Лабораторная работа Logistic map

Hard level

Для работы будет использоваться Python с библиотеками numpy для вычислений и matplotlib для графического представления.

In [132...
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [133...
```
def logistic_map(x, r):
        """
                Функция одномерного логистического отображения.
                x: x_n
                r: параметр
                возвращаемое значение: x_{n+1}
        """
        return r * x * (1 - x)
```

In [134...
```
def g_map(x, r):
        """
                Функция перехода g_{n+1}
                x: x_n
                r: параметр
                возвращаемое значение: x_{n+1}
        """
        return r * x * (1 - x) * (3 - x)
```

In [135...
```
def sequence_iterate(x0, r, amount):
    """
    Функция генерации numpy массива из некоторых последовательных элементов {x_n}
    x0: первый элемент массива
    r: параметр
    amount: кол-во элементов
    возвращаемое значение: numpy.array
    """
    x_list = [x0]
    x_cur = x0
    for _ in range(amount):
        x_cur = logistic_map(x_cur, r)
        x_list.append(x_cur)
    return np.array(x_list)
```

Исследование циклов при $r \in (3, r_\infty)$

Пусть $r_\infty \approx 3.5699456$

Необходимо:

1. Изучить изменение длины цикла при $r \in (3, r_\infty)$
2. Установить какие ограничения действуют на m при $r \in (3, r_\infty)$

Циклы периоды m являются корнями уравнения:

$$f^m(x) = x,$$

которые не являются корнями для уравнений меньших периодов (т.е. для $f^d(x) = x$, где d - делитель m)

Искать циклы будем экспериментальным путем:

1. Зададим какое-то начальное значение x_0
2. Проверим x_n для таких n, что $N < n < N + L$, где N - некоторое большое число, L - количество проверяемых значений
3. На каждой итерации будем проверять уникальность текущего значения, если уникально - продолжаем, если нет - найден цикл

In [136…

```
def find_cycle(r, x0=0.2, N=10000, k=256, eps=1e-6):
    """
      Функция поиска цикла длины m
      x0: начальное значение x
      N: рассматриваем значения x_n только для n \ge N, чтобы выявить закономерност
      k: количество рассматриваемых значений после N
      eps: эпсилон 10^{-6}
      возвращаемое значение: кортеж (m, u) - длина цикла и элементы соответственно
    """
    # Предподсчет значений x_n до N
    x = x0
    for _ in range(N):
        x = logistic_map(x, r)

            # Итерируемся по следующим значениям x_n, запоминая уникальные и пр
    uniques = []
    for _ in range(k):
        x = logistic_map(x, r)

        flag = False
        for i, u in enumerate(uniques):
            if abs(u - x) < eps:
                # Для надежности проверки равенства через diff < eps проверку добав
                uniques[i] = 0.5 * (u + x)
                flag = True
                break
        if not flag:
            uniques.append(x)
    m = len(uniques)
    return m, uniques
```

```
<>:2: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\g'
<>:2: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\g'
C:\Users\idarb\AppData\Local\Temp\ipykernel_23080\1695464373.py:2: SyntaxWarning: in
valid escape sequence '\g'
  """
```

In [137…

```
r_vars = [2, 3.1, 3.3, 3.5, 3.54, 3.56, 3.565, 3.5699]
for r in r_vars:
    m, uniq = find_cycle(r)
    print(f"r = {r:.3f}, примерно m = {m}")
```

```
r = 2.000, примерно m = 1
r = 3.100, примерно m = 2
r = 3.300, примерно m = 2
r = 3.500, примерно m = 4
r = 3.540, примерно m = 4
r = 3.560, примерно m = 8
r = 3.565, примерно m = 16
r = 3.570, примерно m = 128
```

Видим, что при изменении r меняется длина цикла.

Вблизи $r_\infty \approx 3.5699456$ можно заметить большие степени двойки.

