

Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory

M. Skopenkov and A. Ustinov

Abstract

We survey and develop the most elementary model of electron motion introduced by R.Feynman. In this game, a checker moves on a checkerboard by simple rules, and we count the turns. Feynman checkers are also known as a one-dimensional quantum walk or an Ising model at imaginary temperature. We solve mathematically a problem by R.Feynman from 1965, which was to prove that the discrete model (for large time, small average velocity, and small lattice step) is consistent with the continuum one. We study asymptotic properties of the model (for small lattice step and large time) improving the results by J.Narlikar from 1972 and by T.Sunada–T.Tate from 2012. For the first time we observe and prove concentration of measure in the small-lattice-step limit. We perform the second quantization of the model.

Keywords and phrases. Feynman checkerboard, quantum walk, Ising model, Young diagram, Dirac equation, stationary phase method

MSC2010: 82B20, 11L03, 68Q12, 81P68, 81T25, 81T40, 05A17, 11P82, 33C45.

Contents

1	Introduction	2
1.1	Motivation	2
1.2	Background	2
1.3	Contributions	5
1.4	Organization of the paper and further directions	5
2	Basic model (Hadamard walk)	6
2.1	Definition and examples	6
2.2	Physical interpretation	8
2.3	Identities and asymptotic formulae	11
3	Mass (biased quantum walk)	12
3.1	Identities	12
3.2	Asymptotic formulae	15
3.3	Physical interpretation	19
4	Spin	20
5	External field (inhomogeneous quantum walk)	21
6	Source	22
7	Medium	23
8	Identical particles	23
9	Antiparticles	24
9.1	Identities and asymptotic formulae	24
9.2	Physical interpretation	26
9.3	Combinatorial definition	27
10	Towards (1 + 1)-dimensional quantum electrodynamics	28
11	Open problems	29
12	Proofs	30
12.1	Identities: elementary combinatorics (Propositions 1–13)	31
12.2	Phase transition: the method of moments (Theorem 1)	34
12.3	The main result: the stationary phase method (Theorem 2)	35
12.4	Large-time limit: the stationary phase method again (Corollaries 1–3)	42
12.5	Solution of the Feynman problem: Taylor expansions (Corollaries 4–5)	45
12.6	Continuum limit: the tail-exchange method (Theorem 5 and Corollaries 6–7)	47
12.7	Probability of chirality flip: combinatorial identities (Theorem 6)	49
A	A. Kudryavtsev. Alternative “explicit” formulae	50
B	A. Lvov. Pointwise continuum limit	52

1 Introduction

We survey and develop the most elementary model of electron motion introduced by R. Feynman (see Figure 1). In this game, a checker moves on a checkerboard by simple rules, and we count the turns (see Definition 2). Feynman checkers can be viewed as a one-dimensional quantum walk, or an Ising model, or count of Young diagrams of certain type.

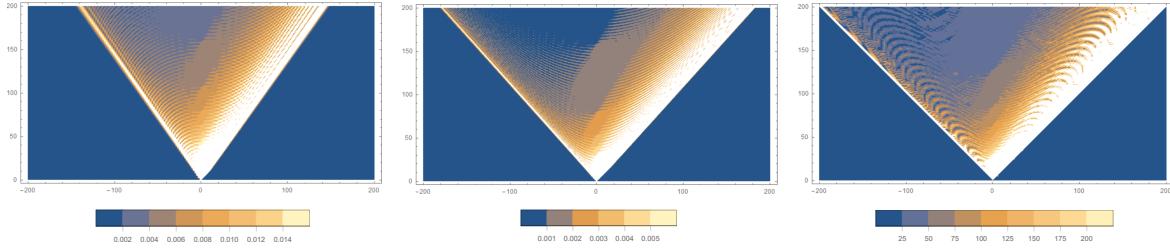


Figure 1: The probability to find an electron in a small square around a given point (white depicts strong oscillations of the probability). Left: in the basic model from §2 (cf. [51, Figure 6]). Middle: in the upgrade from §3 for smaller square side. Right: in continuum theory. For the latter, the relative probability density is depicted.

1.1 Motivation

The simplest way to understand what is the model about is the classical *double-slit experiment* (see Figure 2). In this experiment, a (*coherent*) beam of electrons is directed towards a plate pierced by two parallel slits, and the part of the beam passing through the slits is observed on a screen behind the plate. If one of the slits is closed, then the beam illuminates a spot on the screen. If both slits are open, one would expect a larger spot, but in fact one observes a sequence of bright and dark bands (*interferogram*).

This shows that electrons behave like a wave: the waves travel through both slits, and the contributions of the two paths either amplify or cancel each other depending on the final phases.

Further, if the electrons are sent through the slits one at time, then single dots appear on the screen, as expected. Remarkably, however, the same interferogram with bright and dark bands emerges when the electrons are allowed to build up one by one. One cannot predict where a particular electron hits the screen; all we can do is to compute the probability to find the electron at a given place.

The *Feynman sum-over-paths* (or *path integral*) method of computing such probabilities is to assign phases to all possible paths and to sum up the resulting waves (see [11, 12]). *Feynman checkers* (or *Feynman checkerboard*) is a particularly simple combinatorial rule for those phases in the case of an electron freely moving (or better jumping) along a line.

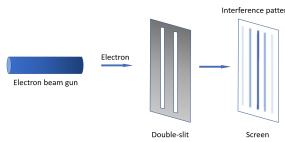


Figure 2: Double-slit experiment

1.2 Background

The beginning. The checkers model was invented by R. Feynman in 1940s [43] and first published in 1965 [12]. In Problem 2.6 there, a function on a lattice of small step ε was constructed (called *kernel*; see (2)) and the following task was posed:

If the time interval is very long ($t_b - t_a \gg \hbar/mc^2$) and the average velocity is small [$x_b - x_a \ll c(t_b - t_a)$], show that the resulting kernel is approximately the same as that for a free particle [given in Eq. (3-3)], except for a factor $\exp[(imc^2/\hbar)(t_b - t_a)]$.

Mathematically, this means that the kernel (divided by $2i\varepsilon \exp[(-imc^2/\hbar)(t_b - t_a)]$) asymptotically equals *free-particle kernel* (24) (this is Eq. (3-3) from [12]) in the triple limit when time tends to infinity, whereas the average velocity and the lattice step tend to zero (see Table 1 and Figure 3). Both scaling by the lattice step and tending it to zero were understood, otherwise the mentioned “exceptional” factor would be different (see Example 4). We show that the assertion, although incorrect literally, holds under mild assumptions (see Corollary 5).

Although the Feynman problem might seem self-evident for theoretical physicists, even the first step of a mathematical solution (disproving the assertion as stated) is not found in literature. As usual, the difficulty is to prove the convergence rather than to guess the limit.

propagator	continuum	lattice	context	references
free-particle kernel	(24)	-	quantum mechanics	[12, (3-3)]
spin-1/2 retarded propagator	(26),(27)	(2)	relativistic quantum mechanics	cf. [23, (13)] and [12, (2-27)]
spin-1/2 Feynman propagator	(34),(35)	(32)	quantum field theory	cf. [2, §9F]

Table 1: Expressions for the *propagators* of a particle freely moving in 1 space and 1 time dimension. The meaning of the norm square of a propagator is the relative probability density to find the particle at a particular point, or alternatively, the charge density at the point.

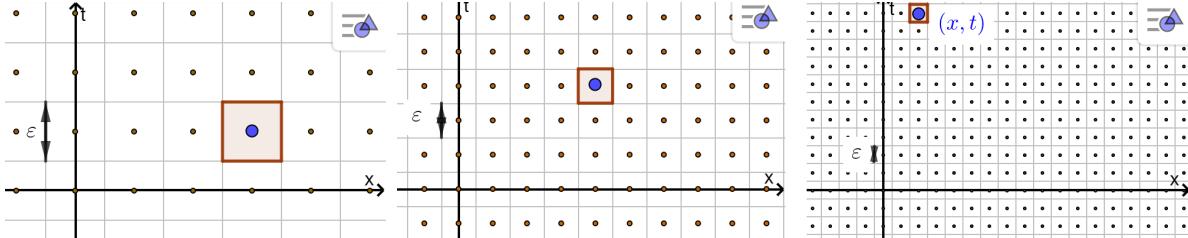


Figure 3: The Feynman triple limit: $t \rightarrow +\infty$, $x/t \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$

In 1972 J. Narlikar discovered that the above kernel reproduces the *spin-1/2 retarded propagator* in the different limit when the lattice step tends to zero but time stays fixed [36] (see Table 1, Figures 4 and 1, Corollary 6). In 1984 T.Jacobson–L.Schulman repeated this derivation, applied *stationary phase method* among other bright ideas, and found the probability of changing the movement direction [23] (cf. Theorem 6). The remarkable works of that period contain no mathematical proofs, but approximate computations without estimating the error.

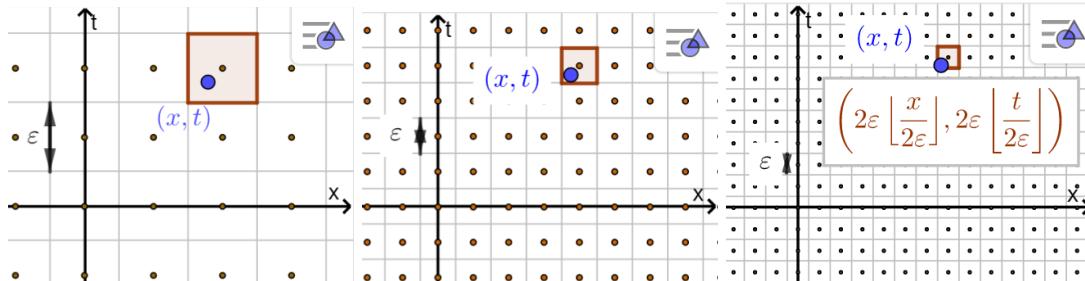


Figure 4: Continuum limit: the point (x, t) stays fixed while the lattice step ε tends to zero

Ising model. In 1981 H. Gersch noticed that Feynman checkers can be viewed as a 1-dimensional Ising model with *imaginary* temperature or edge weights (see §2.2 and [18], [23, §3]). Imaginary values of these quantities are usual in physics (e.g., in quantum field theory or in alternating current networks). Due to the imaginarity, contributions of most configurations cancel each other, which makes the model highly nontrivial in spite of being 1-dimensional. In particular, the model exhibits a phase transition (see Figures 1 and 5). Surprisingly, the latter seems to have never been reported before. Phase transitions were studied only in more complicated 1-dimensional Ising models [25, §III], [35], in spite of a known equivalent result, which we are going to discuss now (see Theorem 1(B) and Corollary 3).

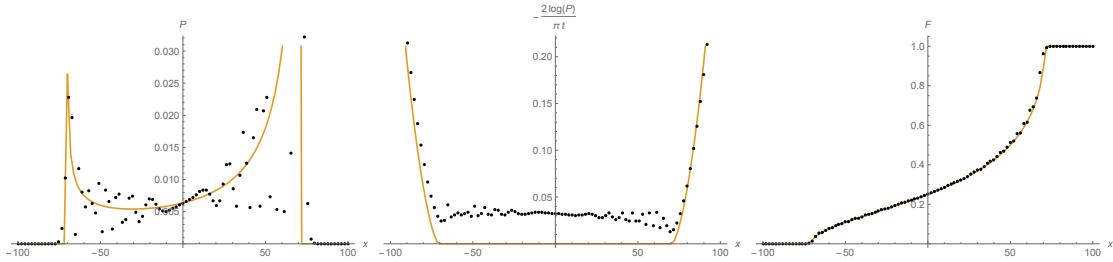


Figure 5: The distribution of the electron position x at time $t = 100$ in natural units for the basic model from §2 (left, dots). Its normalized logarithm (middle, dots) and cumulative distribution function (right, dots). Their (weak) scaling limits as $t \rightarrow \infty$ (curves). The middle plot is also (minus the imaginary part of) the limiting free energy density in the Ising model. The non-analyticity of the curves reflects a phase transition.

Quantum walks. In 2001 A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous performed a breakthrough [1]. They studied Feynman checkers under names *one-dimensional quantum walk* and *Hadamard walk*; although those cleverly defined models were completely equivalent to Feynman’s simple one. They computed the large-time limit of the model (see Theorem 2). They discovered several striking properties having sharp contrast with both continuum theory and the classical random walks. First, the most probable average electron velocity in the model equals $1/\sqrt{2}$ of the speed of light, and the probability of exceeding this value is very small (see Figures 5 and 1 to the left and Theorem 1(B)). Second, if an absorbing boundary is put immediately to the left of the starting position, then the probability that the electron is absorbed is $2/\pi$. Third, if an additional absorbing boundary is put at location $x > 0$, the probability that the electron is absorbed to the left actually increases, approaching $1/\sqrt{2}$ in the limit $x \rightarrow +\infty$. Recall that in the classical case both absorption probabilities are 1. In addition, they found many combinatorial identities and expressed the above kernel through the values of Jacobi polynomials at a particular point (see Remark 3; cf. [48, §2]).

N. Konno studied a *biased quantum walk* [29, 30], which is still essentially equivalent to Feynman checkers (see Remark 4). He found the distribution of the electron position in the (weak) large-time limit (see Figure 5 and Theorem 1(B)). This result was proved mathematically by G.R. Grimmett–S. Janson–P.F. Scudo [20]. In their seminal paper [47] from 2012, T. Sunada–T. Tate found and proved a large-time asymptotic formula for the distribution (see Theorems 2–4). This was a powerful result but it still could not solve the Feynman problem because the error estimate was not uniform in the lattice step. In 2018 M. Maeda et al. proved a bound for the maximum of the distribution for large time [33, Theorem 2.1].

Quantum walks were generalized to arbitrary graphs and applied to quantum algorithms (see Figure 6 and [17] for an implementation). We refer to the surveys by M.J. Cantero–F.A. Grünbaum–L. Moral–L. Velázquez, N. Konno, J. Kempe, and S.E. Venegas-Andraca [7, 30, 27, 50, 31] for further details in this direction.

Lattice quantum field theories. In a more general context, this is a direction towards creation of *Minkowskian* lattice quantum field theory, with both space and time being discrete [2]. In 1970s F. Wegner and K. Wilson introduced *lattice gauge theory* as a computational tool for gauge theory describing all known interactions (except gravity); see [34] for a popular-science introduction. This culminated in determining the proton mass theoretically with error less than 2% in a sense. This theory is *Euclidean* in the sense that it involves *imaginary* time. Likewise, an asymptotic formula for the propagator for the (massless) *Euclidean* lattice Dirac equation [28, Theorem 4.3] played a crucial role in the continuum limit of the Ising model performed by D. Chelkak–S. Smirnov [8]. Similarly, asymptotic formulae for the *Minkowskian* one (Theorems 2–5) can be useful for missing Minkowskian lattice quantum field theory. Several authors argue that Feynman checkers have the advantage of *no fermion doubling* inherent in Euclidean lattice theories and avoid the Nielsen–Ninomiya no-go theorem [4, 15].

Several upgrades of Feynman checkers have been discussed. For instance, around 1990s B. Gaveau–L. Schulman and G. Ord added electromagnetic field to the model [16, 38]. That

time they achieved neither exact charge conservation nor generalization to non-Abelian gauge fields; this is fixed in Definition 3. Another example is adding mass matrix by P. Jizba [24].

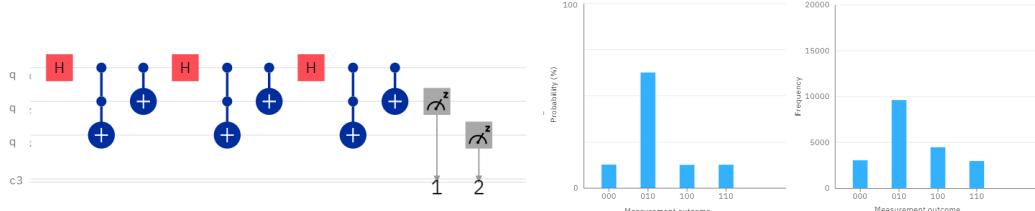


Figure 6: Implementation of the basic model from §2 on a quantum computer using quantum-circuit language (left). The output is a random bit-string coding electron position x at time $t = 4$. The strings 000, 010, 100, 110 code $x = 4, 2, 0, -2$ respectively. Distribution of x (middle) and a histogram for quantum computer IBM-Lima (right) [44, §19]. See [17] for details.

It was an old dream to incorporate also checker paths turning backwards in time or forming cycles [43, p. 481–483], [22]; this would mean creation of electron-positron pairs, celebrating a passage from quantum mechanics to quantum field theory. One looked for a combinatorial model reproducing the *Feynman propagator* rather than the *retarded* one in the continuum limit (see Table 1). Known constructions (such as *hopping expansion*) did not lead to the Feynman propagator because of certain lattice artifacts (e.g., the title of [39] is misleading: the Feynman propagator is not discussed there). In the *massless* case, a *noncombinatorial* construction of Feynman propagator on the lattice was provided by C. Bender–L. Mead–K. Milton–D. Sharp in [2, §9F] and [3, §IV]. In Definition 6 the desired combinatorial construction is finally given.

Another long-standing open problem is to generalize the model to the 4-dimensional real world. In his Nobel prize lecture, R. Feynman mentioned his own unsuccessful attempts. There are several recent approaches, e.g., by B. Foster–T. Jacobson from 2017 [15]. Those are not yet as simple and beautiful as the original 2-dimensional model, as it is written in [15, §7.1] itself.

On physical and mathematical works. The physical literature on the subject is quite extensive [50], and we cannot mention all remarkable works in this brief overview. Surprisingly, in the whole literature we have not found the shouting property of *concentration of measure* for lattice step tending to zero (see Corollary 7). Many papers are well-written, insomuch that the *physical* theorems and proofs there could be carelessly taken for *mathematical* ones (see the end of §12). We are aware of just a few mathematical works on the subject, such as [20, 47, 33].

1.3 Contributions

We solve mathematically a problem by R. Feynman from 1965, which was to prove that his model is consistent with the continuum one, namely, reproduces the usual quantum-mechanical free-particle kernel for large time, small average velocity, and small lattice step (see Corollary 5). We compute large-time and small-lattice-step asymptotic formulae for the lattice propagator, uniform in the model parameters (see Theorems 2 and 5). For the first time we observe and prove concentration of measure in the continuum limit: the average velocity of an electron emitted by a point source is close to the speed of light with high probability (see Corollary 7). The results can be interpreted as asymptotic properties of Young diagrams (see Corollary 2) and Jacobi polynomials (see Remark 3).

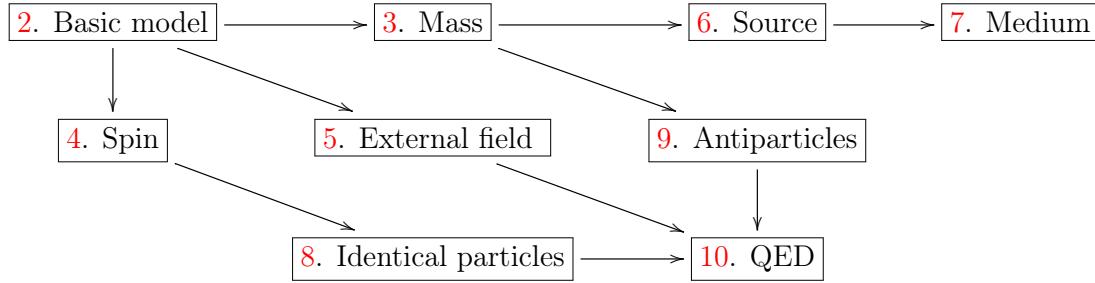
All these results are proved mathematically for the first time. For their statements, just Definition 2 is sufficient. In Definitions 3 and 6 we perform a coupling to lattice gauge theory and the second quantization of the model, promoting Feynman checkers to a full-fledged lattice quantum field theory.

1.4 Organization of the paper and further directions

First we give the definitions and precise statements of the results, and in the process provide a zero-knowledge examples for basic concepts of quantum theory. These are precisely those examples that R. Feynman presents first in his own books: Feynman checkers (see §3) is the

first specific example in the whole book [12]. The thin-film reflection (see §7) is the first example in [11]; see Figures 10–11 there. Thus we hope that these examples could be enlightening to readers unfamiliar with quantum theory.

We start with the simplest (and rough) particular case of the model and upgrade it step by step in each subsequent section. Before each upgrade, we summarize which physical *question* does it address, which simplifying *assumptions* does it resolve or impose additionally, and which experimental or theoretical *results* does it reproduce. Some upgrades (§§7–9) are just announced to be discussed in a subsequent publication. Our aim is *(1+1)-dimensional lattice quantum electrodynamics* (“QED”) but the last step on this way (mentioned in §10) is still undone. Open problems are collected in §11. For easier navigation, we present the upgrades-dependence chart:



Hopefully this is a promising path to making quantum field theory rigorous and algorithmic. An *algorithmic* quantum field theory would be a one which, given an experimentally observable quantity and a number $\delta > 0$, would provide a *precise statement* of an algorithm predicting a value for the quantity within accuracy δ . (Surely, the predicted value needs not to agree with the experiment for δ less than accuracy of theory itself.) See Algorithm 1 for a toy example. This would be an extension of *constructive* quantum field theory (currently far from being algorithmic). Application of quantum theory to computer science is in mainstream now, but the opposite direction could provide benefit as well. (Re)thinking algorithmically is a way to make a subject available to nonspecialists, as it is happening with, say, algebraic topology.

The paper is written in a mathematical level of rigor, in the sense that all the definitions, conventions, and theorems (including corollaries, propositions, lemmas) should be understood literally. Theorems remain true, even if cut out from the text. The proofs of theorems use the statements but not the proofs of the other ones. Most statements are much less technical than the proofs; hence the proofs are kept in a separate section (§12) and long computations are kept in [44]. In the process of the proofs, we give a zero-knowledge introduction to the main tools to study the model: combinatorial identities, the Fourier transform, the method of moments, the stationary phase method. Remarks are informal and usually not used elsewhere (hence skippable). Text outside definitions, theorems, proofs is neither used formally.

2 Basic model (Hadamard walk)

Question: what is the probability to find an electron in the square (x, t) , if it was emitted from $(0, 0)$?

Assumptions: no self-interaction, no creation of electron-positron pairs, fixed mass and lattice step, point source; the electron moves in a plane “drifting uniformly along the t -axis” or along a line (and then t is time).

Results: double-slit experiment (qualitative explanation), charge conservation, large-time limiting distribution.

2.1 Definition and examples

We first give an informal definition of the model in the spirit of [11] and then a precise one.

On an infinite checkerboard, a checker moves to the diagonal-neighboring squares, either upwards-right or upwards-left (see Figure 7 to the left). To each path s of the checker, assign a vector $a(s)$ as follows (see Figure 7 to the middle). Take a stopwatch that can time the checker as it moves. Initially the stopwatch hand points upwards. While the checker moves straightly, the hand does not rotate, but each time when the checker changes the direction, the

hand rotates through 90° clockwise (independently of the direction the checker turns). The final direction of the hand is the direction of the required vector $a(s)$. The length of the vector is set to be $1/2^{(t-1)/2}$, where t is the total number of moves (this is just a normalization). For instance, for the path s in Figure 7 to the top-middle, the vector $a(s) = (0, -1/2)$.

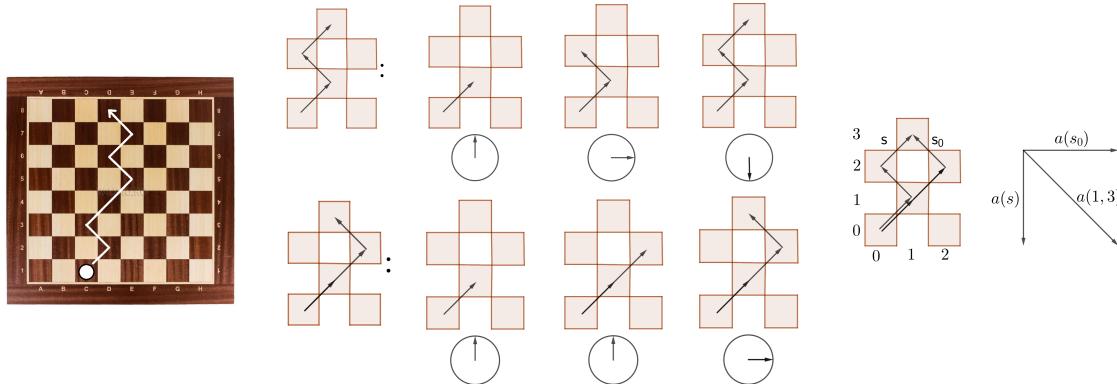


Figure 7: A checker path (left). The vectors assigned to paths (middle) and a square (right).

Denote by $a(x, t) := \sum_s a(s)$ the sum over all the checker paths from the square $(0, 0)$ to the square (x, t) , starting with the upwards-right move. For instance, $a(1, 3) = (0, -1/2) + (1/2, 0) = (1/2, -1/2)$; see Figure 7 to the right. The length square of the vector $a(x, t)$ is called the *probability to find an electron in the square (x, t) , if it was emitted from $(0, 0)$* (see §2.2 for a discussion of the terminology). The vector $a(x, t)$ itself is called the *arrow* [11, Figure 6].

Let us summarize this construction rigorously.

Definition 1. A *checker path* is a finite sequence of integer points in the plane such that the vector from each point (except the last one) to the next one equals either $(1, 1)$ or $(-1, 1)$. A *turn* is a point of the path (not the first and not the last one) such that the vectors from the point to the next and to the previous ones are orthogonal. The *arrow* is the complex number

$$a(x, t) := 2^{(1-t)/2} i \sum_s (-i)^{\text{turns}(s)},$$

where the sum over all checker paths s from $(0, 0)$ to (x, t) with the first step to $(1, 1)$, and $\text{turns}(s)$ is the number of turns in s . Hereafter an empty sum is 0 by definition. Denote

$$P(x, t) := |a(x, t)|^2, \quad a_1(x, t) := \text{Re } a(x, t), \quad a_2(x, t) := \text{Im } a(x, t).$$

Points (or squares) (x, t) with even and odd $x + t$ are called *black* and *white* respectively.

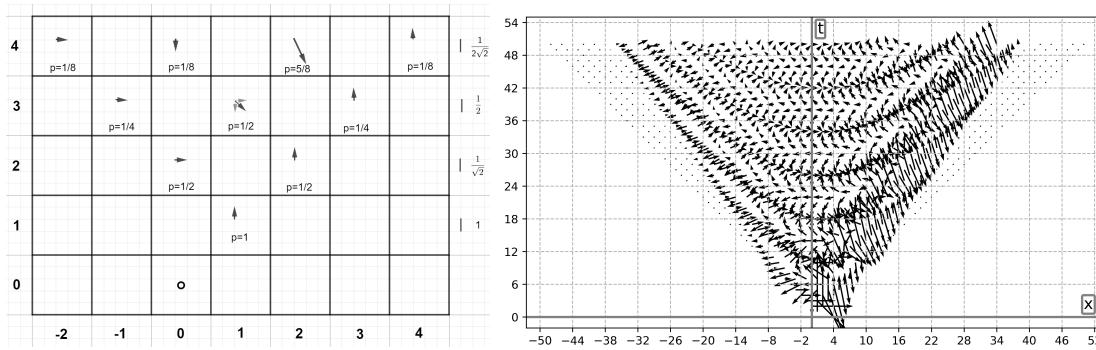


Figure 8: The arrows $a(x, t)$ and the probabilities $P(x, t)$ for small x, t (left); the scale depends on the row. The arrows $10 \cdot a(x, t)$ for $t \leq 50$ (right).

Figure 8 and Table 2 depict the arrows $a(x, t)$ and the probabilities $P(x, t)$ for small x, t . Figure 9 depicts the graphs of $P(x, 1000)$, $a_1(x, 1000)$, and $a_2(x, 1000)$ as functions in an even number x . We see that under variation of the final position x at a fixed large time t , right after the peak the probability falls to very small although still nonzero values. What is particularly interesting is the unexpected position of the peak, far from $x = 1000$. In Figure 1 to the left, the color of a point (x, t) with even $x + t$ depicts the value $P(x, t)$. Notice that the sides of the apparent angle are *not* the lines $t = \pm x$ but the lines $t = \pm\sqrt{2}x$ (see Theorem 1(A)).

4	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		$-\frac{i}{2\sqrt{2}}$		$\frac{1-2i}{2\sqrt{2}}$		$\frac{i}{2\sqrt{2}}$
3		$\frac{1}{2}$		$\frac{1-i}{2}$		$\frac{i}{2}$	
2			$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{i}{\sqrt{2}}$		
1				i			
t \ x	-2	-1	0	1	2	3	4

Table 2: The arrows $a(x, t)$ for small x, t .

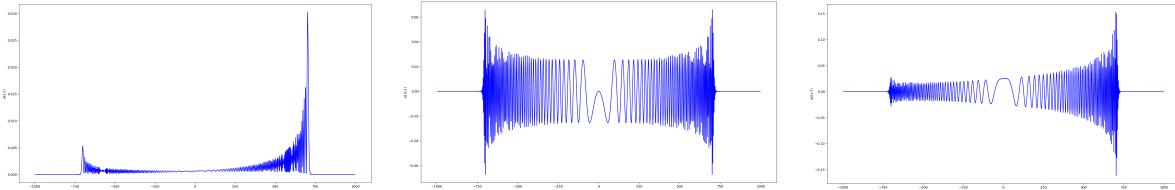


Figure 9: The plots of $P(x, 1000)$, $a_1(x, 1000)$, $a_2(x, 1000)$

2.2 Physical interpretation

Let us comment on the physical interpretation of the model and ensure that it captures unbelievable behavior of electrons. There are two different interpretations; see Table 3.

object	standard interpretation	spin-chain interpretation
s	path	configuration of “+” and “-” in a row
turns(s)	number of turns	half of the configuration energy
t	time	volume
x	position	difference between the number of “+” and “-”
x/t	average velocity	magnetization
$a(x, t)$	probability amplitude	partition function up to constant
$P(x, t)$	probability	partition function norm squared
$\frac{4i}{\pi t} \log a(x, t)$	normalized logarithm of amplitude	free energy density
$\frac{i}{a(x, t)} a_2(x, t)$	conditional probability amplitude	“probability” of equal signs at the ends of the
$a(x, t)$	of the last move upwards-right	spin chain

Table 3: Physical interpretations of Feynman checkers

Standard interpretation. Here the x - and t -coordinates are interpreted as the electron position and time respectively. Sometimes (e.g., in Example 1) we a bit informally interpret both as position, and assume that the electron performs a “uniform classical motion” along the t -axis. We work in the natural system of units, where the speed of light, the Plank and the Boltzmann constants equal 1. Thus the lines $x = \pm t$ represent motion with the speed of light. Any checker path lies above both lines, i.e. in the light cone, which means agreement with relativity: the speed of electron cannot exceed the speed of light.

To think of $P(x, t)$ as a probability, consider the t -coordinate as fixed, and the squares $(-t, t), (-t + 2, t), \dots, (t, t)$ as all the possible outcomes of an experiment. For instance, the t -th horizontal might be a screen detecting the electron. We shall see that all the numbers $P(x, t)$ on one horizontal sum up to 1 (Proposition 2), thus indeed can be considered as probabilities. Notice that the probability to find the electron in a set $X \subset \mathbb{Z}$ is $P(X, t) := \sum_{x \in X} P(x, t) = \sum_{x \in X} |a(x, t)|^2$ rather than $|\sum_{x \in X} a(x, t)|^2$ (cf. [11, Figure 50]).

In reality, one cannot measure the electron position exactly. A fundamental limitation is the electron *reduced Compton wavelength* $\lambda = 1/m \approx 4 \cdot 10^{-13}$ meters, where m is the electron mass. Physically, the basic model approximates the continuum by a lattice of step exactly λ . But that is still a rough approximation: one needs even smaller step to prevent accumulation of approximation error at larger distances and times. For instance, Figures 1

and 10 to the left show a finite-lattice-step effect (*renormalization of speed of light*): the average velocity x/t cannot exceed $1/\sqrt{2}$ of the speed of light with high probability. (An explanation in physical terms: lattice regularization cuts off distances smaller than the lattice step, hence small wavelengths, hence large momenta, and hence large velocities.) A more precise model is given in §3: compare the plots in Figure 1.

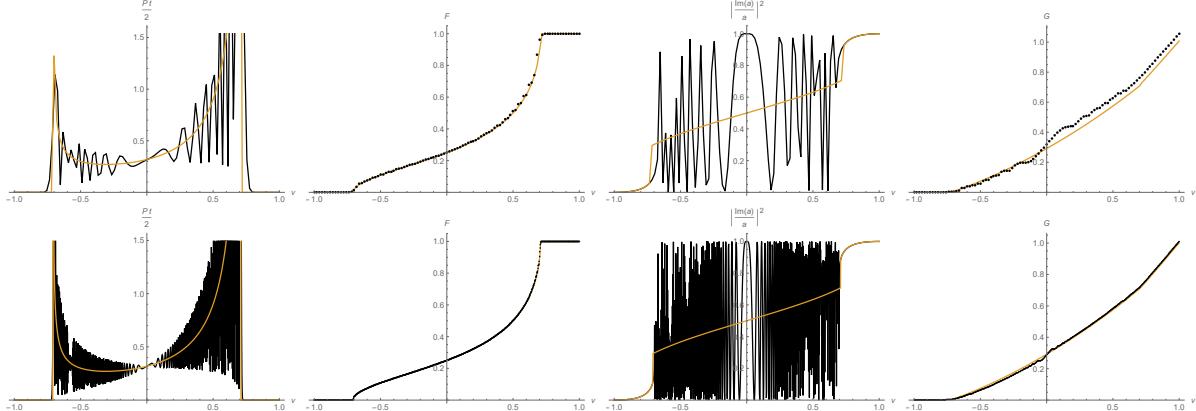


Figure 10: The plots of $\frac{t}{2}P(2\lceil \frac{vt}{2} \rceil, t)$, $F_t(v) := \sum_{x \leq vt} P(x, t)$, $\left| \frac{a_2(2\lceil \frac{vt}{2} \rceil, t)}{a(2\lceil \frac{vt}{2} \rceil, t)} \right|^2$, $G_t(v) := \sum_{x \leq vt} \frac{2}{t} \left| \frac{a_2(x, t)}{a(x, t)} \right|^2$ (dark) for $t = 100$ (top), $t = 1000$ (bottom), and their distributional limits as $t \rightarrow \infty$ (light).

As we shall see now, the model qualitatively captures unbelievable behavior of electrons. (For correct quantitative results like exact shape of an interferogram, an upgrade involving a *coherent* source is required; see §6.)

The *probability to find an electron in the square (x, t) subject to absorption in a subset $B \subset \mathbb{Z}^2$* is defined analogously to $P(x, t)$, only the summation is over checker paths s that have no common points with B possibly except $(0, 0)$ and (x, t) . The probability is denoted by $P(x, t \text{ bypass } B)$. Informally, this means an additional outcome of the experiment: the electron has been absorbed and has not reached the screen. In the following example, we view the two black squares $(\pm 1, 1)$ on the horizontal $t = 1$ as two slits in a horizontal plate (cf. Figure 2).

Example 1 (Double-slit experiment). *Distinct paths cannot be viewed as “mutually exclusive”:*

$$P(0, 4) \neq P(0, 4 \text{ bypass } \{(2, 2)\}) + P(0, 4 \text{ bypass } \{(0, 2)\}).$$

Absorption can increase probabilities at some places: $P(0, 4) = 1/8 < 1/4 = P(0, 4 \text{ bypass } \{(2, 2)\})$.

The standard interpretation of Feynman checkers is also known as the *Hadamard walk*, or more generally, the *1-dimensional quantum walk* or *quantum lattice gas*. Those are all equivalent but lead to generalizations in distinct directions [50, 31, 51]. For instance, a unification of the upgrades from §3–7 gives a general inhomogeneous 1-dimensional quantum walk.

The striking properties of quantum walks discussed in §1.2 are stated precisely as follows:

$$\sum_{t=1}^{\infty} P(0, t \text{ bypass } \{x = 0\}) = \frac{2}{\pi} \leq \sum_{t=1}^{\infty} P(0, t \text{ bypass } \{x = 0\} \cup \{x = n\}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ as } n \rightarrow +\infty.$$

Recently M. Dmitriev [10] has found $\sum_{t=1}^{\infty} P(n, t \text{ bypass } \{x = n\})$ for a few values $n \neq 0$ (see Problem 6). Similar numbers appear in the simple random walk on \mathbb{Z}^2 [41, Table 2].

Spin-chain interpretation. There is a *very different* physical interpretation of the same model: a 1-dimensional Ising model with imaginary temperature and fixed magnetization.

Recall that a *configuration* in the Ising model is a sequence $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_t)$ of ± 1 of fixed length. The *magnetization* and the *energy* of the configuration are $\sum_{k=1}^t \sigma_k / t$ and $H(\sigma) = \sum_{k=1}^{t-1} (1 - \sigma_k \sigma_{k+1})$ respectively. The *probability* of the configuration is $e^{-\beta H(\sigma)} / Z(\beta)$, where the *inverse temperature* $\beta = 1/T > 0$ is a parameter and the *partition function* $Z(\beta) := \sum_{\sigma} e^{-\beta H(\sigma)}$ is a normalization factor. Additional restrictions on configurations σ are usually imposed.

Now, moving the checker along a path s , write “+” for each upwards-right move, and “−” for each upwards-left one; see Figure 11 to the left. The resulting sequence of signs is a configuration in the Ising model, the number of turns in s is one half of the configuration energy, and the ratio of the final x - and t -coordinates is the magnetization. Thus $a(x, t) = \sum_s a(s)$ coincides (up to a factor not depending on x) with the partition function for the Ising model at the *imaginary* inverse temperature $\beta = i\pi/4$ under the fixed magnetization x/t :

$$a(x, t) = 2^{(1-t)/2} i \sum_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_t) \in \{+1, -1\}^t: \\ \sigma_1 = +1, \quad \sum_{k=1}^{t-1} \sigma_k = x}} \exp \left(\frac{i\pi}{4} \sum_{k=1}^{t-1} (\sigma_k \sigma_{k+1} - 1) \right).$$

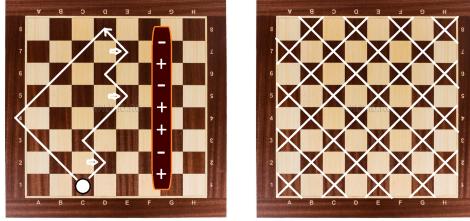


Figure 11: A Young diagram (the arrows point to steps) and the Ising model (left). The auxiliary grid (right).

Notice a crucial difference of the resulting spin-chain interpretation from both the usual Ising model and the above standard interpretation. In the latter two models, the magnetization x/t and the average velocity x/t were *random variables*; now the magnetization x/t (not to be confused with an external magnetic field) is an *external condition*. The configuration space in the spin-chain interpretation consists of sequences of “+” and “−” with *fixed* numbers of “+” and “−”. Summation over configurations with different x or t would make no sense: e.g., recall that $P(X, t) = \sum_{x \in X} |a(x, t)|^2$ rather than $|\sum_{x \in X} a(x, t)|^2$.

Varying the magnetization x/t , viewed as an external condition, we observe a *phase transition*: (the imaginary part of) the limiting *free energy density* $-\log a(x, t)/\beta t$ is non-analytic when x/t passes through $\pm 1/\sqrt{2}$ (see Figure 5 to the middle and Corollary 3). The phase transition emerges as $t \rightarrow \infty$. It is interesting to study other order parameters, for instance, the “*probability*” $i a_2(x, t)/a(x, t)$ of *equal signs at the endpoints of the spin chain* (see Figure 10 and Problems 4–5). These quantities are complex just because the temperature is imaginary.

(A comment for specialists: the phase transition is not related to accumulation of zeroes of the partition function in the plane of complex parameter β as in [25, §III] and [35]. In our situation, $\beta = i\pi/4$ is fixed, the *real* parameter x/t varies, and the partition function $a(x, t)$ has no zeroes at all [37, Theorem 1].)

Young-diagram interpretation. Our results have also a combinatorial interpretation.

The *number of steps* (or *inner corners*) in a Young diagram with w columns of heights x_1, \dots, x_w is the number of elements in the set $\{x_1, \dots, x_w\}$; see Figure 11 to the left. Then the value $2^{(h+w-1)/2} a_1(h-w, h+w)$ is the difference between the number of Young diagrams with an odd and an even number of steps, having exactly w columns and h rows.

Interesting behaviour starts already for $h = w$ (see Proposition 4). For $h = w$ even, the difference vanishes. For $h = w = 2n + 1$ odd, it is $(-1)^n \binom{2n}{n}$. Such 4-periodicity roughly remains for h close to w [45, Theorem 2]. For fixed half-perimeter $h + w$, the difference slowly oscillates as h/w increases, attains a peak at $h/w \approx 3 + 2\sqrt{2}$, and then harshly falls to very small values (see Corollary 2 and Theorems 2–4).

Similarly, $2^{(h+w-1)/2} a_2(h-w, h+w)$ is the difference between the number of Young diagrams with an even and an odd number of steps, having exactly w columns and *less* than h rows. The behaviour is similar. The upgrade in §3 is related to *Stanley character polynomials* [48, §2].

Discussion of the definition. Now compare Definition 1 with the ones in the literature.

The notation “ a ” comes from “arrow” and “probability amplitude”; other names are “wavefunction”, “kernel”, “the Green function”, “propagator”. More traditional notations are “ ψ ”, “ K ”, “ G ”, “ Δ ”, “ S ” depending on the context. We prefer a neutral one suitable for all contexts.

The factor of i and the minus sign in the definition are irrelevant (and absent in the original definition [12, Problem 2.6]). They come from the ordinary starting direction and rotation direction of the stopwatch hand, and reduce the number of minus signs in what follows.

The normalization factor $2^{(1-t)/2}$ can be explained by analogy to the classical random walk. If the checker were performing just a random walk, choosing one of the two possible directions at each step (after the obligatory first upwards-right move), then $|a(s)|^2 = 2^{1-t}$ would be the probability of a path s . This analogy should be taken with a grain of salt: in quantum theory, the “probability of a path” has absolutely *no* sense (recall Example 1). The reason is that the path is not something one can measure: a measurement of the electron position at one moment strongly affects the motion for all later moments.

Conceptually, one should also fix the direction of the *last* move of the path s (see [12, bottom of p.35]). Luckily, this is not required in the present paper (and thus is not done), but becomes crucial in further upgrades (see §4 for an explanation).

One could ask where does the definition come from. Following Feynman, we do not try to explain or “derive” it physically. This quantum model cannot be obtained from a classical one by the standard Feynman sum-over-paths approach: there is simply *no* clear classical analogue of a spin 1/2 particle (cf. §4) and *no* true understanding of spin. “Derivations” in [1, 4, 36] appeal to much more complicated notions than the model itself. The true motivation for the model is its simplicity, consistency with basic principles (like probability conservation), and agreement with experiment (which here means the correct continuum limit; see Corollary 6).

2.3 Identities and asymptotic formulae

Let us state several well-known basic properties of the model. The proofs are given in §12.1.

First, the arrow coordinates $a_1(x, t)$ and $a_2(x, t)$ satisfy the following recurrence relation.

Proposition 1 (Dirac equation). *For each integer x and each positive integer t we have*

$$\begin{aligned} a_1(x, t+1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_2(x+1, t) + \frac{1}{\sqrt{2}}a_1(x+1, t); \\ a_2(x, t+1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_2(x-1, t) - \frac{1}{\sqrt{2}}a_1(x-1, t). \end{aligned}$$

This mimics the (1+1)-dimensional Dirac equation in the Weyl basis [42, (19.4) and (3.31)]

$$\begin{pmatrix} m & \partial/\partial x - \partial/\partial t \\ \partial/\partial x + \partial/\partial t & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2(x, t) \\ a_1(x, t) \end{pmatrix} = 0, \quad (1)$$

only the derivatives are replaced by finite differences, m is set to 1, and the normalization factor $1/\sqrt{2}$ is added. For the upgrade in §3, this analogy becomes transparent (see Remark 2). The Weyl basis is not unique, thus there are several forms of equation (1); cf. [23, (1)].

The Dirac equation implies the conservation of probability.

Proposition 2 (Probability/charge conservation). *For each integer $t \geq 1$ we get $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, t) = 1$.*

For $a_1(x, t)$ and $a_2(x, t)$, there is an “explicit” formula (more ones are given in Appendix A).

Proposition 3 (“Explicit” formula). *For each integers $|x| < t$ such that $x+t$ is even we have*

$$\begin{aligned} a_1(x, t) &= 2^{(1-t)/2} \sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-1)^r \binom{(x+t-2)/2}{r} \binom{(t-x-2)/2}{r}, \\ a_2(x, t) &= 2^{(1-t)/2} \sum_{r=1}^{(t-|x|)/2} (-1)^r \binom{(x+t-2)/2}{r} \binom{(t-x-2)/2}{r-1}. \end{aligned}$$

The following proposition is a straightforward corollary of the “explicit” formula.

Proposition 4 (Particular values). *For each integer $1 \leq k \leq t - 1$ the numbers $a_1(-t + 2k, t)$ and $a_2(-t + 2k, t)$ are the coefficients at z^{t-k-1} and z^{t-k} in the expansion of the polynomial $2^{(1-t)/2}(1+z)^{t-k-1}(1-z)^{k-1}$. In particular,*

$$\begin{aligned} a_1(0, 4n+2) &= \frac{(-1)^n}{2^{(4n+1)/2}} \binom{2n}{n}, & a_1(0, 4n) &= 0, \\ a_2(0, 4n+2) &= 0, & a_2(0, 4n) &= \frac{(-1)^n}{2^{(4n-1)/2}} \binom{2n-1}{n}. \end{aligned}$$

In §3.1 we give more identities. The sequences $2^{(t-1)/2}a_1(x, t)$ and $2^{(t-1)/2}a_2(x, t)$ are present in the on-line encyclopedia of integer sequences [46, A098593 and A104967].

The following remarkable result was observed in [1, §4] (see Figures 5 and 10), stated precisely and derived heuristically in [29, Theorem 1], and proved mathematically in [20, Theorem 1]. See a short exposition of the latter proof in §12.2, and generalizations in §3.2.

Theorem 1 (Large-time limiting distribution; see Figure 10). **(A)** *For each $v \in \mathbb{R}$ we have*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{x \leq vt} P(x, t) = F(v) := \begin{cases} 0, & \text{if } v \leq -1/\sqrt{2}; \\ \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1-2v}{\sqrt{2}(1-v)}, & \text{if } |v| < 1/\sqrt{2}; \\ 1, & \text{if } v \geq 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

(B) *We have the following convergence in distribution as $t \rightarrow \infty$:*

$$tP(\lceil vt \rceil, t) \xrightarrow{d} F'(v) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(1-v)\sqrt{1-2v^2}}, & \text{if } |v| < 1/\sqrt{2}; \\ 0, & \text{if } |v| \geq 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

(C) *For each integer $r \geq 0$ we have $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x}{t}\right)^r P(x, t) = \int_{-1}^1 v^r F'(v) dv$.*

Theorem 1(B) demonstrates a phase transition in Feynman checkers, if interpreted as an Ising model at imaginary temperature and fixed magnetization. Recall that then the magnetization v is an external condition (rather than a random variable) and $P(\lceil vt \rceil, t)$ is the norm square of the partition function (rather than a probability). The distributional limit of $tP(\lceil vt \rceil, t)$ is discontinuous at $v = \pm 1/\sqrt{2}$, reflecting a phase transition (cf. Corollary 3).

3 Mass (biased quantum walk)

Question: what is the probability to find an electron of mass m in the square (x, t) , if it was emitted from $(0, 0)$?

Assumptions: the mass and the lattice step are now arbitrary.

Results: analytic expressions for the probability for large time or small lattice step, concentration of measure.

3.1 Identities

Definition 2. Fix $\varepsilon > 0$ and $m \geq 0$ called *lattice step* and *particle mass* respectively. Consider the lattice $\varepsilon\mathbb{Z}^2 = \{(x, t) : x/\varepsilon, t/\varepsilon \in \mathbb{Z}\}$ (see Figure 3). A *checker path* s is a finite sequence of lattice points such that the vector from each point (except the last one) to the next one equals either $(\varepsilon, \varepsilon)$ or $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Denote by $\text{turns}(s)$ the number of points in s (not the first and not the last one) such that the vectors from the point to the next and to the previous ones are orthogonal. For each $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, where $t > 0$, denote by

$$a(x, t, m, \varepsilon) := (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} i \sum_s (-im\varepsilon)^{\text{turns}(s)} \quad (2)$$

the sum over all checker paths s on $\varepsilon\mathbb{Z}^2$ from $(0, 0)$ to (x, t) with the first step to $(\varepsilon, \varepsilon)$. Denote

$$P(x, t, m, \varepsilon) := |a(x, t, m, \varepsilon)|^2, \quad a_1(x, t, m, \varepsilon) := \text{Re } a(x, t, m, \varepsilon), \quad a_2(x, t, m, \varepsilon) := \text{Im } a(x, t, m, \varepsilon).$$

Remark 1. In particular, $P(x, t) = P(x, t, 1, 1)$ and $a(x, t) = a(x, t, 1, 1) = a(x\varepsilon, t\varepsilon, 1/\varepsilon, \varepsilon)$.

One interprets $P(x, t, m, \varepsilon)$ as the probability to find an electron of mass m in the square $\varepsilon \times \varepsilon$ with the center (x, t) , if the electron was emitted from the origin. Notice that the value $m\varepsilon$, hence $P(x, t, m, \varepsilon)$, is dimensionless in the natural units, where $\hbar = c = 1$. In Figure 1 to the middle, the color of a point (x, t) depicts the value $P(x, t, 1, 0.5)$ (if $x + t$ is an integer). Table 4 shows $a(x, t, m, \varepsilon)$ for small x and t . Recently I. Novikov elegantly proved that the probability vanishes nowhere inside the light cone: $P(x, t, m, \varepsilon) \neq 0$ for $m > 0$, $|x| < t$ and even $(x + t)/\varepsilon$ [37, Theorem 1].

4ε	$\frac{m\varepsilon}{(1+m^2\varepsilon^2)^{3/2}}$		$\frac{(m\varepsilon-m^3\varepsilon^3)-m^2\varepsilon^2 i}{(1+m^2\varepsilon^2)^{3/2}}$		$\frac{m\varepsilon-2m^2\varepsilon^2 i}{(1+m^2\varepsilon^2)^{3/2}}$		$\frac{i}{(1+m^2\varepsilon^2)^{3/2}}$
3ε		$\frac{m\varepsilon}{1+m^2\varepsilon^2}$		$\frac{m\varepsilon-m^2\varepsilon^2 i}{1+m^2\varepsilon^2}$		$\frac{i}{(1+m^2\varepsilon^2)}$	
2ε			$\frac{m\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$		$\frac{i}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$		
ε				i			
$t \diagdown x$	-2ε	$-\varepsilon$	0	ε	2ε	3ε	4ε

Table 4: (by I. Novikov [37]) The values $a(x, t, m, \varepsilon)$ for small x and t .

Example 2 (Boundary values). We have $a(t, t, m, \varepsilon) = i(1+m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2}$ and $a(2\varepsilon-t, t, m, \varepsilon) = m\varepsilon(1+m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2}$ for each $t \in \varepsilon\mathbb{Z}$, $t > 0$, and $a(x, t, m, \varepsilon) = 0$ for each $x > t$ or $x \leq -t$.

Example 3 (Massless and heavy particles). For each $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, where $t > 0$, we have

$$P(x, t, 0, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{for } x = t; \\ 0, & \text{for } x \neq t. \end{cases} \quad \text{and} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} P(x, t, m, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{for } x = 0 \text{ or } \varepsilon, \text{ and } \frac{x+t}{\varepsilon} \text{ even;} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let us list known combinatorial properties of the model [50, 30]; see §12.1 for simple proofs.

Proposition 5 (Dirac equation). For each $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, where $t > 0$, we have

$$a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} (a_1(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon) + m\varepsilon a_2(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon)), \quad (3)$$

$$a_2(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} (a_2(x - \varepsilon, t, m, \varepsilon) - m\varepsilon a_1(x - \varepsilon, t, m, \varepsilon)). \quad (4)$$

Remark 2. This equation reproduces Dirac equation (1) in the continuum limit $\varepsilon \rightarrow 0$: for C^2 functions $a_1, a_2: \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying (3)–(4) on $\varepsilon\mathbb{Z}^2$, the left-hand side of (1) is $O_m(\varepsilon \cdot (\|a_1\|_{C^2} + \|a_2\|_{C^2}))$.

Proposition 6 (Probability conservation). For each $t \in \varepsilon\mathbb{Z}$, $t > 0$, we get $\sum_{x \in \varepsilon\mathbb{Z}} P(x, t, m, \varepsilon) = 1$.

Proposition 7 (Klein–Gordon equation). For each $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, where $t > \varepsilon$, we have

$$\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} a(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) + \sqrt{1+m^2\varepsilon^2} a(x, t - \varepsilon, m, \varepsilon) - a(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon) - a(x - \varepsilon, t, m, \varepsilon) = 0.$$

This equation reproduces the Klein–Gordon equation $\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + m^2 a = 0$ in the limit $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proposition 8 (Symmetry). For each $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, where $t > 0$, we have

$$\begin{aligned} a_1(x, t, m, \varepsilon) &= a_1(-x, t, m, \varepsilon), & (t-x) a_2(x, t, m, \varepsilon) &= (t+x-2\varepsilon) a_2(2\varepsilon-x, t, m, \varepsilon), \\ a_1(x, t, m, \varepsilon) &+ m\varepsilon a_2(x, t, m, \varepsilon) &= a_1(2\varepsilon-x, t, m, \varepsilon) &+ m\varepsilon a_2(2\varepsilon-x, t, m, \varepsilon). \end{aligned}$$

Proposition 9 (Huygens' principle). For each $x, t, t' \in \varepsilon\mathbb{Z}$, where $t > t' > 0$, we have

$$\begin{aligned} a_1(x, t, m, \varepsilon) &= \sum_{x' \in \varepsilon\mathbb{Z}} [a_2(x', t', m, \varepsilon) a_1(x - x' + \varepsilon, t - t' + \varepsilon, m, \varepsilon) + a_1(x', t', m, \varepsilon) a_2(x' - x + \varepsilon, t - t' + \varepsilon, m, \varepsilon)], \\ a_2(x, t, m, \varepsilon) &= \sum_{x' \in \varepsilon\mathbb{Z}} [a_2(x', t', m, \varepsilon) a_2(x - x' + \varepsilon, t - t' + \varepsilon, m, \varepsilon) - a_1(x', t', m, \varepsilon) a_1(x' - x + \varepsilon, t - t' + \varepsilon, m, \varepsilon)]. \end{aligned}$$

Informally, Huygens' principle means that each black square (x', t') on one horizontal acts like an independent point source, with the amplitude and phase determined by $a(x', t', m, \varepsilon)$.

Proposition 10 (Equal-time recurrence relation). *For each $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, where $t > 0$, we have*

$$(x + \varepsilon)((x - \varepsilon)^2 - (t - \varepsilon)^2)a_1(x - 2\varepsilon, t, m, \varepsilon) + (x - \varepsilon)((x + \varepsilon)^2 - (t - \varepsilon)^2)a_1(x + 2\varepsilon, t, m, \varepsilon) = \\ = 2x \left((1 + 2m^2\varepsilon^2)(x^2 - \varepsilon^2) - (t - \varepsilon)^2 \right) a_1(x, t, m, \varepsilon), \quad (5)$$

$$x((x - 2\varepsilon)^2 - t^2)a_2(x - 2\varepsilon, t, m, \varepsilon) + (x - 2\varepsilon)(x^2 - (t - 2\varepsilon)^2)a_2(x + 2\varepsilon, t, m, \varepsilon) = \\ = 2(x - \varepsilon) \left((1 + 2m^2\varepsilon^2)(x^2 - 2\varepsilon x) - t^2 + 2\varepsilon t \right) a_2(x, t, m, \varepsilon).$$

This allows to compute $a_1(x, t)$ and $a_2(x, t)$ quickly on far horizontals, starting from $x = 2\varepsilon - t$ and $x = t$ respectively (see Example 2).

Proposition 11 (“Explicit” formula). *For each $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ with $|x| < t$ and $(x + t)/\varepsilon$ even,*

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} \sum_{r=0}^{\frac{t-|x|}{2\varepsilon}} (-1)^r \binom{(x+t)/2\varepsilon - 1}{r} \binom{(t-x)/2\varepsilon - 1}{r} (m\varepsilon)^{2r+1}, \quad (6)$$

$$a_2(x, t, m, \varepsilon) = (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} \sum_{r=1}^{\frac{t-|x|}{2\varepsilon}} (-1)^r \binom{(x+t)/2\varepsilon - 1}{r} \binom{(t-x)/2\varepsilon - 1}{r-1} (m\varepsilon)^{2r}. \quad (7)$$

Remark 3. For each $|x| \geq t$ we have $a(x, t, m, \varepsilon) = 0$ unless $0 < x = t \in \varepsilon\mathbb{Z}$, which gives $a(t, t, m, \varepsilon) = (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} i$. Beware that the proposition is *not* applicable for $|x| \geq t$.

By the definition of Gauss hypergeometric function, we can rewrite the formula as follows:

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = m\varepsilon (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} \cdot {}_2F_1 \left(1 - \frac{x+t}{2\varepsilon}, 1 + \frac{x-t}{2\varepsilon}; 1; -m^2\varepsilon^2 \right), \\ a_2(x, t, m, \varepsilon) = m^2\varepsilon^2 (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} \cdot {}_2F_1 \left(2 - \frac{x+t}{2\varepsilon}, 1 + \frac{x-t}{2\varepsilon}; 2; -m^2\varepsilon^2 \right) \cdot \left(1 - \frac{x+t}{2\varepsilon} \right).$$

This gives a lot of identities. E.g., Gauss contiguous relations connect the values $a(x, t, m, \varepsilon)$ at any 3 neighboring lattice points; cf. Propositions 5 and 10. In terms of the Jacobi polynomials,

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = m\varepsilon (1 + m^2\varepsilon^2)^{(x/\varepsilon-1)/2} P_{(x+t)/2\varepsilon-1}^{(0, -x/\varepsilon)} \left(\frac{1 - m^2\varepsilon^2}{1 + m^2\varepsilon^2} \right), \\ a_2(x, t, m, \varepsilon) = -m^2\varepsilon^2 (1 + m^2\varepsilon^2)^{(x/\varepsilon-3)/2} P_{(x+t)/2\varepsilon-2}^{(1, 1-x/\varepsilon)} \left(\frac{1 - m^2\varepsilon^2}{1 + m^2\varepsilon^2} \right).$$

There is a similar expression through Kravchuk polynomials (cf. Proposition 4). In terms of Stanley character polynomials (defined in [48, §2]),

$$a_2(0, t, m, \varepsilon) = (-1)^{t/2\varepsilon-1} (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} \left(\frac{t}{2\varepsilon} - 1 \right) G_{t/2\varepsilon-1}(1; m^2\varepsilon^2).$$

Proposition 12 (Fourier integral). *Set $\omega_p := \frac{1}{\varepsilon} \arccos(\frac{\cos p\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}})$. Then for each $m > 0$ and $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ such that $t > 0$ and $(x + t)/\varepsilon$ is even we have*

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = \frac{im\varepsilon^2}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{ipx - i\omega_p(t-\varepsilon)}}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} dp, \\ a_2(x, t, m, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \left(1 + \frac{\sin(p\varepsilon)}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} \right) e^{ip(x-\varepsilon) - i\omega_p(t-\varepsilon)} dp.$$

Fourier integral represents a wave emitted by a point source as a superposition of waves of wavelength $2\pi/p$ and frequency ω_p .

Proposition 13 (Full space-time Fourier transform). Denote $\delta_{x\varepsilon} := 1$, if $x = \varepsilon$, and $\delta_{x\varepsilon} := 0$, if $x \neq \varepsilon$. For each $m > 0$ and $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ such that $t > 0$ and $(x + t)/\varepsilon$ is even we get

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{m\varepsilon^3}{4\pi^2} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{ipx - i\omega(t-\varepsilon)} d\omega dp}{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} \cos(\omega\varepsilon) - \cos(p\varepsilon) - i\delta},$$

$$a_2(x, t, m, \varepsilon) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{-i\varepsilon^2}{4\pi^2} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} \sin(\omega\varepsilon) + \sin(p\varepsilon)}{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} \cos(\omega\varepsilon) - \cos(p\varepsilon) - i\delta} e^{ip(x-\varepsilon) - i\omega(t-\varepsilon)} d\omega dp + \delta_{x\varepsilon} \delta_{t\varepsilon}.$$

3.2 Asymptotic formulae

Large-time limit. (See Figure 12) For fixed m, ε , and large time t , the function $a(x, t, m, \varepsilon)$

- (A) oscillates in the interval between the (approximate) peaks $x = \pm \frac{t}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$ (see Theorem 2);
- (B) is approximated by the Airy function around the peaks (see Theorem 3);
- (C) exponentially decays outside the interval bounded by the peaks (see Theorem 4).

We start with discussing regime (A). Let us state our main theorem: an analytic approximation of $a(x, t, m, \varepsilon)$, which is very accurate between the peaks not too close to them (see Figure 12 to the left).

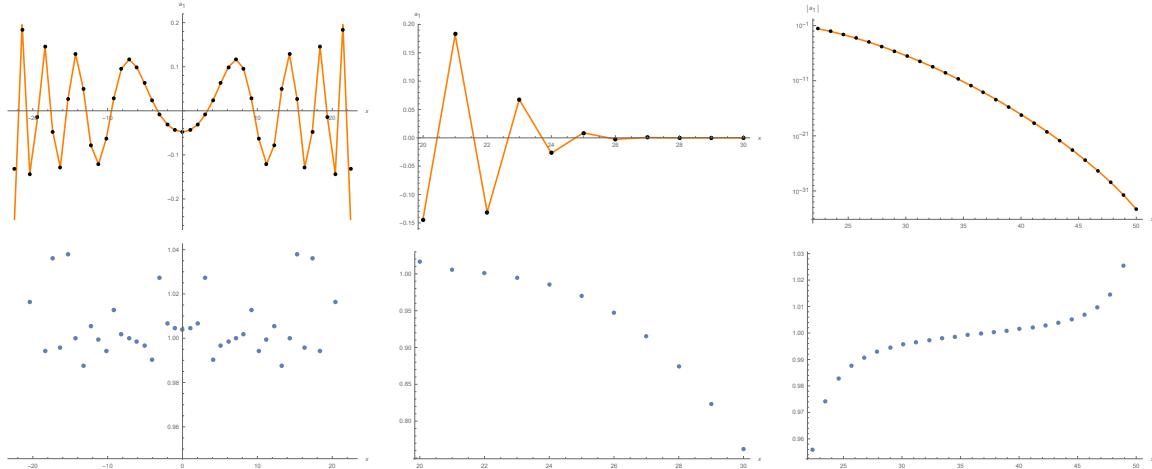


Figure 12: Graphs of $a_1(x, 50, 4, 0.5)$ (top, dots), its analytic approximation (top, curves) given by Theorems 2 (left), 3 (middle), and 4 (right), their ratio (bottom). The top-right graph depicts the absolute value of the functions in the logarithmic scale

Theorem 2 (Large-time asymptotic formula between the peaks; see Figure 12 to the left). For each $\delta > 0$ there is $C_\delta > 0$ such that for each $m, \varepsilon > 0$ and each $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ satisfying

$$|x|/t < 1/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} - \delta, \quad \varepsilon \leq 1/m, \quad t > C_\delta/m, \quad (8)$$

we have

$$a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi}} (t^2 - (1 + m^2\varepsilon^2)x^2)^{-1/4} \sin \theta(x, t, m, \varepsilon) + O_\delta \left(\frac{\varepsilon}{m^{1/2}t^{3/2}} \right), \quad (9)$$

$$a_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi}} (t^2 - (1 + m^2\varepsilon^2)x^2)^{-1/4} \sqrt{\frac{t+x}{t-x}} \cos \theta(x, t, m, \varepsilon) + O_\delta \left(\frac{\varepsilon}{m^{1/2}t^{3/2}} \right), \quad (10)$$

for $(x + t)/\varepsilon$ odd and even respectively, where

$$\theta(x, t, m, \varepsilon) := \frac{t}{\varepsilon} \arcsin \frac{m\varepsilon t}{\sqrt{(1 + m^2\varepsilon^2)(t^2 - x^2)}} - \frac{x}{\varepsilon} \arcsin \frac{m\varepsilon x}{\sqrt{t^2 - x^2}} + \frac{\pi}{4}. \quad (11)$$

Hereafter the notation $f(x, t, m, \varepsilon) = g(x, t, m, \varepsilon) + O_\delta(h(x, t, m, \varepsilon))$ means that there is a constant $C(\delta)$ (depending on δ but *not* on x, t, m, ε) such that for each $x, t, m, \varepsilon, \delta$ satisfying the assumptions of the theorem we have $|f(x, t, m, \varepsilon) - g(x, t, m, \varepsilon)| \leq C(\delta) h(x, t, m, \varepsilon)$.

