УДК 521.52.17

МЕТОД СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАЛЫХ ТЕЛ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

Е.А. Чегодаева

В статье предложен метод симплектичекого интегрирования. На основе его создан симплектические интеграторы разных порядков и проведено их тестирование.

В последнее десятилетие методы симплектического интегрирования стали основным инструментом при исследовании гамильтоновых систем на больших промежутках времени. Связано это с тем, что при значительно большем быстродействии по сравнению с классическими методами эти методы сохраняют основные свойства гамильтоновых систем. Поэтому использование симплектических интеграторов создало предпосылки для решения таких сложных задач, как изучение закономерностей движения малых тел в течение промежутка времени порядка возраста Солнечной системы. Однако прямое применение методов симплектического интегрирования в динамике малых тел Солнечной системы является затруднительным в случае больших эксцентриситетов орбит и наличии тесных сближений с планетами. В данной статье предложен эффективный метод симплектического интегрирования, пригодный для широкого класса орбит.

Рассмотрим основы теории симплектических интеграторов для канонических уравнений движения с гамильтонианом H для системы N тел [1, 12].

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{1}$$

где $i=1,2,..,N$, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ – обобщенная координата, $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$ – обобщенный импульс.

Используя (1), скорость изменения любой динамической величины $\vec{q}(\vec{x},\vec{p},t)$ может быть записана в виде

$$\frac{d\vec{q}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\vec{q}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}+\frac{\partial\vec{q}}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\vec{q}}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}+\frac{\partial\vec{q}}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)\equiv\{\vec{q},H\}\equiv F\vec{q}, \tag{2}$$

где $\{,\}$ – скобки Пуассона, F – дифференциальный оператор вида

$$F=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right). \tag{3}$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$\vec{q}(t)=e^{\tau F}\vec{q}(t-\tau), \tag{4}$$

где $\vec{q}(t-\tau)$ значение $\vec{q}$ в предыдущий момент времени.

Предположим, что $H=H_A+\varepsilon H_B$, где H_A и H_B являются интегрируемыми гамильтонианами. Симплектический интегратор второго порядка может быть записан в виде

$$\vec{q}(t)=e^{\tau\varepsilon B/2}e^{\tau A}e^{\tau\varepsilon B/2}\vec{q}(t-\tau), \tag{5}$$

где τ – шаг интегрирования, а A и B – дифференциальные операторы вида F для гамильтонианов H_A и H_B соответственно.

Каждый шаг интегрирования для схемы (2) состоит из трех подшагов.

1) полшага решение канонических уравнений движения с гамильтонианом H_B.

2) шаг решение канонических уравнений движения с гамильтонианом H_A.

3) полшага решение канонических уравнений движения с гамильтонианом H_B.

Применение симплектических интеграторов равносильно точному решению уравнений движения (1) с гамильтонианом H_{integr} [2]:

$$H_{integr}=H+H_{err}(\tau^p), \tag{6}$$

где H_{err} – член, возникающий из-за некоммутативности операторов A и B, p – порядок интегратора. Интеграторы порядка выше второго намного более громоздкие, а так же имеют неудобства в виде отрицательных подшагов, поэтому чаще всего используются интеграторы второго порядка как достаточно эффективные и быстрые. Однако есть другие способы повысить точность симплектического интегратора – интеграторы псевдовысокого порядка [2, 5] и корректоры [7, 9, 11]. Интеграторы псевдовысокого порядка получают из $S_2(\tau)$, разделяя экспоненты специальным образом [5]. Например,

$$S_6(\tau)=e^{d_1\tau B}e^{c_2\tau A}e^{d_2\tau B}e^{c_1\tau A}e^{d_2\tau B}e^{c_2\tau A}e^{d_1\tau B}, \tag{7}$$

$$c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}, c_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right), d_1=\frac{1}{12}, d_2=\frac{5}{12}.$$

Интегрируемый гамильтониан для этой схемы $H_{\text{integr}}=H+\varepsilon^2\tau^2(\frac{13-5\sqrt{5}}{288})\{\{H_A,H_B\},H_B\}+O(\varepsilon\tau^6)$. Ласкар и Робутель [5] представляют общий вид коэффициентов через полиномы Бернулли, позволяя найти схему интегратора для любого псевдовысокого порядка. Эти интеграторы тратят больше компьютерного времени, но имеют более высокую точность, поэтому можно увеличить шаг интегрирования. Чемберс и Морисон [2] считают, что интегратор псевдошестого порядка наиболее эффективен.

