Algebra II

Skript zur Vorlesung von Prof Fritzsche
gesetzt von
Daniel Mayer

1 Lineare Abbildungen

Sei $\mathcal{K}$ ein Körper und V,W $\mathcal{K}$-VektorrÃume definition: Abbildung $\Phi : V \to W$ heiÃt

1. additiv, falls fÃ$\frac{1}{4}$r $\forall v_2, v_2 \in v$ gilt $\Phi(v_1 + v_2) = \Phi(v_1) + \Phi(v_2)$
2. homogen
3. $\mathcal{K}$ linear falls $\forall \alpha \in \mathcal{K} \forall v \in V \Phi(\alpha v) = \alpha \Phi(v)$ oder
4. epimorphismus falls Φ linear und surjektiv
5. homomorphismus falls Φlinear und injektiv
6. isomorphismus falls whatever

Die vektorräume V und W heissen isomorph, falls ein isomorphismus $\Phi : V \to W$ existiert.
Im fall $V = W$wird ein $\mathcal{K}$homomorphismus auch auch endomorphismus genannt genauso wie ein isomorphismus auch antomorphismus.
Beispiel: Sei $\mu \in \mathcal{K}$, und $\Phi : V \to V$ dann ist $\Phi(v) = \mu v$ eine lineare Abbildung dann $\forall v_1, v_2 \in V \forall \alpha \in \mathcal{K}$

$$\Phi(v_1 + v_2) = \frac{1}{4}(v_1 + v_2) = \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 = \Phi(v_1) + \Phi(v_2)$$

$$\Phi(\alpha v_1) = \frac{1}{4}(\alpha v_1) = (\frac{1}{4}\alpha)v_1 = (\alpha\frac{1}{4})v_1 = \alpha(\frac{1}{4}v_1) = \alpha\Phi(v_1)$$

beispiel mit nullvektor fehlt

beispiel: sei $A \in \mathcal{K}^{Q \times P}$ dann ist $\Phi : \mathcal{K}^Q \to \mathcal{K}^P, \Phi(x) = Ax$ linear denn $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{K}$

$$\Phi(x_1 + x_2) = A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$$

$$\Phi(\alpha x_1) = A(\alpha x_1) = \alpha A x_1 = \alpha \Phi(x_1)$$

bemerkung sei $\Phi : V \to W$ dann ist Φ genau dann linear wenn $\forall v_1, v_2 \in V \forall \alpha_1 \alpha_2 \in \mathcal{K} : \Phi(\alpha x_1 + \alpha x_2) =: \Phi(\alpha x_1) + \Phi(\alpha x_2)$ falls Φ linear so gilt $\Phi(\sum \alpha_i V_i) = \sum \Phi \alpha_i V_i \forall n \in \mathcal{N} v_1, ..., v_n \in V alle \alpha_1, ..., \alpha n \in \mathcal{K}$ warum gilt das nicht fÃ$\frac{1}{4}$r$n - - >$ inf

Beispiel 1 *$V = C[a, b]\mathbb{R}$-vektorraum aller stetigen funktionen $F : [a, b] \to \mathbb{R} \Rightarrow \Phi : C[a, b] \to \mathbb{R}$ $gem\tilde{A}\tilde{A}$ $\Phi(f) := \int_a^b f(x)dx$ eine lineare Abbildung*

Beispiel 2 *sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller auf $\mathbb{R}$ definierten beliebig oft differenzierbaren reelwertigen funktionen, dann ist $\Phi(f) = f\!\!\Delta$eie lineare Abbildung $V \to W$linear ist, so : $\forall v_1, v_2 \in V \Phi(v_1 - v_2) = \Phi(v_1) + (-1)v_2) = \Phi(v_1) + (-1)\Phi(v_2) = \Phi(v_1) - \Phi(v_2) \Rightarrow \Phi(-v_2) = -\Phi(v_2)$*

Satz 1 *Satz 9.1, sei $\Phi V \to W$ linnear und sei U ein unterraum von V, dann ist $\Phi(U) := w \in W | \exists v \in U w = \Phi(u)$ ein unterraum von W Beweis: ommitted sei $\alpha \in \mathcal{K}$dann $\alpha w_1 = \alpha \Phi(w_1) = \Phi(\alpha w_1) \in \Phi(U) \Longrightarrow (wegen S9.1)\Phi(U)$ ist Unterraum von W QED*

