Лабораторная работа Logistic map

Normal level

Для работы будет использоваться Python с библиотеками numpy для вычислений и matplotlib для графического представления.

In [52]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [53]:
```
def logistic_map(x, r):
        """
        Функция одномерного логистического отображения.
        x: x_n
        r: параметр
        возвращаемое значение: x_{n+1}
        """
        return r * x * (1 - x)
```

Исследование неподвижных точек отображения

Необходимо:

1. Найти все неподвижные точки логистического отображения
2. Определить такие значения r, при которых отображение имеет одну/несколько неподвижных точек
3. Определить максимальное количество неподвижных точек отображения

Неподвижная точка x^* удовлетворяет:

$$x^* = f(x^*)$$

Т.е. рассматриваем уравнение:

$$x^* = rx^*(1 - x^*)$$

Ищем все x^* удовлетворяющие уравнению.
(для простоты x^* далее будет записываться как x)
Перенесем x:

$$rx(1 - x) - x = 0$$

Вынесем x:

$$x(r(1 - x) - 1) = 0$$

Получили произведение двух множителей, равное нулю, следовательно

$$x = 0 \ \text{ или } \ r(1-x) - 1 = 0$$

Решим второе уравнение:

$$r(1-x) - 1 = 0 \Rarr r(1-x) = 1 \Rarr 1 - x = \frac{1}{r} \Rarr x = \frac{r-1}{r}$$

Рассмотрим 2 случая:

- Если $r = 0$: единственная неподвижная точка $x = 0$
- Если $r \neq 0$: две неподвижные точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{r-1}{r}$

Из определения логистического отображения имеем:

$$r \in [0, 4], \ \ 0 \leq x_n \leq 1,$$

т.е. нас интересует лишь неподвижные точки внутри этого отрезка.

1. Первая точка $x_1 = 0$ лежит в $[0, 1], \ \forall r$
2. Рассмотрим вторую точку $x_2 = \frac{r-1}{r}$:
   Условие $x_2 \leq 1$:

   $$\frac{r-1}{r} \leq 1 \Rarr r - 1 \leq r \Rarr -1 \leq 0,$$

   что всегда верно при $r > 0$, значит ограничение сверху не добавляет условий.
   Условие $x_2 \geq 0$:

   $$\frac{r-1}{r} \geq 0$$

   при $r > 0$ знак дроби будет определяться знаком числителя:
   Если $r - 1 \geq 0 \iff r \geq 1$, то $x_2 \geq 0$
   Если $r - 1 < 0 \iff r < 1$, то $x_2 < 0$

Таким образом,

- при $0 < r < 1$ вторая точка вне интервала $[0, 1]$ (т.к. отрицательна)
- при $r = 1$ вторая точка совпадает с первой: $x_1 = x_2 = 0$
- при $1 < r \leq 4$ вторая точка лежит в интервале $(0, 1]$

Выводы по кол-ву точек в зависимости от r
При $r = 0$ одна неподвижная точка $x^* = 0$
При $r \neq 0$ две неподвижные точки:

$$x_1 = 0, \ x_2 = \frac{r-1}{r}$$

Т.е. максимум 2 неподвижные точки, т.к. $f(x_n)$ - квадратичная функция, а уравнение неподвижной точки $x = f(x)$ сводится к квадратному, которое имеет не более двух корней

Монотонность и предел логистической последовательности при $r \in (0, 1]$

Утверждение

$$\forall r \in (0,1],\ \forall x_0 \in (0,1): \ \ \{x_n\} - \text{монотонно убывает}$$

Доказательство

Рассмотрим отношение:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{rx_n(1-x_n)}{x_n} = r(1-x_n)$$

Из условия знаем, что $0 < x_0 < 1$, из этого следует $0 < x_n < 1$ при $r \in (0, 1]$ (доказано в easy части л.р.)
Получаем:

$$0 < (1-x_n) < 1$$

Т.к. из условия $r \in (0, 1]$ имеем:

