VII Escola Jayme Tiomno

Universidade de São Paulo, Instituto de Física

Mecânica Clássica sob a perspectiva da Geometria Diferencial

Clarice Netto
cnetto@ime.usp.br

Carga horária:

10h (5 aulas com 2h de duração cada).

Descrição

Este curso oferece uma introdução às estruturas geométricas que fundamentam a mecânica clássica, com ênfase nas formulações lagrangeana e hamiltoniana e em suas generalizações. Serão abordados temas como variedades simpléticas, estruturas de Poisson e Dirac, bem como a relação entre simetrias e leis de conservação por meio do teorema de Noether. O curso busca equilibrar motivação física e ferramentas oriundas da geometria diferencial moderna, sendo acessível a estudantes de graduação interessados em física-matemática, matemática aplicada ou geometria diferencial.

Objetivos

- ▷ Compreender como as estruturas geométricas, como formas simpléticas e variedades de Poisson, estão intrinsecamente relacionadas à mecânica clássica.
- ▷ Apresentar o teorema de Noether em uma linguagem geométrica.
- ▷ Discutir exemplos concretos de sistemas físicos com simetrias e vínculos não triviais usando ferramentas da geometria diferencial.

Pré-requisitos

Recomenda-se que os participantes possuam familiaridade com mecânica clássica, cálculo diferencial e álgebra linear. Não é necessário conhecimento prévio de geometria diferencial ou variedades, pois tais conceitos serão introduzidos ao longo do curso.

Programa do curso

- ▷ **Aula 1- Motivação e exemplos.**
  Formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano para sistemas mecânicos. Transformada de

Legendre como mudança de perspectiva. Exemplos: O corpo rígido, partícula livre, bola Chaplygin, entre outros.

- ▷ **Aula 2- Noções fundamentais de geometria diferencial.**
  Breve introdução à variedades. Campos vetoriais, formas diferenciais e operações básicas (pullback, contração, diferencial). Fluxos e integrais de movimento.
- ▷ **Aula 3- Geometria simplética e estruturas de Poisson.**
  Definições básicas. Equações de Hamilton como fluxo hamiltoniano. Redução por simetrias. Grandezas conservadas e o teorema de Noether.
- ▷ **Aula 4- Estruturas de Dirac e sistemas com vínculos.**
  Generalização da estrutura simplética: pares admissíveis e distribuição característica. Aplicações a sistemas com vínculos.
- ▷ **Aula 5- Geometria e integrabilidade.**
  Revisita-se os exemplos da primeira aula, agora descrevendo tais sistemas mecânicos com a linguagem geométrica abordada nas aulas anteriores. Propõe-se soluções geométricas.

Referências

[1] L. Bates, J. Sniatycki. *Nonholonomic reduction* Rep. Math. Phys. Vol 32(1) (1993), 99-115.

[2] A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Springer, 2001.

[3] J.-P. Dufour and N. T. Zung, *Poisson Structures and Their Normal Forms*, Progress in Mathematics, Vol. 242, Birkhäuser, 2005.

[4] D. D. Holm, *Geometric Mechanics, Part I: Dynamics and Symmetry*, 2nd ed., Imperial College Press, 2011.

[5] J. E. Marsden and T. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, 2nd ed., Springer, 1999.

Mecânica Clássica sob a perspectiva da Geometria Diferencial

Aula 1: Motivação e exemplos

Sistemas hamiltonianos descrevem a evolução de sistemas mecânicos de natureza conservativa. As equações que descrevem tais sistemas são chamadas equações de Hamilton e podem ser derivadas diretamente da segunda lei de Newton.

Vamos considerar como ilustração o exemplo do movimento de uma partícula de massa $m > 0$ em $\mathbb{R}^3$ submetida a um campo de forças conservativo F, dado em cada ponto $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ por
↳ espaço de configuração

$$F(q) = -\nabla V(q)$$

onde $V: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é a energia potencial. Cada estado inicial, determinado por uma posição e velocidade, determina completamente a trajetória $q(t)$ da partícula através da 2º Lei de Newton:

$$m\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t)). \qquad (1)$$

Se considerarmos $p = m.\dot{q}$ (o momento linear da partícula) podemos reescrever o sistema de 3 equações de segunda ordem (1) como 6 equações de primeira ordem nas variáveis p_i e q_i:

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = -\nabla V$$

O espaço $\mathbb{R}^3 = \{q = (q_1, q_2, q_3)\}$ de possíveis posições da partícula é chamado espaço de configurações, enquanto o espaço $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \{(q, p)\}$, consistindo de posições e momentos, é chamado espaço de fase.

Denotando a energia total da partícula por H,

$$H(p,q) = \frac{\sum_{i=1}^{3} p_i^2}{2m} + V(q),$$

podemos escrever (1) no espaço de fase como

$$(2)\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{1}{m} p_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = m\frac{d^2 q_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

As equações (2) são as equações de Hamilton.

Temos então $\underset{\text{em } \mathbb{R}^3}{\text{2º Lei de Newton}} \iff \underset{\text{em } \mathbb{R}^6}{\text{Equações de Hamilton}}$

① Princípio Variacional

Outra maneira de se obter as equações de Hamilton é via as equações de Euler-Lagrange, derivadas de princípios variacionais. Essa abordagem além de exibir a natureza variacional de sistemas naturais, é bastante útil quando consideramos sistemas com vínculos.

Um princípio que rege a mecânica clássica é o princípio da ação mínima. Mais precisamente, considere um sistema cujo espaço de configurações é o $\mathbb{R}^n$, com coordenadas $q = (q_1, \dots, q_n)$, de modo que o espaço dos estados (i.e., posições e velocidades) seja $\mathbb{R}^{2n}$, com coordenadas (q, v). Seja $L : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, chamada função lagrangiana. Dada uma curva diferenciável $\gamma : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definimos sua ação por

$$A_L(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot\gamma(t))\, dt$$

Fixe agora dois pontos q_0 e q_1 em $\mathbb{R}^n$ e denote por $C([0,T], q_0, q_1)$ o conjunto das curvas suaves $\gamma : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $\gamma(0) = q_0$ e $\gamma(T) = q_1$.

Buscamos neste conjunto pontos críticos para o funcional de ação A_L, ou seja, curvas para as quais $\left.\dfrac{d A_L(\gamma)}{ds}\right|_{s=0} = 0$

onde $\Gamma_s \in C([0,T], q_0, q_1)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ é uma variação suave arbitrária de curvas tal que $\Gamma_0 = \gamma$.