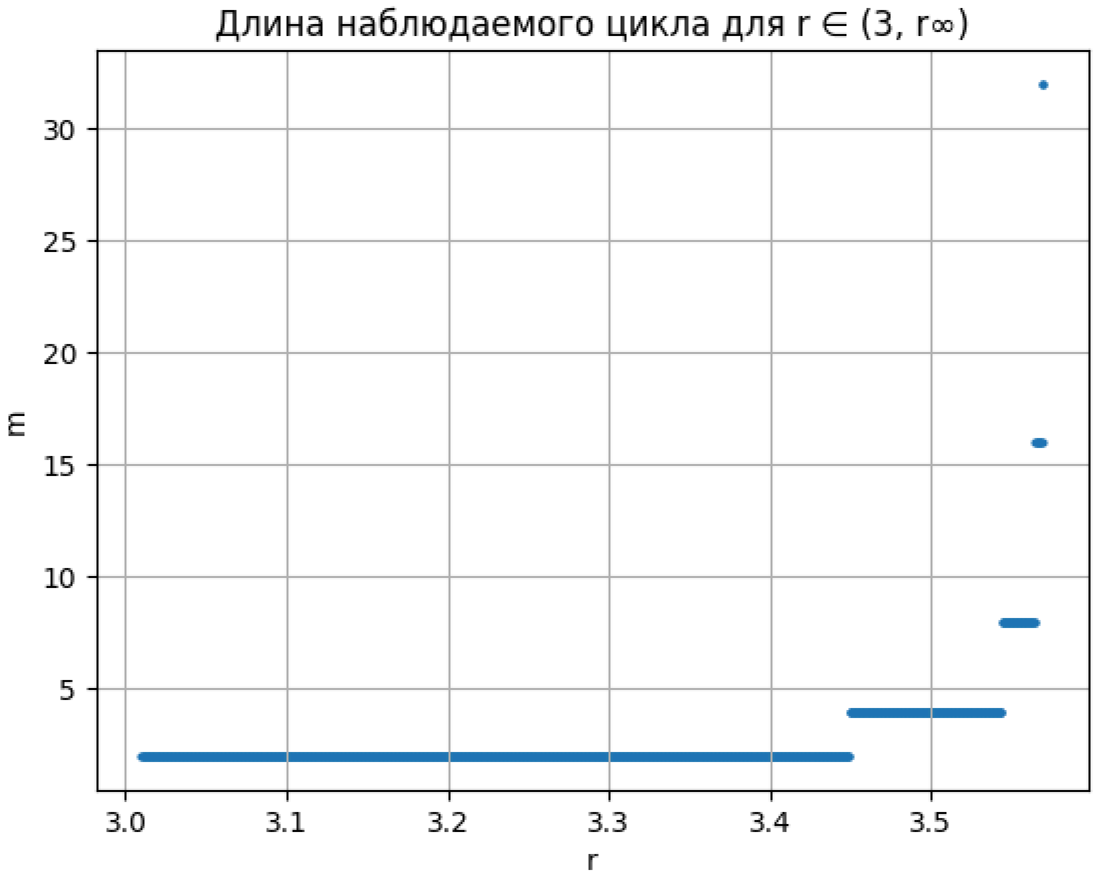
In [138…

```
r_min, r_max = 3.01, 3.5699456  # r∞ ≈ 3.5699456...
step = 0.0005

r_list = []
m_list = []

r = r_min
while r <= r_max:
    m, _ = find_cycle(r)
    r_list.append(r)
    m_list.append(m)
    r += step

print(f"Уникальные m на заданном интервале для r с шагом .0005")
print(sorted(set(m_list)))
```

```
Уникальные m на заданном интервале для r с шагом .0005
[2, 4, 8, 16, 32]
```

In [139…

```
plt.figure()
plt.scatter(r_list, m_list, s=4)
plt.xlabel("r")
plt.ylabel("m")
plt.title("Длина наблюдаемого цикла для r ∈ (3, r∞)")
plt.grid(True)
plt.show()
```



