ÜBUNGEN
zur „Beschleunigerphysik Teil 1"
TU Dortmund Wintersemester 2019/20

– BLATT 6 –

Arne Meyer a.d.H. (arne.meyeraufderheide @ tu-dortmund.de)
Benedikt Büsing (benedikt.buesing @ tu-dortmund.de)
Shaukat Khan (carsten.mai @ tu-dortmund.de)
Vorbesprechung am Do 14.11.2019
Abgabe per Email bis Di 19.11.2019

Maximal drei Teilnehmer/innen können eine gemeinsame Lösung einsenden. Die Lösungen zu Programmieraufgaben bitte als kommentiertes Python-Skript (.py), zu Verständnis- und Rechenaufgaben als PDF-Dokument (z.B. mit LaTeX, Word, gescannt) per Email einsenden. Bitte alle Namen im Betreff der Email, in der PDF-Datei und dem Python-Skript aufführen.*
Betreff der Email: „[BP2019 Uebung] Abgabe Blatt 6, Namen"

Aufgabe 1: Synchroner Phasenwinkel (2 Punkte)

a) Zeigen Sie in einem Diagramm der Hochfrequenzspannung als Funktion der Zeit, bei welchem „synchronen" Phasenwinkel sich Protonen in einem Speicherring unterhalb und oberhalb der Übergangsenergie befinden, d.h. $1/\gamma^2 > \alpha$ und $1/\gamma^2 < \alpha$, wobei γ der Lorentzfaktor und $\alpha > 0$ der „momentum compaction factor" ist. Begründung?

b) Wie können Protonen in einem Synchrotron von einem synchronen Phasenwinkel zu einem anderen gelangen, wenn beim Beschleunigungsvorgang die Übergangsenergie gekreuzt wird?

Aufgabe 2: Relativistische Beziehungen (3 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung verwendeten Beziehungen $\frac{dp}{p} = \gamma^2 \frac{dv}{v}$ und $\frac{dE}{E} = \beta^2 \frac{dp}{p}$ gelten. Hinweis: Leiten Sie zunächst den Impuls $p = m_0 \gamma v$ nach der Geschwindigkeit *v*, bzw. die Energie $E = m_0 \gamma c^2$ nach dem Impuls ab.

b) Zeigen Sie, dass die relative Änderung der Umlaufzeit T_0 in einem Speicherring durch $\frac{\Delta T}{T_0} \approx \frac{\Delta L}{L_0} - \frac{\Delta v}{v_0} = \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{\Delta p}{p_0}$ ausgedrückt werden kann, wobei L_0 die Bahnlänge, v_0 die Geschwindigkeit und p_0 der Impuls eines "Sollteilchens" ist. Im ersten Term ist α der "momentum compaction factor" (s. auch Aufgabe 1a) und der zweite Term ergibt sich aus Aufgabe 2a.

(bitte wenden)

Aufgabe 3: Teilchenbewegung im longitudinalen Phasenraum (4 oder 6 Punkte)

Die longitudinale Bewegung von Elektronen in einem Speicherring (die Synchrotron-Oszillation) wird im longitudinalen Phasenraum beschrieben (Abszisse: Abweichung $\Delta\Psi$ vom synchronen Phasenwinkel Ψ_s. Ordinate: relative Energieabweichung $\Delta E/E$ von der Sollenergie E). Für große Amplituden der Synchrotron-Oszillation und unter Vernachlässigung der Synchrotronstrahlungs-dämpfung gelten folgende gekoppelten Differenzialgleichungen (mit $\beta \approx 1$ und $1/\gamma^2 \approx 0$):

$$\frac{d(\Delta E/E)}{dt} = \frac{eV_0}{T_0 E} \cdot \left[\sin(\Psi_s + \Delta\Psi) - \sin\Psi_s\right] \qquad \frac{d(\Delta\Psi)}{dt} = \omega_{\mathrm{Hf}} \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta E}{E}$$

Hier ist V_0 die Amplitude der Hf-Spannung, T_0 die Umlaufzeit der Elektronen, $\omega_{\mathrm{Hf}} = 2\pi f_{\mathrm{HF}}$ die HF-Kreisfrequenz und α der „momentum compaction factor". Verwenden Sie die Parameter von BESSY in Berlin: E = 1,7 GeV, V_0 = 1,2 MV; T_0 = 800 ns, f_{HF} = 500 MHz, $\alpha = 8\cdot10^{-4}$. Der synchrone Phasenwinkel Ψ_s ergibt sich aus dem Energieverlust pro Umlauf W = 170 keV.

Berechnen Sie in kleinen Zeitschritten die Bewegung von Elektronen im longitudinalen Phasenraum unter den Anfangsbedingungen $\Delta\Psi = 0$ und $\Delta E/E$ von 0,002 bis 0,040 in Schritten von 0,002. Da die Synchrotronbewegung sehr langsam ist, können Sie einen Umlauf als „kleinen Zeitschritt" betrachten. In welchem Phasen- und Energiebereich gibt es stabile Trajektorien? Was passiert mit den Elektronen außerhalb des stabilen Bereichs? Wie groß ist die Synchrotronfrequenz in Abhängigkeit von der Amplitude? Die Berechnung kann auf verschiedene Weise durchgeführt werden:

a) durch einfaches Einsetzen in die Differenzialgleichungen **(4 Punkte)**, oder genauer
b) durch Verwendung des Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung **(6 Punkte, aber nicht als numpy-Funktion, sondern selbst programmiert)**

„Kochrezept" für das Runge-Kutta-Verfahren: Gegeben sind zwei gekoppelte Differenzial-gleichungen der Form $dy/dx = f(x,y,z)$ und $dz/dx = g(x,y,z)$. Wir gehen von einem Punkt (x_n, y_n, z_n) aus und wollen uns numerisch zum Punkt $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ vortasten,
wobei $x_{n+1} = x_n + d$ sei. Um y_{n+1} und z_{n+1} zu erhalten, bildet man

$$\begin{aligned}
j_1 &= d \cdot f(x_n, y_n, z_n) & k_1 &= d \cdot g(x_n, y_n, z_n) \\
j_2 &= d \cdot f\left(x_n + \frac{d}{2}, y_n + \frac{j_1}{2}, z_n + \frac{k_1}{2}\right) & k_2 &= d \cdot g\left(x_n + \frac{d}{2}, y_n + \frac{j_1}{2}, z_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
& \qquad\qquad\qquad\text{und} & & \\
j_3 &= d \cdot f\left(x_n + \frac{d}{2}, y_n + \frac{j_2}{2}, z_n + \frac{k_2}{2}\right) & k_3 &= d \cdot g\left(x_n + \frac{d}{2}, y_n + \frac{j_2}{2}, z_n + \frac{k_2}{2}\right) \\
j_4 &= d \cdot f(x_n + d, y_n + j_3, z_n + k_3) & k_4 &= d \cdot g(x_n + d, y_n + j_3, z_n + k_3)
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist dann $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(j_1 + 2j_2 + 2j_3 + j_4)$ und $z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$.

Der verbleibende Fehler ist von der Ordnung d^5. Im Fall der Synchrotron-Oszillation ist x die Zeit und damit $d = T_0$. Den Variablen y und z entspricht die Energie- bzw. Phasenabweichung des betrachteten Teilchens.