The main terms in Theorem 2 were first computed in [1, Theorem 2] in the particular case $m = \varepsilon = 1$. The error terms were estimated in [47, Proposition 2.2]; that estimate had the same order in t but was *not* uniform in m and ε (and *cannot* be uniform as it stands, otherwise one would get a contradiction with Corollary 6 as $\varepsilon \rightarrow 0$). Getting uniform estimate (9)–(10) has required a refined version of the stationary phase method and additional Steps 3–4 of the proof (see §12.3). Different approaches (Darboux asymptotic formula for Legendre polynomials and Hardy–Littlewood circle method) were used in [6, Theorem 3] and [45, Theorem 2] to get (9) in the particular case $x = 0$ and a rougher approximation for x close to 0 respectively.

Theorem 2 has several interesting corollaries. First, it allows to pass to the large-time distributional limit (see Figure 10). Compared to Theorem 1, it provides convergence in a stronger sense, not immediately accessible by the method of moments and by [47, Theorem 1.1].

Corollary 1 (Large-time limiting distribution). *For each $m > 0$ and $\varepsilon \leq 1/m$ we have*

$$\sum_{\substack{x \leq vt \\ x \in \varepsilon \mathbb{Z}}} P(x, t, m, \varepsilon) \Rightarrow F(v, m, \varepsilon) := \begin{cases} 0, & \text{if } v \leq -1/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}; \\ \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1-(1+m^2\varepsilon^2)v}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}(1-v)}, & \text{if } |v| < 1/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}; \\ 1, & \text{if } v \geq 1/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \end{cases}$$

as $t \rightarrow \infty$, $t \in \varepsilon \mathbb{Z}$, uniformly in v .

Recall that all our results can be stated in terms of Young diagrams or Jacobi polynomials.

Corollary 2 (Steps of Young diagrams; see Figure 11). *Denote by $n_+(h \times w)$ and $n_-(h \times w)$ the number of Young diagrams with exactly h rows and w columns, having an even and an odd number of steps (defined in page 10) respectively. Then for almost every $r > 1$ we have*

$$\limsup_{w \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{w}}{2^{(r+1)w/2}} |n_+(\lceil rw \rceil \times w) - n_-(\lceil rw \rceil \times w)| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (6r - r^2 - 1)^{-1/4}, & \text{if } r < 3 + 2\sqrt{2}; \\ 0, & \text{if } r > 3 + 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

For the regimes (B) and (C) around and outside the peaks, we state two theorems by Sunada–Tate without discussing the proofs in detail. (To be precise, the main terms in literature [1, Theorem 2], [47, Propositions 2.2, 3.1, 4.1] are slightly different from (9), (13), (17); but that difference is within the error term. Practically, the latter three approximations are better by several orders of magnitude.)

Regime (B) around the peaks is described by the *Airy function*

$$\text{Ai}(\lambda) := \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \left(\lambda p + \frac{p^3}{3} \right) dp.$$

Theorem 3 (Large-time asymptotic formula around the peaks; see Figure 12 to the middle). [47, Proposition 3.1] *For each $m, \varepsilon, \Delta > 0$ and each sequence $(x_n, t_n) \in \varepsilon \mathbb{Z}^2$ satisfying*

$$|x_n/t_n - 1/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}| < \Delta t_n^{-2/3}, \quad t_n = n\varepsilon, \tag{12}$$

we have

$$a_1(\pm x_n, t_n + \varepsilon, m, \varepsilon) = (-1)^{\frac{t_n-x_n-\varepsilon}{2\varepsilon}} m\varepsilon \left(\frac{2}{m^2\varepsilon t_n} \right)^{1/3} \text{Ai}(\Delta(x_n, t_n, m, \varepsilon)) + O_{m,\varepsilon,\{x_n\}}(n^{-2/3}), \tag{13}$$

$$a_2(\pm x_n + \varepsilon, t_n + \varepsilon, m, \varepsilon) = (-1)^{\frac{t_n-x_n}{2\varepsilon}} \left(\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \pm 1 \right) \left(\frac{2}{m^2\varepsilon t_n} \right)^{1/3} \text{Ai}(\Delta(x_n, t_n, m, \varepsilon)) + O_{m,\varepsilon,\{x_n\}}(n^{-2/3}) \tag{14}$$

for $(x_n + t_n)/\varepsilon$ odd and even respectively, where the signs \pm agree and

$$\Delta(x_n, t_n, m, \varepsilon) := \left(\frac{2}{m^2\varepsilon t_n} \right)^{1/3} \frac{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} x_n - t_n}{\varepsilon}. \tag{15}$$

We write $f(x_n, t_n, m, \varepsilon) = O_{m, \varepsilon, \{x_n\}}(g(n))$, if there is a constant $C(m, \varepsilon, \{x_n\})$ (depending on m, ε , and the whole sequence $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ but *not* on n) such that for each n we have $|f(x_n, t_n, m, \varepsilon)| \leq C(m, \varepsilon, \{x_n\})g(n)$.

Recently P. Zakorko has extended (13)–(14) to a larger neighborhood of the peak [52].

Exponential decay outside the peaks was stated without proof in [1, Theorem 1]. A proof appeared only a decade later, when the following asymptotic formula was established.

Theorem 4 (Large-time asymptotic formula outside the peaks; see Figure 12 to the right). [47, Proposition 4.1] *For each $m, \varepsilon, \Delta > 0$, $v \in (-1; 1)$ and each sequence $(x_n, t_n) \in \varepsilon \mathbb{Z}^2$ satisfying*

$$1/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} < |v| < 1, \quad |x_n - vt_n| < \Delta, \quad t_n = n\varepsilon, \quad (16)$$

we have

$$\begin{aligned} a_1(x_n, t_n + \varepsilon, m, \varepsilon) &= \varepsilon \sqrt{\frac{m}{2\pi t_n}} \frac{(-1)^{(t_n - |x_n| - \varepsilon)/2\varepsilon}}{((1 + m^2\varepsilon^2)v^2 - 1)^{1/4}} \\ &\cdot \exp\left(-\frac{t_n}{2\varepsilon} H\left(\frac{x_n}{t_n}, m, \varepsilon\right)\right) \left(1 + O_{m, \varepsilon, \{x_n\}}\left(\frac{1}{n}\right)\right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} a_2(x_n + \varepsilon, t_n + \varepsilon, m, \varepsilon) &= \varepsilon \sqrt{\frac{m}{2\pi t_n}} \frac{(-1)^{(t_n - |x_n|)/2\varepsilon}}{((1 + m^2\varepsilon^2)v^2 - 1)^{1/4}} \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \\ &\cdot \exp\left(-\frac{t_n}{2\varepsilon} H\left(\frac{x_n}{t_n}, m, \varepsilon\right)\right) \left(1 + O_{m, \varepsilon, \{x_n\}}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned} \quad (18)$$

for $(x_n + t_n)/\varepsilon$ odd and even respectively, where

$$H(v, m, \varepsilon) := -2 \operatorname{arccosh} \frac{m\varepsilon}{\sqrt{(1+m^2\varepsilon^2)(1-v^2)}} + 2|v| \operatorname{arccosh} \frac{m\varepsilon|v|}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (19)$$

Function (19) is positive and convex in v in the region $\frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} < |v| < 1$ [47, Theorem 1.4].

Corollary 3 (Limiting free energy density; see Figure 5 to the middle). *For each $m, \varepsilon > 0$, $v \in (-1; 1)$, and $H(v, m, \varepsilon)$ given by (19) we have*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \in 2\varepsilon \mathbb{Z}}} \frac{1}{t} \log P\left(2\varepsilon \left\lceil \frac{vt}{2\varepsilon} \right\rceil, t, m, \varepsilon\right) = \begin{cases} -H(v, m, \varepsilon)/\varepsilon, & \text{if } |v| > 1/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}; \\ 0, & \text{if } |v| < 1/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}. \end{cases}$$

This means phase transition in the Ising model in a strong sense: the limiting free energy density (with the imaginary part proportional to the left side) is nonanalytic in v .

Feynman triple limit. Theorem 2 allows to pass to the limit $(1/t, x/t, \varepsilon) \rightarrow 0$ as follows.

Corollary 4 (Simpler and rougher asymptotic formula between the peaks). *Under the assumptions of Theorem 2 we have*

$$a(x, t, m, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi t}} \exp\left(-im\sqrt{t^2 - x^2} + \frac{i\pi}{4}\right) \left(1 + O_\delta\left(\frac{1}{mt} + \frac{|x|}{t} + m^3\varepsilon^2 t\right)\right). \quad (20)$$

Corollary 5 (Feynman triple limit; see Figure 3). *For each $m \geq 0$ and each sequence $(x_n, t_n, \varepsilon_n)$ such that $(x_n, t_n) \in \varepsilon_n \mathbb{Z}^2$, $(x_n + t_n)/\varepsilon_n$ is even, and*

$$1/t_n, \quad x_n/t_n^{3/4}, \quad \varepsilon_n t_n^{1/2} \quad \rightarrow \quad 0 \quad \text{as} \quad n \rightarrow \infty, \quad (21)$$

we have the equivalence

$$\frac{1}{2i\varepsilon_n} a(x_n, t_n, m, \varepsilon_n) \sim \sqrt{\frac{m}{2\pi t_n}} \exp\left(-imt_n - \frac{i\pi}{4} + \frac{imx_n^2}{2t_n}\right) \quad \text{as} \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

For equivalence (22), assumptions (21) are essential and sharp, as the next example shows.

Example 4. Equivalence (22) holds for neither $(x_n, t_n, \varepsilon_n) = (n^3, n^4, 1/n^4)$ nor $(0, 4n^2, 1/2n)$ nor $(0, 2n\varepsilon, \varepsilon)$, where $\varepsilon = \text{const} < 1/m$: the limit of the ratio of the left and the right side equals $e^{im/8}$, $e^{im^3/3}$, and does not exist respectively, rather than equals 1. (The absence of the latter limit confirms that tending ε to 0 was understood in the Feynman problem.)

Corollary 5 solves the Feynman problem (and moreover corrects the statement, by revealing the required sharp assumptions). The main difficulty here is that it concerns *triple* rather than *iterated* limit. We are not aware of any approach which could solve the problem without proving the whole Theorem 2. E.g., the Darboux asymptotic formula for the Jacobi polynomials (see Remark 3) is suitable for the iterated limit when first $t \rightarrow +\infty$, then $\varepsilon \rightarrow 0$, giving a (weaker) result already independent on x . Neither the Darboux nor Mehler–Heine nor more recent asymptotic formulae [32] are applicable when $1/m\varepsilon$ or x/ε is unbounded. The same concerns [47, Proposition 2.2] because the error estimate there is not uniform in m and ε . Conversely, the next theorem is suitable for the iterated limit when first $\varepsilon \rightarrow 0$, then $x/t \rightarrow 0$, then $t \rightarrow +\infty$, but not for the triple limit because the error term blows up as $t \rightarrow +\infty$.

Continuum limit. The limit $\varepsilon \rightarrow 0$ is described by the *Bessel functions of the first kind*:

$$J_0(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2}, \quad J_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}.$$

Theorem 5 (Asymptotic formula in the continuum limit). *For each $m, \varepsilon, \delta > 0$ and $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ such that $(x+t)/\varepsilon$ even, $t - |x| \geq \delta$, and $\varepsilon < \delta e^{-3ms}/16$, where $s := \sqrt{t^2 - x^2}$, we have*

$$a(x, t, m, \varepsilon) = m\varepsilon \left(J_0(ms) - i \frac{t+x}{s} J_1(ms) + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta} \log^2 \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot e^{m^2 t^2}\right)\right).$$

Recall that $f(x, t, m, \varepsilon) = O(g(x, t, m, \varepsilon))$ means that there is a constant C (not depending on x, t, m, ε) such that for each x, t, m, ε satisfying the assumptions of the theorem we have $|f(x, t, m, \varepsilon)| \leq C g(x, t, m, \varepsilon)$.

The main term in Theorem 5 was computed in [36, §1]. Numerical experiment shows that the error term decreases faster than asserted (see Table 5 computed in [44, §14]).

In the next corollary, we approximate a fixed point (x, t) in the plane by the lattice point $(2\varepsilon \lceil \frac{x}{2\varepsilon} \rceil, 2\varepsilon \lceil \frac{t}{2\varepsilon} \rceil)$ (see Figure 4). The factors of 2 make the latter accessible for the checker.

Corollary 6 (Uniform continuum limit; see Figure 4). *For each fixed $m \geq 0$ we have*

$$\frac{1}{2\varepsilon} a\left(2\varepsilon \left\lceil \frac{x}{2\varepsilon} \right\rceil, 2\varepsilon \left\lceil \frac{t}{2\varepsilon} \right\rceil, m, \varepsilon\right) \Rightarrow \frac{m}{2} J_0(m\sqrt{t^2 - x^2}) - i \frac{m}{2} \sqrt{\frac{t+x}{t-x}} J_1(m\sqrt{t^2 - x^2}) \quad (23)$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformly on compact subsets of the angle $|x| < t$.

The proof of *pointwise* convergence is simpler and is presented in Appendix B.

Corollary 7 (Concentration of measure). *For each $t, m, \delta > 0$ we have*

$$\sum_{x \in \varepsilon\mathbb{Z}: 0 \leq t - |x| \leq \delta} P(x, t, m, \varepsilon) \rightarrow 1 \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{so that } \frac{t}{2\varepsilon} \in \mathbb{Z}.$$

This result, although expected, is not found in literature. An elementary proof is given in §12.6. We remark a sharp contrast between the continuum and the large-time limit here: by Corollary 1, there is *no* concentration of measure as $t \rightarrow \infty$ for fixed ε .

ε	$5\varepsilon \log_{10}^2(5\varepsilon)$	$\max_{x \in (-0.8, 0.8) \cap 2\varepsilon\mathbb{Z}} \frac{1}{2\varepsilon}a(x, 1, 10, \varepsilon) - G_{11}^R(x, 1) - iG_{12}^R(x, 1) $
0.02	0.1	1.1
0.002	0.04	0.06
0.0002	0.009	0.006

Table 5: Approximation of spin-1/2 retarded propagator (26) by Feynman checkers ($m = 10$, $\delta = 0.2$, $t = 1$)

3.3 Physical interpretation

Let us discuss the meaning of the Feynman triple limit and the continuum limit. In this subsection we omit some technical definitions not used in the sequel.

The right side of (22) is up to the factor e^{-imt_n} the *free-particle kernel*

$$K(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi t}} \exp\left(\frac{imx^2}{2t} - \frac{i\pi}{4}\right), \quad (24)$$

describing the motion of a non-relativistic particle emitted from the origin along a line.

Limit (23) reproduces the spin-1/2 retarded propagator describing motion of an electron along a line. More precisely, the *spin-1/2 retarded propagator*, or the *retarded Green function for Dirac equation* (1) is a matrix-valued tempered distribution $G^R(x, t) = (G_{kl}^R(x, t))$ on \mathbb{R}^2 vanishing for $t < |x|$ and satisfying

$$\begin{pmatrix} m & \partial/\partial x - \partial/\partial t \\ \partial/\partial x + \partial/\partial t & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11}^R(x, t) & G_{12}^R(x, t) \\ G_{21}^R(x, t) & G_{22}^R(x, t) \end{pmatrix} = \delta(x)\delta(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

where $\delta(x)$ is the Dirac delta function. The propagator is given by (cf. [23, (13)], [42, (3.117)])

$$G^R(x, t) = \frac{m}{2} \begin{pmatrix} J_0(m\sqrt{t^2 - x^2}) & -\sqrt{\frac{t+x}{t-x}} J_1(m\sqrt{t^2 - x^2}) \\ \sqrt{\frac{t-x}{t+x}} J_1(m\sqrt{t^2 - x^2}) & J_0(m\sqrt{t^2 - x^2}) \end{pmatrix} \quad \text{for } |x| < t. \quad (26)$$

In addition, $G^R(x, t)$ involves a generalized function supported on the lines $t = \pm x$, not observed in the limit (23) and not specified here. A more common expression is (cf. Proposition 13)

$$G^R(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\delta \rightarrow +0} \begin{pmatrix} m & -ip - i\omega \\ -ip + i\omega & m \end{pmatrix} \frac{e^{ipx - i\omega t} dp d\omega}{m^2 + p^2 - (\omega + i\delta)^2}, \quad (27)$$

where the limit is taken in the weak topology of matrix-valued tempered distributions and the integral is understood as the Fourier transform of tempered distributions (cf. [14, (6.47)]).

The propagator “square” $G_{11}^R(x, t)^2 + G_{12}^R(x, t)^2$ is ill-defined (because of the square of the Dirac delta-function supported on the lines $t = \pm x$ involved). Thus the propagator lacks probabilistic interpretation, and global charge conservation (Proposition 6) has no continuum analogue. For instance, $\int_{(-t, t)} (G_{11}^R(x, t)^2 + G_{12}^R(x, t)^2) dx \approx m^2 t / 2 \neq \text{const}$ paradoxically. A physical explanation: the line $t = x$ carries infinite charge flowing inside the angle $|x| < t$. One can interpret the propagator “square” for $|x| \neq t$ as a relative probability density or charge density (see Figure 1 to the right). In the spin-chain interpretation, the propagator is the limit of the partition function for one-dimensional Ising model at the inverse temperature $\beta = i\pi/4 - \log(m\varepsilon)/2$. Those are essentially the values of β for which phase transition is possible [35].

The normalization factor $1/2\varepsilon$ before “ a ” in (23) can be explained as division by the length associated to one black lattice point on a horizontal line. On a deeper level, it comes from the normalization of $G^R(x, t)$ arising from (25).

Theorem 5 is a toy result in *algorithmic quantum field theory*: it determines the lattice step to compute the propagator with given accuracy. So far this is not a big deal, because the propagator has a known analytic expression and is not really experimentally-measurable; neither the efficiency of the algorithm is taken into account. But that is a first step.

Algorithm 1 (Approximation algorithm for spin-1/2 retarded propagator (26)). Input: mass $m > 0$, coordinates $|x| < t$, accuracy level Δ .

Output: an approximate value G_{kl} of $G_{kl}^R(x, t)$ within distance Δ from the true value (26).

Algorithm: compute $G_{kl} = \frac{(-1)^{(k-1)l}}{2\varepsilon} a_{(k+l) \bmod 2+1} \left(2\varepsilon \left\lceil \frac{(-1)^{(k-1)l} x}{2\varepsilon} \right\rceil, 2\varepsilon \left\lceil \frac{t}{2\varepsilon} \right\rceil, m, \varepsilon \right)$ by (2) for

$$\varepsilon = (t - |x|) \min \left\{ \frac{1}{16 e^{3mt}}, \left(\frac{\Delta}{9C m e^{m^2 t^2}} \right)^3 \right\}, \quad \text{where } C = 100.$$

Here we used an explicit estimate for the constant C understood in the big-O notation in Theorem 5; it is easily extracted from the proof. The theorem and the estimate remain true, if $a(x, t, m, \varepsilon)$ with $(x, t) \in \varepsilon \mathbb{Z}^2$ is replaced by $a(2\varepsilon \lceil \frac{x}{2\varepsilon} \rceil, 2\varepsilon \lceil \frac{t}{2\varepsilon} \rceil, m, \varepsilon)$ with arbitrary $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

Remark 4. A general (homogeneous) *one-dimensional quantum walk* essentially reduces to the upgrade studied in this section. Namely, consider the equation

$$\begin{aligned} \psi_1(x, t+1) &= a \psi_1(x+1, t) + b \psi_2(x+1, t), \\ \psi_2(x, t+1) &= -\bar{b} \psi_1(x-1, t) + \bar{a} \psi_2(x-1, t); \end{aligned}$$

where $a, b \in \mathbb{C} - \{0\}$ and $|a|^2 + |b|^2 = 1$, with the initial condition $\psi_1(x, 0) = \psi_2(x, 0) = 0$ for each $x \neq 0$ [47, §1]. By direct checking using (3)–(4) one finds the solution:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, t) &= \left(\frac{a}{|a|} \right)^{-x} \left(\frac{|a|b}{a|b|} a_1 \left(x+1, t+1, \left| \frac{b}{a} \right|, 1 \right) \psi_2(0, 0) + a_2 \left(1-x, t+1, \left| \frac{b}{a} \right|, 1 \right) \psi_1(0, 0) \right), \\ \psi_2(x, t) &= \left(\frac{a}{|a|} \right)^{-x} \left(a_2 \left(x+1, t+1, \left| \frac{b}{a} \right|, 1 \right) \psi_2(0, 0) - \frac{a|b|}{|a|b} a_1 \left(1-x, t+1, \left| \frac{b}{a} \right|, 1 \right) \psi_1(0, 0) \right). \end{aligned}$$

4 Spin

Question: what is the probability to find a right electron at (x, t) , if a right electron was emitted from $(0, 0)$?

Assumptions: electron chirality is now taken into account.

Results: the probability of chirality flip.

A feature of the model is that the electron *spin* emerges naturally rather than is added artificially.

It goes almost without saying to view the electron as being in one of the two states depending on the last-move direction: *right-moving* or *left-moving* (or just ‘right’ or ‘left’ for brevity).

The *probability to find a right electron in the square (x, t) , if a right electron was emitted from the square $(0, 0)$* , is the length square of the vector $\sum_s a(s)$, where the sum is over only those paths from $(0, 0)$ to (x, t) , which both start and finish with an upwards-right move. The *probability to find a left electron* is defined analogously, only the sum is taken over paths which start with an upwards-right move but finish with an upwards-left move. Clearly, these probabilities equal $a_2(x, t)^2$ and $a_1(x, t)^2$ respectively, because the last move is directed upwards-right if and only if the number of turns is even.

These right and left electrons are exactly the $(1+1)$ -dimensional analogue of *chirality* states for a spin 1/2 particle [42, §19.1]. Indeed, it is known that the components $a_2(x, t)$ and $a_1(x, t)$ in Dirac equation in the Weyl basis (1) are interpreted as wave functions of right- and left-handed particles respectively. The relation to the movement direction becomes transparent for $m = 0$: then a general solution of (1) is $(a_2(x, t), a_1(x, t)) = (a_2(x-t, 0), a_1(x+t, 0))$; thus the maxima of $a_2(x, t)$ and $a_1(x, t)$ (if any) move to the right and to the left respectively as t increases. Beware that in 3 or more dimensions, spin is *not* the movement direction and cannot be explained in nonquantum terms.

This gives a more conceptual interpretation of the model: an experiment outcome is a pair (final x -coordinate, last-move direction), whereas the final t -coordinate is fixed. The probabilities to find a right/left electron are the fundamental ones. In further upgrades, $a_1(x, t)$ and $a_2(x, t)$ become complex numbers and $P(x, t)$ should be *defined* as $|a_1(x, t)|^2 + |a_2(x, t)|^2$ rather than by the above formula $P(x, t) = |a(x, t)|^2 = |a_1(x, t) + i a_2(x, t)|^2$, being a coincidence.

Theorem 6 (Probability of chirality flip). For integer $t > 0$ we get $\sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, t)^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

See Figure 13 for an illustration and comparison with the upgrade from §5. The physical interpretation of the theorem is limited: in continuum theory, the probability of chirality flip (for an electron emitted by a point source) is ill-defined similarly to the propagator “square” (see §3.3). A related more reasonable quantity is studied in [23, p. 381] (cf. Problem 5). Recently I. Bogdanov has generalized the theorem to an arbitrary mass and lattice step (see Definition 2): if $0 \leq m\varepsilon \leq 1$ then $\lim_{t \rightarrow +\infty, t \in \mathbb{Z}} \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, t, m, \varepsilon)^2 = \frac{m\varepsilon}{2\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$ [6, Theorem 2]. This has confirmed a conjecture by I. Gaidai-Turlov–T. Kovalev–A. Lvov.

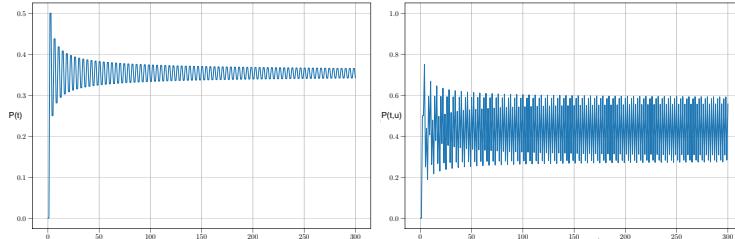


Figure 13: The graphs of the probabilities $P(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, t)^2$ and $P(t, u) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, t, u)^2$ of chirality flip with electromagnetic field off and on respectively

5 External field (inhomogeneous quantum walk)

Question: what is the probability to find an electron at (x, t) , if it moves in a given electromagnetic field u ?

Assumptions: the electromagnetic field vanishes outside the xt -plane; it is not affected by the electron.

Results: “spin precession” in a magnetic field (qualitative explanation), charge conservation.

Another feature of the model is that external electromagnetic field emerges naturally rather than is added artificially. We start with an informal definition, then give a precise one, and finally show exact charge conservation.

In the basic model, the stopwatch hand did not rotate while the checker moved straightly. It goes without saying to modify the model, rotating the hand uniformly during the motion. This does not change the model essentially: since all the paths from the initial to the final position have the same length, their vectors are rotated through the same angle, not affecting probabilities. A more interesting modification is when the current rotation angle depends on the checker position. This is exactly what electromagnetic field does. In what follows, the rotation angle assumes only the two values 0° and 180° for simplicity, meaning just multiplication by ± 1 .

Thus an electromagnetic field is viewed as a fixed assignment u of numbers $+1$ and -1 to all the vertices of the squares. For instance, in Figure 14, the field equals -1 at the top-right vertex of each square (x, t) with both x and t even. Modify the definition of the vector $a(s)$ by reversing the direction each time when the checker passes through a vertex with the field -1 . Denote by $a(s, u)$ the resulting vector. Define $a(x, t, u)$ and $P(x, t, u)$ analogously to $a(x, t)$ and $P(x, t)$ replacing $a(s)$ by $a(s, u)$ in the definition. For instance, if $u = +1$ identically, then $P(x, t, u) = P(x, t)$.

Let us slightly rephrase this construction, making the relation to lattice gauge theory more transparent. We introduce an auxiliary grid with the vertices at the centers of black squares (see Figure 11 to the right). It is the graph where the checker actually moves.

Definition 3. An *auxiliary edge* is a segment joining nearest-neighbor integer points with even sum of coordinates. Let u be a map from the set of all auxiliary edges to $\{+1, -1\}$. Denote by

$$a(x, t, u) := 2^{(1-t)/2} i \sum_s (-i)^{\text{turns}(s)} u(s_0 s_1) u(s_1 s_2) \dots u(s_{t-1} s_t)$$

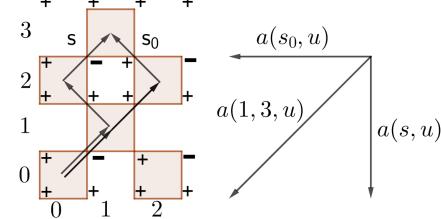


Figure 14: Paths in a field

the sum over all checker paths $s = (s_0, s_1, \dots, s_t)$ with $s_0 = (0, 0)$, $s_1 = (1, 1)$, and $s_t = (x, t)$. Set $P(x, t, u) := |a(x, t, u)|^2$. Define $a_1(x, t, u)$ and $a_2(x, t, u)$ analogously to $a(x, t, u)$, only add the condition $s_{t-1} = (x+1, t-1)$ and $s_{t-1} = (x-1, t-1)$ respectively. For half-integers x, t denote by $u(x, t)$ the value of u on the auxiliary edge with the midpoint (x, t) .

Remark 5. Here the field u is a fixed external classical field not affected by the electron.

This definition is analogous to one of the first constructions of gauge theory by Weyl–Fock–London, and gives a coupling of Feynman checkers to the Wegner–Wilson $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ lattice gauge theory. In particular, it reproduces the correct spin 1 for the electromagnetic field: a function defined on the set of edges is a discrete analogue of a *vector* field, i.e., a *spin* 1 field. Although this way of coupling is classical, it has never been explicitly applied to Feynman checkers (cf. [16, p. 36]), and is very different from both the approach of [38] and Feynman-diagram intuition [11].

For instance, the field u in Figure 14 has form $u(s_1 s_2) = \exp\left(-i \int_{s_1}^{s_2} (A_0 dt + A_1 dx)\right)$ for each auxiliary edge $s_1 s_2$, where $(A_0, A_1) := (\pi/2)(x+1/2, x+1/2)$ is the vector-potential of a constant homogeneous electromagnetic field.

For an arbitrary *gauge group*, $a_1(x, t, u)$ and $a_2(x, t, u)$ are defined analogously, only u becomes a map from the set of auxiliary edges to a matrix group, e.g., $U(1)$ or $SU(n)$. Then $P(x, t, u) := \sum_k (|a_1(x, t, u))_{k1}|^2 + |(a_2(x, t, u))_{k1}|^2$, where $(a_j)_{kl}$ are the entries of a matrix a_j .

Example 5 (“Spin precession” in a magnetic field). Let $u(x+1/2, t+1/2) = -1$, if x and t are even, and $u(x+1/2, t+1/2) = +1$ otherwise (“constant homogeneous field”; see Figure 14). Then the probability $P(t, u) := \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, t, u)^2$ of detecting a left electron (see §4) is plotted in Figure 13 to the right. It apparently tends to a “periodic regime” as $t \rightarrow \infty$ (see Problem 11).

The following propositions are proved analogously to Propositions 5–6, only a factor of $u(x \pm \frac{1}{2}, t \pm \frac{1}{2})$ is added due to the last step of the path passing through the vertex $(x \pm \frac{1}{2}, t \pm \frac{1}{2})$.

Proposition 14 (Dirac equation in electromagnetic field). For each integers x and $t \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_1(x, t+1, u) &= \frac{1}{\sqrt{2}} u \left(x + \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2} \right) (a_1(x+1, t, u) + a_2(x+1, t, u)), \\ a_2(x, t+1, u) &= \frac{1}{\sqrt{2}} u \left(x - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2} \right) (a_2(x-1, t, u) - a_1(x-1, t, u)). \end{aligned}$$

Proposition 15 (Probability/charge conservation). For each integer $t \geq 1$, $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, t, u) = 1$.

Recently F. Ozhegov has found analogues of the “explicit” formula (Proposition 18) and the continuum limit (Corollary 6) for the “homogeneous field” in Example 5 [40, Theorems 3–4].

6 Source

Question: what is the probability to find an electron at (x, t) , if it was emitted by a source of wavelength λ ?
Assumptions: the source is now realistic.

Results: wave propagation, dispersion relation.

A realistic source produces a wave rather than electrons localized at $x = 0$ (as in the basic model). This means solving Dirac equation (3)–(4) with *(quasi-)periodic initial conditions*.

To state the result, it is convenient to rewrite Dirac equation (3)–(4) using the notation

$$\tilde{a}_1(x, t) = a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon), \quad \tilde{a}_2(x, t) = a_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon),$$

so that it gets form

$$\tilde{a}_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} (\tilde{a}_1(x+\varepsilon, t-\varepsilon) + m\varepsilon \tilde{a}_2(x, t-\varepsilon)), \tag{28}$$

$$\tilde{a}_2(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} (\tilde{a}_2(x-\varepsilon, t-\varepsilon) - m\varepsilon \tilde{a}_1(x, t-\varepsilon)). \tag{29}$$

The following proposition is proved by direct checking (available in [44, §12]).

Proposition 16 (Wave propagation, dispersion relation). *Equations (28)–(29) with the initial condition*

$$\tilde{a}_1(x, 0) = \tilde{a}_1(0, 0)e^{2\pi ix/\lambda},$$

$$\tilde{a}_2(x, 0) = \tilde{a}_2(0, 0)e^{2\pi ix/\lambda};$$

have the unique solution

$$\tilde{a}_1(x, t) = a \cos \frac{\alpha}{2} e^{2\pi i(x/\lambda + t/T)} + b \sin \frac{\alpha}{2} e^{2\pi i(x/\lambda - t/T)}, \quad (30)$$

$$\tilde{a}_2(x, t) = ia \sin \frac{\alpha}{2} e^{2\pi i(x/\lambda + t/T)} - ib \cos \frac{\alpha}{2} e^{2\pi i(x/\lambda - t/T)}, \quad (31)$$

where the numbers $T \geq 2$, $\alpha \in [0, \pi]$, and $a, b \in \mathbb{C}$ are given by

$$\cos(2\pi\varepsilon/T) = \frac{\cos(2\pi\varepsilon/\lambda)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}, \quad \cot\alpha = \frac{\sin(2\pi\varepsilon/\lambda)}{m\varepsilon}, \quad a = \tilde{a}_1(0, 0) \cos \frac{\alpha}{2} - i\tilde{a}_2(0, 0) \sin \frac{\alpha}{2}, \\ b = \tilde{a}_1(0, 0) \sin \frac{\alpha}{2} + i\tilde{a}_2(0, 0) \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Remark 6. The solution of continuum Dirac equation (1) is given by the same expression (30)–(31), only $2\pi/T$ and α are redefined by $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + m^2$ and $\cot\alpha = 2\pi/m\lambda$ instead. In both continuum and discrete setup, these are the hypotenuse and the angle in a right triangle with one leg $2\pi/\lambda$ and another leg either m or $(\arctan m\varepsilon)/\varepsilon$ respectively, lying in the plane or a sphere of radius $1/\varepsilon$ respectively. This spherical-geometry interpretation is new and totally unexpected.

Physically, (30)–(31) describe a wave with the period T and the wavelength λ . The relation between T and λ is called the *dispersion relation*. *Plank and de Broglie relations* assert that $E := 2\pi\hbar/T$ and $p := 2\pi\hbar/\lambda$ are the energy and the momentum of the wave (recall that $\hbar = c = 1$ in our units). The above dispersion relation tends to *Einstein formula* $E = mc^2$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ and $\lambda \rightarrow \infty$.

A comment for specialists: replacing a and b by creation and annihilation operators, i.e., the second quantization of the lattice Dirac equation, leads to the model from §9.

For the next upgrades, we just announce results to be discussed in subsequent publications.

7 Medium

Question: which part of light of given color is reflected from a glass plate of given width?

Assumptions: right angle of incidence, no polarization of light; mass now depends on x but not on the color.

Results: thin-film reflection (quantitative explanation).

Feynman checkers can be applied to describe propagation of light in transparent media such as glass. Light propagates as if it had acquired some nonzero mass plus potential energy (depending on the refractive index) inside the media, while both remain zero outside. In general the model is inappropriate to describe light; partial reflection is a remarkable exception. Notice that similar classical phenomena are described by quantum models [50, §2.7].

In Feynman checkers, we announce a rigorous derivation of the following well-known formula for the fraction P of light of wavelength λ reflected from a transparent plate of width L and refractive index n :

$$P = \frac{(n^2 - 1)^2}{(n^2 + 1)^2 + 4n^2 \cot^2(2\pi Ln/\lambda)}.$$

This makes Feynman's popular-science discussion of partial reflection [11] completely rigorous and shows that his model has experimentally-confirmed predictions in the real world, not just a 2-dimensional one.

8 Identical particles

Question: what is the probability to find electrons at F and F' , if they were emitted from A and A' ?

Assumptions: there are several moving electrons.

Results: exclusion principle, locality, charge conservation.

We announce a simple-to-define upgrade describing the motion of several electrons, respecting exclusion principle, locality, and probability conservation (cf. [51, §4.2]).

Definition 4. Fix integer points $A = (0, 0)$, $A' = (x_0, 0)$, $F = (x, t)$, $F' = (x', t)$ and their diagonal neighbors $B = (1, 1)$, $B' = (x_0 + 1, 1)$, $E = (x - 1, t - 1)$, $E' = (x' - 1, t - 1)$, where $x_0 \neq 0$ and $x' \geq x$. Denote

$$a(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') := \sum_{\substack{s: AB \rightarrow EF \\ s': A'B' \rightarrow E'F'}} a(s)a(s') - \sum_{\substack{s: AB \rightarrow E'F' \\ s': A'B' \rightarrow EF}} a(s)a(s'),$$

where the first sum is over all pairs consisting of a checker path s starting with the move AB and ending with the move EF , and a path s' starting with the move $A'B'$ and ending with the move $E'F'$, whereas in the second sum the final moves are interchanged.

The length square $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') := |a(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')|^2$ is called the *probability to find right electrons at F and F' , if they are emitted from A and A'* . Define $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ analogously also for $E = (x \pm 1, t - 1)$, $E' = (x' \pm 1, t - 1)$. Here we require $x' \geq x$, if both signs are the same, and allow arbitrary x' and x , otherwise.

9 Antiparticles

Question: what is the expected charge in the square (x, t) , if an electron was emitted from the square $(0, 0)$?

Assumptions: electron-positron pairs are now created and annihilated, the t -axis is time.

Results: spin-1/2 Feynman propagator in the continuum limit, an analytic expression for the large-time limit.

9.1 Identities and asymptotic formulae

Finally, we introduce a completely new upgrade (*Feynman anti-checkers*), allowing creation and annihilation of electron-positron pairs during the motion. The upgrade is defined just by allowing odd $(x + t)/\varepsilon$ in the Fourier integral (Proposition 12), that is, computing the same integral in white checkerboard squares in addition to black ones. This is equivalent to the second quantization of lattice Dirac equation (28)–(29), but we do not need to work out this procedure (cf. [2, §9F] and [3, §IV] for the massless case). Anyway, the true motivation of the upgrade is consistency with the initial model and appearance of spin-1/2 Feynman propagator (34) in the continuum limit (see Figure 15). We also give a combinatorial definition (see Definition 6).

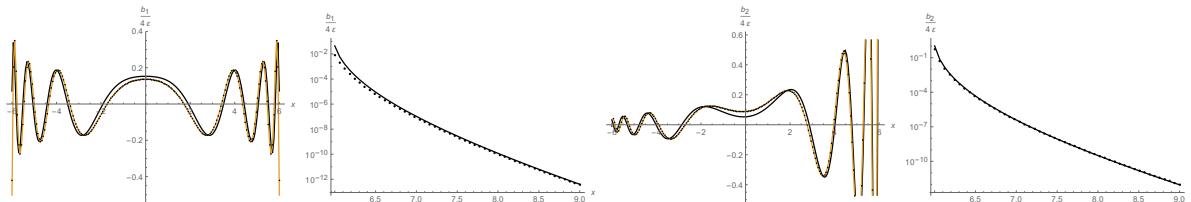


Figure 15: Plots of $b_1(x, 6, 4, 0.03)/0.12$ (left, dots), $b_2(x, 6, 4, 0.03)/0.12$ (right, dots), their analytic approximation from Theorem 7 (light), the imaginary part of the Feynman propagator $\text{Im } G_{11}^F(x, 6)$ (left, dark) and $\text{Im } G_{12}^F(x, 6)$ (right, dark) given by (34) for $m = 4$ and $t = 6$.

Definition 5. (Cf. Proposition 12, see Figure 15.) Fix $m, \varepsilon > 0$. For each $(x, t) \in \varepsilon \mathbb{Z}^2$ denote $\omega_p := \frac{1}{\varepsilon} \arccos(\frac{\cos p\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}})$ and

$$\begin{aligned} A_1(x, t, m, \varepsilon) &:= \pm \frac{im\varepsilon^2}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{ipx-i\omega_p(t-\varepsilon)} dp}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}}; \\ A_2(x, t, m, \varepsilon) &:= \pm \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \left(1 + \frac{\sin(p\varepsilon)}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} \right) e^{ip(x-\varepsilon)-i\omega_p(t-\varepsilon)} dp, \end{aligned} \tag{32}$$

where in both cases the overall minus sign is taken when $t \leq 0$ and $(x + t)/\varepsilon$ is even. For $m = 0$ define $A_2(x, t, m, \varepsilon)$ by the same formula and set $A_1(x, t, 0, \varepsilon) := 0$. In particular, $A_k(x, t, m, \varepsilon) = a_k(x, t, m, \varepsilon)$ for $(x + t)/\varepsilon$ even, $t > 0$, and $k = 1, 2$. Denote $A_k(x, t, m, \varepsilon) =: ib_k(x, t, m, \varepsilon)$ for $(x + t)/\varepsilon$ odd. Set $b_k(x, t, m, \varepsilon) := 0$ for $(x + t)/\varepsilon$ even.

One can show that $A_k(x, t, m, \varepsilon)$ is purely imaginary for $(x+t)/\varepsilon$ odd. Thus the real and the imaginary parts “live” on the black and white squares respectively, analogously to how discrete analytic functions are defined (see [8]). The sign convention for $t \leq 0$ is dictated by the analogy to continuum theory (see (33) and (35)).

Example 6. The value $b_1(0, 1, 1, 1) = \Gamma(\frac{1}{4})^2/(2\pi)^{3/2} = \frac{2}{\pi}K(i) =: G \approx 0.83463$ is the Gauss constant and $-b_2(0, 1, 1, 1) = 2\sqrt{2\pi}/\Gamma(\frac{1}{4})^2 = \frac{2}{\pi}(E(i) - K(i)) = 1/\pi G =: L' \approx 0.38138$ is the inverse lemniscate constant, where $K(z)$ and $E(z)$ are the complete elliptic integrals of the 1st and 2nd kind respectively (cf. [13, §6.1]).

The other values are even more complicated irrationalities (see Table 6).

$b_1(x, t, 1, 1)$					
2	$\frac{G-L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{G-L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{7G-15L'}{3\sqrt{2}}$
1		G		$G-2L'$	
0	$\frac{G-L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{G-L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{7G-15L'}{3\sqrt{2}}$
-1		$-L'$		$\frac{2G-3L'}{3}$	
$t \setminus x$	-1	0	1	2	3

$b_2(x, t, 1, 1)$					
2	$\frac{G-3L'}{3\sqrt{2}}$		$\frac{-G-L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{-G+3L'}{\sqrt{2}}$
1		$-L'$		L'	
0	$\frac{G-3L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{G+L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{-G+3L'}{3\sqrt{2}}$
-1		G		$\frac{G}{3}$	
$t \setminus x$	-1	0	1	2	3

Table 6: The values $b_1(x, t, 1, 1)$ and $b_2(x, t, 1, 1)$ for small x, t (see Definition 5 and Example 6)

We announce that the analogues of Propositions 5–8 and 10 remain true literally, if a_1 and a_2 are replaced by b_1 and b_2 respectively (the assumption $t > 0$ can then be dropped). As a consequence, $2^{(t-1)/2}b_1(x, t, 1, 1)$ and $2^{(t-1)/2}b_2(x, t, 1, 1)$ for all $(x, t) \in \mathbb{Z}^2$ are rational linear combinations of the Gauss constant G and the inverse lemniscate constant L' . In general, we announce that b_1 and b_2 can be “explicitly” expressed through Gauss hypergeometric function: for $m, \varepsilon > 0$, $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ with $(x+t)/\varepsilon$ odd we get

$$\begin{aligned} b_1(x, t, m, \varepsilon) &= (1 + m^2\varepsilon^2)^{\frac{1}{2} - \frac{t}{2\varepsilon}} (-m^2\varepsilon^2)^{\frac{t-|x|}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}} \binom{\frac{t+|x|}{2\varepsilon} - 1}{|x|/\varepsilon} \\ &\quad \cdot {}_2F_1 \left(1 + \frac{|x| - t}{2\varepsilon}, 1 + \frac{|x| - t}{2\varepsilon}; 1 + \frac{|x|}{\varepsilon}; -\frac{1}{m^2\varepsilon^2} \right), \\ b_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon) &= (1 + m^2\varepsilon^2)^{-\frac{t}{2\varepsilon}} (m\varepsilon)^{\frac{t-|x|}{\varepsilon}} (-1)^{\frac{t-|x|}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}} \binom{\frac{t+|x|}{2\varepsilon} - 1 + \theta(x)}{|x|/\varepsilon} \\ &\quad \cdot {}_2F_1 \left(\frac{|x| - t}{2\varepsilon}, 1 + \frac{|x| - t}{2\varepsilon}; 1 + \frac{|x|}{\varepsilon}; -\frac{1}{m^2\varepsilon^2} \right), \quad \text{where } \theta(x) := \begin{cases} 1, & \text{if } x \geq 0, \\ 0, & \text{if } x < 0; \end{cases} \end{aligned}$$

and ${}_2F_1(p, q; r; z)$ is the principal branch of the hypergeometric function. The idea of the proof is induction on $t/\varepsilon \geq 1$: the base is given by [19, 9.112, 9.131.1, 9.134.3, 9.137.15] and the step is given by the analogue of (3)–(4) for b_1 and b_2 plus [19, 9.137.11, 12, 18].

Remark 7. (Cf. Remark 3) These expressions can be rewritten as the *Jacobi functions of the second kind* of half-integer order (see the definition in [49, (4.61.1)]). For instance, for each $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ such that $|x| > t$ and $(x+t)/\varepsilon$ is odd we have

$$b_1(x, t, m, \varepsilon) = \frac{2m\varepsilon}{\pi} (1 + m^2\varepsilon^2)^{(t/\varepsilon-1)/2} Q_{(|x|-t)/2\varepsilon}^{(0,t/\varepsilon-1)}(1 + 2m^2\varepsilon^2).$$

Remark 8. The number $b_1(x, \varepsilon, m, \varepsilon)$ equals $(1 + \sqrt{1 + m^2\varepsilon^2})/m\varepsilon$ times the probability that a planar simple random walk over white squares dies at (x, ε) , if it starts at $(0, \varepsilon)$ and dies with the probability $1 - 1/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}$ before each step. Nothing like that is known for $b_1(x, t, m, \varepsilon)$ and $b_2(x, t, m, \varepsilon)$ with $t \neq \varepsilon$.

The following two results are proved almost literally as Proposition 13 and Theorem 2. (The only difference is change of the sign of the summands involving $f_-(p)$ in (41), (46) (50), (52); the analogues of Lemmas 5 and 11 are then obtained by direct checking.)

Proposition 17 (Full space-time Fourier transform). *Denote $\delta_{x\varepsilon} := 1$, if $x = \varepsilon$, and $\delta_{x\varepsilon} := 0$, if $x \neq \varepsilon$. For each $m > 0$ and $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ we get*

$$\begin{aligned} A_1(x, t, m, \varepsilon) &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{m\varepsilon^3}{4\pi^2} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{ipx-i\omega(t-\varepsilon)} d\omega dp}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \cos(\omega\varepsilon) - \cos(p\varepsilon) - i\delta}, \\ A_2(x, t, m, \varepsilon) &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{-i\varepsilon^2}{4\pi^2} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \sin(\omega\varepsilon) + \sin(p\varepsilon)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \cos(\omega\varepsilon) - \cos(p\varepsilon) - i\delta} e^{ip(x-\varepsilon)-i\omega(t-\varepsilon)} d\omega dp + \delta_{x\varepsilon} \delta_{t\varepsilon}. \end{aligned} \quad (33)$$

Theorem 7 (Large-time asymptotic formula between the peaks; see Figure 15). *For each $\delta > 0$ there is $C_\delta > 0$ such that for each $m, \varepsilon > 0$ and each $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ satisfying (8) we have*

$$\begin{aligned} b_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) &= \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi}} (t^2 - (1 + m^2\varepsilon^2)x^2)^{-1/4} \cos \theta(x, t, m, \varepsilon) + O_\delta \left(\frac{\varepsilon}{m^{1/2}t^{3/2}} \right), \\ b_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon) &= -\varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi}} (t^2 - (1 + m^2\varepsilon^2)x^2)^{-1/4} \sqrt{\frac{t+x}{t-x}} \sin \theta(x, t, m, \varepsilon) + O_\delta \left(\frac{\varepsilon}{m^{1/2}t^{3/2}} \right), \end{aligned}$$

for $(x+t)/\varepsilon$ even and odd respectively, where $\theta(x, t, m, \varepsilon)$ is given by (11).

9.2 Physical interpretation

One interprets $\frac{1}{2}|A_1(x, t, m, \varepsilon)|^2 + \frac{1}{2}|A_2(x, t, m, \varepsilon)|^2$ as the *expected charge* in a square (x, t) with $t > 0$, in the units of electron charge. The numbers cannot be anymore interpreted as probabilities to find the electron in the square. The reason is that now the outcomes of the experiment are not mutually exclusive: one can detect an electron in two distinct squares simultaneously. There is nothing mysterious about that: Any measurement necessarily influences the electron. This influence might be enough to create an electron-positron pair from the vacuum. Thus one can detect a newborn electron in addition to the initial one; and there is no way to distinguish one from another. (A more formal explanation for specialists: two states in the Fock space representing the electron localized at distant regions are not mutually orthogonal; their scalar product is essentially provided by the Feynman propagator.)

We announce that the model reproduces the Feynman propagator rather than the retarded one in the continuum limit (see Figure 15). The *spin-1/2 Feynman propagator* equals

$$G^F(x, t) = \begin{cases} \frac{m}{4} \begin{pmatrix} J_0(ms) - iY_0(ms) & -\frac{t+x}{s} (J_1(ms) - iY_1(ms)) \\ \frac{t-x}{s} (J_1(ms) - iY_1(ms)) & J_0(ms) - iY_0(ms) \end{pmatrix}, & \text{if } |x| < |t|; \\ \frac{im}{2\pi} \begin{pmatrix} K_0(ms) & \frac{t+x}{s} K_1(ms) \\ \frac{x-t}{s} K_1(ms) & K_0(ms) \end{pmatrix}, & \text{if } |x| > |t|; \end{cases} \quad (34)$$

where $Y_n(z)$ and $K_n(z)$ are Bessel functions of the 2nd kind and modified Bessel functions of the 2nd kind, and $s := \sqrt{|t^2 - x^2|}$. In addition, there is a generalized function supported on the lines $t = \pm x$, which we do not specify. The Feynman propagator satisfies (25). We see that it has additional imaginary part (and an overall factor of 1/2) compared to retarded one (26). In particular, it does not vanish for $|x| > |t|$: annihilation of electron at one point and creation at another one may result in apparent motion faster than light.

A more common expression is the Fourier transform (cf. (27) and [14, (6.51)])

$$G^F(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\delta \rightarrow +0} \begin{pmatrix} m & -ip - i\omega \\ -ip + i\omega & m \end{pmatrix} \frac{e^{ipx - i\omega t} dp d\omega}{m^2 + p^2 - \omega^2 - i\delta}. \quad (35)$$

Overall, a small correction introduced by the upgrade reflects some fundamental limitations on measurement rather than adds something meaningful to description of the motion. The upgrade should only be viewed as an ingredient for more realistic models with interaction.

9.3 Combinatorial definition

Informally, the combinatorial definition of Feynman anti-checkers (Definition 6) is obtained from the definition of Feynman checkers (Definition 2) by the following four-step modification:

Step 1: the particle mass acquires small imaginary part which we eventually tend to zero;

Step 2: just like the real mass is “responsible” for turns in the centers of the squares, the imaginary one allows turns at their *vertices* (see Figure 16 to the left);

Step 3: the infinite lattice is replaced by a torus with the size eventually tending to infinity;

Step 4: the sum over lattice paths is replaced by a ratio of sums over loop configurations.

Here Step 2 is completely new whereas the other ones are standard. It reflects a general principle that the real and the imaginary part of a quantity should be always put on dual lattices.

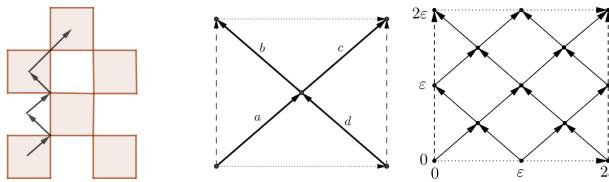


Figure 16: A generalized checker path (left) and lattices of sizes 1 and 2 (right); see Example 7.

Definition 6. (see Figure 16) Fix $T \in \mathbb{Z}$ and $\varepsilon, m, \delta > 0$ called *lattice size*, *lattice step*, *particle mass*, and *small imaginary mass* respectively. Assume $T > 0$ and $\delta < 1/2$. The *lattice* is the quotient set

$$\{ (x, t) \in [0, T\varepsilon]^2 : 2x/\varepsilon, 2t/\varepsilon, (x+t)/\varepsilon \in \mathbb{Z} \}_{\forall x, t : (x, 0) \sim (x, T\varepsilon) \& (0, t) \sim (T\varepsilon, t)}.$$

(This is a finite subset of the torus obtained from the square $[0, T\varepsilon]^2$ by an identification of the opposite sides.) A lattice point (x, t) is *even* (respectively, *odd*), if $2x/\varepsilon$ is even (respectively, odd). An *edge* is a vector starting from a lattice point (x, t) and ending at the lattice point $(x + \varepsilon/2, t + \varepsilon/2)$ or $(x - \varepsilon/2, t + \varepsilon/2)$.

A *generalized checker path* is a finite sequence of distinct edges such that the endpoint of each edge is the starting point of the next one. A *cycle* is defined analogously, only the sequence has the unique repetition: the first and the last edges coincide, and there is at least one edge in between. (In particular, a generalized checker path such that the endpoint of the last edge is the starting point of the first one is *not* yet a cycle; coincidence of the first and the last *edges* is required. The first and the last edges of a generalized checker path coincide only if the path has a single edge. Thus in our setup, a path is *never* a cycle.) *Changing the starting edge* of a cycle means removal of the first edge from the sequence, then a cyclic permutation, and then adding the last edge of the resulting sequence at the beginning. A *loop* is a cycle up to changing of the starting edge.

A *node* of a path or loop s is an ordered pair of consecutive edges in s (the order of the edges in the pair is the same as in s). A *turn* is a node such that the two edges are orthogonal.

A node or turn is *even* (respectively, *odd*), if the endpoint of the first edge in the pair is even (respectively, odd). Denote by $\text{eventurns}(s)$, $\text{oddtturns}(s)$, $\text{evennodes}(s)$, $\text{oddnodes}(s)$ the number of even and odd turns and nodes in s . The *arrow* (or *weight*) of s is

$$A(s, m, \varepsilon, \delta) := \pm \frac{(-im\varepsilon)^{\text{oddtturns}(s)} (-\delta)^{\text{eventurns}(s)}}{(1 + m^2\varepsilon^2)^{\text{oddnodes}(s)/2} (1 - \delta^2)^{\text{evennodes}(s)/2}},$$

where the overall minus sign is taken when s is a loop.

A set of checker paths or loops is *edge-disjoint*, if no two of them have a common edge. An edge-disjoint set of loops is a *loop configuration*. A *loop configuration with a source a and a sink f* is an edge-disjoint set of any number of loops and exactly one generalized checker path starting with the edge a and ending with the edge f . The *arrow* $A(S, m, \varepsilon, \delta)$ of a loop configuration S (possibly with a source and a sink) is the product of arrows of all loops and paths in the configuration. An empty product is set to be 1.

The *arrow from an edge a to an edge f* (or *finite-lattice propagator*) is

$$A(a \rightarrow f, m, \varepsilon, \delta, T) := \frac{\sum_{\substack{\text{loop configurations } S \\ \text{with the source } a \text{ and the sink } f}} A(S, m, \varepsilon, \delta)}{\sum_{\text{loop configurations } S} A(S, m, \varepsilon, \delta)}.$$

Now take a point $(x, t) \in (\varepsilon\mathbb{Z})^2$ and set $x' := x \bmod T\varepsilon$, $t' := t \bmod T\varepsilon$. Let a_0, f_1, f_2 be the edges starting at $(0, 0)$, (x', t') , (x', t') and ending at $(\varepsilon/2, \varepsilon/2)$, $(x' - \varepsilon/2, t' + \varepsilon/2)$, $(x' + \varepsilon/2, t' + \varepsilon/2)$ respectively. The *arrow of the point (x, t)* (or *infinite-lattice propagator*) is the pair of complex numbers

$$\tilde{A}_k(x, t, m, \varepsilon) := -2(-i)^k \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} A(a_0 \rightarrow f_k, m, \varepsilon, \delta, T) \quad \text{for } k = 1, 2.$$

Example 7. (See Figure 16 to the middle) The lattice of size 1 lies on the square $[0, \varepsilon]^2$ with the opposite sides identified. The lattice has 2 points: the midpoint and the identified vertices of the square. It has 4 edges a, b, c, d . The generalized checker paths $abdc, acdb, bacd$ are distinct although they contain the same edges. Their arrows are $\frac{-m^2\varepsilon^2}{\sqrt{1-\delta^2}(1+m^2\varepsilon^2)}$, $\frac{-\delta}{\sqrt{1-\delta^2}(1+m^2\varepsilon^2)}$, $\frac{\delta^2}{(1-\delta^2)\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$ respectively. Those paths are distinct from the cycles $acdba, bacdb$. The two cycles determine the same loop with the arrow $\frac{-\delta^2}{(1-\delta^2)(1+m^2\varepsilon^2)}$. There are totally 9 loop configurations: $\emptyset, \{aba\}, \{cdc\}, \{aca\}, \{bdb\}, \{abdca\}, \{acdba\}, \{aba, cdc\}, \{aca, bdb\}$. Their arrows are 1, $-im\varepsilon\delta/n$, $-im\varepsilon\delta/n$, $-1/n$, $-1/n$, $m^2\varepsilon^2/n^2$, $-\delta^2/n^2$, $-m^2\varepsilon^2\delta^2/n^2$, $1/n^2$ respectively, where $n := \sqrt{1 - \delta^2}\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}$.

Informally, the loops form the *Dirac sea* of electrons filling the whole space, and the edges not in the loops form paths of holes in the sea, that is, antiparticles.

We announce that Definitions 5 and 6 are equivalent in the sense that $\tilde{A}_1(x, t, m, \varepsilon) = A_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$ and $\tilde{A}_2(x, t, m, \varepsilon) = A_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$; cf. §6. The idea is that both definitions actually construct matrix elements of the “inverse” of the same lattice Dirac operator: the former via the Fourier transform, and the latter via the ratio of determinants.

10 Towards $(1+1)$ -dimensional quantum electrodynamics

Question: what is the probability to find electrons (or an electron and a positron) with momenta q and q' in the far future, if they were emitted with momenta p and p' in the far past?

Assumptions: interaction now switched on; all simplifying assumptions removed except the default ones: no nuclear forces, no gravitation, electron moves along the x -axis only, and the t -axis is time.

Results: repulsion of like charges and attraction of opposite charges (qualitative explanation expected).

Construction of the required model is a widely open problem because in particular it requires the missing mathematically rigorous construction of the *Minkowskian* lattice gauge theory.

11 Open problems

We start with problems relying on Definition 1. The plots suggest that for fixed t , the most probable position of the electron is near to $x = t/\sqrt{2}$ (see Figure 9 to the left, Theorems 1(B) and 2). Although this was noticed 20 years ago, the following question is still open.

Problem 1. (A.Daniyarkhodzhaev–F.Kuyanov; see Figure 9 to the left) Denote by $x_{\max}(t)$ a point where $P(x, t)$ has a maximum for fixed t . Is $x_{\max}(t) - t/\sqrt{2}$ bounded as $t \rightarrow \infty$?

What makes the problem hard is that the behavior of $P(x, t)$ is only known near to $x = t/\sqrt{2}$ (Theorem 3) and far from $x = t/\sqrt{2}$ (Theorems 2 and 4) but not at intermediate distances.

Problem 2. (Cf. [47]) Find a asymptotic formula for $P(x, t)$ as $t \rightarrow \infty$ uniform in $x \in [-t; t]$.

Problem 3. (S. Nechaev; see Figure 9 to the left) Find the positions of “wide gaps” (intervals, where oscillations are smaller) in the plot of $P(x, t)$ for fixed large t . (Cf. formulae (9)–(10).)

The aim of the next two problems is to study the phase transition by means of various order parameters (see page 10). Specifically, we conjecture that the limiting “probability” of equal signs at the endpoints of the spin-chain, as well as the limiting “probability” of equal signs at the endpoints and the midpoint, are nonanalytic at $v = \pm 1/\sqrt{2}$.

Problem 4. (See Figure 10) Prove that for each $0 < v < 1/\sqrt{2}$ we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq x \leq vt} \frac{2}{t} \left| \frac{a_2(x, t)}{a(x, t)} \right|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + v - \sqrt{1 - v^2} + \log \frac{1 + \sqrt{1 - v^2}}{2} \right).$$

Compute the same limit for $1/\sqrt{2} < v < 1$. (Cf. the proof of Corollary 1 in §12.4.)

Problem 5. (Cf. [23, p. 381].) Find the weak limit $\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \sum_{x \in \mathbb{Z}} \frac{a_2(x, t)^2}{a_2(2\lceil vt \rceil - 1, 2t - 1)} \right|^2$.

The next problem is on absorption probabilities; it relies on the definition before Example 1.

Problem 6. (G. Minaev–I. Russkikh; cf. [1, §5], [10], [37, §4]) Find $\sum_{t=1}^{\infty} P(n, t \text{ bypass } \{x=n\})$ for all $n \in \mathbb{Z}$. Find the weak limit and an asymptotic formula for $P(x, t \text{ bypass } \{x=0\})$ as $t \rightarrow \infty$. (Cf. Theorems 1–2.)

The following problem generalizes and specifies Problem 1 above; it relies on Definition 2.

Problem 7. (A.Daniyarkhodzhaev–F.Kuyanov, cf. [1, §4], [47], [52]) Denote by $x_{\max} = x_{\max}(t, m, \varepsilon)$ the point where $P(x) := P(x, t, m, \varepsilon)$ has a maximum. Is $x_{\max}/\varepsilon - t/\varepsilon\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}$ uniformly bounded? Does $P(x)$ decrease for $x > x_{\max}$? Find an asymptotic formula for $a(x, t, m, \varepsilon)$ as $t \rightarrow \infty$ valid for all $x \in [-t, t]$ and uniform in x, m, ε .

Problem 8. (M. Blank–S. Shlosman) Is the number of times the function $a_1(x) := a_1(x, t, m, \varepsilon)$ changes the sign on $[-t, t]$ bounded as $\varepsilon \rightarrow 0$ for fixed t, m ?

Corollary 6 gives uniform limit on compact subsets of the angle $|x| < t$, hence misses the main contribution to the probability. Now we ask for the weak limit detecting the peak.

Problem 9. Find the weak limits $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} a(2\varepsilon \lceil \frac{x}{2\varepsilon} \rceil, 2\varepsilon \lceil \frac{t}{2\varepsilon} \rceil, m, \varepsilon)$ and $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\varepsilon^2} P(2\varepsilon \lceil \frac{x}{2\varepsilon} \rceil, 2\varepsilon \lceil \frac{t}{2\varepsilon} \rceil, m, \varepsilon)$ on the whole \mathbb{R}^2 . Is the former limit equal to propagator (27) including the generalized function supported on the lines $t = \pm x$? What is the physical interpretation of the latter limit (providing a value to the ill-defined square of the propagator)?

