Bahnradius konstant, so dass wesentlich höhere Strahlenergien mit vertretbarem Aufwand erreichbar sind [25, 26]. Bei konstantem Radius steigt beim Beschleunigungsvorgang das Magnetfeld gemäß Gl. (45) synchron mit $\beta\gamma$ (daher der Name „Synchrotron“). Damit die Hf-Frequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Umlauffrequenz ist, muss das Magnetfeld nach Gl. (46) auch $\sim \gamma$ sein, was bei Elektronensynchrotrons mit $\beta \approx 1$ erfüllt ist. Bei Synchrotrons, in die Protonen oder Ionen mit mäßiger Energie eingeschossen werden, muss zusätzlich die Hochfrequenz zeitlich variiert werden.

Ein vollständiger Zyklus von Injektion, Hochfahren des Magnetfelds, Ejektion und Abklingen des Felds kann eine halbe Stunde (LHC/CERN), ein paar Sekunden (z.B. 6.5 s bei DEL-

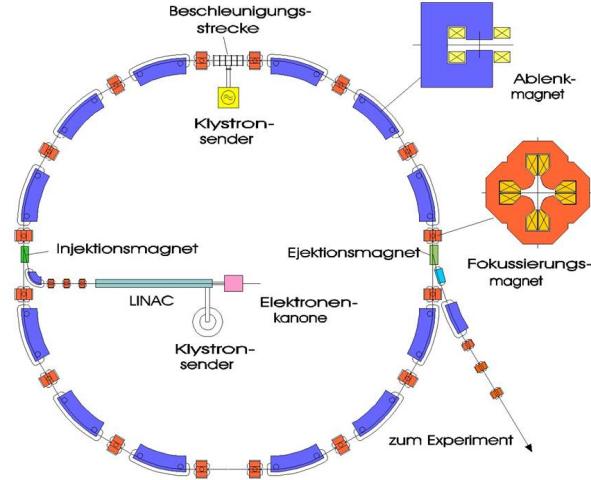


Abbildung 14: Schematische Darstellung eines Synchrotrons mit Linac als Vorbeschleuniger. Das Synchrotron besteht aus einer Magnetstruktur (Dipole zur Ablenkung, Quadrupole zur Fokussierung des Strahls) sowie einer kurzen Beschleunigungsstrecke mit einem oder mehreren Hohlraumresonatoren.

TA/Dortmund) oder auch kürzer (z.B. 0.1 s bei BESSY/Berlin) dauern. Die beschleunigten Teilchen stehen nur bei der Extraktion zur Verfügung. Synchrotrons liefern also nur einen gepulsten Strahl. Zyklen hoher Frequenz (mehrere Hz) lassen sich dadurch erreichen, dass die Synchrotron-Magnete zusammen mit einer Kondensatorbank einen Schwingkreis (sog. White-Kreis) bilden. Wenn das Magnetfeld abklingt, wird dessen Energie im elektrischen Feld der Kondensatoren gespeichert und steht – bis auf ohmsche Verluste – für den nächsten Zyklus zur Verfügung (siehe z.B. [28]).

Synchrotrons benötigen einen Vorbeschleuniger, weil bei niedrigem Feld die Elektromagnete durch die Hysterese der Eisenkerne zu ungenau sind, um die Teilchen auf der Bahn zu halten. Typischerweise durchlaufen die Teilchen vor dem Einschuss in ein Synchrotron einen Linearbeschleuniger oder (bei Elektronen) ein Mikrotron.

3.5.4 Speicherring

Speicherringe (von R. Wideröe 1953 patentiert und „Kernmühlen“ genannt [27]) bieten den Vorteil, dass ein beschleunigter Teilchenstrahl mehrmals verwendet werden kann, z.B. 10^6 mal pro Sekunde bei nahezu Lichtgeschwindigkeit und 300 m Umfang. Die Elektronen in einer Synchrotronstrahlungsquelle geben pro Umlauf nur einen kleinen Bruchteil ihrer Energie ab, der leicht zurückgeführt werden kann. Bei Kollisionsmaschinen (z.B. e^+e^- oder $p\bar{p}$) durchdringen sich die Teilchenpakete nahezu ungestört und können ebenfalls wiederverwendet werden. Noch wichtiger ist die Tatsache, dass bei gegenläufig kollidierenden Teilchen eine weitaus höhere Schwerpunkt-



Abbildung 15: Zwei Speicherringe, links der weltweit erste e^+e^- -Speicherring AdA in Frascati/Italien (Strahlenergie 250 MeV), rechts der $p\bar{p}$ -Speicherring Tevatron am Fermilab in Batavia/USA (980 GeV, 2011 abgeschaltet) mit dem sog. *main injector* im Vordergrund.

senergie erreicht werden kann als bei *fixed-target*-Experimenten, so dass Teilchen höherer Masse erzeugt werden können.

Synchrotrons und Speicherringe sind ähnlich aufgebaut: es sind ringförmige Maschinen mit konstantem Bahnradius und Hochfrequenz-Beschleunigung an einer oder wenigen Stellen entlang ihres Umfangs. Speicherringe für hohe Energien sind oft auch Synchrotrons, d.h. nach der Injektion von Teilchen bei niedriger Energie werden diese beschleunigt (sog. *ramping*) und bleiben nach Erreichen der Endenergie für viele Stunden gespeichert. Bei Speicherringen mit mäßiger Energie (z.B. Synchrotronstrahlungsquellen) werden trotzdem die Aufgaben des Beschleunigens und Speicherns von zwei verschiedenen Maschinen übernommen, die verschiedenen Anforderungen genügen müssen.

Beim beschleunigenden Synchrotron ist es wichtig, dass Energiezuwachs und Feldanstieg synchron erfolgen, da die Teilchen sonst ihre Sollbahn verlassen. Erfolgt die Änderung des magnetischen Felds rasch (wenige Sekunden oder schneller), müssen Wirbelströme berücksichtigt werden. Hierzu muss das Eisenjoch jedes Magneten aus isolierten Lamellen bestehen (wie bei Transformatoren) und auch die Wandstärke der Vakuumkammer darf nicht zu groß sein. Damit eine dünnwandige Vakuumkammer nicht durch den Luftdruck kollabiert, kann es erforderlich sein, sie durch Querrippen zu verstauen.

Die wesentliche Anforderung an einen Speicherring besteht darin, die Teilchen möglichst lange zu speichern. Dies erfordert ein sehr gutes Vakuum, da die gespeicherten Teilchen sonst durch elastische (Winkeländerung) oder inelastische (Energieverlust) Stöße mit den Restgasatomen verloren gehen. Auch die Kollisionen gespeicherter Teilchen untereinander begrenzen die Strahllebensdauer. Ferner ist es wichtig, daß der gespeicherte Strahl von hoher Qualität (z.B. kleine Emittanz, siehe weiter unten) und möglichst stabil ist. Teilchen in einem Speicherring geraten z.B. durch Bodenvibrationen oder Einstreuung der Netzfrequenz (50 Hz und ganzzahlige

Vielfache davon) in Schwingungen, oder sie regen sich gegenseitig über ihre eigenen elektromagnetischen Felder (*wake fields*) zu sogenannten „kollektiven“ Instabilitäten an. Gegen beide Arten der Teilchenbewegung gibt es passive Vorkehrungen (d.h. die Ursache wird minimiert) sowie aktive Maßnahmen in Form von Regelschleifen, bei denen die Teilchenposition detektiert und aktiv korrigiert wird.

Speicherringe dienen verschiedenen Zwecken, entweder als Kollisionsmaschinen (*collider*) mit gegenläufigen Teilchenstrahlen, als Synchrotronstrahlungsquellen oder auch als Dämpfungsringe. Der erste e^+e^- -Speicherring war AdA (*anello di accumulatione*) in Frascati/Italien im Jahr 1961 (ausführlich beschrieben in [29]). Die höchste Elektronen/Positronen-Energie wurde bei LEP/CERN mit zunächst 50 GeV und später 100 GeV erreicht, wobei die Verluste durch Synchrotronstrahlung der begrenzende Faktor waren [30]. Sogenannte „Fabriken“ zielen nicht auf hohe Energie, sondern auf hohe Reaktionsrate (Luminosität) ab. Zwei B-Mesonen-Fabriken mit einer Schwerpunktsenergie von 10.6 GeV – bei der $\Upsilon(4S)$ -Resonanz, die in $B\bar{B}$ -Mesonen zerfällt – wurden in den 1990er Jahren gebaut, PEP-II am SLAC/USA und KEK-B in Japan, wobei PEP-II den Betrieb inzwischen eingestellt hat. Ferner wird in Frascati die Φ -Fabrik DAΦNE bei einer Schwerpunktsenergie von 1.02 GeV betrieben. Hadronische Kollisionsmaschinen sind z.B. LHC/CERN (pp mit je bis zu 7 TeV, [31]), das Tevatron am Fermilab bei Chicago ($p\bar{p}$ mit je 980 GeV, 2011 abgeschaltet), und RHIC in Brookhaven (schwere Ionen mit 200 GeV pro Nukleon). HERA bei DESY war als ep-Collider (27.5 GeV Elektronen, 920 GeV Protonen) bis 2007 in Betrieb. In Synchrotronstrahlungsquellen werden Elektronen oder Positronen gespeichert, um Röntgenstrahlung für die Materialforschung zu erzeugen. SPring-8 in Japan ist mit Positronen von 8 GeV die Synchrotronlichtquelle mit der höchsten Strahlenergie, PETRA-III bei DESY seit 2009 die Quelle mit dem größten Umfang (2304 m, 6 GeV Elektronen, [32]). Dämpfungsringe sind Speicherringe, in denen Teilchen für kurze Zeit umlaufen, um für ihre weitere Verwendung „gekühlt“ zu werden, d.h. die Verteilung der Teilchen in Ort, Winkel und Energie wird verringert. Zurzeit ist geplant, den ILC (*International Linear Collider*) mit Dämpfungsringen von 6,7 km Umfang auszustatten [33].

Warum benötigen Speicherringe ein beschleunigendes Hochfrequenzsystem? In Elektronenringen müssen die Energieverluste, die pro Umlauf durch Synchrotronstrahlung entstehen, ausgeglichen werden. Dies kann bei einer sinusförmigen Hf-Spannung an zwei Phasenpositionen geschehen, von denen allerdings nur eine phasen-fokussierend wirkt (s. Abschnitt 4.4). Elektronenstrahlen bestehen also stets aus Teilchenpaketen (*bunches*) im Abstand von mindestens einer Hf-Wellenlänge. Bei hadronischen Strahlen ist der Energieverlust durch Synchrotronstrahlung zwar meist vernachlässigbar (der LHC ist die erste Ausnahme), doch ist es meist wünschenswert, die Teilchen mit der phasen-fokussierenden Wirkung eines Hf-Systems in Pakete zu bündeln. Fällt das Hf-System bei einem hadronischen Speicherring aus, geht der Strahl i.d.R. nicht verloren, sondern die Pakete zerfließen zu einem kontinuierlichen Strahl (sog. *coasting beam*).

3.6 Neue Beschleunigungskonzepte

In normalleitenden Linearbeschleunigern sind Feldgradienten von einigen 10 MV/m möglich, wobei die Kühlung der Struktur eine praktische Begrenzung darstellt. Bei supraleitenden Strukturen stellt das kritische Magnetfeld, bei dem die Supraleitung zusammenbricht, eine prinzipielle Grenze dar, die bei ca. 50 MV/m erreicht wird. Praktische Grenzen liegen in der Oberflächenbehandlung der hochreinen Niob-Strukturen und führen zu ca. 25 MV/m in der Serienproduktion. Der Wunsch nach höheren Feldstärken sowie kompakteren und kostengünstigeren Beschleunigern hat zu einigen alternativen Ideen geführt, wie man Teilchen beschleunigen könnte.

3.6.1 Laser-basierte Methoden

Von besonderem Interesse ist es, das enorme elektrische Feld nutzbar zu machen, das in einem Kurzzeit-Laserpuls steckt (Größenordnung GV/m bis TV/m). Im Vakuum ist das elektrische Feld von Licht stets senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung, so dass ein mitfliegendes Teilchen nicht beschleunigt werden kann – dies ist die Aussage des sog. Lawson-Woodward-Theorems (siehe z.B. [34]). Dies gilt nicht mehr, wenn zusätzliche Randbedingungen wie Magnetfelder, geometrische Begrenzungen oder Propagation in einem Gas vorliegen.

Beim inversen Freie-Elektronen-Laser (FEL) wird den Elektronen Energie aus elektromagnetischer Strahlung (Licht) zugeführt, während der „normale“ FEL ein Verstärker für Licht ist, bei dem Energie von den Elektronen in das Lichtfeld fließt. Beide Fälle lassen sich so beschreiben, dass Elektronen in einem Undulator (einer periodischen Abfolge abwechselnd gepolter Magnete) entlang einer sinusförmigen Bahn fliegen und dabei eine Bewegungskomponente senkrecht zur mittleren Flugrichtung haben – und damit parallel zum elektrischen Feld eines mitfliegenden Lichtpulses, so dass ein Energieaustausch stattfinden kann.

Relativ erfolgreich ist seit einigen Jahren das Konzept der Laser-Plasma-Beschleunigung, das bereits 1979 vorgeschlagen wurde [35]. Ein hochintensiver Laserpuls ionisiert Gas in einem Jet oder einer dünnen Kapillare und bewirkt so eine Plasmawelle, in der hohe elektrische Felder in longitudinaler Richtung auftreten. Bei geeigneter Wahl aller Parameter (Laserpulsenergie, Gassorte, Druck, Geometrie) entsteht hinter dem Laserpuls eine „Blase“ (*bubble*) von positiv geladenen Ionen (s. Abb. 16). Wenn die Plasmawelle „bricht“ (*wave-breaking regime*), werden Elektronen von der Blase eingefangen und mit relativ schmaler Energieverteilung beschleunigt. Dieser Prozess wurde zunächst in Simulationen entdeckt und 2004 experimentell bestätigt [36]. Zwar betrug die Energiebreite beschleunigter Elektronen noch viele Prozent (im Gegensatz zu typisch 0.1% in konventionellen Beschleunigern), doch war dies gegenüber den vorher stets kontinuierlichen Energieverteilungen ein Durchbruch. Im Jahr 2006 gelang es, Elektronen auf 1 GeV über eine Länge von nur 33 mm zu beschleunigen, allerdings nur in wenigen Einzelschüssen [37]. Bei Energien um 200 MeV hat sich die Stabilität und Energiebreite solcher Strahlen seitdem merklich verbessert. Protonenstrahlen mit schmaler Energieverteilung konnten bislang nicht erzeugt werden.

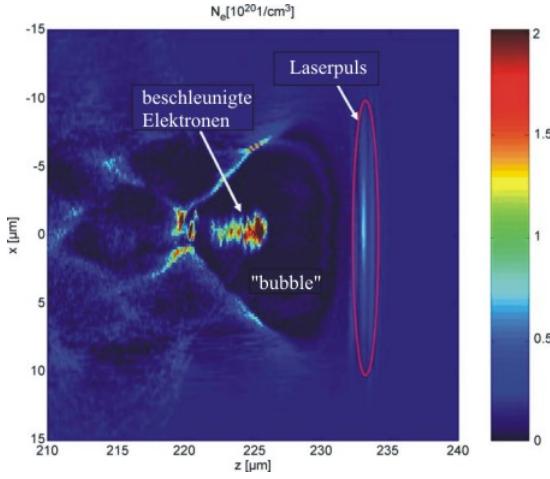


Abbildung 16: Simulation von beschleunigten Elektronen in einer Plasmawelle. Farbcodiert ist die Elektronendichte. Hinter einem sehr kurzen und intensiven Laserpuls (typisch 10 fs, 100 TW), der in ein Gas eingeschossen wird, entsteht ein blasenförmiger Bereich mit Elektronendefizit („bubble“) und hohem elektrischen Feld in longitudinaler Richtung. Bemerkenswert ist, dass die Länge der Elektronenverteilung nur wenige μm beträgt.

3.6.2 Plasma-Wakefield-Beschleuniger

Eine Plasmawelle kann auch mit einem kurzen Teilchenpaket in einem Gas angeregt werden, so dass ein nachfolgendes Teilchenpaket beschleunigt wird [38]. Die übliche Bezeichnung solcher Beschleuniger ist *plasma wakefield accelerator* (PWFA). Die Idee hierbei ist, die Teilchenenergie eines konventionellen Beschleunigers durch einen Plasmabeschleuniger („Nachbrenner“) auf einer kurzen Strecke erheblich zu steigern. Solche Experimente fanden am SLAC/USA statt, bei denen die Strahlenenergie des Linearbeschleunigers von 42 GeV beim Durchflug einzelner Elektronenpaketen durch gasförmiges Lithium für einige Elektronen verdoppelt werden konnte, allerdings nur in der Spitze einer breiten Energieverteilung [39]. Experimente mit zwei aufeinander folgenden Paketen (*drive bunch* und *witness bunch*) stehen noch aus.

3.6.3 Zwei-Strahl-Beschleuniger

Seit über 10 Jahren wird am CERN/Genf an einem Konzept für einen e^+e^- -Collider mit einer Schwerpunktsenergie um 3 TeV und Feldgradienten über 100 MV/m gearbeitet. Das Projekt heißt CLIC (*Compact Linear Collider*), wobei „kompakt“ eine Gesamtlänge von 48 km bedeutet. Zum Vergleich: eine Erweiterung des ILC (*International Linear Collider*) auf ein Schwerpunktsenergie von nur 1 TeV wäre ebenfalls 50 km lang. Bei CLIC sollen Elektronenstrahlen mit hohem Strom (*drive beams*) in konventionellen Linearbeschleunigern auf ca. 2.4 GeV beschleunigt werden und ihre Energie an Hf-Felder in speziellen Resonatoren abgeben. Die so erzeugte Hf-

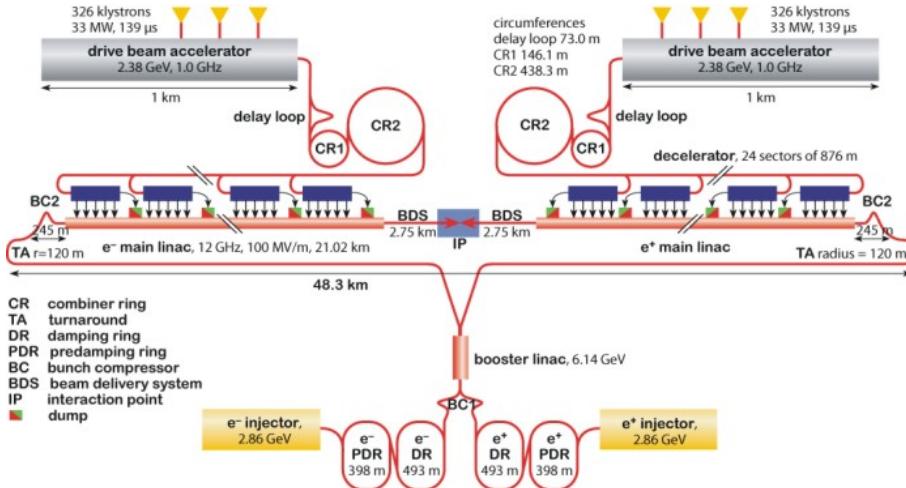


Abbildung 17: CLIC (Compact Linear Collider), eine Studie für eine e^+e^- -Kollisionsmaschine mit einer Schwerpunktenergie von 3 TeV am CERN.

Leistung wird dann verwendet, um Elektronen und Positronen (*main beams*) mit kleinerem Strahlstrom auf höhere Energie zu beschleunigen. Das Prinzip ähnelt also einem Transformator und wurde am CERN in mehreren CLIC *test facilities* (CTF, CTF2 und zurzeit CTF3) erprobt [40].

4 Teilchen im Hochfrequenzfeld, longitudinale Strahldynamik

Im letzten Kapitel wurden Beschleuniger danach klassifiziert, wie das zur Energiezufuhr notwendige elektrische Feld erzeugt wird, wobei die Beschleunigung durch hochfrequente Wechselfelder klar dominiert. Daher soll – nach einem kurzen Abschnitt über Teilchenquellen – die Bewegung von Teilchen unter dem Einfluss von Hochfrequenz(Hf)-Feldern in diesem Kapitel näher betrachtet werden.

4.1 Einschuss in das Hochfrequenzfeld

Teilchenquellen liefern oft einen kontinuierlichen Strahl, während die Beschleunigung in einem hochfrequenten elektrischen Feld nur bei der richtigen Polarität und Phasenlage möglich ist.

4.1.1 Teilchenquellen

Bei Quellen für Protonen und schwerere Ionen müssen die entsprechenden Atom freigesetzt, ionisiert und zunächst elektrostatisch beschleunigt werden. Entweder liegen die Atome als Gas

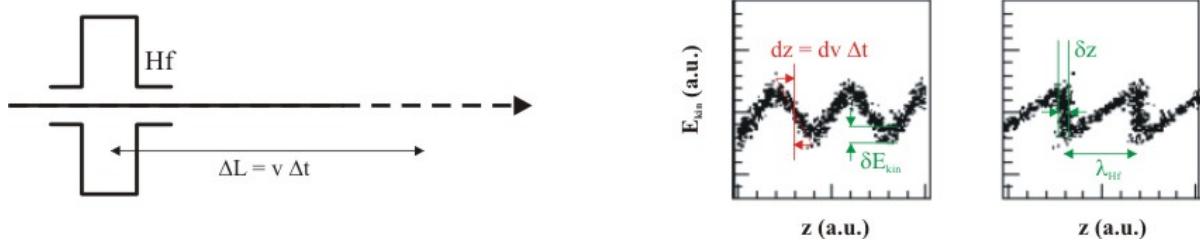


Abbildung 18: Schema der Funktionsweise eines Prebunchers. Ein Hochfrequenz-Resonator moduliert die kinetische Energie der Teilchen. Durch den Geschwindigkeitsunterschied ergibt sich nach einer Flugstrecke ΔL ein Wegunterschied dz und damit eine Dichtemodulation des Teilchenstrahls. Der Pulsabstand entspricht der Hf-Wellenlänge λ_{Hf} , die Pulslänge δz hängt von der Energiebreite δE_{kin} ab.

vor, oder sie werden aus einer Oberfläche durch Verdampfen, Sputtering (Beschuss mit einem Teilchenstrahl) etc. freigesetzt. Die Ionisation erfolgt meist durch Stoßionisation z.B. mit Elektronen in einer Gasentladung oder durch Einstrahlen einer Mikrowelle in Resonanz mit der Zyklotronfrequenz der Elektronen in einem Magnetfeld.

Elektronenstrahlen werden meist mit Hilfe einer elektrisch geheizten Kathode erzeugt (Glühemission von Elektronen, auch Edison-Richardson-Effekt genannt). Kurze Elektronenpakete, z.B. für Freie-Elektronen-Laser, erhält man durch Fotoemission mit Laserpulsen. Elektronenquellen mit Feldemission (d.h. Herauslösen von Elektronen mit einem ausreichend starken elektrischen Feld) werden an Beschleunigern noch nicht verwendet.

4.1.2 Chopper und Prebuncher

Der oft kontinuierliche Strahl einer Teilchenquelle soll vor der Beschleunigung mit Hochfrequenz in einen gepulsten Strahl umgewandelt werden. Ein Vorteil dabei ist, dass man Teilchen mit der falschen Phasenlage bezüglich des Hf-Felds nicht unkontrolliert verliert und die Erzeugung radioaktiver Elemente in den Wänden des Beschleunigers minimiert.

Wenn man einen kontinuierlichen Strahl periodisch mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ über eine Blende der Breite D im Abstand L bewegt, entstehen Teilchenpulse, deren Dauer $\tau = D/(L\dot{\varphi})$ beträgt. Bei einem solchen „Chopper“ gehen alle Teilchen außerhalb dieses Zeitfensters verloren.

Ein „Prebuncher“ ist eine Hochfrequenz-(Hf-)Strecke mit Spannungsamplitude V_0 , in der die (nicht-relativistische) kinetische Energie der Teilchen sinusförmig moduliert wird, so dass über Laufzeitunterschiede eine Dichtemodulation entsteht, wie in Abb. 18 schematisch dargestellt. Die kinetische Energie ändert sich nach Durchlaufen der Hf-Strecke um

$$\Delta E_{\text{kin}} = eV_0 \sin k_{\text{Hf}} z, \quad \text{wobei} \quad k_{\text{Hf}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{Hf}}} \quad \text{ist.} \quad (52)$$

Die maximale Steigung der Energiemodulation ist $eV_0 k_{\text{Hf}}$, wie man durch Differenzieren sieht. Für eine optimale Dichtemodulation sollte also in linearer Näherung ein Teilchen mit maximaler

Energieabweichung eV_o eine longitudinale Abweichung von $dz = 1/k_{\text{Hf}} = \lambda_{\text{Hf}}/(2\pi)$ erfahren. Dies geschieht nach einer Laufzeit $\Delta t = dz/dv$, wobei die Geschwindigkeitsabweichung dv durch

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dv} = mv \quad \text{und damit} \quad dv = \frac{dE_{\text{kin}}}{mv} = \frac{eV_o}{mv} \quad (53)$$

gegeben ist. Die Dichtemodulation erfordert also eine Laufzeit bzw. Laufstrecke von

$$\Delta t = \frac{dz}{dv} = \frac{mv}{k_{\text{Hf}}eV_o} \quad \Delta L = v\Delta t = \frac{mv^2}{k_{\text{Hf}}eV_o} = \frac{2E_{\text{kin}}}{k_{\text{Hf}}eV_o} \quad \text{mit} \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2. \quad (54)$$

Die Pulslänge ergibt sich aus der Energiebreite δE_{kin} des Strahls zu $\delta z = \delta E_{\text{kin}}/(k_{\text{Hf}}eV_o)$. Ob ein Teilchen in einem Hf-Feld beschleunigt wird, hängt davon ab, ob es bei der optimalen Phasenlage eingeschossen wird und wie weit die Teilchengeschwindigkeit v von der Phasengeschwindigkeit v_{ph} der Hf-Welle abweicht. Eine Geschwindigkeitsabweichung führt über eine Strecke dL zu einer Phasenabweichung

$$d\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{Hf}}} dL = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{Hf}}} (v - v_{\text{ph}}) dt = \frac{2\pi c}{\lambda_{\text{Hf}}} \left(\frac{v - v_{\text{ph}}}{v_{\text{ph}} \cdot v} \right) dL. \quad (55)$$

Die Beschleunigung, d.h. die Änderung der kinetischen Energie des Teilchens mit Ladung q , hängt gemäß $dE_{\text{kin}} = qE_z(\varphi)dL$ von der Phase im elektrischen Feld E_z ab.

4.2 Hohlraumresonatoren

Die Grundmode in einem zylindrischen Resonator (*pillbox cavity*) ist die transversal-magnetische Mode TM_{010} . In dieser Nomenklatur bezeichnet der erste Index die azimutale Knotenzahl, wobei ein Knoten eine Stelle ist, an der das elektrische Feld verschwindet. Der zweite und dritte Index ist die radiale und longitudinale Knotenzahl. Das zeitlich mit der Kreisfrequenz $\omega_{\text{Hf}} = k_{\text{Hf}}c$ oszillierende elektrische Feld ist parallel zur Zylinderachse gerichtet und damit gut zur Beschleunigung von Teilchen geeignet. Es ist auf der Zylinderachse maximal und fällt zum Rand des Resonators gemäß

$$E_z(r) = E_o J_0(k_{\text{Hf}}r) \cos \omega_{\text{Hf}} t \quad (56)$$

auf null ab (daher radiale Knotenzahl 1), wobei $J_0(x)$ die Bessel-Funktion erster Art und 0-ter Ordnung ist, die bei $x = 0$ den Wert 1 und bei $x = 2.405$ ihre erste Nullstelle hat (vgl. Abb. 9). Mit $k_{\text{Hf}}R = 2.405$ ist also der Zylindrerradius gemäß

$$R = \frac{2.405}{k_{\text{Hf}}} = \frac{2.405 \cdot c}{\omega_{\text{Hf}}} = 0.383 \cdot \lambda_{\text{Hf}} \quad (57)$$

mit der Hf-Frequenz bzw. Wellenlänge verknüpft. Die Integration über die Energieänderung während des Durchflugs durch den Resonator zeigt, dass der maximal mögliche Energiegewinn eines Teilchens mit Ladung q und Geschwindigkeit v in einem Resonator der Länge d

$$\Delta E_{\text{kin}} = qE_{\circ} \int_{-d/2}^{d/2} \cos(\omega_{\text{Hf}} z/v) dz = qE_{\circ} d \frac{\sin x}{x} \quad \text{mit} \quad x \equiv \frac{\omega_{\text{Hf}} d}{2v} \quad (58)$$

ist, wobei der Faktor $\sin x/x < 1$ den Umstand widerspiegelt, dass das Teilchen sich für eine endliche Zeit im Resonator befindet, während sich das Feld ändert und somit vom Maximalwert E_{\circ} abweicht. Dieser Faktor heißt *transit-time factor*. Das Produkt $E_{\circ} d$ ist die Hf-Spannung V_{Hf} und $E_{\circ} d \sin x/x$ ist die effektive Hf-Spannung $V_{\text{Hf}}^{\text{eff}}$. Mit zunehmender Länge d des Resonators steigt zwar die Hf-Spannung, aber der *transit-time factor* nimmt ab. Das Optimum mit $V_{\text{Hf}}^{\text{eff}} = 0.64 \cdot V_{\text{Hf}}$ ist durch das Maximum von $\sin x$ gegeben, d.h. $x = \pi/2$ und damit $d = \lambda_{\text{Hf}}/2$.