Ограничения на m
Экспериментально получили, что циклы с периодами не являющимися степенями двойки в этом интервале не возникают

Лестница Ламерея

Необходимо:

1. Построить лестницу Ламерея для некоторого r
2. Изучить циклы на графике

Для построения лестницы будем итерироваться по состояниям следующим образом:

1. Вертикально: $y_{new} = f(x)$. Рисуется отрезок $(x, y)\rarr(x, y_{new})$
2. Горизонтально: рисуется отрезок $(x, y_{new})\rarr(y_{new}, y_{new})$
3. Обновляем состояние: $(y_{new}, y_{new})\rarr(x, y)$
4. Повторяем N раз

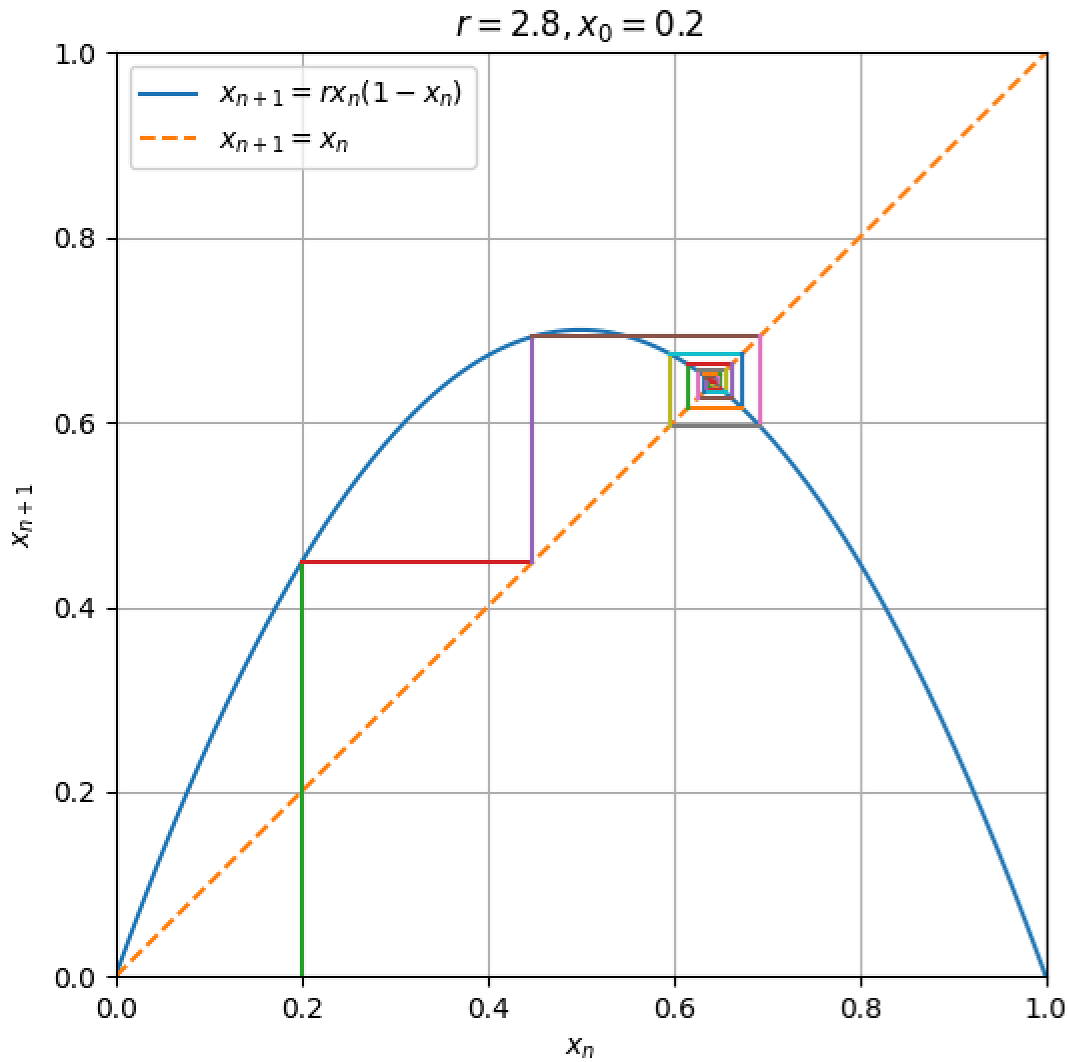
In [140…

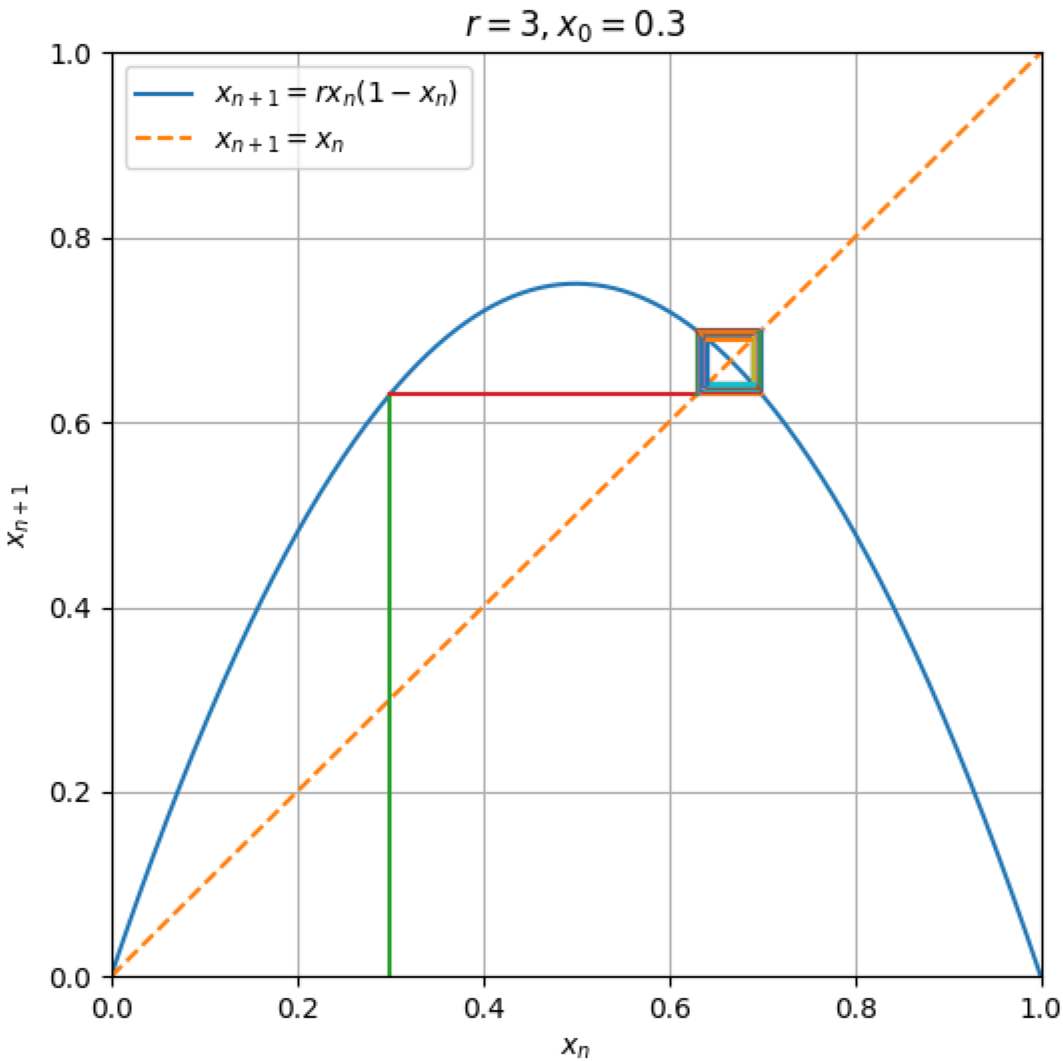
```
def lameray(r, x0=0.2, N=50, curve_dots=400):
    """
    Функция для построения лестницы Ламерея для логистического отображения
    при заданном параметре r и начальном значении x0.
    curve_dots: количество точек кривой
    """
```

```
    xs = np.linspace(0, 1, curve_dots)
    ys = logistic_map(xs, r)

    fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 6))

    ax.plot(xs, ys, label=r"$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$")
    ax.plot(xs, xs, linestyle="--", label=r"$x_{n+1} = x_n$")

                # Стартовое состояние
    x = x0
    y = 0.0

    for _ in range(N):
        # Шаг по вертикали
        y_new = logistic_map(x, r)
        ax.plot([x, x], [y, y_new])

        # Шаг по горизонтали
        ax.plot([x, y_new], [y_new, y_new])

        # Обновление
        x, y = y_new, y_new

    # Отображение
    ax.set_xlim(0, 1)
    ax.set_ylim(0, 1)
    ax.set_xlabel(r"$x_n$")
    ax.set_ylabel(r"$x_{n+1}$")
    ax.set_title(fr"$r = {r}, x_0 = {x0}$")
    ax.legend()
    ax.grid(True)

    plt.show()
```