The following problem is to construct a continuum analogue of Feynman checkers.

Problem 10. (M. Lifshits) Consider $(-im\varepsilon)^{\text{turns}(s)}$ as a charge on the set of all checker paths s from $(0, 0)$ to (x, t) starting and ending with an upwards-right move. Does the charge converge (weakly or in another sense) to a charge on the space of all continuous functions $[0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ with boundary values 0 and x respectively as $\varepsilon \rightarrow 0$?

The following problem relying on Definition 3 would demonstrate “spin precession”.

Problem 11. (See Figure 13 to the right; cf. [40]) Is $P(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, t, u)^2$ a periodic function asymptotically as $t \rightarrow \infty$ for $u(x + \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}) = (-1)^{(x-1)(t-1)}$? Find the weak limit of $P(x, t, u)$ and asymptotic formulae for $a_k(x, t, u)$ as $t \rightarrow \infty$. (Cf. Theorems 1–2.)

Define $a(x, t, m, \varepsilon, u)$ analogously to $a(x, t, m, \varepsilon)$ and $a(x, t, u)$, unifying Definitions 2–3 and Remark 5. The next problem asks if this reproduces Dirac equation in electromagnetic field.

Problem 12. (Cf. [16]) Fix $A_0(x, t), A_1(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. For each auxiliary edge $s_1 s_2$ set

$$u(s_1 s_2) := \exp \left(-i \int_{s_1}^{s_2} (A_0(x, t) dt + A_1(x, t) dx) \right).$$

Denote $\psi_k(x, t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} a_k \left(2\varepsilon \left[\frac{x}{2\varepsilon} \right], 2\varepsilon \left[\frac{t}{2\varepsilon} \right], m, \varepsilon, u \right)$ for $k = 1, 2$. Does the limit satisfy

$$\begin{pmatrix} m & \partial/\partial x - \partial/\partial t + iA_0(x, t) - iA_1(x, t) \\ \partial/\partial x + \partial/\partial t - iA_0(x, t) - iA_1(x, t) & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_2(x, t) \\ \psi_1(x, t) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{for } t > 0?$$

The next two problems rely on Definition 5.

Problem 13. (Cf. Corollary 1) Prove that $\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \in \varepsilon \mathbb{Z}}} \sum_{\substack{x \leq vt \\ x \in \varepsilon \mathbb{Z}}} \frac{|A_1(x, t, m, \varepsilon)|^2 + |A_2(x, t, m, \varepsilon)|^2}{2} = F(v, m, \varepsilon)$.

Problem 14. (Cf. Theorems 4 and 7) Find an asymptotic formula for $A_k(x, t, m, \varepsilon)$ for $|x| > |t|$ as $t \rightarrow \infty$.

The last problem is informal; it stands for half a century.

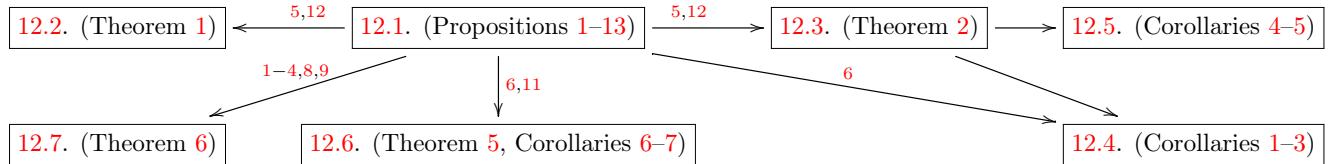
Problem 15. (R. Feynman; cf. [15]) Generalize the model to 4 dimensions so that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} a \left(2\varepsilon \left[\frac{x}{2\varepsilon} \right], 2\varepsilon \left[\frac{y}{2\varepsilon} \right], 2\varepsilon \left[\frac{z}{2\varepsilon} \right], 2\varepsilon \left[\frac{t}{2\varepsilon} \right], m, \varepsilon \right)$$

coincides with the spin-1/2 retarded propagator, now in 3 space- and 1 time-dimension.

12 Proofs

Let us present a chart showing the dependence of the above results and further subsections:



Particular proposition numbers are shown above the arrows. Propositions 7, 10, and 13 are not used in the main results.

In the process of the proofs, we give a zero-knowledge introduction to the used methods. Some proofs are simpler than the original ones.

12.1 Identities: elementary combinatorics (Propositions 1–13)

Let us prove the identities from §3; the ones from §2 are the particular case $m = \varepsilon = 1$.

Proof of Propositions 1 and 5. Let us derive a recurrence for $a_2(x, t, m, \varepsilon)$. Take a path s on $\varepsilon\mathbb{Z}^2$ from $(0, 0)$ to (x, t) with the first step to $(\varepsilon, \varepsilon)$. Set $a(s, m\varepsilon) := i(-im\varepsilon)^{\text{turns}(s)}(1+m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2}$.

The last move in the path s is made either from $(x-\varepsilon, t-\varepsilon)$ or from $(x+\varepsilon, t-\varepsilon)$. If it is from $(x+\varepsilon, t-\varepsilon)$, then $\text{turns}(s)$ must be odd, hence s does not contribute to $a_2(x, t, m, \varepsilon)$. Assume further that the last move in s is made from $(x-\varepsilon, t-\varepsilon)$. Denote by s' the path s without the last move. If the directions of the last moves in s and s' coincide, then $a(s, m\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}a(s', m\varepsilon)$, otherwise $a(s, m\varepsilon) = \frac{-im\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}a(s', m\varepsilon) = \frac{m\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}(\text{Im } a(s', m\varepsilon) - i\text{Re } a(s', m\varepsilon))$.

Summation over all paths s' gives the required equation

$$\begin{aligned} a_2(x, t, m, \varepsilon) &= \text{Im} \sum_{s \ni (x-\varepsilon, t-\varepsilon)} a(s, m\varepsilon) = \sum_{s' \ni (x-2\varepsilon, t-2\varepsilon)} \frac{\text{Im } a(s', m\varepsilon)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} - \sum_{s' \ni (x, t-2\varepsilon)} \frac{m\varepsilon \text{Re } a(s', m\varepsilon)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} (a_2(x-\varepsilon, t-\varepsilon, m, \varepsilon) - m\varepsilon a_1(x-\varepsilon, t-\varepsilon, m, \varepsilon)). \end{aligned}$$

The recurrence for $a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$ is proved analogously. \square

Proof of Propositions 2 and 6. The proof is by induction on t/ε . The base $t/\varepsilon = 1$ is obvious. The step of induction follows immediately from the following computation using Proposition 5:

$$\begin{aligned} \sum_{x\varepsilon \in \mathbb{Z}} P(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) &= \sum_{x\varepsilon \in \mathbb{Z}} [a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon)^2 + a_2(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon)^2] \\ &= \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} \left(\sum_{x\varepsilon \in \mathbb{Z}} [a_1(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon) + m\varepsilon a_2(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon)]^2 + \sum_{x\varepsilon \in \mathbb{Z}} [a_2(x - \varepsilon, t, m, \varepsilon) - m\varepsilon a_1(x - \varepsilon, t, m, \varepsilon)]^2 \right) \\ &= \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} \left(\sum_{x\varepsilon \in \mathbb{Z}} [a_1(x, t, m, \varepsilon) + m\varepsilon a_2(x, t, m, \varepsilon)]^2 + \sum_{x\varepsilon \in \mathbb{Z}} [a_2(x, t, m, \varepsilon) - m\varepsilon a_1(x, t, m, \varepsilon)]^2 \right) \\ &= \sum_{x\varepsilon \in \mathbb{Z}} [a_1(x, t, m, \varepsilon)^2 + a_2(x, t, m, \varepsilon)^2] = \sum_{x\varepsilon \in \mathbb{Z}} P(x, t, m, \varepsilon). \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 1 (Adjoint Dirac equation). *For each $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, where $t > \varepsilon$, we have*

$$\begin{aligned} a_1(x, t - \varepsilon, m, \varepsilon) &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}(a_1(x - \varepsilon, t, m, \varepsilon) - m\varepsilon a_2(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon)); \\ a_2(x, t - \varepsilon, m, \varepsilon) &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}(m\varepsilon a_1(x - \varepsilon, t, m, \varepsilon) + a_2(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon)). \end{aligned}$$

Proof of Lemma 1. The second equation is obtained from Proposition 5 by substituting (x, t) by $(x-\varepsilon, t-\varepsilon)$ and $(x+\varepsilon, t-\varepsilon)$ in (3) and (4) respectively and adding them with the coefficients $m\varepsilon/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}$ and $1/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}$. The first equation is obtained analogously. \square

Proof of Proposition 7. The real part of the desired equation is the sum of the first equations of Lemma 1 and Proposition 5. The imaginary part is the sum of the second ones. \square

Proof of Proposition 8. Let us prove the first identity. For a path s denote by s' the reflection of s with respect to the t axis, and by s'' the path consisting of the same moves as s' , but in the opposite order.

Take a path s from $(0, 0)$ to (x, t) with the first move upwards-right such that $\text{turns}(s)$ is odd (the ones with $\text{turns}(s)$ even do not contribute to $a_1(x, t, m, \varepsilon)$). Then the last move in s is upwards-left. Therefore, the last move in s' is upwards-right, hence the first move in s'' is upwards-right. The endpoint of both s' and s'' is $(-x, t)$, because reordering of moves does not affect the endpoint. Thus $s \mapsto s''$ is a bijection between the paths to (x, t) and to $(-x, t)$ with $\text{turns}(s)$ odd. Thus $a_1(x, t, m, \varepsilon) = a_1(-x, t, m, \varepsilon)$.

We prove the second identity by induction on t/ε (this proof was found and written by E. Kolpakov). The base of induction ($t/\varepsilon = 1$ and $t/\varepsilon = 2$) is obvious.

Step of induction: take $t \geq 3\varepsilon$. Applying the inductive hypothesis for the three points $(x - \varepsilon, t - \varepsilon), (x + \varepsilon, t - \varepsilon), (x, t - 2\varepsilon)$ and the identity just proved, we get

$$\begin{aligned} (t - x)a_2(x - \varepsilon, t - \varepsilon, m, \varepsilon) &= (x + t - 4\varepsilon)a_2(3\varepsilon - x, t - \varepsilon, m, \varepsilon), \\ (t - x - 2\varepsilon)a_2(x + \varepsilon, t - \varepsilon, m, \varepsilon) &= (x + t - 2\varepsilon)a_2(\varepsilon - x, t - \varepsilon, m, \varepsilon), \\ (t - x - 2\varepsilon)a_2(x, t - 2\varepsilon, m, \varepsilon) &= (x + t - 4\varepsilon)a_2(2\varepsilon - x, t - 2\varepsilon, m, \varepsilon), \\ a_1(x - \varepsilon, t - \varepsilon, m, \varepsilon) &= a_1(\varepsilon - x, t - \varepsilon, m, \varepsilon). \end{aligned}$$

Summing up the 4 equations with the coefficients $1, 1, -\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}, -2m\varepsilon^2$ respectively, we get

$$\begin{aligned} &(t - x) \left(a_2(x - \varepsilon, t - \varepsilon, m, \varepsilon) + a_2(x + \varepsilon, t - \varepsilon, m, \varepsilon) - \sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} a_2(x, t - 2\varepsilon, m, \varepsilon) \right) \\ &- 2m\varepsilon^2 a_1(x - \varepsilon, t - \varepsilon, m, \varepsilon) - 2\varepsilon a_2(x + \varepsilon, t - \varepsilon, m, \varepsilon) + 2\varepsilon\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} a_2(x, t - 2\varepsilon, m, \varepsilon) = \\ &= -2m\varepsilon^2 a_1(\varepsilon - x, t - \varepsilon, m, \varepsilon) - 2\varepsilon a_2(3\varepsilon - x, t - \varepsilon, m, \varepsilon) + 2\varepsilon\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} a_2(2\varepsilon - x, t - 2\varepsilon, m, \varepsilon) \\ &+ (t + x - 2\varepsilon) \left(a_2(3\varepsilon - x, t - \varepsilon, m, \varepsilon) + a_2(\varepsilon - x, t - \varepsilon, m, \varepsilon) - \sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} a_2(2\varepsilon - x, t - 2\varepsilon, m, \varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Here the 3 terms in the 2nd line, as well as the 3 terms in the 3rd line, cancel each other by Lemma 1. Applying the Klein–Gordon equation (Proposition 7) to the expressions in the 1st and 4th line and cancelling the common factor $\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}$, we get the desired identity

$$(t - x)a_2(x, t, m, \varepsilon) = (t + x - 2\varepsilon)a_2(2\varepsilon - x, t, m, \varepsilon).$$

The third identity follows from the first one and Proposition 5:

$$\begin{aligned} a_1(x, t, m, \varepsilon) + m\varepsilon a_2(x, t, m, \varepsilon) &= \sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} a_1(x - \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon) = \\ &= \sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} a_1(\varepsilon - x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) = a_1(2\varepsilon - x, t, m, \varepsilon) + m\varepsilon a_2(2\varepsilon - x, t, m, \varepsilon). \end{aligned} \quad \square$$

The 1st and the 3rd identities can also be proved simultaneously by induction on t/ε using Proposition 5.

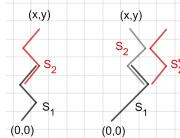


Figure 17: The path cut into two parts (see the proof of Proposition 9).

Proof of Proposition 9. Take a checker path s from $(0, 0)$ to (x, t) . Denote by (x', t') the point where s intersects the line $t = t'$. Denote by s_1 the part of s that joins $(0, 0)$ with (x', t') . Denote by s_2 the part starting at the intersection point of s with the line $t = t' - \varepsilon$ and ending at (x, t) (see Figure 17). Translate the path s_2 so that it starts at $(0, 0)$. Set $a(s, m\varepsilon) := i(-im\varepsilon)^{\text{turns}(s)}(1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2}$. Since $\text{turns}(s) = \text{turns}(s_1) + \text{turns}(s_2)$, it follows that

$$\operatorname{Re} a(s, m\varepsilon) = \begin{cases} \operatorname{Re} a(s_1, m\varepsilon)\operatorname{Im} a(s_2, m\varepsilon), & \text{if the move to } (x', t') \text{ is upwards-left,} \\ \operatorname{Im} a(s_1, m\varepsilon)\operatorname{Re} a(s_2, m\varepsilon), & \text{if the move to } (x', t') \text{ is upwards-right.} \end{cases}$$

In the former case replace the path s_2 by the path s'_2 obtained by the reflection with respect to the line $x = 0$ (and starting at the origin). We have $\operatorname{Im} a(s'_2, m\varepsilon) = \operatorname{Im} a(s_2, m\varepsilon)$. Therefore,

$$\begin{aligned} a_1(x, t, m, \varepsilon) &= \sum_s \operatorname{Re} a(s, m\varepsilon) = \sum_{x'} \sum_{s \ni (x', t')} \operatorname{Re} a(s, m\varepsilon) \\ &= \sum_{x'} \left(\sum_{s \ni (x', t'), (x' - \varepsilon, t' - \varepsilon)} \operatorname{Im} a(s_1, m\varepsilon)\operatorname{Re} a(s_2, m\varepsilon) + \sum_{s \ni (x', t'), (x' + \varepsilon, t' - \varepsilon)} \operatorname{Re} a(s_1, m\varepsilon)\operatorname{Im} a(s'_2, m\varepsilon) \right) \\ &= \sum_{x'} [a_2(x', t', m, \varepsilon)a_1(x - x' + \varepsilon, t - t' + \varepsilon, m, \varepsilon) + a_1(x', t', m, \varepsilon)a_2(x' - x + \varepsilon, t - t' + \varepsilon, m, \varepsilon)]. \end{aligned}$$

The formula for $a_2(x, t, m, \varepsilon)$ is proven analogously. \square

Proof of Proposition 10. Denote by $f(x, t)$ the difference between the left- and the right-hand side of (5). Introduce the operator

$$[\square_m f](x, t) := \sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2} f(x, t + \varepsilon) + \sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2} f(x, t - \varepsilon) - f(x + \varepsilon, t) - f(x - \varepsilon, t).$$

It suffices to prove that

$$[\square_m^4 f](x, t) = 0 \quad \text{for } t \geq 5\varepsilon. \quad (36)$$

Then (5) will follow by induction on t/ε : (36) expresses $f(x, t + 4\varepsilon)$ as a linear combination of $f(x', t')$ with smaller t' ; it remains to check $f(x, t) = 0$ for $t \leq 8\varepsilon$, which is done in [44, §11].

To prove (36), write

$$f(x, t) =: p_1(x, t)a(x - 2\varepsilon, t, m, \varepsilon) + p_2(x, t)a(x + 2\varepsilon, t, m, \varepsilon) + p_3(x, t)a(x, t, m, \varepsilon)$$

for certain cubic polynomials $p_k(x, t)$ (see (5)), and observe the *Leibnitz rule*

$$\square_m(fg) = f \cdot \square_m g + \sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2}(\nabla_{t+}f \cdot T_{t+}g - \nabla_{t-}f \cdot T_{t-}g) - \nabla_{x+}f \cdot T_{x+}g + \nabla_{x-}f \cdot T_{x-}g,$$

where $[\nabla_{t\pm}f](x, t) := \pm(f(x, t \pm \varepsilon) - f(x, t))$ and $[\nabla_{x\pm}f](x, t) := \pm(f(x \pm \varepsilon, t) - f(x, t))$ are the finite difference operators, $[T_{t\pm}g](x, t) := g(x, t \pm \varepsilon)$ and $[T_{x\pm}g](x, t) := g(x \pm \varepsilon, t)$ are the shift operators. Since $\square_m a(x, t, m, \varepsilon) = 0$ by Proposition 7, each operator $\nabla_{t\pm}, \nabla_{x\pm}$ decreases $\deg p_k(x, t)$, and all the above operators commute, by the Leibnitz rule we get (36). This proves the first identity in the proposition; the second one is proved analogously (the induction base is checked in [44, §11]). \square

Alternatively, Proposition 10 can be derived by applying the Gauss contiguous relations to the hypergeometric expression from Remark 3 seven times.

Proof of Propositions 3 and 11. Let us find $a_1(x, t, m, \varepsilon)$. Consider a path with an odd number of turns; the other ones do not contribute to $a_1(x, t, m, \varepsilon)$. Denote by $2r + 1$ the number of turns in the path. Denote by R and L the number of upwards-right and upwards-left moves respectively. Let x_1, x_2, \dots, x_{r+1} be the number of upwards-right moves *before* the first, the third, \dots , the last turn respectively. Let y_1, y_2, \dots, y_{r+1} be the number of upwards-left moves *after* the first, the third, \dots , the last turn respectively. Then $x_k, y_k \geq 1$ for $1 \leq k \leq r + 1$ and

$$\begin{aligned} R &= x_1 + \dots + x_{r+1}; \\ L &= y_1 + \dots + y_{r+1}. \end{aligned}$$

The problem now reduces to a combinatorial one: the number of paths with $2r + 1$ turns equals the number of positive integer solutions of the resulting equations. For the first equation, this number is the number of ways to put r sticks between R coins in a row, that is, $\binom{R-1}{r}$. Thus

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = (1 + m^2 \varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} \sum_{r=0}^{\min\{R, L\}} (-1)^r \binom{R-1}{r} \binom{L-1}{r} (m\varepsilon)^{2r+1}.$$

Thus (6) follows from $L + R = t/\varepsilon$ and $R - L = x/\varepsilon$. Formula (7) is derived analogously. \square

Proof of Proposition 12. The proof is by induction on t/ε .

The base $t/\varepsilon = 1$ is obtained by the change of variable $p \mapsto p + \pi/\varepsilon$ so that the integrals over $[0; \pi/\varepsilon]$ and $[-\pi/\varepsilon; 0]$ cancel for x/ε odd and there remains $(\varepsilon/2\pi) \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} e^{ip(x-\varepsilon)} dp = \delta_{x\varepsilon}$.

The inductive step is the following computation and an analogous one for $a_2(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) &= \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2}} (a_1(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon) + m\varepsilon a_2(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon)) \\ &= \frac{m\varepsilon^2}{2\pi\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2}} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \left(\frac{ie^{ip\varepsilon}}{\sqrt{m^2 \varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} + 1 + \frac{\sin(p\varepsilon)}{\sqrt{m^2 \varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} \right) e^{ipx - i\omega_p(t-\varepsilon)} dp \\ &= \frac{m\varepsilon^2}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{(i \cos(\omega_p \varepsilon) + \sin(\omega_p \varepsilon)) e^{ipx - i\omega_p(t-\varepsilon)} dp}{\sqrt{m^2 \varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} = \frac{im\varepsilon^2}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{ipx - i\omega_p t} dp}{\sqrt{m^2 \varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

Here the 1st equality is Proposition 5. The 2nd one is the inductive hypothesis. The 3rd one follows from $\cos \omega_p \varepsilon = \frac{\cos p \varepsilon}{\sqrt{1+m^2 \varepsilon^2}}$ and $\sin \omega_p \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 p \varepsilon}{1+m^2 \varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{m^2 \varepsilon^2 + \sin^2 p \varepsilon}{1+m^2 \varepsilon^2}}$. \square

Alternatively, Proposition 12 can be derived by integration of (30)–(31) over $p = 2\pi/\lambda$ for $\tilde{a}_1(0,0) = 0$, $\tilde{a}_2(0,0) = 1$.

Proof of Proposition 13. To prove the formula for $a_1(x,t,m,\varepsilon)$, we do the ω -integral:

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{-i\omega(t-\varepsilon)} d\omega}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \cos(\omega\varepsilon) - \cos(p\varepsilon) - i\delta} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{2z^{t/\varepsilon-1} dz}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} z^2 - 2(\cos(p\varepsilon) + i\delta)z + \sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} \\ & \stackrel{(**)}{=} \frac{\left((\cos p\varepsilon + i\delta - i\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon + \delta^2 - 2i\delta \cos p\varepsilon}) / \sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \right)^{t/\varepsilon-1}}{-i\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon + \delta^2 - 2i\delta \cos p\varepsilon}} \stackrel{(***)}{\Rightarrow} \frac{i e^{-i\omega_p(t-\varepsilon)}}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon}} \end{aligned}$$

as $\delta \rightarrow 0$ uniformly in p . Here we assume that $m, t, \delta > 0$ and δ is sufficiently small. Equality $(*)$ is obtained by the change of variables $z = e^{-i\omega\varepsilon}$ and then the change of the contour direction to the counterclockwise one. To prove $(**)$, we find the roots of the denominator

$$z_{\pm} = \frac{\cos p\varepsilon + i\delta \pm i\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon + \delta^2 - 2i\delta \cos p\varepsilon}}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}},$$

where \sqrt{z} denotes the value of the square root with positive real part. Then $(**)$ follows from the residue formula: the expansion

$$z_{\pm} = \frac{\cos p\varepsilon \pm i\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon}}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} \left(1 \pm \frac{\delta}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon}} + O_{m,\varepsilon}(\delta^2) \right)$$

shows that z_- is inside the unit circle, whereas z_+ is outside, for $\delta > 0$ sufficiently small in terms of m and ε . In $(***)$ we denote $\omega_p := \frac{1}{\varepsilon} \arccos(\frac{\cos p\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}})$ so that $\sin \omega_p \varepsilon = \sqrt{\frac{m^2\varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon}{1+m^2\varepsilon^2}}$ and pass to the limit $\delta \rightarrow 0$ which is uniform in p by the assumption $m > 0$.

The resulting uniform convergence allows to interchange the limit and the p -integral, and we arrive at Fourier integral for $a_1(x,t,m,\varepsilon)$ in Proposition 12. The formula for $a_2(x,t,m,\varepsilon)$ is proved analogously, with the case $t = \varepsilon$ considered separately. \square

12.2 Phase transition: the method of moments (Theorem 1)

In this subsection we give a simple exposition of the proof of Theorem 1 from [20] using the *method of moments*. The theorem also follows from Corollary 1 obtained by another method in §12.4. We rely on the following well-known result.

Lemma 2. (See [5, Theorems 30.1–30.2]) Let $f_t: \mathbb{R} \rightarrow [0,+\infty)$, where $t = 0, 1, 2, \dots$, be piecewise continuous functions such that $\alpha_{r,t} := \int_{-\infty}^{+\infty} v^r f_t(v) dv$ is finite and $\alpha_{0,t} = 1$ for each $r, t = 0, 1, 2, \dots$. If the series $\sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{r,0} z^r / r!$ has positive radius of convergence and $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_{r,t} = \alpha_{r,0}$ for each $r = 0, 1, 2, \dots$, then f_t converges to f_0 in distribution.

Proof of Theorem 1. Let us prove (C); then (A) and (B) will follow from Lemma 2 for $f_0(v) := F'(v)$ and $f_t(v) := tP(\lceil vt \rceil, t)$ because $F'(v) = 0$ for $|v| > 1$, hence $\alpha_{r,0} \leq \int_{-1}^{+1} |F'(v)| dv = 1$.

Rewrite Proposition 12 in a form, valid for each $x, t \in \mathbb{Z}$ independently on the parity:

$$\begin{pmatrix} a_1(x,t) \\ a_2(x,t) \end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \hat{a}_1(p,t) \\ \hat{a}_2(p,t) \end{pmatrix} e^{ip(x-1)} \frac{dp}{2\pi} := \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \hat{a}_{1+}(p,t) + \hat{a}_{1-}(p,t) \\ \hat{a}_{2+}(p,t) + \hat{a}_{2-}(p,t) \end{pmatrix} e^{ip(x-1)} \frac{dp}{2\pi}, \quad (37)$$

where

$$\begin{aligned}\hat{a}_{1\pm}(p, t) &= \mp \frac{ie^{ip}}{2\sqrt{1+\sin^2 p}} e^{\pm i\omega_p(t-1)}; \\ \hat{a}_{2\pm}(p, t) &= \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\sin p}{\sqrt{1+\sin^2 p}} \right) e^{\pm i\omega_p(t-1)};\end{aligned}\tag{38}$$

and $\omega_p := \arccos \frac{\cos p}{\sqrt{2}}$. Now (37) holds for each $x, t \in \mathbb{Z}$: Indeed, the identity

$$\begin{aligned}\exp(-i\omega_{p+\pi}(t-1) + i(p+\pi)(x-1)) &= \exp(-i(\pi - \omega_p)(t-1) + ip(x-1) + i\pi(x-1)) = \\ &= (-1)^{(x+t)} \exp(i\omega_p(t-1) + ip(x-1))\end{aligned}$$

shows that the contributions of the two summands $\hat{a}_{k\pm}(p, t)$ to integral (37) are equal for $t+x$ even and cancel for $t+x$ odd. The summand $\hat{a}_{k-}(p, t)$ contributes $a_k(x, t)/2$ by Proposition 12.

By the derivative property of Fourier series and the Parseval theorem, we have

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} \frac{x^r}{t^r} P(x, t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} a_1(x, t) \\ a_2(x, t) \end{pmatrix}^* \frac{x^r}{t^r} \begin{pmatrix} a_1(x, t) \\ a_2(x, t) \end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \hat{a}_1(p, t) \\ \hat{a}_2(p, t) \end{pmatrix}^* \frac{i^r}{t^r} \frac{\partial^r}{\partial p^r} \begin{pmatrix} \hat{a}_1(p, t) \\ \hat{a}_2(p, t) \end{pmatrix} \frac{dp}{2\pi}. \tag{39}$$

The derivative is estimated as follows:

$$\frac{\partial^r}{\partial p^r} \hat{a}_{k\pm}(p, t) = \left(\pm i(t-1) \frac{\partial \omega_p}{\partial p} \right)^r \hat{a}_{k\pm}(p, t) + O_r(t^{r-1}) = \left(\pm \frac{i(t-1) \sin p}{\sqrt{1+\sin^2 p}} \right)^r \hat{a}_{k\pm}(p, t) + O_r(t^{r-1}). \tag{40}$$

Indeed, differentiate (38) r times using the Leibnitz rule. If we differentiate the exponential factor $e^{\pm i\omega_p(t-1)}$ each time, then we get the main term. If we differentiate a factor rather than the exponential $e^{\pm i\omega_p(t-1)}$ at least once, then we get less than r factors of $(t-1)$, hence the resulting term is $O_r(t^{r-1})$ by compactness because it is continuous and 2π -periodic in p .

Substituting (40) into (39) we arrive at

$$\begin{aligned}\sum_{x \in \mathbb{Z}} \frac{x^r}{t^r} P(x, t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \hat{a}_1(p, t) \\ \hat{a}_2(p, t) \end{pmatrix}^* \left(\frac{\sin p}{\sqrt{1+\sin^2 p}} \right)^r \begin{pmatrix} (-1)^r \hat{a}_{1+}(p, t) + \hat{a}_{1-}(p, t) \\ (-1)^r \hat{a}_{2+}(p, t) + \hat{a}_{2-}(p, t) \end{pmatrix} \frac{dp}{2\pi} + O_r\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin p}{\sqrt{1+\sin^2 p}} \right)^r \frac{1}{2} \left((-1)^r \left(1 - \frac{\sin p}{\sqrt{1+\sin^2 p}} \right) + 1 + \frac{\sin p}{\sqrt{1+\sin^2 p}} \right) \frac{dp}{2\pi} + O_r\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\sin p}{\sqrt{1+\sin^2 p}} \right)^r \left(1 + \frac{\sin p}{\sqrt{1+\sin^2 p}} \right) \frac{dp}{\pi} + O_r\left(\frac{1}{t}\right) = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{v^r dv}{\pi(1-v)\sqrt{1-2v^2}} + O_r\left(\frac{1}{t}\right).\end{aligned}$$

Here the 2nd equality follows from $\hat{a}_{1\pm}(p, t)^* \hat{a}_{1\pm}(p, t) + \hat{a}_{2\pm}(p, t)^* \hat{a}_{2\pm}(p, t) = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\sin p}{\sqrt{1+\sin^2 p}} \right)$ and $\hat{a}_{1\pm}(p, t)^* \hat{a}_{1\mp}(p, t) + \hat{a}_{2\pm}(p, t)^* \hat{a}_{2\mp}(p, t) = 0$. The 3rd one is obtained by the changes of variables $p \mapsto -p$ and $p \mapsto \pi - p$ applied to the integral over $[-\pi/2, \pi/2]$. The 4th one is obtained by the change of variables $v = \sin p / \sqrt{1+\sin^2 p}$ so that $dp = d\arcsin \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = dv/(1-v^2)\sqrt{1-2v^2}$. \square

12.3 The main result: the stationary phase method (Theorem 2)

In this subsection we prove Theorem 2. First we outline the plan of the argument, then prove the theorem modulo some technical lemmas, and finally the lemmas themselves.

The plan is to apply the Fourier transform and the *stationary phase method* to the resulting oscillatory integral. The proof has 4 steps, with the first two known before ([1, §4], [47, §2]):

Step 1: computing the main term in the asymptotic formula;

Step 2: estimating approximation error arising from neighborhoods of stationary points;

Step 3: estimating approximation error arising from a neighborhood of the origin;

Step 4: estimating error arising from the complements to those neighborhoods.

Proof of Theorem 2 modulo some lemmas. Derive the asymptotic formula for $a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$; the derivation for $a_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$ is analogous and is discussed at the end of the proof. By Proposition 12 and the identity $e^{i\omega_p + \pi/\varepsilon t - i(p+\pi/\varepsilon)x} = e^{i(\pi/\varepsilon - \omega_p)t - ipx - i\pi x/\varepsilon} = -e^{-i\omega_p t - ipx}$ for $(t + x)/\varepsilon$ odd, we get

$$a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) = \frac{m\varepsilon^2}{2\pi i} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{i\omega_p t - ipx}}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} dp = \int_{-\pi/2\varepsilon}^{\pi/2\varepsilon} g(p)(e(f_+(p)) - e(f_-(p))) dp, \quad (41)$$

where $e(z) := e^{2\pi iz}$ and

$$f_{\pm}(p) = \frac{1}{2\pi} \left(-px \pm \frac{t}{\varepsilon} \arccos \frac{\cos(p\varepsilon)}{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}} \right), \quad (42)$$

$$g(p) = \frac{m\varepsilon^2}{2\pi i \sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}}. \quad (43)$$

Step 1. We estimate oscillatory integral (41) using the following known technical result.

Lemma 3 (Weighted stationary phase integral). [21, Lemma 5.5.6] *Let $f(p)$ be a real function, four times continuously differentiable for $\alpha \leq p \leq \beta$, and let $g(p)$ be a real function, three times continuously differentiable for $\alpha \leq p \leq \beta$. Suppose that there are positive parameters M, N, T, U , with*

$$M \geq \beta - \alpha, \quad N \geq M/\sqrt{T},$$

and positive constants C_r such that, for $\alpha \leq p \leq \beta$,

$$|f^{(r)}(p)| \leq C_r T/M^r, \quad |g^{(s)}(p)| \leq C_s U/N^s,$$

for $r = 2, 3, 4$ and $s = 0, 1, 2, 3$, and

$$f''(p) \geq T/C_2 M^2.$$

Suppose also that $f'(p)$ changes sign from negative to positive at a point $p = \gamma$ with $\alpha < \gamma < \beta$. If T is sufficiently large in terms of the constants C_r , then we have

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} g(p)e(f(p)) dp &= \frac{g(\gamma)e(f(\gamma) + 1/8)}{\sqrt{f''(\gamma)}} + \frac{g(\beta)e(f(\beta))}{2\pi i f'(\beta)} - \frac{g(\alpha)e(f(\alpha))}{2\pi i f'(\alpha)} \\ &\quad + O_{C_0, \dots, C_4} \left(\frac{M^4 U}{T^2} \left(1 + \frac{M}{N} \right)^2 \left(\frac{1}{(\gamma - \alpha)^3} + \frac{1}{(\beta - \gamma)^3} + \frac{\sqrt{T}}{M^3} \right) \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Here the first term involving the values at the stationary point γ is the main term, and the boundary terms involving the values at the endpoints α and β are going to cancel out in Step 3.

Lemma 4. (Cf. [23, (25)], [1, §4]) *Assume (8); then on $[-\frac{\pi}{2\varepsilon}, \frac{\pi}{2\varepsilon}]$, the function $f_{\pm}(p)$ given by (42) has a unique critical point*

$$\gamma_{\pm} = \pm \frac{1}{\varepsilon} \arcsin \frac{m\varepsilon x}{\sqrt{t^2 - x^2}}. \quad (45)$$

To estimate integral (41), we are going to apply Lemma 3 twice, for the functions $f(p) = \pm f_{\pm}(p)$ in appropriate neighborhoods of their critical points γ_{\pm} . In the case of $f(p) = -f_{-}(p)$, we perform complex conjugation of both sides of (44). Then the total contribution of the two resulting main terms is

$$\text{MainTerm} := \frac{g(\gamma_+)e(f_+(\gamma_+) + 1/8)}{\sqrt{f''_+(\gamma_+)}} - \frac{g(\gamma_-)e(f_-(\gamma_-) - 1/8)}{\sqrt{-f''_-(\gamma_-)}}. \quad (46)$$

A direct but long computation (see [44, §2]) then gives the desired main term in the theorem:

Lemma 5. (See [44, §2]) *Assume (8), (11), (42)–(43), (45); then expression (46) equals*

$$\text{MainTerm} = \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi}} (t^2 - (1 + m^2\varepsilon^2)x^2)^{-1/4} \sin \theta(x, t, m, \varepsilon).$$

Step 2. To estimate the approximation error, we need to specify the particular values of parameters which Lemma 3 is applied for:

$$M = N = m, \quad T = mt, \quad U = \varepsilon. \quad (47)$$

Lemma 6. *If $\varepsilon \leq 1/m$ then functions (42)–(43) and parameters (47) satisfy the inequalities*

$$\left| f_{\pm}^{(r)}(p) \right| \leq 3T/M^r, \quad \left| g^{(s)}(p) \right| \leq 3U/N^s \quad \text{for } p \in \mathbb{R}, \quad r = 2, 3, 4, \quad s = 0, 1, 2, 3.$$

We also need to specify the interval

$$[\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}] := [\gamma_{\pm} - m\delta/2, \gamma_{\pm} + m\delta/2]. \quad (48)$$

To estimate the derivative $|f''_{\pm}(p)|$ from below, we make sure that we are apart its roots $\pm\pi/2\varepsilon$.

Lemma 7. *Assume (8), (45); then interval (48) is contained in $[-\pi/2\varepsilon + m\delta/2, \pi/2\varepsilon - m\delta/2]$.*

The wise choice of the interval provides the following more technical estimate.

Lemma 8. *Assume (8), (42), (45), and (48). Then for each $p \in [\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]$ we have*

$$|f''_{\pm}(p)| \geq \frac{t\delta^{3/2}}{24\pi m}.$$

This gives $|f''_{\pm}(p)| \geq T/C_2 M^2$ for $C_2 := 24\pi\delta^{-3/2}$ under notation (47). Now all the assumptions of Lemma 3 have been verified ($M \geq \beta_{\pm} - \alpha_{\pm}$ and $N \geq M/\sqrt{T}$ are automatic because $\delta \leq 1$ and $t > C_{\delta}/m$ by (8)). Apply the lemma to $g(p)$ and $\pm f_{\pm}(p)$ on $[\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]$ (the minus sign before $f_{-}(p)$ guarantees the inequality $f''_{-}(p) > 0$ and the factor of i inside $g(p)$ is irrelevant for application of the lemma). We arrive at the following estimate for the approximation error on those intervals.

Lemma 9. (See [44, §4]) *Parameters (45) and (47)–(48) satisfy*

$$\frac{M^4 U}{T^2} \left(1 + \frac{M}{N}\right)^2 \left(\frac{1}{(\gamma_{\pm} - \alpha_{\pm})^3} + \frac{1}{(\beta_{\pm} - \gamma_{\pm})^3} + \frac{\sqrt{T}}{M^3} \right) = O_{\delta} \left(\frac{\varepsilon}{m^{1/2} t^{3/2}} \right).$$

Although that is only a part of the error, it is already of the same order as in the theorem.

Step 3. To estimate the approximation error outside $[\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]$, we use another known technical result.

Lemma 10 (Weighted first derivative test). [21, Lemma 5.5.5] Let $f(p)$ be a real function, three times continuously differentiable for $\alpha \leq p \leq \beta$, and let $g(p)$ be a real function, twice continuously differentiable for $\alpha \leq p \leq \beta$. Suppose that there are positive parameters M, N, T, U , with $M \geq \beta - \alpha$, and positive constants C_r such that, for $\alpha \leq p \leq \beta$,

$$|f^{(r)}(p)| \leq C_r T/M^r, \quad |g^{(s)}(p)| \leq C_s U/N^s,$$

for $r = 2, 3$ and $s = 0, 1, 2$. If $f'(p)$ and $f''(p)$ do not change sign on the interval $[\alpha, \beta]$, then

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} g(p)e(f(p)) dp &= \frac{g(\beta)e(f(\beta))}{2\pi i f'(\beta)} - \frac{g(\alpha)e(f(\alpha))}{2\pi i f'(\alpha)} \\ &\quad + O_{C_0, \dots, C_3} \left(\frac{TU}{M^2} \left(1 + \frac{M}{N} + \frac{M^3 \min |f'(p)|}{N^2 T} \right) \frac{1}{\min |f'(p)|^3} \right). \end{aligned}$$

This lemma in particular requires the interval to be sufficiently small. By this reason we decompose the initial interval $[-\pi/2\varepsilon, \pi/2\varepsilon]$ into a large number of intervals by the points

$$-\frac{\pi}{2\varepsilon} = \alpha_{-K} < \beta_{-K} = \alpha_{-K+1} < \beta_{-K+1} = \alpha_{-K+2} < \cdots = \alpha_i < \hat{\beta}_i = \alpha_{\pm} < \beta_{\pm} = \hat{\alpha}_j < \beta_j = \cdots < \beta_{K-1} = \frac{\pi}{2\varepsilon}.$$

Here α_{\pm} and β_{\pm} are given by (48) above. The other points are given by

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{2\varepsilon K}, \quad \beta_k = \frac{(k+1)\pi}{2\varepsilon K}, \quad \text{where } K = 2 \left\lceil \frac{\pi}{m\varepsilon} \right\rceil \quad \text{and} \quad k = -K, \dots, i, j+1, \dots, K-1. \quad (49)$$

The indices i and j are the minimal ones such that $\frac{(i+1)\pi}{2\varepsilon K} > \alpha_{\pm}$ and $\frac{(j+1)\pi}{2\varepsilon K} > \beta_{\pm}$. Thus all the resulting intervals except $[\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]$ and its neighbors have the same length $\frac{\pi}{2\varepsilon K}$. (Although it is more conceptual to decompose using a geometric sequence rather than arithmetic one, this does not affect the final estimate here.)

We have already applied Lemma 3 to $[\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]$ and we are going to apply Lemma 10 to each of the remaining intervals in the decomposition for $f(p) = f_{\pm}(p)$ (this time it is not necessary to change the sign of $f_{-}(p)$). After summation of the resulting estimates, all the terms involving the values $f_{\pm}(\alpha_k)$ and $f_{\pm}(\beta_k)$ at the endpoints, except the leftmost and the rightmost ones, are going to cancel out. The remaining boundary terms give

$$\text{BoundaryTerm} := \frac{g\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)e(f_{+}\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right))}{2\pi i f'_{+}\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)} - \frac{g\left(-\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)e(f_{+}\left(-\frac{\pi}{2\varepsilon}\right))}{2\pi i f'_{+}\left(-\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)} - \frac{g\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)e(f_{-}\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right))}{2\pi i f'_{-}\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)} + \frac{g\left(-\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)e(f_{-}\left(-\frac{\pi}{2\varepsilon}\right))}{2\pi i f'_{-}\left(-\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)}. \quad (50)$$

Lemma 11. (See [44, §5]) For $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ such that $(x+t)/\varepsilon$ is odd, expression (50) vanishes.

It remains to estimate the error terms. We start estimates with the central intervals $[\alpha_0, \beta_0]$ and $[\alpha_{-1}, \beta_{-1}]$ (possibly without parts cut out by $[\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]$); they require a special treatment. Apply Lemma 10 to the intervals for the same functions (42)–(43) and the same values (47) of the parameters M, N, T, U as in Step 2. All the assumptions of the lemma have been already verified in Lemma 6; we have $\beta_0 - \alpha_0 \leq \pi/2\varepsilon K = \pi/4\varepsilon \lceil \frac{\pi}{m\varepsilon} \rceil < m = M$ and $f''_{\pm}(p) \neq 0$ as well. We are thus left to estimate $|f'_{\pm}(p)|$ from below.

Lemma 12. Assume (8), (42), (45), (48); then for each $p \in [-\pi/2\varepsilon, \pi/2\varepsilon] \setminus [\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]$ we get

$$|f'_{\pm}(p)| \geq t\delta^{5/2}/48\pi.$$

Then the approximation error on the central intervals is estimated as follows.

Lemma 13. (See [44, §6]) Assume (8), (45), and (48). Then parameters (47) and functions (42) satisfy

$$\frac{TU}{M^2} \left(1 + \frac{M}{N} + \frac{M^3 \min_{p \in [\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]} |f'_{\pm}(p)|}{N^2 T} \right) \frac{1}{\min_{p \in [\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]} |f'_{\pm}(p)|^3} = O\left(\frac{\varepsilon}{mt^2\delta^{15/2}}\right).$$

This value is $O_\delta(\varepsilon/m^{1/2}t^{3/2})$ because $t > C_\delta/m$ by (8). Hence the approximation error on the central intervals is within the remainder of the theorem.

Step 4. To estimate the approximation error on the other intervals $[\alpha_k, \beta_k]$, where we assume that $k > 0$ without loss of generality, we apply Lemma 10 with slightly different parameters:

$$T = mt/k, \quad M = mk, \quad U = \varepsilon/k, \quad N = mk. \quad (51)$$

Lemma 14. For $0 < k < K$ and $\varepsilon \leq 1/m$, parameters (51) and (49), functions (42)–(43) on $[\alpha_k, \beta_k]$ satisfy all the assumptions of Lemma 10 possibly except the one on the sign of $f'(p)$.

Since the neighborhood $[\alpha_\pm, \beta_\pm]$ of the root of $f'(p)$ is cut out, it follows that $f'(p)$ has constant sign on the remaining intervals, and by Lemma 10 their contribution to the error is estimated as follows.

Lemma 15. (See [44, §7]) Assume (8), (45), (48), $0 < k < K$. Then functions (42) and parameters (51) satisfy

$$\frac{TU}{M^2} \left(1 + \frac{M}{N} + \frac{M^3 \min_{p \notin [\alpha_\pm, \beta_\pm]} |f'_\pm(p)|}{N^2 T} \right) \frac{1}{\min_{p \notin [\alpha_\pm, \beta_\pm]} |f'_\pm(p)|^3} = O\left(\frac{\varepsilon}{k^2 m t^2 \delta^{15/2}}\right).$$

Summation over all k gives the approximation error

$$\sum_{k=1}^K O\left(\frac{\varepsilon}{k^2 m t^2 \delta^{15/2}}\right) = O\left(\frac{\varepsilon}{m t^2 \delta^{15/2}} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}\right) = O_\delta\left(\frac{\varepsilon}{m^{1/2} t^{3/2}}\right).$$

because the series inside big-O converges and $t > C_\delta/m$. Thus the total approximation error on all the intervals is within the error term in the theorem, which completes the proof of (9).

The derivation of the asymptotic formula for $a_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$ is analogous. By Proposition 12 for $(x + t)/\varepsilon$ even we get

$$\begin{aligned} a_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \left(1 + \frac{\sin(p\varepsilon)}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} \right) e^{i\omega_p t - ipx} dp \\ &= \int_{-\pi/2\varepsilon}^{\pi/2\varepsilon} [g_+(p)e(f_+(p)) + g_-(p)e(f_-(p))] dp, \end{aligned} \quad (52)$$

where $f_\pm(p)$ are the same as above (see (42)) and

$$g_\pm(p) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \left(1 \pm \frac{\sin(p\varepsilon)}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} \right). \quad (53)$$

One repeats the argument of Steps 1–4 with $g(p)$ replaced by $g_\pm(p)$. The particular form of $g(p)$ was only used in Lemmas 5, 6, 11, 14. The analogues of Lemmas 5 and 11 for $g_\pm(p)$ are obtained by direct checking [44, §13]. Lemma 6 holds for $g_\pm(p)$: one needs not to repeat the proof because $g_\pm(p) = (\varepsilon/t)(f'_\pm(p) + (x + t)/2\pi)$ [44, §1]. But parameters (51) and Lemma 14 should be replaced by the following ones (then the analogue of Lemma 15 holds):

$$T = mt/k, \quad M = mk, \quad U = \varepsilon, \quad N = mk^{3/2}. \quad (54)$$

Lemma 16. For $0 < k < K$ and $\varepsilon \leq 1/m$, parameters (54) and (49), functions (42) and (53) on $[\alpha_k, \beta_k]$ satisfy all the assumptions of Lemma 10 possibly except the one on the sign of $f'(p)$.

Again, one needs not to repeat the proof: Lemma 16 follows from Lemma 14 and the expression of g_\pm through f'_\pm .

This concludes the proof of Theorem 2 modulo the lemmas. \square

Now we prove the lemmas. Lemmas 5, 9, 11, 13, 15 are proved by direct checking [44]. The following expressions [44, §1,3] are used frequently in the proofs of the other lemmas:

$$f'_\pm(p) = \frac{1}{2\pi} \left(-x \pm \frac{t \sin p\varepsilon}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon}} \right); \quad (55)$$

$$f''_\pm(p) = \pm \frac{m^2\varepsilon^3 t \cos(p\varepsilon)}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{3/2}} \quad (56)$$

Proof of Lemma 4. Using (55) and solving the quadratic equation $f'_\pm(p) = 0$ in $\sin p\varepsilon$, we get (45). The assumption $|x|/t < 1/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}$ from (8) guarantees that the arcsine exists. \square

Proof of Lemma 6. By the computation of the derivatives in [44, §3] and the assumption $m\varepsilon \leq 1$ we get

$$\begin{aligned} |g(p)| &= \frac{m\varepsilon^2}{2\pi\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} \leq \frac{m\varepsilon^2}{2\pi\sqrt{m^2\varepsilon^2 + 0}} \leq \varepsilon = U, \\ |g^{(1)}(p)| &= \frac{m\varepsilon^3 |\sin(p\varepsilon) \cos(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{3/2}} \leq \frac{m\varepsilon^3 |\sin(p\varepsilon) \cos(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + 0) (0 + \sin^2(p\varepsilon))^{1/2}} \leq \frac{\varepsilon}{m} = \frac{U}{N}, \\ |g^{(2)}(p)| &= \frac{m\varepsilon^4 |m^2\varepsilon^2 + \sin^4(p\varepsilon) - 2(1 + m^2\varepsilon^2) \sin^2(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{5/2}} \leq \frac{m\varepsilon^4 (3m^2\varepsilon^2 + 3\sin^2(p\varepsilon))}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{5/2}} \leq \frac{\varepsilon}{m^2} = \frac{U}{N^2}, \\ |g^{(3)}(p)| &= \frac{m\varepsilon^5 |\sin(p\varepsilon) \cos(p\varepsilon)| \cdot |4m^4\varepsilon^4 + 9m^2\varepsilon^2 + \sin^4(p\varepsilon) - (6 + 10m^2\varepsilon^2) \sin^2(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{7/2}} \leq \frac{3\varepsilon}{m^3} = \frac{3U}{N^3}, \\ |f_\pm^{(2)}(p)| &= \frac{m^2\varepsilon^3 t \cos(p\varepsilon)}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{3/2}} \leq \frac{t}{m} = \frac{T}{M^2}, \\ |f_\pm^{(3)}(p)| &= \frac{m^2\varepsilon^4 t |\sin(p\varepsilon)| (m^2\varepsilon^2 + \cos(2p\varepsilon) + 2)}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{5/2}} \leq \frac{4m^2\varepsilon^4 t |\sin(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{5/2}} \leq \frac{t}{m^2} = \frac{T}{M^3}, \\ |f_\pm^{(4)}(p)| &= \frac{m^2\varepsilon^5 t \cos(p\varepsilon) |m^4\varepsilon^4 + 3m^2\varepsilon^2 + 4\sin^4(p\varepsilon) - 2(6 + 5m^2\varepsilon^2) \sin^2(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{7/2}} \leq \frac{3t}{m^3} = \frac{3T}{M^4}. \end{aligned} \quad \square$$

Proof of Lemma 7. The lemma follows from the sequence of estimates

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2\varepsilon} - |\gamma_\pm| &= \frac{\sin(\pi/2) - \sin|\gamma_\pm\varepsilon|}{\varepsilon \cos(\theta\varepsilon)} \geq \frac{\sin(\pi/2) - \sin|\gamma_\pm\varepsilon|}{\varepsilon \cos(\gamma_\pm\varepsilon)} = \frac{1 - m\varepsilon|x|/\sqrt{t^2 - x^2}}{\varepsilon\sqrt{1 - m^2\varepsilon^2 x^2/(t^2 - x^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - x^2/t^2} - m\varepsilon|x|/t}{\varepsilon\sqrt{1 - (1 + m^2\varepsilon^2)x^2/t^2}} \geq \frac{1}{\varepsilon} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - \frac{m\varepsilon|x|}{t} \right) \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{1 + m^2\varepsilon^2}} - \frac{m\varepsilon|x|}{t} \right) = m \left(\frac{1}{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}} - \frac{|x|}{t} \right) \geq m\delta. \end{aligned}$$

Here the first equality holds for some $\theta \in [|\gamma_\pm|, \pi/2\varepsilon]$ by the Lagrange theorem. The next inequality holds because the cosine is decreasing on the interval. The next one is obtained by substituting (45). The rest is straightforward because $|x|/t < 1/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} - \delta$ by (8). \square

Proof of Lemma 8. Let us prove the lemma for $f_+(p)$ and $\gamma_+ \geq 0$; the other signs are considered analogously. Omit the index + in the notation of $f_+, \alpha_+, \beta_+, \gamma_+$. The lemma follows from

$$\begin{aligned} |f^{(2)}(p)| &\stackrel{(*)}{\geq} |f^{(2)}(\beta)| = \frac{m^2\varepsilon^3 t \cos(\beta\varepsilon)}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(\beta\varepsilon))^{3/2}} \stackrel{(**)}{\geq} \frac{m^2\varepsilon^3 t \cos(\gamma\varepsilon)}{4\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(\gamma\varepsilon) + 2m^2\varepsilon^2 t^2/(t^2 - x^2))^{3/2}} \\ &\stackrel{(***)}{=} \frac{m^2\varepsilon^3 t \sqrt{t^2 - (1 + m^2\varepsilon^2)x^2}(t^2 - x^2)}{4\pi (3m^2\varepsilon^2 t^2)^{3/2}} \geq \frac{t\sqrt{1 - (1 + m^2\varepsilon^2)x^2/t^2}(1 - x^2/t^2)}{24\pi m} \geq \frac{t\delta^{3/2}}{24\pi m}. \end{aligned}$$

Here inequality $(*)$ is proved as follows. By (56), $f^{(2)}(p)$ is increasing on $[-\pi/2\varepsilon, 0]$ and decreasing on $[0, \pi/2\varepsilon]$, because it is even, the numerator is decreasing on $[0, \pi/2\varepsilon]$ and the denominator is increasing on $[0, \pi/2\varepsilon]$. Thus $|f^{(2)}(p)| \geq \min\{|f^{(2)}(\beta)|, |f^{(2)}(\alpha)|\}$ for $p \in [\alpha, \beta]$ by Lemma 7. But since $f^{(2)}(p)$ is even and $\gamma \geq 0$, by (48) we get

$$|f^{(2)}(\alpha)| = |f^{(2)}(\gamma - m\delta/2)| = |f^{(2)}(|\gamma - m\delta/2|)| \geq |f^{(2)}(\gamma + m\delta/2)| = |f^{(2)}(\beta)|.$$

Inequality $(**)$ follows from the following two estimates. First, by Lemma 7 and the convexity of the cosine on the interval $[\gamma\varepsilon, \pi/2]$ we obtain

$$\cos(\beta\varepsilon) \geq \cos\left(\frac{\gamma\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\cos(\gamma\varepsilon) + \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos(\gamma\varepsilon)}{2}.$$

Second, using the inequality $\sin z - \sin w \leq z - w$ for $0 \leq w \leq z \leq \pi/2$, then $\delta \leq 1$ and (45)–(48), we get

$$\begin{aligned} \sin^2(\beta\varepsilon) - \sin^2(\gamma\varepsilon) &\leq \varepsilon(\beta - \gamma)(\sin(\beta\varepsilon) + \sin(\gamma\varepsilon)) \leq \varepsilon(\beta - \gamma)(\varepsilon(\beta - \gamma) + 2\sin(\gamma\varepsilon)) \\ &= \frac{m\varepsilon\delta}{2}\left(\frac{m\varepsilon\delta}{2} + \frac{2m\varepsilon x}{\sqrt{t^2 - x^2}}\right) \leq \frac{m\varepsilon t}{2\sqrt{t^2 - x^2}}\left(\frac{2m\varepsilon t}{\sqrt{t^2 - x^2}} + \frac{2m\varepsilon t}{\sqrt{t^2 - x^2}}\right) = \frac{2m^2\varepsilon^2 t^2}{t^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Equality $(***)$ is obtained from (45). The remaining estimates are straightforward. \square

Proof of Lemma 12. By Lemmas 4 and 8, for $p \in [\beta_+, \pi/2\varepsilon]$ we have

$$f'_+(p) = f'_+(\gamma_+) + \int_{\gamma_+}^p f''_+(p) dp \geq 0 + (p - \gamma_+)\frac{t\delta^{3/2}}{24\pi m} \geq (\beta_+ - \gamma_+)\frac{t\delta^{3/2}}{24\pi m} = \frac{t\delta^{5/2}}{48\pi}$$

because $f''_+(p) \geq 0$ by (56). For $p \in [-\pi/2\varepsilon, \alpha_+]$ and for $f'_-(p)$ the proof is analogous. \square

Proof of Lemma 14. Take $p \in [\alpha_k, \beta_k]$. By (49), the inequalities $\sin z \geq z/2$ for $z \in [0, \pi/2]$, and $m\varepsilon \leq 1$ we get

$$\begin{aligned} |g(p)| &= \frac{m\varepsilon^2}{2\pi\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} \leq \frac{m\varepsilon^2}{2\pi\sin(p\varepsilon)} \leq \frac{m\varepsilon^2}{\pi p\varepsilon} \leq \frac{2m\varepsilon^2 K}{\pi^2 k} = \frac{4m\varepsilon^2}{\pi^2 k} \left\lceil \frac{\pi}{m\varepsilon} \right\rceil = O\left(\frac{\varepsilon}{k}\right) = O(U), \\ |g^{(1)}(p)| &= \frac{m\varepsilon^3 |\sin(p\varepsilon) \cos(p\varepsilon)|}{2\pi(m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{3/2}} \leq \frac{m\varepsilon^3}{2\pi\sin^2(p\varepsilon)} = O\left(\frac{\varepsilon}{mk^2}\right) = O\left(\frac{U}{N}\right), \\ |g^{(2)}(p)| &= \frac{m\varepsilon^4 |m^2\varepsilon^2 + \sin^4(p\varepsilon) - 2(1 + m^2\varepsilon^2)\sin^2(p\varepsilon)|}{2\pi(m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{5/2}} \leq \frac{m\varepsilon^4 (3m^2\varepsilon^2 + 3\sin^2(p\varepsilon))}{2\pi(m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{5/2}} = O\left(\frac{U}{N^2}\right), \\ |g^{(3)}(p)| &= \frac{m\varepsilon^5 |\sin(p\varepsilon) \cos(p\varepsilon)| \cdot |4m^4\varepsilon^4 + 9m^2\varepsilon^2 + \sin^4(p\varepsilon) - (6 + 10m^2\varepsilon^2)\sin^2(p\varepsilon)|}{2\pi(m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{7/2}} = O\left(\frac{U}{N^3}\right), \\ |f_\pm^{(2)}(p)| &= \frac{m^2\varepsilon^3 t \cos(p\varepsilon)}{2\pi(m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{3/2}} = O\left(\frac{t}{mk^3}\right) = O\left(\frac{T}{M^2}\right), \\ |f_\pm^{(3)}(p)| &= \frac{m^2\varepsilon^4 t |\sin(p\varepsilon)| (m^2\varepsilon^2 + \cos(2p\varepsilon) + 2)}{2\pi(m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{5/2}} = O\left(\frac{t}{m^2 k^4}\right) = O\left(\frac{T}{M^3}\right), \\ |f_\pm^{(4)}(p)| &= \frac{m^2\varepsilon^5 t \cos(p\varepsilon) |m^4\varepsilon^4 + 3m^2\varepsilon^2 + 4\sin^4(p\varepsilon) - 2(6 + 5m^2\varepsilon^2)\sin^2(p\varepsilon)|}{2\pi(m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{7/2}} = O\left(\frac{t}{m^3 k^5}\right) = O\left(\frac{T}{M^4}\right). \end{aligned}$$

Further, $f''_\pm(p)$ does not change sign on the interval $[\alpha_k, \beta_k]$ because it vanishes only at $\pm\pi/2\varepsilon$. We also have $\beta_k - \alpha_k \leq \pi/2\varepsilon K = \pi/4\varepsilon \lceil \frac{\pi}{m\varepsilon} \rceil < m \leq mk = M$. \square

Remark 9. Analogously to Steps 3–4 above (with a lot of simplifications because there are no stationary points), one can prove that for each $m, \varepsilon, \delta > 0$ and each $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ satisfying $|x|/t > 1/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} + \delta$ and $\varepsilon \leq 1/m$, we have $a(x, t, m, \varepsilon) = O\left(\frac{\varepsilon}{mt^2\delta^3}\right)$ [45, Theorem 3B].

12.4 Large-time limit: the stationary phase method again (Corollaries 1–3)

In this section we prove Corollaries 1–3. First we outline the plan of the argument, then prove Corollary 1 modulo a technical lemma, then the lemma itself, and finally Corollaries 2–3.

The plan of the proof of Corollary 1 (and results such as Problems 4–5) consists of 4 steps (cf. arxiv preprint of [47] for a different realization of Steps 1–3):

Step 1: computing the main contribution to the sum, using asymptotic formulae (9)–(10);

Step 2: estimating the contribution coming from a trigonometric sum;

Step 3: estimating the error coming from replacing sum by an integral;

Step 4: estimating the contribution coming from outside of the interval where (9)–(10) hold.

Proof of Corollary 1 modulo some lemmas. **Step 1.** Fix $m, \varepsilon, \delta > 0$, denote $n := 1 + m^2\varepsilon^2$, $F(v) := F(v, m, \varepsilon)$, $V := 1/\sqrt{n} - \delta$, and fix v such that $-V \leq v \leq V$. Let us prove that if t is sufficiently large in terms of δ, m, ε , then

$$\sum_{\substack{-Vt < x \leq vt \\ x \in \varepsilon \mathbb{Z}}} P(x, t, m, \varepsilon) = F(v) - F(-V) + O_{\delta, m, \varepsilon} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}} \right). \quad (57)$$

This follows from the sequence of asymptotic formulae:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{-V(t+\varepsilon) < x \leq v(t+\varepsilon) \\ x \in \varepsilon \mathbb{Z}}} a_1^2(x, t+\varepsilon, m, \varepsilon) \stackrel{(*)}{=} \sum_{\substack{-V(t+\varepsilon) < x \leq v(t+\varepsilon) \\ (x+t)/\varepsilon \text{ odd}}} \left(\frac{2m\varepsilon^2}{\pi t} \left(1 - \frac{nx^2}{t^2} \right)^{-1/2} \sin^2 \theta(x, t, m, \varepsilon) + O_\delta \left(\frac{\varepsilon^2}{t^2} \right) \right) \\ & \stackrel{(**)}{=} \sum_{\substack{-Vt < x < vt \\ (x+t)/\varepsilon \text{ odd}}} \frac{m\varepsilon^2}{\pi t} \left(1 - \frac{nx^2}{t^2} \right)^{-1/2} - \sum_{\substack{-Vt < x < vt \\ (x+t)/\varepsilon \text{ odd}}} \frac{m\varepsilon^2}{\pi t} \left(1 - \frac{nx^2}{t^2} \right)^{-1/2} \cos 2\theta(x, t, m, \varepsilon) + O_\delta \left(\frac{\varepsilon}{t} \right) \\ & \stackrel{(***)}{=} \sum_{\substack{-Vt < x < vt \\ (x+t)/\varepsilon \text{ odd}}} \frac{m\varepsilon \cdot 2\varepsilon/t}{2\pi \sqrt{1 - nx^2/t^2}} + O_{\delta, m, \varepsilon} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}} \right) \stackrel{****}{=} \int_{-V}^v \frac{m\varepsilon dv}{2\pi \sqrt{1 - nv^2}} + O_{\delta, m, \varepsilon} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}} \right) \\ & = m\varepsilon \frac{\arcsin(\sqrt{nv}) - \arcsin(-\sqrt{nv})}{2\pi\sqrt{n}} + O_{\delta, m, \varepsilon} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

and an analogous asymptotic formula

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{-V(t+\varepsilon) < x \leq v(t+\varepsilon) \\ x \in \varepsilon \mathbb{Z}}} a_2^2(x, t+\varepsilon, m, \varepsilon) = \int_{-V}^v \frac{m\varepsilon(1+v)dv}{2\pi(1-v)\sqrt{1-nv^2}} + O_{\delta, m, \varepsilon} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}} \right) \\ & = F(v) - F(-V) - m\varepsilon \frac{\arcsin(\sqrt{nv}) - \arcsin(-\sqrt{nv})}{2\pi\sqrt{n}} + O_{\delta, m, \varepsilon} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}} \right). \end{aligned}$$

Here (*) follows from Theorem 2 because $|x|/t \leq |v|(t+\varepsilon)/t < V + \delta/2 = 1/\sqrt{n} - \delta/2$ for large enough t ; the product of the main term and the error term in (9) is estimated by ε^2/t^2 . Asymptotic formula (**) holds because the number of summands is less than t/ε and the (possibly) dropped first and last summands are less than $m\varepsilon^2/t\sqrt{\delta}$.