При разделении гамильтониана на части и выборе системы координат возможны варианты. Обычное разделение гамильтониана на части – это разделение на кеплерову часть, отвечающую за движение объекта по орбите, и возмущающую часть. Запишем гамильтониан для системы N тел в инерциальной системе отсчета

$$H(q_i,p_i)=\sum_{i=0}^{N}\frac{p_i^{\,2}}{2m_i}-G\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{m_i m_j}{|q_i-q_j|}, \tag{8}$$

где $\vec{q}_i$ – обобщенные координаты, $\vec{p}_i$ – обобщенные импульсы, m_i – масса i-го тела, $i=0$ соответствует Солнцу. Висдом и Холман [8] в своем интеграторе использовали координаты Якоби. Можно также использовать гелиоцентрическую систему координат, барицентрическую [4], смешанную [3]. Левисон, Дункан, Ли [3] предложили использовать смешанную систему координат. Такая система координат удобна для исследования объектов имеющих тесные сближения. Координаты Q_i – гелиоцентрические, а импульсы P_i – барицентрические:

$$Q_i=\begin{cases} q_i-q_0, \text{если } i\neq 0,\\ \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{n} m_i q_j, \text{если } i=0,\end{cases} \quad P_i=\begin{cases} p_i-\frac{m_i}{M}\sum_{j=0}^{n} p_j, \text{если } i\neq 0,\\ \sum_{j=0}^{n} p_j, \text{если } i=0,\end{cases} \tag{9}$$

где $M=\sum_{i=0}^{n} m_i$. Тогда (17) имеет вид $H(Q_i,P_i)=H_{\text{Kepl}}+H_{\text{Sun}}+H_{\text{Inter}}$, где

$$H_{\text{Kepl}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|P_i|^2}{2}\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_0}\right)-\frac{Gm_i m_0}{|Q_i|}\right), \tag{10}$$

$$H_{\text{Sun}}=\frac{1}{m_0}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} P_i P_j, \tag{11}$$

$$H_{\text{Inter}}=-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{Gm_i m_j}{|Q_i-Q_j|}. \tag{12}$$

Для такого гамильтониана, разделенного на три части, схема симплектического интегрирования второго порядка имеет вид [3]

$$S_2(\tau)=e^{\tau C/2}e^{\tau B/2}e^{\tau A}e^{\tau B/2}e^{\tau C/2}, \tag{13}$$

где A,B,C – операторы соответственно для $H_{\text{Kepl}},H_{\text{Inter}},H_{\text{Sun}}$. При симплектическом интегрировании шаг интегрирования по независимой переменной является постоянным. Так в симплектическом интеграторе Висдома и Холмана [8] временной шаг интегрирования является постоянным, что не всегда приемлемо для решения задач небесной механики. Для решения задач связанных с кометами, астероидами и другими малыми телами Солнечной системы более удобен интегратор с переменным временным шагом. Емельяненко [4] предложены преобразования, позволяющие сделать шаг переменным.

Интегратор в смешанных координатах для кометных орбит, разработанный в нашей работе, основан на методе Левисона, Дункана и Ли [3], упомянутом выше, и методе переменного временного шага Емельяненко [4].

В программе производится симплектическое интегрирования отдельно для планет и отдельно для частиц, что экономит компьютерное время. Система смешанных координат, гамильтониан и схема интегрирования для планет описываются формулами (9)–(13). Симплектическое интегрирование планет идет с постоянным временным шагом.

Найдем гамильтониан для частицы в смешанных координатах. Для этого перепишем (8) в виде

$$H(q_i,p_i,\vec{q}_m,\vec{p}_m)=\sum_{i=0}^{N}\frac{p_i^2}{2m_i}+\frac{\vec{p}_m^2}{2m_m}-k^2\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{m_im_j}{|q_i-q_j|}-k^2\sum_{i=0}^{N}\frac{m_im_m}{|\vec{q}_m-q_i|}, \tag{14}$$

где m – индекс частицы. Переходим к смешанным координатам, используя (9) для планет, а для частицы

$$\vec{Q}_m=\vec{q}_m-q_0, \tag{15}$$

$$\vec{P}_m=m_m\vec{V}_m=m_m\vec{v}_m-\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{n,m}p_j. \tag{16}$$