CLAIM (ou Proposição) Uma curva γ é um ponto crítico de A_L se e somente se satisfaz a equação de Euler-Lagrange.

Prova. Sejam $c_i : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, \dots n$ funções suaves tais que $c_i(0) = c_i(T) = 0$ $\forall i$. Defina a variação $\Gamma_\varepsilon(t) = (\gamma_1(t) + \varepsilon c_1(t), \dots, \gamma_n(t) + \varepsilon c_n(t))$

onde $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$. É claro que $\Gamma_\varepsilon \in C([0,T], q_0, q_1)$.

Se γ_0 minimiza A, então:

Temos que:

Regra de Leibniz

$$\left.\frac{d A_L(\Gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \overset{\downarrow}{=} \int_0^T \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}(\gamma_0(t),\dot{\gamma}_0(t))\, c_i(t) + \frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma_0(t),\dot{\gamma}_0(t))\, \dot{c}_i(t)\right] dt$$

$$= \int_0^T \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}(\gamma_0,\dot{\gamma}_0)\, c_i(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma_0,\dot{\gamma}_0)\, c_i(t) + \left.\frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma_0,\dot{\gamma}_0)\, c_i(t)\right|_0^T dt$$

equação de Euler-Lagrange

$$= \int_0^T \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}(\gamma_0,\dot{\gamma}_0) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma_0,\dot{\gamma}_0)\right) c_i(t)\, dt = 0$$

$\int_a^b u\, dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\, du$

Onde a segunda igualdade segue por integração por partes. Como isto é válido para todo c_i tal que $c_i(0) = c_i(T) = 0$, concluímos a demonstração.

Obs: Diferentes funções lagrangeanas correspondem a diferentes sistemas físicos, e a evolução de cada sistema é descrita pelas soluções das equações de Euler-Lagrange associadas.

Vejamos agora como uma mudança de variáveis pode transformar as equações de Euler-Lagrange nas equações de Hamilton. Considere a aplicação $FL : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, dada por

$$FL(q_1, \dots, q_n, v_1, \dots, v_n) = \left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial L}{\partial v_1}(q,v), \dots, \frac{\partial L}{\partial v_n}(q,v)\right)$$

chamada transformada de Legendre associada à L.

Supondo que FL seja um difeomorfismo, obtemos novas coordenadas (q,p) em $\mathbb{R}^{2n}$, onde $p = \frac{\partial L}{\partial v}$ é chamado momento generalizado.

Definimos a hamiltoniana associada à L como

$$H(p,q) = \sum_{i=1}^n p_i v_i - L(q,v)$$

Temos então que:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial v_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial v_j}\frac{\partial v_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = v_i + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial v_j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial v_j}\frac{\partial v_j}{\partial p_i} = v_i$$

Consequentemente, as equações de Euler Lagrange são equivalentes às equações de Hamilton $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ e $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

Exemplo: Em $\mathbb{R}^6$, a lagrangiana $L(q,v) = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3} v_i^2 - V(q)$. Se aplicarmos a transformada de Legendre nos leva ao hamiltoniano

$$H(p,q) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2m} p_i^2 + V(q)$$

ou seja, a mesma que vimos anteriormente.

② Geometrização das equações de Hamilton

Vimos que as equações de Hamilton podem ser derivadas das equações de Newton e de Euler-Lagrange. Agora, colocaremos as equações de Hamilton num contexto geométrico através de uma formulação intrínseca. Isto nos permitirá definir sistemas hamiltonianos em variedades diferenciáveis.

Considere o espaço de fase $\mathbb{R}^{2n}$, com coordenadas $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$.

A escolha de qualquer função $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ determina um campo hamiltoniano.

$$X_H := -J_0 \nabla H = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} \qquad (3)$$

onde J_0 é a matriz $2n \times 2n$ dada por $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ $\quad I = id_{n\times n}$

A função H é chamada de hamiltoniana, e as equações de Hamilton (2) assumem a forma $\boxed{\dot{c}(t) = X_H(c(t))}$ (4), onde $c(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t))$

Note que H é sempre preservado ao longo das soluções de (4):

$$\frac{\partial}{\partial t} H(c(t)) = \nabla H(c(t))\dot{c}(t) = -\nabla H(c(t)) \cdot J_0 \nabla H(c(t)) = 0$$

Esta propriedade (junto a outras que veremos mais tarde) dá ao formalismo hamiltoniano seu caráter conservativo.

Note que na definição de X_H em (3) usamos dois ingredientes: uma base de $\mathbb{R}^{2n}$ (com respeito a qual calculamos o gradiente ∇H) e a matriz J_0. Estes dois ingredientes combinados definem uma forma bilinear anti-simétrica não degenerada dada por

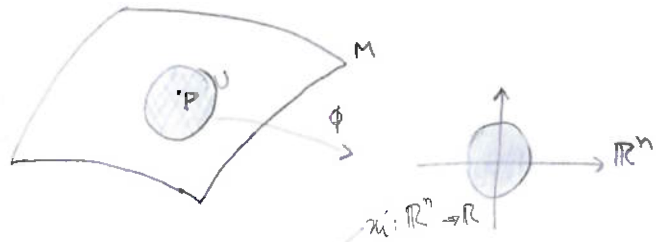
$$\boxed{\Omega_0(u,v) = -u^t J_0 v}$$

ou, equivalentemente, $\Omega_0 = \sum_i dq_i \wedge dp_i$. A equação de Hamilton pode ser então vista como o "gradiente" de H com respeito a Ω_0, ou seja, X_H é o único campo que satisfaz a equação $\boxed{\Omega_0(X_H, v) = dH(v)}$ $\forall\, v \in \mathbb{R}^n$.

AULA 2

③ Variedades Diferenciáveis

Def Um espaço localmente euclideano de dimensão d é um espaço topológico* M em que cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança $U \subset M$ homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$.



* Topologia: uma coleção $\mathcal{T} \subset M$ chamados de abertos em M t.q. $\emptyset, X \subset \mathcal{T}$, união de abertos é aberto e intersecções finitas de abertos é aberta.

Hausdorff: se $x \in y \in M$, $\exists\, V, U$, t.q. $U \cap V = \emptyset$

2° contável: base contável

Ao homeomorfismo $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ chamamos um sistema de coordenadas ou cartas. As funções $\phi^i = x^i \circ \phi$ chamamos funções coordenadas, e designamos este sistema de coordenadas por (U, ϕ).