Oberflächenströme an den Innenwänden des Resonators führen zu ohmschen Energieverlusten und zur Erwärmung der Struktur, die bei normalleitenden Resonatoren in der Regel aus Kupfer besteht und mit Wasser gekühlt wird. An den Wänden ist die Änderung des magnetischen Wechselfelds \dot{B} ungleich null und mit der Stromdichte verknüpft. Mit der „Skin“-Tiefe, d.h. der Dicke der stromführenden Schicht

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu \omega \sigma}} \quad (59)$$

und dem Oberflächenwiderstand kann man durch Integration über die gesamte Innenfläche des Resonators die Verlustleistung P berechnen. Die Skin-Tiefe hängt von der relativen Permeabilität μ sowie der elektrischen Leitfähigkeit σ ab und ist eine Funktion der Frequenz ω . Oft wird statt der Verlustleistung in einem Resonator die sogenannte Shunt-Impedanz

$$R_s = \frac{V_{\text{Hf}}^{\text{eff}}}{2P} \quad \left(\text{manchmal auch als } R_s = \frac{V_{\text{Hf}}^{\text{eff}}}{P} \text{ definiert!} \right) \quad (60)$$

mit der Einheit Ω angegeben, die eine von der Hf-Spannung unabhängige Kennzahl des Resonators ist und nur noch von dessen Bauart (Geometrie und Material) abhängt. Bei Linearbeschleunigern wird eher die Shunt-Impedanz pro Längeneinheit in Ω/m angegeben. Für den DORIS-Resonator (Abb. 19), ein typischer *pillbox*-Resonator, der für den Speicherring DORIS bei DESY mit einer Resonanzfrequenz von $f_{\text{Hf}} = 500$ MHz ($\omega_{\text{Hf}} = 3.14 \cdot 10^9$ s $^{-1}$) entwickelt wurde, beträgt die Shunt-Impedanz 3 M Ω . Die Güte Q eines Resonators ist durch 2π mal der gespeicherten Energie geteilt durch den Energieverlust pro Schwingungsperiode gegeben

$$Q = 2\pi \frac{W}{P/f_{\text{Hf}}} = \omega_{\text{Hf}} \frac{W}{P} \quad \text{mit} \quad W = \frac{1}{2} \epsilon_{\circ} \int_V E_z^2 dV. \quad (61)$$

Je höher die Güte, desto länger schwingt ein Resonator. Ohne Energiezufuhr nimmt das elektrische Feld und damit der Energieinhalt des Resonators exponentiell gemäß

$$E_z(t) = E_{\circ} e^{-t/\tau} \quad \text{und} \quad W(t) = W_{\circ} e^{-2t/\tau} \quad \rightarrow \quad \frac{dE_z}{dt} = -\frac{1}{\tau} E_z \quad \text{und} \quad \frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\tau} W \quad (62)$$

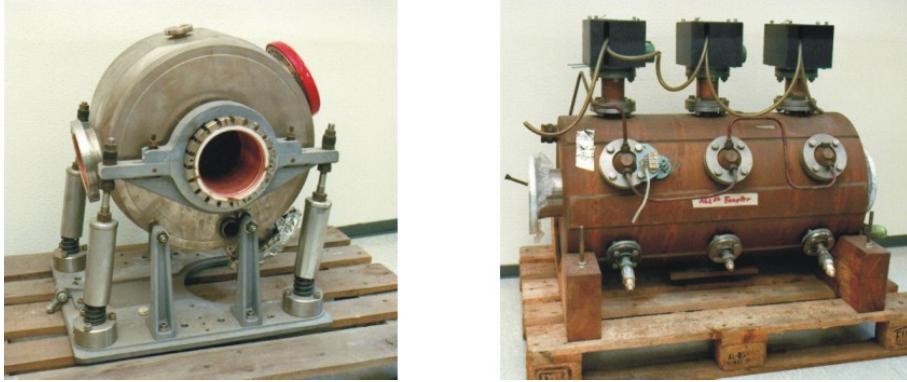


Abbildung 19: Zwei vielfach verwendete Hohlraumresonatoren. DORIS-Einzeller (links) und DESY-Dreizeller (rechts). Die seitlichen Anschlüsse dienen der Einkopplung der Hf-Welle, der Abstimmung des Resonators durch bewegliche Stempel (sog. *plunger*) sowie der Auskopplung unerwünschter höherer Schwingungsmoden (*higher-order modes*).

ab. Die Zeitkonstante $\tau = -2W/\dot{W} = 2W/P = 2Q/\omega_{\text{Hf}}$ heißt *cavity filling time*, weil sie auch für den Anstieg des elektrischen Felds im Resonator gilt. Beim DORIS-Resonator ist $Q \approx 40000$ und damit $\tau = 25 \mu\text{s}$. Supraleitende Resonatoren aus hochreinem Niob besitzen eine Güte in der Größenordnung 10^9 . Diese „unbelastete“ Güte berücksichtigt nur die Energieverluste in der Wand des Resonators. Da beim Beschleunigen von Teilchen dem Feld des Resonators zusätzlich Leistung (Beschleunigungsspannung mal Strahlstrom) entnommen wird, ist die „belastete“ Güte geringer und zudem eine Funktion des Strahlstroms.

4.3 Das „mitbewegte“ Koordinatensystem und Phasenraumkonzept

Es ist in der Beschleunigerphysik üblich, die Bewegung von Teilchen relativ zu einem „Sollteilchen“ in einem Koordinatensystem zu betrachten, das sich mit diesem Teilchen entlang der Sollbahn mitbewegt (vgl. Abb. 20). Das hypothetische Sollteilchen zeichnet sich dadurch aus, dass alle anderen Teilchen Schwingungen um seine Position ausführen. In der Regel kann man sich das Sollteilchen im Zentrum eines Teilchenpakets vorstellen, innerhalb dessen die Teilchen normalverteilt sind, d.h. die Teilchendichte wird in allen Koordinaten durch eine Gauß-Kurve beschrieben – dies ist jedoch nicht immer der Fall. Im Laborsystem wird die Koordinate entlang der Sollbahn mit s bezeichnet. Die Achsen des „mitbewegten“ Koordinatensystems sind

- x horizontal senkrecht zur Sollbahn
- y vertikal senkrecht zur Sollbahn
- z tangential zur Sollbahn

(in manchen Büchern wird die vertikale Koordinate mit z bezeichnet). Bei einer „flachen“ Maschine, die in der horizontalen Ebene liegt (z.B. ein Speicherring), ist die y -Achse also im-

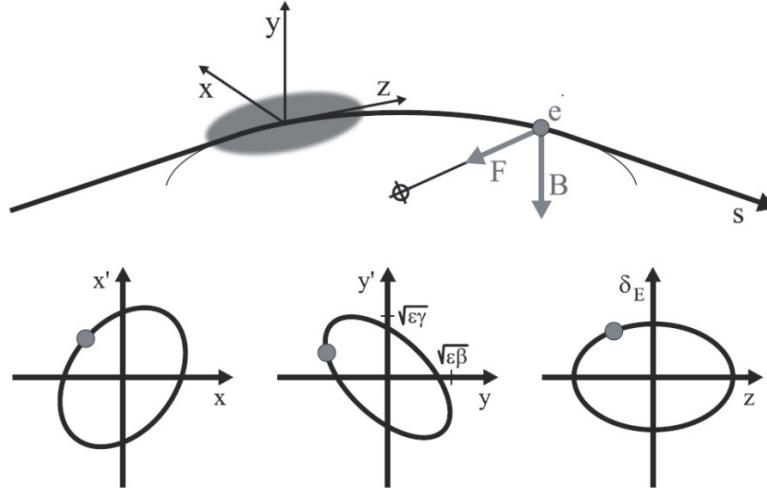


Abbildung 20: Mitbewegtes Koordinatensystem x, y, z , bei dem die z -Koordinate stets tangential zur Sollbahn ausgerichtet ist (oben), sowie Phasenräume für die horizontale, vertikale und longitudinalen Teilchenbewegung (unten von links nach rechts).

mer vertikal, während die x - und z -Achse gemäß dem Verlauf der Sollbahn ihre Richtung im Laborsystem ändern.

Die Teilchenbewegung wird durch Orts- und Impulskoordinaten dargestellt, die zusammen einen 6-dimensionalen Phasenraum bilden. Näherungsweise können die Phasenräume der horizontalen, vertikalen und longitudinalen Richtung mit jeweils einer Orts- und Impulskoordinate (Abb. 20 unten) unabhängig voneinander betrachtet werden. Die Teilchenbewegung in horizontaler und vertikaler Richtung ist Gegenstand der transversalen Strahldynamik, die weiter unten behandelt wird.

4.4 Longitudinaler Phasenraum – Näherung für kleine Abweichungen

Die Orts- und Impulskoordinate im Phasenraum muß nicht zwingend die Einheit m bzw. kg m/s haben. Die üblichen Koordinaten des longitudinalen Phasenraums sind

- Phasenlage $\Delta\Psi$ im Hf-Feld oder longitudinaler Ort $z = c \Delta\Psi / \omega_{\text{Hf}}$ oder Zeit $t = \Delta\Psi / \omega_{\text{Hf}}$
- absolute oder relative Energie-(Impuls-)abweichung ΔE oder $\Delta E/E$ (bzw. Δp oder $\Delta p/p$)

Um die Teilchen nicht zu verlieren sind Effekte erforderlich, die ein Teilchen mit abweichender Phase ($\Delta\Psi \neq 0$) oder Energie ($\Delta E \neq 0$) zur Sollposition zurücktreiben. Bei dieser sogenannten Phasenfokussierung sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Ein Teilchen mit Energieüberschuß eilt gegenüber einem Sollteilchen voraus, weil es schneller ist. Dieser Effekt ist umso ausgeprägter, je schwerer und langsamer ein Teilchen ist, und gilt sowohl in Linearbeschleunigern als auch in ringförmigen Maschinen.

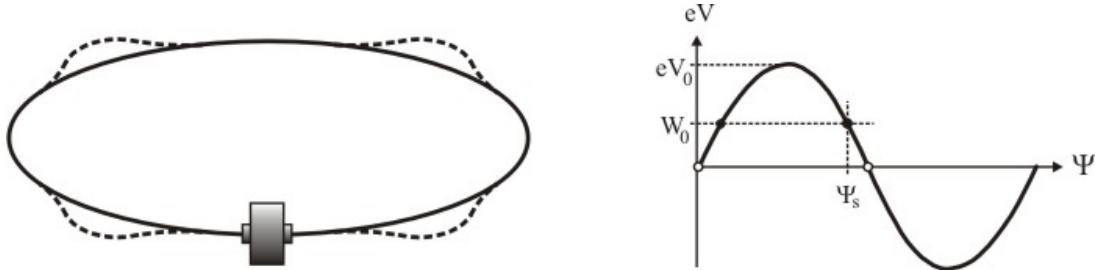


Abbildung 21: Speicherring mit Hochfrequenzresonator (links). Teilchen mit Energieüberschuss beschreiben eine Dispersionsbahn (gestrichelt), die i.d.R. länger ist. Die Phasenlage bezüglich der Hf-Spannung (rechts) hängt vom Energieverlust pro Umlauf ab: $W_0 \neq 0$ für Elektronen (schwarze Punkte) oder $W_0 \approx 0$ für schwerere Teilchen (offene Symbole). Oberhalb der sog. Übergangsenergie verlängert eine höhere Energie aufgrund der längeren Bahn die Umlaufzeit (Phasenfokussierung auf der absteigenden Flanke der Hf-Spannung), unterhalb der Übergangsenergie führt eine höhere Energie aufgrund der höheren Geschwindigkeit zu einer Verkürzung der Umlaufzeit (Phasenfokussierung auf der aufsteigenden Flanke).

2. Ein Teilchen mit Energieüberschuss bleibt zurück, weil es aufgrund der größeren Biegeradien in Dipol-Magnetfeldern einen längeren Weg hat. Dieser Effekt dominiert in ringförmigen Maschinen für Teilchen mit Geschwindigkeit $v \approx c$, also hochenergetische Protonen – z.B. beim LHC – oder Elektronen (vgl. Abb. 21).

In beiden Fällen muß die Hf-Phase so gewählt werden, dass ein Teilchen mit Energieüberschuss eine geringere Beschleunigung erfährt als ein Sollteilchen, d.h. im ersten Fall ist die zeitliche Ableitung des Feldes > 0 und im zweiten Fall < 0 .

Die Bewegung aller Teilchen um die Sollphase und Sollenergie heißt „Synchrotron-Oszillation“. Im longitudinalen Phasenraumbild beschreiben die Teilchen (bei kleinen Abweichungen) eine Ellipse, die im Gegensatz zum transversalen Phasenraum stets aufrecht steht. Die Periode dieser Oszillation entspricht typischerweise $> 10^2$ Umläufen um den Speicherring, während pro Umlauf mehrere transversale Schwingungen stattfinden. Bei Elektronen (oder Positronen) hat die Synchrotronstrahlung einen dämpfenden Effekt mit einer typischen Dämpfungszeit von 10^4 Umlaufzeiten, d.h. die Ellipse im Phasenraum wird langsam kleiner. Im Folgenden soll die Synchrotronschwingung von Elektronen quantitativ behandelt werden, wobei die Darstellung [41] folgt. Durch Verzicht auf die Näherung $\beta \approx 1$ sind die Gleichungen auch auf schwerere Teilchen anwendbar, wenn man die pro Umlauf durch Synchrotronstrahlung verlorene Energie W_0 auf null setzt. Für ein Teilchen mit Sollenergie E_0 , das einen Hohlraumresonator passiert, gilt die Energiebilanz

$$\Delta E = eV_0 \sin \Psi - W_0 \quad \text{und damit} \quad \sin \Psi_s = \frac{W_0}{eV_0}. \quad (63)$$

Hier ist V_0 ist die Amplitude, Ψ die Phase der Hf-Schwingung zum Zeitpunkt des Durchflugs und W_0 der Energieverlust pro Umlauf. Hierbei wird vernachlässigt, dass der Durchflug in einem

endlichen Zeitintervall stattfindet (s. *transit-time factor*, Abschnitt 4.2). Die Sollposition ist der „synchrone Phasenwinkel“ Ψ_s mit $\Delta E = 0$. Die Bilanzdifferenz zwischen dem Sollteilchen und einem Elektron beliebiger Energie und Phasenlage ist

$$\Delta E = eV_0(\sin \Psi - \sin \Psi_s) - W + W_0 = eV_0(\sin \Psi - \sin \Psi_s) - \frac{dW}{dE} \Delta E, \quad (64)$$

wobei die Energieabhängigkeit der Abstrahlung linearisiert wurde. Wenn $\Psi = \Psi_s + \Delta\Psi$ nur wenig von der synchronen Phase abweicht, gilt

$$\sin(\Psi_s + \Delta\Psi) - \sin \Psi_s = \sin \Psi_s \cos \Delta\Psi + \sin \Delta\Psi \cos \Psi_s - \sin \Psi_s \approx \Delta\Psi \cos \Psi_s. \quad (65)$$

wegen $\sin \Delta\Psi \approx \Delta\Psi$ und $\cos \Delta\Psi \approx 1$. Die Ableitung der Energieänderung nach der Zeit kann als Division durch die Umlaufzeit T_0 geschrieben werden, solange sich ΔE bei einem Umlauf nur wenig ändert (eine Synchrotronschwingung dauert, wie gesagt, ca. 10^2 Umläufe):

$$\Delta \dot{E} \approx \frac{\Delta E}{T_0} = \frac{eV_0 \cos \Psi_s}{T_0} \Delta\Psi - \frac{1}{T_0} \frac{dW}{dE} \Delta E \quad (66)$$

Die Phasendifferenz kann man als Zeitdifferenz ΔT in Einheiten der Hf-Periode T_{Hf} oder der Umlaufzeit ausdrücken:

$$\Delta\Psi = 2\pi \frac{\Delta T}{T_{\text{Hf}}} = 2\pi \frac{T_0}{T_{\text{Hf}}} \frac{\Delta T}{T_0} = 2\pi h \frac{\Delta T}{T_0}, \quad (67)$$

wobei $h = T_0/T_{\text{Hf}} = f_{\text{Hf}}/f_0$ die sogenannte Harmonischenzahl des Rings ist. Die relative Zeitdifferenz hängt wiederum mit der relativen Impuls- bzw. Energiedifferenz zusammen:

$$\Delta\Psi = 2\pi h \frac{\Delta T}{T_0} = 2\pi h \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{2\pi h}{\beta^2} \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{\Delta E}{E_0}, \quad (68)$$

wobei α der *momentum compaction factor* ist, der angibt, wie bei einer Impulszunahme die Bahnlänge und damit die Umlaufzeit zunimmt:

$$\alpha = \frac{\Delta L/L_0}{\Delta p/p_0} = \beta^2 \frac{\Delta L/L_0}{\Delta E/E_0}. \quad (69)$$

Der Term $-1/\gamma^2$ beschreibt hingegen, wie sich bei einer Impulszunahme aufgrund der Geschwindigkeitszunahme die Umlaufzeit verkürzt. Bei hoch-relativistischen Teilchen ist dieser Term irrelevant. Werden schwere Teilchen (zB. Protonen) beschleunigt, so überwiegt zunächst der zweite Term („*below transition*“) und bei höherer Energie der erste Term („*above transition*“). Das Kreuzen der Übergangsenergie (*transition energy*) ist besonders kritisch, weil hier der synchrone Phasenwinkel gewechselt werden muss. Wieder soll die erste Ableitung als Division durch T_0 geschrieben werden:

$$\Delta\dot{\Psi} = \frac{2\pi h}{T_0\beta^2} \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{\Delta E}{E_0}. \quad (70)$$

Setzt man dies in die Ableitung von Gl. (66)

$$\Delta\ddot{E} = \frac{eV_0 \cos \Psi_s}{T_0} \Delta\dot{\Psi} - \frac{1}{T_0} \frac{dW}{dE} \Delta\dot{E} \quad (71)$$

ein, so erhält man als Endergebnis eine Differentialgleichung, deren Lösung eine gedämpfte harmonische Schwingung beschreibt:

$$\Delta\ddot{E} + 2a_s \Delta\dot{E} + \Omega^2 \Delta E = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta E(t) = \Delta E_0 e^{a_s t} e^{i\sqrt{\Omega^2 - a_s^2}t} \quad (72)$$

mit den Abkürzungen

$$\Omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{-\frac{2\pi eV_0 h \cos \Psi_s}{\beta^2 E_0} \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \quad \text{und} \quad a_s = \frac{1}{2T_0} \frac{dW}{dE}. \quad (73)$$

Oberhalb der Übergangsenergie (dh. $\alpha > 1/\gamma^2$) muß für eine stabile Schwingung $\cos \Psi_s < 0$ gelten, damit das Argument der Wurzel positiv ist. Die zeitliche Ableitung der Beschleunigungsspannung ist in diesem Fall negativ, so dass ein Teilchen mit Energieüberschuss nach einem Umlauf den Hohlraumresonator später als ein Sollteilchen passiert und weniger Energie erhält. Ein solcher rücktreibender Effekt, der in erster Näherung linear zur Auslenkung ist, bewirkt eine harmonische Schwingung.

Die Dämpfung ist eine Folge der Tatsache, dass der Energiebedarf des Elektrons zur Deckung der abgestrahlten Verluste mit der Teilchenenergie zunimmt, d.h. $dW/dE \neq 0$.

Eine zu (58) analoge Differentialgleichung findet man auch für die Phasenraumkoordinate $\Delta\Psi$, so dass die Bewegung im Phasenraumbild bei kleinen Auslenkungen einer Ellipse entspricht, die durch die Dämpfung allmählich kleiner wird.

4.5 Verallgemeinerung auf beliebige Abweichungen – die Separatrix

Fragt man nach der Grenze (der ‘‘Separatrix‘‘) des stabilen Phasenraumbereichs, muß die in Gleichung (37) eingeführte Beschränkung auf kleine Auslenkungen aufgegeben werden. Zur Vereinfachung soll jetzt von der Dämpfung abgesehen werden:

$$\Delta\dot{E} = \frac{eV_0}{T_0} (\sin(\Psi_s + \Delta\Psi) - \sin \Psi_s) \quad \text{und} \quad \Delta\dot{\Psi} = \frac{2\pi h}{\beta^2 T_0 E_0} \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \Delta E. \quad (74)$$

Die daraus resultierende Bewegungsgleichung ist nichtlinear. Das Ergebnis einer numerischen Berechnung nach dem Runge-Kutta-Verfahren ist in Abb. 22 gezeigt.

Um die Grenze des stabilen Phasenbereichs zu bestimmen, multipliziert man die beiden Gleichungen (46) kreuzweise und integriert über die Zeit:

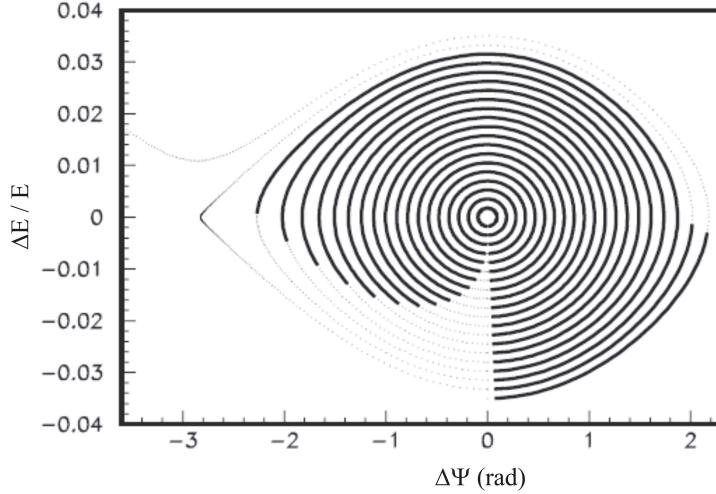


Abbildung 22: Ergebnis einer numerischen Simulation im longitudinalen Phasenraum für einen Elektronspeicherring. Jeder Punkt entspricht einem Umlauf. Die durchgezogene Linie verbindet die Punkte, die während einer Periode für kleine Auslenkungen durchlaufen werden. Die Bewegung wird also für größere Amplituden zunehmend langsamer. Der Bereich stabiler Bahnen ist durch die sogenannte „Separatrix“ begrenzt, deren Amplitude auf der Energieskala als „Energieakzeptanz“ des Speicherrings bezeichnet wird (hier ca. 3% der Strahlenergie).

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{2\Delta E \Delta \dot{E}}{\frac{d}{dt}(\Delta E)^2}} &= \frac{\beta^2 e V_0 E_0}{\pi h \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \left(\underbrace{\Delta \dot{\Psi} \sin(\Psi_s + \Delta \Psi) - \Delta \dot{\Psi} \sin \Psi_s}_{-\frac{d}{dt} \cos(\Psi_s + \Delta \Psi)} \right) \\
 (\Delta E)^2 &= -\frac{\beta^2 e V_0 E_0}{\pi h \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \left(\cos(\Psi_s + \Delta \Psi) + \Delta \Psi \sin \Psi_s \right) + H \\
 T &= -V + H
 \end{aligned} \tag{75}$$

Die letzte Zeile weist auf die Interpretation der Integrationskonstante als Hamiltonfunktion hin, wobei die linke Seite der Gleichung einer kinetischen Energie und der erste Term der rechten Seite der potentiellen Energie als Funktion von $\Delta\Psi$ entspricht. Auch wenn die beteiligten Größen nicht die Dimension einer Energie (sondern Energie²) besitzen, gelangt man zur einer Beschreibung, die aufgrund der Analogie zu anderen Bereichen der Physik (z.B. Planetenbahnen) als „anschaulich“ empfunden wird, nämlich der Bewegung in einem Potenzialtopf wie in Abb. 23 gezeigt. Die Minima und Maxima des Potentials bei $\Delta E = 0$ ergeben sich aus

$$\frac{dV}{d(\Delta\Psi)} = \frac{\beta^2 e V_0 E_0}{\pi h \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \left(-\sin(\Psi_s + \Delta\Psi) + \sin \Psi_s \right) = 0 \tag{76}$$

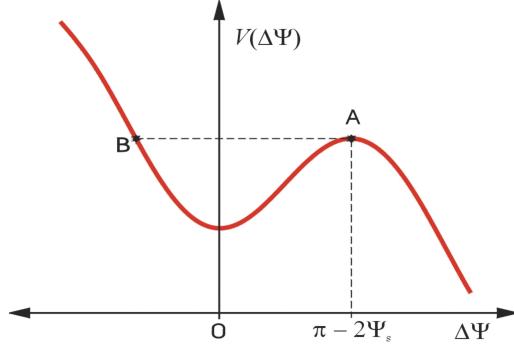


Abbildung 23: Potenzialtopf der Teilchenbewegung im longitudinalen Phasenraum. Für kleine Werte der Hamilton-Funktion H befinden sich die Teilchen in einem nahezu parabolischen Potenzial und führen harmonische Schwingungen aus, während die Bewegung für größere Werte zunehmend anharmonisch wird. Übersteigt H den Rand des Potenzials (A), ist die Bewegung in der Phase einseitig unbegrenzt.

zu $\Delta\Psi = 0$ (Minimum) und $\Delta\Psi = \pi - 2\Psi_s$ (Maximum, Ende des stabilen Phasenbereichs). Dies und $\Delta E/E = 0$ in Gleichung (61) eingesetzt ergibt die Gleichung für die Separatrix

$$(\Delta E)^2 + \frac{\beta^2 e V_0 E_0}{\pi h \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \left(\cos(\Psi_s + \Delta\Psi) + \cos \Psi_s + (\Delta\Psi - \pi + 2\Psi_s) \sin \Psi_s \right) = 0. \quad (77)$$

Mit $\Delta\Psi = 0$ erhält man hieraus die maximale Energieabweichung, mit der eine stabile longitudinale Bewegung möglich ist, die sog. Energieakzeptanz

$$\Delta E_{\max} = \sqrt{-\frac{2\beta^2 e V_0 E_0}{\pi h \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \left(\cos \Psi_s + (\Psi_s - \pi/2) \sin \Psi_s \right)}, \quad (78)$$

die in zweifacher Weise von der Hf-Spannung abhängt. Zunächst ist ΔE_{\max} im Wesentlichen proportional zu $\sqrt{V_0}$, aber auch der synchrone Phasenwinkel Ψ_s hängt von V_0 ab. Wenn $eV_0 = W$ wäre (d.h. die Hf-Spannung reicht gerade, um die Verluste zu kompensieren), dann wäre $\Psi_s = \pi/2$ und die Energieakzeptanz wäre null. Je weiter die Hf-Spannung also über dem notwendigen Minimum zur Deckung der Strahlungsverluste W liegt (beschrieben durch den Überspannungsfaktor eV_0/W), desto größer ist die Energieakzeptanz.

Auch wenn die natürliche Energiebreite von Elektronenspeicherringen i.d.R. nur ca. 10^{-3} ist, sollte die Energieakzeptanz im Prozentbereich liegen. Die Lebensdauer eines gespeicherten Elektronenstrahls hängt entscheidend davon ab, bis zu welcher Energieabweichung Teilchen nach Stoßprozessen noch eingefangen werden. Dabei sind zwei Prozesse zu unterscheiden, wobei sich jeweiligen Verlustraten (Kehrwerte der Lebensdauer, s. Abschnitt 7.2) addieren:

- Durch Bremsstrahlung an den Kernen (und in geringerem Maße auch an den Elektronen)

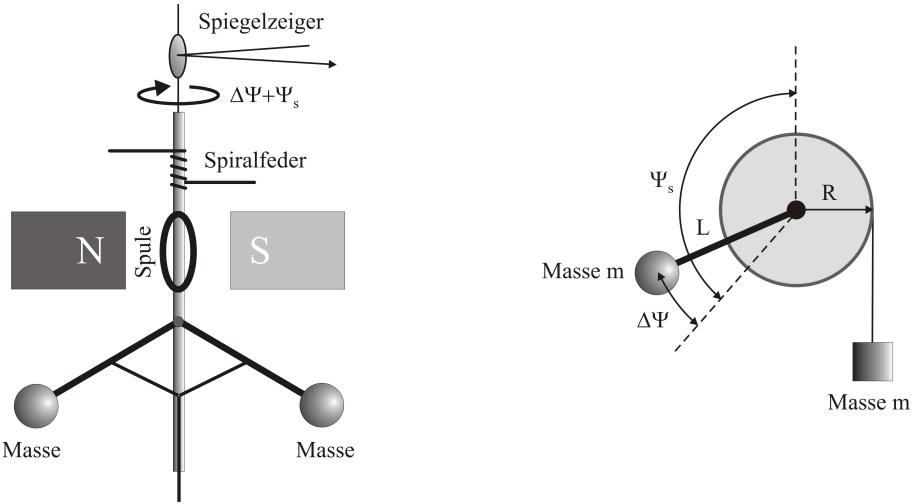


Abbildung 24: Mechanische Analogien für die Synchrotronbewegung [42, 43], wobei Gl. (80) jeweils für den Drehwinkel gilt. Links wird der $\sin(\Psi_s + \Delta\Psi)$ -Term durch eine Spule im Magnetfeld erzeugt, rechts durch ein Pendel mit Masse m . Der $\sin\Psi_s$ -Term entsteht links durch eine Spiralfeder, rechts durch das Gewicht am Faden. Im linken Modell kann der Strom durch die Spule sowie der Abstand der Massen von der Drehachse (und damit das Trägheitsmoment) variiert werden, um verschiedene Situationen im Synchrotron zu simulieren.

der Hülle) von Restgasatomen erleiden Elektronen Energieverluste. Dieser Beitrag zur Lebensdauer steigt logarithmisch mit der Energieakzeptanz.