In [141…

```
lameray(r=2.8)
lameray(r=3, x0=.3)
```


$r = 2.8, x_0 = 0.2$
$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$
$x_{n+1} = x_n$
x_{n+1}
x_n
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0



На графике циклы выглядят как замкнутый многоугольник, который повторяется бесконечно.

- Вертикальные отрезки соединяют $(x_k^*, x_k^*)\rarr(x_k^*, x_{k+1}^*)$
- Горизонтальные: $(x_k^*, x_{k+1}^*)\rarr(x_{k+1}^*, x_{k+1}^*)$

Исследование циклов $g(x_n)$

Аналогично поиску циклов ранее повторим алгоритм:
Проитерируемся по значениям x_n после какого-то большого N и посмотрим на поведение.

In [161…

```
def g_find_cycle(r, x0=0.2, N=10000, k=128, eps=1e-8):
    """
      (Функция идентична приведенной ранее, заменена лишь функция перехода)
      Функция поиска цикла длины m
      x0: начальное значение x
      N: рассматриваем значения x_n только для n \ge N, чтобы выявить закономерност
      k: количество рассматриваемых значений после N
```

```
      eps: эпсилон 10^{-6}
      возвращаемое значение: кортеж (m, u) - длина цикла и элементы соответственно
    """
    # Предподсчет значений x_n до N
    x = x0
    for _ in range(N):
        x = g_map(x, r)

        # Итерируемся по следующим значениям x_n, запоминая уникальные и проверяя н
    uniques = []
    for _ in range(k):
        x = g_map(x, r)

        flag = False
        for i, u in enumerate(uniques):
            if abs(u - x) < eps:
                # Для надежности проверки равенства через diff < eps проверку добав
                uniques[i] = 0.5 * (u + x)
                flag = True
                break
        if not flag:
            uniques.append(x)
    m = len(uniques)
    return m, uniques
```

```
<>:2: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\g'
<>:2: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\g'
C:\Users\idarb\AppData\Local\Temp\ipykernel_23080\1264532610.py:2: SyntaxWarning: in
valid escape sequence '\g'
  """
```

In [162…

```
r_vars = [.2, .5, 1.2, 1.4, 1.5]
for r in r_vars:
    m, uniq = g_find_cycle(r)
    print(f"r = {r:.2f}, примерно m = {m}")
```

```
r = 0.20, примерно m = 1
r = 0.50, примерно m = 1
r = 1.20, примерно m = 2
r = 1.40, примерно m = 8
r = 1.50, примерно m = 128
```