Step 2. Let us prove formula (**). We use the following simplified version of the stationary phase method.

Lemma 17. [26, Corollary from Theorem 4 in p. 17] *Under the assumptions of Lemma 3 (except the ones on $f'(p)$, $g^{(3)}(p)$, and the inequality $N \geq M/\sqrt{T}$), if $M = N$ and $M/C \leq T \leq CM^2$ for some $C > 0$, then*

$$\sum_{\alpha < p < \beta} g(p)e(f(p)) = O_{C, C_0, \dots, C_4} \left(\frac{(\beta - \alpha)U\sqrt{T}}{M} + \frac{UM}{\sqrt{T}} \right).$$

For notational convenience, assume that t/ε is odd; otherwise the proof is analogous. Then the summation index $x = 2p\varepsilon$ for some integer p . We apply Lemma 17 for the functions

$$f_{\pm}(p) = \pm \frac{1}{\pi} \theta(2p\varepsilon, t, m, \varepsilon) \quad \text{and} \quad g(p) = \frac{m\varepsilon^2}{\pi t} \left(1 - \frac{4n\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-1/2} \quad (59)$$

and the parameter values

$$M = N = T = t/\varepsilon, \quad U = \varepsilon/t, \quad \alpha = -Vt/2\varepsilon, \quad \beta = vt/2\varepsilon. \quad (60)$$

Lemma 18. *For $\varepsilon \leq 1/m$ there exist C, C_0, \dots, C_4 depending on δ, m, ε but not v, p such that parameters (60) and functions (59) satisfy all the assumptions of Lemma 17.*

Since parameters (60) satisfy $\frac{(\beta-\alpha)U\sqrt{T}}{M} + \frac{UM}{\sqrt{T}} = O(\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}})$, formula (***) follows.

Step 3. Let us prove formula (****). We use yet another known result.

Lemma 19 (Euler summation formula). [26, Remark to Theorem 1 in p. 3] *If $g(p)$ is continuously differentiable on $[\alpha, \beta]$ and $\rho(p) := 1/2 - \{p\}$, then*

$$\sum_{\alpha < p < \beta} g(p) = \int_{\alpha}^{\beta} g(p) dp + \rho(\beta)g(\beta) - \rho(\alpha)g(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} \rho(p)g'(p) dp.$$

Again assume without loss of generality that t/ε is odd. Apply Lemma 19 to the same $\alpha, \beta, g(p)$ (given by (59)–(60)) as in Step 2. By Lemma 18 we have $g(p) = O_{\delta, m, \varepsilon}(\varepsilon/t)$ and $g'(p) = O_{\delta, m, \varepsilon}(\varepsilon^2/t^2)$. Hence by Lemma 19 the difference between the sum and the integral in (****) is $O_{\delta, m, \varepsilon}(\varepsilon/t)$, and (57) follows.

Step 4. Let us prove the corollary for arbitrary $v \in (-1/\sqrt{n}; 1/\sqrt{n})$. By (57), for each δ, m, ε there are $C_1(\delta, m, \varepsilon)$ and $C_2(\delta, m, \varepsilon)$ such that for each $v \in [-1/\sqrt{n} + \delta, 1/\sqrt{n} - \delta]$ and each $t \geq C_1(\delta, m, \varepsilon)$ we have

$$\left| \sum_{(-1/\sqrt{n}+\delta)t < x \leq vt} P(x, t, m, \varepsilon) - F(v) \right| \leq F\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} + \delta\right) + C_2(\delta, m, \varepsilon) \sqrt{\frac{\varepsilon}{t}}.$$

Clearly, we may assume that $C_1(\delta, m, \varepsilon)$ and $C_2(\delta, m, \varepsilon)$ are decreasing functions in δ : the larger is the interval $[-\frac{1}{\sqrt{n}} + \delta, \frac{1}{\sqrt{n}} - \delta]$, the weaker is our error estimate in (*–****). Take $\delta(t)$ tending to 0 slowly enough so that $C_1(\delta(t), m, \varepsilon) \leq t$ for t sufficiently large in terms of m, ε and $C_2(\delta(t), m, \varepsilon) \sqrt{\frac{\varepsilon}{t}} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$. Denote $V(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} - \delta(t)$. Then since $F\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} + \delta\right) \rightarrow F\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$ as $\delta \rightarrow 0$ by the definition of $F(v)$, it follows that

$$\sum_{-V(t)t < x \leq vt} P(x, t, m, \varepsilon) \Rightarrow F(v) \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (61)$$

uniformly in $v \in (-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}})$. Similarly, since $F\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \delta\right) \rightarrow F\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$ as $\delta \rightarrow 0$, we get

$$\sum_{-V(t)t < x \leq V(t)t} P(x, t, m, \varepsilon) \rightarrow 1 \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

Then by Proposition 6 we get

$$\sum_{x \leq -V(t)t} P(x, t, m, \varepsilon) = 1 - \sum_{x > -V(t)t} P(x, t, m, \varepsilon) \leq 1 - \sum_{-V(t)t < x \leq V(t)t} P(x, t, m, \varepsilon) \rightarrow 0.$$

With (61), this implies the corollary for $v \in (-1/\sqrt{n}; 1/\sqrt{n})$. For $v \leq -1/\sqrt{n}$ and similarly for $v \geq 1/\sqrt{n}$, the corollary follows from $\sum_{x \leq vt} P(x, t, m, \varepsilon) \leq \sum_{x \leq -V(t)t} P(x, t, m, \varepsilon) \rightarrow 0$. \square

Now we prove the lemma and the remaining corollaries.

Proof of Lemma 18. The inequalities $M/C \leq T \leq CM^2$ and $M \geq \beta - \alpha$ are automatic for $C = 1$ because t/ε is a positive integer and $|V|, |v| \leq 1$. We estimate the derivatives (computed in [44, §9]) as follows, using the assumption $\varepsilon \leq 1/m$, $\alpha \leq p \leq \beta$, and setting $C_2 := \max\{1/m\varepsilon, 2/\delta^{3/2}\}$:

$$\begin{aligned} |g(p)| &= \frac{m\varepsilon^2}{\pi t} \left(1 - \frac{4n\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-1/2} \leq \frac{m\varepsilon^2}{\pi t \sqrt{1-nV^2}} \leq \frac{m\varepsilon^2}{t\sqrt{\delta}} \leq \frac{\varepsilon}{t\sqrt{\delta}} = O_\delta(U), \\ |g^{(1)}(p)| &= \frac{4m\varepsilon^4 n|p|}{\pi t^3} \left(1 - \frac{4n\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-3/2} \leq \frac{2m\varepsilon^3 n V t}{\pi t^3 (1-nV^2)^{3/2}} \leq \frac{m\varepsilon^3 n}{t^2 \delta^{3/2}} \leq \frac{2\varepsilon^2}{t^2 \delta^{3/2}} = O_\delta\left(\frac{U}{N}\right), \\ |g^{(2)}(p)| &= \frac{4m\varepsilon^4 n(8\varepsilon^2 np^2 + t^2)}{\pi t^5} \left(1 - \frac{4n\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-5/2} \leq \frac{4m\varepsilon^4 n(2nV^2 + 1)t^2}{\pi t^5 (1-nV^2)^{5/2}} = O_\delta\left(\frac{\varepsilon^3}{t^3}\right) = O_\delta\left(\frac{U}{N^2}\right), \\ |f^{(2)}(p)| &= \frac{4m\varepsilon^2}{\pi t} \left(1 - \frac{4\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{4n\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-1/2} \geq \frac{m\varepsilon^2}{t} \geq \frac{T}{C_2 M^2}, \\ |f^{(2)}(p)| &= \frac{4m\varepsilon^2}{\pi t} \left(1 - \frac{4\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{4n\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-1/2} \leq \frac{4m\varepsilon^2}{\pi t (1-V^2) \sqrt{1-nV^2}} \leq \frac{2m\varepsilon^2}{t \delta^{3/2}} \leq \frac{C_2 T}{M^2}, \\ |f^{(3)}(p)| &= \frac{16m\varepsilon^4 |(n+2)pt^2 - 12n\varepsilon^2 p^3|}{\pi t^5} \left(1 - \frac{4\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-2} \left(1 - \frac{4n\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-3/2} = O_\delta\left(\frac{T}{M^3}\right), \\ |f^{(4)}(p)| &= \frac{16m\varepsilon^4 |768n^2\varepsilon^6 p^6 - 48n(2n+5)\varepsilon^4 p^4 t^2 + 8(n^2-n+3)\varepsilon^2 p^2 t^4 + (n+2)t^6|}{\pi t^9 (1-4\varepsilon^2 p^2/t^2)^3 (1-4n\varepsilon^2 p^2/t^2)^{5/2}} = O_\delta\left(\frac{T}{M^4}\right). \end{aligned}$$

□

Proof of Corollary 2. We have $n_+(h \times w) - n_-(h \times w) = -2^{(w+h-1)/2} a_1(w-h, w+h)$ by the obvious bijection between the Young diagrams with exactly h rows and w columns, and checker paths from $(0,0)$ to $(w-h, w+h)$ passing through $(1,1)$ and $(w-h+1, w+h-1)$. Set $h := \lceil rw \rceil$. Apply Theorem 2 and Remark 9 (or Theorem 4) for

$$\delta = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{r-1}{r+1} \right|, \quad m = \varepsilon = 1, \quad x = w-h, \quad t = w+h-1.$$

This completes the proof in the case when $r > 3+2\sqrt{2}$. It remains to show that for $r < 3+2\sqrt{2}$ the value (11) is not bounded from $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ as $w \rightarrow \infty$.

Denote $v := \frac{h-w}{w+h-1}$ and $v_0 := \frac{r-1}{r+1}$. Write

$$\theta(vt, t, 1, 1) = t \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{2-2v^2}} - v \arcsin \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right) + \frac{\pi}{4} =: t\theta(v) + \frac{\pi}{4}.$$

Since $\theta(v) \in C^2[0; 1/\sqrt{2} - \delta]$, by the Taylor expansion it follows that

$$\theta(vt, t, 1, 1) = \frac{\pi}{4} + t\theta(v_0) + t(v-v_0)\theta'(v_0) + O_\delta(t(v-v_0)^2).$$

Substituting

$$v - v_0 = \frac{h-w}{w+h-1} - \frac{r-1}{r+1} = \frac{2h-2rw+r-1}{(r+1)(w+h-1)} = \frac{2\{-rw\}+r-1}{(r+1)t},$$

where $h = \lceil rw \rceil = rw + \{-rw\}$, we get

$$\begin{aligned} \theta(vt, t, 1, 1) &= \frac{\pi}{4} + (w+rw+\{-rw\}-1)\theta(v_0) + \frac{2\{-rw\}+r-1}{(r+1)}\theta'(v_0) + O_\delta\left(\frac{1}{w}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \theta(v_0) + v_0\theta'(v_0) + w(r+1)\theta(v_0) + \{-rw\} \left(\theta(v_0) + \frac{2}{(r+1)}\theta'(v_0) \right) + O_\delta\left(\frac{1}{w}\right) \\ &=: \pi(\alpha(r)w + \beta(r)\{-rw\} + \gamma(r)) + O_\delta\left(\frac{1}{w}\right). \end{aligned}$$

For almost every r , the numbers $1, r, \alpha(r)$ are linearly independent over the rational numbers because the graph of the function $\alpha(r) = (r+1)\theta\left(\frac{r-1}{r+1}\right)$ has just a countable number of intersection points with lines given by equations with rational coefficients. Hence by the Kronecker theorem for each $\Delta > 0$ there are infinitely many w such that

$$\{-rw\} < \Delta \quad \text{and} \quad |\{\alpha(r)w\} + \gamma(r) - \frac{1}{2}| < \Delta.$$

By (9), the corollary follows because those w satisfy

$$|\sin \theta(vt, t, 1, 1)| = 1 + O((1 + \beta(r))\Delta) + O_\delta\left(\frac{1}{w}\right) \quad \text{and} \quad 2^{(r+1)w/2} \leq 2^{(w+h)/2} \leq 2^{(r+1)w/2+\Delta}. \quad \square$$

We are going to deduce Corollary 3 from the results of [47].

Proof of Corollary 3. We apply [47, Corollary 1.5 and Theorem 1.1] for

$$n = t/\varepsilon - 1, \quad y_n = 2\varepsilon \left\lceil \frac{vt}{2\varepsilon} \right\rceil - 1, \quad \xi = v, \quad \phi = (0, 1)^T, \quad a = 1/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}, \quad b = m\varepsilon/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}.$$

Case $|v| > 1/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}$ follows from [47, Corollary 1.5]. Case $|v| < 1/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}$ follows from

$$\frac{2m\varepsilon^2}{\pi t(1-v)} \sqrt{\frac{a-|v|}{a+|v|}} + O_{m,\varepsilon,v}\left(\frac{1}{t^2}\right) \leq P\left(2\varepsilon \left\lceil \frac{vt}{2\varepsilon} \right\rceil, t, m, \varepsilon\right) \leq \frac{2m\varepsilon^2}{\pi t(1-v)} \sqrt{\frac{a+|v|}{a-|v|}} + O_{m,\varepsilon,v}\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad (62)$$

where $t \in 2\varepsilon\mathbb{Z}$ and $a := 1/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}$. Estimate (62) follows from [47, Theorem 1.1] because [47, Eq. (1.11)] satisfies $|\text{OSC}_n(\xi)| \leq \sqrt{A(\xi)^2 + B(\xi)^2} = |\xi|(1+\xi)/|a|$ (checked in [44, §18]). \square

Alternatively, (62) can be deduced from Theorem 2 using the method of §12.5.

12.5 Solution of the Feynman problem: Taylor expansions (Corollaries 4–5)

Here we deduce the solution of the Feynman problem from Theorem 2. For that purpose we approximate the functions in Theorem 2 by a few terms of their Taylor expansions.

Proof of Corollary 4. First derive an asymptotic formula for the function $\theta(x, t, m, \varepsilon)$ given by (11). Denote $n := 1 + m^2\varepsilon^2$. Since $1/\sqrt{1+z^2} = 1 + O(z^2)$, $\arcsin z = z + O(z^3)$ for $z \in [-1; 1]$, and $t/\sqrt{t^2-x^2} < 1/\sqrt{1-\sqrt{nx/t}} < 1/\sqrt{\delta}$, we get

$$\arcsin \frac{m\varepsilon t}{\sqrt{n(t^2-x^2)}} = \frac{m\varepsilon t}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-x^2}} + O\left(\frac{m^3\varepsilon^3}{n^{3/2}} \left(\frac{t}{\sqrt{t^2-x^2}}\right)^3\right) = \frac{m\varepsilon t}{\sqrt{t^2-x^2}} + O_\delta(m^3\varepsilon^3).$$

Combining with a similar asymptotic formula for $\arcsin \frac{m\varepsilon x}{\sqrt{t^2-x^2}}$, we get

$$\theta(x, t, m, \varepsilon) = \frac{mt^2}{\sqrt{t^2-x^2}} - \frac{mx^2}{\sqrt{t^2-x^2}} + \frac{\pi}{4} + \left(\frac{t+|x|}{\varepsilon}\right) O_\delta(m^3\varepsilon^3) = m\sqrt{t^2-x^2} + \frac{\pi}{4} + O_\delta(m^3\varepsilon^2 t).$$

Since

$$\left| \frac{\partial \sqrt{t^2-x^2}}{\partial t} \right| = \frac{t}{\sqrt{t^2-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{\delta}} \quad \text{and} \quad \left| \frac{\partial \sqrt{t^2-x^2}}{\partial x} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{t^2-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{\delta}},$$

by the Lagrange theorem it follows that

$$\begin{aligned} \theta(x, t - \varepsilon, m, \varepsilon) &= m\sqrt{t^2-x^2} + \frac{\pi}{4} + O_\delta(m\varepsilon + m^3\varepsilon^2 t), \\ \theta(x - \varepsilon, t - \varepsilon, m, \varepsilon) &= m\sqrt{t^2-x^2} + \frac{\pi}{4} + O_\delta(m\varepsilon + m^3\varepsilon^2 t). \end{aligned}$$

Consider the remaining factors in (9)–(10). By the Lagrange theorem, for some $\eta \in [0, nx^2/t^2]$ we get

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{nx^2}{t^2}\right)^{-1/4} - 1 &= \frac{nx^2}{t^2} \frac{(1-\eta)^{-5/4}}{4} \leq \frac{nx^2}{t^2} \left(1 - \frac{nx^2}{t^2}\right)^{-5/4} \\ &\leq \frac{x^2}{t^2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{x}{t}\right)^{-5/4} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{x}{t}\right)^{-5/4} \leq \frac{x^2}{t^2} \delta^{-5/2} = O_\delta\left(\frac{|x|}{t}\right). \end{aligned}$$

Hence for $t \geq 2\varepsilon$ we get

$$\left(1 - \frac{nx^2}{(t-\varepsilon)^2}\right)^{-1/4} = 1 + O_\delta\left(\frac{|x|}{t}\right) \quad \text{and} \quad \left(1 - \frac{n(x-\varepsilon)^2}{(t-\varepsilon)^2}\right)^{-1/4} = 1 + O_\delta\left(\frac{|x|+\varepsilon}{t}\right). \quad (63)$$

We also have

$$\sqrt{\frac{t-\varepsilon+x-\varepsilon}{t-x}} = \sqrt{1 + 2\frac{x-\varepsilon}{t-x}} = 1 + O\left(\frac{x-\varepsilon}{t-x}\right) = 1 + O_\delta\left(\frac{|x|+\varepsilon}{t}\right). \quad (64)$$

Substituting all the resulting asymptotic formulae into (9)–(10), we get

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a(x, t, m, \varepsilon) &= \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi t}} \left(\sin\left(m\sqrt{t^2-x^2} + \frac{\pi}{4}\right) + O_\delta\left(\frac{1}{mt} + \frac{|x|+\varepsilon}{t} + m\varepsilon + m^3\varepsilon^2 t\right) \right), \\ \operatorname{Im} a(x, t, m, \varepsilon) &= \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi t}} \left(\cos\left(m\sqrt{t^2-x^2} + \frac{\pi}{4}\right) + O_\delta\left(\frac{1}{mt} + \frac{|x|+\varepsilon}{t} + m\varepsilon + m^3\varepsilon^2 t\right) \right). \end{aligned}$$

Since $m\varepsilon \leq \frac{1}{mt} + m^3\varepsilon^2 t$ and $\frac{\varepsilon}{t} \leq \frac{1}{mt}$ by the assumption $\varepsilon \leq 1/m$, it follows that the error terms can be rewritten in the required form. \square

Proof of Corollary 5. This follows directly from Corollary 4 by plugging in the Taylor expansion

$$\sqrt{t^2-x^2} = t \left(1 - \frac{x^2}{2t^2} + O_\delta\left(\frac{x^4}{t^4}\right)\right) \quad \text{for} \quad \frac{|x|}{t} < 1 - \delta. \quad \square$$

Proof of Example 4. The case $(x_n, t_n, \varepsilon_n) = (n^3, n^4, 1/n^4)$ follows from Corollary 4 by plugging in the Taylor expansion

$$\sqrt{t^2-x^2} = t \left(1 - \frac{x^2}{2t^2} - \frac{x^4}{8t^4} + O\left(\frac{x^6}{t^6}\right)\right) \quad \text{for} \quad \frac{|x|}{t} \leq \frac{1}{2}.$$

In the remaining cases, we need to estimate $\theta(\varepsilon, t, m, \varepsilon)$ given by (11) for $t \geq 2\varepsilon$ and $\varepsilon \leq 1/m$. Since $m\varepsilon t / \sqrt{(1+m^2\varepsilon^2)(t^2-\varepsilon^2)} \leq \sqrt{2/3}$ for such t, m, ε , and $\arcsin z - \arcsin w = O(z-w)$ for $0 < w < z < \sqrt{2/3}$, and $1/\sqrt{1-z^2} - 1 = O(z^2)$ for $|z| \leq 1/2$, we get

$$\begin{aligned} \theta(\varepsilon, t, m, \varepsilon) - \theta(0, t, m, \varepsilon) &= \\ &= \frac{t}{\varepsilon} \arcsin \frac{m\varepsilon t}{\sqrt{(1+m^2\varepsilon^2)(t^2-\varepsilon^2)}} - \frac{t}{\varepsilon} \arcsin \frac{m\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} - \arcsin \frac{m\varepsilon^2}{\sqrt{t^2-\varepsilon^2}} = O\left(\frac{m\varepsilon^2}{t}\right) = O\left(\frac{1}{mt}\right). \end{aligned}$$

Then by Theorem 2 and (63)–(64) for $x = 0$ and $\delta = 1/\sqrt{2}$, we get

$$a(0, t, m, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi t}} \exp\left(-i\left(\frac{t}{\varepsilon} - 1\right) \arctan(m\varepsilon) + \frac{i\pi}{4}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{mt}\right)\right). \quad (65)$$

In the case when $\varepsilon = \varepsilon_n = 1/2n$ and $t = t_n = (2n)^2$ the right side of (65) is equivalent to the right side of (5) times $e^{im^3/3}$ because $\arctan(m\varepsilon) = m\varepsilon - m^3\varepsilon^3/3 + O(m^5\varepsilon^5)$.

In the case when $\varepsilon = \varepsilon_n = \text{const}$ and $t = t_n = 2n\varepsilon$ the ratio of the right sides of (65) and (5) has no limit because $\arctan(m\varepsilon) - m\varepsilon$ is not an integer multiple of π for $0 < \varepsilon < 1/m$. \square

12.6 Continuum limit: the tail-exchange method (Theorem 5 and Corollaries 6–7)

Proof of Theorem 5. The proof is based on the *tail-exchange method* and consists of 5 steps:

Step 1: dropping the normalization factor in (6)–(7), which is of order 1.

Step 2: dropping the summands in (6)–(7) starting from a number T (we take $T = \lceil \log \frac{\delta}{\varepsilon} \rceil$).

Step 3: replacing the binomial coefficients by powers in each of the remaining summands.

Step 4: replacing the resulting sum by infinite power series.

Step 5: combining the error bounds in the previous steps to get the total approximation error.

Let us derive the asymptotic formula for $a_1(x, t, m, \varepsilon)$; the argument for $a_2(x, t, m, \varepsilon)$ is analogous.

Step 1. Consider the 1st factor in (6). We have $0 \geq (1 - t/\varepsilon)/2 \geq -t/\varepsilon$ because $t \geq \delta \geq \varepsilon$. Exponentiating, we get

$$1 \geq (1 + m^2 \varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} \geq (1 + m^2 \varepsilon^2)^{-t/\varepsilon} \geq e^{-m^2 \varepsilon^2 t / \varepsilon} \geq 1 - m^2 t \varepsilon,$$

where in the latter two inequalities we used that $e^a \geq 1 + a$ for each $a \in \mathbb{R}$. Thus

$$(1 + m^2 \varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} = 1 + O(m^2 t \varepsilon).$$

Step 2. Consider the T -th partial sum in (6) with $T = \lceil \log \frac{\delta}{\varepsilon} \rceil$ summands. The total number of summands is indeed at least T because $(t - |x|)/2\varepsilon \geq \delta/2\varepsilon \geq \log(\delta/\varepsilon)$ by the inequalities $t - |x| \geq \delta > \varepsilon$ and $e^a \geq 1 + a + a^2/2 \geq 2a$ for each $a \geq 0$.

For $r \geq T$ the ratio of consecutive summands in (6) equals

$$(m\varepsilon)^2 \frac{((t+x)/2\varepsilon - 1 - r)((t-x)/2\varepsilon - 1 - r)}{(r+1)^2} < (m\varepsilon)^2 \cdot \frac{(t+x)}{2\varepsilon T} \cdot \frac{(t-x)}{2\varepsilon T} = \frac{m^2 s^2}{4T^2} < \frac{1}{2},$$

where the latter inequality follows from $T = \lceil \log \frac{\delta}{\varepsilon} \rceil > \lceil \log e^{3ms} \rceil \geq 3ms$. Therefore, the error term (i.e., the sum over $r \geq T$) is less than the sum of geometric series with ratio $\frac{1}{2}$. Thus by Proposition 11 we get

$$\begin{aligned} a_1(x, t, m, \varepsilon) &= m\varepsilon (1 + O(m^2 t \varepsilon)) \cdot \left[\sum_{r=0}^{T-1} (-1)^r \binom{(t+x)/2\varepsilon - 1}{r} \binom{(t-x)/2\varepsilon - 1}{r} (m\varepsilon)^{2r} + \right. \\ &\quad \left. + O\left(\binom{(t+x)/2\varepsilon - 1}{T} \binom{(t-x)/2\varepsilon - 1}{T} (m\varepsilon)^{2T}\right)\right]. \end{aligned}$$

Step 3. To approximate the sum, take integers $L := (t \pm x)/2\varepsilon$, $r < T$, and transform binomial coefficients as follows:

$$\binom{L-1}{r} = \frac{(L-1) \cdots (L-r)}{r!} = \frac{L^r}{r!} \left(1 - \frac{1}{L}\right) \cdots \left(1 - \frac{r}{L}\right).$$

Here

$$\frac{r}{L} = \frac{2r\varepsilon}{t \pm x} < \frac{2T\varepsilon}{\delta} = \frac{2\varepsilon}{\delta} \left\lceil \log \frac{\delta}{\varepsilon} \right\rceil \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} \left(\log \frac{\delta}{\varepsilon} + 1 \right) < \frac{1}{2},$$

because $\delta/\varepsilon \geq 16$, and $2(\log a + 1)/a$ decreases for $a \geq 16$ and is less than $1/2$ for $a = 16$. Applying the inequality $1 - a \geq e^{-2a}$ for $0 \leq a \leq 1/2$, then the inequalities $1 - a \leq e^{-a}$ and $L \geq \delta/2\varepsilon$, we get

$$\left(1 - \frac{1}{L}\right) \cdots \left(1 - \frac{r}{L}\right) \geq e^{-2/L} e^{-4/L} \cdots e^{-2r/L} = e^{-r(r+1)/L} \geq e^{-T^2/L} \geq 1 - \frac{T^2}{L} \geq 1 - \frac{2T^2\varepsilon}{\delta}.$$

Therefore,

$$\frac{(t \pm x)^r}{r!(2\varepsilon)^r} \geq \binom{(t \pm x)/2\varepsilon - 1}{r} \geq \frac{(t \pm x)^r}{r!(2\varepsilon)^r} \left(1 - \frac{2T^2\varepsilon}{\delta}\right).$$

Inserting the result into the expression for $a_1(x, t, m, \varepsilon)$ from Step 2, we get

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = m\varepsilon (1 + O(m^2 t \varepsilon)) \cdot \\ \cdot \left[\sum_{r=0}^{T-1} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r} \frac{(t^2 - x^2)^r}{(r!)^2} \left(1 + O\left(\frac{T^2\varepsilon}{\delta}\right)\right) + O\left(\left(\frac{m}{2}\right)^{2T} \frac{(t^2 - x^2)^T}{(T!)^2} \left(1 + \frac{T^2\varepsilon}{\delta}\right)\right) \right].$$

The latter error term in the formula is estimated as follows. Since $T! \geq (T/3)^T$ and

$$T \geq \log \frac{\delta}{\varepsilon} \geq 3m\sqrt{t^2 - x^2} \geq \frac{3m}{2}\sqrt{t^2 - x^2}\sqrt{e},$$

it follows that

$$\frac{(t^2 - x^2)^T}{(T!)^2} \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^{2T} \leq \frac{(t^2 - x^2)^T}{(T)^{2T}} \cdot \left(\frac{3m}{2}\right)^{2T} \leq e^{-T} \leq \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

We have $(\varepsilon/\delta)(1 + T^2\varepsilon/\delta) = O(T^2\varepsilon/\delta)$ because $T \geq 1$ and $\varepsilon < \delta$. Thus the error term in question can be absorbed into the 0-th summand $O(T^2\varepsilon/\delta)$. We get

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = m\varepsilon (1 + O(m^2 t \varepsilon)) \cdot \sum_{r=0}^{T-1} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r} \frac{(t^2 - x^2)^r}{(r!)^2} \left(1 + O\left(\frac{T^2\varepsilon}{\delta}\right)\right).$$

Notice that by our notational convention the constant understood in $O(T^2\varepsilon/\delta)$ does not depend on r .

Step 4. Now we can replace the sum with T summands by an infinite sum because the “tail” of alternating series with decreasing absolute value of the summands can be estimated by the first summand (which has just been estimated):

$$\left| \sum_{r=T}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r} \frac{(t^2 - x^2)^r}{(r!)^2} \right| \leq \frac{(t^2 - x^2)^T}{(T!)^2} \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^{2T} \leq \frac{\varepsilon}{\delta} = O\left(\frac{T^2\varepsilon}{\delta}\right).$$

Since the constant understood in each summand $O\left(\frac{T^2\varepsilon}{\delta}\right)$ is the same (see Step 3), we get

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = m\varepsilon (1 + O(m^2 t \varepsilon)) \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r} \frac{(t^2 - x^2)^r}{(r!)^2} \left[1 + O\left(\frac{T^2\varepsilon}{\delta}\right)\right] \\ = m\varepsilon (1 + O(m^2 t \varepsilon)) \cdot \left(J_0(ms) + O\left(\frac{T^2\varepsilon}{\delta} I_0(ms)\right)\right),$$

where we use the *modified Bessel functions of the first kind*:

$$I_0(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2}, \quad I_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}.$$

Step 5. We have $m^2 t \delta \leq m^2(t + |x|)(t - |x|) = m^2 s^2 \leq 9m^2 s^2 \leq T^2$. Thus $m^2 t \varepsilon J_0(ms) \leq T^2 \varepsilon I_0(ms)/\delta$ and $m^2 t \varepsilon \leq T^2 \varepsilon/\delta < (\log(\delta/\varepsilon) + 1)^2 \varepsilon/\delta < 2$ because $(a+1)^2/2 < e^a$ for $a \geq 0$. We arrive at the formula

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = m\varepsilon \left(J_0(ms) + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta} \log^2 \frac{\delta}{\varepsilon} I_0(ms)\right) \right).$$

Analogously,

$$\begin{aligned} a_2(x, t, m, \varepsilon) &= m\varepsilon(1 + O(m^2 t \varepsilon)) \cdot \frac{t+x}{\sqrt{t^2 - x^2}} \cdot \sum_{r=1}^{T-1} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r-1} \frac{(t^2 - x^2)^{\frac{2r-1}{2}}}{(r-1)! r!} \left[1 + O\left(\frac{T^2 \varepsilon}{\delta}\right)\right] \\ &= -m\varepsilon \cdot \frac{t+x}{s} \left(J_1(ms) + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta} \log^2 \frac{\delta}{\varepsilon} I_1(ms)\right)\right). \end{aligned}$$

This gives the required asymptotic formula for $a(x, t, m, \varepsilon)$ because

$$\begin{aligned} I_0(ms) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ms/2)^{2k}}{k!} = e^{m^2 s^2 / 4} \leq e^{m^2 t^2}, \\ \frac{t+x}{s} I_1(ms) &\leq \frac{t+x}{s} \cdot \frac{ms}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ms/2)^{2k}}{k!} = m \frac{t+x}{2} e^{m^2 s^2 / 4} \leq mt e^{m^2 t^2 / 4} \leq e^{m^2 t^2 / 2} e^{m^2 t^2 / 4} \leq e^{m^2 t^2}. \end{aligned} \quad \square$$

Proof of Corollary 6. This follows from Theorem 5 because the right-hand side of (23) is uniformly continuous on each compact subset of the angle $|x| < t$. \square

Proof of Corollary 7. Since the right-hand side of (23) is continuous on $[-t + \delta; t - \delta]$, it is bounded there. Since a sequence uniformly converging to a bounded function is uniformly bounded, by Corollary 6 the absolute value of the left-hand side of (23) is less than some constant $C_{t,m,\delta}$ depending on t, m, δ but not on x, ε . Then by Proposition 6 for $t/2\varepsilon \in \mathbb{Z}$ we get

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{x \in \varepsilon\mathbb{Z}: |x| \geq t - \delta} P(x, t, m, \varepsilon) &= \sum_{x \in \varepsilon\mathbb{Z}: |x| < t - \delta} P(x, t, m, \varepsilon) = \sum_{x \in \varepsilon\mathbb{Z}: |x| < t - \delta} 4\varepsilon^2 \left| \frac{1}{2\varepsilon} a(x, t, m, \varepsilon) \right|^2 \\ &< 4\varepsilon^2 C_{t,m,\delta}^2 \frac{t - \delta}{\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad \square$$

12.7 Probability of chirality flip: combinatorial identities (Theorem 6)

Although Theorem 6 can be deduced from (58), we give a direct proof relying on §12.1 only.

Proof of Theorem 6. Denote $S_1(t) = \sum_x a_1^2(x, t)$; $S_2(t) = \sum_x a_2^2(x, t)$; $S_{12}(t) = \sum_x a_1(x, t)a_2(x, t)$.

By Propositions 1, 8, and 9 we have

$$a_1(0, 2t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_x a_1(x, t)(a_2(x, t) - a_1(x, t)) + a_2(x, t)(a_2(x, t) + a_1(x, t)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_2(t) + 2S_{12}(t) - S_1(t)).$$

By definition and Proposition 1 we have

$$S_1(t+1) - S_2(t+1) = 2S_{12}(t).$$

Hence,

$$S_1(t+1) - S_2(t+1) = S_1(t) - S_2(t) + a_1(0, 2t)\sqrt{2}.$$

Since $S_1(t) + S_2(t) = 1$ by Proposition 2, we have the recurrence relation $S_1(t+1) = S_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}a_1(0, 2t)$; cf. [23, (33)]. Then Proposition 4 implies by induction that

$$S_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor t/2 \rfloor - 1} \frac{1}{(-4)^k} \binom{2k}{k}.$$

By the Newton binomial theorem we get $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ for each $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Setting $x = -\frac{1}{4}$ we obtain $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor t/2 \rfloor - 1} \binom{2k}{k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Using the Stirling formula we estimate the convergence rate:

$$\left| \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, t)^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right| < \frac{1}{2 \cdot 4^{\lfloor t/2 \rfloor}} \binom{2\lfloor t/2 \rfloor}{\lfloor t/2 \rfloor} < \frac{e}{2\pi\sqrt{2\lfloor t/2 \rfloor}} < \frac{1}{2\sqrt{t}}. \quad \square$$

Underwater rocks

Finally, let us warn a mathematically-oriented reader. The outstanding papers [1, 29, 30] are well-written, insomuch that the physical theorems and proofs there could be carelessly taken for mathematical ones, although some of them are wrong as written. The main source of those issues is actually application of a wrong theorem from a mathematical paper [9, Theorem 3.3].

A simple counterexample to [9, Theorem 3.3] is $a = b = \alpha = \beta = x = 0$ and n odd. Those values automatically satisfy the assumptions of the theorem, that is, condition (ii) of [9, Lemma 3.1]. Then by Remark 3 and Proposition 4, the left-hand side of [9, (2.16)] vanishes. Thus it cannot be equivalent to the nonvanishing sequence in the right-hand side. Here we interpret the “ \approx ” sign in [9, (2.16)] as the equivalence of sequences, following [29]. An attempt to interpret the sign so that the difference between the left- and the right-hand sides of [9, (2.16)] tends to zero would void the result because each of the sides clearly tends to zero separately.

Although [1, 29, 30] report minor errors in [9], the issue is more serious. The known asymptotic formulae for Jacobi polynomials are never stated as an equivalence but rather contain an additive error term. Estimating the error term is hard even in particular cases studied in [32], and the case from Remark 3 is reported as more difficult [32, bottom p. 198]. Thus [9, Theorem 3.3] should be viewed as an interesting physical but not mathematical result.

Acknowledgements

The work is supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement №075-15-2019-1619. This work was presented as courses at Summer Conference of Tournament of Towns in Arandelovac, Summer School in Contemporary Mathematics in Dubna, Faculty of Mathematics in Higher School of Economics in Moscow, and Independent Moscow University in 2019. The authors are grateful to participants of those events for their contribution, especially to M. Dmitriev, I. Novikov, F. Ozhegov, A. Voropaev for numerous remarks and the Russian translation, to E. Akhmedova, R. Valieva for typesetting some parts of the text, to I. Bogdanov, A. Daniyarkhodzhaev, M. Fedorov, I. Gaidai-Turlov, T. Kovalev, F. Kuyanov, G. Minaev, I. Russkikh, V. Skopenkova for figures, to A. Kudryavtsev, A. Lvov for writing appendices (those two authors were less than 16 years old that time). The authors are grateful to V. Akulin, T. Batenev, A. Belavin, M. Bershtein, M. Blank, A. Borodin, V. Buchstaber, G. Chelnokov, V. Chernyshev, I. Dynnikov, I. Ibragimov, I. Ivanov, T. Jacobson, D.U. Kim, M. Khristoforov, E. Kolpakov, A.B.J. Kuijlaars, S. Lando, M. Lifshits, M. Maeda, V. Nazaikinskii, S. Nechaev, S. Novikov, G. Olshanski, Yu. Petrova, I. Polekhin, P. Pylyavskyy, A. Rybko, I. Sabitov, A. Semenov, L. Schulman, S. Shlosman, T. Tate, S. Tikhomirov, D. Treschev, L. Velázquez, A. Vershik, P. Zakorko for useful discussions.

A A. Kudryavtsev. Alternative “explicit” formulae

Set $\binom{n}{k} := 0$ for integers $k < 0 < n$ or $k > n > 0$. Denote $\theta(x) := \begin{cases} 1, & \text{if } x \geq 0, \\ 0, & \text{if } x < 0. \end{cases}$

Proposition 18 (“Explicit” formula). *For each integers $|x| < t$ such that $x+t$ is even we have:*

$$(A) \quad a_1(x, t) = 2^{(1-t)/2} \sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-2)^r \binom{(x+t-2)/2}{r} \binom{t-r-2}{(x+t-2)/2},$$

$$a_2(x, t) = 2^{(1-t)/2} \sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-2)^r \binom{(x+t-2)/2}{r} \binom{t-r-2}{(x+t-4)/2};$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}) \quad a_1(x, t) &= 2^{(1-t)/2} \sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-1)^r \binom{(t-|x|-2)/2}{r} \binom{|x|}{(t+|x|-4r-2)/2}, \\
a_2(x, t) &= 2^{(1-t)/2} \sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-1)^r \binom{(t-|x|-2)/2}{r-\theta(x)} \binom{|x|}{(t+|x|-4r)/2}.
\end{aligned}$$

Proof of Proposition 18(A). Introduce the generating functions

$$\hat{a}_1(p, q) := 2^{n/2} \sum_{n>k \geq 0} a_1(2k-n+1, n+1)p^k q^n \quad \text{and} \quad \hat{a}_2(p, q) := 2^{n/2} \sum_{n>k \geq 0} a_2(2k-n+1, n+1)p^k q^n.$$

By Proposition 1 we get

$$\begin{cases} \hat{a}_1(p, q) - \hat{a}_1(p, 0) = q \cdot (\hat{a}_2(p, q) + \hat{a}_1(p, q)); \\ \hat{a}_2(p, q) - \hat{a}_2(p, 0) = pq \cdot (\hat{a}_2(p, q) - \hat{a}_1(p, q)). \end{cases}$$

Since $\hat{a}_1(p, 0) = 0$ and $\hat{a}_2(p, 0) = 1$, the solution of this system is

$$\hat{a}_2(p, q) = \frac{1-q}{1-q-pq+2pq^2}, \quad \hat{a}_1(p, q) = \frac{q}{1-q-pq+2pq^2} = q + q^2(1+p-2pq) + q^3(1+p-2pq)^2 + \dots$$

The coefficient at $p^k q^n$ in $\hat{a}_1(p, q)$ equals

$$\sum_{j=\max(k, n-k)}^n (-2)^{n-j-1} \cdot \binom{j}{n-j-1 \quad k-n+j+1 \quad j-k},$$

because we must take exactly one combination of factors from every summand of the form $q^{j+1}(1+p-2pq)^j$:

- for the power of q to be equal to n , the number of factors $-2pq$ must be $n-j-1$;
- for the power of p to be equal to k , the number of factors p must be $k-(n-j-1)$;
- the number of remaining factors 1 must be $j-(k-(n-j-1))-(n-j-1)=j-k$.

Changing the summation variable to $r=n-j-1$, we arrive at the required formula for $a_1(x, t)$.

The formula for $a_2(x, t)$ follows from the one for $a_1(x, t)$, Proposition 1, and the Pascal rule:

$$\begin{aligned}
a_2(x, t) &= \sqrt{2} a_1(x-1, t+1) - a_1(x, t) \\
&= 2^{(1-t)/2} \sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-2)^r \binom{(x+t-2)/2}{r} \left(\binom{t-r-1}{(x+t-2)/2} - \binom{t-r-2}{(x+t-2)/2} \right) \\
&= 2^{(1-t)/2} \sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-2)^r \binom{(x+t-2)/2}{r} \binom{t-r-2}{(x+t-4)/2}.
\end{aligned}$$
□

Proof of Proposition 18(B). (by A. Voropaev) By Proposition 4, for each $|x| < t$ the numbers $a_1(x, t)$ and $a_2(x, t)$ are the coefficients at $z^{(t-x-2)/2}$ and $z^{(t-x)/2}$ respectively in the expansion of the polynomial

$$2^{(1-t)/2} (1+z)^{(t-x-2)/2} (1-z)^{(t+x-2)/2} = \begin{cases} 2^{(1-t)/2} (1-z^2)^{\frac{t-x-2}{2}} (1-z)^x, & \text{for } x \geq 0; \\ 2^{(1-t)/2} (1-z^2)^{\frac{t+x-2}{2}} (1+z)^{-x}, & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

For $x < 0$, this implies the required proposition immediately. For $x \geq 0$, we first change the summation variable to $r' = (t-x-2)/2 - r$ or $r' = (t-x)/2 - r$ for $a_1(x, t)$ and $a_2(x, t)$ respectively. □

B A. Lvov. Pointwise continuum limit

Theorem 8 (Pointwise continuum limit). *For each real $m \geq 0$ and $|x| < t$ we have*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n a_1 \left(\frac{2}{n} \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, \frac{2}{n} \left\lfloor \frac{nt}{2} \right\rfloor, m, \frac{1}{n} \right) &= m J_0(m\sqrt{t^2 - x^2}); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n a_2 \left(\frac{2}{n} \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, \frac{2}{n} \left\lfloor \frac{nt}{2} \right\rfloor, m, \frac{1}{n} \right) &= -m \frac{x+t}{\sqrt{t^2 - x^2}} J_1(m\sqrt{t^2 - x^2}). \end{aligned}$$

Proof of Theorem 8. Denote $A := \lfloor \frac{nx}{2} \rfloor + \lfloor \frac{nt}{2} \rfloor$ and $B := \lfloor \frac{nt}{2} \rfloor - \lfloor \frac{nx}{2} \rfloor$. The first limit is computed as follows:

$$\begin{aligned} n a_1 \left(\frac{2}{n} \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, \frac{2}{n} \left\lfloor \frac{nt}{2} \right\rfloor, m, \frac{1}{n} \right) &= n \left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right)^{\lfloor \frac{nt}{2} \rfloor - \frac{1}{2}} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \left(\frac{m}{n} \right)^{2r+1} \\ &\sim \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} = \sum_{r=0; 2|r}^{\infty} \binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} - \sum_{r=0; 2|r}^{\infty} \binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} \\ &\rightarrow \sum_{r=0; 2|r}^{\infty} \frac{(x+t)^r (t-x)^r m^{2r+1}}{2^{2r} (r!)^2} - \sum_{r=0; 2|r}^{\infty} \frac{(x+t)^r (t-x)^r m^{2r+1}}{2^{2r} (r!)^2} = m J_0(m\sqrt{t^2 - x^2}) \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Here the equality in the 1st line is Proposition 11. The equivalence in the 2nd line follows from

$$1 \leq \left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right)^{\lfloor \frac{nt}{2} \rfloor - \frac{1}{2}} \leq \left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right)^{nt} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right)^{n^2 t}} \sim \sqrt[n]{e^{m^2 t}} \rightarrow 1 \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

by the squeeze theorem. The equality in the 2nd line holds because $\binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} = 0$ for $r > \max\{A, B\}$, hence all the three sums involved are finite. The convergence in the 3rd line is established in Lemmas 20–22 below. The second limit in the theorem is computed analogously. \square

Lemma 20. *For each positive integer r we have $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} = \frac{(x+t)^r (t-x)^r m^{2r+1}}{2^{2r} (r!)^2}$.*

Proof. We have

$$\binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} = \frac{(A-1) \dots (A-r) \cdot (B-1) \dots (B-r)}{(r!)^2} \cdot \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} \rightarrow \left(\frac{x+t}{2} \right)^r \left(\frac{t-x}{2} \right)^r \frac{m^{2r+1}}{(r!)^2}$$

as $n \rightarrow \infty$ because for each $1 \leq i \leq r$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A-i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \frac{nx}{2} \rfloor + \lfloor \frac{nt}{2} \rfloor}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{nx}{2} + \frac{nt}{2} + o(n)}{n} = \frac{x+t}{2}$$

and analogously, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B-i}{n} = \frac{t-x}{2}$. \square

Lemma 21. *For each positive integer r we have $\binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} \leq \frac{(x+t)^r (t-x)^r m^{2r+1}}{2^{2r} (r!)^2}$.*

Proof. This follows analogously because for each $1 \leq i \leq r < \min\{A, B\}$ we have

$$(A-i)(B-i) \leq \left(\left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{nt}{2} \right\rfloor - 1 \right) \left(\left\lfloor \frac{nt}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor - 1 \right) \leq \left(\frac{nx}{2} + \frac{nt}{2} \right) \left(\frac{nt}{2} - \frac{nx}{2} \right). \quad \square$$

Lemma 22. *Suppose $\{a_k(n)\}_{k=0}^{\infty}$ is a sequence of nonnegative sequences such that $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k(n) = b_k$ for each k ; $a_k(n) \leq b_k$ for each k, n ; and $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ is finite. Then $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.*

Proof. Denote $b := \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Then for each n we have $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) \leq b$. Take any $\varepsilon > 0$. Take such N

that $\sum_{k=0}^N b_k > b - \varepsilon$. For each $k \leq N$ take M_k such that for each $n \geq M_k$ we have $a_k(n) > b_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.

Then for each $n > \max_{0 \leq k \leq N} M_k$ we have $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) > b - 2\varepsilon$. So, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) = b$. \square

References

- [1] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, J. Watrous, One-dimensional quantum walks, Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (2001), 37–49.
- [2] C.M. Bender, L.R. Mead, K.A. Milton, Discrete time quantum mechanics, Computers Math. Appl. 28:10-12 (1994), 279–317.
- [3] C.M. Bender, K.A. Milton, D.H. Sharp, Gauge invariance and the finite-element solution of the Schwinger model, Phys. Rev. D 31 (1985), 383; Erratum Phys. Rev. D 32 (1985), 1593.
- [4] I. Bialynicki-Birula, Dirac and Weyl equations on a lattice as quantum cellular automata, Phys. Rev. D 49, 6920 (1994).
- [5] P. Billingsley, Probability and Measure, 3rd ed., Wiley, New York, 1995.
- [6] I. Bogdanov, Feynman checkers: the probability of direction reversal, preprint (2020) [arXiv:2010.04583](https://arxiv.org/abs/2010.04583).
- [7] M.J. Cantero, F.A. Grünbaum, L. Moral, L. Velázquez, The CGMV method for quantum walks, Quantum Inf Process 11 (2012), 1149–1192.
- [8] D. Chelkak, S. Smirnov, Discrete complex analysis on isoradial graphs, Adv. Math. 228 (2011), 1590–1630.
- [9] L.C. Chen, M.E.H. Ismail, On asymptotics of Jacobi polynomials, SIAM J. Math. Anal., 22:5 (1991), 1442–1449.
- [10] M. Dmitiev, Semi-infinite Feynman checkers, preprint (2021).
- [11] R.P. Feynman, QED: The strange theory of light and matter. Princeton University Press, 2006.
- [12] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, New York, McGraw-Hill, 1965. Russian transl.: Mir, Moscow, 1968.
- [13] S.R. Finch, Mathematical constants, Cambridge University Press, 2003.
- [14] G.B. Folland, Quantum field theory. A tourist guide for mathematicians, Math.Surveys & Monographs 149, AMS, 2008.
- [15] B.Z. Foster, T. Jacobson, Spin on a 4D Feynman Checkerboard, Int. J. Theor. Phys. 56 (2017), 129–144.
- [16] B. Gaveau, L.S. Schulman, Dirac equation path integral: interpreting the Grassmann variables, Il Nuovo Cimento D 11, 31 (1989) 31–51.
- [17] K. Georgopoulos, C. Emary, and P. Zuliani, Comparison of quantum-walk implementations on noisy intermediate-scale quantum computers, Phys. Rev. A 103 (2021), 022408.
- [18] H.A. Gersch, Feynman’s relativistic chessboard as an Ising model, Int. J. Theor. Phys. 20:7 (1981), 491–501.
- [19] I.S. Gradstein, I.M. Ryzhik, Tables of integrals, sums, series and products, 4th ed., Moscow, Fizmatgiz, 1963, 1100 pp. (in Russian).
- [20] G.R. Grimmett, S. Janson, P.F. Scudo, Weak limits for quantum random walks, Phys. Rev. E 69 (2004), 026119.
- [21] M.N. Huxley, Area, lattice points, and exponential sums, The Clarendon Press, 1996.
- [22] T. Jacobson, Feynman’s checkerboard and other games. In: N. Sanchez (eds) Non-linear equations in classical and quantum field theory. Lect. Notes in Phys., 226, Springer, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [23] T. Jacobson, L.S. Schulman, Quantum stochastics: the passage from a relativistic to a non-relativistic path integral, J. Phys. A 17:2 (1984), 375–383.
- [24] P. Jizba, Feynman checkerboard picture and neutrino oscillations, J. Phys.: Conf. Ser. 626 (2015), 012048.
- [25] G.L. Jones, Complex temperatures and phase transitions, J. Math. Phys. 7 (1966), 2000–2005.
- [26] A. Karatsuba, Basic analytic number theory, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993.
- [27] J. Kempe, Quantum random walks: an introductory overview, Contemp. Phys. 50:1 (2009), 339–359.
- [28] R. Kenyon, The Laplacian and Dirac operators on critical planar graphs, Invent. Math. 150 (2002), 409–439.
- [29] N. Konno, A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk, J. Math. Soc. Japan 57:4 (2005), 1179–1195.
- [30] N. Konno, Quantum walks. In: U. Franz, M. Schürmann (eds) Quantum potential theory, Lect. Notes Math. 1954. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

- [31] N. Konno, Quantum walks, Sugaku Expositions 33:2 (2020), 135–158.
- [32] A.B.J. Kuijlaars, A. Martínez-Finkelshtein, Strong asymptotics for Jacobi polynomials with varying nonstandard parameters. J. Anal. Math. 94 (2004), 195–234.
- [33] M. Maeda, H. Sasaki, E. Segawa, A. Suzuki, K. Suzuki, Scattering and inverse scattering for nonlinear quantum walks, Discrete Contin. Dyn. Syst. - Ser. A, 38:7 (2018), 3687–3703.
- [34] J. Maldacena, The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson, Europ. J. Phys. 37:1 (2016).
- [35] V. Matveev, R. Shrock, A connection between complex-temperature properties of the 1D and 2D spin s Ising model, Phys. Lett. A 204 (1995), 353–358.
- [36] J. Narlikar, Path amplitudes for Dirac particles, J. Indian Math. Society, 36 (1972), 9–32.
- [37] I. Novikov, Feynman checkers: the probability to find an electron vanishes nowhere inside the light cone, preprint (2020) [arXiv:2010.05088](https://arxiv.org/abs/2010.05088).
- [38] G.N. Ord, Classical particles and the Dirac equation with an electromagnetic field, Chaos, Solitons & Fractals 8:5 (1997), 727–741.
- [39] G.N. Ord, J.A. Gualtieri, The Feynman propagator from a single path, Phys. Rev. Lett. 89 (2002), 250403.
- [40] F. Ozhegov, The continuum limit of the “Feynman checkers” model with electromagnetic field, preprint (2021).
- [41] A. Pakharev, M. Skopenkov, A. Ustinov, Through the resisting net, Mat. Prosv. 3rd ser., 18 (2014), 33–65.
- [42] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, An introduction to quantum field theory, Westview Press, Boulder, 1995.
- [43] S.S. Schweber, Feynman and the visualization of space-time processes, Rev. Mod. Phys. 58:2 (1986), 449–511.
- [44] M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: auxiliary computations. <https://users.mccme.ru/mskopenkov/skopenkov-pdf/checkers-auxiliary-computations.nb>. Last accessed 31.12.2021.
- [45] M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory, preprint (2020), [arxiv:2007.12879v1](https://arxiv.org/abs/2007.12879v1).
- [46] N.J.A. Sloane (ed.), The on-line encyclopedia of integer sequences, <http://oeis.org/>.
- [47] T. Sunada, T. Tate, Asymptotic behavior of quantum walks on the line, J. Funct. Anal. 262 (2012) 2608–2645.
- [48] R.P. Stanley, Irreducible symmetric group characters of rectangular shape, Séminaire Lotharingien de Combinatoire 50 (2004), Article B50d.
- [49] G. Szegő, Orthogonal polynomials, Colloquium Publications XXIII, American Math. Society, 1939.
- [50] S.E. Venegas-Andraca, Quantum walks: a comprehensive review, Quantum Inf. Process. 11 (2012), 1015–1106.
- [51] J. Yepez, Relativistic path integral as a lattice-based quantum algorithm, Quantum Inf. Process. 4 (2005), 471–509.
- [52] P. Zakorko, Maximum of probability in Feynman checkers, preprint (2021).

MIKHAIL SKOPENKOV
 HSE UNIVERSITY (FACULTY OF MATHEMATICS) AND
 INSTITUTE FOR INFORMATION TRANSMISSION PROBLEMS, RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
mikhail.skopenkov@gmail.com <https://users.mccme.ru/mskopenkov/>

ALEXEY USTINOV
 HSE UNIVERSITY (FACULTY OF COMPUTER SCIENCE) AND
 KHABAROVSK DIVISION OF THE INSTITUTE FOR APPLIED MATHEMATICS,
 FAR-EASTERN BRANCH, RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES, RUSSIA
Ustinov.Alexey@gmail.com <http://iam.khv.ru/staff/Ustinov.php>

Шашки Фейнмана: к алгоритмической квантовой теории

М. Скопенков и А. Устинов

Аннотация

Статья посвящена шашкам Фейнмана — элементарной модели движения электрона, предложенной Р. Фейнманом. В этой игре шашка движется по простым правилам по клетчатой доске, а мы следим за ее поворотами. Шашки Фейнмана также известны как одномерное квантовое блуждание или модель Изинга при мнимой температуре. Мы приводим математическое доказательство гипотезы Фейнмана 1965 года о том, что эта дискретная модель (при больших временах, малой средней скорости и малом размере клетки) согласована с непрерывной. Мы исследуем асимптотические свойства модели (при малом размере клетки и больших временах), усиливая результаты Дж. Нарликара 1972 года и Т. Сунады — Т. Татэ 2012 года. Мы впервые замечаем и доказываем концентрацию меры в пределе при уменьшении размера клетки. Производится вторичное квантование модели.

Приводится обзор известных результатов о шашках Фейнмана.

Ключевые слова. Шахматная доска Фейнмана, квантовое блуждание, модель Изинга, диаграмма Юнга, уравнение Дирака, метод стационарной фазы

MSC2010: 82B20, 11L03, 68Q12, 81P68, 81T25, 81T40, 05A17, 11P82, 33C45.

Содержание

1	Введение	2
1.1	Мотивировка	2
1.2	Исторический обзор	2
1.3	Основные результаты	6
1.4	Структура работы и план дальнейших исследований	6
2	Базовая модель (блуждание Адамара)	7
2.1	Определение и примеры	7
2.2	Физическая интерпретация	8
2.3	Тождества и асимптотики	12
3	Масса (квантовое блуждание со сносом)	13
3.1	Тождества	14
3.2	Асимптотики	16
3.3	Физическая интерпретация	21
4	Спин	22
5	Внешнее поле (неоднородное квантовое блуждание)	23
6	Источник	25
7	Среда	26
8	Тождественные частицы	26
9	Античастицы	27
9.1	Тождества и асимптотики	27
9.2	Физическая интерпретация	29
9.3	Комбинаторное определение	30
10	На пороге к $(1+1)$ -мерной квантовой электродинамике	32
11	Открытые проблемы	32
12	Доказательства	34
12.1	Тождества: элементарная комбинаторика (предложения 1–13)	34
12.2	Фазовый переход: метод моментов (теорема 1)	38
12.3	Основной результат: метод стационарной фазы (теорема 2)	40
12.4	Предел при больших временах: снова метод стационарной фазы (следствия 1–3)	46
12.5	Решение проблемы Фейнмана: разложение в ряды Тейлора (следствия 4–5)	50
12.6	Непрерывный предел: метод смены хвостов (теорема 5 и следствия 6–7)	52
12.7	Вероятность смены хиральности: комбинаторные тождества (теорема 6)	54
A	А. Кудрявцев. Альтернативные «явные» формулы	56
B	А. Львов. Поточечный непрерывный предел	57

1 Введение

Статья посвящена шашкам Фейнмана — элементарной модели движения электрона, предложенной Р. Фейнманом (см. рисунок 1). В этой игре шашка движется по простым правилам по клетчатой доске, а мы следим за ее поворотами (см. определение 2). Шашки Фейнмана также можно рассматривать как одномерное квантовое блуждание, или модель Изинга, или подсчет числа диаграмм Юнга определенного вида.

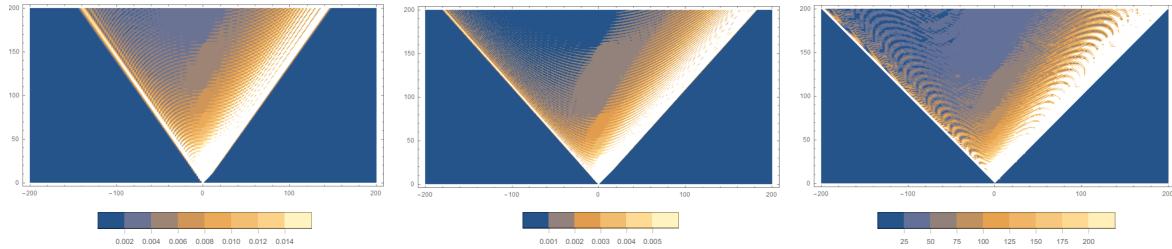


Рис. 1: Вероятность обнаружить электрон в малом квадратике вокруг данной точки (белым показаны сильные колебания этой вероятности). Слева: в базовой модели из §2 (ср. [51, рис. 6]). В центре: в уточнении из §3 для меньшего размера клетки. Справа: в непрерывной теории. В последнем случае показана относительная плотность вероятности.

1.1 Мотивировка

Простейший способ понять, что это за модель, — это классический *двухщелевой опыт* (см. рисунок 2). В данном опыте (*когерентный*) пучок электронов направлен на пластину с двумя параллельными щелями. Часть пучка, прошедшая через щели, наблюдается на экране за пластиной. Если одна из щелей закрыта, то луч освещает на экране пятно. Если обе щели открыты, можно было бы ожидать пятно большего размера, но на самом деле мы видим последовательность ярких и темных полос (*интерферограмму*).

Это показывает, что электроны ведут себя, как волны: волны проходят через обе щели, и вклады двух путей либо усиливают, либо гасят друг друга в зависимости от конечных фаз.

Далее, если пропускать электроны через щели по одному, то, как и ожидалось, на экране появляются отдельные точки. Однако примечательно, что та же интерферограмма со светлыми и темными полосами возникает, если электроны накапливать. Нельзя предсказать, где конкретный электрон столкнется с экраном; все, что мы можем сделать, это вычислить вероятность обнаружения электрона в заданном месте.

Метод Фейнмана *суммирования по путям* (или *интеграла по путям*) для вычисления таких вероятностей — присвоить фазы всем возможным путям и просуммировать полученные волны (см. [11, 12]). *Шашки Фейнмана* (или *шахматная доска Фейнмана*) — особенно простое комбинаторное правило для этих фаз в случае, когда электрон свободно движется (а лучше сказать, прыгает) по прямой.

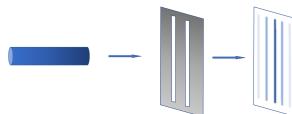


Рис. 2: Двухщелевой опыт

1.2 Исторический обзор

Начало. Шашки Фейнмана были придуманы Р. Фейнманом в 1940-х годах [43] и впервые опубликованы в 1965 году в известной книге [12]. В этой книге в задаче 2.6 строится функция на решетке с малым шагом ε (называемая *ядром*; см. (2)) и ставится следующая проблема:

Покажите, что если интервал времени очень велик ($t_b - t_a \gg \hbar/mc^2$), а средняя скорость мала [$x_b - x_a \ll c(t_b - t_a)$], то ядро [если не считать множителя $\exp(imc^2/\hbar)(t_b - t_a)$] совпадает с выражением для свободной частицы [см. (3.3)].

Математически это означает, что ядро (деленное на $2i\varepsilon \exp[(-imc^2/\hbar)(t_b - t_a)]$) асимптотически равно ядру свободной частицы (24) (это и есть уравнение (3.3) из [12]) в тройном пределе, когда время стремится к бесконечности, а средняя скорость и шаг решетки стремятся к нулю (см. таблицу 1 и рис. 3). Деление на шаг решетки и его стремление к нулю подразумевалось в проблеме, иначе упомянутый “исключительный” множитель был бы другим (см. пример 4). Мы покажем, что это математическое утверждение, хотя и неверно буквально, выполняется при небольших ограничениях (см. следствие 5).

Хотя проблема Фейнмана может показаться простой физикам-теоретикам, даже первого шага математического решения (опровержения утверждения в том виде, как оно сформулировано) не удается найти в литературе. Как обычно, основная трудность в том, чтобы доказать сходимость, а не угадать предел.

пропагатор	непрерывный	решеточный	контекст	ссылки
ядро свободной частицы	(24)	-	квантовая механика	[12, (3-3)]
запаздывающий пропагатор для спина 1/2	(26), (27)	(2)	релятивистская квантовая механика	ср. [23, (13)] и [12, (2-27)]
фейнмановский пропагатор для спина 1/2	(34), (35)	(32)	квантовая теория поля	ср. [2, §9F]

Таблица 1: Выражения для пропагаторов частицы, свободно движущейся в 1 пространственном и 1 временном измерении. Квадрат нормы пропагатора имеет смысл относительной плотности вероятности обнаружить частицу в данной точке или, иначе, плотности заряда в этой точке.