- Beim Touschek-Effekt streuen Elektronen aneinander, wobei ein Teil des Transversalimpulses der Betatronbewegung in longitudinalen Impuls verwandelt wird. Durch die Transformation ins Laborsystem mit dem Faktor $\gamma = E/(m_e c^2)$ (in der Größenordnung 10^3 bis 10^4) kann die Änderung des Longitudinalimpulses mehrere Prozent ausmachen. Bei diesem Prozeß verliert ein Elektron Energie, während der Stoßpartner etwa gleichviel Energie gewinnt. Die Touschek-Lebensdauer steigt etwa mit der dritten Potenz der Energieakzeptanz.

Eine Vergrößerung der Energieakzeptanz durch Erhöhung der Hf-Spannung ist allerdings nur möglich, solange die Teilchen nicht dominant durch die transversale Auslenkung aufgrund von Dispersion (s. weiter unten) an der Vakuumkammer oder der dynamischen Apertur verlorengehen.

Differenzieren der zweiten Gleichung in (60) und Einsetzen von $\dot{\Delta E}$ aus der ersten Gleichung liefert die Bewegungsgleichung für die Synchrotronbewegung

$$\Delta \ddot{\Psi} = \frac{2\pi h e V_0}{\beta^2 T_0^2 E_0} \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \left(\sin(\Psi_s + \Delta\Psi) - \sin\Psi_s \right), \quad (79)$$

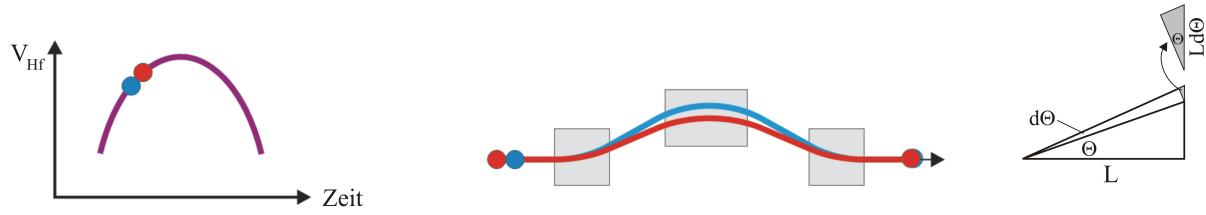


Abbildung 25: Bunch-Kompressor in einem Elektronen-Linearbeschleuniger. Links: Die Elektronen werden so beschleunigt, dass sie zu einem früheren Zeitpunkt eine geringere Energie erhalten als zu einem späteren Zeitpunkt, d.h. der Kopf der Elektronenverteilung hat eine niedrigere Energie als der Schwanz. Mitte: In einer magnetischen Umwegstrecke („Schikane“) haben Elektronen höherer Energie einen kürzeren Weg und holen die vorauselgenden Elektronen niedriger Energie ein. Damit wird die Elektronenverteilung verkürzt. Rechts: Idealisierte Geometrie der Schikane.

für die schon in den 1950er Jahren mechanische Analogien angegeben wurden. Abbildung 24 zeigt links eine „Analogiemaschine“, mit der 1954 die Synchrotronbewegung, insbesondere in der Nähe der Übergangsenergie, simuliert wurde [42]. Rechts ist eine weitere mechanische Analogie gezeigt [43]. Wenn hier $L = 2R$ ist und beide Massen m gleich groß sind, ist $\Psi_s = 150^\circ$ (stabil) bzw. 30° (instabil). Die Bewegungsgleichung ist dann

$$\Delta \ddot{\Psi} = \frac{mgL}{\Theta} (\sin(\Psi_s + \Delta\Psi) - \sin \Psi_s), \quad (80)$$

wobei Θ das Trägheitsmoment ist. Die Analogie zu Gl. (79) ist offensichtlich. Das Gewicht am Faden repräsentiert die Energieverluste pro Umlauf. Ohne dieses Gewicht erhält man ein Pendel mit $\Psi_s = 180^\circ$, dessen Bewegung der eines Protons im longitudinalen Phasenraum analog ist.

4.6 Longitudinale Strahldynamik in Linearbeschleunigern - Beispiel

In einem Linearbeschleuniger ohne Dipolmagnete eilt ein Teilchen mit Energieüberschuß einem Sollteilchen stets voraus. Dieser Effekt ist um so weniger ausgeprägt, je näher die Teilchen an der Lichtgeschwindigkeit sind. Der gegenteilige Effekt, der in ringförmigen Maschinen durch den *momentum compaction factor* beschrieben wird, tritt nicht auf.

Ein Beispiel für die Manipulation von Teilchen im longitudinalen Phasenraum sind die sogenannten *bunch*-Kompressoren, die insbesondere in Freie-Elektronen-Lasern verwendet werden, um in Linearbeschleunigern kurze Elektronenpakete zu erzeugen (*bunch* = Teilchenpaket). Werden Elektronen durch Beschuß einer Kathode durch kurze Laserpulse freigesetzt, entstehen bereits relativ kurze Elektronenpakete. Damit die Effekte der gegenseitigen Abstoßung (Raumladung) die Elektronenverteilung nicht übermäßig verzerrn, verzichtet man bei niedriger kinetischer Energie auf extrem kurze Elektronenpakete. Typische Längen sind einige Millimeter bzw. in Zeiteinheiten ca. 10 ps. Mit zunehmender Energie werden die gegenseitigen Abstoßungskräfte

kleiner und man kann die Elektronen in *bunch*-Kompressoren verkürzen. Wie in Abbildung 25 skizziert, werden die Teilchen nicht mit der maximalen Hf-Spannung beschleunigt, sondern auf einer Flanke der Hf-Spannung, damit vorauseilende Elektronen eine niedrigere Energie erhalten als die nachfolgenden. In einer Umwegstrecke („Schikane“) aus mehreren Magneten haben die Elektronen höherer Energie einen kürzeren Weg und holen die vorauseilenden ein, so dass die Verteilung auf wenige 10 fs verkürzt werden kann. Dadurch entsteht für kurze Zeit ein hoher Spitzenstrom, der eine wichtige Voraussetzung für die Funktion eines Freie-Elektronen-Laser ist (s. Kapitel 10). Wie die Skizze rechts in Abb. 25 andeutet, ist der zusätzliche Weg eines Teilchens mit Energieabweichung durch $L \Theta d\Theta$ gegeben, wobei L die halbe Länge der Schikane, Θ der Ablenkwinkel des ersten Magneten und $d\Theta$ der zusätzliche Winkel aufgrund der Energieabweichung ist. Mit $d\Theta/\Theta \approx -dE/E$ beträgt die Weglängenänderung in der gesamten Schikane ungefähr

$$\Delta L = 2L \Theta d\Theta = -2L \Theta^2 dE/E. \quad (81)$$

5 Supraleitende Hochfrequenz-Resonatoren und Magnete

In Teilchenbeschleunigern werden zunehmend supraleitende Hf-Resonatoren und Magnete eingesetzt, die mit flüssigem Helium auf wenige Kelvin gekühlt werden. Dem hohen Aufwand für die Bereitstellung von flüssigem Helium und der thermischen Abschirmung stehen einige entscheidende Vorteile gegenüber [44].

5.1 Supraleitende Resonatoren

Bei normalleitenden Resonatoren ist der erreichbare Feldgradient nicht prinzipiell begrenzt, sondern eher durch technologische Umstände (Kühlung) limitiert. Hohe Gradienten (über 50 MV/m) werden bei hohen Frequenzen (um 10 GHz) erreicht, wobei die Resonatoren entsprechend kleine Durchmesser haben, was unerwünschte Wechselwirkungen des Teilchenstrahls mit den umgebenden Wänden begünstigt.

Supraleitende Resonatoren erreichen bei moderaten Frequenzen (z.T. 1.3 T beim TESLA-Resonator, Abb. 10) Gradienten um 25 MV/m in der Serienproduktion und bei selektierten Resonatoren auch höhere Werte. Eine prinzipielle Grenze von ca. 50 MV/m ist erreicht, wenn das magnetische Feld der Hf-Welle an der Oberfläche das kritische Feld übersteigt, bei dem das Material in den normalleitenden Zustand übergeht (sog. *quench*). Bei hochreinem Niob sind dies 200 mT. Materialien mit höherem kritischen Feld, wie sie für Magnete verwendet werden, sind aufgrund der starken magnetischen Hysterese für Hf-Resonatoren ungeeignet. Im Gegensatz zu Supraleitern, die von Gleichstrom durchflossen werden, verschwindet der elektrische Widerstand im elektromagnetischen Wechselfeld nicht vollständig. Der Oberflächenwiderstand als Funktion der Temperatur T verhält sich nach der BCS-Theorie gemäß

$$R_{BCS} \sim \frac{f^2}{T} e^{-1.76 T_c/T}, \quad (82)$$

wobei f die Frequenz und T_c die kritische Temperatur ist. Ferner gibt es einen Restwiderstand von wenigen $n\Omega$, der unterhalb von 2 K spürbar wird. Der Widerstand ist viel kleiner als bei normalleitenden Resonatoren und der Gütefaktor entsprechend höher (um 10^9 statt 10^4). Trotzdem ist der endliche Widerstand nicht vernachlässigbar. Als Faustregel kann man für jedes Watt Verlustleistung einen Verbrauch von 1 kW für die Heliumanlage ansetzen. Die Vorteile supraleitender Resonatoren sind also nicht ganz eindeutig. Im Jahr 2004 wurde nach Abwägung der Vor- und Nachteile die Technologie der TELSA-Resonatoren von einem Gutachtergremium für den zukünftigen ILC (*International Linear Collider*) empfohlen.

Ein Vorteil supraleitender Linearbeschleuniger ist die Möglichkeit des Dauerstrichbetriebs bei höheren Gradienten z.B. bei zukünftigen Freie-Elektronen-Lasern oder Energy-Recovery-Linacs. Resonatoren aus Kupfer haben aus thermischen Gründen typischerweise ein Tastverhältnis von 1% (Verhältnis der Zeiten mit und ohne Strahl, auch *duty factor* genannt). Ein Dauerstrichbetrieb ist nur bei sehr kleinen Gradienten (um 1 MV/m) möglich, wie dies z.B. beim Betrieb der Mikrotrons an der Universität Mainz (MAMI) oder bei Resonatoren in Speicherringen der Fall ist.

Während normalleitende Resonatoren oft zylinderförmig sind (*pillbox*), wurden bei supraleitenden Resonatoren dieser Art nur Gradienten bis 2 MV/m erreicht, begrenzt durch *multipacting*, d.h. lawinenartige Emission von Elektronen, ausgelöst durch kosmische Strahlung oder Feldemission an den Kanten der Struktur. Bei ellipsoid-förmigen Resonatoren sind die lokalen Feldstärken niedriger. Ein weiterer Unterschied zu normalleitenden Resonatoren ist der Aufwand bei der Einkopplung der Hf-Welle. Es ist daher vorteilhaft, vielzellige Strukturen mit bis zu 10 gekoppelten Einzelresonatoren zu verwenden. Die Technologie supraleitender Resonatoren ist ausführlich in [45] dargestellt.

5.2 Supraleitende Magnete

Supraleitende Magnete sind notwendig, wenn Magnetfelder benötigt werden, die mit konventionellen Elektromagneten (Kupferspulen mit Eisenkern) oder Permanentmagneten nicht machbar sind, also über ca. 1.5 T. Dies ist insbesondere bei Protonenspeicheringen im TeV-Bereich der Fall. Supraleitende Magnete mit hohen Feldstärken (z.B. 5.3 T bei HERA, 8.5 T im LHC) ermöglichen kleinere Biegeradien und höhere Gradienten in Dipol- bzw. Quadrupolmagneten und reduzieren die Betriebskosten aufgrund des verschwindenden elektrischen Widerstands. Die Spulen bestehen aus Niob-Titan-Filamenten mit einer kritischen Temperatur von 9.4 K. Im Gegensatz zu den Hf-Resonatoren wird hier ein Typ-II-Supraleiter benötigt, der Ströme und Magnetfelder in seinem Innern zuläßt, aber die Bewegung der magnetischen Flusslinien durch gezielte Störstellen im Kristall (*pinning centers*) unterbindet. Problematisch sind die hohen Anforderungen an die Präzision und Stabilität der Spulen. Da es sich im Wesentlichen um „Luft“spulen

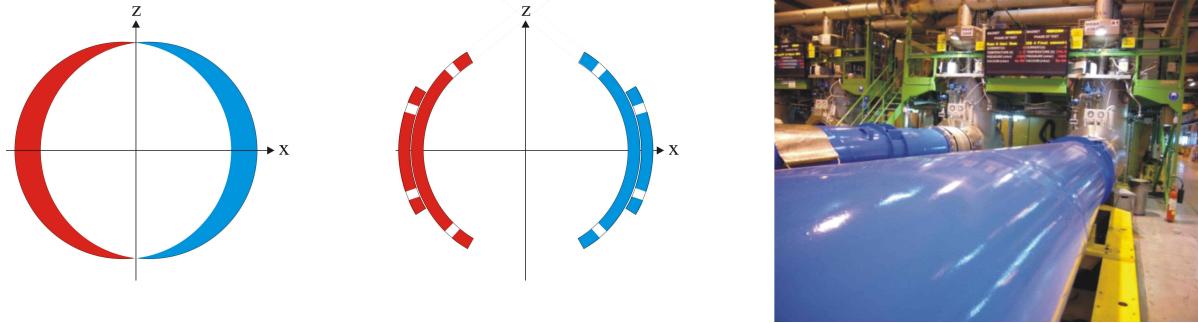


Abbildung 26: Supraleitende Magnete. Links eine schematische Darstellung der idealen Stromverteilung ($I \sim \cos \phi$) für Dipolmagnete und daneben die technisch realisierte Näherung durch „Stromschalen“. Rechts LHC-Dipolmagnete auf dem Teststand am CERN.

handelt (auch wenn z.B. die Spulen der LHC-Magnete von einem Eisenjoch umgeben sind), ist der Feldverlauf durch die Spulengeometrie vorgegeben. Die Spulen dürfen sich beim Bestromen trotz der hohen auftretenden Kräfte kaum bewegen, da bereits Verschiebungen im μm -Bereich eine lokale Erwärmung und einen plötzlichen Übergang in den normalleitenden Zustand bewirken können. Ein *quench* gefährdet die Magnete aufgrund der hohen Ströme (5000 bis 10000 A) und des He-Gasanfalls (beim LHC-Unfall im September 2008 wurden mehrere Tonnen Helium plötzlich freigesetzt; das Volumen einer Tonne He-Gas beträgt bei Normaldruck ca. 12000 m^3).

In den 1980er Jahren war der Bau eines pp-Speicherrings (ISABELLE im jetzigen Tunnel von RHIC am Brookhaven National Laboratory, USA) an den Schwierigkeiten der supraleitenden Magnettechnologie gescheitert. Erfolgreiche Projekte waren z.B. das Tevatron/Fermilab, HERA/DESY und LHC/CERN. Supraleitende Magnete werden inzwischen auch bei Zyklotrons für die Strahlentherapie und für Wiggler und Undulatoren (periodische Magnetstrukturen zur Erzeugung von Synchrotronstrahlung, s. weiter unten) verwendet.

Dipol- und Quadrupolfelder entstehen für Ströme parallel zur Strahlachse, wenn die Stromverteilung als Funktion des Azimutalwinkels ϕ

$$I \sim \cos \phi \quad (\text{Dipol}) \quad I \sim \cos 2\phi \quad (\text{Quadrupol}) \quad (83)$$

ist, wie man mit dem Ampèreschen Gesetz und Integration über ϕ zeigen kann. In der Praxis werden diese Verteilungen durch „Stromschalen“ wie in Abb. 26 angenähert.

6 Teilchenoptik und transversale Strahldynamik

Das in der Beschleunigerphysik übliche Konzept des „mitbewegten“ Koordinatensystems und der Darstellung der Teilchenbewegung im longitudinalen, horizontalen und vertikalen Phasenraum wurde in Abschnitt 4.3.1 eingeführt (s. Abb. 20). In diesem Kapitel werden die Grundlagen



Abbildung 27: Dipol-, Quadrupol- und Sextupolmagnet der Synchrotronstrahlungsquelle PETRA III bei DESY in Hamburg.

der transversalen Teilchenbewegung in Magnetfeldern vorgestellt. Die sog. Teilchenoptik weist deutliche Parallelen zur Lichtoptik, aber auch einige Unterschiede auf.

6.1 Magnete zur Strahlführung

In Abschnitt 2.3 wurde erläutert, dass zur Führung hochenergetischer Teilchenstrahlen Magnete besser geeignet sind als elektrostatische Linsen. Die folgende Darstellung bezieht sich auf konventionelle Elektromagnete, d.h. Spulen, die in n Windungen um einen Eisenkern gewickelt sind und von einem Strom I durchflossen werden. Abbildung 27 zeigt Magnete des Speicherrings PETRA III bei DESY/Hamburg (mit 2304 m Umfang die derzeit größte Synchrotronstrahlungsquelle). Die Windungen bestehen aus einem quadratischen Kupferprofil, in dem sich ein Kühlwasserkanal befindet.

In Bereichen, in denen die Stromdichte null ist, kann man das Magnetfeld \vec{H} durch ein skalares Potential ausdrücken:

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad \vec{H} = \nabla \varphi. \quad (84)$$

Ebenso kann man die magnetische Flußdichte \vec{B} durch ein skalares Potential $\Phi = \mu_0 \mu_r \varphi$ darstellen, das wegen $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ der Laplace-Gleichung genügt:

$$\vec{B} = \nabla \Phi \quad \text{und} \quad \nabla^2 \Phi = 0. \quad (85)$$

Die vertikale Komponente der magnetischen Flußdichte sei nun gegeben durch $B_y(x, y) = G_y(x) + f(y)$, d.h. durch einen gewünschten Verlauf $G_y(x)$ in horizontaler Richtung (z.B. konstant für Ablenk Magnete) und einen unbekannten Verlauf $f(y)$ in vertikaler Richtung. Das Potential ist

$$\Phi(x, y) = \int B_y(x, y) dy = G_y(x)y + \int f(y) dy. \quad (86)$$

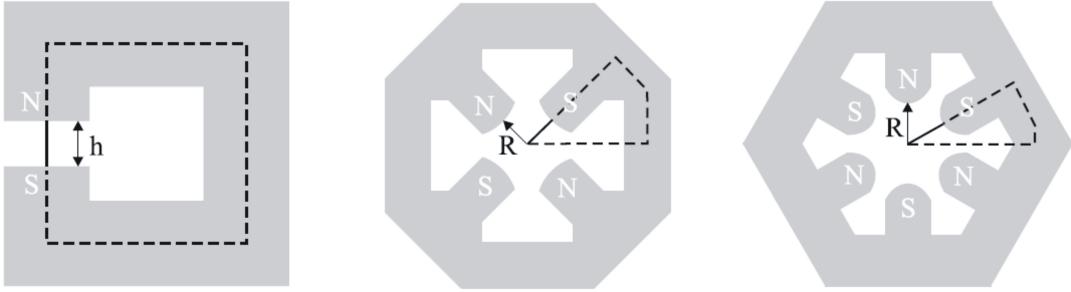


Abbildung 28: Schematische Darstellung von Dipol-, Quadrupol- und Sextupolmagnet mit Integrationsweg zur Berechnung des Magnetfelds als Funktion des Stroms. Die gestrichelten Anteile von $\int \vec{H} d\vec{s}$ werden vernachlässigt (im Eisen wegen $\mu_r \gg 1$, die waagerechten Pfade wegen $\vec{H} \perp d\vec{s}$).

Die Verwendung der Laplace-Gleichung liefert einen Ausdruck für $f(y)$:

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = \frac{d^2 G_y(x)}{dx^2} y + \frac{df(y)}{dy} = 0 \quad \rightarrow \quad f(y) = - \int \frac{d^2 G_y(x)}{dx^2} y \, dy = -\frac{y^2}{2} \frac{d^2 G_y(x)}{dx^2}. \quad (87)$$

Somit kann das Potential aus der vorgegebenen Funktion $G_y(x)$ gemäß

$$\Phi(x, y) = G_y(x)y - \frac{y^3}{6} \frac{d^2 G_y(x)}{dx^2} \quad (88)$$

berechnet werden und das transversale Magnetfeld ist durch $(B_x, B_y) = (d\Phi/dx, d\Phi/dy)$ gegeben. Relevante Fälle sind:

$$\begin{aligned} \text{Dipol : } G_y(x) &= B_0 & \Phi &= B_0 y \\ \text{Quadrupol : } G_y(x) &= \frac{dB_y}{dx} x = gx & \Phi &= gxy \\ \text{Sextupol : } G_y(x) &= \frac{1}{2} \frac{d^2 B_y}{dx^2} x^2 = \frac{1}{2} g' x^2 & \Phi &= \frac{1}{2} g' x^2 y - g' \frac{y^3}{6}. \end{aligned} \quad (89)$$

Das Feld soll idealerweise senkrecht zu den Polen eines Eisenmagneten verlaufen, d.h. die Oberfläche der Pole soll einer Äquipotentiallinie ($\Phi = \text{const.}$) folgen, z.B. parallel zur x -Achse für Dipole oder hyperbolisch $y(x) \sim 1/(gx)$ für Quadrupole.

Das für eine vorgegebene Magnetstärke benötigte Produkt aus Strom I und Zahl der Windungen n kann man mit $\oint \vec{H} d\vec{s} = nI$ abschätzen, indem man beliebig hohe Permeabilität für das Eisen annimmt. Damit trägt nur der Luftspalt zum Integral bei und mit den in Abb. 28 gezeigten Intergrationswegen findet man:

$$\text{Dipol : } nI = \frac{h}{\mu_0} B_\circ \quad (90)$$

$$\text{Quadrupol : } nI = \frac{R^2}{2\mu_0} g \quad (91)$$

$$\text{Sextupol : } nI = \frac{R^3}{6\mu_0} g' . \quad (92)$$

Bei Feldstärken oberhalb von 1.5 T ist das Eisen schon etwas gesättigt und die Relation zwischen Feldstärke und Strom ist nicht mehr linear.

6.2 Bewegungsgleichung im “mitbewegten“ System

Im Folgenden werden nur transversale Magnetfelder $\vec{B} = (B_x, B_y, 0)$ betrachtet, deren Komponenten nach Multipolen entwickelt werden, z.B. für B_y :

$$\begin{aligned} B_y(x) &= B_{y\circ} + \frac{dB_y}{dx}x + \frac{1}{2}\frac{d^2B_y}{dx^2}x^2 + \dots && \text{bzw.} \\ \frac{e}{p}B_y(x) &= \frac{e}{p}B_{y\circ} + \frac{e}{p}\frac{dB_y}{dx}x + \frac{e}{p}\frac{1}{2}\frac{d^2B_y}{dx^2}x^2 + \dots = \frac{1}{R} - k \cdot x + \frac{1}{2}m \cdot x^2 + \dots \end{aligned} \quad (93)$$

Der erste Term beschreibt ein Dipolfeld mit Biegeradius R , wobei $1/R = (e/p)B_{y\circ}$ aus der Gleichheit von Lorentzkraft und Zentripetalkraft folgt.

$$\text{In praktischen Einheiten : } \frac{1}{R[\text{m}]} = \frac{0.3 B [\text{T}]}{p[\text{GeV}/c]}, \quad (94)$$

wobei der Faktor 0.3 von $c[\text{m}/\text{s}]/10^9$ herröhrt. Der zweite Term beschreibt ein Quadrupolfeld mit Fokussierstärke k , wobei das Minuszeichen einer Konvention entspricht:

- $k > 0$ für horizontal defokussierende, vertikal fokussierende Quadrupole,
- $k < 0$ für horizontal fokussierende, vertikal defokussierende Quadrupole.

$$\text{In praktischen Einheiten : } k[1/\text{m}^2] = \frac{0.3 g [\text{T}/\text{m}]}{p[\text{GeV}/c]}, \quad (95)$$

Der dritte Term beschreibt ein Sextupolfeld der Stärke m . Sextupolmagnete korrigieren die Fehlfokussierung von Teilchen, deren Impulse vom Sollimpuls p abweichen. In der linearen Optik beschränkt man sich zunächst auf die ersten beiden Terme.

Die von einem magnetischen Feld auf eine Ladung e ausgeübte Kraft ist

$$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (96)$$

Mit $\ddot{\vec{r}} = \vec{F}/m$ ergeben sich die Komponenten der Bewegungsgleichung in den Komponenten x, y und s (zur Erinnerung: im Gegensatz zu z ist s die longitudinale Koordinate im Laborsystem):

$$\begin{aligned}\ddot{r}_x &= \frac{e}{m} (\dot{r}_y B_s - \dot{r}_s B_y) = -\frac{e}{m} \dot{r}_s B_y \\ \ddot{r}_y &= \frac{e}{m} (\dot{r}_s B_x - \dot{r}_x B_s) = \frac{e}{m} \dot{r}_s B_x \\ \ddot{r}_s &= \frac{e}{m} (\dot{r}_x B_y - \dot{r}_y B_x),\end{aligned}\tag{97}$$

wobei Terme mit B_s bei rein transversalen Feldern verschwinden. Ziel der folgenden Betrachtung ist es, den Teilchenvektor

$$\vec{r} = \vec{r}_o + x\vec{x}_o + y\vec{y}_o.\tag{98}$$

und seine Ableitungen durch Komponenten des mitbewegten Koordinatensystems auszudrücken und in die Bewegungsgleichung einzusetzen. Dabei ist zu beachten:

- $d\varphi = (1/R) ds$ und damit $\dot{\varphi} = (1/R) \dot{s}$.
- Der Koordinatenursprung \vec{r}_o bewegt sich stets in Richtung des Einheitsvektors \vec{s}_o .

$$d\vec{r}_o = ds \vec{s}_o \quad \dot{\vec{r}}_o = \dot{s} \vec{s}_o\tag{99}$$

- Bei horizontaler Drehung $d\varphi$ verschiebt sich \vec{x}_o in Richtung von \vec{s}_o .

$$d\vec{x}_o = d\varphi \vec{s}_o \quad \dot{\vec{x}}_o = \dot{\varphi} \vec{s}_o \quad \dot{\vec{x}}_o = (1/R) \dot{s} \vec{s}_o\tag{100}$$

- Bei horizontaler Drehung $d\varphi$ verschiebt sich \vec{s}_o in Richtung von $-\vec{x}_o$.

$$d\vec{s}_o = -d\varphi \vec{x}_o \quad \dot{\vec{s}}_o = -\dot{\varphi} \vec{x}_o \quad \dot{\vec{s}}_o = -(1/R) \dot{s} \vec{x}_o\tag{101}$$

- Ohne vertikale Drehung ändert sich \vec{y}_o nicht (“flache Maschine“).

$$d\vec{y}_o = 0 \quad \dot{\vec{y}}_o = 0\tag{102}$$

Mit diesen Relationen ist die erste und zweite Ableitung von \vec{r} :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{r}}_o + \dot{x}\vec{x}_o + x\dot{\vec{x}}_o + \dot{y}\vec{y}_o + y\dot{\vec{y}}_o = \dot{x}\vec{x}_o + \dot{y}\vec{y}_o + \dot{s} \left(1 + \frac{x}{R}\right) \vec{s}_o \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{s}\vec{s}_o + \dot{s}\dot{\vec{s}}_o + \ddot{x}\vec{x}_o + \dot{x}\dot{\vec{x}}_o + \frac{\dot{x}}{R} \dot{s}\vec{s}_o + \frac{x}{R} \ddot{s}\vec{s}_o + \frac{x}{R} \dot{s}\dot{\vec{s}}_o + \ddot{y}\vec{y}_o \\ &= \ddot{x}\vec{x}_o - \frac{\dot{s}^2}{R} \left(1 + \frac{x}{R}\right) \vec{x}_o + \ddot{y}\vec{y}_o + \frac{2\dot{x}\dot{s}}{R} \vec{s}_o\end{aligned}\tag{103}$$

Longitudinale Geschwindigkeitsänderungen, d.h. Terme mit \ddot{s} , wurden vernachlässigt. Einsetzen in die beiden transversalen Komponenten der obigen Bewegungsgleichung liefert bereits die gewünschten Bewegungsgleichungen im mitbewegten System

$$\begin{aligned}\ddot{x} - \frac{\dot{s}^2}{R} \left(1 + \frac{x}{R}\right) &= -\frac{e}{m} \dot{s} \left(1 + \frac{x}{R}\right) B_z \\ \ddot{y} &= \frac{e}{m} \dot{s} \left(1 + \frac{x}{R}\right) B_x.\end{aligned}\quad (104)$$

Es sollen nur noch drei Modifikationen vorgenommen werden. Erstens werden die magnetischen Feldkomponenten durch ihre Multipolentwicklung ausgedrückt, und zwar beschränkt auf vertikale Dipolfelder (horizontale Biegeradien) sowie Quadrupolfelder:

$$\begin{aligned}\frac{e}{m} B_y &= v \frac{e}{p} B_y = v \left(\frac{1}{R} - kx\right) \\ \frac{e}{m} B_x &= v \frac{e}{p} B_x = -vky.\end{aligned}\quad (105)$$

Zweitens muss, um die Teilchengeschwindigkeit v durch die Variable \dot{s} auszudrücken, in einem Dipolmagneten der Radius der Kurve berücksichtigt werden, der bei horizontaler Ablage x vom Sollradius R abweicht:

$$v = \dot{s} \frac{R+x}{R} = \dot{s} \left(1 + \frac{x}{R}\right)\quad (106)$$

Drittens wird noch eine kosmetische Korrektur vorgenommen, da in der Beschleunigerphysik statt der zeitlichen Ableitung die Ableitung nach s üblich ist:

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = x' \dot{s} \quad \text{und} \quad \ddot{x} = \frac{dx'}{ds} \frac{ds}{dt} \dot{s} + x' \ddot{s} = x'' \dot{s}^2 \quad (\ddot{s} = 0!)\quad (107)$$

und ebenso für \dot{y} und \ddot{y} . Das alles in die Bewegungsgleichungen eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}x'' \dot{s}^2 - \frac{\dot{s}^2}{R} \left(1 + \frac{x}{R}\right) &= -\dot{s}^2 \left(1 + \frac{x}{R}\right)^2 \left(\frac{1}{R} - kx\right) \\ y'' \dot{s}^2 &= -\dot{s}^2 \left(1 + \frac{x}{R}\right)^2 ky.\end{aligned}\quad (108)$$

Ausmultipliziert und nach Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung in x oder y ergibt schließlich die endgültige Form der linearen Bewegungsgleichungen für Teilchen in Dipol- und Quadrupolfeldern:

$$\begin{aligned} x''(s) + \left(\frac{1}{R^2(s)} - k(s) \right) x(s) &= 0 \\ y''(s) + k(s)y(s) &= 0 \end{aligned} \tag{109}$$

Hier wurde die s -Abhängigkeit aller Variablen explizit hingeschrieben. An einer bestimmten Stelle s ist meist nur $R \neq 0$ (reiner Dipol) oder $k \neq 0$ (reiner Quadrupol). Es gibt aber auch *combined function*-Magnete mit $R \neq 0$ und $k \neq 0$, die als Dipole mit radial geneigten Polen realisiert werden. Die ersten *alternating gradient*-Synchrotrons waren aus solchen Magneten aufgebaut. Gelegentlich verwendet man auch bei moderneren Maschinen Dipole mit leicht geneigten Polen, um Platz für einen weiteren Quadrupolmagnet zu sparen, doch ist dann für gegebenen Bahnradius die Stärke der Quadrupolwirkung nicht mehr einstellbar. Ein feldfreier Abschnitt (Driftstrecke) ist durch $k = 0$ und $R \rightarrow \infty$ gegeben.