In [165…

```
gr_min= 0.01
gr_max= 27 / (2 * (7*np.sqrt(7) - 10))
step = 0.005

gr_list = []
gm_list = []

gr = gr_min
while gr <= gr_max:
    m, _ = g_find_cycle(gr)
    gr_list.append(gr)
    gm_list.append(m)
    gr += step
```

```
print(sorted(set(gm_list)))
```

[1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 24, 128]

In [164…

```
plt.figure()
plt.scatter(r_list, m_list, s=4)
plt.xlabel("r")
plt.ylabel("m")
plt.grid(True)
plt.show()
```

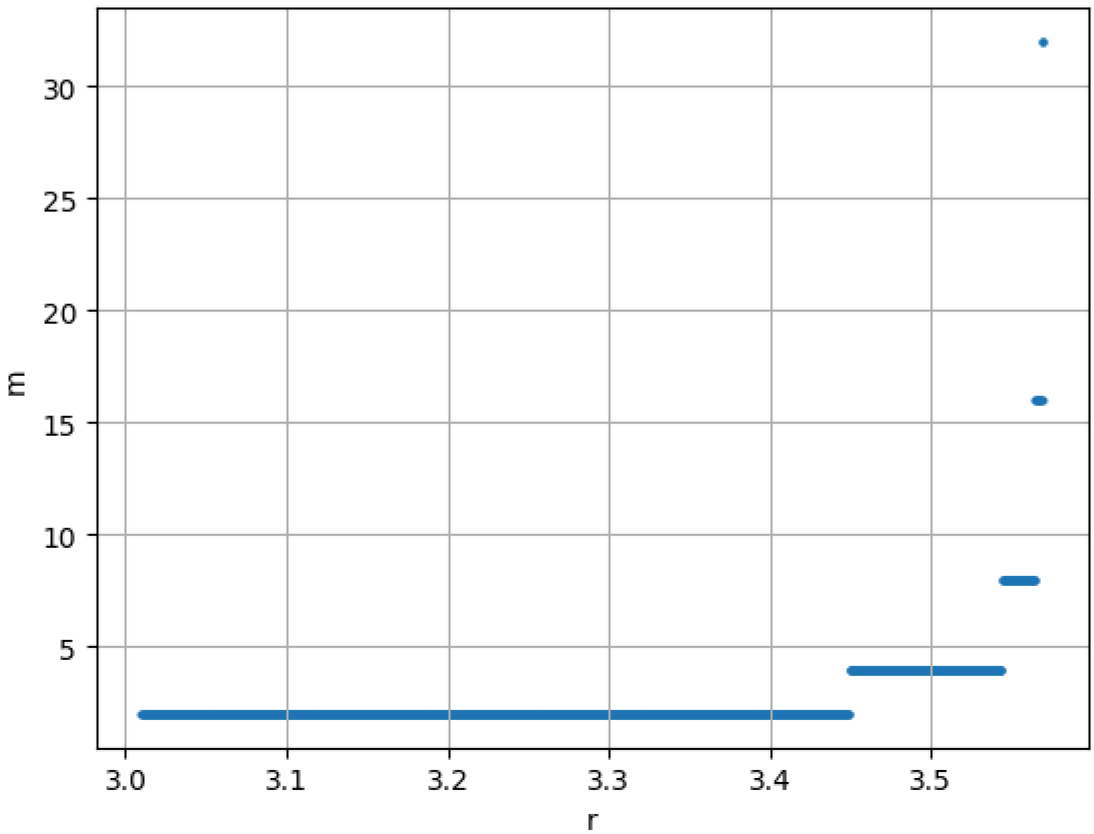


График похож на график логистического отображения.
В обоих случаях наблюдается последовательное удвоение длины цикла по приближению к границе интервала r.

Ключевое различие в сдвиге диапазона,
В логистистическом отображении сильный рост периода циклов возникает по приближению к ~ 3.56,
В то время как в этом случае схожая ситуация возникает уже при $r \approx 1.5$