Центр масс ($i=0$) движется как свободная частица, в гамильтониане его не учитываем. Выпишем из гамильтониана системы части, относящиеся к частице:

$$H(\vec{Q}_m,\vec{V}_m)=\frac{m_m\vec{V}_m^2}{2}+\frac{m_m^2\vec{V}_m^2}{2m_0}-\sum_{i=0}^{n}\frac{k^2m_im_m}{|\vec{Q}_m-Q_i|}+\frac{1}{m_0}m_m\vec{V}_m\sum_{i=i}^{n}\vec{P}_i. \tag{17}$$

На m_m можно сократить, после чего считаем $m_m=0$. В результате чего получаем гамильтониан $H=H_{\text{Kepl}}-H_{\text{Sun}}-H_{\text{Inter}}$

$$H_{\text{Kepl}}=\frac{|\vec{V}_m|^2}{2}-\frac{k^2m_0}{|\vec{Q}_m|}, \tag{18}$$

$$H_{\text{Sun}}=-\frac{1}{m_0}\vec{V}_m\sum_{i=1}^{n}\vec{P}_i(t), \tag{19}$$

$$H_{\text{Inter}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{k^2m_i}{|\vec{Q}_m-Q_i(t)|}. \tag{20}$$

Для данного гамильтониана применим преобразования Емельяненко [4]. Расширяем фазовое пространство, введем канонические переменные $q_4=t$ и $p_4=-H$. Затем, следуя Микколе [6], определим новую независимую переменную τ соотношением, $d\tau=dt/r$. Тогда уравнения движения имеют вид:

$$\frac{dq_i}{d\tau}=\frac{\partial K}{\partial p_i};\frac{dp_i}{d\tau}=-\frac{\partial K}{\partial q_i}, \tag{21}$$

где $i=1,2,3,4$, а $K=r(H_{\text{Kepl}}+p_4)-r\left(H_{\text{Inter}}-H_{\text{Sun}}\right)$. Добавим выражение $rB_0+B_1>0$ к обеим частям гамильтониана K (B_0,B_1 – некие малые константы). Тогда $K=K_0-K_1$, где

$$K_0=r\left(H_{\text{Kepl}}+p_4+B_0+{}^{B_1}\!/_{r}\right),K_1=r\left(H_{\text{Inter}}+H_{\text{Sun}}+B_0+{}^{B_1}\!/_{r}\right), \tag{22}$$

и $K=0$ на траектории движения. Далее применяем преобразование, предложенное Микколой и Таникавой [6],

$$ds=K_1d\tau=K_0d\tau=\frac{K_0}{r}dt, \tag{23}$$

после которого уравнения движения можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\vec{Q}_m}{ds}=\frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{V}_m},\frac{d\vec{V}_m}{ds}=-\frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{Q}_m}, \tag{24}$$

$$\frac{dq_4}{ds}=\frac{\partial\Gamma}{\partial p_4},\frac{dp_4}{ds}=-\frac{\partial\Gamma}{\partial q_4}, \tag{25}$$

с новым гамильтонианом

$$\Gamma=\Gamma_0+\Gamma_1, \tag{26}$$

где $\Gamma_0=\ln\frac{K_0}{r},\Gamma_1=-\ln\frac{K_1}{r}$.

Получается, что для гамильтониана Γ можно применить симплектическое интегрирование и при этом шаг интегрирования для частицы будет зависеть от ее расстояния до Солнца и планет. Из-за того, что Γ_1 зависит как от $\vec{Q}_m$, так и от $\vec{P}_m$ возникают сложности в решении системы дифференциальных уравнений. Алгоритм интегратора второго порядка может быть записан в виде

$$E_1(h_s/2)E_0(h_s)E_1(h_s/2), \tag{27}$$

где E_0 и E_1 – операторы эволюции Γ_0 и Γ_1 соответственно, h_s – длина шага для новой переменной s. Во время симплектического интегрирования $\Gamma_0\approx\Gamma_1$ и, соответственно, $K_0\approx K_1$. Тогда уравнение (25) имеет вид

$$dt\approx\frac{rds}{K_0}=\frac{ds}{H_{\text{kepl}}+p_4+B_0+\frac{B_1}{r}}. \tag{28}$$