- $r(1-x_n) > 0$
- $r(1-x_n) < 1 \cdot 1 < 1,\ \text{ т.к. } (1-x_n) < 1$

Таким образом,

$$0 < r(1-x_n) < 1 \ \backslash\text{Rarr}\ 0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \ \backslash\text{Rarr}\ 0 < x_n + 1 < x_n$$

Каждый следующий член последовательности строго меньше предыдущего, а значит $\{x_n\}$ - монотонно убывает и всюду положительна

Существование предела

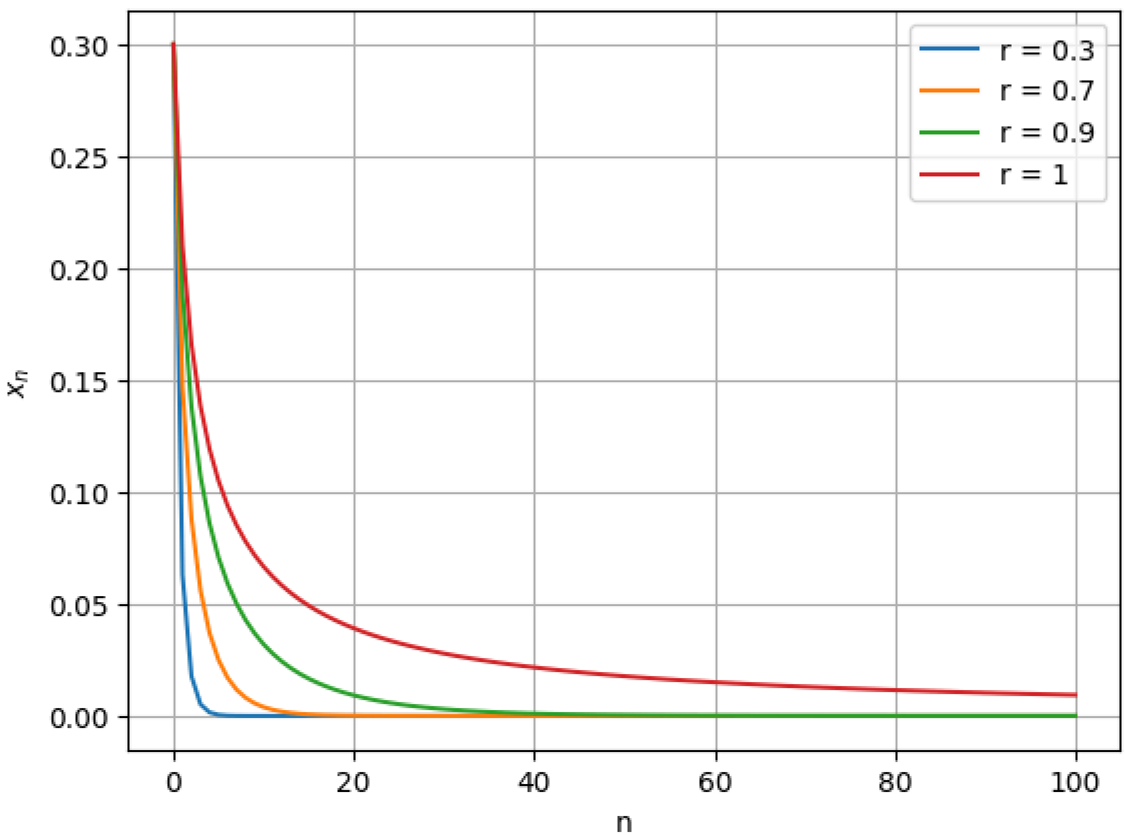
Последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает и положительна, снизу ограничена числом 0
По теореме Вейерштрасса (о монотонной ограниченной последовательности) знаем, что последовательность имеет конечный предел

In [54]:
```
def sequence_iterate(x0, r, amount):
    """
    Функция генерации numpy массива из некоторых последовательных элементов {x_n}
    x0: первый элемент массива
    r: параметр
    amount: кол-во элементов
```

```
    возвращаемое значение: numpy.array
    """
    x_list = [x0]
    x_cur = x0
    for _ in range(amount):
        x_cur = logistic_map(x_cur, r)
        x_list.append(x_cur)
    return np.array(x_list)
```