Um sistema de coordenadas (U,ϕ) diz-se centrado num ponto $p \in M$ se $\phi(p) = 0$.

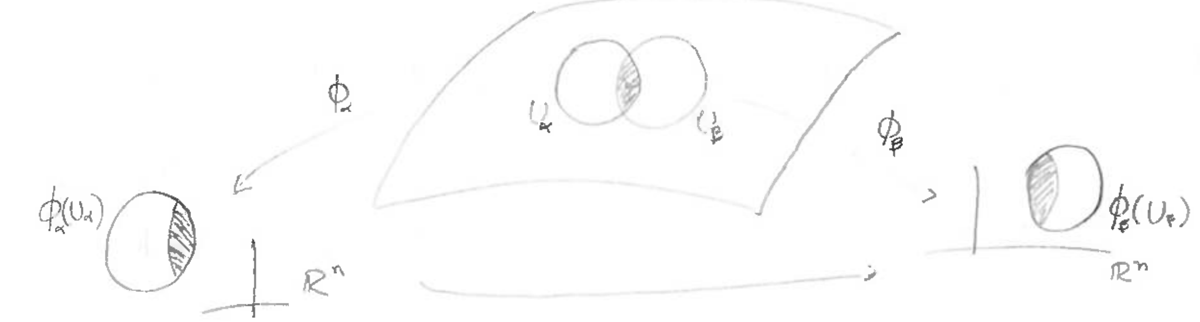
Def: Uma estrutura diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ num espaço localmente euclideano M de dim n, é uma coleção de sistema de coordenadas $C = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ é uma cobertura aberta de M, i.e. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$

ii) As funções de transição $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ são de classe C^k para quaisquer $\alpha, \beta \in A$.

iii) A coleção C é maximal: se (U, ϕ) é um sistema de coordenadas com a propriedade de que $\phi \circ \phi_\alpha^{-1}$ e $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}$ são de classe C^k para todo $\alpha \in A$, então $(U, \phi) \in C$.

A um par (M, C) chamamos uma variedade diferenciável de dimensão n.



Exemplos: ① $(\mathbb{R}^n, id)$, o espaço euclidiano com o sistema de coordenadas $(\mathbb{R}^n, i)$, $i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a aplicação identidade.

② Esfera n-dimensional $S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;/\; \sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^2 = 1 \right\}$

A esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com a topologia relativa é um espaço localmente euclidiano

cartas = projeções estereográficas por $N = (0, \dots, 1)$ e $S = (0, \dots, -1)$.

$\varphi_N : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n \quad \varphi_N(x_0, \dots, x_n) = \left(\frac{x_0}{1 - x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1 - x_n} \right) \qquad \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(u) = \frac{u}{|u|^2}$

$\varphi_S : S^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n \quad \varphi_S(x_0, \dots, x_n) = \left(\frac{x_0}{1 + x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1 + x_n} \right)$

③ Espaço projetivo: $\mathbb{P}^n = \left\{ L \subset \mathbb{R}^{n+1} \;/\; L \text{ é uma reta que passa pela origem} \right\}$

Podemos identificar $\mathbb{P}^n$ com o quociente $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \sim$, onde $\sim$ é a relação de equivalência: $(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n)$ sss $(x_1, \dots, x_n) = \lambda (y_1, \dots, y_n)$ $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

$\mathbb{P}^n$ tem topologia quociente

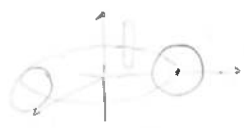
localmente euclidiano: Seja $[x_0 : \dots : x_n]$ a classe de equiv. de $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, para cada $\alpha = 0, \dots, n$ temos um sistema de coordenadas (U_α, ϕ_α) onde

$U_\alpha = \{ [x_0 : \dots : x_n] \mid x_\alpha \neq 0 \}$

$\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n \mid [x_1, \dots, x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_\alpha}, \dots, \widehat{\frac{x_\alpha}{x_\alpha}}, \dots, \frac{x_n}{x_\alpha} \right)$ ← omitimos este termo

④ Outros exemplos:

Toro $= S^1 \times S^1$



variedade de dim 2 (Toro n-dim $= (S^1)^n$)

Garrafa de Klein

dim 2

A faixa de Moebius 

- Grupos de Lie (G grupo e variedade ao mesmo tempo)

- Grupo linear geral. $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$

$$GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$
$$A = (A^j_i)_{ij} \longmapsto (A^1_1, \dots, A^1_n, A^2_1, \dots, A^2_n, \dots, A^n_1, \dots, A^n_n) \quad \text{carta p/ } GL_n(\mathbb{R})$$

↳ Subgrupos de $GL_n(\mathbb{R})$: $O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = I\}$ ortogonal.

$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$ ortogonal especial

$Sp_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$ simplético

$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$

④ Vetores tangentes

Duas curvas $c_1(t)$ e $c_2(t)$ numa var. M são equivalentes em m se $c_1(0) = c_2(0) = m$ e $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$ para alguma carta φ. (Esta def não depende de cartas).

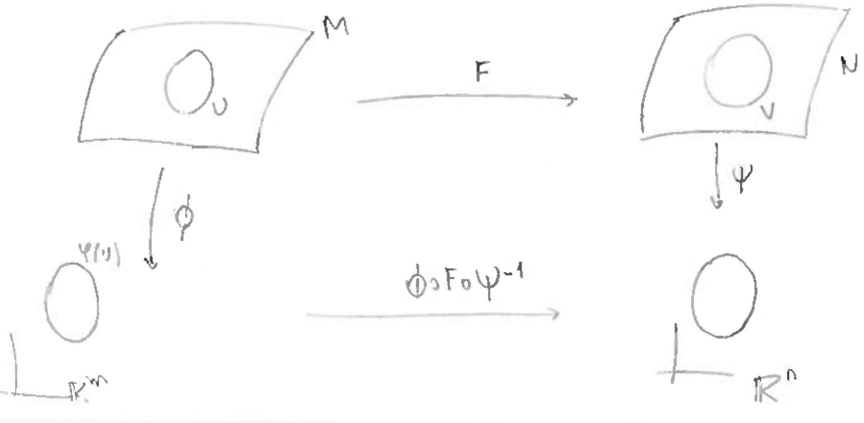
Def: Um vetor tangente v à M no ponto $m \in M$ é uma classe de equivalência de curvas $[c]$. O conjunto dos vetores tangentes a M num ponto m formam o espaço tangente T_mM. (Note que $T_pM \simeq \mathbb{R}^n$)