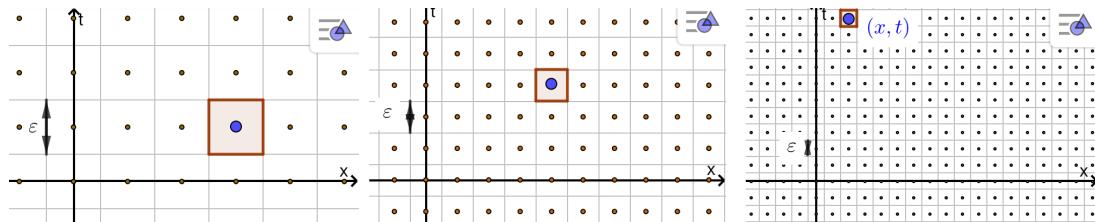


Рис. 3: Фейнмановский тройной предел: $t \rightarrow +\infty$, $x/t \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$

В 1972 году Дж. Нарликар [36] обнаружил, что указанное ядро воспроизводит запаздывающий пропагатор для спина 1/2 в другом пределе, когда шаг решетки стремится к нулю, а время остается фиксированным (см. таблицу 1, рис. 4 и 1, следствие 6). В 1984 году Т. Джекобсон–Л. Шульман [23] повторили этот вывод, применили метод стационарной фазы (среди других блестящих идей) и нашли вероятность смены направления движения электрона (ср. с теоремой 6). Замечательные работы этого периода не содержат математических доказательств, а лишь приближенные вычисления без оценки погрешности.

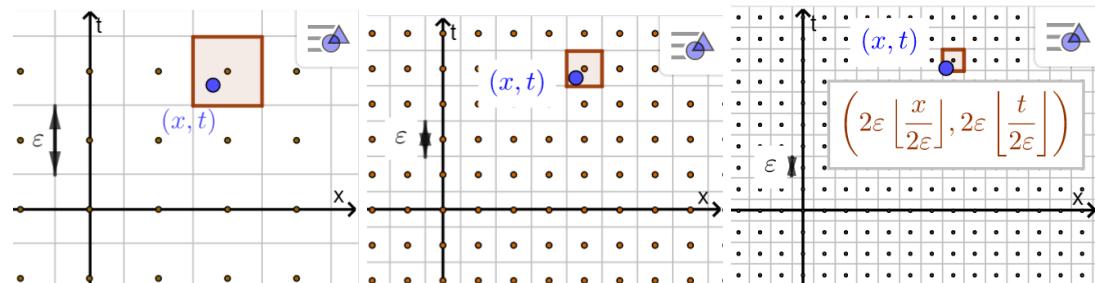


Рис. 4: Непрерывный предел: точка (x, t) фиксирована, а шаг ε решетки стремится к нулю.

Модель Изинга. В 1981 Х. Герш заметил, что шашки Фейнмана можно рассматривать как одномерную модель Изинга при *мнимой* температуре или весах ребер (см. §2.2 и [18], [23, §3]). Мнимые значения этих величин обычны в физике (например, в квантовой теории поля или цепях переменного тока). Из-за мнимости вклады большинства конфигураций сокращаются, что делает модель крайне нетривиальной, несмотря на одномерность. В частности, модель демонстрирует фазовый переход (см. рисунки 1 и 5). Удивительно, что ранее об этом не упоминалось. Фазовые переходы изучались только в более сложных одномерных моделях Изинга [25, §III], [35], несмотря на известный эквивалентный результат, которые мы собираемся обсудить сейчас (см. теорему 1(B) и следствие 3).

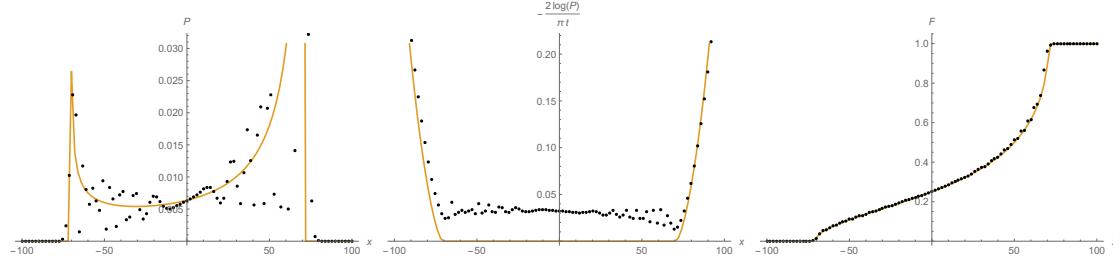


Рис. 5: Распределение положения x электрона в момент времени $t = 100$ в естественной системе единиц для базовой модели из §2 (слева, точки). Его нормализованный логарифм (в центре, точки) и функция распределения (справа, точки). Их (слабые) маштабированные пределы при $t \rightarrow \infty$ (кривые). Кривая в центре также является графиком (минус мнимой части) предельной плотности свободной энергии в модели Изинга. Точки неаналитичности кривых отражают фазовый переход.

Квантовое блуждание. В 2001 году А. Амбаинис, Е. Бах, А. Наяк, А. Вишванат и Дж. Ватрус совершили прорыв [1]. Они изучали шашки Фейнмана под названиями *одномерное квантовое блуждание* и *блуждание Адамара*; эти нетривиально определяемые модели совершенно эквивалентны фейнмановской. Они установили предельное поведение модели при больших временах (см. теорему 2). Они обнаружили несколько поразительных свойств, резко контрастирующих как с непрерывной теорией, так и с классическим случайнм блужданием. Во-первых, наиболее вероятная средняя скорость электрона в модели равна $1/\sqrt{2}$ от скорости света, и вероятность превысить это значение крайне мала (см. рис. 5 и 1 слева и теорему 1(B)). Во-вторых, если поместить поглощающую границу сразу слева от начальной точки, то вероятность поглощения электрона будет равна $2/\pi$. В-третьих, если установить еще одну поглощающую границу в точке с координатой $x > 0$, то вероятность поглощения электрона на левой границе возрастет, достигая $1/\sqrt{2}$ в пределе при $x \rightarrow +\infty$. Напомним, что для классического блуждания обе вероятности равны 1. Еще они нашли множество комбинаторных соотношений и выразили упомянутое выше ядро через значения многочленов Якоби в конкретной точке (см. замечание 3; ср. [48, §2]).

Н. Конно изучал *квантовое блуждание со сносом* [29, 30], которое по существу также эквивалентно модели Фейнмана (см. замечание 4). Он нашел распределение положения электрона в (слабом) пределе больших времен (см. рисунок 5 и теорему 1(B)). Этот результат был доказан математически Г. Гримметом–С. Джэнсоном–П. Скудо [20]. В выдающейся работе [47] 2012 года Т. Сунада–Т. Татэ нашли и доказали асимптотику для указанного распределения в пределе больших времен (см. теоремы 2–4). Это мощный результат, но даже он недостаточен для решения проблемы Фейнмана, так как в нем оценка остаточного члена неравномерна по шагу решетки. В 2018 М. Маеда и соавторы получили оценку максимума указанного распределения при больших временах [33, теорема 2.1].

Квантовые блуждания были обобщены на произвольные графы и применены для построения квантовых алгоритмов (пример реализации см. на рис. 6 и в [17]). Для получения более детальной информации по данному направлению рекомендуем обзоры М.Дж. Кантеро–Ф.А. Грюнбаума–Л. Морала–Л. Веласкеса, Н. Конно, Дж. Кемпе и С.Е. Венегас-Андрака [7, 30, 27, 50, 31].

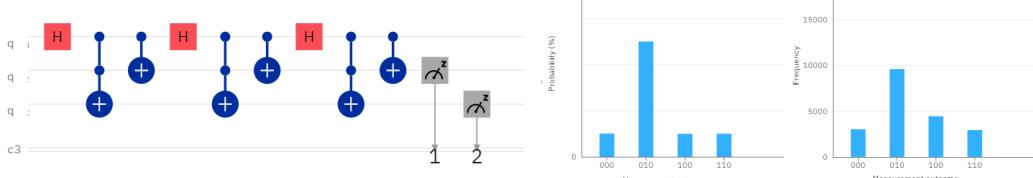


Рис. 6: Реализация базовой модели из §2 на квантовом компьютере с использованием языка квантовых схем (слева). На выходе получается случайная битовая строка, кодирующая положение x электрона в момент времени $t = 4$. Строки 000, 010, 100, 110 кодируют $x = 4, 2, 0, -2$ соответственно. Распределение величины x (в центре) и гистограмма для квантового компьютера IBM Lima (справа) [44, §19]. См. подробнее в [17].

Решеточные квантовые теории поля. В более общем контексте, это направление в сторону создания решеточной квантовой теории поля с “метрикой” Минковского, в которой как пространство, так и время дискретны [2]. В 1970-х годах Ф. Вегнер и К. Вильсон предложили *решеточную калибровочную теорию* как средство вычислений в калибровочной теории, описывающей все известные взаимодействия, кроме гравитации; см. научно-популярное введение в [34]. Кульминацией стало теоретическое вычисление массы протона с ошибкой менее 2% в некотором смысле. Эта теория *евклидова* в том смысле, что время в ней является *мнимой* величиной. Асимптотика пропагатора для (безмассового) *евклидова* решеточного уравнения Дирака [28, теорема 4.3] сыграла главную роль в непрерывном пределе модели Изинга, найденного Д. Челкаком–С. Смирновым [8]. Аналогичным образом, асимптотики для пропагатора с “метрикой” Минковского (теоремы 2–5) могут пригодиться для отсутствующей пока решеточной квантовой теории поля с такой метрикой. Несколько авторов утверждают, что в шашках Фейнмана *нет удвоения фермионов*, присущего евклидовым решеточным теориям, а условия запрещающей теоремы Нильсена–Ниномия обходятся [4, 15].

В литературе обсуждались уточнения модели Фейнмана. Например, в районе 1990-х годов Б. Гаво–Л. Шульман и Г. Орд добавили в нее электромагнитное поле [16, 38]. Тогда они не достигли ни сохранения заряда, ни обобщения на неабелевы калибровочные теории; это сделано в определении 3. Другой пример — добавление массовой матрицы П. Джизбой [24].

Давней мечтой было включить в модель пути шашки, поворачивающие вспять во времени или образующие циклы [43, р. 481–483], [22]; это означало бы рождение электрон–позитронных пар, знаменуя переход от квантовой механики к квантовой теории поля. Искали комбинаторную модель, дающую *фейнмановский*, а не *запаздывающий* пропагатор в непрерывном пределе (см. таблицу 1). Известные конструкции (такие, как *прыжковое разложение*) не приводили к фейнмановскому пропагатору из-за некоторых решеточных артефактов (так, название работы [39] может ввести в заблуждение: фейнмановский пропагатор там не обсуждается). В *безмассовом* случае *некомбинаторное* построение фейнмановского пропагатора на решетке имеется у К. Бендера–Л. Мэда–К. Милтона–Л. Шарпа [2, §9F] и [3, §IV]. В определении 6, наконец, дано искомое комбинаторное построение.

Другая давняя открытая проблема — обобщить модель на настоящий 4-мерный мир. В нобелеской лекции Р. Фейнман упоминает о своих неудачных попытках. Есть ряд новых подходов, скажем, в работе Б. Фостера–Т. Джекобсона 2017 года [15]. Но те не так просты и красивы, как исходная двумерная модель, что отмечается в самой работе [15, §7.1].

О физических и математических работах. Физическая литература на эту тему весьма обширна [50], и мы не можем упомянуть все замечательные работы в этом кратком обзоре. Удивительно, что в литературе мы не нашли свойства *концентрации меры* при стремлении шага решетки к нулю, которое сразу обращает на себя внимание (см. следствие 7). Многие статьи написаны настолько хорошо, что *физические* теоремы и доказательства в них могут быть неосторожно приняты за *математические* (см. конец §12). Нам известно всего несколько математических работ на эту тему, таких как [20, 47, 33].

1.3 Основные результаты

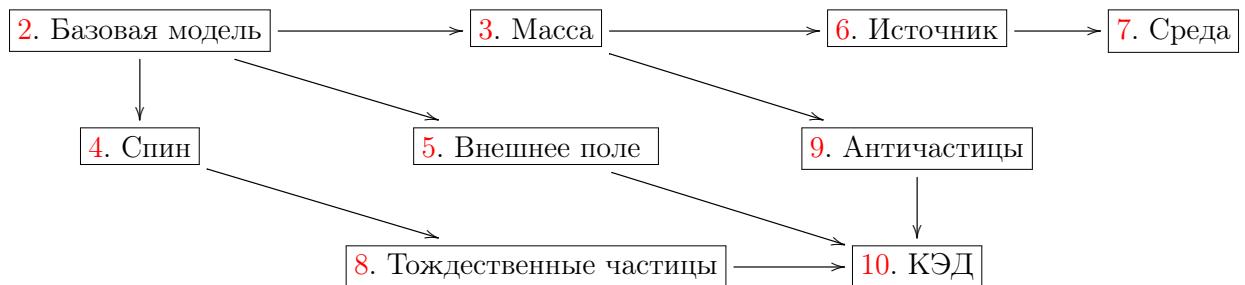
Мы приводим математическое доказательство гипотезы Фейнмана 1965 года о том, что его дискретная модель согласуется с непрерывной, а именно, воспроизводит обычное квантовомеханическое ядро свободной частицы при больших временах, малой средней скорости и малом шаге решетки (см. следствие 5). Мы вычисляем асимптотики решеточного пропагатора при больших временах и при малом шаге решетки, равномерные по параметрам модели (см. теоремы 2 и 5). Мы впервые отмечаем и доказываем концентрацию меры в непрерывном пределе: средняя скорость электрона, испущенного точечным источником, близка к скорости света с высокой вероятностью (см. следствие 7). Эти результаты можно интерпретировать как асимптотические свойства диаграмм Юнга (см. следствие 2) и многочленов Якоби (см. замечание 3).

Все эти результаты математически доказываются впервые. Для их формулировки достаточно лишь определения 2. В определениях 3 и 6 мы устанавливаем связь с решеточной калибровочной теорией и производим вторичное квантование модели, превращая шашки Фейнмана в полноценную квантовую теорию поля.

1.4 Структура работы и план дальнейших исследований

Вначале мы даем определения и точные формулировки результатов, и в процессе приводим примеры, иллюстрирующие простейшие концепции квантовой механики и не требующие предварительных знаний. Это те самые примеры, которые Р. Фейнман приводит первыми в своих собственных книгах. Так, шашки Фейнмана (см. §3) — первый конкретный пример во всей книге [12]. Отражение от тонкой пленки (см. §7) — первый пример в [11]; ср. с рисунками 10–11 там. Поэтому мы надеемся, что эти примеры могут прояснить суть происходящего читателям, не знакомым с квантовой теорией.

Мы начинаем с простейшего (и грубого) частного случая модели и шаг за шагом уточняем ее в каждом следующем разделе. Перед каждым уточнением мы резюмируем: физический вопрос, которого оно касается; упрощающие предположения, которые оно отбрасывает или дополнительно накладывает; экспериментальные и теоретические результаты, которые оно воспроизводит. Некоторые уточнения (§§7–9) лишь анонсируются, и будут обсуждаться подробно в последующих публикациях. Наша цель — (1+1)-мерная решеточная квантовая электродинамика (“КЭД”), но последние шаги на пути к ней (упомянутые в §10) до сих пор не сделаны. Открытые проблемы собраны в §11. Для удобного ориентирования приводим схему зависимости уточнений:



Мы надеемся, что это перспективный путь, чтобы сделать квантовую теорию поля математически строгой и алгоритмической. Алгоритмическая квантовая теория поля — это такая, которая для данной экспериментально измеряемой величины и числа $\delta > 0$ давала бы точную формулировку алгоритма, предсказывающего эту величину с точностью δ . (Разумеется, предсказание не обязано согласовываться с экспериментом для δ , меньших точности самой теории.) См. игрушечный пример в алгоритме 1. Это было бы продолжением конструктивной квантовой теории поля (пока что далекой от алгоритмической). Применения квантовой теории к компьютерным наукам сейчас популярны, но и противоположное направление может быть плодотворно. Алгоритмическое мышление — еще и способ сделать предмет понятным неспециалистам, как происходит, например, в алгебраической топологии.

Данная статья написана на математическом уровне строгости в том смысле, что все определения, соглашения и теоремы (в.т.ч. следствия, предложения, леммы) нужно понимать буквально. Теоремы остаются верными, даже если их вырезать из текста. Доказательства теорем используют формулировки, но не доказательства других теорем. Большинство формулировок гораздо менее техничны, чем доказательства; поэтому доказательства собраны в отдельном разделе (§12), а длинные вычисления — в [44]. В процессе доказательств мы даем не требующее предварительных знаний введение в основные методы изучения модели Фейнмана: комбинаторные тождества, интеграл Фурье, метод моментов, метод стационарной фазы. Замечания неформальны и обычно не используются в остальном тексте (а поэтому их можно пропустить). Текст вне определений, теорем, доказательств также формально не используется.

2 Базовая модель (блуждание Адамара)

Вопрос: какова вероятность обнаружения электрона в клетке (x, t) , если он был испущен из $(0, 0)$?

Предположения: нет самодействия, нет рождения электрон-позитронных пар, фиксированные масса и шаг решётки, точечный источник; электрон движется либо по плоскости, “смещаясь равномерно вдоль оси t ”, либо по прямой (и тогда t — это время)

Результаты: двухщелевой опыт (качественное объяснение), сохранение заряда, предельное распределение при больших временах

2.1 Определение и примеры

Мы начнём с неформального определения в духе [11], а затем дадим точное.

На бесконечной шахматной доске шашка ходит на соседнюю по диагонали клетку, влево-вверх или вправо-вверх (см. рис. 7 слева). Каждому пути s шашки сопоставим вектор $a(s)$ на плоскости следующим образом (см. рис. 7 в центре). Рассмотрим секундомер, стрелка которого вращается по мере движения шашки. В начале движения стрелка секундомера направлена вверх. Пока шашка движется вдоль прямой, стрелка не двигается, а после каждого поворота шашки она поворачивается на 90° по часовой стрелке (независимо от того, в какую сторону повернула шашка). Итоговое положение стрелки — это направление вектора $a(s)$. Длина вектора равна $2^{(t-1)/2}$, где t — общее число ходов шашки (это просто нормировка). Полученный в итоге вектор и есть $a(s)$. Например, для пути s на рис. 7 (вверху в центре) получаем $a(s) = (0, -1/2)$.

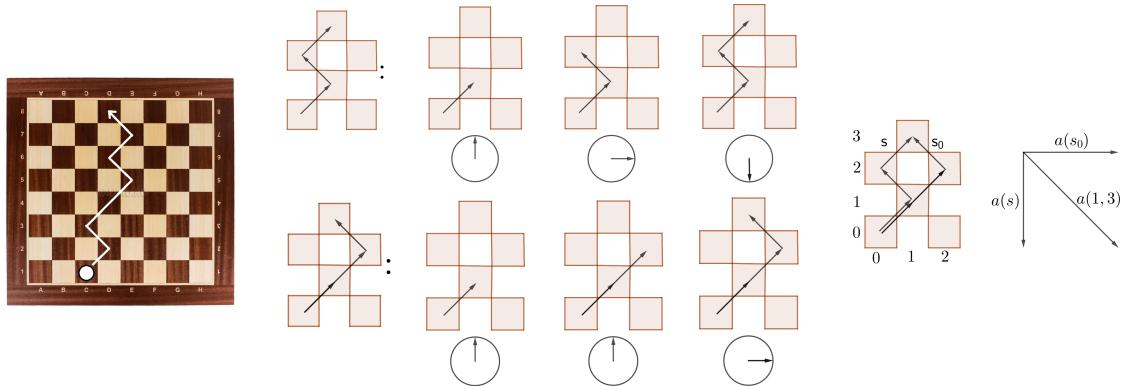


Рис. 7: Путь шашки (слева). Векторы, сопоставленные путям (в центре) и клетке (справа).

Обозначим $a(x, t) := \sum_s a(s)$, где сумма ведется по всем путям шашки из клетки $(0, 0)$ в клетку (x, t) , начинаяющихся с хода вправо-вверх. Например, $a(1, 3) = (0, -1/2) + (1/2, 0) = (1/2, -1/2)$; см. рис. 7 справа. Квадрат длины вектора $a(x, t)$ называется *вероятностью обнаружения в точке (x, t) электрона, испущенного из точки $(0, 0)$* . (Данная терминология поясняется в §2.2). Сам вектор $a(x, t)$ называется *стрелкой* [11, Figure 6].

Резюмируем описанную конструкцию строго.

Определение 1. Путь шашки — это такая конечная последовательность целых точек плоскости, что вектор из каждой точки (кроме последней) к следующей равен либо $(1, 1)$, либо $(-1, 1)$. Поворот — это такая точка пути (не первая и не последняя), что вектор, соединяющий эту точку с предыдущей, ортогонален вектору, соединяющему её со следующей. Стрелка — это комплексное число

$$a(x, t) := 2^{(1-t)/2} i \sum_s (-i)^{\text{turns}(s)},$$

где сумма берётся по всем путям s шашки из $(0, 0)$ в (x, t) с первым шагом в $(1, 1)$, а $\text{turns}(s)$ обозначает общее число поворотов в s . Здесь и далее пустая сумма по определению считается равной 0. Обозначим

$$P(x, t) := |a(x, t)|^2, \quad a_1(x, t) := \operatorname{Re} a(x, t), \quad a_2(x, t) := \operatorname{Im} a(x, t).$$

Точки (или клетки) (x, t) с чётным и нечетным $x + t$ называются *чёрными* и *белыми* соответственно.

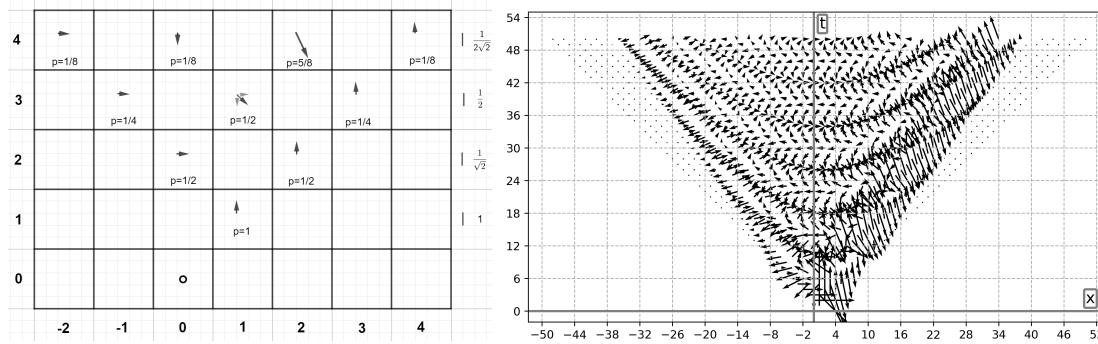


Рис. 8: Стрелки $a(x, t)$ и вероятности $P(x, t)$ для малых x, t (слева); масштаб зависит от строки. Стрелки $10 \cdot a(x, t)$ для $t \leq 50$ (справа).

4	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		$-\frac{i}{2\sqrt{2}}$		$\frac{1-2i}{2\sqrt{2}}$		$\frac{i}{2\sqrt{2}}$
3		$\frac{1}{2}$		$\frac{1-i}{2}$		$\frac{i}{2}$	
2			$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{i}{\sqrt{2}}$		
1				i			
$t \setminus x$	-2	-1	0	1	2	3	4

Таблица 2: Стрелки $a(x, t)$ для малых x, t .

Рис. 8 и таблица 2 изображают стрелки $a(x, t)$ и вероятности $P(x, t)$ для малых x, t . Рис. 9 изображает графики $P(x, 1000)$, $a_1(x, 1000)$ и $a_2(x, 1000)$ как функций от чётного x . Мы видим, что с изменением конечного положения x в некоторый фиксированный большой момент времени t , сразу после достижения пика вероятность резко падает до очень малых, но всё ещё ненулевых значений. Интересно неожиданное положение пика, далёкое от $x = t$. На рис. 1 слева цвет точки (x, t) , где $x + t$ чётно, показывает значение $P(x, t)$. Обратим внимание, что стороны видимого на рисунке угла — это *не* прямые $t = \pm x$, как можно было бы ожидать. Стороны этого угла — это $t = \pm\sqrt{2}x$ (см. теорему 1(A)).

2.2 Физическая интерпретация

Обсудим физическую интерпретацию модели и покажем, что ей действительно удаётся передать невероятное поведение электронов. Есть две разные интерпретации (см. табл. 3).

Стандартная интерпретация. Координаты x и t интерпретируются как положение электрона и время соответственно. Иногда (например, в примере 1) немножко неформально

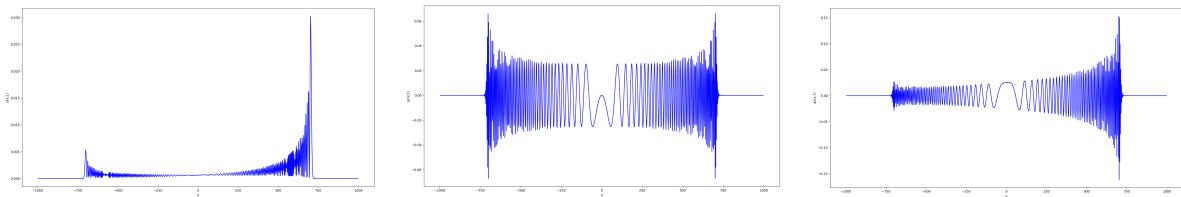


Рис. 9: Графики функций $P(x, 1000)$, $a_1(x, 1000)$, $a_2(x, 1000)$ при четном x

объект	стандартная интерпретация	интерпретация через спиновую цепочку
s	путь	конфигурация “+” и “-” в один ряд
$\text{turns}(s)$	число поворотов	половина энергии конфигурации
t	время	объем
x	положение	разность между количеством “+” и “-”
x/t	средняя скорость	намагниченность
$a(x, t)$	амплитуда вероятности	статистическая сумма с точностью до константы
$P(x, t)$	вероятность	квадрат нормы статистической суммы
$\frac{4i}{\pi t} \log a(x, t)$	нормализованный логарифм амплитуды	плотность свободной энергии
$\frac{i a_2(x, t)}{a(x, t)}$	условная амплитуда вероятности последнего хода вправо-вверх	“вероятность” совпадения знаков на концах спиновой цепочки

Таблица 3: Физическая интерпретация шашек Фейнмана

обе координаты интерпретируются как положение, и мы считаем, что электрон выполняет “классическое равномерное движение” по оси t . Мы используем естественную систему единиц, в которой скорость света, постоянные Планка и Больцмана равны 1. Таким образом, прямые $x = \pm t$ изображают движение со скоростью света. Любой путь шашки лежит не ниже обеих прямых, т.е. в световом конусе. Это согласуется с теорией относительности: скорость электрона не может превышать скорость света.

Чтобы думать о $P(x, t)$ как о вероятности, нужно рассматривать координату t как фиксированную, а клетки $(-t, t), (-t + 2, t), \dots, (t, t)$ — как всевозможные исходы эксперимента. Например, t -ая горизонталь может быть экраном, детектирующим электрон. Впоследствии мы увидим, что сумма всех чисел $P(x, t)$ на одной горизонтали в самом деле равна 1 (предложение 2), и поэтому мы можем рассматривать их как “вероятности”. Отметим, что вероятность обнаружить электрон в множестве $X \subset \mathbb{Z}$ — это $P(X, t) := \sum_{x \in X} P(x, t) = \sum_{x \in X} |a(x, t)|^2$, а не $|\sum_{x \in X} a(x, t)|^2$ (ср. [11, рис. 50]).

В реальности точно измерить положение электрона невозможно. Фундаментальным ограничением является *приведённая комптоновская длина волны* $\lambda = 1/m \approx 4 \cdot 10^{-13}$ м, где m — масса электрона. На физическом языке, базовая модель аппроксимирует континуум решёткой с шагом ровно λ . Но это всё ещё грубое приближение: нужен ещё меньший шаг, чтобы избежать накопления ошибки аппроксимации при больших x и t . Например, рис. 1 и 10 слева изображают эффект решётки с конечным шагом — *перенормировку скорости света*: средняя скорость x/t не может превосходить $1/\sqrt{2}$ от скорости света с большой вероятностью. (Объяснение в физических терминах: решётчная регуляризация обрезает расстояния меньше шага решётки, следовательно, малые длины волн, следовательно, большие импульсы и, следовательно, большие скорости.) Более точная модель представлена в §3: ср. графики на рис. 1.

Теперь мы собираемся показать, что этой модели действительно удаётся передать невероятное поведение электронов. (Для получения правильных количественных результатов, таких как точная форма интерферограммы, необходимо усовершенствование модели, использующее когерентный источник; см. §6.)

Вероятность обнаружения электрона в клетке (x, t) при поглощении в подмножестве $B \subset \mathbb{Z}^2$ определяется аналогично $P(x, t)$, только сумма производится по путям шаш-

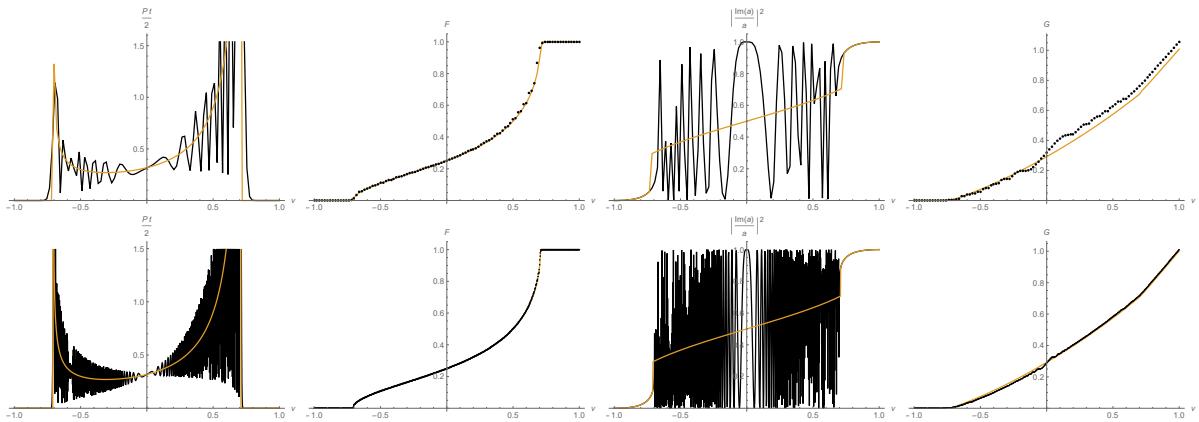


Рис. 10: Графики $\frac{t}{2}P(2\lceil \frac{vt}{2} \rceil, t)$, $F_t(v) := \sum_{x \leq vt} P(x, t)$, $\left| \frac{a_2(2\lceil \frac{vt}{2} \rceil, t)}{a(2\lceil \frac{vt}{2} \rceil, t)} \right|^2$, $G_t(v) := \sum_{x \leq vt} \frac{2}{t} \left| \frac{a_2(x, t)}{a(x, t)} \right|^2$ (тёмные) при $t = 100$ (сверху), $t = 1000$ (снизу), и их слабые пределы при $t \rightarrow \infty$ (светлые).

ки s , не имеющим общих точек с B , кроме, быть может, $(0, 0)$ и (x, t) . Обозначим её $P(x, t$ миня B). Неформально это значит, что появляется дополнительный исход эксперимента, при котором электрон поглощается и не достигает экрана. В следующем примере мы рассматриваем две чёрных клетки $(\pm 1, 1)$ на горизонтали $t = 1$ как две щели в горизонтальной пластине (ср. рис. 2).

Пример 1 (Двухщелевой опыт). *Различные пути нельзя рассматривать как “взаимоисключающие”:*

$$P(0, 4) \neq P(0, 4 \text{ миня } \{(2, 2)\}) + P(0, 4 \text{ миня } \{(0, 2)\}).$$

Иногда поглощение может увеличить вероятность: $P(0, 4) = 1/8 < 1/4 = P(0, 4 \text{ миня } \{(2, 2)\})$.

Стандартная интерпретация шашек Фейнмана также известна под названиями *блуждание Адамара*, или, более общо, как *одномерное квантовое блуждание и квантовый решёточный газ*. Все эти понятия эквивалентны, но приводят к обобщениям модели в разных направлениях [50, 30, 51]. Например, объединение усовершенствований из §3–7 дает общее неоднородное квантовое блуждание.

Удивительные свойства квантовых блужданий, упомянутые в §1.2, точно формулируются так:

$$\sum_{t=1}^{\infty} P(0, t \text{ миня } \{x = 0\}) = \frac{2}{\pi} \leq \sum_{t=1}^{\infty} P(0, t \text{ миня } \{x = 0\} \cup \{x = n\}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Недавно М. Дмитриев [10] нашел $\sum_{t=1}^{\infty} P(n, t \text{ миня } \{x = n\})$ для нескольких $n \neq 0$ (см. проблему 6). Похожие числа возникают для простого случайного блуждания на \mathbb{Z}^2 [41, таблица 2].

Интерпретация через спиновую цепочку. Есть совершенно другая физическая интерпретация той же самой модели: одномерная модель Изинга с мнимой температурой и фиксированной намагниченностью.

Напомним, что *конфигурация* в модели Изинга — это последовательность $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_t)$ фиксированной длины, состоящая из чисел ± 1 . *Намагниченностью* и *энергией* конфигурации называются $\sum_{k=1}^t \sigma_k / t$ и $H(\sigma) = \sum_{k=1}^{t-1} (1 - \sigma_k \sigma_{k+1})$ соответственно. *Вероятностью* конфигурации считается $e^{-\beta H(\sigma)} / Z(\beta)$, где *обратная температура* $\beta = 1/T > 0$ — некоторый параметр, а *статистическая сумма* $Z(\beta) := \sum_{\sigma} e^{-\beta H(\sigma)}$ — нормирующий множитель. На конфигурацию σ обычно накладываются дополнительные ограничения.

Теперь, двигая шашку вдоль пути s , будем писать знак “+” для каждого хода вправо-вверх и “−” для каждого хода влево-вверх; см. рис. 11 слева. Полученная последовательность знаков — некоторая конфигурация в модели Изинга. Количество поворотов в s

равно половине энергии конфигурации, а отношение конечных x - и t -координат равно намагниченности. Поэтому $a(x, t) = \sum_s a(s)$ совпадает (с точностью до не зависящего от x множителя) со статистической суммой модели Изинга при *мнимой* обратной температуре $\beta = i\pi/4$ и фиксированной намагниченности x/t :

$$a(x, t) = 2^{(1-t)/2} i \sum_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_t) \in \{+1, -1\}^t: \\ \sigma_1 = +1, \quad \sum_{k=1}^{t-1} \sigma_k = x}} \exp \left(\frac{i\pi}{4} \sum_{k=1}^{t-1} (\sigma_k \sigma_{k+1} - 1) \right).$$

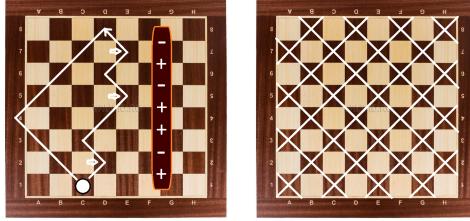


Рис. 11: Диаграмма Юнга (стрелки указывают на ступени) и модель Изинга (слева). Вспомогательная решетка (справа).

Отметим принципиальное отличие полученной интерпретации через спиновую цепочку как от обычной модели Изинга, так и от стандартной интерпретации выше. В последних двух моделях намагниченность x/t и средняя скорость x/t были *случайными величинами*; теперь же намагниченность x/t (которую не следует путать с внешним магнитным полем) является *внешним ограничением*. Конфигурационное пространство для интерпретации через спиновую цепочку состоит из последовательностей “+” и “-” с *фиксированным* количеством “+” и “-”. Суммирование по конфигурациям с разными x или t не имело бы никакого смысла: например, напомним, что $P(X, t) = \sum_{x \in X} |a(x, t)|^2$, а не $|\sum_{x \in X} a(x, t)|^2$.

Изменяя намагниченность x/t , рассматриваемую как внешнее ограничение, мы наблюдаем *фазовый переход*: предельная *плотность свободной энергии* (точнее, ее мнимая часть) $-\log a(x, t)/\beta t$ неаналитична, когда x/t проходит через значение $\pm 1/\sqrt{2}$ (см. рис. 5 в центре и следствие 3). Фазовый переход проявляется при $t \rightarrow \infty$. Интересно было бы изучить другие параметры порядка, например, “*вероятность* $i a_2(x, t)/a(x, t)$ *одинаковых знаков на концах спиновой цепочки* (см. рис. 10 и проблемы 4–5). Эти величины являются комплексными числами, просто потому что температура мнимая.

(Комментарий для специалистов: фазовый переход не связан с накоплением нулей статистической суммы на плоскости комплексного параметра β , как в [25, §III] и [35]. В нашей ситуации $\beta = i\pi/4$ фиксировано, *вещественный* параметр x/t изменяется, а статистическая сумма $a(x, t)$ совсем не имеет нулей [37, теорема 1].)

Интерпретация через диаграммы Юнга. Наши результаты также имеют комбинаторную интерпретацию.

Число ступеней (или внутренних углов) диаграммы Юнга с w столбцами высот x_1, \dots, x_w соответственно — это количество элементов в множестве $\{x_1, \dots, x_w\}$; см. рис. 11 слева. Тогда величина $2^{(h+w-1)/2} a_1(h-w, h+w)$ равна разности между количеством диаграмм Юнга с нечетным и с четным числом ступеней, имеющих ровно w столбцов и h строк.

Интересное поведение начинается уже для $h = w$ (см. предложение 4). При четном $h = w$ наша разность обращается в ноль. При нечетном $h = w = 2n + 1$ она равна $(-1)^n \binom{2n}{n}$. Такая периодичность с периодом 4 примерно сохраняется, пока h близко к w [45, теорема 2]. При фиксированном полупериметре $h+w$ наша разность медленно колеблется с ростом h/w , достигает пика при $h/w \approx 3 + 2\sqrt{2}$, а затем резко падает до очень малых значений (см. следствие 2 и теоремы 2–4).

Аналогично, величина $2^{(h+w-1)/2} a_2(h-w, h+w)$ равна разности между количеством диаграмм Юнга с нечетным и с четным числом ступеней, имеющих ровно w столбцов и

меньше, чем h строк. Поведение аналогично. Уточнение в §3 связано с *характерными многочленами Стенли* [48, §2].

Обсуждение определения. Сравним определение 1 с определениями в литературе.

Обозначение “ a ” происходит от слов “arrow” и “probability amplitude”. Другие названия — “волновая функция”, “ядро”, “функция Грина”, “пропагатор”. Более традиционные обозначения — “ ψ ”, “ K ”, “ G ”, “ Δ ”, “ S ”, в зависимости от контекста. Мы будем использовать нейтральное обозначение, подходящее для всех контекстов.

Множитель i и знак минуса в определении непринципиальны (и отсутствуют в первоисточнике [12, задача 2.6]). Они появляются из-за обычного начального положения и направления вращения стрелки секундомера, и сокращают число минусов впоследствии.

Нормирующий множитель $2^{(1-t)/2}$ можно объяснить по аналогии с классическим случайным блужданием. Если бы шашка просто выполняла случайное блуждание, выбирая одно из двух возможных направлений на каждом шагу (после обязательного первого хода вправо-вверх), то число $|a(s)|^2 = 2^{1-t}$ было бы вероятностью пути s . К данной аналогии следует относиться с осторожностью: в квантовой теории “вероятность пути” не имеет абсолютно никакого смысла (вспомните пример 1). Причина в том, что путь — это не то, что можно измерить: измерение положения электрона в один момент времени сильно влияет на его движение для всех последующих моментов.

Более концептуально было бы также фиксировать направление *последнего* хода пути s (см. [12, внизу стр. 35]). К счастью, такая фиксация не требуется в данной работе (и поэтому не делается), но становится критически важной в дальнейших уточнениях модели (см. объяснение в §4).

Можно задаться вопросом, откуда взялась эта модель. Следуя Фейнману, мы не будем пытаться объяснить или “вывести” её физически. Эту квантовую модель нельзя получить из классической с помощью фейнмановского суммирования по путям: просто не существует ясного классического аналога частицы со спином $1/2$ (ср. §4) и настоящего понимания *спина*. “Выход” модели в [1, 4, 36] требует намного более сложных понятий, чем сама модель. Истинной мотивировкой для этой модели является её простота, согласованность с базовыми принципами (такими как сохранение вероятности) и с экспериментом (что в данном случае означает правильный непрерывный предел, см. следствие 6).

2.3 Тождества и асимптотики

Сформулируем несколько известных свойств нашей модели. Доказательства даны в §12.1.

Для начала отметим, что координаты стрелки $a_1(x, t)$ и $a_2(x, t)$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению.

Предложение 1 (Уравнение Дирака). Для каждого целого x и для каждого положительного целого t выполнено

$$\begin{aligned} a_1(x, t+1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_2(x+1, t) + \frac{1}{\sqrt{2}}a_1(x+1, t); \\ a_2(x, t+1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_2(x-1, t) - \frac{1}{\sqrt{2}}a_1(x-1, t). \end{aligned}$$

Эти уравнения имитируют $(1+1)$ -мерное уравнение Дирака в базисе Вейля [42, (19.4) и (3.31)]

$$\begin{pmatrix} m & \partial/\partial x - \partial/\partial t \\ \partial/\partial x + \partial/\partial t & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2(x, t) \\ a_1(x, t) \end{pmatrix} = 0, \quad (1)$$

в котором производные заменены на конечные разности, $m = 1$, а также добавлен нормирующий множитель $1/\sqrt{2}$. Для уточнения модели в §3 эта аналогия становится прозрачной (см. замечание 2). Базис Вейля не единственен, поэтому существуют несколько форм уравнения (1); ср. [23, (1)].

Уравнение Дирака влечёт сохранение вероятности.

Предложение 2 (Сохранение вероятности/заряда). Для каждого целого $t \geq 1$ выполнено $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, t) = 1$.

Существует “явная” формула для $a_1(x, t)$ и $a_2(x, t)$ (альтернативные формулы приведены в приложении А).

Предложение 3 (“Явная” формула). Для всех целых $|x| < t$, где $x + t$ чётно, выполнено

$$a_1(x, t) = 2^{(1-t)/2} \sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-1)^r \binom{(x+t-2)/2}{r} \binom{(t-x-2)/2}{r},$$

$$a_2(x, t) = 2^{(1-t)/2} \sum_{r=1}^{(t-|x|)/2} (-1)^r \binom{(x+t-2)/2}{r} \binom{(t-x-2)/2}{r-1}.$$

Следующее предложение является прямым следствием «явной» формулы.

Предложение 4 (Частные значения). Для всех целых $1 \leq k \leq t-1$ значения $a_1(-t+2k, t)$ и $a_2(-t+2k, t)$ — это коэффициенты перед z^{t-k-1} и z^{t-k} в разложении многочлена $2^{(1-t)/2}(1+z)^{t-k-1}(1-z)^{k-1}$. В частности,

$$a_1(0, 4n+2) = \frac{(-1)^n}{2^{(4n+1)/2}} \binom{2n}{n}, \quad a_1(0, 4n) = 0,$$

$$a_2(0, 4n+2) = 0, \quad a_2(0, 4n) = \frac{(-1)^n}{2^{(4n-1)/2}} \binom{2n-1}{n}.$$

В §3.1 мы приведём больше тождеств. Последовательности $2^{(t-1)/2}a_1(x, t)$ и $2^{(t-1)/2}a_2(x, t)$ есть в онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей [46, A098593 и A104967].

Следующий примечательный результат был замечен в [1, §4] (см. рисунки 5 и 10), сформулирован и обоснован эвристически в [29, теорема 1], и доказан математически в [20, теорема 1]. Краткое изложение последнего доказательства дано в §12.2, обобщения — в §3.2.

Теорема 1 (Пределное распределение при больших временах; см. рисунок 10). (A) Для любого $v \in \mathbb{R}$ верно, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{x \leq vt} P(x, t) = F(v) := \begin{cases} 0, & \text{при } v \leq -1/\sqrt{2}; \\ \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1-2v}{\sqrt{2}(1-v)}, & \text{при } |v| < 1/\sqrt{2}; \\ 1, & \text{при } v \geq 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

(B) Имеет место следующая сходимость по распределению при $t \rightarrow \infty$:

$$tP(\lceil vt \rceil, t) \xrightarrow{d} F'(v) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(1-v)\sqrt{1-2v^2}}, & \text{при } |v| < 1/\sqrt{2}; \\ 0, & \text{при } |v| \geq 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

(C) Для любого целого $r \geq 0$ верно, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x}{t}\right)^r P(x, t) = \int_{-1}^1 v^r F'(v) dv$.

Теорема 1(B) демонстрирует фазовый переход в шашках Фейнмана, если интерпретировать их как модель Изинга при мнимой температуре и фиксированной намагниченности. Напомним, что тогда намагниченность v является внешним ограничением (а не случайной величиной), а $P(\lceil vt \rceil, t)$ — это квадрат нормы статистической суммы (а не вероятность). Предел по распределению для $tP(\lceil vt \rceil, t)$ разрыжен в точке $v = \pm 1/\sqrt{2}$, что отражает фазовый переход (ср. со следствием 3).

3 Масса (квантовое блуждание со сносом)

Вопрос: какова вероятность обнаружения в клетке (x, t) электрона массой m , испущенного из $(0, 0)$?

Предположения: масса и сторона клетки теперь любые.

Результаты: аналитические выражения для вероятности при больших временах или малой длине стороны клетки, концентрация меры.

3.1 Тождества

Определение 2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $m \geq 0$, называемые *шагом решетки* и *массой частицы* соответственно. Рассмотрим решетку $\varepsilon\mathbb{Z}^2 = \{(x, t) : x/\varepsilon, t/\varepsilon \in \mathbb{Z}\}$ (см. рис. 3). Путь s шашки — это такая конечная последовательность точек решетки, что вектор из каждой точки (кроме последней) к следующей равен либо $(\varepsilon, \varepsilon)$, либо $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Обозначим через $\text{turns}(s)$ количество таких точек пути s (не считая первую и последнюю), что вектор, соединяющий эту точку с предыдущей, ортогонален вектору, соединяющему её со следующей. Для каждого $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, где $t > 0$, обозначим через

$$a(x, t, m, \varepsilon) := (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} i \sum_s (-im\varepsilon)^{\text{turns}(s)} \quad (2)$$

сумму по всем путям s шашки на $\varepsilon\mathbb{Z}^2$ из $(0, 0)$ в (x, t) с первым шагом в $(\varepsilon, \varepsilon)$. Обозначим $P(x, t, m, \varepsilon) := |a(x, t, m, \varepsilon)|^2$, $a_1(x, t, m, \varepsilon) := \operatorname{Re} a(x, t, m, \varepsilon)$, $a_2(x, t, m, \varepsilon) := \operatorname{Im} a(x, t, m, \varepsilon)$.

Замечание 1. В частности, $P(x, t) = P(x, t, 1, 1)$ и $a(x, t) = a(x, t, 1, 1) = a(x\varepsilon, t\varepsilon, 1/\varepsilon, \varepsilon)$.

Величина $P(x, t, m, \varepsilon)$ интерпретируется как вероятность обнаружения электрона массой m в квадрате $\varepsilon \times \varepsilon$ с центром (x, t) , если электрон был испущен из начала координат. Отметим, что величина $m\varepsilon$, а значит и $P(x, t, m, \varepsilon)$, безразмерна в естественных единицах, в которых $\hbar = c = 1$. На рис. 1 в центре цвет точки (x, t) показывает значение $P(x, t, 1, 0.5)$ (если $x + t$ целое). Таблица 4 изображает $a(x, t, m, \varepsilon)$ при малых x и t . Недавно И. Новиков элегантно доказал, что эта вероятность не обращается в нуль внутри светового конуса: $P(x, t, m, \varepsilon) \neq 0$ при $m > 0$, $|x| < t$ и четном $(x + t)/\varepsilon$ [37, теорема 1].

4ε	$\frac{m\varepsilon}{(1+m^2\varepsilon^2)^{3/2}}$		$\frac{(m\varepsilon-m^3\varepsilon^3)-m^2\varepsilon^2 i}{(1+m^2\varepsilon^2)^{3/2}}$		$\frac{m\varepsilon-2m^2\varepsilon^2 i}{(1+m^2\varepsilon^2)^{3/2}}$		$\frac{i}{(1+m^2\varepsilon^2)^{3/2}}$
3ε		$\frac{m\varepsilon}{1+m^2\varepsilon^2}$		$\frac{m\varepsilon-m^2\varepsilon^2 i}{1+m^2\varepsilon^2}$		$\frac{i}{(1+m^2\varepsilon^2)}$	
2ε			$\frac{m\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$		$\frac{i}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$		
ε				i			
$t \diagdown x$	-2ε	$-\varepsilon$	0	ε	2ε	3ε	4ε

Таблица 4: (И. Новиков [37]) Величины $a(x, t, m, \varepsilon)$ при малых x и t .

Пример 2 (Границные значения). Имеем $a(t, t, m, \varepsilon) = i(1+m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2}$ и $a(2\varepsilon-t, t, m, \varepsilon) = m\varepsilon(1+m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2}$ для всех $t \in \varepsilon\mathbb{Z}$, $t > 0$, и $a(x, t, m, \varepsilon) = 0$ для всех $x > t$ или $x \leq -t$.

Пример 3 (Безмассовые и тяжёлые частицы). Для каждого $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, где $t > 0$, выполнено

$$P(x, t, 0, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = t; \\ 0, & \text{при } x \neq t. \end{cases} \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} P(x, t, m, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0 \text{ или } \varepsilon, \text{ и } \frac{x+t}{\varepsilon} \text{ четно;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Перечислим известные комбинаторные свойства модели [50, 30]; см. простые доказательства в §12.1.

Предложение 5 (Уравнение Дирака). Для каждого $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, где $t > 0$, выполнено

$$a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}} (a_1(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon) + m\varepsilon a_2(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon)), \quad (3)$$

$$a_2(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}} (a_2(x - \varepsilon, t, m, \varepsilon) - m\varepsilon a_1(x - \varepsilon, t, m, \varepsilon)). \quad (4)$$

Замечание 2. Это уравнение переходит в уравнение Дирака (1) в непрерывном пределе $\varepsilon \rightarrow 0$: для функций $a_1, a_2 : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^2 , удовлетворяющих (3)–(4) на $\varepsilon\mathbb{Z}^2$, левая часть уравнения (1) есть $O_m(\varepsilon \cdot (\|a_1\|_{C^2} + \|a_2\|_{C^2}))$.

Предложение 6 (Сохранение вероятности). Для каждого $t \in \varepsilon\mathbb{Z}$, где $t > 0$, выполнено $\sum_{x \in \varepsilon\mathbb{Z}} P(x, t, m, \varepsilon) = 1$.

Предложение 7 (Уравнение Клейна–Гордона). Для каждого $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, где $t > \varepsilon$, выполнено

$$\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} a(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) + \sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} a(x, t - \varepsilon, m, \varepsilon) - a(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon) - a(x - \varepsilon, t, m, \varepsilon) = 0.$$

Это уравнение переходит в *уравнение Клейна–Гордона* $\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + m^2 a = 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Предложение 8 (Симметрия). Для каждого $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, где $t > 0$, выполнено

$$\begin{aligned} a_1(x, t, m, \varepsilon) &= a_1(-x, t, m, \varepsilon), & (t - x) a_2(x, t, m, \varepsilon) &= (t + x - 2\varepsilon) a_2(2\varepsilon - x, t, m, \varepsilon), \\ a_1(x, t, m, \varepsilon) + m\varepsilon a_2(x, t, m, \varepsilon) &= a_1(2\varepsilon - x, t, m, \varepsilon) + m\varepsilon a_2(2\varepsilon - x, t, m, \varepsilon). \end{aligned}$$

Предложение 9 (Принцип Гюйгенса). Для всех $x, t, t' \in \varepsilon\mathbb{Z}$, где $t > t' > 0$, выполнено

$$\begin{aligned} a_1(x, t, m, \varepsilon) &= \sum_{x' \in \varepsilon\mathbb{Z}} [a_2(x', t', m, \varepsilon) a_1(x - x' + \varepsilon, t - t' + \varepsilon, m, \varepsilon) + a_1(x', t', m, \varepsilon) a_2(x' - x + \varepsilon, t - t' + \varepsilon, m, \varepsilon)], \\ a_2(x, t, m, \varepsilon) &= \sum_{x' \in \varepsilon\mathbb{Z}} [a_2(x', t', m, \varepsilon) a_2(x - x' + \varepsilon, t - t' + \varepsilon, m, \varepsilon) - a_1(x', t', m, \varepsilon) a_1(x' - x + \varepsilon, t - t' + \varepsilon, m, \varepsilon)]. \end{aligned}$$

Неформально, принцип Гюйгенса означает, что каждая черная клетка (x', t') на горизонтали с номером t'/ε действует как независимый точечный источник с амплитудой и фазой, определяемыми величиной $a(x', t', m, \varepsilon)$.

Предложение 10 (Одновременное реккурентное соотношение). Для каждого $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, где $t > 0$, выполнено

$$(x + \varepsilon)((x - \varepsilon)^2 - (t - \varepsilon)^2)a_1(x - 2\varepsilon, t, m, \varepsilon) + (x - \varepsilon)((x + \varepsilon)^2 - (t - \varepsilon)^2)a_1(x + 2\varepsilon, t, m, \varepsilon) = 2x((1 + 2m^2\varepsilon^2)(x^2 - \varepsilon^2) - (t - \varepsilon)^2)a_1(x, t, m, \varepsilon), \quad (5)$$

$$x((x - 2\varepsilon)^2 - t^2)a_2(x - 2\varepsilon, t, m, \varepsilon) + (x - 2\varepsilon)(x^2 - (t - 2\varepsilon)^2)a_2(x + 2\varepsilon, t, m, \varepsilon) = 2(x - \varepsilon)((1 + 2m^2\varepsilon^2)(x^2 - 2\varepsilon x) - t^2 + 2\varepsilon t)a_2(x, t, m, \varepsilon).$$

Это позволяет быстро вычислять $a_1(x, t)$ и $a_2(x, t)$ на далеких горизонталях, начиная с $x = 2\varepsilon - t$ и $x = t$ соответственно (см. пример 2).

Предложение 11 (“Явная” формула). Для каждого $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, такого что $|x| < t$ и $(x + t)/\varepsilon$ четно, выполнено

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} \sum_{r=0}^{\frac{t-|x|}{2\varepsilon}} (-1)^r \binom{(x+t)/2\varepsilon - 1}{r} \binom{(t-x)/2\varepsilon - 1}{r} (m\varepsilon)^{2r+1}, \quad (6)$$

$$a_2(x, t, m, \varepsilon) = (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} \sum_{r=1}^{\frac{t-|x|}{2\varepsilon}} (-1)^r \binom{(x+t)/2\varepsilon - 1}{r} \binom{(t-x)/2\varepsilon - 1}{r-1} (m\varepsilon)^{2r}. \quad (7)$$

Замечание 3. Для всех $|x| \geq t$ имеем $a(x, t, m, \varepsilon) = 0$, кроме случая $0 < x = t \in \varepsilon\mathbb{Z}$, когда $a(t, t, m, \varepsilon) = (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2}i$. Подчеркнем, что предложение *неприменимо* при $|x| \geq t$.

По определению гипергеометрической функции Гаусса, та же формула переписывается так:

$$\begin{aligned} a_1(x, t, m, \varepsilon) &= m\varepsilon (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} \cdot {}_2F_1 \left(1 - \frac{x+t}{2\varepsilon}, 1 + \frac{x-t}{2\varepsilon}; 1; -m^2\varepsilon^2 \right), \\ a_2(x, t, m, \varepsilon) &= m^2\varepsilon^2 (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} \cdot {}_2F_1 \left(2 - \frac{x+t}{2\varepsilon}, 1 + \frac{x-t}{2\varepsilon}; 2; -m^2\varepsilon^2 \right) \cdot \left(1 - \frac{x+t}{2\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Это дает много новых тождеств. Например, соотношения смежности Гаусса связывают значения $a(x, t, m, \varepsilon)$ в любых 3 соседних точках решетки; ср. с предложениями 5 и 10. В терминах многочленов Якоби,

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = m\varepsilon(1 + m^2\varepsilon^2)^{(x/\varepsilon - 1)/2} P_{(x+t)/2\varepsilon - 1}^{(0, -x/\varepsilon)} \left(\frac{1 - m^2\varepsilon^2}{1 + m^2\varepsilon^2} \right),$$

$$a_2(x, t, m, \varepsilon) = -m^2\varepsilon^2(1 + m^2\varepsilon^2)^{(x/\varepsilon - 3)/2} P_{(x+t)/2\varepsilon - 2}^{(1, 1-x/\varepsilon)} \left(\frac{1 - m^2\varepsilon^2}{1 + m^2\varepsilon^2} \right).$$

Есть аналогичное выражение через многочлены Кравчука (ср. с предложением 4). В терминах характерных многочленов Стенли (определенных в [48, §2]),

$$a_2(0, t, m, \varepsilon) = (-1)^{t/2\varepsilon - 1} (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} \left(\frac{t}{2\varepsilon} - 1 \right) G_{t/2\varepsilon - 1}(1; m^2\varepsilon^2).$$

Предложение 12 (Интеграл Фурье). *Положим $\omega_p := \frac{1}{\varepsilon} \arccos(\frac{\cos p\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}})$. Тогда для каждого $t > 0$ и $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, такого что $t > 0$ и $(x+t)/\varepsilon$ четно, выполнено*

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = \frac{im\varepsilon^2}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{ipx - i\omega_p(t-\varepsilon)}}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} dp,$$

$$a_2(x, t, m, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \left(1 + \frac{\sin(p\varepsilon)}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} \right) e^{ip(x-\varepsilon) - i\omega_p(t-\varepsilon)} dp.$$

Интеграл Фурье представляет волну, испущенную точечным источником, как суперпозицию волн с длиной волны $2\pi/p$ и частотой ω_p .

Предложение 13 (Преобразование Фурье по всему пространству-времени). *Обозначим $\delta_{x\varepsilon} := 1$, если $x = \varepsilon$, и $\delta_{x\varepsilon} := 0$, если $x \neq \varepsilon$. Для каждого $t > 0$ и $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, такого что $t > 0$ и $(x+t)/\varepsilon$ четно, выполнено*

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{m\varepsilon^3}{4\pi^2} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{ipx - i\omega(t-\varepsilon)}}{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} \cos(\omega\varepsilon) - \cos(p\varepsilon) - i\delta} d\omega dp$$

$$a_2(x, t, m, \varepsilon) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{-i\varepsilon^2}{4\pi^2} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} \sin(\omega\varepsilon) + \sin(p\varepsilon)}{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} \cos(\omega\varepsilon) - \cos(p\varepsilon) - i\delta} e^{ip(x-\varepsilon) - i\omega(t-\varepsilon)} d\omega dp + \delta_{x\varepsilon} \delta_{t\varepsilon}.$$

3.2 Асимптотики

Предел больших времен. Для фиксированных m, ε и большого t функция $a(x, t, m, \varepsilon)$

- (A) колеблется на отрезке между (примерными) пиками $x = \pm \frac{t}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$ (см. теорему 2);
- (B) приближается функцией Эйри вблизи пиков (см. теорему 3);
- (C) экспоненциально убывает вне отрезка, ограниченного пиками (см. теорему 4 и рис. 12).

Начнем с обсуждения режима (A). Сформулируем основную теорему: аналитическое приближение функции $a(x, t, m, \varepsilon)$, которое является очень точным при x/t , расположенным между пиками, но не слишком близко к ним (рис. 12 слева).

Теорема 2 (Асимптотика между пиками при больших временах; см. рис. 12 слева). *Для каждого $\delta > 0$ найдется $C_\delta > 0$ такое, что при всех $m, \varepsilon > 0$ и всех $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, удовлетворяющих неравенствам*

$$|x|/t < 1/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} - \delta, \quad \varepsilon \leq 1/m, \quad t > C_\delta/m, \tag{8}$$

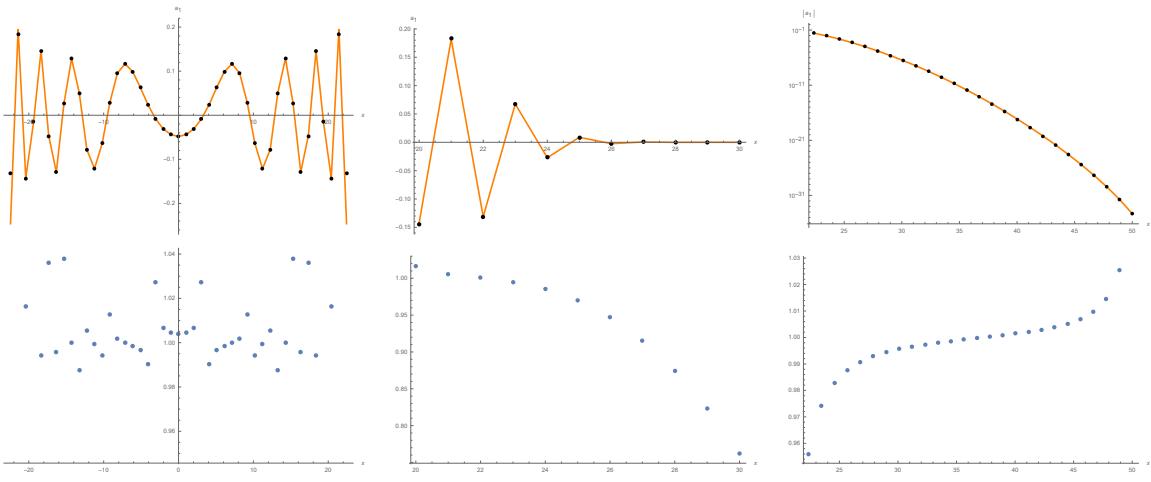


Рис. 12: Графики функции $a_1(x, 50, 4, 0.5)$ (точки сверху), ее аналитического приближения (кривые сверху) из теорем 2 (слева), 3 (в центре) и 4 (справа), и их отношения (снизу). График вверху справа изображает модуль этой функции в логарифмической шкале

выполнены асимптотики

$$a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi}} (t^2 - (1 + m^2 \varepsilon^2)x^2)^{-1/4} \sin \theta(x, t, m, \varepsilon) + O_\delta \left(\frac{\varepsilon}{m^{1/2} t^{3/2}} \right), \quad (9)$$

$$a_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi}} (t^2 - (1 + m^2 \varepsilon^2)x^2)^{-1/4} \sqrt{\frac{t+x}{t-x}} \cos \theta(x, t, m, \varepsilon) + O_\delta \left(\frac{\varepsilon}{m^{1/2} t^{3/2}} \right), \quad (10)$$

для четных и нечетных $(x + t)/\varepsilon$ соответственно, где

$$\theta(x, t, m, \varepsilon) := \frac{t}{\varepsilon} \arcsin \frac{m\varepsilon t}{\sqrt{(1 + m^2 \varepsilon^2)(t^2 - x^2)}} - \frac{x}{\varepsilon} \arcsin \frac{m\varepsilon x}{\sqrt{t^2 - x^2}} + \frac{\pi}{4}. \quad (11)$$

Здесь и далее запись $f(x, t, m, \varepsilon) = g(x, t, m, \varepsilon) + O_\delta(h(x, t, m, \varepsilon))$ означает, что существует константа $C(\delta)$ (зависящая от δ , но *не* от x, t, m, ε), такая что для всех $x, t, m, \varepsilon, \delta$, удовлетворяющих условию теоремы, выполнено $|f(x, t, m, \varepsilon) - g(x, t, m, \varepsilon)| \leq C(\delta) h(x, t, m, \varepsilon)$.