Es handelt sich bei den Bewegungsgleichungen um Differentialgleichungen vom Hill'schen Typ. Wäre k konstant, z.B. vertikal fokussierend, so würde ein Teilchen vertikal eine harmonische Schwingung vollführen. Allerdings ist ein vertikal fokussierender Quadrupol stets horizontal defokusierend. Entweder überwiegt horizontal die (nur schwach) fokussierende Wirkung des $1/R^2$ -Terms, was nur noch von historischem Interesse ist (z.B. beim Cosmotron, ein 1952 am Brookhaven National Laboratory in Betrieb gegangenes Protonensynchrotron), oder k muss gelegentlich das Vorzeichen wechseln, damit die Teilchenbahn in beiden Ebenen stabil ist. In jeder Ebene ergibt sich somit eine “ruckartige“ Schwingung mit ständig wechselnder Frequenz und Amplitude. Diese transversale Teilchenbewegung heißt Betatron-Oszillation.

6.3 Spezielle Lösungen der Bewegungsgleichung

a) Fokussierender Quadrupolmagnet: Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (95) für $1/R = 0$ (kein Dipol) und konstantes $k > 0$ ist

$$\begin{aligned} y(s) &= A \cos \Omega s + B \sin \Omega s \quad \text{mit} \quad \Omega = \sqrt{|k|}s \\ y'(s) &= -\sqrt{|k|}A \sin \Omega s + \sqrt{|k|}B \cos \Omega s. \end{aligned} \tag{110}$$

An der Stelle $s = 0$ ist

$$y(0) = A \quad \text{und} \quad y'(0) = \sqrt{|k|}B \quad \text{bzw.} \quad B = y'(0)/\sqrt{|k|}. \tag{111}$$

Unter der Wurzel wurde $|k|$ geschrieben, damit die folgenden Ausdrücke auch für negatives k gelten. Nach dem Einsetzen der Konstanten A und B bietet sich folgende Matrixschreibweise an:

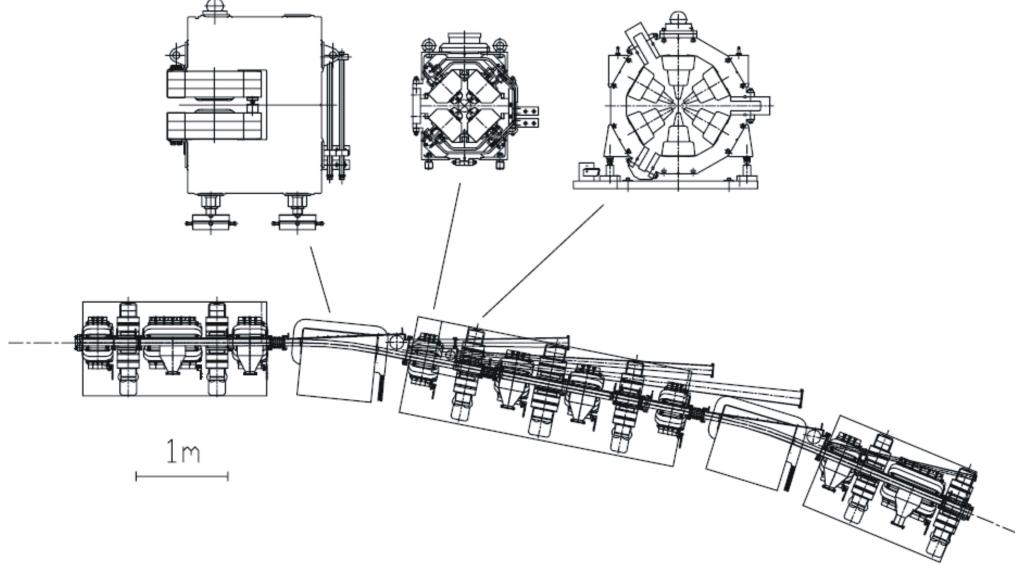


Abbildung 29: Ausschnitt aus der Magnetstruktur eines Elektronenspeicherrings. Für Dipol- und Quadrupolmagnete sowie für die feldfreien Bereiche (Driftstrecken) existiert jeweils eine Transfermatrix, die den Vektor der Phasenraumkoordinaten eines Teilchens vom Anfang zum Ende der Struktur transformiert. Für Sextupolmagnete kann die Teilchenbahn durch Winkeländerungen (*kicks*) angenähert werden.

$$\begin{pmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & \frac{1}{\sqrt{|k|}} \sin \Omega \\ -\sqrt{|k|} \sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}. \quad (112)$$

b) Defokussierender Quadrupolmagnet: Die analoge Lösung der horizontalen Bahngleichung, wieder für $k > 0$ und $1/R^2 = 0$, führt zu:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Omega & \frac{1}{\sqrt{|k|}} \sinh \Omega \\ \sqrt{|k|} \sinh \Omega & \cosh \Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix}. \quad (113)$$

c) Schwache Fokussierung des Dipolmagneten: Die Lösung im Dipol (endlicher Bahnradius R , Gradient $k = 0$) ist analog zum fokussierenden Quadrupol, wobei k durch $1/R^2$ ersetzt wird:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{s}{R}) & R \sin(\frac{s}{R}) \\ -\frac{1}{R} \sin(\frac{s}{R}) & \cos(\frac{s}{R}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix}. \quad (114)$$

Ein Dipol wirkt also auch ohne Feldgradient horizontal fokussierend: zwei parallel zueinander versetzte Kreisbögen nähern sich einander an. Dieser Effekt heißt “schwache Fokussierung“, da

für typische Werte $1/R^2 \ll k$ ist.

d) Kantenfokussierung des Dipolmagneten: Dipolmagnete werden oft aus gestapelten Blechen hergestellt, so dass die beiden Stirnflächen parallel zueinander sind. Bei solchen ‘‘Rechteckmagneten’’ treten Kanteneffekte auf, die beim ‘‘Sektormagneten’’ (die Stirnflächen sind im Biegewinkel zueinander geneigt und senkrecht zur Sollbahn) nicht vorhanden sind. Sind die Flächen um einen Winkel Ψ (= halber Biegewinkel beim Rechteckmagneten) gegen die Senkrechte auf die Idealbahn geneigt, gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \Psi}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \quad (115)$$

$$\begin{pmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \Psi}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} \quad (116)$$

Die geneigte Stirnfläche bewirkt eine Änderung der Wegstrecke im Feld um $\Delta = x \tan \Psi$ im Vergleich zum Sektormagneten, was horizontal zu einer Verringerung der schwachen Fokussierung um Δ/R führt.

Vertikal ergibt sich ein fokussierender Effekt aus dem Randfeld. Bei $y = 0$ ist das Randfeld vertikal und senkrecht zur Teilchenbahn. Mit zunehmendem y besitzt es eine zunehmende horizontale Komponente parallel und – im Gegensatz zum Sektormagneten – auch senkrecht zur Bahn.

e) Driftstrecke: Im feldfreien Raum gilt die einfache Beziehung

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \quad \text{und ebenso in } y \quad (117)$$

Damit sind alle wesentlichen linearen Elemente eines Beschleunigers genannt. Die allgemeine Struktur aller obigen Gleichungen, die Transformationen des Teilchenvektors $\vec{X} = (x, x', y, y')$ von $s = 0$ an eine andere Stelle des Beschleunigers beschreiben, ist

$$\vec{X}(s) = \mathbf{M} \cdot \vec{X}(0) \quad \text{mit} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}, \quad (118)$$

wobei M Transformations- oder Transfermatrix heißt und Untermatrizen für die horizontale und vertikale Ebene enthält. Bei einem Abschnitt, der aus mehreren Elementen besteht, entsteht die Transfermatrix des gesamten Abschnitts durch Matrizenmultiplikation. Beispiel:

$$\mathbf{M}_{\text{Rechteckdipol}} = \mathbf{M}_{\text{hintere Kante}} \cdot \mathbf{M}_{\text{schwache Fokussierung}} \cdot \mathbf{M}_{\text{vordere Kante}}. \quad (119)$$

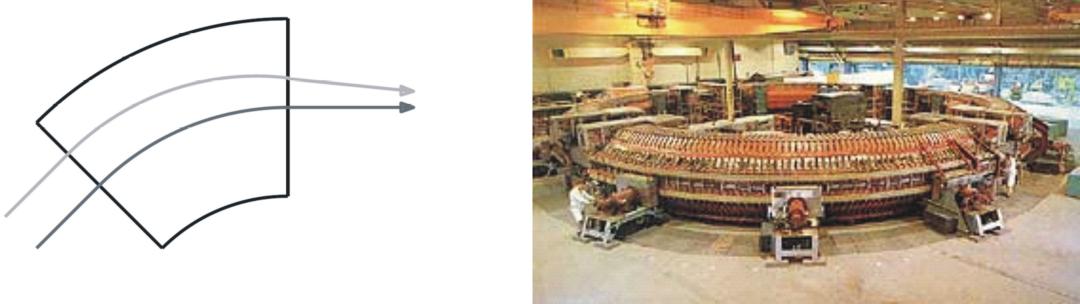


Abbildung 30: Links: schematische Darstellung der „schwachen“ Fokusierung. Dieser geometrische Effekt beruht darauf, dass sich zwei Kreisbahnen mit gleichem Radius einander annähern. Rechts das Cosmotron (BNL Upton/USA, 1952), eine Maschine ohne Quadrupolmagnete und entsprechend großer Ausdehnung des Strahls. Die Vakuumkammer war 32 Inch (81 cm) breit mit einer Wandstärke von 1 Inch.

Ein weiteres Beispiel: Multiplikation der Matrizen aller Elemente eines Speicherrings ergibt die Matrix für einen vollen Umlauf (*1-turn-Matrix*). Die mühsame Aufgabe der Matrizenmultiplikation und Transformation von Teilchenvektoren erfüllt normalerweise ein Computerprogramm.

6.4 Dispersion und Bahnlänge

Die bisherige Diskussion war auf Teilchen mit Sollimpuls p beschränkt. Hätte man bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen einen davon abweichenden Impuls $p(1 + \Delta p/p)$ berücksichtigt, wäre die horizontale Gleichung inhomogen geworden, wie z.B. in [41] hergeleitet. Im Dipolmagneten mit Biegeradius R und Quadrupolstärke $k = 0$ lautet die Bewegungsgleichung dann

$$x'' + \frac{1}{R^2}x = \frac{1}{R} \frac{\Delta p}{p} \quad (120)$$

$$D'' + \frac{1}{R^2}D = \frac{1}{R}. \quad (121)$$

Die auf die Impulsabweichung normierte horizontale Abweichung $D(s) = x(s)/(\Delta p/p)$ eines Teilchens von der Sollbahn erhält man nach Division der Gleichung durch $\Delta p/p$. Die Funktion $D(s)$ heißt Dispersion. Die Impulsunschärfe von Teilchenstrahlen ist typischerweise im Bereich von 0.1%, zusätzliche Impulsabweichungen z.B. durch Streuung an Restgasatomen, bei denen ein Teilchen nicht verloren geht, liegen bei wenigen Prozent des Sollimpulses. Der Lösungsansatz lautet:

$$D(s) = A \cos\left(\frac{s}{R}\right) + B \sin\left(\frac{s}{R}\right) + R \quad (122)$$

$$D'(s) = -(A/R) \sin\left(\frac{s}{R}\right) + (B/R) \cos\left(\frac{s}{R}\right).$$

Mit den Anfangsbedingungen $D(0) = A + R$ und $D'(0) = B/R$ ist

$$\begin{aligned} D(s) &= D(0) \cos\left(\frac{s}{R}\right) + D'(0)R \sin\left(\frac{s}{R}\right) + R \left[1 - \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right] \\ D'(s) &= -\frac{D(0)}{R} \sin\left(\frac{s}{R}\right) + D'(0) \cos\left(\frac{s}{R}\right) + \sin\left(\frac{s}{R}\right). \end{aligned} \quad (123)$$

Es bietet sich an, die horizontale Untermatrix der Transfermatrix um eine Zeile und Spalte zu erweitern:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ \Delta p/p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s}{R}\right) & R \sin\left(\frac{s}{R}\right) & R \left[1 - \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right] \\ -\frac{1}{R} \sin\left(\frac{s}{R}\right) & \cos\left(\frac{s}{R}\right) & \sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \\ \Delta p/p \end{pmatrix} \quad (124)$$

Die horizontale Verschiebung der Bahn eines impulsabweichenden Teilchens $x_D(s) = (\Delta p/p)D(s)$ bewirkt auch eine Änderung der Bahnlänge. Der wesentliche Effekt ist die Änderung der Bogenlänge in den Dipolen

$$\Delta L = L - L_\circ = \oint \frac{R + x_D(s)}{R} ds - \oint ds = \Delta p/p \oint \frac{D(s)}{R(s)} ds. \quad (125)$$

Der *momentum compaction factor* α gibt die relative Längenänderung eines Umlaufs um einen Speicherring normiert auf die relative Impulsabweichung an:

$$\alpha = \frac{\Delta L/L_\circ}{\Delta p/p} = \frac{1}{L_\circ} \oint \frac{D(s)}{R(s)} ds. \quad (126)$$

In der allgemeisten Form wird die Teilchenposition durch einen Vektor ausgedrückt, der alle sechs Phasenraumkoordinaten enthält und durch eine 6×6 -Matrix transformiert wird. Die Untermatrizen für die horizontale und vertikale Bewegung können in der Form

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} \quad (127)$$

mit ‘‘kosinus-’’ und ‘‘sinusartigen’’ Funktionen C und S geschrieben werden, wie man an den Matrizen für Dipol, Quadrupol und Driftstrecke sieht (nicht jedoch an der Matrix für die Kantenfokussierung, die eine Näherung darstellt). Für $s = 0$ ist $\det M = CS' - SC' = 1$. Dies gilt allgemein, wenn man bedenkt, dass die Hill’sche Differentialgleichung für jede Funktion separat erfüllt ist ($C'' + kC = 0$ und $S'' + kS = 0$) und damit

$$\frac{d}{ds} (CS' - SC') = CS'' + C'S' - S'C' - SC'' = 0. \quad (128)$$

Die 6-dimensionale Darstellung

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ y(s) \\ y'(s) \\ z(s) \\ \delta p/p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x & S_x & 0 & 0 & 0 & r_{16} \\ C'_x & S'_x & 0 & 0 & 0 & r_{26} \\ 0 & 0 & C_y & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C'_y & S'_y & 0 & 0 \\ r_{51} & r_{52} & 0 & 0 & 1 & r_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \\ y(0) \\ y'(0) \\ z(0) \\ \delta p/p \end{pmatrix} \quad (129)$$

enthält ferner die mit Gl. (123) neu eingeführten Matrixelemente

$$r_{16} = R \left[1 - \cos \left(\frac{s}{R} \right) \right] \quad r_{26} = \sin \left(\frac{s}{R} \right) \quad (130)$$

sowie die Elemente, die eine longitudinale Abweichung der Bogenlänge im Dipol

$$z(ds) - z(0) = \frac{R+x}{R} ds - ds = \frac{x}{R} ds \quad (131)$$

in Abhängigkeit von $x(0)$, $x'(0)$ und $\Delta p/p$ beschreiben:

$$\begin{aligned} r_{51} &= \int_{s_0}^{s_1} \frac{C_x(s)}{R(s)} ds = \sin \left(\frac{s}{R} \right) \\ r_{52} &= \int_{s_0}^{s_1} \frac{S_x(s)}{R(s)} ds = R \left[1 - \cos \left(\frac{s}{R} \right) \right] \\ r_{56} &= \int_{s_0}^{s_1} \frac{r_{16}(s)}{R(s)} ds = R \left[\frac{s}{R} - \sin \left(\frac{s}{R} \right) \right]. \end{aligned} \quad (132)$$

6.5 Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

Die Bahngleichung mit ortsabhängiger Quadrupolstärke

$$x''(s) + k(s)x(s) = 0 \quad (133)$$

wird durch folgenden Ansatz erfüllt:

$$x(s) = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta(s)} \cos \mu(s) \quad \text{mit} \quad \mu(s) \equiv \Psi(s) + \phi. \quad (134)$$

Im Matrizenformalismus ergab sich $x(s)$ aus der Angabe eines Ausgangsvektors und weiterer Größen wie z.B. der Stärke und Länge eines Quadrupolmagneten, aus denen Matrixelemente gebildet wurden. Dieselbe Information steckt implizit in den Größen:

- ε : Wirkungsvariable, Einteilchen-Emittanz oder Courant-Snyder-Invariante (s -unabhängig).
- $\beta(s)$: Amplituden- oder Beta-Funktion (vom einzelnen Teilchen unabhängig)

$\mu(s)$: Phase, bestehend aus Anfangsphase ϕ und Phasenvorschub $\Psi(s)$.

Wozu ist die allgemeine Lösung gut? Die Struktur der Gleichung lässt die oszillatorische Teilchenbewegung erkennen, was man dem Produkt von Transfermatrizen nicht ansieht. Beta-Funktion und Phasenvorschub erlauben Aussagen über die Teilchenbewegung, auch wenn man die explizite Anfangsbedingung nicht kennt, was insbesondere für die Beschreibung eines Teilchenstrahls als Ensemble vieler Teilchen wichtig wird.

Um den Zusammenhang zwischen Beta-Funktion und Phasenvorschub zu sehen, muss die erste und zweite Ableitung von $x(s)$ gebildet werden:

$$\begin{aligned} x'(s) &= \sqrt{\varepsilon} \frac{\beta'}{2\sqrt{\beta(s)}} \cos \mu - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta(s)} \Psi' \sin \mu \\ x''(s) &= \frac{\sqrt{\varepsilon} \beta'' \sqrt{\beta} - \beta'^2 / 2\sqrt{\beta}}{2\beta} \cos \mu - \frac{\sqrt{\varepsilon} \beta'}{2\sqrt{\beta}} \Psi' \sin \mu \\ &\quad - \frac{\sqrt{\varepsilon} \beta'}{2\sqrt{\beta}} \Psi' \sin \mu - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta} \Psi'^2 \cos \mu - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta} \Psi'' \sin \mu \end{aligned} \quad (135)$$

Damit der Ansatz für alle Anfangsphasen gilt, müssen die sin- und cos-Terme jeweils die Bewegungsgleichung erfüllen. Für die sin-Terme bedeutet dies

$$\frac{\beta'}{\sqrt{\beta}} \Psi' + \sqrt{\beta} \Psi'' = 0 = \frac{(\beta \Psi')'}{\sqrt{\beta}} \quad \rightarrow \quad \beta \Psi' = c_1 \quad \rightarrow \quad \Psi(s) = \int_0^s \frac{c_1 d\bar{s}}{\beta(\bar{s})} + c_2, \quad (136)$$

wobei man die Integrationskonstanten zu $c_1 = 1$ und $c_2 = 0$ festlegt. Eine kleine Beta-Funktion bewirkt also einen schnellen Phasenvorschub.

Oft ist die Bewegung eines Teilchens im Phasenraum (x, x') von Interesse. Um die Phase μ zu eliminieren bildet man

$$\cos \mu = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta}} \quad \sin \mu = -\frac{\sqrt{\beta} x'}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\alpha x}{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta}}, \quad (137)$$

wobei die gebräuchliche Abkürzung $\alpha(s) \equiv -\beta'(s)/2$ verwendet wurde. Ferner soll $\gamma(s) \equiv (1 + \alpha(s)^2)/\beta(s)$ definiert werden. Die Größen $\beta(s)$, $\alpha(s)$, $\gamma(s)$ werden auch “Twiss-Parameter“ genannt. Aus $\sin^2 \mu + \cos^2 \mu = 1$ ergibt sich:

$$\varepsilon = \frac{x^2}{\beta} + \left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} x - \sqrt{\beta} x' \right)^2 = \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2. \quad (138)$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse in (x, x') mit folgenden Eigenschaften:

- Die Form der Phasenraumellipse ist durch $\beta(s)$, $\alpha(s)$, $\gamma(s)$ gegeben.
- Ist $\alpha(s) = 0$, so steht die Phasenraumellipse aufrecht.
- Die Fläche der Phasenraumellipse ist konstant und beträgt $\pi \varepsilon$.

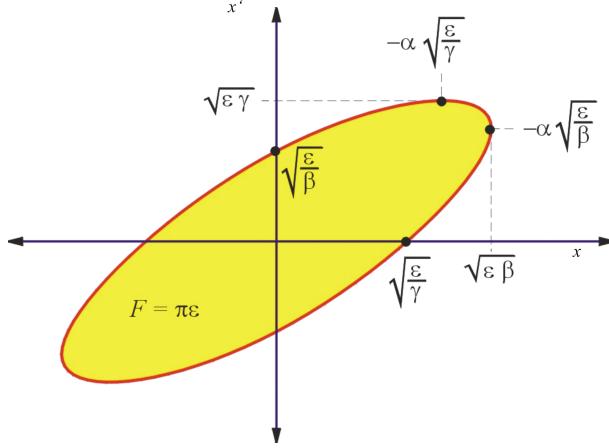


Abbildung 31: Eine horizontale Phasenraumellipse und ihre wesentlichen Kenngrößen: maximale Ausdehnung in x und x' , Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und Fläche F .

- Die maximale Auslenkung im Ort ist $x = \pm\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\beta}$.
- Die maximale Auslenkung im Winkel ist $x' = \pm\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\gamma}$.
- Die Ellipse schneidet die Ortsachse in $x = \pm\sqrt{\varepsilon}/\sqrt{\gamma}$.
- Die Ellipse schneidet die Winkelachse in $x' = \pm\sqrt{\varepsilon}/\sqrt{\beta}$.

Eine analoge Betrachtung gilt im vertikalen Phasenraum (y, y') , der seine eigenen Twiss-Parameter hat. Zu den Größen $\beta, \alpha, \gamma, \varepsilon, D$ und D' gehört stets ein Index x oder y , der hier aus Bequemlichkeit weggelassen wurde. Bei den Dispersionsfunktionen D und D' kann man die Ausrede gelten lassen, dass hier ‘‘flache’’ Maschinen betrachtet werden, die – in einer idealen Welt – keine vertikale Dispersion haben.

Der longitudinale Phasenraum – beschrieben durch die longitudinale Koordinate z und die Impulsabweichung – wird gesondert behandelt. Im Unterschied zu den transversalen Koordinaten steht die longitudinale Phasenraumellipse immer aufrecht (wie bei $\alpha_{x,y} = 0$), außerdem ist die longitudinale Bewegung viel langsamer: In einem typischen Speicherring werden pro Umlauf ca. 10 transversale Betatron-Schwingungen ausgeführt, während eine longitudinale Schwingung (sog. Synchrotron-Oszillation) etwa 100 Umläufe benötigt.

Manchmal ist es von Vorteil, ein ‘‘normiertes Koordinatensystem’’ (η, η') mit

$$\eta_x = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon\beta}} \quad \text{und} \quad \eta'_x = x' \sqrt{\frac{\beta}{\varepsilon}} + \frac{\alpha x}{\sqrt{\varepsilon\beta}} \quad (139)$$

zu verwenden. Die Kreisgleichung

$$\eta_x^2 + \eta'^2_x = 1 \quad (140)$$

ist der obigen Ellipsengleichung äquivalent.

6.6 Transformation der optischen Funktionen

Nicht nur die Phasenraumkoordinaten eines Teilchens, sondern auch die optischen Funktionen können von einer Stelle eines Beschleunigers oder Speicherrings an eine andere Stelle transformiert werden, wenn die Transfermatrix zwischen den beiden Orten bekannt ist. Allerdings ist die Transformationsvorschrift für die optischen Funktionen etwas komplizierter. Die Phasenraummellipsen eines Teilchens sind an jeder Stelle flächengleich:

$$\varepsilon = \beta_0 x_0'^2 + 2\alpha_0 x_0 x_0' + \gamma_0 x_0^2 = \beta_1 x_1'^2 + 2\alpha_1 x_1 x_1' + \gamma_1 x_1^2. \quad (141)$$

Benutzt man die inverse Transfermatrix (unter Ausnutzung von $\det M = 1$)

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S' & -S \\ -C' & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} \quad (142)$$

und vergleicht die Koeffizienten der x_1^2 -, $x_1'^2$ - und $x_1 x_1'$ -Terme der linken und rechten Ellipsengleichung miteinander, so erhält man die Transformationsgleichungen für die optischen Funktionen, hier in der kompakten Matrixform

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & -2SC & S^2 \\ -CC' & SC' + S'C & -SS' \\ C'^2 & -2S'C' & S'^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (143)$$

dargestellt. Am Beispiel einer Strahltaille im feldfreien Raum wird der Unterschied zwischen einer Teilchenbahn und der Einhüllenden (definiert als die maximale Auslenkung der Phasenraummelipse) deutlich. Hier ist mit $\alpha_0 = 0$ und der Transfermatrix für Driftstrecken die Beta-Funktion

$$\beta_1 = \beta_0 + \frac{s^2}{\beta_0} \quad (144)$$

eine Parabel, d.h. die Einhüllende $\sigma = \sqrt{\varepsilon\beta_1}$ ist gekrümmmt, während sich individuelle Teilchen natürlich auf Geraden bewegen.