Obs: Fibrado tangente $TM = \bigcup_{m \in M} T_pM$ é uma variedade de dim $2n$, que possui um mapa $TM \longrightarrow M$ dada pela projeção. (Podemos pensar em TM como um conjunto de fibras (T_pM) "costuradas" uma na outra formando outra variedade)

Considerando um sistema de coordenadas $(U, \varphi) = (U, x_1, \dots, x_n)$ em $p \in M$.
Temos uma base canônica de T_pM induzida por φ : $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \in T_pM$

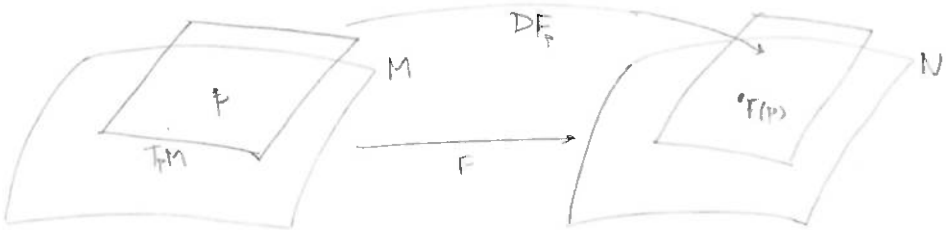
Para falar de campos vetoriais, precisamos falar de aplicações diferenciáveis.

Def: Sejam M e N variedades. Uma aplicação $F : M \longrightarrow N$ é diferenciável se $\phi \circ F \circ \psi^{-1}$ é de classe C^∞, para todos sistemas de coordenadas (U, ϕ) de M e (V, ψ) de N.



Podemos definir o diferencial de F no ponto p como

$$(dF)_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$$



Def: Um <u>campo vetorial X</u> numa variedade M é um mapa $X : M \longrightarrow TM$ que associa um vetor $X(m)$ no ponto $m \in M$, isto é, $\pi_M \circ X = Id$

Notação: $\mathfrak{X}(M)$

Em coordenadas: $X|_U = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, onde $X^i : U \to \mathbb{R}$ são as componentes do campo vetorial.

Podemos definir uma nova função $X(f) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por $X(f)(p) \equiv X_p(f)$

Note que $X(f)|_U = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^\infty(U)$

Além disto, $(dF_p)X = Y_{F(p)} \in \mathfrak{X}(N)$

Def: ① Um caminho suave $\gamma : I \to M$ diz-se uma <u>curva integral</u> de X se $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$ $\forall t \in I$.

② O <u>fluxo</u> de X é a coleção de mapas $\varphi_t : D_t \to M$ tal que $t \mapsto \varphi_t(m) = \dot{c}(t)$ onde $c(t)$ é a curva integral de X que satisfaz $c(0) = m$.

$D_t = \{ m \in M \mid 0, t \in (a,b) \}$.

O fluxo satisfaz $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$

<u>Exemplos</u>: ① em $\mathbb{R}^2$ podemos considerar o campo vetorial $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$

$$E = x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

② Em S^1: $X := -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$

③ Em $\mathcal{M}$: $X = \dot{x} X_1 + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{P}_x \frac{\partial}{\partial P_x} + \dot{P}_y \frac{\partial}{\partial P_y}$

onde
$$\begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{x} = \frac{P_x}{1+y^2} \\ \dot{y} = P_y \\ \dot{P}_x = \frac{y P_x P_y}{1+y^2} \\ \dot{P}_y = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{M} = \{ (x, y, z, P_x, P_y, P_z) \mid P_z = \frac{y}{1+y^2} P_x \}$$

* Operações com campos - colchete de Lie

Def: Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vetoriais. O colchete de Lie entre X e Y é $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ def por

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

Exemplo: $M = \mathbb{R}^3$ com coordenadas (x,y,z), e campos

$$X = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{e} \quad Z = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

$$[X,Y] = \left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} = Z$$

Exercício: $[Y,Z] = X \quad [Z,X] = Y$

Propriedades: Antissimetria, bilinearidade, Identidade de Jacobi e Regra de Leibniz.

* Distribuições

Uma distribuição k-dim D em M é uma aplicação $M \longrightarrow T_pM$, $p \longmapsto D_p$ que a cada ponto $p \in M$, associa um subespaço $D_p \subset T_pM$ de dim k.

Nem sempre é verdade que exista uma folheação $\mathcal{F}$ tal que $D = T\mathcal{F}$.

Uma condição necessária para que isto aconteça é que para todo campo vetorial $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$, temos que $[X,Y] \in \mathfrak{X}(D)$. Quando isto acontece, dizemos que D é involutiva.

Def: Dizemos que D é integrável se existe uma folheação $\mathcal{F}$ de M tal que $T\mathcal{F} = D$.

Teorema (Frobenius): Uma distribuição D suave, de posto constante é integrável se e somente se é involutiva.

Folheação: É a decomposição de M em conjuntos conexos por caminhos disjuntos

Exemplo: $\mathbb{R}^2$ é folheado por retas $y = ax$

AULA 3

⑤ Formas diferenciais

Se $T: V \to W$ entre dois espaços vetoriais de dimensão finita, recordemos que sua transposta $T^*: W^* \to V^*$ é a transformação linear entre os espaços vetoriais duais definida por $\boxed{T^*\alpha(v) = \alpha(Tv)}$.

Da mesma forma, existe uma aplicação induzida $T^*: \Lambda^k W^* \to \Lambda^k V^*$ definida por $T^*\omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(Tv_1, \dots, Tv_k)$.

Seja M uma variedade diferenciável. Se $p \in M$ e $(x_1, \dots, x_n)$ coord locais em p, então os vetores tangentes $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ $i = 1, \dots, n$ formam uma base de T_pM.

Da mesma forma, as formas $d_p x_i$ $(i = 1, \dots, n)$ formam uma base de $T_p^* M$.

Estas bases são duais. Podemos tomar o produto $\Lambda^k T_p^* M$ (álgebra exterior) com base $d_p x_{i_1} \wedge \dots \wedge d_p x_{i_k}$ $(i_1 < \dots < i_k)$

Fibrado cotangente: $T^*M \to M$ é variedade de dim $2n$

Se $(U, x_1, \dots, x_n)$ são coordenadas locais, então uma forma diferencial ω de grau k pode ser escrita na forma:

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_I \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

suave

Notação: $\Omega^k(M)$.