In [55]:
```
r_vars = [0.3, 0.7, 0.9, 1]
x0 = 0.3
amount = 100
```

In [56]:
```
plt.figure()
for r in r_vars:
    xs = sequence_iterate(x0, r, amount)
    plt.plot(range(amount + 1), xs, label=f"r = {r}")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("$x_n$")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



Из графика видим монотонное убывание последовательности и стремление к нулю.

Исследование подпоследовательностей $\{x_{2n}\}$ и $\{x_{2n+1}\}$

Из условия дано:

$$r \in (2,3),\ \ x_{2n} > x^*,\ \ x_{2n+1} < x^*$$

Также известно:

$$x_{\in}(0,1),\ \ r \in (1,3]:\ \ \lim_{n\text{\rarr}\infty} x_n = x^*$$

Раннее было доказано, что при $r \neq 0$ мы имеем две неподвижные точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{r-1}{r}$
Рассматривать будем только вторую (ненулевую, т.к. x_{2n+1} не может быть отрицателен)

Исследование монотонности подпоследовательностей

1. Введение отображений

Рассмотрим отображение $g(x) = f(f(x))$, т.е. $x_{n+2} = g(x_n)$ Для исследования монотонности нас интересует только знак разности двух соседних элементов подпоследовательностей
Введем еще одно отображение $h(x) = g(x) - x$

$$g(x) = f(f(x)),\ \ h(x) = g(x) - x$$

Заметим, что корни $h(x)$ соответствуют неподвижным точкам отображения $g(x)$ (когда $g(x) = x$ отображение $h(x)$ принимает значение 0), т.е. решениям уравнения $g(x) = x$

Вычислим и упростим:

$$h(x) = g(x) - x = r^2x(1-x)(1-rx(1-x)) - x$$

Умножим x на $1 - x$:

$$g(x) = r^2(x-x^2)(1-r(x-x^2)) = r^2(x-x^2) - r^3(x-x^2)^2\text{\Rarr}$$

$$h(x) = g(x) - x = r^2(x-x^2) - r^3(x-x^2)^2 - x$$

Умножим r^n на скобки:

$$h(x) = (r^2x - r^2x^2) - (r^3x^2 - 2r^3x^3 + r^3x^4) - x$$

Раскроим скобки:

$$h(x) = r^2x - r^2x^2 - r^3x^2 + 2r^3x^3 - r^3x^4 - x$$

Сгруппируем слагаемые:

$$h(x) = -r^3x^4 + 2r^3x^3 - (r^2 + r^3)x^2 + (r^2 - 1)x$$

Вынесем общий множитель $-x$:

$$h(x) = -x(r^3x^3 - 2r^3x^2 + (r^2 + r^3)x - (r^2 - 1))$$

Выделим кубический многочлен:

$$P(x) = r^3x^3 - 2r^3x^2 + (r^2 + r^3)x - (r^2 - 1)$$

$$h(x) = -xP(x)$$

Заметим, что $x = 0$ - корень $h(x)$, соответствующий первой неподвижной точке
Зная вторую неподвижную точку можем записать $h(\frac{r-1}{r}) = 0$, а из этого следует, что x_2 - корень $P(x)$
Следовательно, $P(x)$ делится на $(x - x_2)$
Найдем линейный множитель с тем же корнем:

$$x - x_2 = x - \frac{r-1}{r} = \frac{rx - (r-1)}{r} = \frac{rx - r + 1}{r}$$

$$\text{линейный множитель} \sim (rx - r + 1)$$

Поделим $P(x)$ на множитель $rx - r + 1$:

$$\frac{r^3x^3}{rx-r+1} - \frac{2r^3x^2}{rx-r+1} + \frac{r^3x}{rx-r+1} + \frac{r^2x}{rx-r+1} - \frac{r^2}{rx-r+1} + \frac{1}{rx-r+1}$$

Получим:

$$r^2x^2 - r^2x - rx + r + 1$$

Таким образом,

$$P(x) = (rx - r + 1)(r^2x^2 - r^2x - rx + r + 1)\backslash\mathrm{Rarr}$$

$$h(x) = g(x) - x = -x(rx - r + 1)(r^2x^2 - r^2x - rx + r + 1)$$

Рассмотрим каждый множитель:

1. x дает корень $x = 0$, что соответствует первой неподвижной точке
2. $rx - r + 1 = 0\backslash\mathrm{Rarr}x = \frac{r-1}{r} = x_2$, что соответствует второй неподвижной точке
3. Квадратный множитель, решим относительно x.

$$r^2x^2 - r^2x - rx + r + 1 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3} + 1}{2r}$$

$$x_{3,4} = \frac{r \pm \sqrt{(r-3)(r+1)} + 1}{2r}$$

> При $r \in (2, 3)$ имеем $r + 1 > 0,\ r - 3 < 0$, следовательно подкоренное выражение отрицательно, уравнение не имеет действительных корней.

В итоге, для $r \in (2, 3)$ все действительные корни уравнения $g(x) = x$ - это

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{r-1}{r}$$

2. Исследование разности элементов подпоследовательности на интервалах $(0, x_2)$ и $(x_2, 1)$

Исследуем знак $g(x) - x$ на интервалах $(0, x_2)$ и $(x_2, 1)$.