6.7 Die Periodizitätsbedingung bei Speicherringen

Bevor man die optischen Funktionen mit obiger Matrix transformieren kann, müssen sie wenigstens an einem Punkt gegeben sein. Bei einer linearen Maschine hängen die optischen Funktionen von den Bedingungen an der Teilchenquelle ab. Bei einem Speicherring findet man nach einem Umlauf dieselben optischen Gegebenheiten vor, d.h. die optischen Funktionen transformieren sich in sich selbst:

$$\beta_0 = C^2 \beta_0 - 2CS\alpha_0 + S^2 \gamma_0, \quad \text{u.s.w.} \quad (145)$$

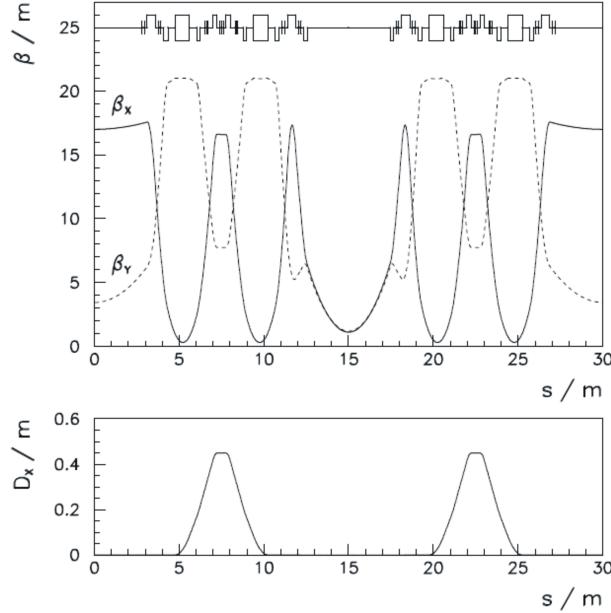


Abbildung 32: Beispiel für optische Funktionen, oben die horizontale und vertikale Beta-Funktion, unten die Dispersion als Funktion der longitudinalen Koordinate s . Ganz oben ist die Magnetstruktur schematisch angedeutet. Dipole sind als Rechtecke, Quadrupole je nach Vorzeichen als oben/unten offene Symbole und Sextupole als Striche dargestellt.

wobei C und S Elemente der Transfermatrix für einen vollständigen Umlauf sind. Eine solche Periodizitätsbedingung gilt auch für identische Sektoren eines Speicherrings. Für den vereinfachten Fall $\alpha_0 = 0$ ergibt sich

$$\beta_0 = C^2 \beta_0 + \frac{S^2}{\beta_0} \quad \rightarrow \quad \beta_0 = \frac{S}{\sqrt{1 - C^2}}. \quad (146)$$

Die Herleitung des allgemeinen Falls, auf die hier verzichtet wird, erfordert die Ausnutzung weiterer Eigenschaften (s. nächster Abschnitt) der Matrixelemente:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{2S}{\sqrt{2 - C^2 - 2SC' - S'^2}} \\ \alpha_0 &= \frac{C - S'}{2S} \beta_0 \\ \gamma_0 &= \frac{1 + \alpha_0^2}{\beta_0}. \end{aligned} \quad (147)$$

Damit sind die optischen Funktionen an der mit 0 indizierten Stelle bekannt und können auch an

jeder anderen Stelle der Magnetstruktur berechnet werden. Für die Dispersion $D = x/(\Delta p/p)$, die sich ja wie eine Teilchenbahn transformiert, gilt

$$\begin{aligned} D_0 &= m_{11}D_0 + m_{12}D'_0 + m_{13} \\ D'_0 &= m_{21}D_0 + m_{22}D'_0 + m_{23} \end{aligned} \quad (148)$$

und nach D und D' aufgelöst

$$\begin{aligned} D'_0 &= \frac{m_{21}m_{13} + m_{23}(1 - m_{11})}{2 - m_{11} - m_{22}} \\ D_0 &= \frac{m_{12}D'_0 + m_{13}}{1 - m_{11}}. \end{aligned} \quad (149)$$

Als Beispiel für die Berechnung optischer Funktionen ist in Abbildung 29 eine Magnetstruktur und in Abbildung 32 die daraus resultierenden optischen Funktionen gezeigt.

6.8 Allgemeine Form der Transfermatrizen

Die umgekehrte Aufgabe lautet, aus den an zwei Punkten 0 und 1 gegebenen optischen Funktionen sowie dem Phasenvorschub Ψ die Elemente der entsprechenden Transfermatrix zu bestimmen (auf die Ableitung soll hier verzichtet werden):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_0}}(\cos \Psi + \alpha_0 \sin \Psi) & \sqrt{\beta_0 \beta_1} \sin \Psi \\ \frac{(\alpha_0 - \alpha_1) \cos \Psi - (1 + \alpha_0 \alpha_1) \sin \Psi}{\sqrt{\beta_0 \beta_1}} & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_1}}(\cos \Psi - \alpha_1 \sin \Psi) \end{pmatrix}. \quad (150)$$

Dass die Matrixelemente der unteren Reihe die Ableitung der oberen Elemente nach s sind, sieht man mit $\alpha = -\beta'/2$ und $\Psi' = 1/\beta$. Die oft verwendete Matrix für einen vollständigen Umlauf um einen Speicherring ($\beta_1 = \beta_0$ und $\alpha_1 = \alpha_0$) mit der zusätzlichen Vereinfachung $\alpha = 0$ lautet damit

$$\mathbf{M}_u = \begin{pmatrix} \cos 2\pi Q & \beta \sin 2\pi Q \\ -\frac{1}{\beta} \sin 2\pi Q & \cos 2\pi Q \end{pmatrix}. \quad (151)$$

Der Phasenvorschub bei einem Umlauf ist $\Psi = 2\pi Q$, wobei Q Arbeitspunkt (oder *tune*) heißt und die Zahl der Betatronschwingungen pro Umlauf angibt. Die nicht-diagonalen Elemente der Matrix hängen von den optischen Funktionen ab, während Q stets gleich ist (die Zahl der Schwingungen hängt nicht davon ab, wo man den Beginn eines Umlaufs definiert). Auch hier muß zwischen der horizontalen und vertikalen Ebene unterschieden werden d.h. es gibt zwei Arbeitspunkte Q_x und Q_y . Während ein Teilchen mehrere (Größenordnung 10) transversale Schwingungen pro Umlauf um einen Speicherring vollführt, ist das longitudinale Analogon zum Arbeitspunkt (der Synchrotron-*tune*) in der Größenordnung von $Q_s = 10^{-2}$ bis 10^{-3} .

6.9 Courant-Snyder-Invariante und Strahlemittanz

Wie bereits erwähnt, sind die Teilchen im Strahl eines Beschleunigers oder Speicherringen in den Phasenraumkoordinaten in guter Näherung normalverteilt. Solange alle Teilchen denselben Impuls haben, bilden ihre Orte in x - x' -Ebene an einer bestimmten Stelle eines Speicherringen konzentrische Ellipsen. Denkt man sich ein Teilchen mit einer Phasenraumellipse, deren maximale Amplituden den Standardabweichungen der Verteilung σ_x und $\sigma_{x'}$ entspricht, so definiert die Courant-Snyder-Invariante ε_x dieses Teilchens die ‘‘horizontale Emittanz des Strahls’’. Auch hierfür schreibt man oft ε_x , so dass sich die Unterscheidung von Strahl-Emittanz und Courant-Snyder-Invariante (‘‘Einteilchen-Emittanz’’) nur aus dem Kontext ergibt. Analoges gilt für die vertikale Emittanz. Die Funktionen

$$\sigma_x(s) = \sqrt{\varepsilon_x \beta_x(s)} \quad \text{und} \quad \sigma_y(s) = \sqrt{\varepsilon_y \beta_y(s)} \quad (152)$$

werden ‘‘Einhüllende’’ (oder ‘‘Enveloppen’’) genannt und sind ein Maß für die Größe des Teilchenstrahls. Für impulsabweichende Teilchen und $\text{Dispersion} \neq 0$ sind die Phasenraumellipsen um $\Delta x = D\Delta p/p$ bzw. $\Delta x' = D'\Delta p/p$ verschoben, was den Strahl horizontal vergrößert:

$$\sigma_x = \sqrt{\varepsilon_x \beta_x(s) + D^2(s) \sigma_{\Delta p/p}^2}, \quad (153)$$

wobei $\sigma_{\Delta p/p}$ die Standardabweichung der als normalverteilt angenommenen Impulsabweichungen ist.

6.10 Feldfehler und optische Resonanzen

Die unvermeidbare Ungenauigkeit von magnetischen Feldern hat bei Ringbeschleunigern und Speicherringen weitreichende Konsequenzen. Man versucht daher, Feldfehler um $\Delta B/B < 10^{-4}$ zu erreichen. Aufstellungsfehler von Magneten liegen typischerweise bei wenigen Zehntel Millimetern.

Ein Fehler ΔB in einem Dipolmagneten der Länge L führt zu einem unerwünschten horizontalen Winkel (*kick*) von

$$\Delta x' = \frac{e}{p} \Delta B L, \quad (154)$$

den man bei kurzen Magneten durch eine lokale Winkeländerung in der Mitte des Magneten nähern kann. Im Phasenraumbild (vgl. Abb.31 entspricht eine Winkeländerung einer Bewegung entlang der x' -Achse zu einem Punkt auf einer Phasenraumellipse mit Fläche $\pi\varepsilon$. Ein Teilchen auf der Sollbahn erhält also eine (Einteilchen-)Störemittanz von

$$\varepsilon = \beta \Delta x'^2, \quad (155)$$

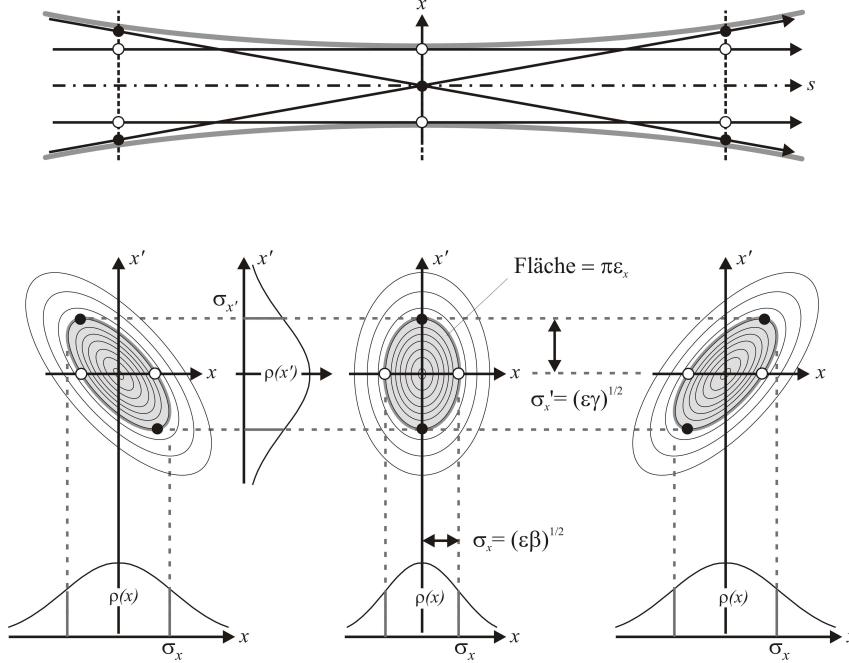


Abbildung 33: Trajektorien und Phasenraumellipsen in der Umgebung einer Strahlaille. Der Strahl besteht aus Teilchen, die durch konzentrische Ellipsen im Phasenraum (hier in den horizontalen Koordinaten x und x') repräsentiert werden. Die projizierte Dichten $\rho(x)$ und $\rho(x')$ entsprechen meist in guter Näherung Normalverteilungen, deren Standardabweichungen die Emittanz der Strahls definieren.

wobei vereinfachend $\alpha = 0$ angenommen wurde. Der Feldfehler ist also umso störender, je größer die Beta-Funktion, je kleiner also die Ausdehnung der Phasenraumellipse $\sqrt{\varepsilon/\beta}$ in der Winkelkoordinate ist. Bei mehrfachem Durchlauf werden sich die Störwinkel addieren, wenn der Phasenvorschub pro Umlauf ein Vielfaches von 2π ist. Ganzzahlige Arbeitspunkte Q_x, Q_y müssen also strikt vermieden werden. Es gibt allerdings eine Teilchenbahn, die von einem Dipolfehler nicht beeinflusst wird, wenn nämlich

$$\begin{pmatrix} x \\ x' - \Delta x' \end{pmatrix} = \mathbf{M}_u \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \quad (156)$$

gilt. Diese Bahn definiert den gestörten Orbit d.h. die Sollbahn bei Anwesenheit des Feldfehlers. Setzt man die Matrix \mathbf{M}_u für einen Umlauf ein, so ergibt sich (ohne Beweis)

$$x = \frac{\beta}{2 \tan \pi Q} \Delta x' \quad \text{und} \quad x' = \frac{1}{2} \Delta x'. \quad (157)$$

Störwinkel aufgrund von Fehlaufstellungen oder Feldfehlern von Quadrupolmagneten addieren

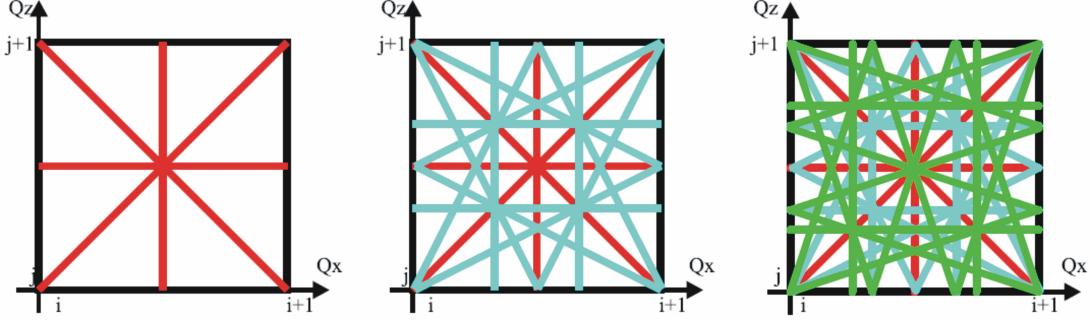


Abbildung 34: Arbeitspunkt-Diagramm mit Resonanzen bis zur zweiten (links), dritten (Mitte) und vierten Ordnung (rechts).

sich, wenn der Phasenvorschub pro Umlauf ein Vielfaches von π ist. Aufgrund von Quadrupolfehlern sind also auch halbzahlige Arbeitspunkte zu meiden. Allgemein gilt, dass ein Speicherring bei Arbeitspunkten mit

$$mQ_x = p, \quad nQ_y = p, \quad mQ_x + nQ_y = p \quad (m, n, p = \text{ganze Zahlen}) \quad (158)$$

nicht betrieben werden kann. Man spricht hierbei von Resonanzen der Ordnung m oder n , bzw. von Koppelresonanzen der Ordnung $m+n$. Die Stärke von Resonanzen nimmt mit zunehmender Ordnung rasch ab, so dass sie nur bis etwa zur 5. Ordnung zu berücksichtigen sind.

Die verbotenen Bereiche sind im sogenannten Arbeitspunktdiagramm, in dem Q_y gegen Q_x aufgetragen ist, als waagerechte, senkrechte und diagonale Linien zu erkennen (s. Abb. 34).

6.11 Chromatizität und Sextupole

Die Impulsabweichung in einem Teilchenstrahl ist in guter Näherung normalverteilt mit einer typischen Standardabweichung von $\sigma_{\Delta p/p} \approx 10^{-3}$. Für kleine Impulsabweichungen $\Delta p/p$ ändert sich die Fokussierung durch einen Quadrupol der Stärke k gemäß

$$\Delta k \approx -\frac{\Delta p}{p} k, \quad (159)$$

d.h. ein Teilchen mit höherem Impuls wird schwächer fokussiert. Im Folgenden soll gezeigt werden, wie sich dadurch der Arbeitspunkt verändert. Hier genügt es, die Spur der Transfermatrix für einen vollen Umlauf

$$\text{Spur} \mathbf{M}_u = 2 \cos 2\pi Q. \quad (160)$$

zu betrachten. Für ein impulsabweichendes Teilchen gilt dagegen

$$\text{Spur} \tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{u}} = 2 \cos 2\pi(Q + dQ), \quad (161)$$

wobei $\tilde{\mathbf{M}}$ aus der ursprünglichen Umlaufmatrix und einer Transfermatrix für einen Quadrupol mit der Stärke Δk und infinitesimalen Länge ds entsteht:

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\Delta k} ds & \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} \sin \sqrt{\Delta k} ds \\ -\sqrt{\Delta k} \sin \sqrt{\Delta k} ds & \cos \sqrt{\Delta k} ds \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{u}} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta k ds & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{u}}. \quad (162)$$

Ausmultiplizieren der Matrizen und Bildung der Spur ergibt mit den Näherungen $\cos 2\pi dQ \approx 1$ und $\sin 2\pi dQ \approx 2\pi dQ$:

$$\begin{aligned} 2 \cos 2\pi Q - \Delta k ds \beta(s) \sin 2\pi Q &= 2 \cos 2\pi(Q + dQ) \\ &= 2 \cos 2\pi Q \cos 2\pi dQ - 2 \sin 2\pi Q \sin 2\pi dQ \\ -\frac{1}{2} \Delta k ds \beta(s) &= -2\pi dQ \\ dQ &= \frac{1}{4\pi} \Delta k \beta(s) ds. \end{aligned} \quad (163)$$

Dieser Zusammenhang ermöglicht, die Beta-Funktion am Ort eines Quadrupols zu messen, indem man die Quadrupolstärke verändert und die Änderung des Arbeitspunkts (*tune*) beobachtet. Ein Spektrumanalysator, der Signale als Funktion der Frequenz auf einem Bildschirm darstellt (mehr dazu in Abschnitt 7.5), zeigt Linien bei $f_o q$ und $f_o(1 - q)$, wobei f_o die Umlaufsfrequenz und q der bruchzahlige Anteil des Arbeitspunkts ist. Der ganzzahlige Anteil bleibt unbeobachtet, zwischen q und $(1 - q)$ entscheidet das Vorzeichen von ΔQ : wenn die Quadrupolstärke erhöht wird, steigt auch die *tune*-Frequenz.

Einsetzen von $\Delta k = k \Delta p/p$, Integration über alle Quadrupolmagnete und Division durch $\Delta p/p$ liefert die sog. Chromatizität

$$\xi_{x,y} \equiv \frac{\Delta Q_{x,y}}{\Delta p/p} = -\frac{1}{4\pi} \oint k(s) \beta_{x,y}(s) ds, \quad (164)$$

die zunächst bei den meisten Speicherringen nicht gering und negativ ist (typisch -50). Dies ist in zweifacher Weise schädlich:

- Impulsabweichende Teilchen können auf Resonanzen treffen.
- Bei negativer Chromatizität tritt die unerwünschte *head-tail*-Instabilität auf.

Aufgrund des zweiten Effekts, der eine Folge der elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen dem Teilchenstrahl und der Kammerwand ist, wird eine kleine positive Chromatizität (z.B. $+1$) angestrebt. Dies erreicht man durch Sextupolmagnete an Positionen mit Dispersion $D(s) \neq 0$ (siehe auch Abbildung 18). Sextupole kann man als ortsabhängige Quadrupole der Stärke

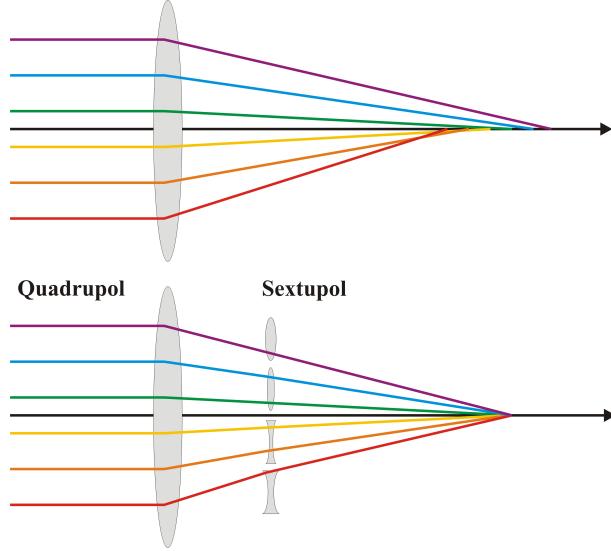


Abbildung 35: Schematische Darstellung der Fehlfokussierung durch Impulsabweichung (oben) und ihrer Korrektur durch einen Sextupolmagneten in einer Strecke mit Dispersion (unten). Zunehmender Teilchenimpuls ist durch Farben von rot bis violett dargestellt. Der Sextupolmagnet entspricht einem ortsabhängigen Quadrupol.

$$k_s = m \cdot x = m \cdot D(s) \frac{\Delta p}{p} \quad (165)$$

beschreiben. Mit ihnen ergibt sich eine einstellbare Gesamtchromatizität von

$$\xi_{x,y} = \frac{1}{4\pi} \oint (m(s)D(s) - k(s)) \beta_{x,y}(s) ds. \quad (166)$$

Mit der Einführung von Feldern, die quadratisch in x und y ansteigen, verläßt man das Terrain der linearen Optik. So gibt es für einen Sextupolmagneten keine Transfermatrix. Statt dessen wird seine Wirkung durch Winkeländerungen (*kicks*) in der Magnetmitte angenähert:

$$\Delta x' = \frac{1}{2} m l (x^2 - y^2) \quad \text{und} \quad \Delta y' = m l x y, \quad (167)$$

wobei l die effektive Länge des Magneten ist. Durch nichtlineare Felder werden Betatronsschwingung mit zunehmender Amplitude anharmonisch, so dass Teilchenbahnen, die wenige Zentimeter neben der Sollbahn liegen, nicht mehr stabil sind. Der Bereich stabiler Trajektorien heißt "dynamische Apertur". Je kleiner die dynamische Apertur eines Speicherrings ist, desto größer ist die Rate von Teilchen, die nach Stößen mit Restgasmolekülen oder untereinander verloren

gehen, d.h. desto geringer ist die Lebensdauer des gespeicherten Strahls. Man versucht daher, den schädlichen Einfluß der Sextupole durch

- möglichst gleichmässige Verteilung der “chromatischen“ Sextupole
- sog. “harmonische“ Sextupolmagnete in dispersionsfreien Strecken

zu minimieren. Letztere ändern die eingestellte Chromatizität nicht, können aber die anharmonischen Anteile der Teilchenbahnen verringern. Man versucht, die dynamische Apertur durch Simulation zu bestimmen, indem man Teilchenbahnen verschiedener Anfangsbedingungen mittels Transfermatrizen und Sextupolkicks über viele Umläufe berechnet (*tracking*). Bei Elektron/Positronmaschinen, die aufgrund der Synchrotronstrahlung über einen Dämpfungsmechanismus verfügen, kann man eine Teilchenbahn nach $\sim 10^3$ Umläufen als stabil oder instabil einstufen. Für Protonen- oder Schwerionen-Speicherringe werden oft mehr als 10^5 Umläufe simuliert, da eine Trajektorie über lange Zeit stabil erscheinen und schließlich doch noch instabil werden kann.

6.12 Gebräuchliche Magnetstrukturen

Die meisten Beschleuniger und Speicherringe sind aus getrennten Dipol- und Quadrupolmagneten mit dazwischenliegenden Driftstrecken aufgebaut. Grundtypen der im Detail sehr verschiedenen Magnetanordnungen (*lattices*) sind z.B. die FODO-Struktur für einen möglichst einfachen Strahltransport und der Achromat für Synchrotronstrahlungsquellen.

6.12.1 Die FODO-Struktur

Da horizontal fokussierende Quadrupolmagnete vertikal defokussieren (und umgekehrt), müssen sie mit wechselnder Polarität vorhanden sein, dh. mindestens ein Dublett oder ein Triplet. Für einfache Synchrotrons oder z.B. zum Strahltransport zwischen zwei Wechselwirkungszonen in Kollisions-Speicherringen wird oft die FODO-Struktur mit einem fokussierenden (F), einem defokussierenden (D) Magneten und dazwischen liegenden Driftstrecken (O) verwendet. Die Gesamtmatrix für zwei Quadrupole der Länge l und Stärke k_1 und k_2 und einer Driftstrecke L berechnet sich aus

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_2 l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_1 l & 1 \end{pmatrix}, \quad (168)$$

wobei hier die Näherung für “dünne Linsen” verwendet wurde. Damit der Strahl fokussiert bleibt, muss für die Gesamtmatrix die Bedingung $\text{Spur}\mathbf{M} < 2$ gelten. Hieraus ergibt sich

$$0 < (k_1 l + k_2 l - k_1 k_2 l^2) < 1. \quad (169)$$

Anmerkung: Die grafische Darstellung des stabilen Bereichs in einer Auftragung von k_2 gegen k_1 ist als „Krawattendiagramm“ bekannt.

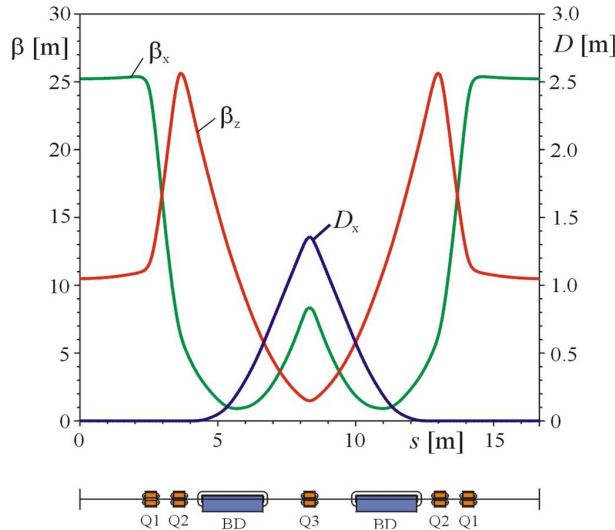


Abbildung 36: Die Chasman-Green-Magnetstruktur als Prototyp eines Achromaten mit zwei Dipolmagneten (Bild: K. Wille).

6.12.2 Das Mini- β -Prinzip

Um möglichst eng gebündelte Teilchenpakete zur Kollision zu bringen, geht man im Bereich der Wechselwirkungszone einer Kollisionsmaschine von der FODO-Struktur ab und verkleinert die Beta-Funktion mit starken Quadrupolmagneten auf wenige Zentimeter.

Je kleiner die Beta-Funktion am Ort einer Strahltaille, desto schneller steigt sie an ($\beta(s) = \beta(0) + s^2/\beta(0)$, siehe Gl. (144)). Will man das Anwachsen der Beta-Funktion begrenzen, so müssen die fokussierenden Elemente nahe an die Strahltaille herangebracht werden. Dazu werden oft Quadrupole in den Teilchendetektor, der den Wechselwirkungspunkt umgibt, integriert, wobei Quadrupolfeld und das Magnetfeld des Detektors sorgfältig gegeneinander abgeschirmt werden müssen.

6.12.3 Achromate

Moderne Synchrotronstrahlungsquellen bestehen in der Regel aus periodischen Strukturen, wobei sich achromatische Magnetenordnungen und Driftstrecken von mehreren Metern Länge abwechseln. Die Driftstrecken sind für Wiggler und Undulatoren vorgesehen und sollen dispersionsfrei sein (daher “achromatische” Magnetgruppen).

Der einfachste Achromat ist die “Chasman-Green”-Struktur mit zwei Dipolen, und einem dazwischen liegenden horizontal fokussierenden Quadrupol (optisches Analogon: zwei Prismen und eine Sammellinse). Vervollständigt wird die Struktur durch je ein Quadrupol-Dublett vor dem ersten und nach dem zweiten Dipol. Weitere Quadrupole zwischen den Dipolen erhöhen

die Flexibilität der Struktur. Magnetanordnungen dieser Art heißen *Double-bend-Achromaten* (z.B. in Berlin). Daneben sind auch *Triple-bend-Achromaten* mit drei Dipolen gebräuchlich (z.B. Advanced Light Source in Berkeley).

6.13 Lokale Orbitbeulen und Injektion

Oft ist es erforderlich, an bestimmten Stellen eines Beschleunigers oder Speicherrings den Strahl in definierter Weise zu verschieben, ohne dass sich die Strahllage in der gesamten Maschine ändert. Eine solche lokale Verschiebung (“Orbitbeule”, *bump*) erfordert zwei bis vier Korrekturdipolmagnete:

- Orbitbeulen mit zwei Magneten haben den Nachteil, dass der Phasenvorschub der Betatron-Schwingung π sein muss, was sich nicht gut einhalten lässt.
- Orbitbeulen mit drei Magneten lassen sich bei beliebigem Phasenvorschub abgleichen. Jedoch hängen Ort und Winkel (z.B. x und x') innerhalb der Beule voneinander ab.
- Orbitbeulen mit vier Magneten gestatten es, Ort und Winkel unabhängig voneinander einzustellen.

Eine abgeglichene Beule mit nur zwei Korrekturmagneten wird beschrieben durch (wobei $\Psi = \pi$ in die allgemeine Form der Transfermatrizen eingesetzt wurde)

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} & 0 \\ -\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} & -\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (170)$$

woraus die Relation $\phi_2 = \sqrt{\beta_1/\beta_2}\phi_1$ für die beiden Ablenkinkel folgt. Analog lassen sich Beziehungen für Orbitbeulen mit drei oder vier Magneten aufstellen, die jedoch weniger übersichtlich sind und hier nicht dargestellt werden sollen.