Главные члены в теореме 2 были впервые найдены в [1, теорема 2] в частном случае $m = \varepsilon = 1$. Остаточные члены были оценены в [47, предложение 2.2]; эта оценка имела такой же порядок по t , но была *неравномерна* по t и ε (и *не могла* быть равномерной в том виде, в котором там приводилась, так как иначе получилось бы противоречие с следствием 6 при $\varepsilon \rightarrow 0$). Получение равномерных оценок (9)–(10) потребовало изысканного варианта метода стационарной фазы и дополнительных шагов 3–4 в доказательстве (см. §12.3). Другие методы (асимптотика Дарбу для многочленов Лежандра и круговой метод Харди–Литтлвуда) были применены в [6, теорема 3] и [45, теорема 2] для получения (9) в частном случае $x = 0$ и для более грубой асимптотики при x вблизи 0.

Теорема 2 имеет ряд интересных следствий. Во-первых, она позволяет перейти к слабому пределу по времени (см. рис. 10). По сравнению с теоремой 1, это дает сходимость в более сильном смысле, недостижимому методом моментов и методом [47, теорема 1.1].

Следствие 1 (Предельное распределение при больших временах). Для каждого $t > 0$ и $\varepsilon \leq 1/m$ выполнено

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{\substack{t \in \varepsilon \mathbb{Z} \\ x \leq vt \\ x \in \varepsilon \mathbb{Z}}} P(x, t, m, \varepsilon) \Rightarrow F(v, m, \varepsilon) := \begin{cases} 0, & \text{если } v \leq -1/\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2}; \\ \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1 - (1 + m^2 \varepsilon^2)v}{\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2}(1 - v)}, & \text{если } |v| < 1/\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2}; \\ 1, & \text{если } v \geq 1/\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2} \end{cases}$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по v .

Напомним, что все наши результаты можно сформулировать в терминах диаграмм Юнга или многочленов Якоби.

Следствие 2 (Ступени диаграмм Юнга; см. рис. 11). *Обозначим через $n_+(h \times w)$ и $n_-(h \times w)$ количество диаграмм Юнга ровно с h строками и w столбцами, имеющими четное и нечетное число ступеней соответственно (см. определение на стр. 11). Тогда для почти всех $r > 1$ выполнено*

$$\limsup_{w \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{w}}{2^{(r+1)w/2}} |n_+(\lceil rw \rceil \times w) - n_-(\lceil rw \rceil \times w)| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (6r - r^2 - 1)^{-1/4}, & \text{при } r < 3 + 2\sqrt{2}; \\ 0, & \text{при } r > 3 + 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Для режимов **(B)** и **(C)** вблизи и снаружи от пиков сформулируем две теоремы Сунады–Татэ без подробного обсуждения доказательств. (Строго говоря, главные члены в литературе [1, теорема 2], [47, предложение 2.2, 3.1, 4.1] немного отличаются от (9), (13), (17); но разница лежит в пределах оценки остаточного члена. С практической точки зрения, последние три приближения лучше на несколько порядков.)

Режим **(B)** вблизи пиков описывается функцией Эйри

$$\text{Ai}(\lambda) := \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \left(\lambda p + \frac{p^3}{3} \right) dp.$$

Теорема 3 (Асимптотика вблизи пиков при больших временах; см. рис. 12 в центре). [47, предложение 3.1] Для любых $m, \varepsilon, \Delta > 0$ и любой последовательности $(x_n, t_n) \in \varepsilon \mathbb{Z}^2$, такой что

$$|x_n/t_n - 1/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}| < \Delta t_n^{-2/3}, \quad t_n = n\varepsilon, \quad (12)$$

выполнено

$$a_1(\pm x_n, t_n + \varepsilon, m, \varepsilon) = (-1)^{\frac{t_n - x_n - \varepsilon}{2\varepsilon}} m\varepsilon \left(\frac{2}{m^2\varepsilon t_n} \right)^{1/3} \text{Ai}(\Delta(x_n, t_n, m, \varepsilon)) + O_{m, \varepsilon, \{x_n\}}(n^{-2/3}), \quad (13)$$

$$a_2(\pm x_n + \varepsilon, t_n + \varepsilon, m, \varepsilon) = (-1)^{\frac{t_n - x_n}{2\varepsilon}} \left(\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \pm 1 \right) \left(\frac{2}{m^2\varepsilon t_n} \right)^{1/3} \text{Ai}(\Delta(x_n, t_n, m, \varepsilon)) + O_{m, \varepsilon, \{x_n\}}(n^{-2/3}) \quad (14)$$

при $(x_n + t_n)/\varepsilon$ нечетных и четных соответственно, где знаки \pm согласованы и

$$\Delta(x_n, t_n, m, \varepsilon) := \left(\frac{2}{m^2\varepsilon t_n} \right)^{1/3} \frac{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} x_n - t_n}{\varepsilon}. \quad (15)$$

Мы пишем $f(x_n, t_n, m, \varepsilon) = O_{m, \varepsilon, \{x_n\}}(g(n))$, если найдется константа $C(m, \varepsilon, \{x_n\})$ (зависящая от m, ε и всей последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, но не от n), такая что для каждого n выполнено $|f(x_n, t_n, m, \varepsilon)| \leq C(m, \varepsilon, \{x_n\})g(n)$.

Недавно П. Закорко продолжила (13)–(14) на большую окрестность пиков [52].

Экспоненциальное убывание снаружи от пиков было сформулировано без доказательства в [1, Theorem 1]. Доказательство появилось только через десятилетие, когда была установлена следующая асимптотика.

Теорема 4 (Асимптотика снаружи от пиков при больших временах; см. рис. 12 справа). [47, предложение 4.1] Для любых $m, \varepsilon, \Delta > 0$, $v \in (-1; 1)$ и любой последовательности $(x_n, t_n) \in \varepsilon \mathbb{Z}^2$, удовлетворяющей условиям

$$1/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} < |v| < 1, \quad |x_n - vt_n| < \Delta, \quad t_n = n\varepsilon, \quad (16)$$

выполнено

$$a_1(x_n, t_n + \varepsilon, m, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\frac{m}{2\pi t_n}} \frac{(-1)^{(t_n - |x_n| - \varepsilon)/2\varepsilon}}{((1 + m^2\varepsilon^2)v^2 - 1)^{1/4}} \cdot \exp\left(-\frac{t_n}{2\varepsilon} H\left(\frac{x_n}{t_n}, m, \varepsilon\right)\right) \left(1 + O_{m,\varepsilon,\{x_n\}}\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (17)$$

$$a_2(x_n + \varepsilon, t_n + \varepsilon, m, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\frac{m}{2\pi t_n}} \frac{(-1)^{(t_n - |x_n|)/2\varepsilon}}{((1 + m^2\varepsilon^2)v^2 - 1)^{1/4}} \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \cdot \exp\left(-\frac{t_n}{2\varepsilon} H\left(\frac{x_n}{t_n}, m, \varepsilon\right)\right) \left(1 + O_{m,\varepsilon,\{x_n\}}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (18)$$

при $(x_n + t_n)/\varepsilon$ нечетных и четных соответственно, где

$$H(v, m, \varepsilon) := -2 \operatorname{arccosh} \frac{m\varepsilon}{\sqrt{(1 + m^2\varepsilon^2)(1 - v^2)}} + 2|v| \operatorname{arccosh} \frac{m\varepsilon|v|}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (19)$$

Функция (19) положительна и выпукла по v при $\frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} < |v| < 1$ [47, теорема 1.4].

Следствие 3 (Предельная плотность свободной энергии; см. рис. 5 в центре). Для любых $m, \varepsilon > 0$, $v \in (-1; 1)$ и функции $H(v, m, \varepsilon)$, заданной равенством (19), выполнено

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \in 2\varepsilon\mathbb{Z}}} \frac{1}{t} \log P\left(2\varepsilon \left\lceil \frac{vt}{2\varepsilon} \right\rceil, t, m, \varepsilon\right) = \begin{cases} -H(v, m, \varepsilon)/\varepsilon, & \text{при } |v| > 1/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}; \\ 0, & \text{при } |v| < 1/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}. \end{cases}$$

Это означает фазовый переход в модели Изинга в сильном смысле: предельная плотность свободной энергии (мнимая часть которой пропорциональна выражению в левой части) неаналитична по v .

Фейнмановский тройной предел. Теорема 2 позволяет перейти к пределу $(1/t, x/t, \varepsilon) \rightarrow 0$ следующим образом.

Следствие 4 (Более простая и грубая асимптотика). В предположениях теоремы 2 выполнено

$$a(x, t, m, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi t}} \exp\left(-im\sqrt{t^2 - x^2} + \frac{i\pi}{4}\right) \left(1 + O_\delta\left(\frac{1}{mt} + \frac{|x|}{t} + m^3\varepsilon^2 t\right)\right). \quad (20)$$

Следствие 5 (Фейнмановский тройной предел; см. рис. 3). Для каждого $t \geq 0$ и каждой последовательности $(x_n, t_n, \varepsilon_n)$, такой что $(x_n, t_n) \in \varepsilon_n\mathbb{Z}^2$, число $(x_n + t_n)/\varepsilon_n$ четно и

$$1/t_n, \quad x_n/t_n^{3/4}, \quad \varepsilon_n t_n^{1/2} \quad \rightarrow \quad 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (21)$$

выполнена эквивалентность последовательностей

$$\frac{1}{2i\varepsilon_n} a(x_n, t_n, m, \varepsilon_n) \sim \sqrt{\frac{m}{2\pi t_n}} \exp\left(-imt_n - \frac{i\pi}{4} + \frac{imx_n^2}{2t_n}\right) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Для эквивалентности (22) предположения (21) существенны и точны, как показывает следующий пример.

Пример 4. Эквивалентность (22) не выполняется ни для $(x_n, t_n, \varepsilon_n) = (n^3, n^4, 1/n^4)$, ни для $(0, 4n^2, 1/2n)$, ни для $(0, 2n\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon = \text{const} < 1/m$: в этих случаях предел отношения левой части к правой равен $e^{im/8}$, $e^{im^3/3}$ и не существует соответственно, а не равен 1. (Отсутствие последнего предела подтверждает, что стремление к нулю шага решетки подразумевалось в проблеме Фейнмана.)

Следствие 5 решает проблему Фейнмана (и более того, исправляет ее формулировку, раскрывая точные ограничения). Основная трудность здесь в переходе к *тройному*, а не *повторному* пределу. Нам неизвестно подхода, который мог бы решить проблему без доказательства теоремы 2 целиком. Например, асимптотика Дарбу для многочленов Якоби (см. замечание 3) подходит для вычисления повторного предела, когда сначала $t \rightarrow +\infty$, а потом $\varepsilon \rightarrow 0$, что дает (более слабый) результат, уже не зависящий от x . Ни асимптотика Дарбу, ни Мелера–Гейне, ни более новая асимптотика из [32] не применимы, когда $1/m\varepsilon$ или x/ε неограничены. То же касается и [47, предложение 2.2], так как оценка остаточного члена там неравномерна по t и ε . Наоборот, следующая теорема подходит для вычисления повторного предела, когда сначала $\varepsilon \rightarrow 0$, потом $x/t \rightarrow 0$, а потом $t \rightarrow +\infty$, но не тройного предела, так как остаточный член взрывается при $t \rightarrow +\infty$.

Непрерывный предел. Предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ описывается *функциями Бесселя 1-го рода*:

$$J_0(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2}, \quad J_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}.$$

Теорема 5 (Асимптотика в непрерывном пределе). Для любых $m, \varepsilon, \delta > 0$ и $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ таких, что $(x+t)/\varepsilon$ четно, $t - |x| \geq \delta$, и $\varepsilon < \delta e^{-3ms}/16$, где $s := \sqrt{t^2 - x^2}$, имеем

$$a(x, t, m, \varepsilon) = m\varepsilon \left(J_0(ms) - i \frac{t+x}{s} J_1(ms) + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta} \log^2 \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot e^{m^2 t^2}\right)\right).$$

Напомним, что $f(x, t, m, \varepsilon) = O(g(x, t, m, \varepsilon))$ означает, что существует константа C (не зависящая от x, t, m, ε) такая, что для любых x, t, m, ε , удовлетворяющих условиям теоремы, верно, что $|f(x, t, m, \varepsilon)| \leq C g(x, t, m, \varepsilon)$.

Главный член в теореме 5 был вычислен в [36, §1]. Численный эксперимент показывает, что остаточный член убывает быстрее, чем утверждается в теореме (см. таблицу 5, вычисленную в [44, §14]).

В следующем следствии мы приближаем фиксированную точку плоскости (x, t) точками решетки $(2\varepsilon \lceil \frac{x}{2\varepsilon} \rceil, 2\varepsilon \lceil \frac{t}{2\varepsilon} \rceil)$ (см. рисунок 4). Множители 2 делают эти точки решетки достижимыми для шашки.

Следствие 6 (Равномерный непрерывный предел; см. рис. 4). Для любого фиксированного $m \geq 0$ имеем

$$\frac{1}{2\varepsilon} a\left(2\varepsilon \lceil \frac{x}{2\varepsilon} \rceil, 2\varepsilon \lceil \frac{t}{2\varepsilon} \rceil, m, \varepsilon\right) \Rightarrow \frac{m}{2} J_0(m\sqrt{t^2 - x^2}) - i \frac{m}{2} \sqrt{\frac{t+x}{t-x}} J_1(m\sqrt{t^2 - x^2}) \quad (23)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на компактных подмножествах угла $|x| < t$.

Доказательство поточечной сходимости проще и представлено в приложении B.

Следствие 7 (Концентрация меры). Для любых $t, m, \delta > 0$ имеем

$$\sum_{x \in \varepsilon\mathbb{Z} : 0 \leq t - |x| \leq \delta} P(x, t, m, \varepsilon) \rightarrow 1 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{таких, что } \frac{t}{2\varepsilon} \in \mathbb{Z}.$$

Этот результат, хотя и ожидаем, в литературе не обнаружен. Элементарное доказательство представлено в §12.6. Отметим существенное различие между непрерывным пределом и пределом при больших временах: из следствия 1 видим, что концентрации меры при $t \rightarrow \infty$ для фиксированного ε не наблюдается.

ε	$5\varepsilon \log_2^2(5\varepsilon)$	$\max_{x \in (-0.8, 0.8) \cap 2\varepsilon\mathbb{Z}} \left \frac{1}{2\varepsilon}a(x, 1, 10, \varepsilon) - G_{11}^R(x, 1) - iG_{12}^R(x, 1) \right $
0.02	0.1	1.1
0.002	0.04	0.06
0.0002	0.009	0.006

Таблица 5: Приближение запаздывающего пропагатора (26) для спина 1/2 с помощью шашек Фейнмана ($m = 10$, $\delta = 0.2$, $t = 1$)

3.3 Физическая интерпретация

Обсудим смысл фейнмановского тройного предела и непрерывного предела. В этом разделе мы опустим некоторые технические определения, не используемые в дальнейшем.

Правая часть выражения (22) с точностью до множителя e^{-imt_n} есть *ядро свободной частицы*

$$K(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi t}} \exp\left(\frac{imx^2}{2t} - \frac{i\pi}{4}\right), \quad (24)$$

описывающее движение по прямой свободной нерелятивистской частицы, испущенной из начала координат.

Предел (23) воспроизводит запаздывающий пропагатор со спином 1/2, описывающий движение электрона вдоль прямой. Точнее, *запаздывающий пропагатор со спином 1/2, или запаздывающая функция Грина для уравнения Дирака* (1), является матрично-значной обобщенной функцией медленного роста $G^R(x, t) = (G_{kl}^R(x, t))$ на \mathbb{R}^2 , зануляющейся при $t < |x|$ и удовлетворяющей уравнению

$$\begin{pmatrix} m & \partial/\partial x - \partial/\partial t \\ \partial/\partial x + \partial/\partial t & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11}^R(x, t) & G_{12}^R(x, t) \\ G_{21}^R(x, t) & G_{22}^R(x, t) \end{pmatrix} = \delta(x)\delta(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Пропагатор задаётся формулой (ср. [23, (13)], [42, (3.117)])

$$G^R(x, t) = \frac{m}{2} \begin{pmatrix} J_0(m\sqrt{t^2 - x^2}) & -\sqrt{\frac{t+x}{t-x}} J_1(m\sqrt{t^2 - x^2}) \\ \sqrt{\frac{t-x}{t+x}} J_1(m\sqrt{t^2 - x^2}) & J_0(m\sqrt{t^2 - x^2}) \end{pmatrix} \quad \text{при } |x| < t. \quad (26)$$

Кроме того, $G^R(x, t)$ содержит обобщенную функцию с носителем на прямых $t = \pm x$, которая не наблюдается в пределе (23), и поэтому не указана здесь. Более привычно выражение (ср. предложение 13)

$$G^R(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\delta \rightarrow +0} \begin{pmatrix} m & -ip - i\omega \\ -ip + i\omega & m \end{pmatrix} \frac{e^{ipx - i\omega t} dp d\omega}{m^2 + p^2 - (\omega + i\delta)^2}, \quad (27)$$

где предел берется в смысле слабой топологии матрично-значных обобщенных функций медленного роста, а интеграл понимается, как преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста (ср. [14, (6.47)]).

”Квадрат” пропагатора $G_{11}^R(x, t)^2 + G_{12}^R(x, t)^2$ определен некорректно (так как содержит квадрат дельта-функции Дирака с носителем на прямых $t = \pm x$). Поэтому пропагатор не имеет вероятностной интерпретации, а глобальное сохранение заряда (предложение 6) не имеет непрерывного аналога. Например, получаем следующий парадокс: $\int_{(-t, t)} (G_{11}^R(x, t)^2 + G_{12}^R(x, t)^2) dx \approx m^2 t / 2 \neq \text{const}$. Физическое объяснение: прямая $t = x$ несет бесконечный заряд, перетекающий внутрь угла $|x| < t$. Можно интерпретировать ”квадрат” пропагатора при $|x| \neq t$ как относительную плотность вероятности или плотность заряда (см. рис. 1 справа).

В интерпретации через спиновую цепочку, пропагатор является пределом статистической суммы одномерной модели Изинга при обратной температуре $\beta = i\pi/4 - \log(m\varepsilon)/2$. Это именно те значения β , для которых возможен фазовый переход [35].

Нормировочный множитель $1/2\varepsilon$ перед “ a ” в (23) может быть объяснен, как деление на длину, приходящуюся на одну черную точку решетки на горизонтальной прямой. На более глубоком уровне он объясняется нормировкой $G^R(x, t)$, возникающей из (25).

Теорема 5— игрушечный результат в *алгоритмической квантовой теории*: она определяет шаг решетки, необходимый для вычисления пропагатора с заданной точностью. Пока это не имеет большого значения, ведь пропагатор и так имеет известное аналитическое выражение и, на самом деле, не может быть измерен экспериментально; эффективность алгоритма также не рассматривается. Но это только первый шаг.

Алгоритм 1 (Алгоритм приближения запаздывающего пропагатора (26) для спина 1/2). Ввод: масса $m > 0$, координаты $|x| < t$, уровень точности Δ .

Вывод: приближенное значение G_{kl} для $G_{kl}^R(x, t)$ на расстоянии не более Δ от истинного значения (26).

Алгоритм: вычислим $G_{kl} = \frac{(-1)^{(k-1)l}}{2\varepsilon} a_{(k+l) \bmod 2+1} \left(2\varepsilon \left\lceil \frac{(-1)^{(k-1)l} x}{2\varepsilon} \right\rceil, 2\varepsilon \left\lceil \frac{t}{2\varepsilon} \right\rceil, m, \varepsilon \right)$ по формуле (2) для

$$\varepsilon = (t - |x|) \min \left\{ \frac{1}{16 e^{3mt}}, \left(\frac{\Delta}{9C m e^{m^2 t^2}} \right)^3 \right\}, \quad \text{где } C = 100.$$

Здесь мы использовали явную оценку для константы C , подразумеваемой в обозначении О-большое в теореме 5; она легко восстанавливается из доказательства теоремы. Теорема и оценка остаются верными, если в них $a(x, t, m, \varepsilon)$ при $(x, t) \in \varepsilon \mathbb{Z}^2$ заменить на $a(2\varepsilon \left\lceil \frac{x}{2\varepsilon} \right\rceil, 2\varepsilon \left\lceil \frac{t}{2\varepsilon} \right\rceil, m, \varepsilon)$ при произвольных $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

Замечание 4. Общее (однородное) одномерное квантовое блуждание по существу сводится к уточнению модели, рассмотренному в этом разделе. А именно, рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \psi_1(x, t+1) &= a \psi_1(x+1, t) + b \psi_2(x+1, t), \\ \psi_2(x, t+1) &= -\bar{b} \psi_1(x-1, t) + \bar{a} \psi_2(x-1, t); \end{aligned}$$

где $a, b \in \mathbb{C} - \{0\}$ и $|a|^2 + |b|^2 = 1$, с начальным условием $\psi_1(x, 0) = \psi_2(x, 0) = 0$ для каждого $x \neq 0$ [47, §1]. Прямой проверкой с использованием (3)–(4) устанавливается общее решение:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, t) &= \left(\frac{a}{|a|} \right)^{-x} \left(\frac{|a|b}{a|b|} a_1 \left(x+1, t+1, \left| \frac{b}{a} \right|, 1 \right) \psi_2(0, 0) + a_2 \left(1-x, t+1, \left| \frac{b}{a} \right|, 1 \right) \psi_1(0, 0) \right), \\ \psi_2(x, t) &= \left(\frac{a}{|a|} \right)^{-x} \left(a_2 \left(x+1, t+1, \left| \frac{b}{a} \right|, 1 \right) \psi_2(0, 0) - \frac{a|b|}{|a|b|} a_1 \left(1-x, t+1, \left| \frac{b}{a} \right|, 1 \right) \psi_1(0, 0) \right). \end{aligned}$$

4 Спин

Вопрос: какова вероятность обнаружить правый электрон в (x, t) , если правый электрон был испущен из $(0, 0)$?

Предположения: теперь учитывается хиральность электрона.

Результат: вероятность смены хиральности.

Особенностью модели является то, что спин электрона возникает естественным образом, а не добавляется искусственно.

Почти напрашивается взгляд на электрон, как находящийся в одном из двух состояний в зависимости от направления последнего хода шашки: *движущийся вправо* или *движущийся влево* (или просто «*правый*» или «*левый*» для краткости).

Вероятность найти правый электрон в клетке (x, t) , если правый электрон был испущен из клетки $(0, 0)$, — это квадрат длины вектора $\sum_s a(s)$, где сумма берется по всем путям из клетки $(0, 0)$ в клетку (x, t) , которые начинаются и заканчиваются ходом вправо-вверх. *Вероятность найти левый электрон* определяется аналогично, только сумма берется по путям, которые начинаются с хода вправо-вверх, но заканчиваются ходом влево-вверх. Очевидно, что эти вероятности равны $a_2(x, t)^2$ и $a_1(x, t)^2$ соответственно, потому что последний ход направлен вверх-вправо тогда и только тогда, когда число ходов четное.

Эти правый и левый электроны в точности являются $(1+1)$ -мерным аналогом *хиральных* состояний для частиц со спином $1/2$ [42, §19.1]. Действительно, известно, что компоненты $a_2(x, t)$ и $a_1(x, t)$ в уравнении Дирака (1) в базисе Вейля интерпретируются как волновые функции правых и левых частиц соответственно. Связь с направлением движения становится очевидной для $m = 0$: общее решение уравнения (1) — это $(a_2(x, t), a_1(x, t)) = (a_2(x - t, 0), a_1(x + t, 0))$; таким образом, максимумы функций $a_2(x, t)$ и $a_1(x, t)$ (если таковые имеются) с ростом t перемещаются вправо и влево соответственно. Обратим внимание, что в 3 или более измерениях, спин не является направлением движения и не может быть объяснен в неквантовых терминах.

Это дает более концептуальную интерпретацию модели: результатом эксперимента является пара (конечная координата x , направление последнего хода), тогда как конечная координата t фиксирована. Вероятности обнаружения правого/левого электрона являются фундаментальными. В последующих уточнениях модели $a_1(x, t)$ и $a_2(x, t)$ станут комплексными числами, и тогда $P(x, t)$ должно определяться как $|a_1(x, t)|^2 + |a_2(x, t)|^2$, а не формуле $P(x, t) = |a(x, t)|^2 = |a_1(x, t) + ia_2(x, t)|^2$ выше, которая является совпадением.

Теорема 6 (Вероятность смены хиральности). Для целых $t > 0$ выполнено равенство $\sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, t)^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

См. рисунок 13 для иллюстрации и сравнения с уточнением из §5. Физическая интерпретация теоремы ограничена: в непрерывной теории вероятность смены хиральности (для электрона, испускаемого точечным источником) плохо определена аналогично “квадрату” пропагатора (см. §3.3). Соответствующая более разумная величина изучается в [23, р. 381] (ср. с проблемой 5). Недавно И. Богданов обобщил теорему на любую массу и шаг решетки (см. определение 2): если $0 \leq m\varepsilon \leq 1$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty, t \in \varepsilon\mathbb{Z}} \sum_{x \in \varepsilon\mathbb{Z}} a_1(x, t, m, \varepsilon)^2 = \frac{m\varepsilon}{2\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$ [6, теорема 2]. Это подтвердило гипотезу И. Гайдай-Турлова–Т. Ковалева–А. Львова.

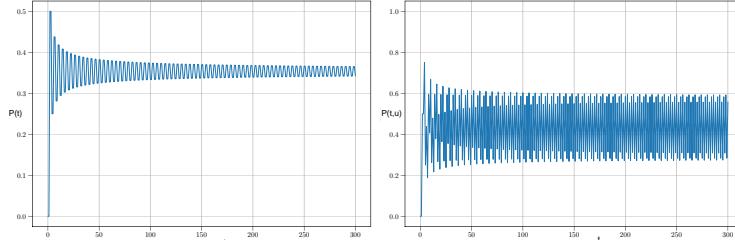


Рис. 13: Графики вероятностей $P(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, t)^2$ и $P(t, u) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, t, u)^2$ смены хиральности при выключенном и включенном электромагнитном поле соответственно

5 Внешнее поле (неоднородное квантовое блуждание)

Вопрос: какова вероятность обнаружения электрона в клетке (x, t) , если он движется в заданном электромагнитном поле u ?

Предположения: поле есть только в плоскости Oxt , электрон не воздействует на него.

Результаты: ‘прецессия’ спина в магнитном поле (качественное объяснение), сохранение заряда.

В нашей модели внешнее поле не добавляется искусственно, а возникает естественным образом. Мы начнем с неформального определения, затем дадим точное, и, наконец, выведем сохранение заряда.

В базовой модели стрелка часов не поворачивалась, пока шашка двигалась прямо. Напрашивается изменение модели: поворачивать стрелку равномерно во время движения. Это не изменит модель по сути: поскольку все пути из начального положения в конечное имеют

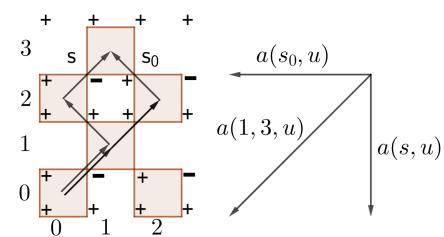


Рис. 14: Пути в поле

одинаковую длину, то и векторы поворачиваются на один и тот же угол, что не влияет на вероятности. Более интересная модификация получается, когда текущий угол поворота зависит от положения шашки. Именно это делает электромагнитное поле. В дальнейшем, для простоты, угол поворота будет принимать только два значения 0° и 180° , что означает домножение на ± 1 .

Таким образом, электромагнитное поле понимается, как фиксированная расстановка u чисел ± 1 в вершинах квадратов-клеток. Например, на рисунке 14, поле равно -1 в правой верхней вершине каждой клетки (x, t) , у которой x и t чётны. Модифицируем определение вектора $a(s)$, меняя его направление на противоположное каждый раз, когда путь проходит через вершину с полем -1 . Обозначим получившийся вектор как $a(s, u)$. Определим $a(x, t, u)$ и $P(x, t, u)$ аналогично $a(x, t)$ и $P(x, t)$, заменяя в их определении $a(s)$ на $a(s, u)$. Например, если u тождественно равно $+1$, то $P(x, t, u) = P(x, t)$.

Давайте слегка переформулируем эту конструкцию, чтобы сделать её связь с решёткой калибровочной теорией более прозрачной. Введём вспомогательную квадратную решётку с вершинами в центрах чёрных клеток (см. рис. 11 справа) — это тот граф, по которому фактически движется шашка.

Определение 3. Вспомогательным ребром назовём отрезок, соединяющий две ближайших целых точки с чётной суммой координат. Пусть u — любое отображение из множества всех вспомогательных ребер в $\{+1, -1\}$. Обозначим

$$a(x, t, u) := 2^{(1-t)/2} i \sum_s (-i)^{t(s)} u(s_0 s_1) u(s_1 s_2) \dots u(s_{t-1} s_t)$$

сумму по всем путям $s = (s_0, s_1, \dots, s_t)$ шашки, таким что $s_0 = (0, 0)$, $s_1 = (1, 1)$, $s_t = (x, t)$. Положим $P(x, t, u) = |a(x, t, u)|^2$. Аналогично определим $a_1(x, t, u)$ и $a_2(x, t, u)$, только добавим условия $s_{t-1} = (x+1, t-1)$ и $s_{t-1} = (x-1, t-1)$ соответственно. Для полуцелых x, t обозначим через $u(x, t)$ значение u на вспомогательном ребре с серединой (x, t) .

Замечание 5. Здесь поле u — фиксированное классическое внешнее поле, электрон не воздействует на него.

Это определение аналогично исторически первому построению калибровочной теории, принадлежащему Вейлю–Фоку–Лондону, и даёт связь шашек Фейнмана с решёткой $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -калибровочной теорией Вегнера–Вильсона. В частности, оно даёт правильный спин 1 для электромагнитного поля: функция на множестве рёбер — это дискретный аналог векторного поля, т.е. поля спина 1. Несмотря на то, что этот способ связи с калибровочным полем является классическим, для шашек Фейнмана он ранее явно не применялся (ср. с [16, стр. 36]); он сильно отличается от подхода в [38] и интуиции диаграмм Фейнмана [11].

Например, поле u на рис. 14 имеет вид $u(s_1 s_2) = \exp\left(-i \int_{s_1}^{s_2} (A_0 dt + A_1 dx)\right)$ для каждого вспомогательного ребра $s_1 s_2$, где $(A_0, A_1) := (\pi/2)(x+1/2, x+1/2)$ — вектор-потенциал постоянного однородного электромагнитного поля.

Для произвольной калибровочной группы числа $a_1(x, t, u)$ и $a_2(x, t, u)$ определяются аналогично, только u становится отображением из множества вспомогательных ребер в некоторую матричную группу, скажем, $U(1)$ или $SU(n)$. Тогда полагаем по определению $P(x, t, u) := \sum_k (|(a_1(x, t, u))_{k1}|^2 + |(a_2(x, t, u))_{k1}|^2)$, где $(a_j)_{kl}$ — элементы матрицы a_j .

Пример 5 (“Прецессия” спина в магнитном поле). Положим $u(x+1/2, t+1/2) = -1$, если x и t чётные, и $u(x+1/2, t+1/2) = +1$ иначе (“однородное магнитное поле”, см. рисунок 14). Тогда график вероятности обнаружения левого электрона $P(t, u) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, t, u)^2$ (см. §4) изображен на рисунке 13 справа. Видно, что он стремится к “периодическому режиму” при $t \rightarrow \infty$ (см. проблему 11).

Следующие предложения доказываются аналогично предложениям 5–6, только добавляется множитель $u(x \pm \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2})$, так как последний ход пути проходит через вершину $(x \pm \frac{1}{2}, t - \frac{1}{2})$.

Предложение 14 (Уравнение Дирака в электромагнитном поле). Для любого целого x и любого целого $t \geq 1$ выполнено

$$\begin{aligned} a_1(x, t+1, u) &= \frac{1}{\sqrt{2}}u \left(x + \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2} \right) (a_1(x+1, t, u) + a_2(x+1, t, u)), \\ a_2(x, t+1, u) &= \frac{1}{\sqrt{2}}u \left(x - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2} \right) (a_2(x-1, t, u) - a_1(x-1, t, u)). \end{aligned}$$

Предложение 15 (Сохранение вероятности/заряда). Для любого целого $t \geq 1$ выполнено $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, t, u) = 1$.

Недавно Ф. Ожегов нашел аналоги “явной” формулы (предложения 11) и непрерывного предела (следствия 6) для “однородного поля” из примера 5 [40, теоремы 3–4].

6 Источник

Вопрос: какова вероятность обнаружения в (x, t) электрона, испущенного источником с длиной волны λ ?

Предположения: теперь источник реалистичный.

Результаты: распространение волн, дисперсионное соотношение.

Реалистичный источник испускает волны, а не электроны, локализованные в одной точке $x = 0$ (как в базовой модели). Это означает решение уравнения Дирака (3)–(4) с (квази-)периодическими начальными условиями.

Для формулировки результата удобно переписать уравнение Дирака (3)–(4), используя обозначения

$$\tilde{a}_1(x, t) = a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon), \quad \tilde{a}_2(x, t) = a_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon),$$

чтобы оно приняло форму

$$\tilde{a}_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}}(\tilde{a}_1(x + \varepsilon, t - \varepsilon) + m\varepsilon \tilde{a}_2(x, t - \varepsilon)), \quad (28)$$

$$\tilde{a}_2(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}}(\tilde{a}_2(x - \varepsilon, t - \varepsilon) - m\varepsilon \tilde{a}_1(x, t - \varepsilon)). \quad (29)$$

Следующее предложение доказывается прямой проверкой (доступной в [44, §12]).

Предложение 16 (Распространение волн, дисперсионное соотношение). Уравнения (28)–(29) с начальными условиями

$$\tilde{a}_1(x, 0) = \tilde{a}_1(0, 0)e^{2\pi ix/\lambda},$$

$$\tilde{a}_2(x, 0) = \tilde{a}_2(0, 0)e^{2\pi ix/\lambda};$$

имеют единственное решение

$$\tilde{a}_1(x, t) = a \cos \frac{\alpha}{2} e^{2\pi i(x/\lambda + t/T)} + b \sin \frac{\alpha}{2} e^{2\pi i(x/\lambda - t/T)}, \quad (30)$$

$$\tilde{a}_2(x, t) = ia \sin \frac{\alpha}{2} e^{2\pi i(x/\lambda + t/T)} - ib \cos \frac{\alpha}{2} e^{2\pi i(x/\lambda - t/T)}, \quad (31)$$

где числа $T \geq 2$, $\alpha \in [0, \pi]$, и $a, b \in \mathbb{C}$ задаются соотношениями

$$\cos(2\pi\varepsilon/T) = \frac{\cos(2\pi\varepsilon/\lambda)}{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}}, \quad \cot \alpha = \frac{\sin(2\pi\varepsilon/\lambda)}{m\varepsilon}, \quad a = \tilde{a}_1(0, 0) \cos \frac{\alpha}{2} - i\tilde{a}_2(0, 0) \sin \frac{\alpha}{2}, \quad b = \tilde{a}_1(0, 0) \sin \frac{\alpha}{2} + i\tilde{a}_2(0, 0) \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Замечание 6. Чтобы получить решения непрерывного уравнения Дирака (1), достаточно в выражении (30)–(31) переопределить $2\pi/T$ и α с помощью соотношений $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + m^2$ и $\cot \alpha = 2\pi/m\lambda$ соответственно. В непрерывной (соответственно, дискретной) постановке задачи эти величины — гипотенуза и угол прямоугольного треугольника с катетами $2\pi/\lambda$ и m (соответственно, $(\arctan m\varepsilon)/\varepsilon$), лежащего на плоскости (соответственно, сфере радиуса $1/\varepsilon$). Это новая неожиданная интерпретация в терминах сферической геометрии.

Физически, (30)–(31) описывают волну с периодом T и длиной волны λ . Соотношение между T и λ называется *дисперсионным соотношением*. Соотношения Планка и де Броиля утверждают, что $E := 2\pi\hbar/T$ и $p := 2\pi\hbar/\lambda$ — энергия и импульс волны (напомним, что $\hbar = c = 1$ в наших единицах). Дисперсионное соотношение выше переходит в *формулу Эйнштейна* $E = mc^2$ в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$.

Комментарий для специалистов: замена a и b операторами рождения и уничтожения, т.е. вторичное квантование решеточного уравнения Дирака, ведет к модели из §9.

Для следующих уточнений модели мы только анонсируем результаты, которые будут обсуждаться в последующих публикациях.

7 Среда

Вопрос: какая доля света данного цвета отражается стеклянной пластиной данной ширины?

Предположения: угол падения — 90° , нет поляризации и дисперсии света; масса частицы теперь зависит от x , но не от цвета.

Результаты: отражение от тонкой пленки (количественное объяснение).

Шашки Фейнмана можно применить для описания распространения света в прозрачной среде, например в стекле. Свет распространяется так, как если бы он приобрел внутри среды некоторую ненулевую массу и потенциальную энергию (зависящие от показателя преломления), в то время снаружи масса и потенциальная энергия остаются равными нулю. В целом, модель непригодна для описания света, частичное отражение является лишь замечательным исключением. Обратим внимание, что аналогичные классические явления описываются квантовыми моделями, см. [50, §2.7].

Как мы покажем в последующей публикации, шашки Фейнмана позволяют дать строгий вывод следующей известной формулы для доли P света с длиной волны λ , отраженного от прозрачной пластины шириной L и показателем преломления n :

$$P = \frac{(n^2 - 1)^2}{(n^2 + 1)^2 + 4n^2 \cot^2(2\pi L n / \lambda)}.$$

Это делает научно-популярное обсуждение частичного отражения, изложенное Фейнманом в [11], полностью строгим и показывает, что его модель имеет экспериментально подтвержденные предсказания в реальном мире, а не только в двумерном.

8 Тождественные частицы

Вопрос: какова вероятность обнаружения электронов в клетках F и F' , если они испущены из A и A' ?

Предположения: электронов несколько.

Результаты: принцип запрета Паули, локальность, сохранение заряда.

Здесь мы анонсируем простое обобщение модели шашек Фейнмана, которое позволяет описывать движение нескольких электронов с соблюдением принципов запрета, локальности и сохранения вероятности (ср. [51, §4.2]).

Определение 4. Зафиксируем целые точки $A = (0, 0)$, $A' = (x_0, 0)$, $F = (x, t)$, $F' = (x', t)$ и их диагональных соседей $B = (1, 1)$, $B' = (x_0 + 1, 1)$, $E = (x - 1, t - 1)$, $E' = (x' - 1, t - 1)$, где $x_0 \neq 0$ и $x' \geq x$. Положим

$$a(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') := \sum_{\substack{s: AB \rightarrow EF \\ s': A'B' \rightarrow E'F'}} a(s)a(s') - \sum_{\substack{s: AB \rightarrow E'F' \\ s': A'B' \rightarrow EF}} a(s)a(s'),$$

где первое суммирование проходит по всем парам, состоящим из пути шашки s , начинающегося с хода AB и заканчивающегося ходом EF , и пути s' , начинающегося с хода $A'B'$ и заканчивающегося ходом $E'F'$, а во втором суммировании завершающие ходы меняются местами.

Величина $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') := |a(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')|^2$ называется *вероятностью найти правые электроны в F и F'*, если они испущены из A и A'. Аналогично величина $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ определяется и в случае, когда $E = (x \pm 1, t - 1)$, $E' = (x' \pm 1, t - 1)$. В случае одинаковых знаков здесь необходимо дополнительно наложить условие $x' \geq x$, в случае разных знаков значения x' и x могут быть произвольными.

9 Античастицы

Вопрос: каково матожидание заряда в клетке (x, t) , если электрон был испущен из клетки $(0, 0)$?

Предположения: электрон-позитронные пары теперь могут рождаться и аннигилировать; ось t — время.

Результаты: фейнмановский пропагатор для спина 1/2 в непрерывном пределе, аналитическое выражение для предела при больших временах.

9.1 Тождества и асимптотики

Здесь мы предлагаем совершенно новое уточнение модели шашек Фейнмана — *фейнмановские антишашки*. В этой модели помимо движения исходного электрона учитывается возможность рождения и аннигиляции электрон-позитронных пар. Уточнение заключается в том, что в интегrale Фурье (см. предложение 12) величине $(x + t)/\varepsilon$ теперь мы разрешаем теперь принимать нечётные значения. Таким образом, в дополнение к чёрным клеткам шахматной доски мы вычисляем значения того же интеграла и в белых клетках. Это эквивалентно вторичному квантованию дискретного уравнения Дирака (28)–(29), которое нам не потребуется производить (ср. [2, §9F] и [3, §IV] для безмассового случая). Ведь истинная мотивировка новой модели — в замечательной согласованности с исходной и в появлении фейнмановского пропагатора (34) для спина 1/2 в непрерывном пределе (см. рисунок 15). Мы также даем комбинаторное определение (см. определение 6).

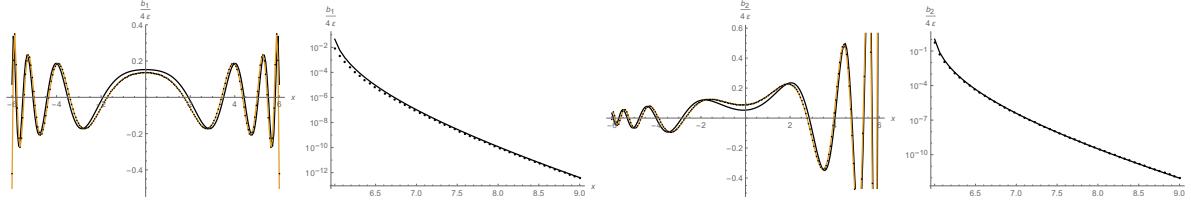


Рис. 15: Графики функций $b_1(x, 6, 4, 0.03)/0.12$ (точки слева), $b_2(x, 6, 4, 0.03)/0.12$ (точки справа), их аналитического приближения из теоремы 7 (светлая кривая), а также мнимой части фейнмановского пропагатора $\text{Im } G_{11}^F(x, 6)$ (темная кривая слева) и $\text{Im } G_{12}^F(x, 6)$ (темная кривая справа), задаваемого равенством (34) при $m = 4$ и $t = 6$.

Определение 5. (См. Предложение 12 и рис. 15.) Зафиксируем параметры $m, \varepsilon > 0$. Для всех $(x, t) \in \varepsilon \mathbb{Z}^2$ положим $\omega_p := \frac{1}{\varepsilon} \arccos\left(\frac{\cos p\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}\right)$ и

$$\begin{aligned} A_1(x, t, m, \varepsilon) &:= \pm \frac{im\varepsilon^2}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{ipx-i\omega_p(t-\varepsilon)}}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} dp; \\ A_2(x, t, m, \varepsilon) &:= \pm \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \left(1 + \frac{\sin(p\varepsilon)}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}}\right) e^{ip(x-\varepsilon)-i\omega_p(t-\varepsilon)} dp, \end{aligned} \quad (32)$$

где в обоих случаях знак минус выбирается, если $t \leq 0$ и $(x + t)/\varepsilon$ чётно. При $m = 0$ определим $A_2(x, t, m, \varepsilon)$ той же формулой и положим $A_1(x, t, 0, \varepsilon) := 0$. В частности, $A_k(x, t, m, \varepsilon) = a_k(x, t, m, \varepsilon)$, если $(x + t)/\varepsilon$ чётно, $t > 0$ и $k = 1, 2$. Положим по определению $A_k(x, t, m, \varepsilon) =: ib_k(x, t, m, \varepsilon)$ при нечётном $(x + t)/\varepsilon$. Положим также $b_k(x, t, m, \varepsilon) := 0$, если $(x + t)/\varepsilon$ чётно.

Можно показать, что числа $A_k(x, t, m, \varepsilon)$ чисто мнимые при нечётном $(x + t)/\varepsilon$. Таким образом, действительная и мнимая части “живут” на черных и белых клетках соответственно, аналогично тому, как определяются дискретные аналитические функции (см. [8]). Соглашение о знаке для $t \leq 0$ продиктовано аналогией с “непрерывной” теорией (см. (33) и (35)).

Пример 6. Значение $b_1(0, 1, 1, 1) = \Gamma(\frac{1}{4})^2/(2\pi)^{3/2} = \frac{2}{\pi}K(i) =: G \approx 0.83463$ представляет собой константу Гаусса, а $-b_2(0, 1, 1, 1) = 2\sqrt{2\pi}/\Gamma(\frac{1}{4})^2 = \frac{2}{\pi}(E(i) - K(i)) = 1/\pi G =: L' \approx 0.38138$ — обратная величина к лемнискатной константе L . Здесь функции $K(z)$ и $E(z)$ — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода соответственно (см. [13, §6.1]).

Остальные значения являются более сложными иррациональностями (см. таблицу 6).

$b_1(x, t, 1, 1)$					
2	$\frac{G-L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{G-L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{7G-15L'}{3\sqrt{2}}$
1		G		$G-2L'$	
0	$\frac{G-L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{G-L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{7G-15L'}{3\sqrt{2}}$
-1		$-L'$		$\frac{2G-3L'}{3}$	
$t \diagup x$	-1	0	1	2	3

$b_2(x, t, 1, 1)$					
2	$\frac{G-3L'}{3\sqrt{2}}$		$\frac{-G-L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{-G+3L'}{\sqrt{2}}$
1		$-L'$		L'	
0	$\frac{G-3L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{G+L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{-G+3L'}{3\sqrt{2}}$
-1		G		$\frac{G}{3}$	
$t \diagup x$	-1	0	1	2	3

Таблица 6: Значения $b_1(x, t, 1, 1)$ и $b_2(x, t, 1, 1)$ для малых x, t (см. определение 5 и пример 6)

Мы анонсируем, что аналоги предложений 5–8 и 10 остаются верными буквально, если a_1 и a_2 заменить на b_1 и b_2 соответственно (при этом предположение $t > 0$ можно отбросить). В качестве следствия получается, что $2^{(t-1)/2}b_1(x, t, 1, 1)$ и $2^{(t-1)/2}b_2(x, t, 1, 1)$ для всех $(x, t) \in \mathbb{Z}^2$ являются линейными комбинациями с рациональными коэффициентами постоянной Гаусса G и обратной лемнискатной константы L' . В общем случае мы анонсируем, что значения b_1 и b_2 можно “явно” выразить через гипергеометрическую функцию Гаусса: для $m, \varepsilon > 0$, $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ с нечётным $(x + t)/\varepsilon$ выполнено

$$b_1(x, t, m, \varepsilon) = (1 + m^2\varepsilon^2)^{\frac{1}{2} - \frac{t}{2\varepsilon}} (-m^2\varepsilon^2)^{\frac{t-|x|}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}} \binom{\frac{t+|x|}{2\varepsilon} - 1}{|x|/\varepsilon} \\ \cdot {}_2F_1 \left(1 + \frac{|x| - t}{2\varepsilon}, 1 + \frac{|x| - t}{2\varepsilon}; 1 + \frac{|x|}{\varepsilon}; -\frac{1}{m^2\varepsilon^2} \right),$$

$$b_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon) = (1 + m^2\varepsilon^2)^{-\frac{t}{2\varepsilon}} (m\varepsilon)^{\frac{t-|x|}{\varepsilon}} (-1)^{\frac{t-|x|}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}} \binom{\frac{t+|x|}{2\varepsilon} - 1 + \theta(x)}{|x|/\varepsilon} \\ \cdot {}_2F_1 \left(\frac{|x| - t}{2\varepsilon}, 1 + \frac{|x| - t}{2\varepsilon}; 1 + \frac{|x|}{\varepsilon}; -\frac{1}{m^2\varepsilon^2} \right), \quad \text{где } \theta(x) := \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0; \end{cases}$$

и ${}_2F_1(p, q; r; z)$ — главная ветвь гипергеометрической функции. Доказательство проводится индукцией по $t/\varepsilon \geq 1$: база проверяется с помощью соотношений [19, 9.112, 9.131.1, 9.134.3, 9.137.15], а шаг использует аналоги равенств (3)–(4) для b_1 и b_2 , а также формулы [19, 9.137.11, 12, 18].

Замечание 7. (Ср. с замечанием 3) Эти выражения могут быть переписаны как *функции Якоби второго рода* полуцелого порядка (см. определение в [49, (4.61.1)]). Например, для всех $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ таких, что $|x| > t$ и $(x + t)/\varepsilon$ нечётно, выполняется равенство

$$b_1(x, t, m, \varepsilon) = \frac{2m\varepsilon}{\pi} (1 + m^2\varepsilon^2)^{(t/\varepsilon-1)/2} Q_{(|x|-t)/2\varepsilon}^{(0,t/\varepsilon-1)} (1 + 2m^2\varepsilon^2).$$

Замечание 8. Число $b_1(x, \varepsilon, m, \varepsilon)$ равно величине $(1 + \sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2})/m\varepsilon$, умноженной на вероятность того, что плоское простое случайное блуждание по белым клеткам заканчивается в клетке (x, ε) , при условии, что оно начинается в $(0, \varepsilon)$ и заканчивается с вероятностью $1 - 1/\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2}$ перед каждым шагом. Ничего подобного не известно для $b_1(x, t, m, \varepsilon)$ и $b_2(x, t, m, \varepsilon)$ при $t \neq \varepsilon$.

Следующие результаты доказываются почти дословно так же, как предложение 13 и теорема 2. Единственным отличием является смена знака слагаемых с участием $f_-(p)$ в (41), (46), (50), (52); аналоги лемм 5 и 11 получаются затем непосредственной проверкой.

Предложение 17 (Преобразование Фурье по всему пространству-времени). *Пусть $\delta_{x\varepsilon} := 1$, если $x = \varepsilon$, и $\delta_{x\varepsilon} := 0$, если $x \neq \varepsilon$. Тогда для любого $m > 0$ и любых $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ выполняются равенства*

$$\begin{aligned} A_1(x, t, m, \varepsilon) &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{m\varepsilon^3}{4\pi^2} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{ipx - i\omega(t-\varepsilon)}}{\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2} \cos(\omega\varepsilon) - \cos(p\varepsilon) - i\delta} d\omega dp \\ A_2(x, t, m, \varepsilon) &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{-i\varepsilon^2}{4\pi^2} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2} \sin(\omega\varepsilon) + \sin(p\varepsilon)}{\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2} \cos(\omega\varepsilon) - \cos(p\varepsilon) - i\delta} e^{ip(x-\varepsilon) - i\omega(t-\varepsilon)} d\omega dp + \delta_{x\varepsilon} \delta_{t\varepsilon}. \end{aligned} \quad (33)$$

Теорема 7 (Асимптотика при больших временах; см. рис. 15). *Для любого $\delta > 0$ существует $C_\delta > 0$ такое, что для любых $m, \varepsilon > 0$ и любых $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, удовлетворяющих (8) выполняются равенства*

$$\begin{aligned} b_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) &= \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi}} (t^2 - (1 + m^2 \varepsilon^2)x^2)^{-1/4} \cos \theta(x, t, m, \varepsilon) + O_\delta \left(\frac{\varepsilon}{m^{1/2} t^{3/2}} \right), \\ b_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon) &= -\varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi}} (t^2 - (1 + m^2 \varepsilon^2)x^2)^{-1/4} \sqrt{\frac{t + x}{t - x}} \sin \theta(x, t, m, \varepsilon) + O_\delta \left(\frac{\varepsilon}{m^{1/2} t^{3/2}} \right), \end{aligned}$$

для чётных и нечётных $(x + t)/\varepsilon$ соответственно. Здесь функция $\theta(x, t, m, \varepsilon)$ задана формулой (11).

9.2 Физическая интерпретация

Величину $\frac{1}{2}|A_1(x, t, m, \varepsilon)|^2 + \frac{1}{2}|A_2(x, t, m, \varepsilon)|^2$ можно интерпретировать как математическое ожидание заряда в клетке (x, t) с $t > 0$ (единица измерения — заряд электрона). Однако эти числа больше нельзя интерпретировать как вероятности обнаружить электрон в данной клетке. Причина заключается в том, что теперь результаты эксперимента не являются взаимоисключающими: можно обнаружить электрон в двух разных клетках одновременно. В этом нет ничего загадочного: любое измерение обязательно влияет на электрон, и этого влияния может быть достаточно, чтобы создать электрон-позитронную пару из вакуума. Таким образом, можно обнаружить новорожденный электрон в дополнение к первоначальному, и нет никакого способа отличить один от другого. (Более формальное объяснение для специалистов: два состояния в пространстве Фока, представляющие электрон, локализованный в удаленных областях, не являются взаимно ортогональными; их скалярное произведение по сути описывается фейнмановским пропагатором).

Мы анонсируем, что рассматриваемая модель в непрерывном пределе воспроизводит фейнмановский, а не запаздывающий пропагатор (см. рис. 15). *Фейнмановский пропагатор для спина 1/2 имеет вид*

$$G^F(x, t) = \begin{cases} \frac{m}{4} \begin{pmatrix} J_0(ms) - iY_0(ms) & -\frac{t+x}{s} (J_1(ms) - iY_1(ms)) \\ \frac{t-x}{s} (J_1(ms) - iY_1(ms)) & J_0(ms) - iY_0(ms) \end{pmatrix}, & \text{при } |x| < |t|; \\ \frac{im}{2\pi} \begin{pmatrix} K_0(ms) & \frac{t+x}{s} K_1(ms) \\ \frac{x-t}{s} K_1(ms) & K_0(ms) \end{pmatrix}, & \text{при } |x| > |t|; \end{cases} \quad (34)$$

где $Y_n(z)$ и $K_n(z)$ — соответственно функции Бесселя 2-го рода и модифицированные функции Бесселя 2-го рода, и $s := \sqrt{|t^2 - x^2|}$. Кроме этого, есть обобщенная функция с носителем на прямых $t = \pm x$, которую мы не указываем. Фейнмановский пропагатор удовлетворяет уравнению (25). Мы видим, что он имеет дополнительную мнимую часть (и общий коэффициент $1/2$) по сравнению с запаздывающим пропагатором (26). В частности, он не равен нулю при $|x| > |t|$: аннигиляция электрона в одной точке и рождение в другой может привести к кажущемуся движению электрона быстрее скорости света.

Более известным представлением для пропагатора Фейнмана является преобразование Фурье (ср. (27) и [14, (6.51)])

$$G^F(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\delta \rightarrow +0} \begin{pmatrix} m & -ip - i\omega \\ -ip + i\omega & m \end{pmatrix} \frac{e^{ipx - i\omega t} dp d\omega}{m^2 + p^2 - \omega^2 - i\delta}. \quad (35)$$

В целом, небольшая поправка, вносимая этим уточнением модели, скорее отражает некоторые фундаментальные ограничения на измерения, чем добавляет что-то значимое к описанию движения. Введённое уточнение следует рассматривать только как ингредиент для более реалистичных моделей с взаимодействием.

9.3 Комбинаторное определение

Неформально, комбинаторное определение фейнмановских антишашек (определение 6) получается из определения фейнмановских шашек (определение 2) следующей четырёхшаговой процедурой:

Шаг 1: масса частицы приобретает небольшую мнимую часть, которую в конечном счёте мы устремляем к нулю;

Шаг 2: в то время как вещественная масса “отвечает” за повороты в центрах квадратов, наличие мнимой массы позволяет делать повороты в их *вершинах* (см. рис. 16 слева);

Шаг 3: бесконечная решётка заменяется тором, размеры которого в конечном счете мы устремляем к бесконечности;

Шаг 4: сумма по путям шашки заменяется отношением сумм по конфигурациям петель.

Шаг 2 здесь является совершенно новым, в то время как остальные шаги стандартны. Шаг 2 отражает общий принцип, согласно которому действительная и мнимая части комплексной величины всегда располагаются на двойственных решётках.

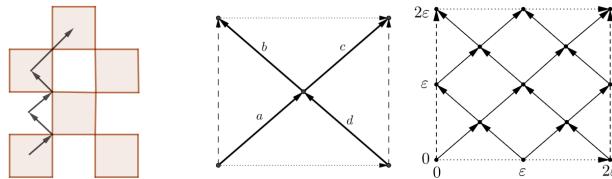


Рис. 16: Обобщенный путь шашки (слева) и решётки размеров 1 и 2 (справа); см. пример 7.

Определение 6. (См. рис. 16) Зафиксируем параметры $T \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon, m, \delta > 0$, называемые *размером решётки*, *шагом решётки*, *массой частицы*, и *малой мнимой массой* соответственно. Будем предполагать, что $T > 0$ и $\delta < 1/2$. *Решёткой* назовём следующее факторное множество:

$$\{ (x, t) \in [0, T\varepsilon]^2 : 2x/\varepsilon, 2t/\varepsilon, (x+t)/\varepsilon \in \mathbb{Z} \} /_{\forall x, t : (x, 0) \sim (x, T\varepsilon) \& (0, t) \sim (T\varepsilon, t)}.$$

(По сути это тор, полученный из квадрата $[0, T\varepsilon]^2$ отождествлением противоположных сторон.) Точка решётки (x, t) называется *чётной* (соответственно, *нечётной*), если отношение $2x/\varepsilon$ является чётным (соответственно, нечётным) числом. *Ребро* — это вектор,

начинающийся в точке решётки (x, t) и заканчивающийся в точке рёшетки $(x + \varepsilon/2, t + \varepsilon/2)$ или $(x - \varepsilon/2, t + \varepsilon/2)$.

Обобщенный путь шашки — это конечная последовательность различных рёбер, таких, что конечная точка каждого ребра является начальной точкой следующего. *Цикл* определяется аналогично, только последовательность имеет единственное повторение: первое и последнее рёбра совпадают, и есть еще одно ребро между ними. (В частности, обобщенный путь шашки, у которого конечная точка последнего ребра является начальной точкой первого, еще не является циклом: требуется совпадение первого и последнего рёбер. Первое и последнее рёбра обобщенного пути шашки совпадают, только если в пути ровно одно ребро. В нашей постановке путь никогда не является циклом.) *Изменение начального ребра* цикла означает удаление первого ребра из последовательности, затем циклическую перестановку, а затем добавление последнего ребра полученной последовательности в начало. *Петля* — это цикл с точностью до изменения начального ребра.

Узел пути или петли s — это упорядоченная пара последовательных ребер в s (порядок ребер в паре такой же, как в s). *Поворот* — это узел, у которого эти два ребра ортогональны. Узел или поворот называется *чётным* (соответственно *нечётным*), если конечная точка первого ребра в паре чётная (соответственно нечётная). Обозначим через $\text{eventurns}(s)$, $\text{oddtturns}(s)$, $\text{evennodes}(s)$, $\text{oddnodes}(s)$ количество чётных и нечётных поворотов и узлов в s соответственно. *Стрелка* (или *вес*) пути или петли s — это число

$$A(s, m, \varepsilon, \delta) := \pm \frac{(-im\varepsilon)^{\text{oddtturns}(s)} (-\delta)^{\text{eventurns}(s)}}{(1 + m^2\varepsilon^2)^{\text{oddnodes}(s)/2} (1 - \delta^2)^{\text{evennodes}(s)/2}},$$

где знак минус выбирается в случае, когда s является петлёй.

Набор путей или петель *рёберно непересекающийся*, если никакие два из них не имеют общего ребра. Рёберно непересекающийся набор петель называется *конфигурацией петель*. *Конфигурация петель с источником a и стоком f* — это рёберно непересекающийся набор из любого количества петель и ровно одного обобщенного пути шашки, начинающегося с ребра a и заканчивающегося ребром f . *Стрелка* $A(S, m, \varepsilon, \delta)$ конфигурации петель S (возможно, с источником и стоком) — это произведение стрелок всех петель и путей в конфигурации. Пустое произведение по определению равно 1.

Стрелка от ребра a к ребру f (или *пропагатор на конечной решётке*) — это число

$$A(a \rightarrow f, m, \varepsilon, \delta, T) := \frac{\sum_{\substack{\text{конфигурации петель } S \\ \text{с источником } a \text{ и стоком } f}} A(S, m, \varepsilon, \delta)}{\sum_{\substack{\text{конфигурации петель } S}} A(S, m, \varepsilon, \delta)}.$$

Теперь рассмотрим точку $(x, t) \in (\varepsilon\mathbb{Z})^2$ и положим $x' := x \bmod T\varepsilon$, $t' := t \bmod T\varepsilon$. Пусть a_0, f_1, f_2 — рёбра, начинающиеся в точках $(0, 0)$, (x', t') , (x', t') и заканчивающиеся в точках $(\varepsilon/2, \varepsilon/2)$, $(x' - \varepsilon/2, t' + \varepsilon/2)$, $(x' + \varepsilon/2, t' + \varepsilon/2)$ соответственно. *Стрелка* точки (x, t) (или *пропагатор на бесконечной решётке*) — это пара комплексных чисел

$$\tilde{A}_k(x, t, m, \varepsilon) := -2(-i)^k \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} A(a_0 \rightarrow f_k, m, \varepsilon, \delta, T) \quad \text{для } k = 1, 2.$$

Пример 7. (см. рис. 16 в центре) Решётка размера 1 расположена в квадрате $[0, \varepsilon]^2$ с отождествлёнными противоположными сторонами. Она состоит из двух точек — центра и отождествленных вершин квадрата — и имеет 4 ребра a, b, c, d . Обобщенные пути шашки $abdc, acdb, bacd$ различны, хотя содержат одинаковые ребра. Их стрелки равны $\frac{-m^2\varepsilon^2}{\sqrt{1-\delta^2}(1+m^2\varepsilon^2)}$, $\frac{-\delta}{\sqrt{1-\delta^2}(1+m^2\varepsilon^2)}$, $\frac{\delta^2}{(1-\delta^2)\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$ соответственно. Эти пути отличаются от циклов $acdba, bacdb$. Эти два цикла определяют одну и ту же петлю со стрелкой $\frac{-\delta^2}{(1-\delta^2)(1+m^2\varepsilon^2)}$. Всего есть 9 конфигураций петель: $\emptyset, \{aba\}, \{cdc\}, \{aca\}, \{bdb\}, \{abdca\}, \{acdba\}, \{aba, cdc\}, \{aca, bdb\}$. Их стрелки соответственно равны $1, -im\varepsilon\delta/n, -im\varepsilon\delta/n, -1/n, -1/n, m^2\varepsilon^2/n^2, -\delta^2/n^2, -m^2\varepsilon^2\delta^2/n^2, 1/n^2$, где $n := \sqrt{1 - \delta^2}\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}$.

Неформально, петли образуют *море Дирака* из электронов, заполняющих все пространство, а ребра, не входящие в петли, образуют пути дырок в этом море, то есть античастиц.

Мы анонсируем, что определения 5 и 6 эквивалентны в том смысле, что $\tilde{A}_1(x, t, m, \varepsilon) = A_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$ и $\tilde{A}_2(x, t, m, \varepsilon) = A_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$; см. §6. Идея доказательства заключается в том, что оба определения фактически строят матричные элементы “обратного” оператора к одному и тому же дискретному оператору Дирака: первое — через преобразование Фурье, а второе — через отношение определителей.

10 На пороге к $(1 + 1)$ -мерной квантовой электродинамике

Вопрос: какова вероятность обнаружения электронов (или электрона и позитрона) с импульсами q и q' в далёком будущем, если они были испущены с импульсами p и p' в далёком прошлом?

Предположения: теперь есть взаимодействие; все упрощения отброшены, кроме тех, которые были по умолчанию: нет ядерных сил, нет гравитации, электрон движется только вдоль оси x , ось t — время.

Результаты: отталкивание одинаковых зарядов и притяжение противоположных зарядов (ожидается качественное обоснование).

Построение требуемой модели является открытой проблемой, поскольку для этого, в частности, требуется математически строгое построение решёточной калибровочной теории для “метрики” Минковского.

11 Открытые проблемы

Начнем с проблем, опирающихся только на определение 1. Графики показывают, что для фиксированного t вероятнее всего обнаружить электрон вблизи точки $x = t/\sqrt{2}$ (см. рис. 9 слева, теоремы 1(В) и 2). Хотя это было замечено 20 лет назад, следующий вопрос все еще остается открытым.