Т.к. $g(x) - x$ непрерывна, а ее корни на интервале $(0, 1)$ только 0 и x_2, знак на интервалах $(0, x_2)$ и $(x_2, 1)$ неизменен.
Чтобы найти знак на конкретном интервале достаточно будет исследовать одну точку интервала.

1. Интервал $0 < x < x_2$:
   Пусть $x_0 = \frac{x_2}{2} = \frac{r-1}{2r}$
   Подставим x_0 в $h(x)$:

$$h(x_0) = -\frac{(r-1)^2(r^2-2r-7)}{16r}$$

   $(r-1)^2 > 0,$
   $r^2 - 2r - 7 < 0,$ (оценил при границах интервала $(2, 3)$)
   $16r > 0$
   Значит $h(x_0) > 0$\Rarr$g(x_0) - x_0 > 0$\Rarr$g(x_0) > x_0$

2. Интервал $x_2 < x < 1:$ Пустьx_0 = \frac{x_2+1}{2} Подставимx_0вh(x):
   $h(x_0) = \frac{(2r-7)(2r-1)}{16r}$ 2r-1 > 0, 2r - 7 < 0, 16r > 0 Значитh(x_0) < 0 \Rarr g(x_0) - x_0 < 0 \Rarr g(x_0) < x_0$

В итоге,

$$\forall x \in (0, x_2) : \quad g(x) > x \text{ и } \forall x \in (x_2, 1) : \quad g(x) < x$$

3. Монотонность подпоследовательностей

Четная подпоследовательность:
Т.к. $x_{2n} \in (x_2, 1)$, то из предыдущего пункта получаем:

$$g(x_{2n} < x_{2n})$$

Следовательно,

$$x_{2(n+1)} < x_{2n}, \text{ т.к. } g(x_{2n}) = x_{2n+2}$$

Четная последовательность строго убывает

Нечетная подпоследовательность:
Т.к. $x_{2n+1} \in (0, x_2)$, то из предыдущего пункта получаем:

$$g(x_{2n+1} > x_{2n+1})$$

Следовательно,

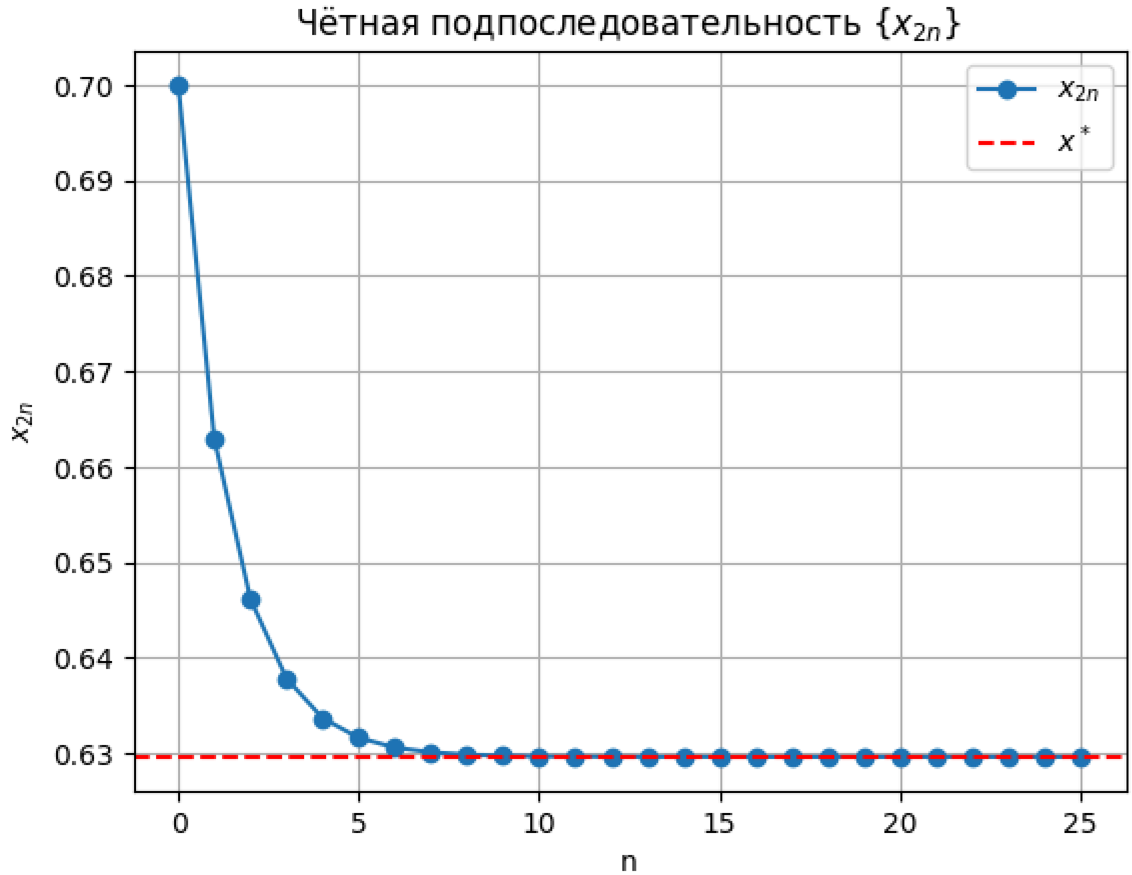
$$x_{2(n+1)+1} > x_{2n+1}, \text{ т.к. } g(x_{2n+1}) = x_{2n+3}$$

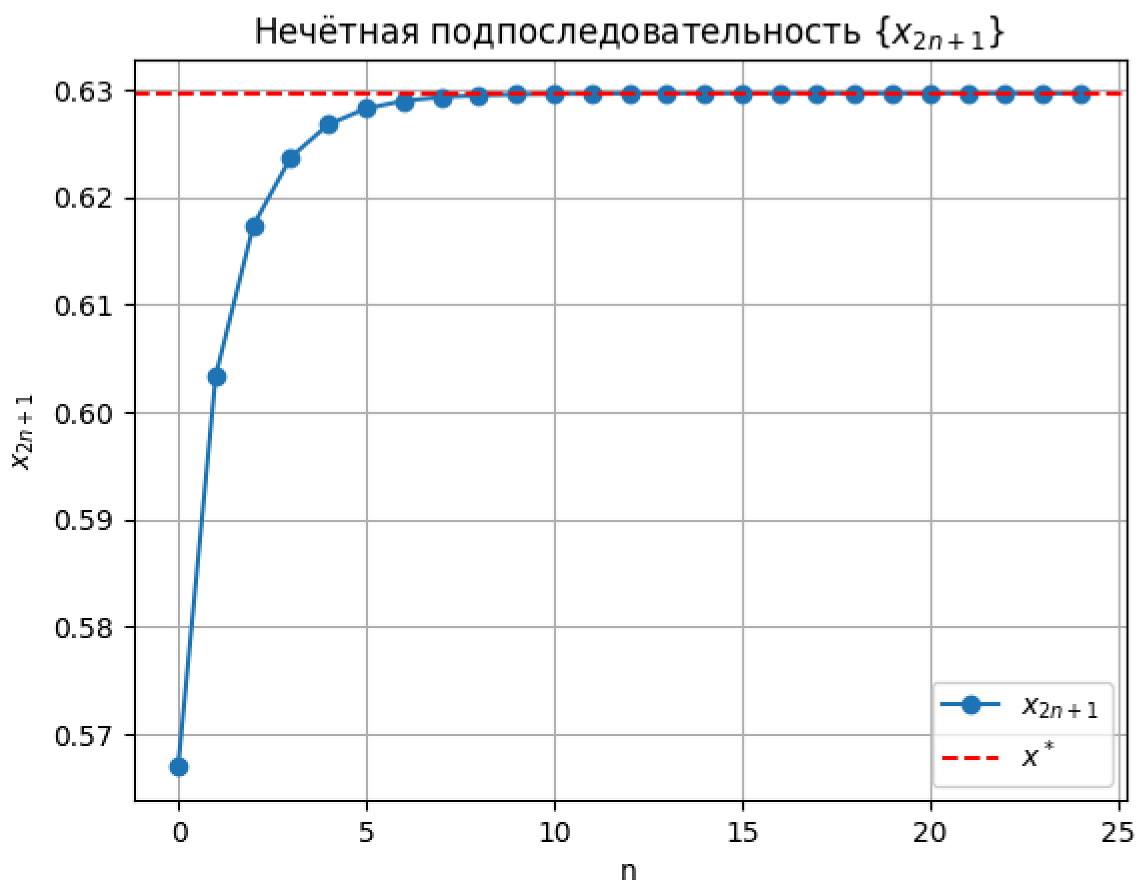
Нечетная последовательность строго возрастает

In [57]:
```
r = 2.7
x0 = 0.7
x = sequence_iterate(x0, r, 50)
x_even = x[::2]
x_odd  = x[1::2]
x_fixed = (2.7 - 1) / 2.7
```

In [58]:
```
plt.figure()
plt.plot(range(len(x_even)), x_even, marker='o', label='$x_{2n}$')
plt.axhline(x_fixed, linestyle='--', color='red', label='$x^*$')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('$x_{2n}$')
plt.title('Чётная подпоследовательность $\\{x_{2n}\\}$')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