Se fixarmos uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$, o elemento $\omega_p \in \Lambda^k T_p^* M$ pode ser visto como uma aplicação multilinear alternada

$$\omega_p : T_pM \times \dots \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

Assim, se $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ são campos vetoriais em M, obtemos uma função $\omega(X_1, \dots, X_k) \in C^\infty(M)$ dada por $p \longmapsto \omega_p(X_1|_p, \dots, X_k|_p)$

* Operações com formas diferenciais

① Produto exterior : $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^s(M) \longrightarrow \Omega^{k+s}(M)$

$$(\omega, \eta) \longmapsto (\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p$$

② Pullback : Seja $F: M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades.

Podemos associar : $d_p F : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ e $(d_p F)^*: \Lambda^k T^*_{F(p)} N \longrightarrow T_p M$

Definimos o pullback de formas diferenciais por $F^*: \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$

por $(F^*\omega)(X_1, \dots, X_k)_p = ((d_p F)^*\omega)(X_1|_p, \dots, X_k|_p) = \omega(d_p F(X_1)|_p, \dots, d_p F. X_k|_p)$

Como esta fórmula define uma aplicação $\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ que é $C^\infty(M)$ - multilinear e alternada, $F^*\omega$ é uma forma diferencial de grau k em M.

Exemplo : $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $F(u,v) = \left(u+v, u-v, v^2, \frac{1}{1+u^2}\right)$ — $\mathbb{R}^2$ coord (u,v), $\mathbb{R}^4$ coord (x,y,z,w)

$\eta = x\,dy \wedge dz - e^z dz \wedge dw \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$

O pullback é dado por:

$$F^*\eta = (x \circ F)\, d(y \circ F) \wedge d(z \circ F) - e^{(z\circ F)} d(z \circ F) \wedge d(w \circ F)$$

$$= (u+v)\, d(u-v) \wedge d(v^2) - e^{v^2} d(v^2) \wedge d\left(\frac{1}{1+u^2}\right)$$

$$= (u+v)du \wedge 2v dv - 2v e^{v^2} dv \wedge -\frac{2u}{(1+u^2)^2} du$$

$$= \left(2v(u+v) - \frac{4uve^{v^2}}{(1+u^2)^2}\right) du \wedge dv$$

③ Produto interior: Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$, chama-se produto interior de ω por X à forma diferencial $i_X\omega \in \Omega^{k-1}(M)$.

$$i_X\omega(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$$

④ derivada exterior : Seja $\omega \in \Omega^k(M)$ uma forma diferencial de grau k seu diferencial é dado por

$$d\omega(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{X_i}, \dots, X_k)) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, X_k) \quad \hat{X_j}, \hat{X_i}$$

Note que $d: \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$

$(a,b) \Rightarrow \{a,b\}$

Aplicação: Teorema de Stokes

Seja M uma variedade compacta, orientável de dim n com bordo ∂M.

Seja $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$. Então $\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha$

podemos escolher um sentido positivo sem medo
existe um sistema de coord. segundo onde a
troca de coord. o jacob. são positivos
S^1, S^2, T^2

→ casos particulares: ① Teorema Fundamental do cálculo: $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

② Teorema de Green: Para uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy$$

③ Teorema de Stokes clássico: Para uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$,

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \right\}$$

$$= \iint_S \underbrace{n \cdot \nabla \times F}_{\text{rotacional}}\, dA = \int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo de classe C^1

n = vetor normal unitário

$\times$ = prod vetorial $\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = a_y b_z - a_z b_y \ldots$

AULA 4

⑥ Variedades simpléticas

Seja M uma variedade suave M. Dizemos que uma 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ é **não-degenerada** se ω_x é não degenerada em cada ponto $x \in M$.

Def: Uma estrutura simplética em M é uma 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ que é não degenerada e tal que $d\omega = 0$. Neste caso, o par (M, ω) é uma variedade simplética.

Exemplo: Seja U um aberto de $\mathbb{R}^{2n} = \{(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)\}$ munido com a 2-forma $\omega_0 := \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$

Em cada ponto de U, a matriz associada é $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, logo ω_0 é não degenerada.

Obviamente ω_0 é fechada e daí, ω_0 é simplética.

Note que $\omega_0 = -d\alpha$, onde $\alpha = \sum_i p_i\,dq_i$

Obs Em geral, uma variedade simplética são localmente rígidas, não somente na vizinhança de um ponto, mas também de certas subvariedades (Teorema de Darboux)

Exemplos ① (Espaços vetoriais simpléticos) Seja (Z, Ω_0), onde $\Omega_0(u,v) = -u^t J v$,

Temos que (Z, Ω_0) é uma var simplética

② O cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ com coordenadas (θ, p) é uma variedade simplética com $\Omega = d\theta \wedge dp$

③ O toro $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (θ, φ) é uma var simplética, $\Omega = d\theta \wedge d\varphi$

④ A esfera S^2 de raio r é simplética com $\Omega = r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \wedge d\varphi$ (elemento de área).

* Forma simplética no fibrado cotangente

Todo fibrado cotangente possui uma estrutura simplética canônica, e portanto qualquer variedade está naturalmente associada a uma forma simplética. Tal estrutura simplética é a generalização da forma simplética canônica em $\mathbb{R}^{2n}$ e aparece naturalmente no estudo de sistemas mecânicos clássicos.

Sejam $Q \xrightarrow{} $ espaço de conf uma variedade e T^*Q $\to$ espaço de momentos seu fibrado cotangente. Denotamos por $\pi : M \longrightarrow Q$ a projeção natural e consideramos a aplicação tangente $d\pi : TM \longrightarrow TQ$. Definimos a 1-forma tautológica $\alpha \in \Omega^1(M)$ por

$$\alpha_p(X_p) := \langle p, d_p\pi(X_p) \rangle \qquad p \in M, \; X_p \in T_pM \qquad (*)$$

Como $p \in T^*_{\pi(p)}Q$ e $d_p\pi(X_p) \in T_{\pi(p)}Q$, o lado direito da equação acima denota a contração usual entre um espaço vetorial e seu dual.