Для возмущенной части решается система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{Q}_m}{ds}=\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\vec{V}_m}=\frac{1}{Cm_0}\sum_{i=1}^{n}\vec{P}_i(t), \tag{29}$$

$$\frac{d\vec{V}_m}{ds}=-\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\vec{Q}_m}=-\frac{1}{C}\left(k^2\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i(\vec{Q}_m-\vec{Q}_i(t))}{|\vec{Q}_m-\vec{Q}_i(t)|^3}+B_1\frac{\vec{Q}_m}{|\vec{Q}_m|^3}\right), \tag{30}$$

$$\frac{dt}{ds}=-\frac{\partial\Gamma_1}{\partial p_4}=0\Rightarrow t=\text{const}, \tag{31}$$

$$\frac{dp_4}{ds}=-\frac{\partial\Gamma_1}{\partial t}=\frac{1}{C}\left(-\frac{1}{m_0}\vec{V}_m\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{P}_i(t)}{dt}+\sum_{i=1}^{n}\frac{k^2m_i(\vec{Q}_m-\vec{Q}_i(t))}{|\vec{Q}_m-\vec{Q}_i(t)|^3}\frac{d\vec{Q}_i(t)}{dt}\right), \tag{32}$$

где $C=\frac{K_1}{r}$ константа

$\vec{P}_i(t)$ и $\vec{Q}_i(t)$ известны для определенных моментов времени, связанных с шагом интегрирования планет. Для каждой частицы проводится дополнительное вычисление координат планет, основанное на следующем принципе:

1) решаем уравнения для кеплеровой части планет с шагом по времени $\delta t=T_{part}-T_{pl}$, где T_{part} – время для которого должны быть найдены новые координаты планет, T_{pl} – время в которое координаты уже найдены,

2) зная шаг интегрирования планет Δt, находим $\Delta T=T_{\text{part}}-T_{\text{pl}}+\Delta t/2$ и решаем уравнения движения для гамильтонианов (12) и (11) с шагом по времени ΔT, находя таким образом нужные нам координаты и импульсы планет:

$$\frac{d\vec{Q}_i(t)}{dt}=\frac{1}{m_0}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\vec{P}_i+\vec{P}_i\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_0}\right), \tag{33}$$

$$\frac{d\vec{P}_i(t)}{dt}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{k^2m_im_j(\vec{Q}_i-\vec{Q}_j)}{|\vec{Q}_i-\vec{Q}_j|^3}-\frac{k^2m_im_0\vec{Q}_i}{|\vec{Q}_i|^3}, \tag{34}$$

Для возмущенной части (29) – (32) выражения получаются громоздкими, на которые тратится довольно много компьютерного времени – это один из минусов смешанного интегратора. Второй минус интегратора в смешанных координатах – это довольно большое изменение части гамильтониана H_{Sun}. В некоторых случаях выражение под знаком логарифма может стать даже отрицательным. Чтобы этого избежать, надо определить интервал изменения H_{Sun} и подобрать коэффициенты B_0, B_1. Принцип выбора параметров B_0, B_1 следующий: если частица далеко от планет, то

$$|R| << B_0 + \frac{B_1}{r}, |R| > B_0 + \frac{B_1}{r} \tag{35}$$

при тесных сближениях с планетами. Значит, если взять большое значение $B_0 + B_1/r$. то это скомпенсирует изменение H_{Sun}, шаг интегрирования по времени при тесных сближениях будет меняться незначительно. Это означает, что для полученного интегратора нужно очень тщательным образом контролировать параметры интегратора для каждого класса орбит. В этом состоит главный недостаток интегратора в смешанных координатах.

Для того чтобы разработать интегратор с большей областью применения будем использовать барицентрическую систему координат для частиц. Для интегрирования уравнений движения планет будем использовать смешанную систему координат (9)–(11). В данном случае эта система координат наиболее удобна. Для частиц опять используется метод симплектического интегрирования с переменным временным шагом Емельяненко [3]. Гамильтониан имеет следующий вид $H = H_0 - H_1$, где

$$H_0 = \frac{\vec{v}_m^2}{2} - \frac{k^2(1+\sum_{i=1}^{n} m_i)}{r}, \tag{36}$$

$$H_1 = \sum_{i=0}^{n} k^2 m_i \left(\frac{1}{|\vec{q}_m - \vec{q}_i(t)|} - \frac{1}{r} \right), \tag{37}$$

где $r = |\vec{q}_m|$.