Проблема 1. (А. Даниярхаджав–Ф. Куюнов; см. рис. 9 слева.) Обозначим через $x_{\max}(t)$ точку, в которой $P(x, t)$ достигает максимума при фиксированном t . Ограничено ли $x_{\max}(t) - t/\sqrt{2}$ при $t \rightarrow \infty$?

Эту проблему делает сложной то обстоятельство, что поведение вероятности $P(x, t)$ известно только вблизи $x = t/\sqrt{2}$ (теорема 3) и вдали от $x = t/\sqrt{2}$ (теоремы 2 и 4), но не на промежуточных расстояниях.

Проблема 2. (Ср. [47]) Найти асимптотику вероятности $P(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$, равномерную по $x \in [-t; t]$.

Проблема 3. (С. Нечаев; см. рис. 9 слева) Найти положения “широких провалов” (участков, где колебания меньше) в графике вероятности $P(x, t)$ для фиксированного большого t . (Ср. (9)–(10).)

Цель следующих двух проблем — изучить фазовый переход с помощью различных параметров порядка (см. стр. 11). В частности, мы предполагаем, что предельная “вероятность” одинаковых знаков на концах спиновой цепочки, так же как и предельная “вероятность” одинаковых знаков на концах и в середине, неаналитичны в точке $v = \pm 1/\sqrt{2}$.

Проблема 4. (См. рис. 10.) Для каждого $0 < v < 1/\sqrt{2}$ докажите равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq x \leq vt} \frac{2}{t} \left| \frac{a_2(x, t)}{a(x, t)} \right|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + v - \sqrt{1 - v^2} + \log \frac{1 + \sqrt{1 - v^2}}{2} \right).$$

Вычислите этот же предел при $1/\sqrt{2} < v < 1$. (Ср. с доказательством следствия 1 в §12.4.)

Проблема 5. (Ср. [23, п. 381].) Найдите слабый предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \sum_{x \in \mathbb{Z}} \frac{a_2(x, t)^2}{a_2(2\lceil vt \rceil - 1, 2t - 1)} \right|^2$.

Следующая проблема о вероятностях поглощения; она опирается на определение перед примером 1.

Проблема 6. ((Г. Минаев–И. Русских); ср. [1, §5], [10], [37, §4]) Для всех $n \in \mathbb{Z}$ найдите вероятность поглощения $\sum_{t=1}^{\infty} P(n, t \text{ миня } \{x = n\})$. Найдите слабый предел и асимптотику вероятности $P(x, t \text{ миня } \{x = 0\})$ при $t \rightarrow \infty$. (Ср. теоремы 1–2.)

Следующая проблема обобщает и уточняет проблему 1 выше. Она опирается на определение 2.

Проблема 7. (А. Даниярходжаев–Ф. Куюнов) Обозначим через $x_{\max} = x_{\max}(t, m, \varepsilon)$ точку, в которой $P(x) := P(x, t, m, \varepsilon)$ достигает максимума. Является ли величина $x_{\max}/\varepsilon - t/\varepsilon\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}$ равномерно ограниченной? Убывает ли $P(x)$ при $x > x_{\max}$? Найдите асимптотику для $a(x, t, m, \varepsilon)$ при $t \rightarrow \infty$ для всех $x \in [-t, t]$, равномерную по x, m, ε .

Проблема 8. (М. Бланк–С. Шлосман) Остается ли ограниченным количество смен знака функции $a_1(x) := a_1(x, t, m, \varepsilon)$ на отрезке $[-t, t]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для фиксированных t, m ?

Следствие 6 дает равномерный предел на компактных подмножествах угла $|x| < t$, а значит, упускает основной вклад в вероятность. Теперь нас интересует слабый предел, детектирующий пик.

Проблема 9. Найти слабые пределы $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} a(2\varepsilon \lceil \frac{x}{2\varepsilon} \rceil, 2\varepsilon \lceil \frac{t}{2\varepsilon} \rceil, m, \varepsilon)$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\varepsilon^2} P(2\varepsilon \lceil \frac{x}{2\varepsilon} \rceil, 2\varepsilon \lceil \frac{t}{2\varepsilon} \rceil, m, \varepsilon)$ как распределений на \mathbb{R}^2 . Равен ли первый предел пропагатору (27), включая обобщенную функцию на прямых $t = \pm x$? Каков физический смысл второго предела (он может придавать смысл некорректно определенному квадрату пропагатора)?

Следующая проблема — построить непрерывный аналог шашек Фейнмана.

Проблема 10. (М. Лифшиц) Рассмотрим $(-im\varepsilon)^{\text{turns}(s)}$ как заряд на множестве всех путей s шашки из $(0, 0)$ в (x, t) , начинающихся и заканчивающихся ходом вправо-вверх. Сходится ли этот заряд при $\varepsilon \rightarrow 0$ (в слабом или каком-то еще смысле) к заряду на пространстве всех непрерывных функций $[0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ с граничными значениями 0 и x соответственно?

Следующая проблема, опирающаяся на определение 3, продемонстрировала бы “прецессию спина”.

Проблема 11. (см. рисунок 13 справа; ср. [40]) Становится ли $P(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, t, u)^2$ асимптотически периодической при $t \rightarrow \infty$, если $u(x + \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}) = (-1)^{(x-1)(t-1)}$? Найти слабые пределы вероятности $P(x, t, u)$ и асимптотики функций $a_k(x, t, u)$ при $t \rightarrow \infty$. (Ср. теоремы 1–2.)

Определим $a(x, t, m, \varepsilon, u)$ аналогично $a(x, t, m, \varepsilon)$ и $a(x, t, u)$, объединяя определения 2–3 и замечание 5. Мы предполагаем, что такое определение воспроизводит уравнение Дирака в электромагнитном поле.

Проблема 12. (Ср. [16]) Зафиксируем $A_0(x, t), A_1(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Для каждого вспомогательного ребра $s_1 s_2$ положим

$$u(s_1 s_2) := \exp \left(-i \int_{s_1}^{s_2} (A_0(x, t) dt + A_1(x, t) dx) \right).$$

Обозначим $\psi_k(x, t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} a_k(2\varepsilon \lceil \frac{x}{2\varepsilon} \rceil, 2\varepsilon \lceil \frac{t}{2\varepsilon} \rceil, m, \varepsilon, u)$ при $k = 1, 2$ и $t > 0$. Удовлетворяет ли этот предел уравнению

$$\begin{pmatrix} m & \partial/\partial x - \partial/\partial t + iA_0(x, t) - iA_1(x, t) \\ \partial/\partial x + \partial/\partial t - iA_0(x, t) - iA_1(x, t) & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_2(x, t) \\ \psi_1(x, t) \end{pmatrix} = 0?$$

Следующие две проблемы опираются на определение 5.

Проблема 13. (Ср. следствие 1) Докажите равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{\substack{t \in \varepsilon \mathbb{Z} \\ x \leq vt \\ x \in \varepsilon \mathbb{Z}}} \frac{|A_1(x, t, m, \varepsilon)|^2 + |A_2(x, t, m, \varepsilon)|^2}{2} = F(v, m, \varepsilon).$$

Проблема 14. (Ср. теоремы 4 и 7) Найти асимптотики функций $A_k(x, t, m, \varepsilon)$ для $|x| > |t|$ при $t \rightarrow \infty$.

Последняя проблема неформальна. Она стоит уже полвека.

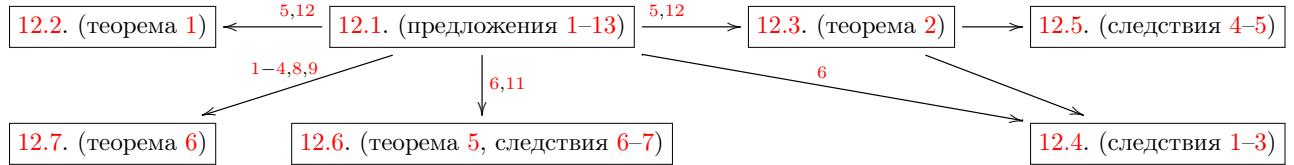
Проблема 15. (Р. Фейнман; ср. [15]) Обобщите модель на 4 измерения так, чтобы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} a\left(2\varepsilon \left\lceil \frac{x}{2\varepsilon} \right\rceil, 2\varepsilon \left\lceil \frac{y}{2\varepsilon} \right\rceil, 2\varepsilon \left\lceil \frac{z}{2\varepsilon} \right\rceil, 2\varepsilon \left\lceil \frac{t}{2\varepsilon} \right\rceil, m, \varepsilon\right)$$

совпал с запаздывающим пропагатором для спина 1/2, на этот раз в 3 пространственных и 1 временном измерении.

12 Доказательства

Приведем схему, показывающую зависимость вышеприведенных результатов и последующих подразделов:



Номера используемых предложений указаны над стрелками. Предложения 7, 10, и 13 не применяются для доказательства основных результатов.

В процессе доказательств мы даем не требующее предварительных знаний введение в используемые методы. Некоторые доказательства проще, чем оригинальные.

12.1 Тождества: элементарная комбинаторика (предложения 1–13)

Докажем тождества из §3; тождества из §2 — это частный случай, когда $m = \varepsilon = 1$.

Доказательство предложений 1 и 5. Выведем формулу для $a_2(x, t, m, \varepsilon)$. Рассмотрим произвольный путь s шашки на $\varepsilon \mathbb{Z}^2$ из $(0, 0)$ в (x, t) с первым ходом в $(\varepsilon, \varepsilon)$. Обозначим $a(s, m\varepsilon) := i(-im\varepsilon)^{\text{turns}(s)}(1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2}$.

Последний ход пути s сделан либо из $(x - \varepsilon, t - \varepsilon)$, либо из $(x + \varepsilon, t - \varepsilon)$. Если он сделан из $(x + \varepsilon, t - \varepsilon)$, то число $\text{turns}(s)$ нечетно и s не дает вклада в $a_2(x, t, m, \varepsilon)$. Поэтому далее будем предполагать, что последний ход сделан из $(x - \varepsilon, t - \varepsilon)$. Обозначим через s' путь s без последнего хода. Если направления последних ходов в s и s' совпадают, то $a(s, m\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}a(s', m\varepsilon)$, иначе $a(s, m\varepsilon) = \frac{-im\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}a(s', m\varepsilon) = \frac{m\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}(\text{Im } a(s', m\varepsilon) - i\text{Re } a(s', m\varepsilon))$.

Суммирование по всем путям s' дает требуемое уравнение

$$\begin{aligned} a_2(x, t, m, \varepsilon) &= \text{Im} \sum_{s \ni (x-\varepsilon, t-\varepsilon)} a(s, m\varepsilon) = \sum_{s' \ni (x-2\varepsilon, t-2\varepsilon)} \frac{\text{Im } a(s', m\varepsilon)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} - \sum_{s' \ni (x, t-2\varepsilon)} \frac{m\varepsilon \text{Re } a(s', m\varepsilon)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} (a_2(x-\varepsilon, t-\varepsilon, m, \varepsilon) - m\varepsilon a_1(x-\varepsilon, t-\varepsilon, m, \varepsilon)). \end{aligned}$$

Рекуррентная формула для $a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$ доказывается аналогично. \square

Доказательство предложении 2 и 6. Доказательство проведём индукцией по t/ε . База $t/\varepsilon = 1$ очевидна. Шаг индукции получается из следующих вычислений, опирающихся на предложение 5:

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}} P(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) &= \sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}} [a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon)^2 + a_2(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon)^2] \\
&= \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} \left(\sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}} [a_1(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon) + m\varepsilon a_2(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon)]^2 + \sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}} [a_2(x - \varepsilon, t, m, \varepsilon) - m\varepsilon a_1(x - \varepsilon, t, m, \varepsilon)]^2 \right) \\
&= \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} \left(\sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}} [a_1(x, t, m, \varepsilon) + m\varepsilon a_2(x, t, m, \varepsilon)]^2 + \sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}} [a_2(x, t, m, \varepsilon) - m\varepsilon a_1(x, t, m, \varepsilon)]^2 \right) \\
&= \sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}} [a_1(x, t, m, \varepsilon)^2 + a_2(x, t, m, \varepsilon)^2] = \sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}} P(x, t, m, \varepsilon).
\end{aligned}$$

□

Лемма 1 (Сопряженное уравнение Дирака). Для всех $(x, t) \in \varepsilon \mathbb{Z}^2$, где $t > \varepsilon$, выполняются равенства

$$\begin{aligned}
a_1(x, t - \varepsilon, m, \varepsilon) &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} (a_1(x - \varepsilon, t, m, \varepsilon) - m\varepsilon a_2(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon)); \\
a_2(x, t - \varepsilon, m, \varepsilon) &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} (m\varepsilon a_1(x - \varepsilon, t, m, \varepsilon) + a_2(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon)).
\end{aligned}$$

Доказательство леммы 1. Покажем, как второе уравнение получается из предложения 5. Для этого в (3) и (4) заменим (x, t) на $(x - \varepsilon, t - \varepsilon)$ и $(x + \varepsilon, t - \varepsilon)$ соответственно и сложим полученные равенства с коэффициентами $m\varepsilon/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}$ и $1/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}$. Первое уравнение получается аналогично. □

Доказательство предложения 7. Действительная часть искомого уравнения является суммой первых уравнений из леммы 1 и предложения 5. Мнимая часть — это сумма вторых уравнений. □

Доказательство предложения 8. Докажем первое тождество. Для каждого пути s обозначим через s' отражение пути s относительно оси t , а через s'' путь, состоящий из тех же ходов, что и s' , но сделанных в обратном порядке.

Рассмотрим путь s из $(0, 0)$ в (x, t) с первым ходом вправо-вверх, у которого $\text{turns}(s)$ нечётно (пути с чётным $\text{turns}(s)$ не дают вклада в $a_1(x, t, m, \varepsilon)$). Последний ход s направлен влево-вверх. Таким образом, последний ход пути s' направлен вправо-вверх, а значит, первый ход пути s'' направлен вправо-вверх. Оба пути s' и s'' заканчиваются в $(-x, t)$, так как изменение порядка ходов не влияет на конечную точку.

Таким образом, $s \mapsto s''$ — это биекция между путями с концом в (x, t) и $(-x, t)$ с нечётным числом поворотов. Значит, $a_1(x, t, m, \varepsilon) = a_1(-x, t, m, \varepsilon)$.

Второе тождество мы доказываем индукцией по t/ε (это доказательство было найдено и написано Е. Колпаковым). База индукции ($t/\varepsilon = 1$ и $t/\varepsilon = 2$) — очевидна.

Шаг индукции. Возьмем $t \geq 3\varepsilon$. Применяя индуктивное предположение к трём точкам $(x - \varepsilon, t - \varepsilon), (x + \varepsilon, t - \varepsilon), (x, t - 2\varepsilon)$ и пользуясь тождеством $a_1(x, t, m, \varepsilon) = a_1(-x, t, m, \varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned}
(t - x)a_2(x - \varepsilon, t - \varepsilon, m, \varepsilon) &= (x + t - 4\varepsilon)a_2(3\varepsilon - x, t - \varepsilon, m, \varepsilon), \\
(t - x - 2\varepsilon)a_2(x + \varepsilon, t - \varepsilon, m, \varepsilon) &= (x + t - 2\varepsilon)a_2(\varepsilon - x, t - \varepsilon, m, \varepsilon), \\
(t - x - 2\varepsilon)a_2(x, t - 2\varepsilon, m, \varepsilon) &= (x + t - 4\varepsilon)a_2(2\varepsilon - x, t - 2\varepsilon, m, \varepsilon), \\
a_1(x - \varepsilon, t - \varepsilon, m, \varepsilon) &= a_1(\varepsilon - x, t - \varepsilon, m, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Суммируя эти уравнения с коэффициентами $1, 1, -\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}, -2m\varepsilon^2$ соответственно, находим, что

$$\begin{aligned} & (t-x) \left(a_2(x-\varepsilon, t-\varepsilon, m, \varepsilon) + a_2(x+\varepsilon, t-\varepsilon, m, \varepsilon) - \sqrt{1+m^2\varepsilon^2} a_2(x, t-2\varepsilon, m, \varepsilon) \right) \\ & - 2m\varepsilon^2 a_1(x-\varepsilon, t-\varepsilon, m, \varepsilon) - 2\varepsilon a_2(x+\varepsilon, t-\varepsilon, m, \varepsilon) + 2\varepsilon\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} a_2(x, t-2\varepsilon, m, \varepsilon) = \\ & = -2m\varepsilon^2 a_1(\varepsilon-x, t-\varepsilon, m, \varepsilon) - 2\varepsilon a_2(3\varepsilon-x, t-\varepsilon, m, \varepsilon) + 2\varepsilon\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} a_2(2\varepsilon-x, t-2\varepsilon, m, \varepsilon) \\ & + (t+x-2\varepsilon) \left(a_2(3\varepsilon-x, t-\varepsilon, m, \varepsilon) + a_2(\varepsilon-x, t-\varepsilon, m, \varepsilon) - \sqrt{1+m^2\varepsilon^2} a_2(2\varepsilon-x, t-2\varepsilon, m, \varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Из леммы 1 следует, что три слагаемых во 2-й строке сокращаются с тремя слагаемыми в 3-й строке. Применяя уравнение Клейна — Гордона (предложение 7) к выражениям в 1-й и 4-й строках и сокращая полученное выражение на сомножитель $\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}$, мы получаем искомое тождество

$$(t-x)a_2(x, t, m, \varepsilon) = (t+x-2\varepsilon)a_2(2\varepsilon-x, t, m, \varepsilon).$$

Третье тождество следует из первого тождества и предложения 5:

$$\begin{aligned} a_1(x, t, m, \varepsilon) + m\varepsilon a_2(x, t, m, \varepsilon) &= \sqrt{1+m^2\varepsilon^2} a_1(x-\varepsilon, t+\varepsilon, m, \varepsilon) = \\ &= \sqrt{1+m^2\varepsilon^2} a_1(\varepsilon-x, t+\varepsilon, m, \varepsilon) = a_1(2\varepsilon-x, t, m, \varepsilon) + m\varepsilon a_2(2\varepsilon-x, t, m, \varepsilon). \quad \square \end{aligned}$$

Первое и третье тождества можно также доказать одновременно индукцией по t/ε , используя предложение 5.

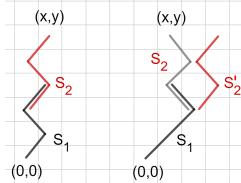


Рис. 17: Путь, разделённый на две части (см. доказательство предложения 9).

Доказательство предложения 9. Рассмотрим путь s из $(0, 0)$ в (x, t) . Обозначим через (x', t') точку, в которой s пересекает прямую $t = t'$. Обозначим через s_1 часть пути s , которая ведёт из $(0, 0)$ в (x', t') , а через s_2 часть пути s , которая начинается в точке пересечения пути s с прямой $t = t' - \varepsilon$ и заканчивается в (x, t) (см. рис. 17). Сдвинем s_2 так, чтобы он начался в $(0, 0)$.

Положим $a(s, m\varepsilon) := i(-im\varepsilon)^{\text{turns}(s)}(1+m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2}$. Так как $\text{turns}(s) = \text{turns}(s_1) + \text{turns}(s_2)$, то

$$\text{Re } a(s, m\varepsilon) = \begin{cases} \text{Re } a(s_1, m\varepsilon)\text{Im } a(s_2, m\varepsilon), & \text{если ход в } (x', t') \text{ влево-вверх,} \\ \text{Im } a(s_1, m\varepsilon)\text{Re } a(s_2, m\varepsilon), & \text{если ход в } (x', t') \text{ вправо-вверх.} \end{cases}$$

В первом случае заменим путь s_2 путём s'_2 , полученным отражением относительно прямой $x = 0$ (и начинающимся в начале координат). Мы получаем, что $\text{Im } a(s'_2, m\varepsilon) = \text{Im } a(s_2, m\varepsilon)$. Значит,

$$\begin{aligned} a_1(x, t, m, \varepsilon) &= \sum_s \text{Re } a(s, m\varepsilon) = \sum_{x'} \sum_{s \ni (x', t')} \text{Re } a(s, m\varepsilon) \\ &= \sum_{x'} \left(\sum_{s \ni (x', t'), (x'-\varepsilon, t'-\varepsilon)} \text{Im } a(s_1, m\varepsilon)\text{Re } a(s_2, m\varepsilon) + \sum_{s \ni (x', t'), (x'+\varepsilon, t'-\varepsilon)} \text{Re } a(s_1, m\varepsilon)\text{Im } a(s'_2, m\varepsilon) \right) \\ &= \sum_{x'} [a_2(x', t', m, \varepsilon)a_1(x-x'+\varepsilon, t-t'+\varepsilon, m, \varepsilon) + a_1(x', t', m, \varepsilon)a_2(x'-x+\varepsilon, t-t'+\varepsilon, m, \varepsilon)]. \end{aligned}$$

Формула для $a_2(x, t, m, \varepsilon)$ доказывается аналогично. \square

Доказательство предложсения 10. Обозначим через $f(x, t)$ разность между левой и правой частями выражения (5). Введем оператор

$$[\square_m f](x, t) := \sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2} f(x, t + \varepsilon) + \sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2} f(x, t - \varepsilon) - f(x + \varepsilon, t) - f(x - \varepsilon, t).$$

Достаточно доказать, что

$$[\square_m^4 f](x, t) = 0 \quad \text{при } t \geq 5\varepsilon. \quad (36)$$

Тогда (5) будет следовать по индукции по t/ε : (36) выражает $f(x, t + 4\varepsilon)$ как линейную комбинацию $f(x', t')$ с меньшими значениями t' ; остается проверить, что $f(x, t) = 0$ при $t \leq 8\varepsilon$ (проверка сделана в [44, §11]).

Чтобы доказать (36), запишем $f(x, t)$ в виде

$$f(x, t) =: p_1(x, t)a(x - 2\varepsilon, t, m, \varepsilon) + p_2(x, t)a(x + 2\varepsilon, t, m, \varepsilon) + p_3(x, t)a(x, t, m, \varepsilon)$$

для некоторых кубических полиномов $p_k(x, t)$ (см. (5)), и применим *правило Лейбница*

$$\square_m(fg) = f \cdot \square_m g + \sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2} (\nabla_{t+} f \cdot T_{t+} g - \nabla_{t-} f \cdot T_{t-} g) - \nabla_{x+} f \cdot T_{x+} g + \nabla_{x-} f \cdot T_{x-} g,$$

где $[\nabla_{t\pm} f](x, t) := \pm(f(x, t \pm \varepsilon) - f(x, t))$ и $[\nabla_{x\pm} f](x, t) := \pm(f(x \pm \varepsilon, t) - f(x, t))$ — операторы конечных разностей, $[T_{t\pm} g](x, t) := g(x, t \pm \varepsilon)$ и $[T_{x\pm} g](x, t) := g(x \pm \varepsilon, t)$ — операторы сдвига. По предложению 7 выполняется равенство $\square_m a(x, t, m, \varepsilon) = 0$. Каждый из операторов $\nabla_{t\pm}, \nabla_{x\pm}$ уменьшает степень многочлена, и все вышеперечисленные операторы коммутируют. Значит, (36) следует из правила Лейбница. Таким образом, мы доказали первое тождество из предложения; второе доказывается аналогично (база индукции проверена в [44, §11]). \square

Предложение 10 можно также доказать путем семикратного применения соотношений смежности Гаусса к гипергеометрическому выражению из замечания 3.

Доказательство предложсений 3 и 11. Вычислим $a_1(x, t, m, \varepsilon)$. Рассмотрим путь с нечётным числом поворотов; остальные не дают вклада в $a_1(x, t, m, \varepsilon)$. Пусть $2r+1$ — количество поворотов в пути, а R и L — количества ходов вправо-вверх и влево-вверх соответственно. Обозначим через x_1, x_2, \dots, x_{r+1} количества ходов вправо-вверх *перед* первым, третьим, \dots , последним поворотом соответственно. Обозначим через y_1, y_2, \dots, y_{r+1} количества ходов влево-вверх *после* первого, третьего, \dots , последнего поворота соответственно. Тогда $x_k, y_k \geq 1$ для всех $1 \leq k \leq r+1$ и

$$\begin{aligned} R &= x_1 + \dots + x_{r+1}; \\ L &= y_1 + \dots + y_{r+1}. \end{aligned}$$

Мы свели задачу к комбинаторной: количество путей с $2r+1$ поворотами равно количеству натуральных решений двух полученных уравнений. Для первого уравнения это количество равно количеству способов поставить r перегородок между R шарами, то есть, $\binom{R-1}{r}$. Следовательно,

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = (1 + m^2 \varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} \sum_{r=0}^{\min\{R, L\}} (-1)^r \binom{R-1}{r} \binom{L-1}{r} (m\varepsilon)^{2r+1}.$$

Формула (6) получается из равенств $L + R = t/\varepsilon$ и $R - L = x/\varepsilon$. Формула (7) выводится аналогично. \square

Доказательство предложсения 12. Доказательство проводится индукцией по t/ε .

База $t/\varepsilon = 1$ получается заменой переменной $p \mapsto p + \pi/\varepsilon$: интегралы по $[0; \pi/\varepsilon]$ и $[-\pi/\varepsilon; 0]$ для нечетных x/ε сокращаются и остается $(\varepsilon/2\pi) \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} e^{ip(x-\varepsilon)} = \delta_{x\varepsilon}$.

Шаг индукции заключается в следующем вычислении (и аналогичном вычислении для $a_2(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$):

$$\begin{aligned} a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) &= \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2}} (a_1(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon) + m\varepsilon a_2(x + \varepsilon, t, m, \varepsilon)) \\ &= \frac{m\varepsilon^2}{2\pi\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2}} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \left(\frac{ie^{ip\varepsilon}}{\sqrt{m^2 \varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} + 1 + \frac{\sin(p\varepsilon)}{\sqrt{m^2 \varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} \right) e^{ipx - i\omega_p(t - \varepsilon)} dp \\ &= \frac{m\varepsilon^2}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{(i \cos(\omega_p \varepsilon) + \sin(\omega_p \varepsilon)) e^{ipx - i\omega_p(t - \varepsilon)}}{\sqrt{m^2 \varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} dp = \frac{im\varepsilon^2}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{ipx - i\omega_p t}}{\sqrt{m^2 \varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} dp. \end{aligned}$$

Здесь 1-ое равенство — это предложение 5. Второе — предположение индукции. Третье следует из соотношений $\cos \omega_p \varepsilon = \frac{\cos p\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$ и $\sin \omega_p \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 p\varepsilon}{1+m^2\varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{m^2\varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon}{1+m^2\varepsilon^2}}$. \square

Альтернативное доказательство предложения 12 может быть получено интегрированием равенств (30)–(31) по $p = 2\pi/\lambda$ и использованием условий $\tilde{a}_1(0, 0) = 0$, $\tilde{a}_2(0, 0) = 1$.

Доказательство предложения 13. Чтобы доказать формулу для $a_1(x, t, m, \varepsilon)$, возьмем интеграл по ω :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{-i\omega(t - \varepsilon)} d\omega}{\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2} \cos(\omega \varepsilon) - \cos(p\varepsilon) - i\delta} &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{2 z^{t/\varepsilon - 1} dz}{\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2} z^2 - 2(\cos(p\varepsilon) + i\delta)z + \sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2}} \\ &\stackrel{(**)}{=} \frac{\left(\left(\cos p\varepsilon + i\delta - i\sqrt{m^2 \varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon + \delta^2 - 2i\delta \cos p\varepsilon} \right) / \sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2} \right)^{t/\varepsilon - 1}}{-i\sqrt{m^2 \varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon + \delta^2 - 2i\delta \cos p\varepsilon}} \stackrel{(***)}{\Rightarrow} \frac{i e^{-i\omega_p(t - \varepsilon)}}{\sqrt{m^2 \varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon}} \end{aligned}$$

при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по p . Здесь мы предполагаем, что $m, t, \delta > 0$ и δ достаточно мало. Равенство (*) получается заменой переменной $z = e^{-i\omega\varepsilon}$ и изменением направления обхода контура. Чтобы доказать (**), найдем корни знаменателя:

$$z_{\pm} = \frac{\cos p\varepsilon + i\delta \pm i\sqrt{m^2 \varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon + \delta^2 - 2i\delta \cos p\varepsilon}}{\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2}},$$

где \sqrt{z} обозначает значение квадратного корня с положительной действительной частью. Тогда (**) следует из теоремы о вычетах: разложение

$$z_{\pm} = \frac{\cos p\varepsilon \pm i\sqrt{m^2 \varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon}}{\sqrt{1 + m^2 \varepsilon^2}} \left(1 \pm \frac{\delta}{\sqrt{m^2 \varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon}} + O_{m,\varepsilon}(\delta^2) \right)$$

показывает, что для $\delta > 0$, достаточно малого в терминах m и ε , число z_- находится внутри единичного круга, а z_+ — вне его. В (***) мы полагаем $\omega_p := \frac{1}{\varepsilon} \arccos(\frac{\cos p\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}})$ так, что $\sin \omega_p \varepsilon = \sqrt{\frac{m^2\varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon}{1+m^2\varepsilon^2}}$ и переходим к пределу $\delta \rightarrow 0$. Равномерность сходимости по p обеспечивается условием $m > 0$.

Доказанная равномерная сходимость позволяет поменять местами предел по δ с интегрированием по p . Это приводит к интегралу Фурье для $a_1(x, t, m, \varepsilon)$ из предложения 12. Формула для $a_2(x, t, m, \varepsilon)$ доказывается аналогично, при этом случай $t = \varepsilon$ необходимо рассмотреть отдельно. \square

12.2 Фазовый переход: метод моментов (теорема 1)

В этом подразделе мы даем простое изложение доказательства теоремы 1 из [20], используя метод моментов. Теорема также следует из следствия 1, полученного другим путем в §12.4. Мы опираемся на следующий хорошо известный результат.

Лемма 2. (см. [5, теоремы 30.1–30.2]) Пусть $f_t: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, где $t = 0, 1, 2, \dots$ — кусочно-непрерывные функции такие, что $\alpha_{r,t} := \int_{-\infty}^{+\infty} v^r f_t(v) dv$ конечен и $\alpha_{0,t} = 1$ для любых $r, t = 0, 1, 2, \dots$. Если ряд $\sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{r,0} z^r / r!$ имеет положительный радиус сходимости и $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_{r,t} = \alpha_{r,0}$ для любого $r = 0, 1, 2, \dots$, то f_t сходится к f_0 по распределению.

Доказательство теоремы 1. Докажем (C); тогда (A) и (B) будут следовать из леммы 2 для $f_0(v) := F'(v)$ и $f_t(v) := tP(\lceil vt \rceil, t)$, потому что $F'(v) = 0$ при $|v| > 1$, а следовательно, $\alpha_{r,0} \leq \int_{-1}^{+1} |F'(v)| dv = 1$.

Перепишем предложение 12 в форме, корректной при любых $x, t \in \mathbb{Z}$, независимо от четности:

$$\begin{pmatrix} a_1(x, t) \\ a_2(x, t) \end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \hat{a}_1(p, t) \\ \hat{a}_2(p, t) \end{pmatrix} e^{ip(x-1)} \frac{dp}{2\pi} := \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \hat{a}_{1+}(p, t) + \hat{a}_{1-}(p, t) \\ \hat{a}_{2+}(p, t) + \hat{a}_{2-}(p, t) \end{pmatrix} e^{ip(x-1)} \frac{dp}{2\pi}, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1\pm}(p, t) &= \mp \frac{ie^{ip}}{2\sqrt{1 + \sin^2 p}} e^{\pm i\omega_p(t-1)}; \\ \hat{a}_{2\pm}(p, t) &= \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}} \right) e^{\pm i\omega_p(t-1)}, \end{aligned} \quad (38)$$

а $\omega_p := \arccos \frac{\cos p}{\sqrt{2}}$. Теперь (37) выполнено для любых $x, t \in \mathbb{Z}$: действительно, равенство

$$\begin{aligned} \exp(-i\omega_{p+\pi}(t-1) + i(p+\pi)(x-1)) &= \exp(-i(\pi - \omega_p)(t-1) + ip(x-1) + i\pi(x-1)) = \\ &= (-1)^{(x+t)} \exp(i\omega_p(t-1) + ip(x-1)) \end{aligned}$$

показывает, что вклады двух слагаемых $\hat{a}_{k\pm}(p, t)$ в интеграл (37) равны при четных $t+x$ и взаимоуничтожаются при нечетных $t+x$. Слагаемое $\hat{a}_{k-}(p, t)$ дает вклад $a_k(x, t)/2$ по предложению 12.

Используя свойство производных ряда Фурье и теорему Парсиваля, мы получаем

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} \frac{x^r}{t^r} P(x, t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} a_1(x, t) \\ a_2(x, t) \end{pmatrix}^* \frac{x^r}{t^r} \begin{pmatrix} a_1(x, t) \\ a_2(x, t) \end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \hat{a}_1(p, t) \\ \hat{a}_2(p, t) \end{pmatrix}^* \frac{i^r}{t^r} \frac{\partial^r}{\partial p^r} \begin{pmatrix} \hat{a}_1(p, t) \\ \hat{a}_2(p, t) \end{pmatrix} \frac{dp}{2\pi}. \quad (39)$$

Производная оценивается следующим образом:

$$\frac{\partial^r}{\partial p^r} \hat{a}_{k\pm}(p, t) = \left(\pm i(t-1) \frac{\partial \omega_p}{\partial p} \right)^r \hat{a}_{k\pm}(p, t) + O_r(t^{r-1}) = \left(\pm \frac{i(t-1) \sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}} \right)^r \hat{a}_{k\pm}(p, t) + O_r(t^{r-1}). \quad (40)$$

Действительно, дифференцируем (38) r раз, используя правило Лейбница. Если мы каждый раз будем дифференцировать экспоненциальный множитель $e^{\pm i\omega_p(t-1)}$, то получим главный член. Если мы хотя бы раз дифференцируем множитель, отличный от экспоненциального $e^{\pm i\omega_p(t-1)}$, то мы получаем менее r множителей $(t-1)$, а тогда полученный член есть $O_r(t^{r-1})$ из компактности, потому что он непрерывный и 2π -периодический по p .

Подставляя (40) в (39), мы получаем

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \frac{x^r}{t^r} P(x, t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \hat{a}_1(p, t) \\ \hat{a}_2(p, t) \end{pmatrix}^* \left(\frac{\sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}} \right)^r \begin{pmatrix} (-1)^r \hat{a}_{1+}(p, t) + \hat{a}_{1-}(p, t) \\ (-1)^r \hat{a}_{2+}(p, t) + \hat{a}_{2-}(p, t) \end{pmatrix} \frac{dp}{2\pi} + O_r\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}} \right)^r \frac{1}{2} \left((-1)^r \left(1 - \frac{\sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}} \right) + 1 + \frac{\sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}} \right) \frac{dp}{2\pi} + O_r\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}} \right)^r \left(1 + \frac{\sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}} \right) \frac{dp}{\pi} + O_r\left(\frac{1}{t}\right) = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{v^r dv}{\pi(1-v)\sqrt{1-2v^2}} + O_r\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

Здесь второе равенство следует из того, что $\hat{a}_{1\pm}(p, t)^*\hat{a}_{1\pm}(p, t) + \hat{a}_{2\pm}(p, t)^*\hat{a}_{2\pm}(p, t) = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\sin p}{\sqrt{1+\sin^2 p}} \right)$ и $\hat{a}_{1\pm}(p, t)^*\hat{a}_{1\mp}(p, t) + \hat{a}_{2\pm}(p, t)^*\hat{a}_{2\mp}(p, t) = 0$. Третье получается после замены переменных $p \mapsto -p$ и $p \mapsto \pi - p$, примененной к интегралу по $[-\pi/2, \pi/2]$. Четвертое получается после замены переменных $v = \sin p / \sqrt{1 + \sin^2 p}$, при которой $dp = d\arcsin \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = dv / (1-v^2)\sqrt{1-2v^2}$. \square

12.3 Основной результат: метод стационарной фазы (теорема 2)

В этом разделе мы докажем теорему 2. Сначала изложим план доказательства, затем докажем теорему по модулю некоторых технических лемм, и, наконец, сами леммы.

План состоит в том, чтобы применить преобразование Фурье, а затем *метод стационарной фазы* к полученному осциллирующему интегралу. Доказательство состоит из 4 шагов, первые два из которых были известны ранее.

Шаг 1: вычисление главного члена в асимптотике;

Шаг 2: оценка остаточного члена, возникающего в окрестностях стационарных точек;

Шаг 3: оценка остаточного члена, возникающего в окрестности начала координат;

Шаг 4: оценка остаточного члена, возникающего в дополнениях до этих окрестностей.

Доказательство теоремы 2 по модулю некоторых лемм. Выведем асимптотику для $a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$; вывод для $a_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$ аналогичен и обсуждается в конце доказательства. Из предложения 12 и тождества $e^{i\omega_p + \pi/\varepsilon t - i(p + \pi/\varepsilon)x} = e^{i(\pi/\varepsilon - \omega_p)t - ipx - i\pi x/\varepsilon} = -e^{-i\omega_p t - ipx}$ при нечетных $(t + x)/\varepsilon$ имеем

$$a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon) = \frac{m\varepsilon^2}{2\pi i} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{i\omega_p t - ipx}}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} dp = \int_{-\pi/2\varepsilon}^{\pi/2\varepsilon} g(p)(e(f_+(p)) - e(f_-(p))) dp, \quad (41)$$

где $e(z) := e^{2\pi iz}$, а

$$f_{\pm}(p) = \frac{1}{2\pi} \left(-px \pm \frac{t}{\varepsilon} \arccos \frac{\cos(p\varepsilon)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} \right), \quad (42)$$

$$g(p) = \frac{m\varepsilon^2}{2\pi i \sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}}. \quad (43)$$

Шаг 1. Оценим осциллирующий интеграл (41) с помощью следующего известного результата.

Лемма 3 (Взвешенный интеграл стационарной фазы). [21, лемма 5.5.6] Пусть $f(p)$ — вещественно-значная функция, четырежды непрерывно дифференцируемая при $\alpha \leq p \leq \beta$, пусть $g(p)$ — вещественно-значная функция, трижды непрерывно дифференцируемая при $\alpha \leq p \leq \beta$. Предположим, что существуют положительные параметры M, N, T, U , такие, что

$$M \geq \beta - \alpha, \quad N \geq M/\sqrt{T},$$

и положительные константы C_r такие, что при $\alpha \leq p \leq \beta$,

$$|f^{(r)}(p)| \leq C_r T/M^r, \quad |g^{(s)}(p)| \leq C_s U/N^s,$$

при $r = 2, 3, 4$ и $s = 0, 1, 2, 3$, а

$$f''(p) \geq T/C_2 M^2.$$

Предположим также, что $f'(p)$ меняет знак с отрицательного на положительный в точке $p = \gamma$, где $\alpha < \gamma < \beta$. Если T достаточно большое в терминах C_r , то

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} g(p)e(f(p)) dp &= \frac{g(\gamma)e(f(\gamma) + 1/8)}{\sqrt{f''(\gamma)}} + \frac{g(\beta)e(f(\beta))}{2\pi i f'(\beta)} - \frac{g(\alpha)e(f(\alpha))}{2\pi i f'(\alpha)} \\ &\quad + O_{C_0, \dots, C_4} \left(\frac{M^4 U}{T^2} \left(1 + \frac{M}{N} \right)^2 \left(\frac{1}{(\gamma - \alpha)^3} + \frac{1}{(\beta - \gamma)^3} + \frac{\sqrt{T}}{M^3} \right) \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь первый член, содержащий значения в стационарной точке γ , является главным, а граничные члены, содержащие значения в граничных точках α и β , сократятся на шаге 3.

Лемма 4. (ср. [23, (25)], [1, §4]) Предположим (8); тогда на $[-\frac{\pi}{2\varepsilon}, \frac{\pi}{2\varepsilon}]$, функция $f_{\pm}(p)$, задаваемая (42), имеет единственную критическую точку

$$\gamma_{\pm} = \pm \frac{1}{\varepsilon} \arcsin \frac{m\varepsilon x}{\sqrt{t^2 - x^2}}. \quad (45)$$

Для оценки интеграла (41) мы дважды применим лемму 3 к функциям $f(p) = \pm f_{\pm}(p)$ в подходящих окрестностях их критических точек γ_{\pm} . В случае $f(p) = -f_{-}(p)$ комплексно сопряжем обе части (44). Тогда общий вклад двух полученных главных членов следующий:

$$\text{MainTerm} := \frac{g(\gamma_+)e(f_+(\gamma_+) + 1/8)}{\sqrt{f''_+(\gamma_+)}} - \frac{g(\gamma_-)e(f_-(\gamma_-) - 1/8)}{\sqrt{-f''_-(\gamma_-)}}. \quad (46)$$

Прямое, но длинное вычисление (см. [44, §2]) дает главный член, заявленный в теореме:

Лемма 5. (см. [44, §2]) Предположим (8), (11), (42)–(43), (45); тогда выражение (46) равняется

$$\text{MainTerm} = \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi}} (t^2 - (1 + m^2 \varepsilon^2)x^2)^{-1/4} \sin \theta(x, t, m, \varepsilon).$$

Шаг 2. Для оценки остаточного члена нам нужно указать конкретные значения параметров, к которым применяется лемма 3:

$$M = N = m, \quad T = mt, \quad U = \varepsilon. \quad (47)$$

Лемма 6. Если $\varepsilon \leq 1/m$, то функции (42)–(43) и параметры (47) удовлетворяют неравенствам

$$\left| f_{\pm}^{(r)}(p) \right| \leq 3T/M^r, \quad \left| g^{(s)}(p) \right| \leq 3U/N^s \quad \text{при } p \in \mathbb{R}, \quad r = 2, 3, 4, \quad s = 0, 1, 2, 3.$$

Нужно также указать отрезок

$$[\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}] := [\gamma_{\pm} - m\delta/2, \gamma_{\pm} + m\delta/2]. \quad (48)$$

Для оценки производной $|f''_{\pm}(p)|$ снизу убедимся, что находимся далеко от её корней $\pm\pi/2\varepsilon$.

Лемма 7. Предположим (8) и (45); тогда отрезок (48) содержитсся в отрезке $[-\pi/2\varepsilon + m\delta/2, \pi/2\varepsilon - m\delta/2]$.

Такой предусмотрительный выбор отрезка дает нам следующую, более техничную оценку.

Лемма 8. Предположим (8), (42), (45) и (48). Тогда для любого $p \in [\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]$ имеем

$$|f''_{\pm}(p)| \geq \frac{t\delta^{3/2}}{24\pi m}.$$

Это дает $|f''_{\pm}(p)| \geq T/C_2 M^2$ при $C_2 := 24\pi\delta^{-3/2}$ в обозначениях (47). Теперь все предположения леммы 3 проверены ($M \geq \beta_{\pm} - \alpha_{\pm}$ и $N \geq M/\sqrt{T}$ автоматически, так как $\delta \leq 1$ и $t > C_{\delta}/m$ из (8)). Применим лемму к $g(p)$ и $\pm f_{\pm}(p)$ на $[\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]$ (знак минус перед $f_{-}(p)$ гарантирует неравенство $f''(p) > 0$, а множитель i внутри $g(p)$ несущественен при применении леммы). Получаем следующую оценку остаточного члена на этих отрезках.

Лемма 9. (см. [44, §4]) *Параметры (45) и (47)–(48) удовлетворяют*

$$\frac{M^4 U}{T^2} \left(1 + \frac{M}{N}\right)^2 \left(\frac{1}{(\gamma_{\pm} - \alpha_{\pm})^3} + \frac{1}{(\beta_{\pm} - \gamma_{\pm})^3} + \frac{\sqrt{T}}{M^3} \right) = O_{\delta} \left(\frac{\varepsilon}{m^{1/2} t^{3/2}} \right).$$

Хотя это только часть остаточного члена, она уже того же порядка, что и в теореме.

Шаг 3. Для оценки остаточного члена вне $[\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]$ используем другой известный технический результат.

Лемма 10 (Взвешенный тест первой производной). [21, лемма 5.5.5] *Пусть $f(p)$ – вещественно-значная функция, трижды непрерывно дифференцируемая при $\alpha \leq p \leq \beta$, пусть $g(p)$ – вещественно-значная функция, дважды непрерывно дифференцируемая при $\alpha \leq p \leq \beta$. Предположим, что существуют положительные параметры M, N, T, U , такие, что $M \geq \beta - \alpha$, и положительные константы C_r такие, что при $\alpha \leq p \leq \beta$ выполнено*

$$|f^{(r)}(p)| \leq C_r T/M^r, \quad |g^{(s)}(p)| \leq C_s U/N^s,$$

при $r = 2, 3$ и $s = 0, 1, 2$. Если $f'(p)$ и $f''(p)$ не меняют знак на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} g(p)e(f(p)) dp &= \frac{g(\beta)e(f(\beta))}{2\pi i f'(\beta)} - \frac{g(\alpha)e(f(\alpha))}{2\pi i f'(\alpha)} \\ &\quad + O_{C_0, \dots, C_3} \left(\frac{TU}{M^2} \left(1 + \frac{M}{N} + \frac{M^3 \min |f'(p)|}{N^2 T} \right) \frac{1}{\min |f'(p)|^3} \right). \end{aligned}$$

Эта лемма, в частности, требует, чтобы интервал был достаточно малым. По этой причине мы нарезаем исходный отрезок $[-\pi/2\varepsilon, \pi/2\varepsilon]$ на большое количество отрезков с концами

$$-\frac{\pi}{2\varepsilon} = \alpha_{-K} < \beta_{-K} = \alpha_{-K+1} < \beta_{-K+1} = \alpha_{-K+2} < \cdots = \alpha_i < \hat{\beta}_i = \alpha_{\pm} < \beta_{\pm} = \hat{\alpha}_j < \beta_j = \cdots < \beta_{K-1} = \frac{\pi}{2\varepsilon}.$$

Здесь α_{\pm} и β_{\pm} задаются формулой (48) выше. Остальные точки задаются так:

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{2\varepsilon K}, \quad \beta_k = \frac{(k+1)\pi}{2\varepsilon K}, \quad \text{где } K = 2 \left\lceil \frac{\pi}{m\varepsilon} \right\rceil, \quad \text{а } k = -K, \dots, i, j+1, \dots, K-1. \quad (49)$$

Здесь индексы i и j – минимальные, для которых выполнено $\frac{(i+1)\pi}{2\varepsilon K} > \alpha_{\pm}$ и $\frac{(j+1)\pi}{2\varepsilon K} > \beta_{\pm}$. Следовательно, все полученные отрезки, кроме $[\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]$ и его соседей, имеют одинаковую длину $\frac{\pi}{2\varepsilon K}$. (Хотя более концептуальной является нарезка с использованием геометрической прогрессии, а не арифметической, это не влияет на окончательную оценку.)

Мы уже применили лемму 3 к $[\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]$, и теперь мы применим лемму 10 к каждому из оставшихся отрезков в нарезке для $f(p) = f_{\pm}(p)$ (на этот раз нет необходимости в смене знака у $f_{-}(p)$). После суммирования полученных оценок все члены, содержащие значения $f_{\pm}(\alpha_k)$ и $f_{\pm}(\beta_k)$ в концевых точках, кроме самой левой и самой правой, сокращаются. Оставшиеся граничные члены дают

$$\text{BoundaryTerm} := \frac{g(\frac{\pi}{2\varepsilon})e(f_{+}(\frac{\pi}{2\varepsilon}))}{2\pi i f'_{+}(\frac{\pi}{2\varepsilon})} - \frac{g(-\frac{\pi}{2\varepsilon})e(f_{+}(-\frac{\pi}{2\varepsilon}))}{2\pi i f'_{+}(-\frac{\pi}{2\varepsilon})} - \frac{g(\frac{\pi}{2\varepsilon})e(f_{-}(\frac{\pi}{2\varepsilon}))}{2\pi i f'_{-}(\frac{\pi}{2\varepsilon})} + \frac{g(-\frac{\pi}{2\varepsilon})e(f_{-}(-\frac{\pi}{2\varepsilon}))}{2\pi i f'_{-}(-\frac{\pi}{2\varepsilon})}. \quad (50)$$

Лемма 11. (см. [44, §5]) *Для $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ таких, что $(x+t)/\varepsilon$ нечетно, выражение (50) зануляется.*

Остается оценить остаточные члены. Начнем оценку с центральных отрезков $[\alpha_0, \beta_0]$ и $[\alpha_{-1}, \beta_{-1}]$ (возможно, без частей, вырезанных отрезком $[\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]$); к ним нужен специальный подход. Применим лемму 10 к этим отрезкам для тех же функций (42)–(43) и тех же значений (47) параметров M, N, T, U , как в шаге 2. Все предположения этой леммы уже были проверены в лемме 6; имеем также $\beta_0 - \alpha_0 \leq \pi/2\varepsilon K = \pi/4\varepsilon \lceil \frac{\pi}{m\varepsilon} \rceil < m = M$ и $f''_{\pm}(p) \neq 0$. Следовательно, остается оценить $|f'_{\pm}(p)|$ снизу.

Лемма 12. *Предположим (8), (42), (45), (48); тогда для любого $p \in [-\pi/2\varepsilon, \pi/2\varepsilon] \setminus [\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]$ получаем*

$$|f'_{\pm}(p)| \geq t\delta^{5/2}/48\pi.$$

Тогда остаточный член на центральных отрезках оценивается так.

Лемма 13. (см. [44, §6]) *Предположим (8), (45) и (48). Тогда параметры (47) и функции (42) удовлетворяют*

$$\frac{TU}{M^2} \left(1 + \frac{M}{N} + \frac{M^3 \min_{p \in [\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]} |f'_{\pm}(p)|}{N^2 T} \right) \frac{1}{\min_{p \in [\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]} |f'_{\pm}(p)|^3} = O\left(\frac{\varepsilon}{mt^2\delta^{15/2}}\right).$$

Это значение есть $O_{\delta}(\varepsilon/m^{1/2}t^{3/2})$, так как $t > C_{\delta}/m$ из (8). Следовательно, остаточный член на центральных отрезках находится в допустимых теоремой пределах.

Шаг 4. Для оценки остаточного члена на оставшихся отрезках $[\alpha_k, \beta_k]$, где без потери общности считаем $k > 0$, применим лемму 10 с несколько другими параметрами:

$$T = mt/k, \quad M = mk, \quad U = \varepsilon/k, \quad N = mk. \quad (51)$$

Лемма 14. *Для $0 < k < K$ и $\varepsilon \leq 1/t$ параметры (51) и (49), функции (42)–(43) на $[\alpha_k, \beta_k]$ удовлетворяют всем условиям леммы 10, кроме, быть может, условия на знак $f'(p)$.*

Поскольку окрестность $[\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]$ корня производной $f'(p)$ вырезана, получаем, что $f'(p)$ имеет постоянный знак на оставшихся промежутках и по лемме 10 их вклад в ошибку оценивается следующим образом.

Лемма 15. (см. [44, §7]) *Пусть (8), (45), (48), $0 < k < K$. Тогда функции (42) и параметры (51) удовлетворяют*

$$\frac{TU}{M^2} \left(1 + \frac{M}{N} + \frac{M^3 \min_{p \notin [\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]} |f'_{\pm}(p)|}{N^2 T} \right) \frac{1}{\min_{p \notin [\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}]} |f'_{\pm}(p)|^3} = O\left(\frac{\varepsilon}{k^2 mt^2 \delta^{15/2}}\right).$$

Суммирование по всем k дает остаточный член

$$\sum_{k=1}^K O\left(\frac{\varepsilon}{k^2 mt^2 \delta^{15/2}}\right) = O\left(\frac{\varepsilon}{mt^2 \delta^{15/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) = O_{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{m^{1/2} t^{3/2}}\right),$$

так как ряд внутри О-большого сходится и $t > C_{\delta}/m$. Следовательно, итоговый остаточный член на всех отрезках удовлетворяет требованию теоремы, что завершает доказательство асимптотики (9).

Выход асимптотики для $a_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$ аналогичен. Из предложения 12 для четных $(x + t)/\varepsilon$ получаем

$$\begin{aligned} a_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \left(1 + \frac{\sin(p\varepsilon)}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} \right) e^{i\omega_p t - ipx} dp \\ &= \int_{-\pi/2\varepsilon}^{\pi/2\varepsilon} [g_+(p)e(f_+(p)) + g_-(p)e(f_-(p))] dp, \end{aligned} \quad (52)$$

где $f_{\pm}(p)$ такие же, как выше (см. (42)), а

$$g_{\pm}(p) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \left(1 \pm \frac{\sin(p\varepsilon)}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} \right). \quad (53)$$

Повторим рассуждения шагов 1–4 с заменой $g(p)$ на $g_{\pm}(p)$. Конкретная форма $g(p)$ использовалась только в леммах 5, 6, 11, 14. Аналоги лемм 5 и 11 для $g_{\pm}(p)$ получаются прямой проверкой [44, §13]. Лемма 6 справедлива для $g_{\pm}(p)$: доказательство повторять не нужно, так как $g_{\pm}(p) = (\varepsilon/t)(f'_{\pm}(p) + (x+t)/2\pi)$ [44, §1]. Однако параметры (51) и лемму 14 нужно заменить следующими (тогда аналог леммы 15 выполнен):

$$T = mt/k, \quad M = mk, \quad U = \varepsilon, \quad N = mk^{3/2}. \quad (54)$$

Лемма 16. Для $0 < k < K$ и $\varepsilon \leq 1/m$ параметры (54) и (49), функции (42) и (53) на $[\alpha_k, \beta_k]$ удовлетворяют условиям леммы 10, кроме, быть может, условия на знак $f'(p)$.

И на этот раз, доказательство повторять не нужно: лемма 16 следует из леммы 14 и выражения g_{\pm} через f'_{\pm} .

Это завершает доказательство теоремы 2 по модулю лемм. \square

Теперь докажем леммы. Леммы 5, 9, 11, 13, 15 доказываются прямой проверкой [44]. Следующие выражения [44, §1,3] часто используются в доказательствах других лемм:

$$f'_{\pm}(p) = \frac{1}{2\pi} \left(-x \pm \frac{t \sin p\varepsilon}{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2 p\varepsilon}} \right); \quad (55)$$

$$f''_{\pm}(p) = \pm \frac{m^2\varepsilon^3 t \cos(p\varepsilon)}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{3/2}} \quad (56)$$

Доказательство леммы 4. Используя (55) и решая квадратное уравнение $f'_{\pm}(p) = 0$, как уравнение от $\sin p\varepsilon$, получаем (45). Условия $|x|/t < 1/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}$ из (8) гарантируют существование арксинуса. \square

Доказательство леммы 6. Из вычисления производных в [44, §3] и условия $m\varepsilon \leq 1$ получаем

$$\begin{aligned} |g(p)| &= \frac{m\varepsilon^2}{2\pi\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} \leq \frac{m\varepsilon^2}{2\pi\sqrt{m^2\varepsilon^2 + 0}} \leq \varepsilon = U, \\ |g^{(1)}(p)| &= \frac{m\varepsilon^3 |\sin(p\varepsilon) \cos(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{3/2}} \leq \frac{m\varepsilon^3 |\sin(p\varepsilon) \cos(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + 0) (0 + \sin^2(p\varepsilon))^{1/2}} \leq \frac{\varepsilon}{m} = \frac{U}{N}, \\ |g^{(2)}(p)| &= \frac{m\varepsilon^4 |m^2\varepsilon^2 + \sin^4(p\varepsilon) - 2(1 + m^2\varepsilon^2) \sin^2(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{5/2}} \leq \frac{m\varepsilon^4 (3m^2\varepsilon^2 + 3\sin^2(p\varepsilon))}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{5/2}} \leq \frac{\varepsilon}{m^2} = \frac{U}{N^2}, \\ |g^{(3)}(p)| &= \frac{m\varepsilon^5 |\sin(p\varepsilon) \cos(p\varepsilon)| \cdot |4m^4\varepsilon^4 + 9m^2\varepsilon^2 + \sin^4(p\varepsilon) - (6 + 10m^2\varepsilon^2) \sin^2(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{7/2}} \leq \frac{3\varepsilon}{m^3} = \frac{3U}{N^3}, \\ |f_{\pm}^{(2)}(p)| &= \frac{m^2\varepsilon^3 t \cos(p\varepsilon)}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{3/2}} \leq \frac{t}{m} = \frac{T}{M^2}, \\ |f_{\pm}^{(3)}(p)| &= \frac{m^2\varepsilon^4 t |\sin(p\varepsilon)| (m^2\varepsilon^2 + \cos(2p\varepsilon) + 2)}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{5/2}} \leq \frac{4m^2\varepsilon^4 t |\sin(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{5/2}} \leq \frac{t}{m^2} = \frac{T}{M^3}, \\ |f_{\pm}^{(4)}(p)| &= \frac{m^2\varepsilon^5 t \cos(p\varepsilon) |m^4\varepsilon^4 + 3m^2\varepsilon^2 + 4\sin^4(p\varepsilon) - 2(6 + 5m^2\varepsilon^2) \sin^2(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{7/2}} \leq \frac{3t}{m^3} = \frac{3T}{M^4}. \end{aligned} \quad \square$$

Доказательство леммы 7. Лемма следует из следующей цепочки оценок:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2\varepsilon} - |\gamma_{\pm}| &= \frac{\sin(\pi/2) - \sin|\gamma_{\pm}\varepsilon|}{\varepsilon \cos(\theta\varepsilon)} \geq \frac{\sin(\pi/2) - \sin|\gamma_{\pm}\varepsilon|}{\varepsilon \cos(\gamma_{\pm}\varepsilon)} = \frac{1 - m\varepsilon|x|/\sqrt{t^2 - x^2}}{\varepsilon\sqrt{1 - m^2\varepsilon^2x^2/(t^2 - x^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - x^2/t^2} - m\varepsilon|x|/t}{\varepsilon\sqrt{1 - (1 + m^2\varepsilon^2)x^2/t^2}} \geq \frac{1}{\varepsilon} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - \frac{m\varepsilon|x|}{t} \right) \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{1 + m^2\varepsilon^2}} - \frac{m\varepsilon|x|}{t} \right) = m \left(\frac{1}{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}} - \frac{|x|}{t} \right) \geq m\delta. \end{aligned}$$

Здесь первое равенство выполнено для некоторого $\theta \in [|\gamma_{\pm}|, \pi/2\varepsilon]$ по теореме Лагранжа. Следующее неравенство выполнено, так как косинус убывает на заданном промежутке. Следующее получается путем подстановки (45). Остальное просто, так как $|x|/t < 1/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2} - \delta$ ввиду (8). \square

Доказательство леммы 8. Докажем лемму для $f_+(p)$ и $\gamma_+ \geq 0$; для остальных знаков — аналогично. Опустим индекс + в обозначениях $f_+, \alpha_+, \beta_+, \gamma_+$. Лемма следует из следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} |f^{(2)}(p)| &\stackrel{(*)}{\geq} |f^{(2)}(\beta)| = \frac{m^2\varepsilon^3 t \cos(\beta\varepsilon)}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(\beta\varepsilon))^{3/2}} \stackrel{(**)}{\geq} \frac{m^2\varepsilon^3 t \cos(\gamma\varepsilon)}{4\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(\gamma\varepsilon) + 2m^2\varepsilon^2 t^2/(t^2 - x^2))^{3/2}} \\ &\stackrel{(***)}{=} \frac{m^2\varepsilon^3 t \sqrt{t^2 - (1 + m^2\varepsilon^2)x^2}(t^2 - x^2)}{4\pi (3m^2\varepsilon^2 t^2)^{3/2}} \geq \frac{t\sqrt{1 - (1 + m^2\varepsilon^2)x^2/t^2}(1 - x^2/t^2)}{24\pi m} \geq \frac{t\delta^{3/2}}{24\pi m}. \end{aligned}$$

Здесь неравенство (*) доказывается следующим образом. Из (56), $f^{(2)}(p)$ возрастает на $[-\pi/2\varepsilon, 0]$ и убывает на $[0, \pi/2\varepsilon]$: ведь эта функция четна, а её числитель убывает на $[0, \pi/2\varepsilon]$ и знаменатель возрастает на $[0, \pi/2\varepsilon]$. Следовательно, $|f^{(2)}(p)| \geq \min\{|f^{(2)}(\beta)|, |f^{(2)}(\alpha)|\}$ при $p \in [\alpha, \beta]$ из леммы 7. Но так как $f^{(2)}(p)$ четно и $\gamma \geq 0$, то из (48) получаем

$$|f^{(2)}(\alpha)| = |f^{(2)}(\gamma - m\delta/2)| = |f^{(2)}(|\gamma - m\delta/2|)| \geq |f^{(2)}(\gamma + m\delta/2)| = |f^{(2)}(\beta)|.$$

Неравенство (**) следует из следующих двух оценок. Сначала из леммы 7 и выпуклости косинуса на промежутке $[\gamma\varepsilon, \pi/2]$ получаем

$$\cos(\beta\varepsilon) \geq \cos\left(\frac{\gamma\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2} \left(\cos(\gamma\varepsilon) + \cos\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\cos(\gamma\varepsilon)}{2}.$$

Затем, используя неравенство $\sin z - \sin w \leq z - w$ при $0 \leq w \leq z \leq \pi/2$, а потом неравенство $\delta \leq 1$ и (45)–(48), получаем

$$\begin{aligned} \sin^2(\beta\varepsilon) - \sin^2(\gamma\varepsilon) &\leq \varepsilon(\beta - \gamma) (\sin(\beta\varepsilon) + \sin(\gamma\varepsilon)) \leq \varepsilon(\beta - \gamma) (\varepsilon(\beta - \gamma) + 2\sin(\gamma\varepsilon)) \\ &= \frac{m\varepsilon\delta}{2} \left(\frac{m\varepsilon\delta}{2} + \frac{2m\varepsilon x}{\sqrt{t^2 - x^2}} \right) \leq \frac{m\varepsilon t}{2\sqrt{t^2 - x^2}} \left(\frac{2m\varepsilon t}{\sqrt{t^2 - x^2}} + \frac{2m\varepsilon t}{\sqrt{t^2 - x^2}} \right) = \frac{2m^2\varepsilon^2 t^2}{t^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Равенство (***) получается из (45). Оставшиеся оценки очевидны. \square

Доказательство леммы 12. Из лемм 4 и 8 при $p \in [\beta_+, \pi/2\varepsilon]$ имеем

$$f'_+(p) = f'_+(\gamma_+) + \int_{\gamma_+}^p f''_+(p) dp \geq 0 + (p - \gamma_+) \frac{t\delta^{3/2}}{24\pi m} \geq (\beta_+ - \gamma_+) \frac{t\delta^{3/2}}{24\pi m} = \frac{t\delta^{5/2}}{48\pi},$$

так как $f''_+(p) \geq 0$ из (56). Для $p \in [-\pi/2\varepsilon, \alpha_+]$ и $f'_-(p)$ доказательство аналогично. \square

Доказательство леммы 14. Возьмем $p \in [\alpha_k, \beta_k]$. Из (49), неравенства $\sin z \geq z/2$ при $z \in [0, \pi/2]$ и неравенства $m\varepsilon \leq 1$ получаем

$$\begin{aligned} |g(p)| &= \frac{m\varepsilon^2}{2\pi\sqrt{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon)}} \leq \frac{m\varepsilon^2}{2\pi\sin(p\varepsilon)} \leq \frac{m\varepsilon^2}{\pi p\varepsilon} \leq \frac{2m\varepsilon^2 K}{\pi^2 k} = \frac{4m\varepsilon^2}{\pi^2 k} \left\lceil \frac{\pi}{m\varepsilon} \right\rceil = O\left(\frac{\varepsilon}{k}\right) = O(U), \\ |g^{(1)}(p)| &= \frac{m\varepsilon^3 |\sin(p\varepsilon) \cos(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{3/2}} \leq \frac{m\varepsilon^3}{2\pi \sin^2(p\varepsilon)} = O\left(\frac{\varepsilon}{mk^2}\right) = O\left(\frac{U}{N}\right), \\ |g^{(2)}(p)| &= \frac{m\varepsilon^4 |m^2\varepsilon^2 + \sin^4(p\varepsilon) - 2(1 + m^2\varepsilon^2)\sin^2(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{5/2}} \leq \frac{m\varepsilon^4 (3m^2\varepsilon^2 + 3\sin^2(p\varepsilon))}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{5/2}} = O\left(\frac{U}{N^2}\right), \\ |g^{(3)}(p)| &= \frac{m\varepsilon^5 |\sin(p\varepsilon) \cos(p\varepsilon)| \cdot |4m^4\varepsilon^4 + 9m^2\varepsilon^2 + \sin^4(p\varepsilon) - (6 + 10m^2\varepsilon^2)\sin^2(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{7/2}} = O\left(\frac{U}{N^3}\right), \\ |f_{\pm}^{(2)}(p)| &= \frac{m^2\varepsilon^3 t \cos(p\varepsilon)}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{3/2}} = O\left(\frac{t}{mk^3}\right) = O\left(\frac{T}{M^2}\right), \\ |f_{\pm}^{(3)}(p)| &= \frac{m^2\varepsilon^4 t |\sin(p\varepsilon)| (m^2\varepsilon^2 + \cos(2p\varepsilon) + 2)}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{5/2}} = O\left(\frac{t}{m^2 k^4}\right) = O\left(\frac{T}{M^3}\right), \\ |f_{\pm}^{(4)}(p)| &= \frac{m^2\varepsilon^5 t \cos(p\varepsilon) |m^4\varepsilon^4 + 3m^2\varepsilon^2 + 4\sin^4(p\varepsilon) - 2(6 + 5m^2\varepsilon^2)\sin^2(p\varepsilon)|}{2\pi (m^2\varepsilon^2 + \sin^2(p\varepsilon))^{7/2}} = O\left(\frac{t}{m^3 k^5}\right) = O\left(\frac{T}{M^4}\right). \end{aligned}$$

Далее, $f''_{\pm}(p)$ не меняет знак на промежутках $[\alpha_k, \beta_k]$, так как зануляется только в $\pm\pi/2\varepsilon$. Также имеем $\beta_k - \alpha_k \leq \pi/2\varepsilon K = \pi/4\varepsilon \lceil \frac{\pi}{m\varepsilon} \rceil < m \leq mk = M$. \square

Замечание 9. Аналогично шагам 3–4 выше (но со значительными упрощениями, так как не будет стационарных точек), можно доказать следующее: для любых $t, \varepsilon, \delta > 0$ и любых $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, удовлетворяющих неравенствам $|x|/t > 1/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} + \delta$ и $\varepsilon \leq 1/m$, имеем $a(x, t, m, \varepsilon) = O\left(\frac{\varepsilon}{mt^2\delta^3}\right)$ [45, теорема 3В].