plt.figure()
plt.plot(range(len(x_odd)), x_odd, marker='o', label='$x_{2n+1}$')
plt.axhline(x_fixed, linestyle='--', color='red', label='$x^*$')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('$x_{2n+1}$')
plt.title('Нечётная подпоследовательность $\\{x_{2n+1}\\}$')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```





По графикам видим:

- Четная подпоследовательность строго убывает, значения выше неподнижной точки x_2
- Неетная подпоследовательность строго возрастает, значения ниже неподнижной точки x_2

Исследование неподвижных точек и монотонности $g(x_n)$

Отображение $g(x_n)$ задано вариантом ($N = 465208 \bmod 5 = 3$):

$$g(x_{n+1}) = rx_n(1 - x_n)(3 - x_n), \;\; r \in [0; \frac{27}{2(7\sqrt{7} - 10)}]$$

Необходимо:

1. Найти неподвижную точку
2. Найти или оценить диапазон параметра r, при котором последовательность $\{g_n\}$ стремится к нулю
3. Построить графики для разных r

Поиск неподвижной точки

Для неподвижной точки x^* выполняется:

$$x^* = g(x^*) = rx^*(1 - x^*)(3 - x^*)$$

Рассматриваем уравнение:

$$x = rx(1 - x)(3 - x)$$

Замечаем очевидный корень $x = 0$.
Пусть $x \neq 0$. Разделим на x:

$$1 = r(1 - x)(3 - x)\text{\Rarr}$$

$$1 = r(3 - 4x + x^2)\text{\Rarr}$$

$$x^2 - 4x + 3 = \frac{1}{r}\text{\Rarr}$$

$$x^2 - 4x + 3 - \frac{1}{r} = 0$$

Решаем квадратное уравнение:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(3 - \frac{1}{r})}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4 + \frac{4}{r}}}{2} = 2 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{r}}$$