Для решения кеплеровой части переходим от ds к dt и решаем задачу двух тел с новым гамильтонианом

$$\Gamma_0' = \frac{\vec{v}_m^2}{2} - \frac{k^2(1+\sum_{i=1}^{n} m_i) + C_0 - B_1}{r} + B_0 + p_4, \tag{38}$$

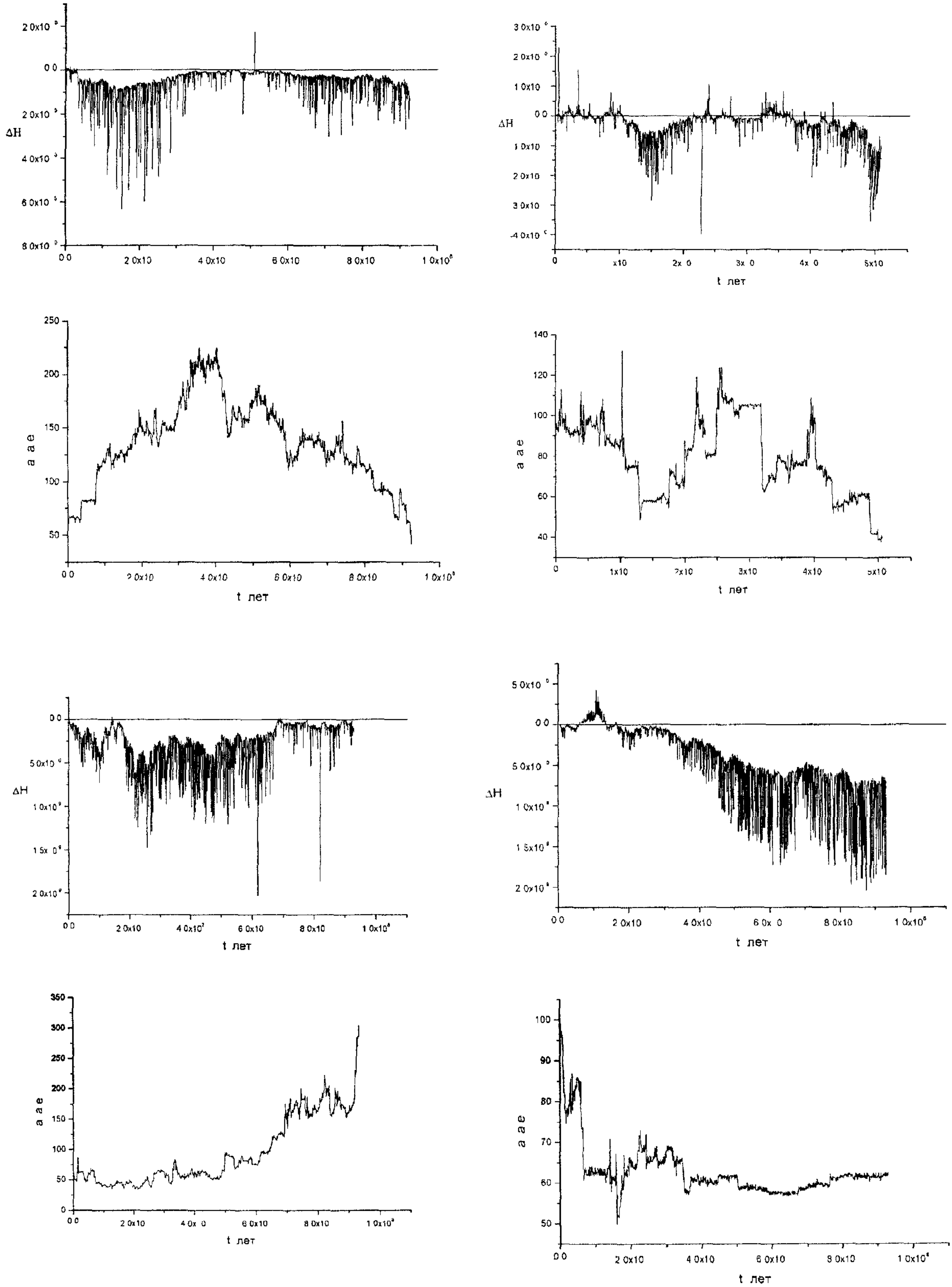
где C_0 константа K_0.

Численные эксперименты

Для тестирования интеграторов были взяты две орбиты с большими полуосями $a_1 = 60{,}91$ а.е. и $a_2 = 97{,}12$ а.е., перигилийными расстояниями $q_1 = 30{,}01$ а.е. и $q_2 = 30{,}2$ а.е., эксцентриситетами $e_1 = 0{,}50$, $e_2 = 0{,}68$, наклонами орбит $i_1 = 16°$, $i_2 = 13°$. Частицы в начальный момент времени находятся на расстоянии 91 и 96 а.е. от Солнца соответственно. В интегрировании участвуют только 4 внешние планеты: Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун. Шаг интегрирования для планет равен 365 дней.