12.4 Предел при больших временах: снова метод стационарной фазы(следствия 1–3)

В этом разделе мы докажем следствия 1–3. Сначала изложим план, которому будем следовать, затем докажем следствие 1 по модулю технической леммы, затем саму лемму, и, наконец, следствия 2–3.

План доказательства следствия 1 (и таких результатов, как проблемы 4–5) состоит из 4 шагов (ср. с препринтом статьи [47] на сайте arxiv.org; там другая реализация шагов 1–3):

Шаг 1: вычисление основного вклада в сумму, основанное на асимптотиках (9)–(10);

Шаг 2: оценка вклада тригонометрической суммы;

Шаг 3: оценка остаточного члена, возникающего при замене суммы интегралом;

Шаг 4: оценка вклада слагаемых за пределами того интервала, на котором выполняются формулы (9)–(10).

Доказательство следствия 1 по модулю некоторых лемм. **Шаг 1.** Зафиксируем значения параметров $t, \varepsilon, \delta > 0$, положим $n := 1 + m^2\varepsilon^2$, $F(v) := F(v, m, \varepsilon)$, $V := 1/\sqrt{n} - \delta$, и зафиксируем v в пределах $-V \leq v \leq V$. Докажем, что если t достаточно велико в терминах δ, m, ε , то

$$\sum_{\substack{-Vt < x \leq vt \\ x \in \varepsilon\mathbb{Z}}} P(x, t, m, \varepsilon) = F(v) - F(-V) + O_{\delta, m, \varepsilon}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}}\right). \quad (57)$$

Это утверждение вытекает из последовательности асимптотических формул

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{-V(t+\varepsilon) < x \leq v(t+\varepsilon) \\ x \in \varepsilon \mathbb{Z}}} a_1^2(x, t+\varepsilon, m, \varepsilon) \stackrel{(*)}{=} \sum_{\substack{-V(t+\varepsilon) < x \leq v(t+\varepsilon) \\ (x+t)/\varepsilon \text{ odd}}} \left(\frac{2m\varepsilon^2}{\pi t} \left(1 - \frac{nx^2}{t^2} \right)^{-1/2} \sin^2 \theta(x, t, m, \varepsilon) + O_\delta \left(\frac{\varepsilon^2}{t^2} \right) \right) \\
& \stackrel{(**)}{=} \sum_{\substack{-Vt < x < vt \\ (x+t)/\varepsilon \text{ odd}}} \frac{m\varepsilon^2}{\pi t} \left(1 - \frac{nx^2}{t^2} \right)^{-1/2} - \sum_{\substack{-Vt < x < vt \\ (x+t)/\varepsilon \text{ odd}}} \frac{m\varepsilon^2}{\pi t} \left(1 - \frac{nx^2}{t^2} \right)^{-1/2} \cos 2\theta(x, t, m, \varepsilon) + O_\delta \left(\frac{\varepsilon}{t} \right) \\
& \stackrel{(***)}{=} \sum_{\substack{-Vt < x < vt \\ (x+t)/\varepsilon \text{ odd}}} \frac{m\varepsilon \cdot 2\varepsilon/t}{2\pi \sqrt{1 - nx^2/t^2}} + O_{\delta, m, \varepsilon} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}} \right) \stackrel{****}{=} \int_{-V}^v \frac{m\varepsilon dv}{2\pi \sqrt{1 - nv^2}} + O_{\delta, m, \varepsilon} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}} \right) \\
& = m\varepsilon \frac{\arcsin(\sqrt{nv}) - \arcsin(-\sqrt{nv})}{2\pi\sqrt{n}} + O_{\delta, m, \varepsilon} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}} \right) \quad (58)
\end{aligned}$$

и аналогичной асимптотической формулы

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{-V(t+\varepsilon) < x \leq v(t+\varepsilon) \\ x \in \varepsilon \mathbb{Z}}} a_2^2(x, t+\varepsilon, m, \varepsilon) = \int_{-V}^v \frac{m\varepsilon(1+v)dv}{2\pi(1-v)\sqrt{1-nv^2}} + O_{\delta, m, \varepsilon} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}} \right) \\
& = F(v) - F(-V) - m\varepsilon \frac{\arcsin(\sqrt{nv}) - \arcsin(-\sqrt{nv})}{2\pi\sqrt{n}} + O_{\delta, m, \varepsilon} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}} \right).
\end{aligned}$$

Здесь равенство (*) следует из теоремы 2, ведь для достаточно больших t выполняются неравенства $|x|/t \leq |v|(t+\varepsilon)/t < V + \delta/2 = 1/\sqrt{n} - \delta/2$. При этом произведение главного члена и остаточного члена в (9) оценивается как ε^2/t^2 . Асимптотическая формула (**) выполняется, поскольку число слагаемых меньше t/ε и (возможно) выпавшие первое и последнее слагаемые меньше чем $m\varepsilon^2/t\sqrt{\delta}$.

Шаг 2. Докажем формулу (** *). Мы используем следующую упрощенную версию метода стационарной фазы.

Лемма 17. [26, следствие из теоремы 4] В предположениях леммы 3 (за исключением предположений на $f'(p)$, $g^{(3)}(p)$ и неравенства $N \geq M/\sqrt{T}$), если $M = N$ и $M/C \leq T \leq CM^2$ для некоторого $C > 0$, то

$$\sum_{\alpha < p < \beta} g(p)e(f(p)) = O_{C, C_0, \dots, C_4} \left(\frac{(\beta - \alpha)U\sqrt{T}}{M} + \frac{UM}{\sqrt{T}} \right).$$

Для удобства обозначений будем предполагать, что t/ε нечётно; в противном случае доказательство будет устроено аналогично. С учётом предположения, переменная суммирования может быть представлена в виде $x = 2p\varepsilon$, где p — целое. Применим лемму 17 к функциям

$$f_\pm(p) = \pm \frac{1}{\pi} \theta(2p\varepsilon, t, m, \varepsilon) \quad \text{и} \quad g(p) = \frac{m\varepsilon^2}{\pi t} \left(1 - \frac{4n\varepsilon^2 p^2}{t^2} \right)^{-1/2} \quad (59)$$

и параметрам

$$M = N = T = t/\varepsilon, \quad U = \varepsilon/t, \quad \alpha = -Vt/2\varepsilon, \quad \beta = vt/2\varepsilon. \quad (60)$$

Лемма 18. При $\varepsilon \leq 1/m$ существуют константы C, C_0, \dots, C_4 зависящие от δ, m, ε , но не от v, p такие, что параметры (60) и функции (59) удовлетворяют всем предположениям леммы 17.

Значит, формула (** *) действительно выполняется, поскольку параметры (60) удовлетворяют условию $\frac{(\beta - \alpha)U\sqrt{T}}{M} + \frac{UM}{\sqrt{T}} = O\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}}\right)$.

Шаг 3. Докажем формулу (****). Для этого мы используем следующий известный результат.

Лемма 19 (Формула суммирования Эйлера). [26, замечание к теореме 1] Если $g(p)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и $\rho(p) := 1/2 - \{p\}$, то

$$\sum_{\alpha < p < \beta} g(p) = \int_{\alpha}^{\beta} g(p) dp + \rho(\beta)g(\beta) - \rho(\alpha)g(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} \rho(p)g'(p) dp.$$

Снова предположим без потери общности, что t/ε нечетно. Применим Лемму 19 с теми же $\alpha, \beta, g(p)$ (задаваемыми равенствами (59)–(60)), что и на шаге 2. Согласно Лемме 18 выполняются оценки $g(p) = O_{\delta, m, \varepsilon}(\varepsilon/t)$ и $g'(p) = O_{\delta, m, \varepsilon}(\varepsilon^2/t^2)$. Значит, по Лемме 19 разница между суммой и интегралом в (***) есть $O_{\delta, m, \varepsilon}(\varepsilon/t)$, что доказывает равенство (57).

Шаг 4. Докажем следствие для произвольного $v \in (-1/\sqrt{n}; 1/\sqrt{n})$. Согласно (57), для любых δ, m, ε существуют $C_1(\delta, m, \varepsilon)$ и $C_2(\delta, m, \varepsilon)$ такие, что для любого $v \in [-1/\sqrt{n} + \delta, 1/\sqrt{n} - \delta]$ и любого $t \geq C_1(\delta, m, \varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{(-1/\sqrt{n}+\delta)t < x \leq vt} P(x, t, m, \varepsilon) - F(v) \right| \leq F\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} + \delta\right) + C_2(\delta, m, \varepsilon) \sqrt{\frac{\varepsilon}{t}}.$$

Очевидно, что $C_1(\delta, m, \varepsilon)$ и $C_2(\delta, m, \varepsilon)$ можно считать убывающими функциями от δ : чем больше интервал $[-\frac{1}{\sqrt{n}} + \delta, \frac{1}{\sqrt{n}} - \delta]$, тем хуже оценки остатков в (*–(***)). Выберем $\delta(t)$ стремящимся к 0 достаточно медленно, чтобы $C_1(\delta(t), m, \varepsilon) \leq t$ при t достаточно большом в терминах m, ε и чтобы $C_2(\delta(t), m, \varepsilon) \sqrt{\frac{\varepsilon}{t}} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Положим $V(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} - \delta(t)$. Тогда, так как $F\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} + \delta\right) \rightarrow F\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$ при $\delta \rightarrow 0$ по определению $F(v)$, то

$$\sum_{-V(t)t < x \leq vt} P(x, t, m, \varepsilon) \Rightarrow F(v) \quad \text{при } t \rightarrow \infty \tag{61}$$

равномерно по $v \in (-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}})$. Аналогично, так как $F\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \delta\right) \rightarrow F\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$ при $\delta \rightarrow 0$, то

$$\sum_{-V(t)t < x \leq V(t)t} P(x, t, m, \varepsilon) \rightarrow 1 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Значит, согласно предложению 6,

$$\sum_{x \leq -V(t)} P(x, t, m, \varepsilon) = 1 - \sum_{x > -V(t)} P(x, t, m, \varepsilon) \leq 1 - \sum_{-V(t)t < x \leq V(t)t} P(x, t, m, \varepsilon) \rightarrow 0.$$

Вместе с (61) это доказывает следствие для $v \in (-1/\sqrt{n}; 1/\sqrt{n})$. Для $v \leq -1/\sqrt{n}$ и аналогично для $v \geq 1/\sqrt{n}$, следствие вытекает из оценки

$$\sum_{x \leq vt} P(x, t, m, \varepsilon) \leq \sum_{x \leq -V(t)t} P(x, t, m, \varepsilon) \rightarrow 0.$$

□

Докажем теперь лемму 18 и следствия 2, 3.

Доказательство леммы 18. Неравенства $M/C \leq T \leq CM^2$ и $M \geq \beta - \alpha$ автоматически выполняются при $C = 1$, поскольку t/ε — натуральное число и $|V|, |v| \leq 1$. Используя предположения $\varepsilon \leq 1/m$, $\alpha \leq p \leq \beta$, и полагая $C_2 := \max\{1/m\varepsilon, 2/\delta^{3/2}\}$ оценим производ-

ные (вычисленные в [44, §9]) следующим образом:

$$\begin{aligned}
|g(p)| &= \frac{m\varepsilon^2}{\pi t} \left(1 - \frac{4n\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-1/2} \leq \frac{m\varepsilon^2}{\pi t \sqrt{1-nV^2}} \leq \frac{m\varepsilon^2}{t\sqrt{\delta}} \leq \frac{\varepsilon}{t\sqrt{\delta}} = O_\delta(U), \\
|g^{(1)}(p)| &= \frac{4m\varepsilon^4 n |p|}{\pi t^3} \left(1 - \frac{4n\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-3/2} \leq \frac{2m\varepsilon^3 n V t}{\pi t^3 (1-nV^2)^{3/2}} \leq \frac{m\varepsilon^3 n}{t^2 \delta^{3/2}} = O_\delta\left(\frac{U}{N}\right), \\
|g^{(2)}(p)| &= \frac{4m\varepsilon^4 n (8\varepsilon^2 np^2 + t^2)}{\pi t^5} \left(1 - \frac{4n\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-5/2} \leq \frac{4m\varepsilon^4 n (2nV^2 + 1)t^2}{\pi t^5 (1-nV^2)^{5/2}} = O_\delta\left(\frac{\varepsilon^3}{t^3}\right) = O_\delta\left(\frac{U}{N^2}\right), \\
|f^{(2)}(p)| &= \frac{4m\varepsilon^2}{\pi t} \left(1 - \frac{4\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{4n\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-1/2} \geq \frac{m\varepsilon^2}{t} \geq \frac{T}{C_2 M^2}, \\
|f^{(2)}(p)| &= \frac{4m\varepsilon^2}{\pi t} \left(1 - \frac{4\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{4n\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-1/2} \leq \frac{4m\varepsilon^2}{\pi t (1-V^2) \sqrt{1-nV^2}} \leq \frac{2m\varepsilon^2}{t \delta^{3/2}} \leq \frac{C_2 T}{M^2}, \\
|f^{(3)}(p)| &= \frac{16m\varepsilon^4 |(n+2)pt^2 - 12n\varepsilon^2 p^3|}{\pi t^5} \left(1 - \frac{4\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-2} \left(1 - \frac{4n\varepsilon^2 p^2}{t^2}\right)^{-3/2} = O_\delta\left(\frac{T}{M^3}\right), \\
|f^{(4)}(p)| &= \frac{16m\varepsilon^4 |768n^2\varepsilon^6 p^6 - 48n(2n+5)\varepsilon^4 p^4 t^2 + 8(n^2-n+3)\varepsilon^2 p^2 t^4 + (n+2)t^6|}{\pi t^9 (1-4\varepsilon^2 p^2/t^2)^3 (1-4n\varepsilon^2 p^2/t^2)^{5/2}} = O_\delta\left(\frac{T}{M^4}\right).
\end{aligned}$$

□

Доказательство следствия 2. Диаграммы Юнга с h строками и w столбцами находятся в очевидной биекции с путями шашки из $(0,0)$ в $(w-h, w+h)$, проходящими через $(1,1)$ и $(w-h+1, w+h-1)$. Поэтому $n_+(h \times w) - n_-(h \times w) = -2^{(w+h-1)/2} a_1(w-h, w+h)$. Положим $h := \lceil rw \rceil$. Применим теорему 2 и замечание 9 (или теорему 4) с

$$\delta = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{r-1}{r+1} \right|, \quad m = \varepsilon = 1, \quad x = w-h, \quad t = w+h-1.$$

Это завершает доказательство в случае $r > 3+2\sqrt{2}$. Остается показать, что при $r < 3+2\sqrt{2}$ величина (11) при $w \rightarrow \infty$ будет попадать в сколь угодно малые окрестности точек $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

Пусть $v := \frac{h-w}{w+h-1}$, $v_0 := \frac{r-1}{r+1}$ и

$$\theta(vt, t, 1, 1) = t \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{2-2v^2}} - v \arcsin \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right) + \frac{\pi}{4} =: t\theta(v) + \frac{\pi}{4}.$$

Так как $\theta(v) \in C^2[0; 1/\sqrt{2} - \delta]$, то можно записать разложение в ряд Тейлора

$$\theta(vt, t, 1, 1) = \frac{\pi}{4} + t\theta(v_0) + t(v-v_0)\theta'(v_0) + O_\delta(t(v-v_0)^2).$$

Подставляя в него

$$v - v_0 = \frac{h-w}{w+h-1} - \frac{r-1}{r+1} = \frac{2h-2rw+r-1}{(r+1)(w+h-1)} = \frac{2\{-rw\}+r-1}{(r+1)t},$$

где $h = \lceil rw \rceil = rw + \{-rw\}$, получаем, что

$$\begin{aligned}
\theta(vt, t, 1, 1) &= \frac{\pi}{4} + (w+rw+\{-rw\}-1)\theta(v_0) + \frac{2\{-rw\}+r-1}{(r+1)}\theta'(v_0) + O_\delta\left(\frac{1}{w}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} - \theta(v_0) + v_0\theta'(v_0) + w(r+1)\theta(v_0) + \{-rw\} \left(\theta(v_0) + \frac{2}{(r+1)}\theta'(v_0) \right) + O_\delta\left(\frac{1}{w}\right) \\
&=: \pi(\alpha(r)w + \beta(r)\{-rw\} + \gamma(r)) + O_\delta\left(\frac{1}{w}\right).
\end{aligned}$$

Почти для всех r числа $1, r, \alpha(r)$ линейно независимы над полем рациональных чисел, потому что график функции $\alpha(r) = (r+1)\theta\left(\frac{r-1}{r+1}\right)$ имеет лишь счетное число точек пересечения с прямыми, задаваемыми уравнениями с рациональными коэффициентами. Следовательно, по теореме Кронекера для любого $\Delta > 0$ существует бесконечно много w таких, что

$$\{-rw\} < \Delta \quad \text{и} \quad |\{\alpha(r)w\} + \gamma(r) - \frac{1}{2}| < \Delta.$$

Для таких w

$$|\sin \theta(vt, t, 1, 1)| = 1 + O((1 + \beta(r))\Delta) + O_\delta(\frac{1}{w}) \quad \text{и} \quad 2^{(r+1)w/2} \leq 2^{(w+h)/2} \leq 2^{(r+1)w/2+\Delta},$$

таким образом, утверждение следствия вытекает из (9). \square

Выведем утверждение следствия 3 из результатов работы [47].

Доказательство следствия 3. Применим следствие 1.5 и теорему 1.1 из [47] с

$$n = t/\varepsilon - 1, \quad y_n = 2\varepsilon \left\lceil \frac{vt}{2\varepsilon} \right\rceil - 1, \quad \xi = v, \quad \phi = (0, 1)^T, \quad a = 1/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}, \quad b = m\varepsilon/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}.$$

Тогда в случае $|v| > 1/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}$ нужное утверждение непосредственно вытекает из следствия 1.5 из [47]. В случае $|v| < 1/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}$ нужное утверждение вытекает из оценок

$$\frac{2m\varepsilon^2}{\pi t(1-v)} \sqrt{\frac{a-|v|}{a+|v|}} + O_{m,\varepsilon,v}\left(\frac{1}{t^2}\right) \leq P\left(2\varepsilon \left\lceil \frac{vt}{2\varepsilon} \right\rceil, t, m, \varepsilon\right) \leq \frac{2m\varepsilon^2}{\pi t(1-v)} \sqrt{\frac{a+|v|}{a-|v|}} + O_{m,\varepsilon,v}\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad (62)$$

где $t \in 2\varepsilon\mathbb{Z}$ и $a := 1/\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}$. Оценки (62) следуют из теоремы 1.1 работы [47], так как фигурирующая там величина $\text{OSC}_n(\xi)$ допускает оценку $|\text{OSC}_n(\xi)| \leq \sqrt{A(\xi)^2 + B(\xi)^2} = |\xi|(1 + \xi)/|a|$ (см. проверку этого факта в [44, §18]). \square

Оценки (62) могут быть также получены с помощью теоремы 2 методом из §12.5.

12.5 Решение проблемы Фейнмана: разложения в ряды Тейлора (следствия 4–5)

В этом разделе с помощью теоремы 2 мы получим решение проблемы Фейнмана. Для этого будет достаточно приблизить функции, фигурирующие в теореме 2, отрезками рядов Тейлора.

Доказательство следствия 4. Сначала выведем асимптотическую формулу для функции $\theta(x, t, m, \varepsilon)$, заданной равенством (11). Положим $n := 1 + m^2\varepsilon^2$. Тогда $1/\sqrt{1 + z^2} = 1 + O(z^2)$, $\arcsin z = z + O(z^3)$ при $z \in [-1; 1]$, и $t/\sqrt{t^2 - x^2} < 1/\sqrt{1 - \sqrt{nx}/t} < 1/\sqrt{\delta}$. Значит,

$$\arcsin \frac{m\varepsilon t}{\sqrt{n(t^2 - x^2)}} = \frac{m\varepsilon t}{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}\sqrt{t^2 - x^2}} + O\left(\frac{m^3\varepsilon^3}{n^{3/2}} \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - x^2}}\right)^3\right) = \frac{m\varepsilon t}{\sqrt{t^2 - x^2}} + O_\delta(m^3\varepsilon^3).$$

Пользуясь аналогичной асимптотической формулой для $\arcsin \frac{m\varepsilon x}{\sqrt{t^2 - x^2}}$, получаем, что

$$\theta(x, t, m, \varepsilon) = \frac{mt^2}{\sqrt{t^2 - x^2}} - \frac{mx^2}{\sqrt{t^2 - x^2}} + \frac{\pi}{4} + \left(\frac{t + |x|}{\varepsilon}\right) O_\delta(m^3\varepsilon^3) = m\sqrt{t^2 - x^2} + \frac{\pi}{4} + O_\delta(m^3\varepsilon^2 t).$$

Так как

$$\left| \frac{\partial \sqrt{t^2 - x^2}}{\partial t} \right| = \frac{t}{\sqrt{t^2 - x^2}} < \frac{1}{\sqrt{\delta}} \quad \text{и} \quad \left| \frac{\partial \sqrt{t^2 - x^2}}{\partial x} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{t^2 - x^2}} < \frac{1}{\sqrt{\delta}},$$

то из теоремы Лагранжа о конечном приращении следует, что

$$\begin{aligned} \theta(x, t - \varepsilon, m, \varepsilon) &= m\sqrt{t^2 - x^2} + \frac{\pi}{4} + O_\delta(m\varepsilon + m^3\varepsilon^2 t), \\ \theta(x - \varepsilon, t - \varepsilon, m, \varepsilon) &= m\sqrt{t^2 - x^2} + \frac{\pi}{4} + O_\delta(m\varepsilon + m^3\varepsilon^2 t). \end{aligned}$$

Рассмотрим оставшиеся сомножители в (9)–(10). По теореме Лагранжа, для некоторого $\eta \in [0, nx^2/t^2]$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{nx^2}{t^2}\right)^{-1/4} - 1 &= \frac{nx^2}{t^2} \frac{(1-\eta)^{-5/4}}{4} \leq \frac{nx^2}{t^2} \left(1 - \frac{nx^2}{t^2}\right)^{-5/4} \\ &\leq \frac{x^2}{t^2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{x}{t}\right)^{-5/4} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{x}{t}\right)^{-5/4} \leq \frac{x^2}{t^2} \delta^{-5/2} = O_\delta\left(\frac{|x|}{t}\right). \end{aligned}$$

Значит, при $t \geq 2\varepsilon$

$$\left(1 - \frac{nx^2}{(t-\varepsilon)^2}\right)^{-1/4} = 1 + O_\delta\left(\frac{|x|}{t}\right) \quad \text{и} \quad \left(1 - \frac{n(x-\varepsilon)^2}{(t-\varepsilon)^2}\right)^{-1/4} = 1 + O_\delta\left(\frac{|x|+\varepsilon}{t}\right). \quad (63)$$

Кроме того,

$$\sqrt{\frac{t-\varepsilon+x-\varepsilon}{t-x}} = \sqrt{1 + 2\frac{x-\varepsilon}{t-x}} = 1 + O\left(\frac{x-\varepsilon}{t-x}\right) = 1 + O_\delta\left(\frac{|x|+\varepsilon}{t}\right). \quad (64)$$

Подставляя все полученные асимптотические формулы в (9)–(10), приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a(x, t, m, \varepsilon) &= \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi t}} \left(\sin\left(m\sqrt{t^2-x^2} + \frac{\pi}{4}\right) + O_\delta\left(\frac{1}{mt} + \frac{|x|+\varepsilon}{t} + m\varepsilon + m^3\varepsilon^2t\right) \right), \\ \operatorname{Im} a(x, t, m, \varepsilon) &= \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi t}} \left(\cos\left(m\sqrt{t^2-x^2} + \frac{\pi}{4}\right) + O_\delta\left(\frac{1}{mt} + \frac{|x|+\varepsilon}{t} + m\varepsilon + m^3\varepsilon^2t\right) \right). \end{aligned}$$

По предположению $\varepsilon \leq 1/m$. Значит, $m\varepsilon \leq \frac{1}{mt} + m^3\varepsilon^2t$ и $\frac{\varepsilon}{t} \leq \frac{1}{mt}$, что позволяет переписать остаточные члены в нужном виде. \square

Доказательство следствия 5. Для доказательства равенства (22) достаточно в утверждение следствия 4 подставить асимптотическую формулу

$$\sqrt{t^2-x^2} = t \left(1 - \frac{x^2}{2t^2} + O_\delta\left(\frac{x^4}{t^4}\right)\right), \quad \text{где} \quad \frac{|x|}{t} < 1 - \delta.$$

\square

Доказательство утверждения из примера 4. В случае, когда $(x_n, t_n, \varepsilon_n) = (n^3, n^4, 1/n^4)$, нужное утверждение получается подстановкой в следствие 4 разложения

$$\sqrt{t^2-x^2} = t \left(1 - \frac{x^2}{2t^2} - \frac{x^4}{8t^4} + O\left(\frac{x^6}{t^6}\right)\right), \quad \text{где} \quad \frac{|x|}{t} \leq \frac{1}{2}.$$

В остальных случаях нам необходимо оценить функцию $\theta(\varepsilon, t, m, \varepsilon)$, задаваемую равенством (11), при $t \geq 2\varepsilon$ и $\varepsilon \leq 1/m$. Для таких t, m, ε

$$\begin{aligned} m\varepsilon t / \sqrt{(1+m^2\varepsilon^2)(t^2-\varepsilon^2)} &\leq \sqrt{2/3}, \\ \arcsin z - \arcsin w &= O(z-w) \quad (\text{при } 0 < w < z < \sqrt{2/3}), \\ 1/\sqrt{1-z^2} - 1 &= O(z^2) \quad (\text{при } |z| \leq 1/2). \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \theta(\varepsilon, t, m, \varepsilon) - \theta(0, t, m, \varepsilon) &= \\ &= \frac{t}{\varepsilon} \arcsin \frac{m\varepsilon t}{\sqrt{(1+m^2\varepsilon^2)(t^2-\varepsilon^2)}} - \frac{t}{\varepsilon} \arcsin \frac{m\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} - \arcsin \frac{m\varepsilon^2}{\sqrt{t^2-\varepsilon^2}} = O\left(\frac{m\varepsilon^2}{t}\right) = O\left(\frac{1}{mt}\right). \end{aligned}$$

Применим теорему 2 и формулы (63)–(64) при $x = 0$ и $\delta = 1/\sqrt{2}$. Получим, что

$$a(0, t, m, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\frac{2m}{\pi t}} \exp \left(-i \left(\frac{t}{\varepsilon} - 1 \right) \arctan(m\varepsilon) + \frac{i\pi}{4} \right) \left(1 + O \left(\frac{1}{mt} \right) \right). \quad (65)$$

В случае, когда $\varepsilon = \varepsilon_n = 1/2n$ и $t = t_n = (2n)^2$, выполняется равенство $\arctan(m\varepsilon) = m\varepsilon - m^3\varepsilon^3/3 + O(m^5\varepsilon^5)$. Поэтому правая часть (65) эквивалентна правой части (5), умноженной на $e^{im^3/3}$.

В случае, когда $\varepsilon = \varepsilon_n = \text{const}$ и $t = t_n = 2n\varepsilon$, отношение правых частей (65) и (5) не имеет предела, поскольку разность $\arctan(m\varepsilon) - m\varepsilon$ не кратна π при $0 < \varepsilon < 1/m$. \square

12.6 Непрерывный предел: метод смены хвостов (теорема 5 и следствия 6–7)

Доказательство теоремы 5. Доказательство основано на *методе смены хвостов* и состоит из 5 шагов:

Шаг 1: отбрасывание нормирующего множителя в (6)–(7).

Шаг 2: отбрасывание слагаемых в (6)–(7), начиная с номера T (мы возьмём $T = \lceil \log \frac{\delta}{\varepsilon} \rceil$).

Шаг 3: замена биномиальных коэффициентов степенями в оставшихся слагаемых.

Шаг 4: замена получившихся сумм степенными рядами.

Шаг 5: объединение оценок остаточных членов, полученных на предыдущих шагах, для получения оценки итогового остаточного члена.

Выведем асимптотику для $a_1(x, t, m, \varepsilon)$; доказательство для $a_2(x, t, m, \varepsilon)$ аналогично.

Шаг 1. Рассмотрим первый множитель в (6). Имеем $0 \geq (1 - t/\varepsilon)/2 \geq -t/\varepsilon$, так как $t \geq \delta \geq \varepsilon$. Возводя $(1 + m^2\varepsilon^2)$ в соответствующие степени, получаем

$$1 \geq (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} \geq (1 + m^2\varepsilon^2)^{-t/\varepsilon} \geq e^{-m^2\varepsilon^2 t/\varepsilon} \geq 1 - m^2 t \varepsilon,$$

где в последних двух неравенствах мы использовали тот факт, что $e^a \geq 1 + a$ для любого $a \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$(1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} = 1 + O(m^2 t \varepsilon).$$

Шаг 2. Рассмотрим T -ю частичную сумму в (6) с $T = \lceil \log \frac{\delta}{\varepsilon} \rceil$ слагаемыми. Общее число слагаемых действительно не меньше, чем T , так как $(t - |x|)/2\varepsilon \geq \delta/2\varepsilon \geq \log(\delta/\varepsilon)$, ввиду неравенств $t - |x| \geq \delta > \varepsilon$ и $e^a \geq 1 + a + a^2/2 \geq 2a$ для любого $a \geq 0$.

Для $r \geq T$ отношение двух последовательных слагаемых в (6) равняется

$$(m\varepsilon)^2 \frac{((t+x)/2\varepsilon - 1 - r)((t-x)/2\varepsilon - 1 - r)}{(r+1)^2} < (m\varepsilon)^2 \cdot \frac{(t+x)}{2\varepsilon T} \cdot \frac{(t-x)}{2\varepsilon T} = \frac{m^2 s^2}{4T^2} < \frac{1}{2},$$

где последнее неравенство следует из того, что $T = \lceil \log \frac{\delta}{\varepsilon} \rceil > \lceil \log e^{3ms} \rceil \geq 3ms$. Следовательно, остаточный член (т.е., сумма по $r \geq T$) меньше, чем сумма геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$. Следовательно, из предложения 11 имеем

$$\begin{aligned} a_1(x, t, m, \varepsilon) &= m\varepsilon (1 + O(m^2 t \varepsilon)) \cdot \left[\sum_{r=0}^{T-1} (-1)^r \binom{(t+x)/2\varepsilon - 1}{r} \binom{(t-x)/2\varepsilon - 1}{r} (m\varepsilon)^{2r} + \right. \\ &\quad \left. + O \left(\binom{(t+x)/2\varepsilon - 1}{T} \binom{(t-x)/2\varepsilon - 1}{T} (m\varepsilon)^{2T} \right) \right]. \end{aligned}$$

Шаг 3. Чтобы аппроксимировать сумму, возьмём целые $L := (t \pm x)/2\varepsilon$, $r < T$, и преобразуем биномиальные коэффициенты следующим образом:

$$\binom{L-1}{r} = \frac{(L-1)\cdots(L-r)}{r!} = \frac{L^r}{r!} \left(1 - \frac{1}{L}\right) \cdots \left(1 - \frac{r}{L}\right).$$

Здесь

$$\frac{r}{L} = \frac{2r\varepsilon}{t \pm x} < \frac{2T\varepsilon}{\delta} = \frac{2\varepsilon}{\delta} \left[\log \frac{\delta}{\varepsilon} \right] \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} \left(\log \frac{\delta}{\varepsilon} + 1 \right) < \frac{1}{2},$$

так как $\delta/\varepsilon \geq 16$, а $2(\log a + 1)/a$ убывает при $a \geq 16$ и меньше $1/2$ при $a = 16$. Применяя неравенство $1 - a \geq e^{-2a}$ при $0 \leq a \leq 1/2$, а потом — неравенства $1 - a \leq e^{-a}$ и $L \geq \delta/2\varepsilon$, получаем

$$\left(1 - \frac{1}{L}\right) \cdots \left(1 - \frac{r}{L}\right) \geq e^{-2/L} e^{-4/L} \cdots e^{-2r/L} = e^{-r(r+1)/L} \geq e^{-T^2/L} \geq 1 - \frac{T^2}{L} \geq 1 - \frac{2T^2\varepsilon}{\delta}.$$

Следовательно,

$$\frac{(t \pm x)^r}{r!(2\varepsilon)^r} \geq \binom{(t \pm x)/2\varepsilon - 1}{r} \geq \frac{(t \pm x)^r}{r!(2\varepsilon)^r} \left(1 - \frac{2T^2\varepsilon}{\delta}\right).$$

Подставляя результат в выражение для $a_1(x, t, m, \varepsilon)$ из шага 2, получаем

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = m\varepsilon \left(1 + O(m^2 t \varepsilon)\right) \cdot \left[\sum_{r=0}^{T-1} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r} \frac{(t^2 - x^2)^r}{(r!)^2} \left(1 + O\left(\frac{T^2\varepsilon}{\delta}\right)\right) + O\left(\left(\frac{m}{2}\right)^{2T} \frac{(t^2 - x^2)^T}{(T!)^2} \left(1 + \frac{T^2\varepsilon}{\delta}\right)\right) \right].$$

Последний остаточный член оценивается следующим образом. Так как $T! \geq (T/3)^T$ и

$$T \geq \log \frac{\delta}{\varepsilon} \geq 3m\sqrt{t^2 - x^2} \geq \frac{3m}{2}\sqrt{t^2 - x^2}\sqrt{e},$$

получаем

$$\frac{(t^2 - x^2)^T}{(T!)^2} \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^{2T} \leq \frac{(t^2 - x^2)^T}{(T!)^{2T}} \cdot \left(\frac{3m}{2}\right)^{2T} \leq e^{-T} \leq \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Имеем $(\varepsilon/\delta)(1 + T^2\varepsilon/\delta) = O(T^2\varepsilon/\delta)$, так как $T \geq 1$ и $\varepsilon < \delta$. Следовательно, искомый остаточный член может быть включен в $O(T^2\varepsilon/\delta)$. Имеем

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = m\varepsilon \left(1 + O(m^2 t \varepsilon)\right) \cdot \sum_{r=0}^{T-1} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r} \frac{(t^2 - x^2)^r}{(r!)^2} \left(1 + O\left(\frac{T^2\varepsilon}{\delta}\right)\right).$$

Заметим, что по нашему соглашению об обозначениях, константа в $O(T^2\varepsilon/\delta)$ не зависит от r .

Шаг 4. Теперь мы можем заменить сумму из T слагаемых рядом, так как "хвост" знакопеременного ряда, у которого модуль слагаемых убывает, можно оценить первым слагаемым (которое мы только что оценили):

$$\left| \sum_{r=T}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r} \frac{(t^2 - x^2)^r}{(r!)^2} \right| \leq \frac{(t^2 - x^2)^T}{(T!)^2} \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^{2T} \leq \frac{\varepsilon}{\delta} = O\left(\frac{T^2\varepsilon}{\delta}\right).$$

Так как константа в каждом слагаемом $O\left(\frac{T^2\varepsilon}{\delta}\right)$ одинакова (см. шаг 3), имеем

$$\begin{aligned} a_1(x, t, m, \varepsilon) &= m\varepsilon \left(1 + O(m^2 t \varepsilon)\right) \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r} \frac{(t^2 - x^2)^r}{(r!)^2} \left[1 + O\left(\frac{T^2\varepsilon}{\delta}\right)\right] \\ &= m\varepsilon \left(1 + O(m^2 t \varepsilon)\right) \cdot \left(J_0(ms) + O\left(\frac{T^2\varepsilon}{\delta} I_0(ms)\right)\right), \end{aligned}$$

здесь мы используем *модифицированные функции Бесселя первого рода*:

$$I_0(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2}, \quad I_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}.$$

Шаг 5. Имеем $m^2 t \delta \leq m^2(t + |x|)(t - |x|) = m^2 s^2 \leq 9m^2 s^2 \leq T^2$. Следовательно, $m^2 t \varepsilon J_0(ms) \leq T^2 \varepsilon I_0(ms)/\delta$ и $m^2 t \varepsilon \leq T^2 \varepsilon/\delta < (\log(\delta/\varepsilon) + 1)^2 \varepsilon/\delta < 2$, так как $(a+1)^2/2 < e^a$ при $a \geq 0$. Получаем следующую формулу:

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) = m\varepsilon \left(J_0(ms) + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta} \log^2 \frac{\delta}{\varepsilon} I_0(ms)\right) \right).$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} a_2(x, t, m, \varepsilon) &= m\varepsilon \left(1 + O(m^2 t \varepsilon) \right) \cdot \frac{t+x}{\sqrt{t^2-x^2}} \cdot \sum_{r=1}^{T-1} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r-1} \frac{(t^2-x^2)^{\frac{2r-1}{2}}}{(r-1)! r!} \left[1 + O\left(\frac{T^2 \varepsilon}{\delta}\right) \right] \\ &= -m\varepsilon \cdot \frac{t+x}{s} \left(J_1(ms) + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta} \log^2 \frac{\delta}{\varepsilon} I_1(ms)\right) \right). \end{aligned}$$

Получаем искомую асимптотику для $a(x, t, m, \varepsilon)$, так как

$$\begin{aligned} I_0(ms) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ms/2)^{2k}}{k!} = e^{m^2 s^2/4} \leq e^{m^2 t^2}, \\ \frac{t+x}{s} I_1(ms) &\leq \frac{t+x}{s} \cdot \frac{ms}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ms/2)^{2k}}{k!} = m \frac{t+x}{2} e^{m^2 s^2/4} \leq mt e^{m^2 t^2/4} \leq e^{m^2 t^2/2} e^{m^2 t^2/4} \leq e^{m^2 t^2}. \end{aligned} \quad \square$$

Доказательство следствия 6. Утверждение следует из теоремы 5, так как правая часть (23) равномерно непрерывна на каждом компактном подмножестве угла $|x| < t$. \square

Доказательство следствия 7. Так как правая часть (23) непрерывна на $[-t+\delta; t-\delta]$, то она ограничена на этом множестве. Так как последовательность, равномерно сходящаяся к ограниченной функции, равномерно ограничена, из следствия 6 модуль левой части (23) меньше некоторой константы $C_{t,m,\delta}$, зависящей от t, m, δ , но независящей от x, ε . Теперь из предложения 6 для $t/2\varepsilon \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}: |x| \geq t-\delta} P(x, t, m, \varepsilon) &= \sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}: |x| < t-\delta} P(x, t, m, \varepsilon) = \sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}: |x| < t-\delta} 4\varepsilon^2 \left| \frac{1}{2\varepsilon} a(x, t, m, \varepsilon) \right|^2 \\ &< 4\varepsilon^2 C_{t,m,\delta}^2 \frac{t-\delta}{\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad \square$$

12.7 Вероятность смены хиральности: комбинаторные тождества (теорема 6)

Хотя теорему 6 можно вывести из (58), приведем прямое доказательство, опирающееся только на §12.1.

Доказательство теоремы 6. Обозначим

$$S_1(t) = \sum_x a_1^2(x, t); \quad S_2(t) = \sum_x a_2^2(x, t); \quad S_{12}(t) = \sum_x a_1(x, t) a_2(x, t).$$

Согласно предложениям 1, 8 и 9 получаем

$$a_1(0, 2t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_x a_1(x, t)(a_2(x, t) - a_1(x, t)) + a_2(x, t)(a_2(x, t) + a_1(x, t)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_2(t) + 2S_{12}(t) - S_1(t)).$$

По определению и предложению 1 получаем

$$S_1(t+1) - S_2(t+1) = 2S_{12}(t).$$

Тогда

$$S_1(t+1) - S_2(t+1) = S_1(t) - S_2(t) + a_1(0, 2t)\sqrt{2}.$$

Так как $S_1(t) + S_2(t) = 1$ по предложению 2, то мы получаем рекуррентную формулу $S_1(t+1) = S_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}a_1(0, 2t)$; ср. [23, (33)]. Из предложения 4 по индукции следует, что

$$S_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor t/2 \rfloor - 1} \frac{1}{(-4)^k} \binom{2k}{k}.$$

По биному Ньютона мы получаем $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ для всех $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Подставляя $x = -\frac{1}{4}$, мы получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor t/2 \rfloor - 1} \binom{2k}{k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. С помощью формулы Стирлинга оцениваем скорость сходимости:

$$\left| \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, t)^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right| < \frac{1}{2 \cdot 4^{\lfloor t/2 \rfloor}} \binom{2\lfloor t/2 \rfloor}{\lfloor t/2 \rfloor} < \frac{e}{2\pi\sqrt{2\lfloor t/2 \rfloor}} < \frac{1}{2\sqrt{t}}. \quad \square$$

Подводные камни

Наконец, предупредим математически ориентированного читателя. Выдающиеся работы [1, 29, 30] написаны настолько хорошо, что физические теоремы и доказательства в них могут быть неосторожно приняты за математические, хотя некоторые из них неверны в том виде, как написаны. Основной источник этих проблем состоит, на самом деле, в применении неверной теоремы из математической статьи [9, теорема 3.3].

Простой контрпример к [9, теорема 3.3]: $a = b = \alpha = \beta = x = 0$ и нечетное n . Эти значения автоматически удовлетворяют предположениям теоремы, то есть, условию (ii) из [9, леммы 3.1]. Тогда по замечанию 3 и предложению 4 левая часть равенства [9, (2.16)] обращается в ноль. Поэтому она не может быть эквивалентна ненулевой последовательности в правой части. Здесь мы интерпретируем знак “ \approx ” в [9, (2.16)] как эквивалентность последовательностей, следуя [29]. Попытка интерпретировать знак как стремление к нулю разности левой и правой части равенства [9, (2.16)] обесценила бы результат, так как каждая из частей очевидным образом стремится к нулю по отдельности.

Хотя [1, 29, 30] отмечают небольшие ошибки в [9], проблема более серьезна. Известные асимптотики для многочленов Якоби никогда не формулируются как эквивалентность, а вместо этого содержат аддитивный остаточный член. Его оценка трудна даже в частных случаях, изучаемых в [32], а случай из замечания 3 отмечается, как более сложный [32, внизу стр. 198]. Поэтому [9, теорема 3.3] нужно рассматривать как интересный физический, а не математический результат.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение №075-15-2019-1619. Работа была опробована в 2019 году как курсы на летней конференции Турнира городов в Арандженоваце, летней школе “Современная математика” в Дубне, факультете математики Высшей школы экономики в Москве и Независимом Московском Университете. Авторы благодарны всем участникам этих мероприятий за их вклад, особенно А. Воропаеву, М. Дмитриеву, И. Новикову, Ф. Ожегову за многочисленные замечания и перевод на русский язык, Е. Ахмедовой, Р. Валиевой за набор некоторых частей текста, И. Богданову, И. Гайдай-Турлову, А. Даниярходжаеву, Т. Ковалеву, Ф. Куянову, Г. Минаеву, И. Русских, В. Скопенковой, М. Федорову за некоторые рисунки, А. Кудрявцеву, А. Львову за приложения (этим двум авторам было тогда

меньше 16 лет). Авторы благодарны за полезные обсуждения В. Акулину, Т. Батеневу, А. Белавину, М. Берштейну, М. Бланку, А. Бородину, В. Бухштаберу, Л. Веласкесу, А. Вершику, Т. Джекобсону, И. Дынникову, П. Закорко, И. Ибрагимову, И. Иванову, Д.У. Киму, Е. Колпакову, А. Куиджлаарсу, С. Ландо, М. Лицшицу, М. Маеда, В. Назайкинскому, С. Нечаеву, С. Новикову, Г. Ольшанскому, Ю. Петровой, И. Полехину, П. Пылявскому, А. Рыбко, И. Сабитову, А. Семенову, Т. Татэ, С. Тихомирову, Д. Трещеву, М. Христофорову, Г. Челнокову, В. Чернышову, С. Шлосману, Л. Шульману.

A A. Кудрявцев. Альтернативные «явные» формулы

Положим $\binom{n}{k} := 0$ для целых $k < 0 < n$ или $k > n > 0$. Обозначим $\theta(x) := \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$

Предложение 18 («Явная» формула). Для всех целых $|x| < t$, таких что $x + t$ четно, выполнено:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}) \quad a_1(x, t) &= 2^{(1-t)/2} \sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-2)^r \binom{(x+t-2)/2}{r} \binom{t-r-2}{(x+t-2)/2}, \\ a_2(x, t) &= 2^{(1-t)/2} \sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-2)^r \binom{(x+t-2)/2}{r} \binom{t-r-2}{(x+t-4)/2}; \\ (\mathbf{B}) \quad a_1(x, t) &= 2^{(1-t)/2} \sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-1)^r \binom{(t-|x|-2)/2}{r} \binom{|x|}{(t+|x|-4r-2)/2}, \\ a_2(x, t) &= 2^{(1-t)/2} \sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-1)^r \binom{(t-|x|-2)/2}{r - \theta(x)} \binom{|x|}{(t+|x|-4r)/2}. \end{aligned}$$

Доказательство предложения 18(A). Введем производящие функции

$$\hat{a}_1(p, q) := 2^{n/2} \sum_{n>k\geq 0} a_1(2k-n+1, n+1)p^k q^n \quad \text{и} \quad \hat{a}_2(p, q) := 2^{n/2} \sum_{n>k\geq 0} a_1(2k-n+1, n+1)p^k q^n.$$

По предложению 1 получаем следующие уравнения:

$$\begin{cases} \hat{a}_1(p, q) - \hat{a}_1(p, 0) = q \cdot (\hat{a}_2(p, q) + \hat{a}_1(p, q)) \\ \hat{a}_2(p, q) - \hat{a}_2(p, 0) = pq \cdot (\hat{a}_2(p, q) - \hat{a}_1(p, q)) \end{cases}$$

Так как $\hat{a}_1(p, 0) = 0$ и $\hat{a}_2(p, 0) = 1$, то решив систему, получим

$$\hat{a}_2(p, q) = \frac{1-q}{1-q-pq+2pq^2} \quad \text{и} \quad \hat{a}_1(p, q) = \frac{q}{1-q-pq+2pq^2} = q + q^2(1+p-2pq) + q^3(1+p-2pq)^2 + \dots$$

Коэффициент при $p^k q^n$ в $\hat{a}_1(p, q)$ равен

$$\sum_{j=\max(k, n-k)}^n (-2)^{n-j-1} \cdot \binom{j}{n-j-1 \quad k-n+j+1 \quad j-k},$$

так как из каждого слагаемого вида $q^{j+1}(1+p-2pq)^j$ берется ровно одна комбинация множителей:

- чтобы степень при q была равна n , множителей $-2pq$ должно быть $n-j-1$;
- чтобы степень при p была равна k , множителей p должно быть $k-(n-j-1)$;
- чтобы всего множителей было j , множителей 1 должно быть $j-(k-(n-j-1))-(n-j-1)=j-k$.

Заменяя переменную суммирования на $r = n - j - 1$, получаем требуемое выражение для $a_1(x, t)$.

Выражение для $a_2(x, t)$ следует из выражения для $a_1(x, t)$, предложения 1 и правила Паскаля:

$$\begin{aligned} a_2(x, t) &= \sqrt{2} a_1(x - 1, t + 1) - a_1(x, t) \\ &= 2^{(1-t)/2} \sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-2)^r \binom{(x+t-2)/2}{r} \left(\binom{t-r-1}{(x+t-2)/2} - \binom{t-r-2}{(x+t-2)/2} \right) \\ &= 2^{(1-t)/2} \sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-2)^r \binom{(x+t-2)/2}{r} \binom{t-r-2}{(x+t-4)/2}. \end{aligned}$$

□

Доказательство предложения 18(B). (А. Воропаев) Согласно предложению 4, для всех $|x| < t$ числа $a_1(x, t)$ и $a_2(x, t)$ равны коэффициентам при $z^{(t-x-2)/2}$ и $z^{(t-x)/2}$ в разложении многочлена

$$2^{(1-t)/2}(1+z)^{(t-x-2)/2}(1-z)^{(t+x-2)/2} = \begin{cases} 2^{(1-t)/2}(1-z^2)^{\frac{t-x-2}{2}}(1-z)^x, & \text{при } x \geq 0; \\ 2^{(1-t)/2}(1-z^2)^{\frac{t+x-2}{2}}(1+z)^{-x}, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

При $x < 0$ из этого сразу получаем требуемое. При $x \geq 0$ нужно еще заменить переменную суммирования на $r' = (t-x-2)/2 - r$ или $r' = (t-x)/2 - r$ для $a_1(x, t)$ и $a_2(x, t)$ соответственно. □

В А. Львов. Поточечный непрерывный предел

Теорема 8 (Поточечный непрерывный предел). Для любых вещественных $t \geq 0$ и $|x| < t$ выполнено

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n a_1 \left(\frac{2}{n} \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, \frac{2}{n} \left\lfloor \frac{nt}{2} \right\rfloor, m, \frac{1}{n} \right) &= m J_0(m\sqrt{t^2 - x^2}); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n a_2 \left(\frac{2}{n} \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, \frac{2}{n} \left\lfloor \frac{nt}{2} \right\rfloor, m, \frac{1}{n} \right) &= -m \frac{x+t}{\sqrt{t^2 - x^2}} J_1(m\sqrt{t^2 - x^2}). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 8. Обозначим $A := \lfloor \frac{nx}{2} \rfloor + \lfloor \frac{nt}{2} \rfloor$ и $B := \lfloor \frac{nt}{2} \rfloor - \lfloor \frac{nx}{2} \rfloor$. Первый предел вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} n a_1 \left(\frac{2}{n} \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, \frac{2}{n} \left\lfloor \frac{nt}{2} \right\rfloor, m, \frac{1}{n} \right) &= n \left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right)^{\lfloor \frac{nt}{2} \rfloor - \frac{1}{2}} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \left(\frac{m}{n} \right)^{2r+1} \\ &\sim \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} = \sum_{r=0; 2|r}^{\infty} \binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} - \sum_{r=0; 2|r}^{\infty} \binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} \\ &\rightarrow \sum_{r=0; 2|r}^{\infty} \frac{(x+t)^r (t-x)^r m^{2r+1}}{2^{2r} (r!)^2} - \sum_{r=0; 2|r}^{\infty} \frac{(x+t)^r (t-x)^r m^{2r+1}}{2^{2r} (r!)^2} = m J_0(m\sqrt{t^2 - x^2}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь равенство в первой строке — это предложение 11. Эквивалентность во второй строке следует из

$$1 \leq \left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right)^{\lfloor \frac{nt}{2} \rfloor - \frac{1}{2}} \leq \left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right)^{nt} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right)^{n^2 t}} \sim \sqrt[n]{e^{m^2 t}} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

по теореме о двух полицейских. Равенство во второй строке выполнено, так как $\binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} = 0$ при $r > \max\{A, B\}$, а значит, все три участвующие суммы конечны. Сходимость в третьей строке устанавливается в леммах 20–22 ниже. Второй предел в теореме вычисляется аналогично. □

Лемма 20. Для каждого натурального r выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} = \frac{(x+t)^r(t-x)^r m^{2r+1}}{2^{2r}(r!)^2}$.

Доказательство. Имеем

$$\binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} = \frac{(A-1) \dots (A-r) \cdot (B-1) \dots (B-r)}{(r!)^2} \cdot \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} \rightarrow \left(\frac{x+t}{2} \right)^r \left(\frac{t-x}{2} \right)^r \frac{m^{2r+1}}{(r!)^2}$$

при $n \rightarrow \infty$, так как для каждого $1 \leq i \leq r$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A-i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \frac{nx}{2} \rfloor + \lfloor \frac{nt}{2} \rfloor}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{nx}{2} + \frac{nt}{2} + o(n)}{n} = \frac{x+t}{2}$$

и аналогично, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B-i}{n} = \frac{t-x}{2}$. \square

Лемма 21. Для каждого натурального r выполнено $\binom{A-1}{r} \binom{B-1}{r} \frac{m^{2r+1}}{n^{2r}} \leq \frac{(x+t)^r(t-x)^r m^{2r+1}}{2^{2r}(r!)^2}$.

Доказательство. Это доказывается аналогично, так как для каждого $1 \leq i \leq r < \min\{A, B\}$ выполнено

$$(A-i)(B-i) \leq \left(\left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{nt}{2} \right\rfloor - 1 \right) \left(\left\lfloor \frac{nt}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor - 1 \right) \leq \left(\frac{nx}{2} + \frac{nt}{2} \right) \left(\frac{nt}{2} - \frac{nx}{2} \right). \quad \square$$

Лемма 22. Пусть последовательность $\{a_k(n)\}_{k=0}^{\infty}$ неотрицательных последовательностей такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k(n) = b_k$ для каждого k ; $a_k(n) \leq b_k$ для всех k, n ; и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ конечна.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Доказательство. Обозначим $b := \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) \leq b$ для всех n . Возьмем $\varepsilon > 0$.

Возьмем N такое, что $\sum_{k=0}^N b_k > b - \varepsilon$. Для каждого $k \leq N$ возьмем M_k такое, что для всех

$n \geq M_k$ выполнено $a_k(n) > b_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Тогда для всех $n > \max_{0 \leq k \leq N} M_k$ выполнено $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) > b - 2\varepsilon$. Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) = b$. \square

Список литературы

- [1] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, J. Watrous, One-dimensional quantum walks, Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (2001), 37–49.
- [2] C.M. Bender, L.R. Mead, K.A. Milton, Discrete time quantum mechanics, Computers Math. Appl. 28:10-12 (1994), 279-317.
- [3] C.M. Bender, K.A. Milton, D.H. Sharp, Gauge invariance and the finite-element solution of the Schwinger model, Phys. Rev. D 31 (1985), 383; Erratum Phys. Rev. D 32 (1985), 1593.
- [4] I. Bialynicki-Birula, Dirac and Weyl equations on a lattice as quantum cellular automata, Phys. Rev. D 49, 6920 (1994).
- [5] P. Billingsley, Probability and Measure, 3rd ed., Wiley, New York, 1995.
- [6] I. Bogdanov, Feynman checkers: the probability of direction reversal, preprint (2020) [arXiv:2010.04583](https://arxiv.org/abs/2010.04583).
- [7] M.J. Cantero, F.A. Grünbaum, L. Moral, L. Velázquez, The CGMV method for quantum walks, Quantum Inf Process 11 (2012), 1149–1192.
- [8] D. Chelkak, S. Smirnov, Discrete complex analysis on isoradial graphs, Adv. Math. 228 (2011), 1590–1630.
- [9] L.C. Chen, M.E.H. Ismail, On asymptotics of Jacobi polynomials, SIAM J. Math. Anal., 22:5 (1991), 1442–1449.
- [10] M. Dmitiev, Semi-infinite Feynman checkers, preprint (2021).

- [11] R.P. Feynman, QED: The strange theory of light and matter. Princeton University Press, 2006.
- [12] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, New York, McGraw-Hill, 1965. Russian transl.: Mir, Moscow, 1968.
- [13] S.R. Finch, Mathematical constants, Cambridge University Press, 2003.
- [14] G.B. Folland, Quantum field theory. A tourist guide for mathematicians, Math. Surveys & Monographs 149, AMS, 2008.
- [15] B.Z. Foster, T. Jacobson, Spin on a 4D Feynman Checkerboard, *Int. J. Theor. Phys.* 56 (2017), 129–144.
- [16] B. Gaveau, L.S. Schulman, Dirac equation path integral: interpreting the Grassmann variables, *Il Nuovo Cimento D* 11, 31 (1989) 31–51.
- [17] K. Georgopoulos, C. Emary, and P. Zuliani, Comparison of quantum-walk implementations on noisy intermediate-scale quantum computers, *Phys. Rev. A* 103 (2021), 022408.
- [18] H.A. Gersch, Feynman’s relativistic chessboard as an Ising model, *Int. J. Theor. Phys.* 20:7 (1981), 491–501.
- [19] I.S. Gradstein, I.M. Ryzhik, Tables of integrals, sums, series and products, 4th ed., Moscow, Fizmatgiz, 1963, 1100 pp. (in Russian).
- [20] G.R. Grimmett, S. Janson, P.F. Scudo, Weak limits for quantum random walks, *Phys. Rev. E* 69 (2004), 026119.
- [21] M.N. Huxley, Area, lattice points, and exponential sums, The Clarendon Press, 1996.
- [22] T. Jacobson, Feynman’s checkerboard and other games. In: N. Sanchez (eds) Non-linear equations in classical and quantum field theory. Lect. Notes in Phys., 226, Springer, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [23] T. Jacobson, L.S. Schulman, Quantum stochastics: the passage from a relativistic to a non-relativistic path integral, *J. Phys. A* 17:2 (1984), 375–383.
- [24] P. Jizba, Feynman checkerboard picture and neutrino oscillations, *J. Phys.: Conf. Ser.* 626 (2015), 012048.
- [25] G.L. Jones, Complex temperatures and phase transitions, *J. Math. Phys.* 7 (1966), 2000–2005.
- [26] A. Karatsuba, Basic analytic number theory, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993.
- [27] J. Kempe, Quantum random walks: an introductory overview, *Contemp. Phys.* 50:1 (2009), 339–359.
- [28] R. Kenyon, The Laplacian and Dirac operators on critical planar graphs, *Invent. Math.* 150 (2002), 409–439.
- [29] N. Konno, A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk, *J. Math. Soc. Japan* 57:4 (2005), 1179–1195.
- [30] N. Konno, Quantum walks. In: U. Franz, M. Schürmann (eds) Quantum potential theory, Lect. Notes Math. 1954. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [31] N. Konno, Quantum walks, *Sugaku Expositions* 33:2 (2020), 135–158.
- [32] A.B.J. Kuijlaars, A. Martínez-Finkelshtein, Strong asymptotics for Jacobi polynomials with varying nonstandard parameters. *J. Anal. Math.* 94 (2004), 195–234.
- [33] M. Maeda, H. Sasaki, E. Segawa, A. Suzuki, K. Suzuki, Scattering and inverse scattering for nonlinear quantum walks, *Discrete Contin. Dyn. Syst. - Ser. A*, 38:7 (2018), 3687–3703.
- [34] J. Maldacena, The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson, *Euro. J. Phys.* 37:1 (2016).
- [35] V. Matveev, R. Shrock, A connection between complex-temperature properties of the 1D and 2D spin s Ising model, *Phys. Lett. A* 204 (1995), 353–358.
- [36] J. Narlikar, Path amplitudes for Dirac particles, *J. Indian Math. Society*, 36 (1972), 9–32.
- [37] I. Novikov, Feynman checkers: the probability to find an electron vanishes nowhere inside the light cone, preprint (2020) [arXiv:2010.05088](https://arxiv.org/abs/2010.05088).
- [38] G.N. Ord, Classical particles and the Dirac equation with an electromagnetic field, *Chaos, Solitons & Fractals* 8:5 (1997), 727–741.
- [39] G.N. Ord, J.A. Gualtieri, The Feynman propagator from a single path, *Phys. Rev. Lett.* 89 (2002), 250403.
- [40] F. Ozhegov, The continuum limit of the “Feynman checkers” model with electromagnetic field, preprint (2021).

- [41] A. Pakharev, M. Skopenkov, A. Ustinov, Through the resisting net, Mat. Prosv. 3rd ser., 18 (2014), 33–65.
- [42] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, An introduction to quantum field theory, Westview Press, Boulder, 1995.
- [43] S.S. Schweber, Feynman and the visualization of space-time processes, Rev. Mod. Phys. 58:2 (1986), 449–511.
- [44] M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: auxiliary computations. <https://users.mccme.ru/mskopenkov/skopenkov-pdf/checkers-auxiliary-computations.nb>. Last accessed 31.12.2021.
- [45] M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory, preprint (2020), [arxiv:2007.12879v1](https://arxiv.org/abs/2007.12879v1).
- [46] N.J.A. Sloane (ed.), The on-line encyclopedia of integer sequences, <http://oeis.org/>.
- [47] T. Sunada, T. Tate, Asymptotic behavior of quantum walks on the line, J. Funct. Anal. 262 (2012) 2608–2645.
- [48] R.P. Stanley, Irreducible symmetric group characters of rectangular shape, Séminaire Lotharingien de Combinatoire 50 (2004), Article B50d.
- [49] G. Szegö, Orthogonal polynomials, Colloquium Publications XXIII, American Math. Society, 1939.
- [50] S.E. Venegas-Andraca, Quantum walks: a comprehensive review, Quantum Inf. Process. 11 (2012), 1015–1106.
- [51] J. Yepez, Relativistic path integral as a lattice-based quantum algorithm, Quantum Inf. Process. 4 (2005), 471–509.
- [52] P. Zakorko, Maximum of probability in Feynman checkers, preprint (2021).

Михаил Скопенков

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
(ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ) И

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ИМ. А.А. ХАРКЕВИЧА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
mikhail.skopenkov@gmail.com <https://users.mccme.ru/mskopenkov/>

Алексей Устинов

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
(ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК) И

ХАБАРОВСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ Института прикладной математики
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ Российской Академии Наук
Ustinov.Alexey@gmail.com <http://iam.khv.ru/staff/Ustinov.php>