A forma canônica de T^*Q é definida como $\boxed{\omega := -d\alpha}$

Usando coordenadas locais $(x_1, \dots, x_n)$ em Q e $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ coord em M, temos

$$\alpha_p = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, dx_j \qquad e \qquad \omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge d\xi_j$$

Note que, se $(x_1, \dots, x_n) \in Q$ e $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ coord cotangentes em T^*Q. Temos

$d_p\pi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x$ e $d_p\pi\left(\left.\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right|_p\right) = 0$ onde $p = (x, \xi) \in T^*Q$. Logo via $(*)$: $\alpha_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right) = \xi_j$ $\alpha_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right|_p\right) = 0$

Seja B uma 2-forma fechada em Q e considere em T^*Q a 2-forma $\boxed{\omega_B := \omega + \pi^* B}$.
Vemos que $d\omega_B = 0$ e é não-deg. Essas formas são conh. como form. simpl. twisted, relacionadas a fluxos

→ Sistemas hamiltonianos (toda dinâmica newtoniana vira hamiltoniana)

Como introduzimos as variedades simpléticas, podemos estudar dinâmica hamiltoniana neste contexto.

Def: Seja (M, Ω) uma variedade simplética. Um campo vetorial X em P é dito hamiltoniano se existe uma função $H: P \to \mathbb{R}$ tal que $i_X \Omega = dH$

isto é, para todo $v \in T_pM$, temos a identidade $\Omega_p(X(p), v) = dH(p)v$

As equações de Hamilton são dadas pelas equações $\dot{z} = X_{H}(z)$

As equações hamiltonianas em coord. são
& dimensão finita, as equações

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Se X_H é um campo vetorial com fluxo φ, então pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}\left(H(\varphi_t(z))\right) = dH(\varphi_t(z)) \cdot X_H(\varphi_t(z)) = \Omega\left(X_H(\varphi_t(z)), X_H(\varphi_t(z))\right) = 0$$

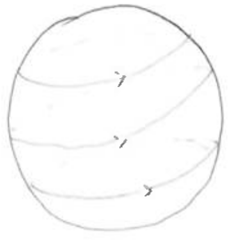
como Ω é antissimétrica. Então $H \circ \varphi_t$ é constante em t.

Isto significa o seguinte:

Proposição: (Conservação de energia). Se φ_t é o fluxo de X_H numa variedade simplética M, então $H \circ \varphi_t = H$ (quando bem definida).

Exemplo (Função altura na esfera) Considere na esfera S^2 a função altura $H(\theta, h) = h$ e a forma simplética dada pela forma de área $d\theta \wedge dh$

Temos que $X_H = \frac{\partial}{\partial \theta}$ pois $i_{X_H} d\theta \wedge dh = dH$.



Fluxo hamiltoniano da função altura

7 Variedades de Poisson

A partir de uma estrutura simplética $\omega \in \Omega^2(M)$, podemos definir um mapa $\omega^b : TM \longrightarrow T^*M$ que é isomorfismo ($X_f = (\omega^b)^{-1}(df)$), logo sua inversa é o seguinte mapa bilinear e antissimétrico $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, onde $\boxed{\{f,g\} = \omega(X_f, X_g)}$

Este colchete mede a taxa de variação de uma função g ao longo do fluxo hamiltoniano de uma função f. Ele é conhecido como <u>colchete de Poisson</u>

. $d\omega = 0 \iff$ Jacobi para $\{\cdot,\cdot\}$

$d\omega(X_f, X_g, X_h) = \{f, \{g,h\}\} + \{h, \{f,g\}\} + \{g, \{h,f\}\}$

Mais ainda, $\{\cdot,\cdot\}$ satisfaz a regra de Leibniz: $\{f, gh\} = \{f,g\}h + \{f,h\}g$

Da regra de Leibniz podemos definir um bivetor $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ unicamente determinado por $\pi(df, dg) = \{f,g\} = \omega(X_g, X_f)$

que em coordenadas é $\pi = \sum \frac{1}{2}\pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$

O bivetor π também define um mapa $\pi^\# : T^*M \longrightarrow TM$, $\alpha \longmapsto i_\alpha \pi$ de modo que podemos escrever $X_f = \pi^\#(df)$. Daí, concluímos que $df = \omega^b(X_f) = \omega^b(\pi^\#(X_f))$ logo, $\omega^b = (\pi^\#)^{-1}$ e $(\omega_{ij}) = (\pi^{ij})^{-1}$.

Assim, vemos que podemos considerar um bivetor $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ no lugar das 2-formas para definir uma estrutura simplética.

π é <u>não degenerado</u> se o mapa $\pi^\#$ é um isomorfismo (equivalentemente, (π^{ij}) é inversível. Além disto, π é um bivetor de Poisson se o colchete $\{f,g\} = \pi(df, dg)$ satisfaz a identidade de Jacobi.

A relação $\pi(df, dg) = \omega(X_f, X_g)$ estabelece uma relação 1:1 entre bivetores de Poisson não degenerado e formas simpléticas.

$\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ não degener.	$\omega \in \Omega^2(M)$ não deg
$Jac_\pi = 0$	$d\omega = 0$
$X_f = \pi^\#(df)$	$i_{X_f}\omega = df$
$\{f,g\} = \pi(df, dg)$	$\{f,g\} = \omega(X_g, X_f)$

<u>Obs</u>: se retiramos a condição de ser não degenerado, a var. de Poisson continua bem definida

* Campos vetoriais hamiltonianos

No contexto da geometria de Poisson, um campo hamiltoniano $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ é o campo que satisfaz $X_H(g) = \{g, H\}$.

Teorema: Sejam H e $g \in C^\infty(M)$. Então g é constante ao longo das curvas integrais de X_H se e somente se $\{g, H\} = 0$

A função f que satisfaz o teorema anterior é chamada integral de movimento (ou integral primeira ou constante de movimento).

Entre elementos de $C^\infty(M)$ são funções C tal que $\{C, f\} = 0$ para todo $F \in C^\infty(M)$. Isto é, C é constante ao longo do fluxo de todos os campos vetor. hamiltonianos X_f, ou, equivalentemente, $X_C = 0$, isto é, C gera a dinâmica trivial. Tais funções são chamadas de funções Casimir.

Exemplo: ① Se considerarmos o grupo das rotações $SO(3) \simeq \mathbb{R}^3$, identificando $\mathbb{R}^3$ e $(\mathbb{R}^3)^*$ via o produto interno usual, nós temos a estrutura de Poisson em $\mathbb{R}^3$ $\{f, g\}(v) = -v \cdot (\nabla f \times \nabla g)$, onde $v \in \mathbb{R}^3$ e ∇f é o gradiente de f calculado em v. Este colchete é conhecido como o colchete corpo rígido. Neste contexto, seja $C(v) = \frac{\|v\|^2}{2}$. Então $\nabla C(v) = v$ e pelas propriedades do produtos entre vetores:

$$\{C, f\}(v) = -v \cdot (\nabla C \times \nabla f) = -v \cdot (v \times \nabla f) = -\nabla f \cdot (v \times v) = 0$$

Isto mostra que $C(v) = \frac{\|v\|^2}{2}$ é uma função Casimir.