Eine wichtige Anwendung für eine lokale Orbitbeule ist die Injektion von Teilchen aus einem Beschleuniger in einen Speicherring. Dabei wird in der Regel mit mehreren “Schüssen” injiziert, um den gewünschten Strahlstrom zu erreichen. Es gilt jedoch die Grundregel, dass man in ein bereits gefülltes Phasenraumvolumen nicht nochmals injizieren kann. Der Magnet, der die neuen Teilchen auf die Sollbahn lenkt, würde die bereits gespeicherten Teilchen auslenken. Abbildung 37 zeigt ein typisches Injektionsschema mit einer variablen Orbitbeule. Da sich die Beule über wenige Umlaufzeiten (z.B. 300 m Umfang entspricht 1 μ s) ändern muß, werden eisenlose (sog. Kicker-)Magnete mit einer oder wenigen Windungen und daher geringer Induktivität verwendet. Der erforderliche Strompuls von einigen 1000 A wird durch Entladung von Kondensatoren über einen schnellen Schalter (Thyatron) erzeugt.

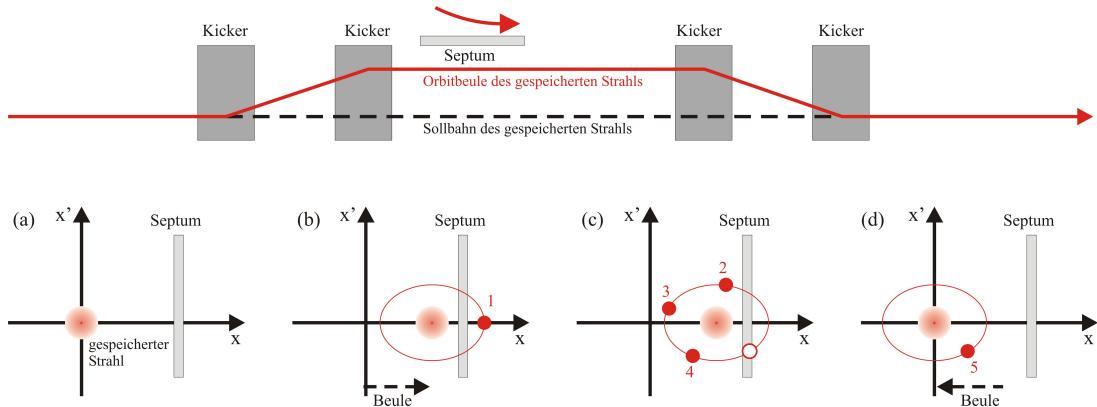


Abbildung 37: Injektion in einen Speicherring (Draufsicht oben, Phasenraum unten). Das sog. Septum schirmt ein Magnetfeld, das den injizierten Strahl parallel zur Sollbahn bringt, gegen den bereits gespeicherten Strahl ab. (a) Gespeicherter Strahl auf der Sollbahn. (b) Injektion, wobei eine Orbitbeule den gespeicherten Strahl nahe an das Septum schiebt. (c) Phasenraumellipse des injizierten Strahl, der beim 5. Umlauf auf das Septum treffen würde. (d) Gespeicherter und injizierter Strahl mit zurückgezogener Orbitbeule.

7 Strahleigenschaften, Strahldiagnose und Kontrollsyste

7.1 Überblick

An Beschleunigern und Speicherringen gibt es eine Vielzahl von Parametern, die eingestellt werden müssen. Manche Parameter haben einen festen Wert, andere sind Teil einer Regelschleife. Daneben gibt es eine Vielzahl von Meßwerten, um den Zustand der Maschine und des Teilchenstrahls ständig zu überprüfen. Da eine Beschleunigeranlage während des Betriebs nicht zugänglich ist, müssen alle Funktionen aus dem Kontrollraum ferngesteuert werden. Die Gesamtheit der Hard- und Software-Komponenten, die dieser Aufgabe dienen, nennt man „Kontrollsyste“. Ein typischer Datenfluss ist in Abb. 38 dargestellt. Zum Teil werden analoge Meßwerte oder Videosignale auch direkt per Kabel zum Kontrollraum geleitet, doch ist dies nur bei kleinen Anlagen praktikabel, und da inzwischen die meisten Geräte (Oszilloskopen, Spektrumanalysator etc.) netzwerkfähig sind, besteht der Trend, Signale vor Ort zu digitalisieren und auszuwerten.

Wichtige Meßsignale an einem Beschleuniger oder Speicherring, die im Folgenden besprochen werden, betreffen

- allgemeine Strahleigenschaften wie z.B. der Strahlstrom
- Schwerpunkt und Verteilung der Teilchen in allen Phasenraumkoordinaten
- beschleunigerphysikalische Kenngrößen, z.B. Beta-Funktion

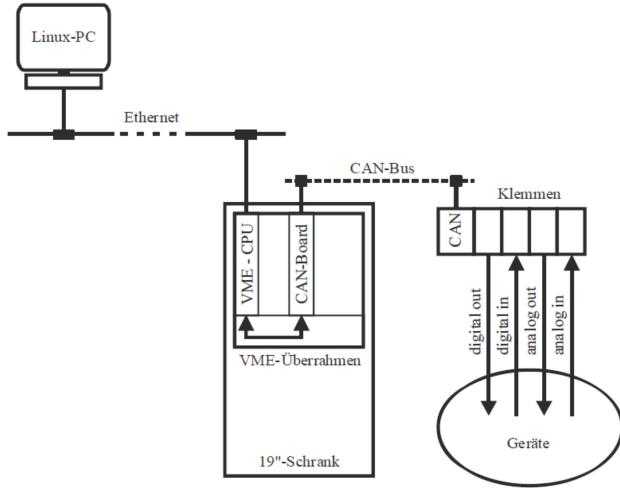


Abbildung 38: Typischer Datenfluss, z.B. die Änderung des Stromwerts in einem Elektromagneten. Im Kontrollraum wird der Datenwert mittels einer grafischen Bedienoberfläche durch Mausklick oder Tastatureingabe gesetzt und über ein Netzwerk an einen lokalen Rechner übergeben (hier als Beispiel eine CPU in einem sog. VME-Überrahmen), dessen Datenbank die Parameter des betreffenden Magneten enthält. Hier wird der Datenwert entweder in ein Analogsignal gewandelt, oder wie in diesem Beispiel über einen lokalen Feldbus (CAN-Bus) an ein weiteres Gerät übergeben, das einen Digital-Analog-Wandler besitzt. Analoge Meßwerte gehen den umgekehrten Weg; ähnlich wird mit digitalen Daten (z.B. Status-Bits) verfahren.

- Frequenzen, z.B. die Betatron-Frequenz
- sonstige Eigenschaften

7.2 Strahlstrom und Lebensdauer des gespeicherten Strahls

Bei Protonen- und Elektronenbeschleunigern ist normalerweise klar, welche Teilchen sich in der Maschine befinden, während bei Ionenbeschleunigern u.U. zunächst die Teilchensorte und der Ladungszustand identifiziert werden muss. Andere grundlegende Eigenschaften eines Teilchenstrahls sind der Teilchenstrom bzw. die Ladung von Teilchenpaketen. Die zeitliche Änderung des Teilchenstroms in einem Speicherring gibt die Strahllebensdauer an. Je nach Anwendung kann auch die Polarisation des Strahls, d.h. die Ausrichtung der Teilchenspins, von Interesse sein.

Zur Strommessung kann der Teilchenstrahl in einem Faraday-Becher gestoppt werden. Widerstandsmonitore und Strahltransformatoren messen den Strom, ohne den Strahl zu stören (s. Abb. 39). Hier soll nur der Strahltransformator beschrieben werden. Das Linienintegral $\oint B ds$

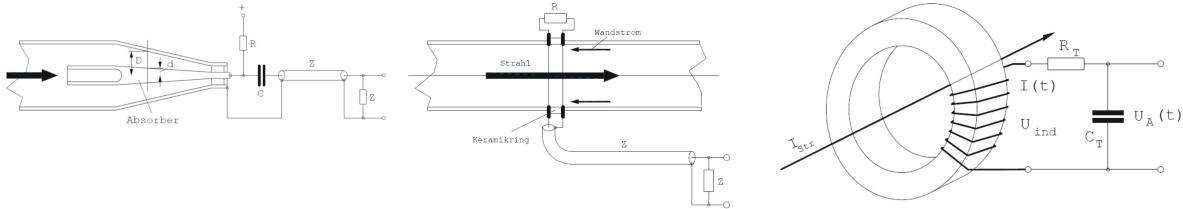


Abbildung 39: Messung des Strahlstroms durch Bestimmung der in einem Faraday-Becher gesammelten Ladung (links), durch Messung des Spiegelstroms an der Wand der Vakuumkammer (Mitte) oder mit einem Strahltransformator (rechts, s. Text).

entlang eines Ringkerns mit Permeabilität μ_r und Radius r , der den Strahl umschließt, ist gegeben durch

$$2\pi r B = \mu_0 \mu_r I_{\text{Str}} \quad (171)$$

wobei I_{Str} der Strahlstrom ist. In einer Spule mit n Windungen und Querschnittsfläche A wird die Spannung

$$U_{\text{ind}} = a A \dot{B} = \frac{n A \mu_0 \mu_r}{2\pi r} \vec{I}_{\text{Str}} \quad (172)$$

induziert. Ein kurzer Strompuls führt zu einem bipolaren Spannungssignal an den Enden der Spule. Die nachfolgende Meßelektronik kann grob durch ein Ersatzschaltbild mit einem Widerstand R_T und einer Kapazität C_T (s. Abb. 39) beschrieben werden, wobei die Ausgangsspannung

$$U_A = \frac{Q}{C_T} = \frac{1}{C_T} \int I dt \approx \frac{1}{R_T C_T} \int U_{\text{ind}} dt = \frac{1}{R_T C_T} \frac{n A \mu_0 \mu_r}{2\pi r} I_{\text{Str}} \quad (173)$$

beträgt. Die Näherung $I \approx U_{\text{ind}}/R_T$ gilt, wenn die Zeitkonstante $R_T C_T$ im Vergleich zur Dauer des Strompulses groß ist.

Der Strom eines Elektronenstrahls kann auch über die Intensität der emittierten Synchrotronstrahlung¹ bestimmt werden. Die Physikalisch-Technische Bundesanstalt nutzt Synchrotronstrahlung am Elektronenspeicherring BESSY und an ihrem eigenen Speicherring MLS, beide in Berlin, als Eichnormal für die Strahlungsintensität, wobei mit empfindlichen Photodioden sogar das Synchrotronlicht eines einzigen Elektrons nachgewiesen werden kann.

In einem Speicherring ergibt sich die Strahllebensdauer als Kehrwert der relativen Verlustrate \dot{I}/I . Wenn verschiedene Prozesse zur Strahllebensdauer beitragen, ergibt sich die resultierende Lebensdauer aus der Summe der jeweiligen Verlustraten

¹Synchrotronstrahlung wird in einem späteren Kapitel behandelt. Hier genügt es zu wissen, dass sie durch Kreisbeschleunigung von Ladungen entsteht. Ihre Intensität ist proportional zur Teilchenmasse⁻⁴, sie ist also nur für Elektronen relevant und – bei inkoärenter Emission – proportional zur Elektronenzahl.

$$\frac{1}{\tau_{\text{Gesamt}}} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} + \dots \quad (174)$$

Die wesentlichen Verlustmechanismen in einem Elektronenspeicherring sind:

- Elastische Streuung (Coulomb-Streuung) an Atomkernen des Restgases führt zu einer instantanen Winkeländerung $\Delta x'$ und $\Delta y'$, die wiederum eine Betatron-Oszillation einleitet. Ist die Amplitude so groß dass die Vakuumkammer berührt oder die dynamische Apertur (Abschnitt 6.11) überschritten wird, geht das Teilchen verloren. Die Hüllenelektronen der Restgasatome tragen zu einem kleineren Teil auch zu den Verlusten bei.
- Inelastische Streuung an Atomkernen des Restgases (Emission von Bremsstrahlung) bewirkt einen Energieverlust ΔE . Das Teilchen geht verloren, wenn die Energieakzeptanz (Abschnitt 4.5) überschritten wird oder wenn die Auslenkung aufgrund von Dispersion größer ist als die Vakuumkammer bzw. die dynamische Apertur. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden, (i) bei Streuung in einer dispersionsfreien Strecke beträgt die Auslenkung an einer anderen Stelle s mit Dispersion $\Delta x = D(s) \cdot \Delta E/E$, während (ii) bei Streuung an einer Stelle s^* mit Dispersion zusätzlich eine Betatron-Oszillation um die Dispersionsbahn eingeleitet wird. Die Courant-Snyder-Invariante ε^* dieser Oszillation ist durch Gl. (138) gegeben, wenn man $x = D(s^*) \cdot \Delta E/E$ und $x' = D'(s^*) \cdot \Delta E/E$ einsetzt. Die maximale Auslenkung an einer anderen Stelle s ist dann $\Delta x = \sqrt{\varepsilon^* \beta(s)} + D(s) \cdot \Delta E/E$.
- Elektron-Elektron-Streuung (Touschek-Effekt, erstmalig 1963 am Speicherring AdA beobachtet, nachdem er von Frascati nach Orsay/Frankreich gebracht wurde) entsteht durch gegenläufige Betatron-Oszillation von zwei Elektronen in einem Teilchenpaket. Nach dem Streuprozess (Møller-Streuung) besitzen diese eine Impulskomponente in longitudinaler Richtung, die im Schwerpunktssystem im MeV-Bereich liegt, aber durch Multiplikation mit dem Lorentz-Faktor γ im Laborsystem nicht vernachlässigbar ist. Die Folgen der Energieänderung ΔE (für ein Elektron positiv, für das andere negativ) sind dieselben wie bei der inelastischen Restgas-Streuung.

Der Begriff „Strahllebensdauer“ ist etwas irreführend, da sie i.d.R. keinen konstanten Wert besitzt, wie dies bei einen exponentiellen Gesetz als Lösung der Gleichung $\dot{I} = -aI$ der Fall wäre, sondern bei hohem Strahlstrom niedrig ist und mit abnehmendem Strom ansteigt. Da beim Touschek-Effekt zwei Elektronen beteiligt sind, würde $\dot{I} = -aI^2$ gelten, wenn die Größe des Teilchenpakets vom Strom unabhängig wäre. Insbesondere die Teilchenpaketlänge ist jedoch bei hohem Strom durch eine Instabilität (*turbulent bunch lengthening*) vergrößert. Auch für die Restgasstreuung gilt kein exponentielles Gesetz, wenn der Restgasdruck in der Vakuumkammer vom Strom abhängt. Dies ist i.d.R. der Fall, da die auf die Kammeroberfläche treffende Synchrotronstrahlung Verunreinigungen freisetzt. (Desorption).

7.3 Phasenraumkoordinaten

Ein Teilchenpaket besitzt in allen Phasenraumkoordinaten – horizontaler und vertikaler Ort und Winkel, longitudinaler Ort und kinetische Energie bzw. Impuls – eine Verteilung, die oft einer Normalverteilung (Gauß-Verteilung) entspricht, was aber nicht immer der Fall sein muss. Der Schwerpunkt der Verteilung definiert die Position des Teilchenpakets in der jeweiligen Koordinate. Als Maß für die Breite der Verteilung verwendet man in der Beschleunigerphysik meist die Standardabweichung. Für eine Normalverteilung entsprechen 2,36 Standardabweichungen der Halbwertsbreite (engl. *full width at half maximum*, FWHM).

Eine einfache Möglichkeit, die **transversale Verteilung** eines Teilchenstrahls zu bestimmen, ist die Abbildung eines Schirms, auf den der Strahl trifft, mit einer CCD-Kamera. Licht entsteht dabei durch Fluoreszenz (Lichtemission angeregter Atome) oder Übergangsstrahlung (Emission beim Durchgang eines relativistischen Teilchens durch die Grenzfläche zwischen Medien verschiedener Permittivität bzw. relativer Dielektrizitätskonstante). Dabei wird der Strahl natürlich erheblich gestört. Einen geringeren Einfluß haben dünne Drähte, die durch den Strahl bewegt werden. Noch besser sind *laser wires* – Laserstrahlen, die durch den Strahl bewegt werden, während man die durch Compton-Streuung entstehende Gammastrahlung als Funktion der Position beobachtet.

Die transversale Verteilung von Elektronenstrahlen kann auch durch Abbildung des Quellflecks von Synchrotronstrahlung bestimmt werden, im einfachsten Fall durch eine Lochblende (engl. *pinhole*). Ein Feld von Lochblenden (*pinhole array*) erzeugt für jedes Loch ein Bild des Strahls, aus dem die räumliche Verteilung abgelesen werden kann. Die Verteilung der Intensität über die verschiedenen Lochblenden gibt über die Winkelverteilung Auskunft. In Speicherringen wird der transversale Schwerpunkt der Ladungsverteilung eines Teilchenstrahls meist an vielen Stellen mit sog. Strahlpositionsmonitoren (engl. *beam position monitor*, BPM) ständig überwacht. Abbildung 40 zeigt eine häufig verwendete Bauform. Aus zwei Positionsmeßungen mit einer Driftstrecke dazwischen erhält man den Winkel der Strahlachse.

Strahlpositionsmonitore werden zur Korrektur der Strahllage verwendet, wobei für thermische Veränderungen eine Korrektur im Abstand einiger Sekunden genügt. Strahlbewegungen durch Bodenvibrationen, 50-Hz-Netzbrummen etc. werden an manchen Speicherringen durch „schnelle“ Orbitkorrektursysteme (typisch 1000 Korrekturen/Sekunde) gedämpft. In jedem Fall besteht das System aus $i = 1 \dots n$ Korrekturmagneten und $j = 1 \dots m$ Monitoren. Ein Kick (kleiner Ablenkinkel) κ_i durch einen einzigen Magneten bewirkt an allen Monitoren eine Auslenkung $x_{ij} = h_{ij} \cdot \kappa_i$. Die Elemente h_{ij} bilden die sogenannte Responsmatrix H und werden vor dem eigentlichen Betrieb experimentell bestimmt, indem man die Magnete nacheinander bestromt und die Abweichungen mit den Monitoren misst. Im Normalbetrieb besteht die Korrektur nach jeder Messung der Positionen u_j darin, die Fehlerfunktion

$$f(\kappa_1 \dots \kappa_n) = \sum_{j=1}^m \left(u_j - \sum_{i=1}^n h_{ij} \kappa_i \right)^2 \quad (175)$$

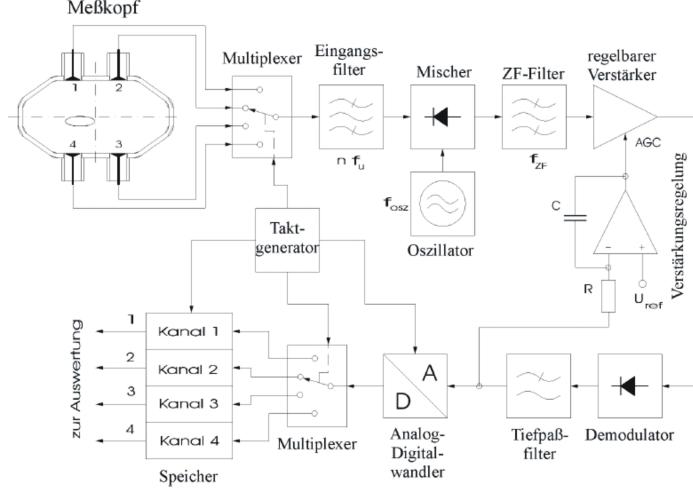


Abbildung 40: Bei diesem Strahlpositionsmonitor (BPM) sind Elektroden elektrisch isoliert in die Wand der Vakuumkammer eingelassen und koppeln an das elektrische Feld der Teilchenpakete an. Das Differenzsignal zwischen den linken/rechten und oberen/unteren Elektroden ist dem Abstand des Strahls von der Mitte proportional (für kleine Abweichungen). In diesem Beispiel werden die Signale der vier Elektroden nacheinander von derselben Elektronik ausgewertet. Die Alternative hierzu ist die gleichzeitige Verarbeitung der Signale in vier getrennten Kanälen, bei denen aber kleine Unterschiede zu systematischen Fehlern führen können (Bild: K. Wille).

zu minimieren, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa_p} = 0 = -2h_{pj} \sum_{j=1}^m \left(u_j - \sum_{i=1}^n h_{ij} \kappa_i \right) \quad \text{und damit} \quad \sum_{j=1}^m u_j h_{pj} = \sum_{i=1}^n \kappa_i \sum_{j=1}^m h_{ij} h_{pj}. \quad (176)$$

In Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_n \end{pmatrix} = H^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U_p = \sum_{j=1}^m u_j h_{pj}, \quad (177)$$

d.h. die Korrektur ergibt sich aus der inversen Responsmatrix, angewandt auf einen Vektor, der aus den gemessenen Positionswerten abgeleitet wird.

Die **longitudinale Ladungsverteilung** von Teilchenpaketen, die für Hadronenbeschleuniger im ns-Bereich liegen, können mit einer in die Vakuumkammer eingelassenen Elektrode und einem breitbandigen Oszilloskop zeitlich aufgelöst werden. Die Darstellung von Elektronenpaketen mit

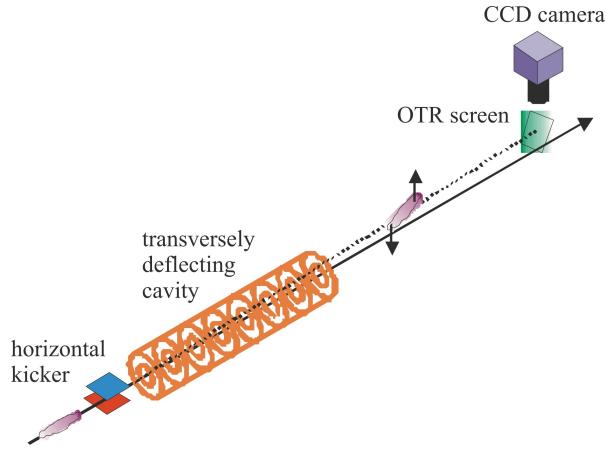


Abbildung 41: Diagnose extrem kurzer Elektronenpakete durch einen transversal ablenkenden Hochfrequenz-Resonator, der die Enden eines Pakets in entgegengesetzte Richtungen ablenkt. Das gedrehte Elektronenpaket wird mit einem Kicker (einem schnellen Magneten) auf einen Schirm gelenkt. Die dort entstehende Übergangsstrahlung (*optical transition radiation*, OTR) wird mit einer CCD-Kamera beobachtet.

typischen Längen von 10-100 ps in einem Speicherring erfordert die Beobachtung von Synchrotronstrahlung mit einer sogenannten Streak-Kamera. Hierbei löst ein Strahlungspuls auf einer Photokathode einen Elektronenpuls aus, der durch ein schnell oszillierendes elektrisches Feld transversal abgelenkt wird (ähnlich dem Elektronenstrahl in einem Oszilloskop). Dadurch entsteht eine räumliche Verteilung, die mit einer CCD-Kamera dargestellt wird und einer zeitlichen Verteilung mit einer typischen Zeitauflösung von 1 ps entspricht. Für noch kürzere Ladungsverteilungen sind insbesondere an Freie-Elektronen-Lasern neue Verfahren entwickelt worden, weil dort die Elektronenpakete extrem kurz sein können (um $10 \mu\text{m}$, was bei nahezu Lichtgeschwindigkeit 33 fs entspricht). Ein Beispiel, dessen Prinzip wiederum einer Streak-Kamera ähnlich ist, ist die transversale Ablenkung von Elektronenpaketen mit einem Hochfrequenz-Resonator (s. Abb. 41).

Die **Energieverteilung** eines Strahls geladener Teilchen kann im Prinzip mit einem Spektrometer beobachtet werden, bei dem die Teilchenbahn in einem Magnetfeld von der Teilchenenergie abhängt. Eine sehr präzise Methode zur Energiebestimmung von Elektronen in einem Speicherring, dessen Spins durch Emission von Synchrotronstrahlung ausgerichtet sind (Sokolow-Ternow-Effekt), ist die resonante Depolarisation des Strahls durch Einstrahlen einer geeigneten Hochfrequenz-Welle. Unter Variation der Frequenz kann die Depolarisation durch eine kleine Änderung der Verlustrate detektiert werden, weil der Wirkungsquerschnitt der Elektron-Elektron-Streuung (Touschek-Effekt, s. weiter oben) von der relativen Spinrichtung abhängt. Aus der Frequenz, bei der dies geschieht, wird die Strahlenergie berechnet. Eine ähnlich genaue Methode ist die Compton-Rückstreuung, bei der gestreute Laser-Photonen ein Gamma-

Spektrum bilden, dessen Maximum (Compton-Kante) von der Strahlenergie abhängt. Aus der Verbreiterung der Compton-Kante lässt sich auch die Energiebreite ermitteln.

7.4 Beschleunigerphysikalische Kenngrößen

Optische Funktionen, Chromatizität etc. sind keine fundamentalen Eigenschaften eines Teilchenstrahls (wie etwa die Strahlenergie), sondern Größen, die im Rahmen eines Formalismus definiert wurden. Da sich dieser Formalismus aber für die Beschreibung von Beschleunigern als praktisch herausgestellt hat, möchte man die relevanten Größen natürlich auch messen.

In Speicherringen kann z.B. die **Beta-Funktion** am Ort eines Quadrupols gemäß Gl. (163) bestimmt werden, indem man die Quadrupolstärke variiert und dabei die Änderung des Arbeitspunkts mit einem Spektrumanalysator (s. nächster Abschnitt) beobachtet. Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Beta-Funktion ist die Änderung des Kicks $\Delta\kappa_i$ eines Korrekturmagneten an der Stelle i in einem Speicherring, wobei die Änderung des Orbits an einer Stelle j von der Beta-Funktion an beiden Stellen abhängt, z.B. für die horizontale Position gemäß (ohne Beweis):

$$\Delta x_j = \Delta\kappa_i \sqrt{\beta_i \beta_j} \frac{\cos [(\phi_i - \phi_j) - \pi Q_x]}{2 \sin \pi Q_x}, \quad (178)$$

wobei $(\phi_i - \phi_j)$ der Phasenvorschub zwischen den beiden Stellen und Q_x der horizontale Arbeitspunkt ist. Mit zwei schnellen Strahlpositionsmonitoren, zwischen denen sich eine Driftstrecke befindet, kann man auch die Phasenraumellipse in (x, x') ausmessen, auf der sich Teilchenpakte bewegen, die man zu einer Betatron-Oszillation anregt hat. Für den vereinfachten Fall, dass $\alpha_x(s) = 0$ ist, gilt

$$x_{\max} = \sqrt{\varepsilon_x \beta_x} \quad x'_{\max} = \sqrt{\varepsilon_x / \beta_x} \quad \text{und damit} \quad \beta_x = x_{\max} / x'_{\max}. \quad (179)$$

Die **Dispersion** ergibt sich aus der Beobachtung der transversalen Strahlposition unter Variation der Strahlenergie bzw. des Impulses, indem man die Hf-Frequenz ändert. Hierbei ist der Umfang des Orbits stets ein ganzzahliges Vielfaches der Hf-Wellenlänge:

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta \lambda_{\text{Hf}}}{\lambda_{\text{Hf}}} = -\frac{1}{\alpha} \frac{f_{\text{Hf}}}{\Delta f_{\text{Hf}}}, \quad (180)$$

wobei α der *momentum compaction factor* gemäß Gl. (69) ist. Die **Chromatizität** wird entsprechend ihrer Definition als beobachtete Änderung des Arbeitspunkts bei Änderung der Hf-Frequenz gemessen.

Der **momentum compaction factor** α ergibt sich aus der Synchrotronfrequenz, wenn die anderen Größen in Gl. (73) (Hf-Spannung, synchroner Phasenwinkel, Strahlenergie und Umlaufzeit) bekannt sind. Eine direkte Bestimmung von α nach Gl. (180) ist unter Variation der Hf-Frequenz möglich, wenn man kleine Energieänderungen messen kann, z.B. mit resonanter Depolarisation der Compton-Rückstreuung.

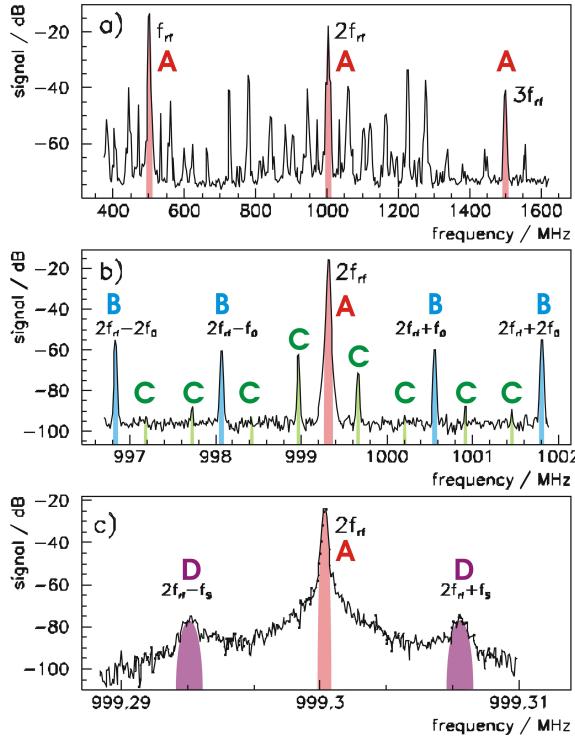


Abbildung 42: Spektrum eines instabilen Elektronenstrahls. Zwischen den Abbildungen liegt jeweils ein Faktor 250 im Meßbereich. Dominant sind die Vielfachen der Hf-Frequenz von ca. 500 MHz (A), aber auch Vielfache der Umlaufsfrequenz 1,25 MHz (B) sind nachweisbar. Die anderen Linien weisen auf Instabilitäten hin: Seitenbänder im Abstand von ca. 0,9 MHz von den Umlaufslinien entstehen durch die Betatron-Oszillation und entsprechen dem nicht-ganzzahligen Anteil des Arbeitspunkt $q \approx 0,7$ (C). Seitenbänder im Abstand von 7 kHz (D) werden von der Synchrotron-Oszillation der Teilchenpakete bewirkt.

