Лабораторная работа Logistic map

Easy level

Для работы будет использоваться Python с библиотеками numpy для вычислений и matplotlib для графического представления.

In [15]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Точечное изображение и логистическое отображение

Точечная динамическая система задается рекуррентным соотношением

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n)$$

Будем рассматривать одномерное логистическое отображение

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

In [16]:
```
def logistic_map(x, r):
        """
        Функция одномерного логистического отображения.
        x: x_n
        r: параметр
        возвращаемое значение: x_{n+1}
        """
        return r * x * (1 - x)
```

Утверждение

$$\forall n \in \N,\ \forall r \in (0;1]:\ \ 0 < x_0 < 1 \Rarr 0 < x_n < 0$$

Доказательство
Докажем индукцией по n
База. $0 < x_0 < 1$ (Верно для $n = 0$)
Переход. Пусть для некоторого $n \in \N$ выполнено $0 < x_n < 1$. Покажем, что отсюда следует $0 < x_{n+1} < 1$

По определению логистического отображения:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Докажем положительность и ограниченность сверху единицей:

1. **Положительность x_{n+1}:**
   Из индукционного предположения следует, что $x_n > 0,\ 1 - x_n > 0$
   Из условия: $r > 0$
   Т.е. все множители положительны, следовательно:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) > 0$$

2. **Оценка сверху:**
   Рассмотрим функцию $g(x) = x(1 - x)$.
   Заметим, что это квадратичная парабола, ветви которой направлены вниз ($g(x) = x - x^2$).
   Найдем максимум функции. Производная $g'(x) = 1 - 2x$, найдем критическую точку:

$$g'(x) = 0 \Rarr 1 - 2x = 0 \Rarr x = \frac{1}{2}$$

   Вычислим значении функции в этой точке:

$$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

   Т.к. парабола направлена ветвями вниз, то в точке $\frac{1}{2}$ достигается глобальный максимум функции $g(x)$.
   Следовательно, для любого $x \in (0, 1)$ выполняется:

$$x(1 - x) \leq g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} < 1$$

Положительность и ограниченность сверху доказаны, следовательно:

$$0 < x_n < 1$$

Утверждение доказано

График функции $x_{n+1} = f_r(x_n)$ для разных r

Рассматривается функция перехода (зависимости x_{n+1} от x_n):

$$x_{n+1} = f_r(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

Построим графики при нескольких значениях параметра r и проанализируем полученные данные.

In [34]:
```
xs = np.linspace(0, 1, 100)
r_vars = [0.5, 1.0, 2.0, 3.5]
```

```
plt.figure()
for r in r_vars:
    ys = logistic_map(xs, r)
    plt.plot(xs, ys, label=f"r = {r}")

plt.xlabel("$x_n$")
plt.ylabel("$x_{n+1}$")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.title("Функция перехода $f_r$")
plt.show()
```

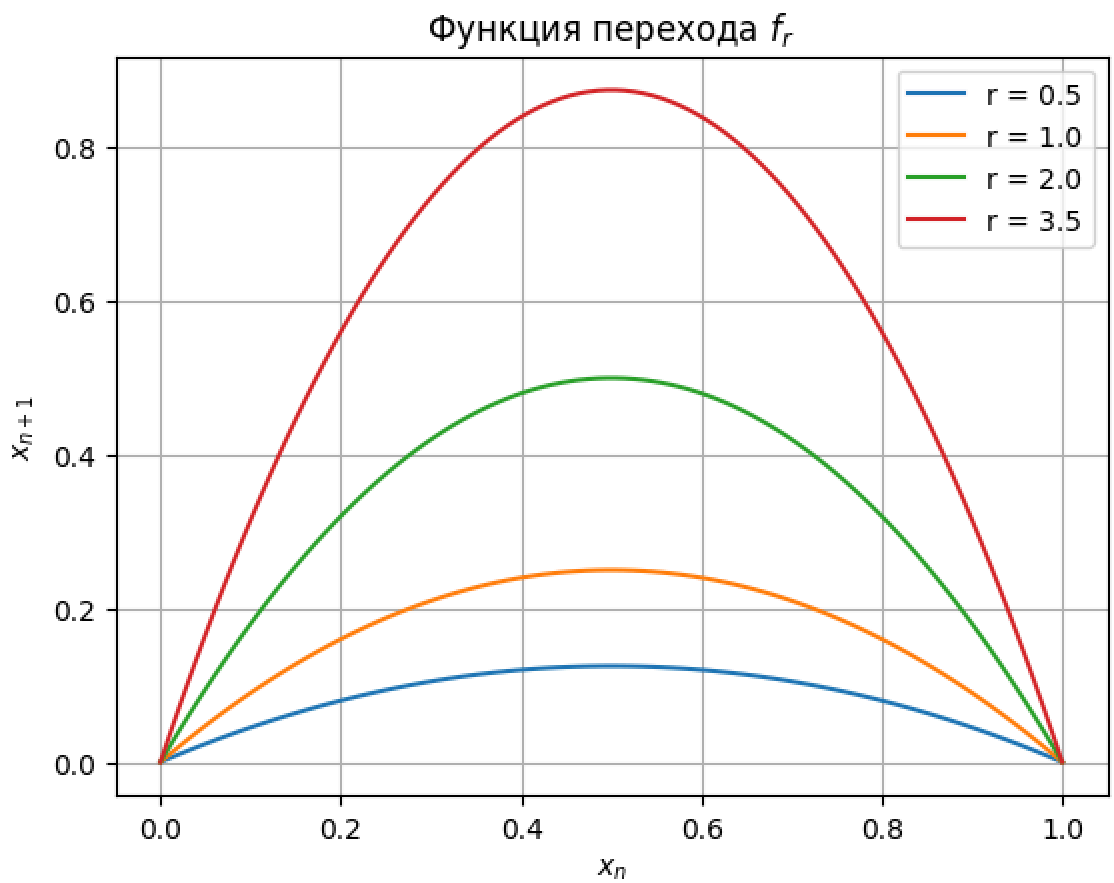


График f_r представляет собой параболу с ветвями вниз, проходящую через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$ с вершиной в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{r}{4}\right)$