② Numa variedade simplética (M, ω), toda função casimir é constante nas componentes conexas de M. Isto acontece pois no caso simplético $X_C = 0$ implica $dC = 0$ (pois ω é não degenerada), daí C é localmente constante.

⑧ Sistemas integráveis

Def: Um sistema hamiltoniano é uma tripla (M, ω, H), onde (M, ω) é uma variedade simplética e $H \in C^\infty(M)$ é uma função hamiltoniana

Dizemos que o sistema é completamente integrável se existem $n \left(=\frac{1}{2}\dim M\right)$ funções $f_1 = H, f_2, \dots, f_n$ onde

i) (Independência) Seus diferenciais são linearmente independentes num conjunto denso (ou aberto de M): $df_1 \wedge \dots \wedge df_n \neq 0$

II) (Involução) Elas comutam par a par pelo colchete de Poisson: $\{f_i, f_j\} = 0 \ \forall i, j$

Obs: Podemos dar uma definição alternativa para sistemas integráveis apenas usando estruturas de Poisson.

Exemplos: (n osciladores harmônicos) Variedade de fase $M = T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ com forma simplética: $\omega_{can} = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$ e funções hamiltonianas: $H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i^2 + \lambda_i^2 q_i^2)$, $\lambda_i > 0$

e as integrais em involução (as n necessárias) são $F_i(q,p) = \frac{1}{2}(p_i^2 + \lambda_i^2 q_i^2)$ $i = 1, \dots, n$

$\lambda_i = \sqrt{k/m} > 0$

⑨ Exemplos

+ Uma partícula sob um campo magnético

Seja $\Omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ fechada e seja $B = X_1\frac{\partial}{\partial x} + X_2\frac{\partial}{\partial y} + X_3\frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz

$$i_B(dx \wedge dy \wedge dz) = \Omega$$

Isto nos permite escrever Ω do seguinte modo

$$\Omega = X_1\, dy \wedge dz - X_2\, dx \wedge dz + X_3\, dx \wedge dy$$

Considerando B como o campo magnético, as equações de movimento para uma partícula com carga e e massa m são dadas pela eq. (lei de força Lorentz)

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{e}{c} v \times B \qquad (1)$$

onde $r = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ com coord (x, v), consideramos a forma simplética:

$$\omega_B = m\left(dx \wedge d\dot{x} + dy \wedge d\dot{y} + dz \wedge d\dot{z} \right) - \frac{e}{c}\Omega \qquad \left(\text{Note que } \omega_B = \omega_{can} + \pi^* B\right)$$

Consideramos a função Hamiltoniana $H: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada pela energia cinética

$H = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Note que:

$$dH = m(\dot{x}\, d\dot{x} + \dot{y}\, d\dot{y} + \dot{z}\, d\dot{z})$$

Escrevendo $X_H = (A_1, A_2, A_3, \dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3)$ $\quad \left(X_H \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3), \text{ base } \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial}{\partial \dot{z}}\right\}\right)$

temos: $i_{X_H}\omega_B = \omega_B(X_H, \cdot) =$

$$= m\left(\dot{A}_1 dx - A_1 d\dot{x} + \dot{A}_2 dy - A_2 d\dot{y} + \dot{A}_3 dz - A_3 d\dot{z}\right)$$
$$- \frac{e}{c}\left(B_1 A_3 dy - B_1 A_2 dz - B_2 A_3 dx + B_2 A_1 dz + B_3 A_2 dx - B_3 A_1 dy\right)$$

$$= -m\left(A_1 d\dot{x} + A_2 d\dot{y} + A_3 d\dot{z}\right)$$
$$+ \left(m\dot{A}_1 + \frac{e}{c}(B_2 A_3 - B_3 A_2)\right)dx + \left(m\dot{A}_2 - \frac{e}{2}\left(B_1 A_3 - B_3 A_1\right)\right)dy$$
$$+ \left(m\dot{A}_3 + \frac{e}{c}\left(B_1 A_2 - B_2 A_1\right)\right)dz$$

Então, $i_{X_H}\omega_B = X_H$ é equivalente a

$$\dot{x} = -A_1 \qquad \dot{y} = -A_2 \qquad \dot{z} = -A_3$$

$$m\dot{A}_1 = -\frac{e}{c}\left(B_2 A_3 - B_3 A_2\right) \quad \Longrightarrow \quad m\ddot{x} = \frac{e}{c}\left(B_2 \dot{z} - B_3 \dot{y}\right)$$

$$m\dot{A}_2 = \frac{e}{2}\left(B_1 A_3 - B_3 A_1\right) \quad \Longrightarrow \quad m\ddot{y} = \frac{e}{c}\left(B_3 \dot{x} - B_1 \dot{z}\right)$$

$$m\dot{A}_3 = -\frac{e}{2}\left(B_1 A_2 - B_2 A_1\right) \quad \Longrightarrow \quad m\ddot{z} = \frac{e}{c}\left(B_1 \dot{y} - B_2 \dot{x}\right)$$

Note que estas equações são equivalentes à (1)

Note que as equações para uma partícula num campo magnético

Então, as equações de movimento para uma partícula num campo magnético são Hamiltonianas, com energia igual a energia cinética e com forma simplética ω_B.

③ A partícula não-holônoma

Vamos considerar o movimento de uma partícula livre no espaço com massa unitária sujeito à restrição $\boxed{\dot{z} = y\dot{x}}$

O espaço de configuração deste espaço é $Q = \mathbb{R}^3$ com coord (x, y, z).

Um sistema não-holônomo é um sistema mecânico com vínculos nas velocidades. Neste caso, o sistema está descrito por uma var de configuração Q, um lagrangeano $L: TQ \to \mathbb{R}$ e uma distribuição não-integrável $D \subset TQ$ que descreve as restrições cinemáticas não holônomas. As equações de movimento tem a forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \mu^T \mathcal{E}(q)$$

, onde $\mu: TQ \to \mathbb{R}^k$ as ent são mult de lagrange, $\mathcal{E}(q)$ matriz $k \times n$, onde $k =$ nº de vínculos

No formalismo hamiltoniano, as equações de hamilton se tornam

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} + \mu^T \mathcal{E}(q)$$

e a dist. D se torna $\mathbb{L}eg(D) = M$, subvariedade de T^*Q chamada subvar de vínculos

Neste caso, vamos adotar a base $\{X_1, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}$ para TQ, onde $X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$ e em T^*Q, a base dual é $\{dx, dy, \mathcal{E}\}$. Vamos denotar por (x, y, z, p_x, p_y, p_z) as coordenadas em T^*Q associada à esta base dual. Note que estas coordenadas não são canônicas. Chamaremos de coordenadas adaptadas aos vínculos.