7.5 Frequenzen

Frequenzmessungen spielen eine wichtige Rolle in der Beschleunigerphysik. Das „Strahlspektrum“ wird mit einer Elektrode aufgenommen, die das elektrische Feld der vorbeifliegenden Teilchenpakete detektiert, und mit einem Spektrumanalysator oder FFT-Analysator auf einem Bildschirm dargestellt. Ein Spektrumanalysator misst das Analogsignal, das einen schmalbandigen Filter passiert, dessen Frequenz zeitlich variiert wird. Ein FFT-Analysator digitalisiert ein Signal als Funktion der Zeit, wendet eine numerische Fourier-Transformation an (FFT = *Fast Fourier Transform*) und stellt das Ergebnis als Funktion der Frequenz dar.

Aus dem einmaligen Vorbeiflug eines Teilchenpaktes an einer Elektrode ergibt sich durch Fourier-Transformation des zeitabhängigen elektrischen Feldes ein breites Spektrum. Für den pe-

riodischen Vorbeiflug eines beliebig kurzen Pakets (δ -Funktion) z.B. im Abstand der Umlaufzeit T_0 in einer ringförmigen Maschine erhält man ein periodisches Spektrum (Poisson-Regel):

$$j(t) = \sum_n \delta(t - nT_0) \xrightarrow{FT} J(\omega) = \omega \sum_p \delta(\omega - p\omega_0) \quad (181)$$

mit $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Die Summe beinhaltet zunächst beliebig hohe Frequenzen, doch für ausgedehnte (z.B. Gauß-förmige) Pakete besitzt das Spektrum eine Einhüllende in Form einer Gauß-Funktion, die um so breiter ist, je kürzer die Teilchenpakete sind. Folgen die Pakete im Abstand der Hf-Wellenlänge, so entspricht der Abstand der dominierenden Linien im Strahlspektrum nun der Hf-Frequenz, doch zwischen den Hf-Linien sind meist auch die Linien im Abstand der Umlaufsfrequenz nachweisbar.

Durch eine Betatron-Schwingung werden die Signale einer Elektrode in ihrer Amplitude moduliert, durch eine Synchrotron-Schwingung werden ihre Ankunftszeiten moduliert. Beides führt zu sogenannten Seitenbändern, d.h. die dominanten Linien sind von Linien im Abstand der jeweiligen Schwingungsfrequenz $\pm\omega$ begleitet. Da die Zahl der Betatron-Schwingungen pro Umlauf $Q_{x,y} = n + q$ (d.h. der Arbeitspunkt mit einer ganzen Zahl n und einem Rest q) i.d.R. größer als 1 ist, beobachtet man nur $\omega = \omega_0 \cdot q$ und $\omega = \omega_0 \cdot (1 - q)$. Man kann an einem gegebenen Ort im Speicherring weder die ganze Schwingungszahl n feststellen, noch kann man zwischen q und $1 - q$ unterscheiden. Um zu erfahren, ob q kleiner oder größer als 0,5 ist, erhöht man ein Quadrupolfeld, so dass der Arbeitspunkt steigt und sich das „richtige“ Seitenband zu höherer Frequenz verschiebt.

Abbildung 42 zeigt als Beispiel ein Strahlspektrum für einen instabilen Strahl, bei dem sowohl Betatron- als auch Synchrotron-Schwingungen vorliegen.

7.6 Sonstige Eigenschaften

Neben den genannten Punkten gibt es eine Vielzahl anderer Meßgrößen, die je nach Fragestellung untersucht werden, z.B. apparative Größen (Druck in der Vakuumkammer, Magnetfeldstärken, usw.) die Polarisation von Strahlteilchen, die Effizienz der Injektion in einen Speicherring, die Effizienz der sog. „Kühlung“ von Hadronenstrahlen, das Füllmuster in einem Speicherring (Ladung pro Teilchenpaket), Anstiegs- und Dämpfungskonstanten von Instabilitäten, Impedanzen, und vieles mehr. Die beiden zuletzt genannten Punkte werden im nächsten Abschnitt beschrieben.

7.7 Strahlinstabilitäten

In einführenden Texten zur Beschleunigerphysik werden kollektive Strahlinstabilitäten selten behandelt, doch hat dieses Thema durch den Bau von Speicherringen mit hohen Stabilitätsanforderungen seit den 1990er Jahren (Synchrotronlichtquellen der 3. Generation, B-Fabriken usw.) an allgemeiner Bedeutung gewonnen. „Kollektive“ Phänomene sind solche, bei denen ein Strahlteilchen nicht nur von den äußeren Feldern des Hf-Systems und der Magnete, sondern

auch durch die Anwesenheit der anderen Strahlteilchen beeinflusst wird. Dies trifft insbesondere auf Instabilitäten zu, bei denen Teilchenpakete oder Teile davon zu Schwingungen angeregt werden, und das Auftreten dieser Phänomene vom Strahlstrom oder der Ladung einzelner Pakete abhängt. Man unterscheidet

- Instabilitäten in Linearbeschleunigern oder in ringförmigen Maschinen
- Instabilitäten kontinuierlicher Strahlen oder gepulster Strahlen
- Longitudinale oder transversale (horizontale bzw. vertikale) Schwingungen
- Schwingungen von Teilchenpaketen gegeneinander oder innerhalb eines Pakets.

Die folgende Diskussion konzentriert sich auf Instabilitäten in Elektronenspeicherringen, also ringförmigen Maschinen mit gepulstem Strahl.

7.7.1 Wake-Felder und Impedanz

Die Ursache kollektiver Instabilitäten ist die Wechselwirkung der Strahlteilchen miteinander über sogenannte Wake-Felder (engl. *wake* = Kielwasser, Heckwelle, etc.), die entstehen, wenn die umgebende Vakuumkammer vom idealen Fall eines glatten Rohrs mit unendlicher Leitfähigkeit abweicht. Eine relativistische Ladung wird von einem in longitudinaler Richtung kontrahierten Coulomb-Feld begleitet, das an der Kammerwand endet. Jede Änderung des Kammerquerschnitts bewirkt zusätzliche elektromagnetische Felder, die nachfolgende Teilchen und Teilchenpakete zu Schwingungen anregen können. Solche Felder entstehen auch durch den elektrischen Widerstand der Kammerwand (*resistive-wall effect*). Abbildung 43 illustriert, wie in einer ringförmigen Maschine ein Teilchenpaket einen Resonator zu Schwingungen angeregt und dabei selbst zu schwingen beginnt. Ist die Güte des Resonators hoch, kann seine Schwingung so lange andauern, dass nachfolgende Pakete davon betroffen sind. Die Pakete verhalten sich wie ein Ensemble gekoppelter Pendel, und ob sich die Schwingungen aufschaukeln oder gegenseitig dämpfen, hängt von den relativen Phasen der Pakete und des Resonators ab. Ist die Güte des Resonators geringer, geschieht Ähnliches zwischen verschiedenen Bereichen innerhalb eines Teilchenpakets, z.B. der vorderen Hälfte (*head*) und hinteren Hälfte (*tail*).

Die Wirkung eines Bereichs der Vakuumkammer wird durch die Wake-Funktion ausgedrückt. Hierbei wird die Kraft, die eine Ladung q_1 auf eine im zeitlichen Abstand τ nachfolgende Ladung q_2 ausübt, auf beide Ladungen normiert und über die Durchflugszeit integriert:

$$W(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = -\frac{c}{q_1 q_2} \int dt q_2 \left\{ \vec{E}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau, t) \right\}. \quad (182)$$

Die Wake-Funktion ist in erster Linie eine Funktion des Abstands τ , kann aber auch von den transversalen Koordinaten $r_{1,1}$ der Ladungen abhängen. Der allgemeine Ausdruck wird i.d.R. in eine longitudinale Wake-Funktion W_{\parallel} und transversale Wake-Funktion W_{\perp} unterteilt. Da das

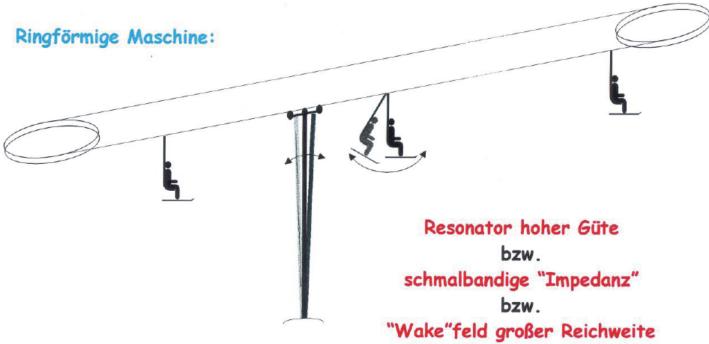


Abbildung 43: Teilchenpakete in einer ringförmigen Maschine können sich durch Wechselwirkung mit einem schwingungsfähigen Teil der Maschine gegenseitig zu Schwingungen anregen. Im Fall eines Speicherrings ist ein solcher Resonator typischerweise eine Vakuumkammer, deren Form als Hochfrequenzresonator wirkt. Kleine Änderungen des Kammerquerschnitts oder Abzweigungen (z.B. zur Strahlinjektion, Auslässe für Synchrotronstrahlung oder auch Pumpstutzen) können diese Wirkung hervorrufen.

magnetische Feld keine longitudinale Kraft ausüben kann, wird für W_{\parallel} nur über das elektrische Feld in Flugrichtung integriert, d.h.

$$W_{\parallel}(\tau) = -\frac{\Delta U}{q_1 q_2} \quad (183)$$

ist eine auf beide Ladungen normierte Energieänderung.

Die Fourier-Transformierte der Wake-Funktion heißt Impedanz und ist eine komplexe Funktion der Frequenz, z.B. für den longitudinalen Fall

$$Z_{\parallel}(\omega) = \int_{\infty}^{\infty} W_{\parallel}(\tau) \exp(-i\omega\tau) \quad (184)$$

Beide Beschreibungen sind äquivalent. Tendenziell ist die Wake-Funktion im Zeitbereich insbesondere für Simulationen geeignet, während sich für analytische Rechnungen die Impedanz im Frequenzbereich anbietet. Wake-Felder und Impedanzbeiträge können für Komponenten eines Speicherrings durch Hf-technische Messungen, durch numerische Simulationen und in einfachen Fällen auch analytisch abgeschätzt werden. Abbildung 44 zeigt ein Beispiel für die numerische Berechnung der Wake-Funktion eines Strahlpositionsmonitors. Ihre ausgeprägte Periodizität drückt sich im Frequenzbereich durch einen dominanten Beitrag der Impedanz bei einer bestimmten Frequenz aus.

Ist das „Impedanz-Budget“ einer Maschine aufgestellt, kann man durch analytische Modelle und numerische Simulationen Aussagen über die zu erwartenden Instabilitäten treffen. Typische Modellansätze sind:

- jedes Teilchenpaket wird durch ein einziges „Makroteilchen“ repräsentiert

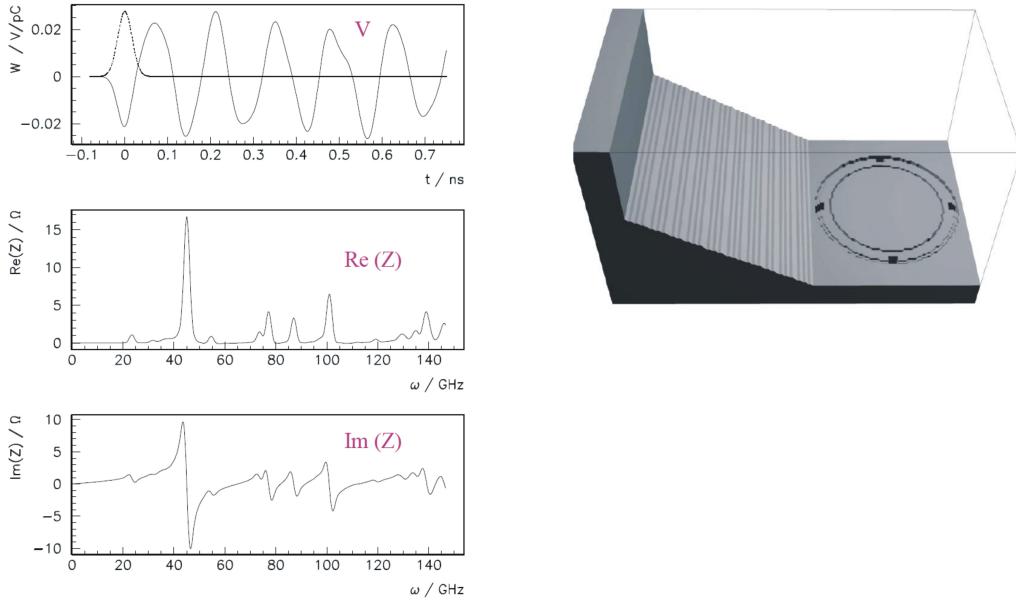


Abbildung 44: Beispiel einer numerischen Berechnung von longitudinalen Wake-Feldern für einen Strahlpositionsmonitor, bestehend aus vier runden Elektroden in einer oktogonalen Vakuumkammer. Aufgrund der Symmetrie genügt es, 1/4 der eigentlichen Anordnung zu modellieren (die Strahlachse ist oben rechts). Da eine Simulation in diskreten Schritten nur ausgedehnte Ladungsverteilungen $j(t)$ (hier: Gauß-Kurve oben links) behandeln kann, ist das Ergebnis nicht die Wake-Funktion $W_{||}(\tau)$ selbst, sondern das sog. Wake-Potenzial $V(\tau) = \int dt W_{||}(t)j(\tau - t)$. Der Real- und Imaginärteil der Impedanz (Mitte und unten) ist gegeben durch $Z_{||}(\omega) = V(\omega)/\tilde{j}(\omega)$, den Quotienten der Fourier-Transformierten von $V(\tau)$ und $j(\tau)$.

- ein Teilchenpaket setzt sich aus zwei „Makroteilchen“ zusammen (*head-tail*)
- ein Teilchenpaket wird durch möglichst viele Teilchen (10^4 und mehr) dargestellt
- ein Teilchenpaket wird durch eine kontinuierliche Ladungsverteilung beschrieben.

Üblicherweise wird davon ausgegangen, dass die betrachteten Ladungen longitudinale oder transversale Schwingungen der Form $A \cdot e^{i(\omega + \Delta\omega)t}$ ausführen, wobei das jeweilige Modell Aussagen über eine von den Wake-Feldern bzw. Impedanzen verursachte komplexe Frequenzverschiebung $\Delta\omega$ macht. Der Imaginärteil $\text{Im}(\Delta\omega)$ bewirkt – je nach Vorzeichen – eine Erhöhung oder Dämpfung der Schwingungsamplitude.

7.7.2 Schwingungen innerhalb eines Teilchenpakets

Schwingungen innerhalb eines einzelnen Teilchenpakets, sog. *single-bunch*-Instabilitäten, werden von kurzreichweiten Wake-Feldern (d.h. breitbandigen Impedanzen mit wenig ausgeprägtem

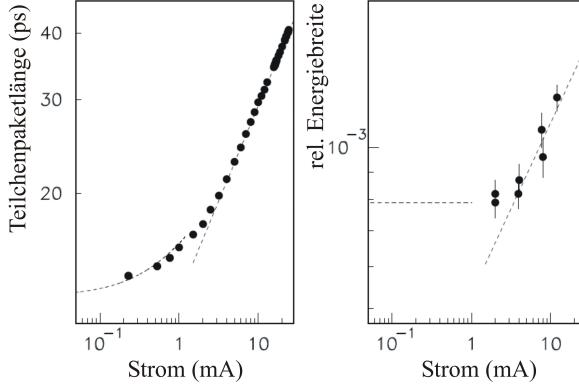


Abbildung 45: Longitudinale *single-bunch*-Instabilität. In diesem Beispiel wächst die Länge und Energiebreite der Teilchenpakete oberhalb einer Stromschwelle von ca. $I_b = 3$ mA proportional zu $I^{0.36}$ an. Unterhalb dieser Schwelle wird die Paketlänge durch einen weiteren Effekt (sog. *potential-well distortion*) beeinflusst. Die Paketlänge wurde mit einer Streak-Kamera (P. Kuske, BESSY), die Energiebreite mit Compton-Rückstreuung (R. Klein, PTB) bestimmt – s. Abschnitt 7.3.

Resonanzverhalten) bewirkt.

Eine longitudinale Instabilität ist die „turbulente *bunch*-Verlängerung“ (auch Mikrowellen-Instabilität oder longitudinale Modenkopplung genannt). Oberhalb einer bestimmten Ladungsmenge (bzw. Teilchenpaketstrom I_b von typisch einigen mA) wachsen Paketlänge und Energiebreite ungefähr proportional zu $I_b^{1/3}$ an, wobei die Stromschwelle und der exakte Exponent für jede Maschine etwas anders ist. Abbildung 45 zeigt ein Beispiel.

Eine zuerst am PETRA-Speicherring (DESY) beobachtete transversale Instabilität, die „*strong head-tail*-Instabilität“ (oder auch transversale Modenkopplung) ist eine heftige Schwingung der vorderen und hinteren Hälfte der Teilchenpakete gegeneinander, die oberhalb einer Stromschwelle zum plötzlichen Strahlverlust führen kann.

Dem Begriff „Modenkopplung“ liegt die Vorstellung zugrunde, dass zwei Schwingungsmoden verschiedener Frequenz mit zunehmendem Strom eine (reelle) Frequenzverschiebung erfahren. Erst wenn ihre Frequenzen gleich werden, entsteht eine Instabilität mit exponentiellem Anstieg der Schwingungsamplitude. Der Stromwert, bei dem dies geschieht, stellt eine „echte“ Stromschwelle dar. Im Gegensatz dazu existieren die im nächsten Abschnitt dargestellten *multi-bunch*-Instabilitäten bei jedem Strom. Eine effektive Stromschwelle ist aber dadurch gegeben, dass eine Instabilität erst dann einsetzt, wenn ihre Anstiegsrate $\text{Im}(\Delta\omega)$ die jeweilige Dämpfungsrate (z.B. durch Synchrotronstrahlungsdämpfung, s. weiter unten) übersteigt.

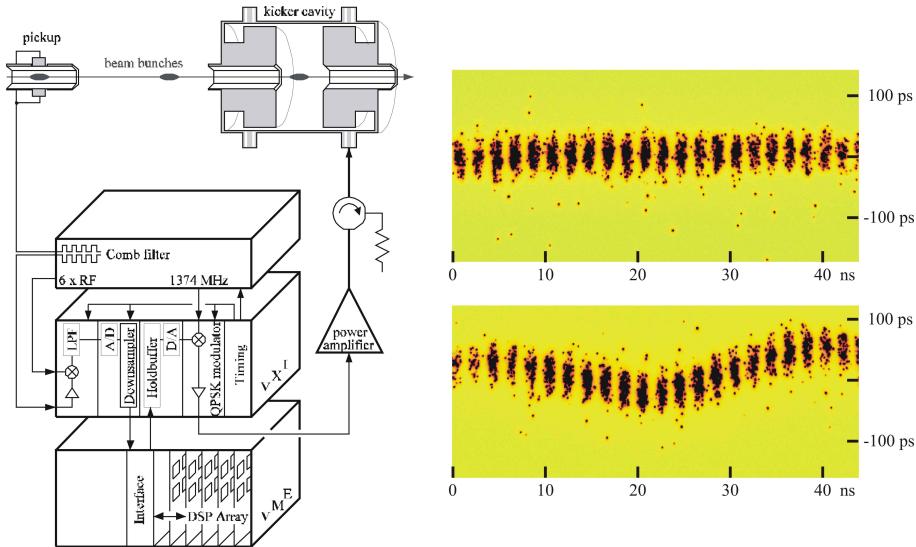


Abbildung 46: Beispiel für ein digitales Regelsystem gegen longitudinale *multi-bunch*-Instabilitäten (links). Für jedes Teilchenpaket wird mit einer Elektrode (*pickup*) die longitudinale Position relativ zu einem Hf-Signal ($6 \times RF$) gemessen und digitalisiert (*A/D*). Eine Untermenge der Messungen wird ausgewählt (*Downsampler*) und den digitalen Signalprozessoren (*DSP Array*) zugeführt. Ein digitaler Filter errechnet aus mehreren Messungen einen Korrekturwert, der gespeichert (*Holdbuffer*) und zum richtigen Zeitpunkt in ein analoges Signal gewandelt (*D/A*) und aufbereitet (*QPSK modulator*) wird. Das Signal wird verstärkt (*power amplifier*) und übt in einem Resonator (*kicker cavity*) auf das Teilchenpaket eine beschleunigende oder abbremsende Wirkung aus. Rechts: Aufnahmen eines stabilen Strahls bei geschlossener Regelschleife (oben) und eines instabilen Strahls (unten) mit einer Streak-Kamera (s. Abschnitt 7.3). Die horizontale Achse entspricht einer langsamen Zeitskala (Paketabstand 2 ns), die vertikale Achse zeigt die Ankunftszeit der Teilchenpakete mit hoher Zeitauflösung (Schwingungsamplitude 50 ps).

7.7.3 Schwingungen mehrerer Teilchenpakete

Instabilitäten, bei denen alle Teilchenpakete in einem Speicherring wie gekoppelte Pendel gegeneinander schwingen, erfordern langreichweitige Wake-Felder (bzw. schmalbandige Impedanzen durch Resonatoren hoher Güte). Ist nur ein Teilchenpaket gespeichert, kann es durch seine eigenen Wake-Felder aus vorherigen Umläufen beeinflusst werden. Solche *multi-bunch*-Instabilitäten können sowohl longitudinal als auch transversal auftreten.

Zwei gekoppelte Pendel besitzen bekanntlich zwei Eigenmoden mit Phasenunterschied 0 und π . Analog besitzen h Teilchenpakete in einem Speicherring ein longitudinales und transversales Spektrum von h Eigenmoden, wobei sich die Schwingungen benachbarter Pakete um $2\pi\mu/h$ in der Phase unterscheiden. Hierbei ist $\mu = 0 \dots h - 1$ der Modenindex und h ist die Harmonischenzahl – der Quotient aus Hf-Frequenz f_{Hf} und Umlaufsfrequenz f_0 , der mit der maximalen Anzahl von Teilchenpaketen identisch ist. Im Strahlspektrum erscheint die Mode mit Index μ als Betatron-

oder Synchrotron-Seitenband sowohl bei der μ -ten Umlaufslinie als auch bei der $(h - \mu)$ -ten Umlaufslinie, so dass das gesamte Modenspektrum in einem Band der Breite $f_{\text{Hf}}/2$ enthalten ist. Zur Erinnerung an Abschnitt 7.5: Das Strahlspektrum besteht aus äquidistanten Hf-Linien im Abstand der Hf-Frequenz. Zwischen ihnen liegen h weniger prominente Linien, deren Abstand die Umlaufsfrequenz ist. Seitenbänder zu diesen Linien entstehen, wenn die Strahlsignale in ihrer Intensität oder Ankunftszeit moduliert sind.

Multi-bunch-Instabilitäten erhöhen im zeitlichen Mittel die Größe des Strahls – die mittlere Paketlänge und Energiebreite im longitudinalen Fall, den Strahlquerschnitt und die Divergenz im transversalen Fall. Da Instabilitäten nicht nur die Strahlqualität verschlechtern, sondern auch zum Strahlverlust führen können, besitzen viele Speicherringe elektronische Regelsysteme, mit denen die Position jedes Teilchenpakets individuell gemessen und korrigiert wird. Die Bandbreite jeder Komponente eines solchen Systems muß mindestens $f_{\text{Hf}}/2$ entsprechen, um alle Schwingungsmoden zu erfassen, und die Dämpfungsrate muß die höchste auftretende Anstriegsrage übersteigen. Abb. 46 zeigt ein Beispiel.

8 Vakuumtechnologie

Der Transport von Teilchen in Form eines Strahls erfordert eine „luftleer“ gepumpte Vakuumkammer, die einen deutlichen Anteil am Planungsaufwand und an den Kosten einer Beschleunigeranlage darstellt. Es ist sinnvoller, von einem Vakuum“system“ zu sprechen, das neben der eigentlichen Kammer zahlreiche Einrichtungen zur Vakuumerzeugung und -diagnose umfasst. Die Vakuumtechnologie bildet zusammen mit den speziellen Erfordernissen von Teilchenstrahlen ein Teilgebiet der Beschleunigerphysik, das im Vergleich zu anderen technischen Themen (z.B. Magnete, Hochfrequenz) in Lehrbüchern oft vernachlässigt wird. Ausführliche Darstellungen finden sich in [46, 47].

8.1 Allgemeines

Die Möglichkeit eines Vakuums, d.h. eines Raums ohne Materie, wurde über das späte Mittelalter hinaus kontrovers diskutiert. Erst Mitte des 17. Jahrhundert wurden Zustände von Gas, dessen Druck deutlich unter Atmosphärendruck lag, experimentell demonstriert [48, 49].

Für den Druck eines Gases werden verschiedene Einheiten verwendet. Die SI-Einheit ist Pascal ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$), das veraltete Einheiten wie Bar ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2$ bzw. $1 \text{ mbar} = 1 \text{ hPa}$), die physikalische Atmosphäre ($1 \text{ atm} = 1013,25 \text{ hPa}$, Normaldruck der Erdatmosphäre) oder die technische Atmosphäre ($1 \text{ at} = 980,7 \text{ hPa}$, entspricht 10 m Wassersäule) abgelöst hat. Weitere traditionell verwendete Druckeinheiten sind Torr ($1 \text{ Torr} = 1,333 \text{ hPa}$, entspricht 1 mm Quecksilbersäule) und *pound per square inch* ($1 \text{ psi} = 68,95 \text{ hPa}$).

Während der Normaldruck als $1013,25 \text{ hPa}$ definiert ist und einem typischen Atmosphärendruck auf Meeressniveau entspricht, ist für Teilchenbeschleuniger der Bereich des Ultra-hochvakuum (UHV, definiert als 10^{-7} bis 10^{-12} hPa) relevant. Oft wird ein Druck von 10^{-10} hPa

angestrebt. Entsprechend sinkt die Teilchendichte gegenüber Normaldruck von ca. 10^{25} m^{-3} auf 10^{12} m^{-3} und die mittlere freie Weglänge steigt von ca. 100 nm auf 1000 km. Letztere mag groß erscheinen, aber ein Teilchen, das mit nahezu Lichtgeschwindigkeit 10 Stunden in einem Speicherring kreist, legt über 10^{13} m zurück und erleidet entsprechend viele Kollisionen mit den Atomen des Restgases. Wenn die mittlere freie Weglänge \bar{l} die Querschnittsgröße d eines Strahlrohrs übersteigt (sog. Knudsenzahl $Kn = \bar{l}/d > 1$), liegt eine Molekularströmung vor, d.h. es findet praktisch keine Wechselwirkung zwischen den Gasteilchen statt. Bereits im Bereich $Kn > 10^{-2}$ verlieren die Gesetze der Fluidodynamik ihre Gültigkeit.

Trockene Luft setzt sich aus 78,08% N₂, 20,95% O₂ und 0,93% Ar zusammen. Die restlichen 0,04% bestehen u.a. aus CO₂, Edelgasen, CH₄ und H₂. Hinzu kommt eine unbestimmte Menge an Wasserdampf. In einem typischen Restgasspektrum im UHV-Bereich dominiert dagegen H₂, während der Partialdruck von N₂, H₂O, CO und CO₂ um mehr als eine Größenordnung kleiner ist. Höhere Anteile von N₂ und O₂ weisen auf ein Luftleck hin.

8.2 Vakuumkammern

Kriterien für die Wahl eines Werkstoffs für die Vakuumkammer sind

- mechanische Stabilität, präzise Herstellung, Rauigkeit und Bearbeitungsmöglichkeit,
- Vakuumeigenschaften, insbesondere bei auftreffender Strahlung,
- elektrische Leitfähigkeit und Wärmeleitfähigkeit, Ausheizbarkeit,
- magnetische Eigenschaften,
- Verfügbarkeit und Kosten.