При увеличении параметра r:

- Высота вершины $\frac{r}{4}$ возрастает линейно
- Парабола становится "круче"

Построение графика и анализ функции $g(x_{n+1})$

Рассматриваем функцию перехода, исходя из варианта лабораторной работы ($465208 \bmod 5 = 3$):

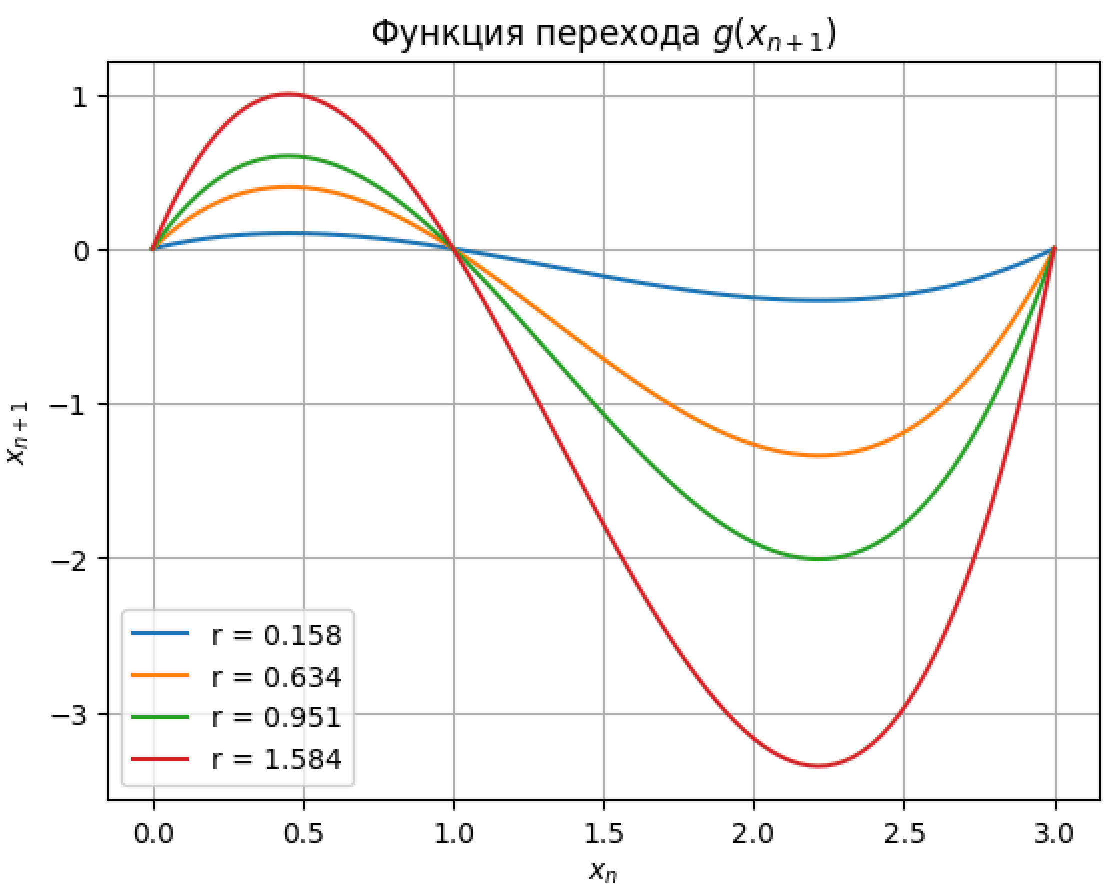
$$g(x_{n+1}) = rx_n(1-x_n)(3-x_n), \;\; r \in [0; \frac{27}{2(7\sqrt{7}-10)}]$$

In [18]:
```
def g_map(x, r):
        """
        Функция перехода g_{n+1}
        x: x_n
        r: параметр
        возвращаемое значение: x_{n+1}
        """
        return r * x * (1 - x) * (3 - x)
```

In [36]:
```
xs = np.linspace(0, 3, 100)
r_max = 27 / (2 * (7*np.sqrt(7) - 10))
r_values = [0.1 * r_max, 0.4 * r_max, 0.6 * r_max, r_max] # Для удобства беру разли

plt.figure()
for r in r_values:
    ys = g_map(xs, r)
    plt.plot(xs, ys, label=f"r = {r:.3f}")

plt.xlabel("$x_n$")
plt.ylabel("$x_{n+1}$")
plt.title("Функция перехода $g(x_{n+1})$")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



Сравнение с логистическим отображением

Функция $g(x)$ имеет дополнительный множитель $(3 - x)$, который и приводит к разнице в графиках функций:

- Число критических точек увеличилось до двух
- График $g(x)$ асимметричен
- При больших x убывание становится "быстрее"
- При малых x рост усиливается засчет доп. множителя $(3 - x \approx 3)$

Таким образом доп. множитель делает поведение функции сложнее, чем в случае логистического отображения