Тестированию были подвергнуты симплектический интегратор второго порядка, комбинирующий смешанные и барицентрические координаты, описанный выше и интегратор псевдошестого порядка. Для построения последнего использовался интегратор, комбинирующий смешанные и барицентрические координаты. Схема интегратора псевдошестого порядка задана уравнением (7). Интегратор основан на уравнениях (36)–(38).Для обеих частиц B_0, B_1 подобраны на основе соотношений (35): $B_0 = 0, B_1 = 0{,}21 \cdot 10^{-6}$. Для интегратора второго порядка начальные шаги по времени для частиц составляли 298 и 310 дней соответственно, для интегратора псевдошестого порядка начальные шаги интегрирования равны 910 дней и 953 дня соответственно. Тестирование интеграторов было проведено на интервале 100 млн лет. Время, затраченное процессором на интегратор второго порядка примерно на 5% меньше времени затраченного на интегратор псевдошестого порядка.

На рисунке левая колонка сверху вниз представляет зависимости ошибок ΔH и большой полуоси a от времени для первой частицы симплектического интегратора второго порядка, затем те же зависимости для симплектического интегратора псевдошестого порядка Графики справа соответствуют тем же зависимостям для второй тестируемой частицы. Результаты представлены



Зависимости ошибок ΔH и большой полуоси a от времени для первой и второй частицы симплектического интегратора второго порядка и симплектического интегратора псевдошестого порядка

таким образом, чтобы перигелийное расстояние частиц удовлетворяло условию $q > 26$ а.е. Для орбит с $q < 26$ а.е. должны быть другие коэффициенты B_0, B_1. Как видно на рисунке, точность интегратора второго порядка сохраняется на протяжении всего времени интегрирования частиц. Для псевдошестого порядка видно, особенно для второй частицы, накопление ошибок в гамильтониане. Очевидно, это связано с очень большим шагом интегрирования. Известно, что шаг интегрирования не может превышать 400 дней, ограничение, связанное с периодом обращения Юпитера. Кроме того, интегратор псевдошестого порядка требует больше компьютерного времени, чем интегратор второго порядка.

Заключение. Разработаны методы симплектического интегрирования для кометных орбит. На основе данных методов построены три интегратора. Интегратор, в котором для планет и для частиц используются смешанные координаты, не является универсальным интегратором для кометных орбит, но вполне возможно его применение для определенных классов орбит. Применение смешанных координат для массивных объектов является эффективным выбором системы координат. Интегратор, комбинирующий смешанные координаты для планет и барицентрические координаты для частицы, отлично зарекомендовал себя объектов внешней части Солнечной системы.

Данная работа была поддержана грантами РФФИ-Урал (04-02-96042) и ИНТАС (00-240).

Литература

1. Chambers J.E. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massivebodies// Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 1999. – V. 304. – P. 793–799.

2. Chambers J.E., Murison M.A. Pseudo-high-order symplectic integrators// The Astronomical Journal. – 2000. – V. 119. – P. 425–433.

3. Duncan M., Levison H. and Lee M.A multiple time step symplectic algorithm for integrating close encounters// The Astronomical Journal. – 1998. – P. 2067–2077.

4. Emel'yanenko V. An explicit symplectic integrator for cometary orbits// Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2001. – V. 74. – P. 287–295.

5. Laskar J., Robutel P. High order symplectic integrators for perturbed hamiltonian systems// Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2001. – V. 80. – P. 39–62.

6. Mikkola S., Tanikawa K. Explicit symplectic algorithms for time-transformed Hamiltonians // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 1999. – P. 287–295.

7. Mikkola S., Palmer H. Simple derivation of symplectic integrators with first order correctors// Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2000. – V. 77. – P. 305–307.

8. Wisdom J., Holman M. Symplectic maps for the N-body problem// The Astronomical Journal. – 1991. – P. 1528–1538.

9. Wisdom J., Holman M., Touma J. Symplectic correctors. Integration algorithms and classical mechanics// Fields Instituts Community. – 1996. – P. 217–244.

10. Wu X., Huang T.Y., Wan X.S. On correctors of symplectic integrators// Chinese Astronomy and Astrophisics. – 2003. – V. 27. – P. 114–125.

11. Wu X., Huang T.Y., Zhang H., Wan X.S. A note on the algorithm of symplectic integrators// Astrophisics and Space Science. – 2003. – V. 283. – P. 53–65.

12. Yohida H. Construction of higher order symplectic integrators// Physics letters A. – 1990. – V. 150. – P. 262–268.

Поступила в редакцию 10 сентября 2004 г.