Gängige Materialien sind

- Edelstahl, z.B. mit der Werkstoffnummer 1.4429 (nach der europäischen Norm EN 10027) ist ein austenitischer Stahl (kubisch-flächenzentrierte Gitterstruktur des Eisens) mit hoher Korrosionsbeständigkeit und der geringer Magnetisierbarkeit. Rechteckige oder oktagonal geformte Vakuumkammern werden oft aus 2 bis 3 mm dicken Platten hergestellt. Edelstahl kann leicht bearbeitet und geschweißt werden. Seine elektrische und thermische Leitfähigkeit ist geringer als die von Al und Cu.
- Aluminiumlegierungen, z.B. EN AW 5083 oder 6063 (Bezeichnung folgt der Aluminium Association). Vakuumkammern mit großer Länge und relativ kompliziertem Querschnitt werden oft aus EN AW 6063 durch Extrusion (Strangpressen) hergestellt, wobei ein unterhalb des Schmelzpunkts erhitzter Aluminiumstrang durch eine formgebende Düse gedrückt wird. Die elektrische und thermische Leitfähigkeit ist höher als die von Edelstahl. Extrudierte Al-Kammern mit großer Wandstärke eignen sich aufgrund der Wirbelströme

nicht für schnell wechselnde Magnetfelder z.B. in Synchrotrons. Aluminium ist leicht zu bearbeiten, aber schwierig zu schweißen.

- Kupfer (OFHC, oxygen-free, high thermal conductivity) hat eine sehr gute thermische und elektrische Leitfähigkeit. Aufgrund der höheren mechanischen Festigkeit bei Erwärmung wird oft eine Legierung von Kupfer und pulvergepresstem Aluminiumoxid verwendet. Trotz positiver Eigenschaften wird Kupfer eher selten für Vakuumkammern verwendet, möglicherweise aufgrund des hohen Preises. Absorber für Synchrotronstrahlung werden stets aus Kupfer gefertigt. Eine vollflächige Verbindung von Kupfer mit einem Edelstahlblech erhält man z.B. durch Sprengplatieren, d.h. durch schlagartiges Zusammendrücken beider Teile mit Sprengstoff.
- Metallisierte Keramik wird z.B. für Vakuumkammern in Kickermagneten verwendet, um Wirbelströme zu vermeiden. Ferner wird Keramik für nichtleitende vakuumdichte Verbindungen verwendet, z.B. um Stromdurchführungen oder die Elektroden von Strahlpositionsmessern in die umgebende Vakuumkammer einzupassen.

Der Tradition von Vakuumröhren folgend wurden in der Frühzeit der Beschleuniger gelegentlich Vakuumkammern aus Glas verwendet. So wurde im Jahr 1947 erstmalig Synchrotronlicht am 70-MeV-Synchrotron in Schenectady/USA direkt wahrgenommen, weil die Vakuumkammer durchsichtig war. Problematisch ist neben den mechanischen Eigenschaften von Glas die elektrostatische Aufladung der Kammerwand.

Neben dem reinen Strahlrohr besitzt eine Vakuumkammer eine Vielzahl von Flanschen, d.h. lösbar Verbindungsselemente, für verschiedene Zwecke. Während bis in den Bereich des Hochvakuums (10^{-3} bis 10^{-7} hPa) ISO-K- oder ISO-F-Flansche verwendet werden können, bei denen die Dichtung aus einem Elastomer-O-Ring besteht, werden bei Beschleunigern fast ausschließlich sog. CF-Flansche eingesetzt. Ursprünglich vom Hersteller Varian unter dem Namen ConFlat vertrieben, haben sich diese Flansche als Norm durchgesetzt. Sie bestehen üblicherweise aus zwei symmetrischen Edelstahlteilen mit jeweils einer kreisförmigen Schneidkante, die sich in eine flache ringförmige Kupferdichtung drückt, wenn die Teile mit Schrauben aneinandergepresst werden. Genormt sind bestimmte Nennweiten (Innendurchmesser): 10, 16, 25, 40, 50, 63, ..., 350, 400 mm. Jeder Nennweite ist ein Lochkreis zugeordnet, auf dem eine bestimmte Zahl von Schrauben äquidistant angeordnet ist, von DN10 (10 mm Nennweite) mit Lochkreisdurchmesser 18 mm für 6 M3-Schrauben bis DN400 mit Durchmesser 438 mm für 40 M10-Schrauben. Die Schrauben werden gleichmäßig in mehreren Durchgängen mit vorgegebenem Drehmoment angezogen. Die Cu-Dichtungsringe dürfen nicht mehrmals verwendet werden. Flansche dienen folgenden Zwecken:

- Direkte Verbindung zweier Kammerstücke,
- Verbindung mit einem Ventil, einer Vakuumpumpe, einer Messröhre etc.

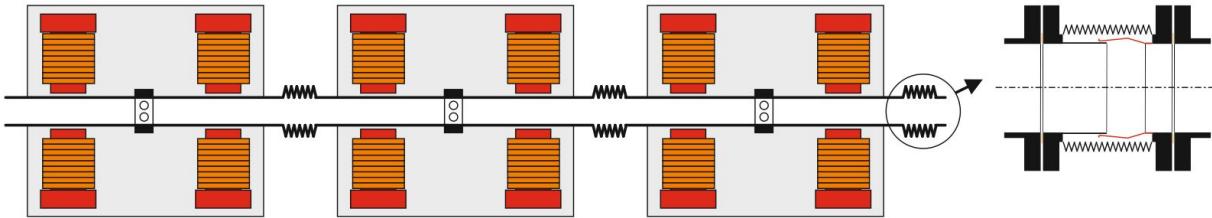


Abbildung 47: Sinnvolle Anordnung von Vakuumkammern in einem Beschleuniger. Die Kammern besitzen jeweils einen Fixpunkt an einem Strahlpositionsmonitor (angedeutet durch zwei kreisförmige Elektroden), so dass deren Position relativ zu den Magneten (rot) auf demselben Untergestell (grau) erhalten bleibt. Thermische Änderungen der Länge werden durch Bälge aufgefangen. Kleine transversale Bewegungen sind möglich, ohne daß die Kammer die Magnete berührt. Innerhalb eines Balgs (rechts) befinden sich gleitende Federkontakte (rot), auch „Hf-Finger“ genannt.

- Abschluss mit einer vakuumdichten Platte (Blindflansch), möglicherweise in Verbindung mit elektrischen Durchführungen.
- Abschluss mit einem Fenster zur Inspektion (Schauglas) oder zur Durchführung von Licht, das z.B. in der Kammer entsteht oder in die Kammer eingestrahl werden soll.
- Abschluss mit einer Durchführung für mechanische Bewegungen, entweder linear entlang einer Achse mit einem Membranbalg oder als Drehdurchführung. Da rotierende Achsen im UHV nicht ausreichend abgedichtet werden können, wird ein im Vakuum rotierendes Bau teil entweder mit einer Rührbewegung eines balggedichteten Stabs (sog. Katzenschwanzprinzip) oder mit einer Anordnung rotierender Permanentmagnete von außen angetrieben.

8.3 Vakuumerzeugung

Der Druck in einer Vakuumkammer ergibt sich aus dem Gleichgewicht einer Zunahme der Gasmenge durch Desorption und ggf. Lecks und einer Abnahme aufgrund der Vakuumpumpen.

8.3.1 Desorption

Auch wenn die Vakuumkammer kein Leck nach außen hat, wird ständig Gas durch Desorption von den Innenflächen der Vakuumkammer freigesetzt. Desorption ist das Freisetzen von Atomen und Molekülen, die an der Oberfläche gebunden sind [50]:

- Durch thermische Desorption wird Gas mit einer typischen Rate von $10^{-11} \text{ hPa m s}^{-1}$ (Druck mal Volumen pro Zeit und Fläche) freigesetzt.

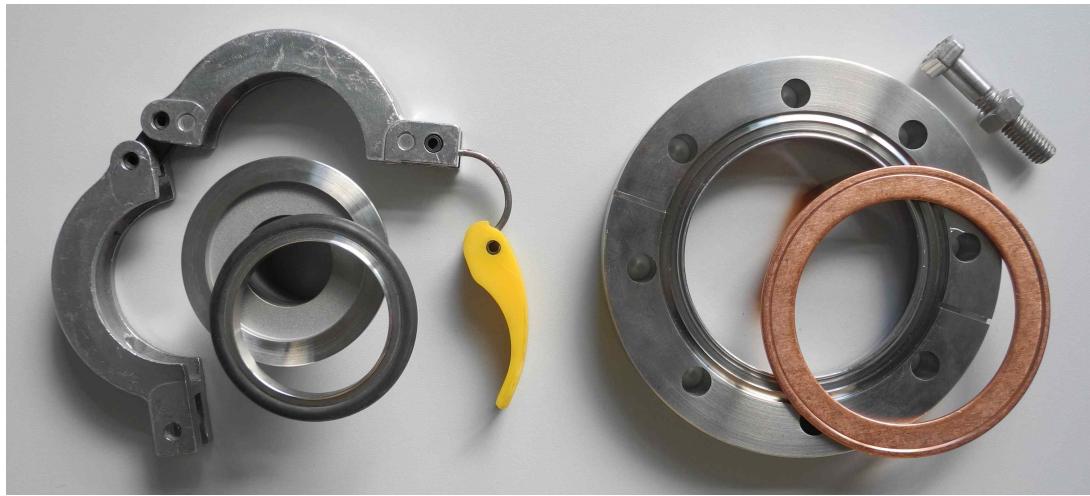


Abbildung 48: Vakuumflansche. Links: ISO-KF-Flansch DN 40 mit Rohransatz. Der Innendurchmesser des mit einem Elastomer-O-Ring versehenen Zentrierrings beträgt 40 mm. Der Spannring verbindet zwei gleichartige Flansche. Rechts: Schauglas mit CF-Flansch DN 63 und Kupferdichtung. Die Nennweite beträgt 63 mm, der Durchmesser des Lochkreises für acht M8-Schrauben ist 92,1 mm. Auf der gebrauchten Kupferdichtung ist der Abdruck der Schneidkante erkennbar.

- Strahlungsdesorption durch Synchrotronstrahlung erzeugt ca. 1 Gasteilchen pro 10^6 Photonen über 10 eV.

Daneben sind „virtuelle Lecks“ möglich, bei denen durch Verunreinigung oder kleine Hohlräume zusätzlich Gas abgegeben wird. Die Desortionsrate hängt von der Vorbehandlung der Vakuummutter ab. Neben einer gründlichen Reinigung und Montage unter besonderen Reinheitsbedingungen (z.T. werden zeltartige „mobile Reinräume“ verwendet) ist Ausheizen (bis zu 300 Grad C über mehrere Tage bei laufenden Pumpen) eine Maßnahme, die insbesondere Wassermoleküle aus der Kammeroberfläche entfernt. Auch die Synchrotronstrahlung bei Elektronenspeicherringen hat einen reinigenden Effekt auf die Kammerwand („Strahlwaschen“), der von der Strahlungsmenge, i.d.R. ausgedrückt durch das Produkt von Strahlstrom und Zeit, abhängt.

8.3.2 Vakuumpumpen

Das Saugvermögen von Vakuumpumpen wird als Volumen pro Zeiteinheit angegeben (l/s oder m³/s) und hängt – je nach Pumpentyp – von der Gassorte, dem Druck und z.T. von der bereits gepumpten Gasmenge ab (Sättigungseffekt). Vakuumpumpen transferieren Gas aus dem zu pumpenden Volumen nach außen oder sie binden das Gas an bestimmten Oberflächen innerhalb des Volumens.

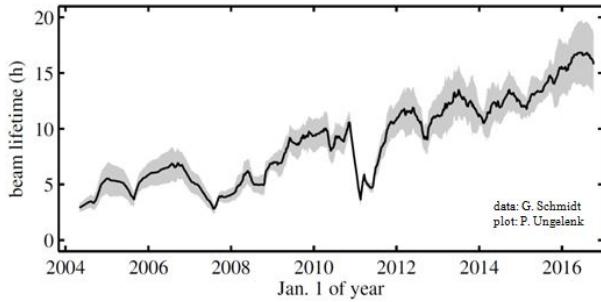


Abbildung 49: Stetige Verbesserung der mittleren Strahllebensdauer im Elektronenspeicherring DELTA über zwölf Jahre (gemessen bei 100 mA Strahlstrom mit grau dargestellten Schwankungen). Der reinigende Effekt der Synchrotronstrahlung blieb auch nach einer Teilbelüftung des Speicherrings im Jahr 2011 erhalten.

Gastransfer-Pumpen werden in Verdrängerpumpen und kinetische Pumpen unterteilt. Erstere bewegen eine Gasmenge durch ein abgeschlossenes Volumen, z.B. mit einem Kolben, der Gas durch ein Ventil ansaugt und durch ein zweites Ventil nach außen befördert. Ein beweglicher Kolben oder eine andere Anordnung, bei der sich ein bewegliches Teil gegen eine feste Wand bewegt (z.B. Drehschieberpumpe, Scrollpumpe etc.) erfordert eine Dichtung. Bei einer Membranpumpe ist das pumpende Volumen (der „Schöpfraum“) hermetisch abgeschlossen, so dass keine Verunreinigungen durch fehlerhafte Dichtung eindringen können. Allerdings ist die Änderung der Größe des Schöpfraums kleiner als bei anderen Verdrängerpumpen, so dass das Saugvermögen kleiner ist. Bei einer kinetischen Pumpe wird Gas entweder von einem Treibmittel „mitgerissen“ (z.B. Wasserstrahlpumpe) oder es wird mechanischer Impuls auf die Gasteilchen übertragen. Dies ist insbesondere bei der Turpmolekularpumpe der Fall, bei der sich ein turbinenartiger Rotor mit typisch 1000 Umdrehungen/s bewegt. Meist wird der Rotor zumindest am Hochvakuumende magnetisch gelagert. In einer Molekularströmung werden Gasteilchen abwechseln an statischen Scheiben diffus gestreut und durch Stoß an den rotierenden Schaufeln in eine bestimmte Richtung bewegt. Turbomolekularpumpen können erst dann eingesetzt werden, wenn mit einem anderen Pumpentyp ein Vorvakuum hergestellt wurde. Ein Pumpstand für Hoch- und Ultrahochvakuum ist eine (meist mobile) Einheit, die z.B. aus einer Membranpumpe als Vorpumpe und einer Turbomolekularpumpe sowie Druckmessung und Regelelektronik besteht.

An Beschleunigern wird der niedrige Restgasdruck durch gasbindende Pumpen aufrecht erhalten. Hierbei werden die Gasteilchen entweder durch Kälte oder chemisch an eine Oberfläche gebunden. Bei Kryopumpen kondensiert Gas an einer Oberfläche, die z.B. mit flüssigem Stickstoff gekühlt wird. Dieser Effekt tritt auch bei anderen kalten Oberflächen, z.B. in supraleitenden Magneten, auf. Bei der Ionengetterpumpe werden die Gasteilchen durch Stöße mit Elektronen ionisiert und durch Hochspannung (einige 1000 V) auf ein Gettermaterial (z.B. Titan) beschleunigt. Beim Auftreffen wird Gettermaterial zerstäubt und setzt sich wieder ab. Dadurch entsteht

ständig eine frische Oberfläche, unter der die Gasteilchen begraben sind. NEG-Pumpen (*non-evaporative getter*) bestehen aus Flächen, deren Beschichtung sich mit zufällig auftreffenden Gasteilchen verbindet. Ist die Oberfläche nach mehreren Jahren mit Gasteilchen gesättigt, kann sie durch Heizen und gleichzeitigem Abpumpen des dabei desorbierten Gases neu aktiviert werden. Seit einigen Jahren ist es auch möglich, Vakuumkammern vollflächig mit NEG-Material zu beschichten, so dass die gesamte Innenfläche als UHV-Pumpe wirkt. Außerdem weist NEG-Material eine geringe Strahlungsdesorptionsrate auf, ist also insbesondere für Elektronenbeschleuniger und -speicherringe gut geeignet.

Vakuumkammern in Beschleunigern sind entweder über Pumplöcher mit einem Abgang verbunden, an dem Vakuumpumpen anflanscht sind, oder sie besitzen über ihre gesamte Länge eine parallele Vorkammer (*antechamber*), deren Volumen gepumpt wird. Die direkte Beschichtung der Vakuumkammer mit NEG-Material ist erst an wenigen Beschleunigern angewandt worden. Ein Beispiel ist die Synchrotronstrahlungsquelle MAX IV, die 2016 in Lund/Schweden fertiggestellt wurde und eine NEG-beschichtete Kammer aus Kupfer mit kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser 22 mm) besitzt.

8.3.3 Vakuumprofil

Als „Profil“ wird die Druckverteilung als Funktion der longitudinalen Koordinate s entlang der Strahlachse eines Beschleunigers bezeichnet. Neben dieser eindimensionalen Information können mit Monte-Carlo-Methoden auch dreidimensionale Druckverteilungen berechnet werden. Im Folgenden wird ein einfaches eindimensionales Druckprofil beschrieben.

Der Gasfluss $Q(s)$ in $\text{hPa m}^3 \text{s}^{-1}$ (Druck·Volumen/Zeit) als Funktion der Koordinate s entspricht einer Desorptionsrate pro Länge q , die hier als konstant angenommen sei:

$$\frac{dQ}{ds} = q. \quad (185)$$

Andererseits ist $Q(s)$ proportional zum Druckgradienten entlang s

$$Q(s) = -w \frac{dp}{ds} \quad \rightarrow \quad \frac{dQ}{ds} = -w \frac{d^2p}{ds^2} = q, \quad (186)$$

wobei der Faktor w als spezifische molekulare Leitfähigkeit bezeichnet wird. Für manche Kammergeometrien gibt es hierfür Nährungsformeln, z.B. für elliptische Querschnitte mit den Halbachsen a und b in Metern, der Temperatur T in Kelvin und der Molekülmasse M gilt

$$w \left[\text{m}^4 \text{s}^{-1} \right] \approx 431 \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{\frac{T}{M}}. \quad (187)$$

Unter der Annahme äquidistanter Pumpen bei $s = \dots, -L, 0, L, \dots$ mit gleichem Saugvermögen S ergibt sich durch zweifache Integration eine parabolische Funktion $p(s)$. Bei der ersten Integration ist aufgrund der erwarteten Symmetrie $dp/ds(L/2) = 0$ die Integrationskonstante

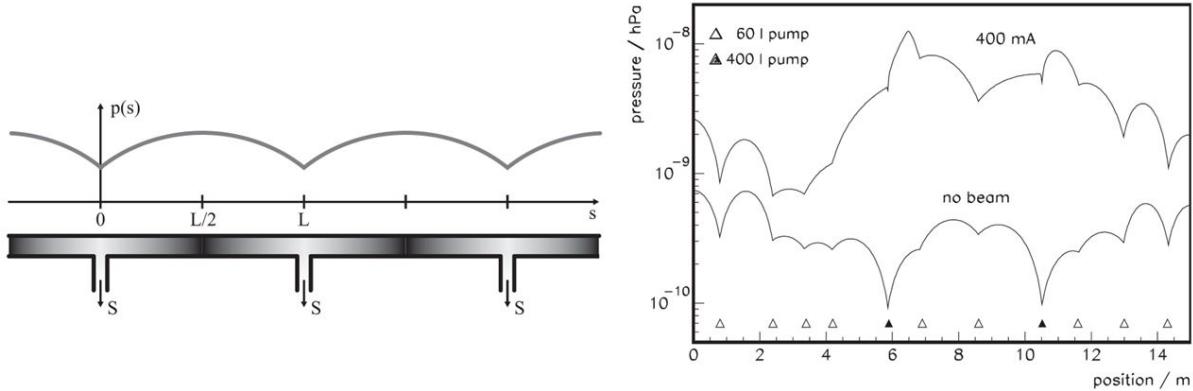


Abbildung 50: Schematisches Druckprofil $p(s)$, wie im Text hergeleitet, sowie numerisch berechnetes Profil für den Speicherring BESSY in Berlin mit und ohne Desorption durch Synchrotronstrahlung [51].

$c_1 = qL/(2w)$. Bei der zweiten Integration ergibt sich die Konstante $c_2 = qL/S$ daraus, dass die Pumpe bei $s = 0$ den gesamten Gasfluss über eine Länge L , also $Q \cdot L$ mit der Saugleistung S pumpt, d.h. $p(0) = q \cdot L/S$. Das Ergebnis ist

$$p(s) = q \left(\frac{Ls - s^2}{2w} + \frac{L}{S} \right) \quad (188)$$

für die Strecke zwischen zwei Pumpen. Mit numerischen Methoden kann die obige Differenzialgleichung für $p(s)$ leicht mit allgemeineren Randbedingungen gelöst werden, d.h. beliebige Positionen der Pumpen mit verschiedener Saugleistung sowie Variation der Desorptionsrate $q(s)$ und der molekularen Leitfähigkeit $w(s)$. Um eine vom Hersteller angegebene Abhängigkeit der Saugleistung $S(p)$ vom Druck zu berücksichtigen, wird die Rechnung mehrmals wiederholt und mit dem jeweiligen Druck am Ort der Pumpe die Saugleistung neu berechnet.

8.4 Druckmessung und Lecksuche

Der Restgasdruck wird i.d.R. an verteilten Stellen in einem Beschleuniger gemessen und überwacht. Für den UHV-Bereich eignen sich hierfür Ionisationsvakuummeter, bei denen Elektronen zwischen einer Kathode und einer Anode das Restgas ionisieren. Die Ionen wandern zu einer Elektrode, die relativ zur Kathode auf negativem Potenzial liegt, und bewirken dort einen messbaren Strom.

Die Restgaszusammensetzung wird mit einem Massenspektrometer ermittelt, das in einem Magnet Teilchen mit verschiedenem Masse-zu-Ladungs-Verhältnis voneinander trennt. Bei der Lecksuche wird Pumpstand verwendet, der mit einem Massenspektrometer ausgestattet ist. Verdächtige Stellen werden von außen mit Helium als Prüfgas besprüht, das im Massenspektrometer eine eindeutige Linie zeigt.

Literatur

- [1] W. C. Röntgen, *Ueber eine neue Art von Strahlen (Vorläufige Mittheilung)*, in: Sitzungsberichte der Würzburger Physik.-Medic.-Gesellschaft (1895).
- [2] E. Rutherford, *The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom*, Philosophical Magazine, Series 6, 21 (1911), 669.
- [3] C. D. Anderson, *The Positive Electron*, Phys. Review 43 (1933), 491.
- [4] Bureau International des Poids et Mesures, *The International System of Units (SI)*, 8. edition, www.bipm.org.
- [5] F. M. H. Cromptvoets et al., *A prototype storage ring for neutral molecules*, Nature 411 (2001), 174.
- [6] J. T. Seemann, *Last Year of PEP-II B-Factory Operation*, Proc. of the 2008 Europ. Part. Accel. Conf., Genoa, Italy, 946, www.jacow.org.
- [7] J. D. Cockcroft, E. T. S. Walton, *Experiments with High Velocity Ions*, Proc. of the Royal Society A 136 (1932), 619.
- [8] R. J. Van De Graaf, *A 1,500,000 Volt Electrostatic Generator*, Phys. Rev. 38 (1931), 1919.
- [9] M. Letournel and the Vivitron Group, *The Strasbourg Project. A 35 MV Vivitron Tandem*, Proc. of the 1987 Part. Accel. Conf., Washington D.C., USA, 346, www.jacow.org.
- [10] W. H. Press et al., *Numerical Recipies: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press (2007).
- [11] R. Wideröe, *Über ein neues Prinzip zur Herstellung hoher Spannungen*, Arch. f. Elektrotechnik 21 (1928), 387.
- [12] D. W. Kerst, *The Acceleration of Electrons by Magnetic Induction*, Phys. Rev. 60 (1941), 47.
- [13] H. Wiedemann, *Particle Accelerator Physics: Part I. Basic Principles and Linear Beam Dynamics*, Springer (1999).
- [14] N. C. Christopoulos et al., *High Current Linear Induction Accelerator for Electrons*, Rev. of Scient. Instruments 35 (1964), 886.

- [15] D. J. Griffiths, *Elektrodynamik*, Pearson (2011).
- [16] G. Ising, *Prinzip einer Methode zur Herstellung von Kanalstrahlen hoher Voltzahl*, Arkiv f. Matematik, Astronomi och Fysik 18 (1925), 45.
- [17] R. B. Neal (ed.), *The Stanford Two-Mile Accelerator*, Benjamin (1968), www.slac.stanford.edu/library.
- [18] L. W. Alvarez et al., *Berkeley Proton Linear Accelerator*, Rev. of Scient. Instruments 26 (1955), 111.
- [19] R. P. Feynman et al., *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley (1970).
- [20] M. Altarelli et al., *The European XFEL Technical Design Report*, DESY 2006-097, www.xfel.eu/documents
- [21] E. O. Lawrence, N. E. Edlefsen, *On the Production of High Speed Protons*, Science 72 (1930), 376.
- [22] L. H. Thomas, *The Path of Ions in the Cyclotron*, Phys. Rev. 54 (1938), 580.
- [23] S. Rosander, *The Development of the Microtron*, Nucl. Instr. and Methods 177 (1980), 411.
- [24] A. Jankowiak, *Design and Status of the 1.5-GeV Harmonic Double Sided Micotron for MAMI*, Proc. of the 2002 Europ. Part. Accel. Conf., Paris, France, 1085, www.jacow.org.
- [25] E. M. McMillan, *The Synchrotron – A Proposed High Energy Particle Accelerator*, Phys. Rev. 68 (1945), 143.
- [26] V. Veksler, *A New Method of Acceleration of Relativistic Particles* Journal of Physics USSR 9 (1945), 153.
- [27] P. Waloschek, *Als die Teilchen laufen lernten* (*The Infancy of Particle Accelerators*), vergriffen www-library.desy.de/elbook.html.
- [28] K. Bürgmann et al., *Performance of the White Circuits of the BESSY II Booster Synchrotron*, Proc. of the 1998 Eurp. Part. Accel. Conf., Stockholm, Sweden, 2062.
- [29] C. Bernardini, *AdA: The First Electron-Positron Collider*, Phys. in Perspective 6 (2004), 156; Proc. of the CERN Gen. Accel. Phys. Course 2004, Baden, Austria, cas.web.cern.ch/cas/Baden/Baden-lectures.htm.
- [30] G. Arduini et al., *Overview of LEP Operation in 1998*, Proc. of the 1999 Part. Accel. Conf., New York, USA, 2996.

- [31] O. Brüning et al. (eds.), *LHC Design Report*, CERN-2004-003-V-1, lhc.web.cern.ch/lhc/.
- [32] K. Balewski et al. (eds.), *PETRA III: A Low Emittance Synchrotron Radiation Source. Technical Design Report*, DESY 2004-035, petra3-project.desy.de.
- [33] J. Brau et al. (eds.), *International Linear Collider Reference Design Report*, www.linearcollider.org.
- [34] R. B. Palmer, *An Introduction to Acceleration Mechanisms*, www.slac.stanford.edu. SLAC-PUB-4320 (1987), inspirehep.net.
- [35] T. Tajima, J. M. Dawson, *Laser Electron Accelerator*, Phys. Rev. Lett. 43 (1979), 267.
- [36] S. P. D. Magles et al. *Monoenergetic beams of relativistic electrons from intense laser-plasma interactions*, Nature 431 (2004), 535; C. G. R. Geddes et al. *High-quality electron beams from a laser wakefield accelerator using plasma-channel guiding*, Nature 431 (2004), 538; J. Faure et al. *A laser-plasma accelerator producing monoenergetic electron beams*, Nature 431 (2004), 541.
- [37] W. P. Leemans et al., *GeV electron beams from a centimetre-scale accelerator*, Nature Physics 2 (2006), 696.
- [38] C. Joshi, *Plasma Accelerators*, Scientific American 294 (2006), 40; C. Joshi, *Beschleuniger für den Labortisch*, Spektrum der Wissenschaft August 2006, 56;
- [39] I. Blumenfeld et al., *Energy doubling of 42 GeV electrons in a metre-scale plasma wakefield accelerator*, Nature 445 (2007), 741.
- [40] R. Tomás, *CLIC Overview*, Proc. of the 2009 Part. Accel. Conf., Vancouver, Canada, 4195.
- [41] K. Wille, *Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen*, Teubner (1996).
- [42] E. Bodenstedt, *Über die Phasenschwingungen beim Synchrotron*, Annalen der Physik 450, 35 (1954).
- [43] R. R. Wilson, *Electron Synchrotrons*, in: *Encyclopedia of Physics 8/44* (ed.: E. Creutz), Springer (1959).
- [44] M. Pekeler, P. Schmüser, *Supraleitung für Teilchenbeschleuniger*, Physik Journal 5, 45 (2006).
- [45] H. Padamsee, J. Knobloch, T. Hays, *RF Superconductivity for Accelerators*, Wiley (1998).
- [46] M. Wutz, H. Adam, W. Walcher, *Theorie und Praxis der Vakuumtechnik*, 5. Auflage, Vieweg (1992).

- [47] Pfeiffer Vakuum GmbH, *The Vacuum Technology Book Volume II*, <https://www.pfeiffer-vacuum.com/de/know-how/>.
- [48] B. Pascal, *Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs*, Paris (1648) <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k105083f>.
- [49] O. de Guericke, *Experimenta Nova (ut vocantur) Magdeburgica de Vacuo Spation*, Amsterdam (1672) <http://diglib.hab.de/drucke/34-5-phys-2f/start.htm>
- [50] O. Gröbner, *Vacuum Systems*, in: *CERN Accelerator School*, Gif-sur-Yvette 1984 (ed.: P. Bryant, S. Turner), CERN 85-19 (1985).
- [51] S. Khan *Collective Phenomena in Synchrotron Radiation Sources*, Springer (2006).