Получили еще две неподвижные точки, однако мы рассматриваем только отрезки $x \in [0, 1]$:

1. Для любого $r > 0$ имеем $\sqrt{1+\frac{1}{r}} > 1$. Вторая точка вне интервала
2. Третья точка может быть как меньше нуля, так и в нашем интервале.

$$2-\sqrt{1+\frac{1}{r}} > 0 \Rarr \sqrt{1+\frac{1}{r}} < 2 \Rarr 1+\frac{1}{r} < 4 \Rarr r > \frac{1}{3}$$

В итоге,

- При $0 < r < \frac{1}{3}$ есть единственная точка $x^* = 0$
- При $\frac{1}{3} < r \leq \frac{27}{2(7\sqrt{7}-10)}$ есть две неподвижные точки:

$$x_1 = 0, \;\; x_2 = 2-\sqrt{1+\frac{1}{r}}$$

Поиск диапазона значений r при котором $\{x_n\} \rarr 0$

Для монотонного убывания последовательности достаточно доказать $0 < g(x) < x$ для всех $x \in (0,1)$.
Для $r > 0$ имеем: $x > 0, \; 1-x > 0, \; 3-x > 0$
Следовательно $g(x) = rx(1-x)(3-x) > 0$

Докажем:

$$g(x) < x, \;\; \forall x \in (0,1)$$

Рассматриваем неравенство:

$$rx(1-x)(3-x) < x, \;\; \forall x \in (0,1)$$

Т.к. $x > 0$ можем поделить:

$$r(1-x)(3-x) < 1$$

Рассмотрим функцию:

$$\phi(x) = (1-x)(3-x) = 3-4x+x^2$$

На отрезке $[0,1]$ изучим производную:

$$\phi'(x) = 2x-4$$

$$2x-4 < 0, \;\; \text{т.к.} \;\; x \leq 1 \Rarr x < 2 \Rarr 2x < 4$$

$$\phi'(x) < 0$$

Т.е. ϕ строго убывает на отрезке, а значит максимум достигается в точке 0:

$$\max_{x\in[0,1]} \phi(x) = \phi(0) = (1-0)(3-0) = 3$$

Следовательно:

$$\phi(x) = (1-x)(3-x) \leq 3 \Rarr$$

$$r(1-x)(3-x) \leq 3r \Rarr$$

$$g(x) \leq 3r$$

Помним, что убывание последовательности показывает неравенство $g(x) < 1$, значит справедливо потребовать:

$$3r \leq 1 \Rarr$$

$$r \leq \frac{1}{3}$$

Таким образом, при $0 < r \leq \frac{1}{3}$ получаем:

$$r(1-x)(3-x) \leq 1 \ \Rarr 0 < g(x) \leq x, \quad \forall x \in [0,1]$$

Т.е. на установленном полуинтервале $g(x)$ **убывает и ограничена снизу нулем**.
Для строгой монотонности достаточно взять интервал вместо полуинтервала.

По теореме Вейерштрасса (о монотонной ограниченной последовательности) существует конечный предел:

$$\lim_{n \rarr \infty} x_n = L \geq 0$$

Отображение g непрерывно, а значит справедливо заметить:

$$L = \lim_{n \rarr \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rarr \infty} g(x_n) = g(\lim_{n \rarr \infty} x_n) = g(L)$$

Т.е. предельная точка L является неподвижной точкой отображения на отрезке $[0,1]$.
При $0 < r \leq \frac{1}{3}$ единственная неподвижная точка $x_* = 0$, следовательно:

$$L = x^* = 0 \iff \lim_{n \rarr \infty} x_n = 0$$

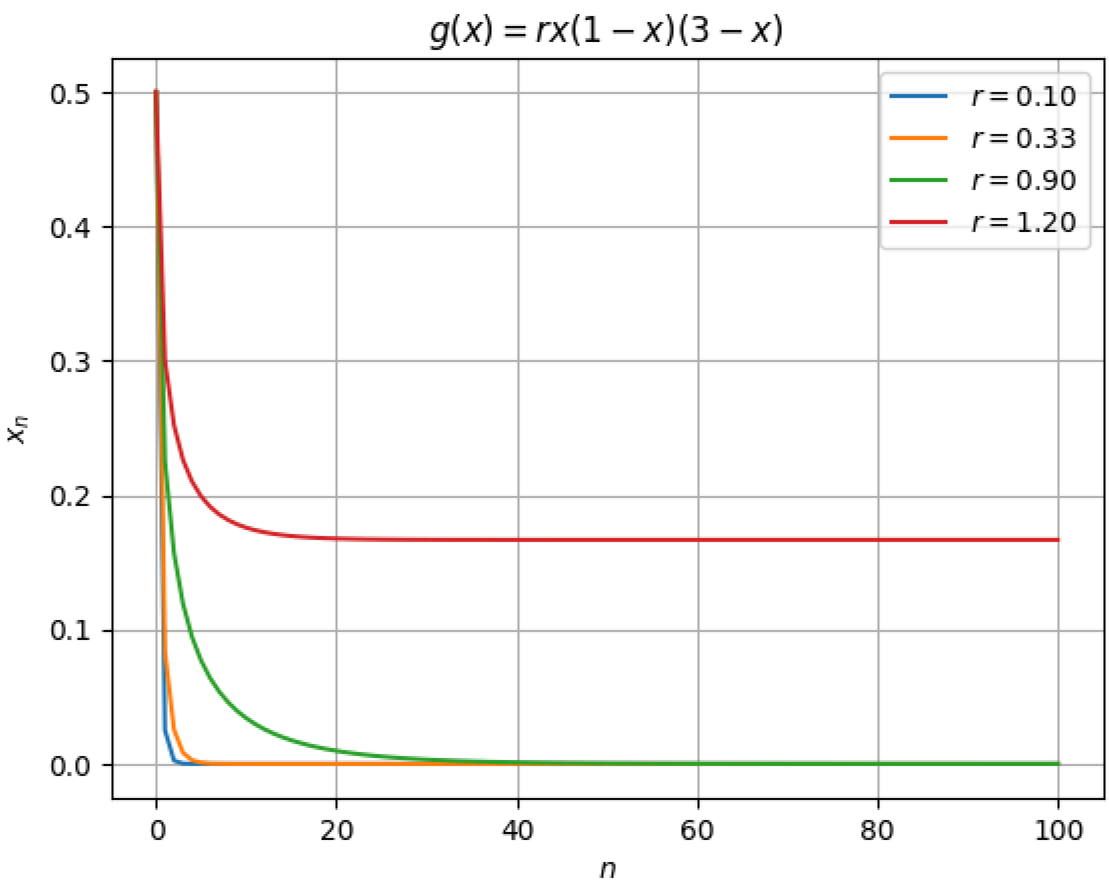
In [59]:
```
def g_map(x, r):
        """
        Функция перехода g_{n+1}
        x: x_n
        r: параметр
        возвращаемое значение: x_{n+1}
        """
        return r * x * (1 - x) * (3 - x)
```

In [60]:
```
def g_sequence_iterate(x0, r, amount):
    """
    Функция генерации numpy массива из некоторых последовательных элементов {x_n}
    x0: первый элемент массива
    r: параметр
    amount: кол-во элементов
    возвращаемое значение: numpy.array
```

```
    """
    x_list = [x0]
    x_cur = x0
    for _ in range(amount):
        x_cur = logistic_map(x_cur, r)
        x_list.append(x_cur)
    return np.array(x_list)
```

In [89]:
```
x0 = 0.5
amount = 100
r_vars = [.1, 1/3, .9, 1.2]
```

In [90]:
```
plt.figure()
for r in r_vars:
    xs = g_sequence_iterate(x0, r, amount)
    plt.plot(range(amount+1), xs, label=fr"$r={r:.2f}$")
plt.xlabel('$n$')
plt.ylabel('$x_n$')
plt.title('$g(x)=r x(1-x)(3-x)$')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



На графике видим, что последовательность на установленном нами интервале $(0, \frac{1}{3}]$ стремится к нулю.