Além disto, vamos adotar o formalismo hamiltoniano. Logo:

$$M = \{(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \mid p_z = \frac{y}{1+y^2} p_x\} \subset T^*Q$$

Temos associado à M, uma distribuição $C = \text{span}\{X_1, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p_x}, \frac{\partial}{\partial p_y}\}$.

A 1-forma tautológica em T^*Q é dada por $\alpha = p_x dx + p_y dy + p_z \mathcal{E}$. Quando nos restringimos à M, temos:

$$\alpha_M = p_x dx + p_y dy + \frac{y}{1+y^2} p_x \mathcal{E}$$

Daí, a 2-forma ω_M em M é dada por:

$$\omega_M = -d\alpha_M = dx \wedge p_x + dy \wedge dp_y - \frac{y}{1+y^2} dp_x \wedge \mathcal{E}$$

Quando restringimos ω_M à C, obtemos $\omega_C = dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y - \frac{y p_x}{1+y^2} dx \wedge dy$

Obs: ω_C é fechada e não degenerada em M. (mas não é uma 2-forma, é uma seção)

Seja $H: M \to \mathbb{R}$ dada por $H_M = \frac{1}{2}\left(\frac{P_x^2}{1+y^2} + P_y^2\right)$. H é a função hamiltoniana

A tupla (M, ω_c, H_M) é chamada sistema não holônomo.

(No caso T^*M, o campo vet não holonomo é obtido de maneira intrínseca como
$i_{X_{nh}} i^* \omega_Q = i^*(dH + \mu^T \pi^* \varepsilon)$ $\quad i: M \hookrightarrow T^*Q$)

Logo, conseguimos encontrar

$$i_{X_{nh}} \omega_c = dH|_c \Rightarrow X_{nh} = \dot{x} X_1 + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{P}_x \frac{\partial}{\partial P_x} + \dot{P}_y \frac{\partial}{\partial P_y}$$

onde $\dot{x} = \frac{P_x}{1+y^2}$ $\quad \dot{y} = P_y$ $\quad \dot{P}_x = \frac{y P_x P_y}{1+y^2}$ $\quad \dot{P}_y = 0$

As equações acima são ditas equações de hamilton não holonomas.

A dinâmica em M está descrita pelas curvas integrais de X_{nh}

Como Ω_c é não degenerada, existe um bivetor π_{nh} em M. Então:

$$\pi_{nh} = X_1 \wedge \frac{\partial}{\partial P_x} + \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial P_y} + \frac{y P_x}{1+y^2} \frac{\partial}{\partial P_x} \wedge \frac{\partial}{\partial P_y}$$

A distribuição característica de π_{nh} é C $\left(\pi_{nh}^{\#}(M) = C\right)$. Como C não é integrável,

então π_{nh} não satisfaz Jacobi.

Mas, podemos transformar este sistema num hamiltoniano do seguinte

modo: O grupo $G = \mathbb{R}^2$ age em Q por translação

$$G \times Q \to Q$$
$$(a,b) \cdot (x,y,z) \mapsto (x+a, y, z+b)$$

esta ação, quando levantada à T^*Q deixa M e o hamiltoniano invariantes.

$\Rightarrow \pi_{nh}$ invariante pela ação também.

$(M/G, \pi_{red}, H_{red})$ é um sistema hamiltoniano

M/G var. de dim 3 e coord (y, P_x, P_y). O mapa quociente $p: M \to M/G$ é

dado por $p(x,y,z,P_x,P_y) = (y, P_x, P_y)$. Os campos vetoriais em $\mathfrak{X}(M/G)$ tem

base $\left\{\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial P_x}, \frac{\partial}{\partial P_y}\right\}$ e as 1-formas $\Omega^1(M/G)$ tem base $\{dy, dP_x, dP_y\}$.

Daí, $\pi_{red} = \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial P_y} + \frac{y P_x}{1+y^2} \frac{\partial}{\partial P_x} \wedge \frac{\partial}{\partial P_y}$

O hamiltoniano $H_{red}: M/G \to \mathbb{R}$ é $H_{red} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_x^2}{1+y^2} + p_y^2\right)$

e o campo hamiltoniano é $X_{red} = p_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{y p_x p_y}{1+y^2}\frac{\partial}{\partial p_x}$

Podemos verificar que agora π_{red} satisfaz Jacobi, logo π_{red} é Poisson e portanto o sistema é hamiltonizável após uma redução.

Outros exemplos: Esfera Chaplygin - movimento de uma esfera cujo centro de massa coincide com seu centro geométrico, rolando sem deslizar sobre o plano.

- espaço de configuração $SO(3)\times\mathbb{R}^2$

- Teorema de Noether

ação por simetrias: Um grupo de Lie age por simetrias em M se há uma ação suave $\Phi: G\times M \to M$, $(g,x) \mapsto \Phi_g(x)$ tal que cada Φ_g é um simplect. $\Phi_g^*\omega = \omega$ $\forall g \in G$

a esta ação associamos um mapa momento

Então o teorema de Noether me diz que: se temos um sistema hamiltoniano (M, ω, H) suponha que G é um grupo que age por simetrias e que o hamiltoniano é invariante, então podemos construir uma constante de movim. ao longo do fluxo de H: $J: M \to \mathfrak{g}^*$ tq $\{J^\xi, H\} = 0$ $\quad J^\xi = \langle J, \xi\rangle$ $\xi \in \mathfrak{g}$

simetria hamiltoniana $\Rightarrow$ quantidade conservada.

- quantização geométrica

mecânica clássica $\longrightarrow$ mec quântica

M - espaço de fase $\longrightarrow$ V - espaço de hilbert

$f(M) = C^\infty(M)$ funç. observ. $\longrightarrow$ $Op(V)$ - operadores (lineares) n.c.a.

c.a.

Poisson structure $\longrightarrow$ algebra $*_\hbar$

Bibliografia adicional:

(1) Lições de Geometria Diferencial. Rui Loja Fernandes

(2) Manifolds 2024-2025 (Notas de aula). Marius Crainic

(3) A Brief introduction to Dirac Manifolds. Henrique Bursztyn
(paper)