F9.2 sei$\Phi V \to W$ eine linneare Abbildung, dann ist das bild $\Im \Phi$ ein unterraum von W beweis wende s9.1 fÃ$\frac{1}{4}$r U=V an dim$(\Im\Phi) \leq /dim W$ man nennt die dimension des Bildes $\Im\Phi$den Rang vonΦ

Satz 2 *satz 9.3 sei $\Phi V \to W$eine linneare Abbildung, des weiteren sei $\tilde{U}$ ein unterrraum von W dann ist das vollstÃndige Urbild*

$$\Phi\check{}(\tilde{U}) = v \in V : \Phi(v) \in \tilde{U}$$

von $\tilde{U}$ unter Φ ein unterraum von V

Beispiel 3 *beispiel $0_n \in \tilde{U} \Rightarrow \Phi(0_v) = O_w \in \tilde{U} \Rightarrow 0_v \in \Phi(\tilde{U}) \Rightarrow \Phi(\tilde{U}) \neq \emptyset$ sei $v_1, v_2 \in \Phi\check{}(\tilde{U}) \Rightarrow \Phi(v_1), \Phi(v_2) \in \tilde{U} \Rightarrow \Phi(v_1 + v_2) = \Phi(v_1) + \Phi(v_2) \in \tilde{U}) \Rightarrow v_1 + v_2 \in \Phi\check{}(\tilde{U})$ sei $\alpha \in \mathcal{K} \Rightarrow \Phi(\alpha v_1) = \alpha \Phi(v_1) \in \tilde{U} \Rightarrow \alpha v_1 \in \Phi(tilde U) \Rightarrow \Phi(\tilde{U})$ ist unterraum von$V qed$*

F9.4 sei $\Phi V \to W$eine linneare Abbildung, dann ist der Kern von Φ dh. die Mengeker$\,\Phi := v \in V : \Phi(v) = 0_w$ ein unterraum von V beweis wende S9.3 fÃ$\frac{1}{4}$r $\tilde{U} = 0_w$an bemerkung sei $\Phi V \to W$ linnear falls$v_1, v_2 \in V$ derart dass $\Phi v_1 = \Phi v_2, so \Phi(v_1 - v_2) = \Phi(v_1) - \Phi(v_2) = 0w$, dh. $v_1 - v_2 \in \ker \Phi$ beweis: falls$\ker \Phi = 0v$ so folgt aus vorrausgehendem beweis die injektivitÃt von Φ falls umgekehrt Φ als injektiv vorrausgesetzt wird folg aus $\Phi 0_v = 0_w$ unmittelbar$\ker \Phi = 0_v$.

Beispiel 4 *Sei* $A \in \mathcal{K}P \times Q$ *.* $f\tilde{A}\frac{1}{4}r\ \Phi : \mathcal{K}^q \to \mathcal{K}^P gem\tilde{A}\tilde{A}\ \Phi(x) := Ax$ *gelten, dann* $\Im\Phi = \Phi(x) : x \in \mathcal{K}^q = Ax : x \in \mathcal{K}^q = \mathcal{A}$ *und* $\ker\Phi = x \in \mathcal{K}^q : \Phi(x)0_p x_1 = x \in \mathcal{K}^q : Ax = 0_p x_1 = \mathcal{A}$

2

Bemerkung: sei U, V und W vektorraÃume sowie $\Psi : U-- > V, \Phi : U-- > V lineareabbilcung, dannistauch \Phi\dot{\Psi} : U-- > V einelineareabbildung, denn \forall u1, u2 \in U, \alpha 1, alpha2in\Phi\dot{\Psi}(\alpha_1 u_1 \alpha 2u_2) = \Phi(\Psi(\alpha_1 u_1 \alpha 2u_2)) = \Phi(\Psi(\alpha_1 u_1)\Psi(\alpha 2u_2)) = \alpha_1\phi(\Psi(u1))missingS9.6seienV undW vektorrume, wobei1 \leq q < \inf f\frac{1}{4}rq = \dim V erf\frac{1}{4}lltseidesweiterensieenv1, v2, ..., vneinebasisnvonvwobeiw1, w2, ..., wnW danngibtesgen$ $v -- > W mit\phi(v_i) = w_i f\frac{1}{4}rjjedesiindieselineareabbildung\phi erf\frac{1}{4}llt\Phi = (w_1, w_2, ..., w_n).beweis : seixV, ==>!folge(\alpha_j)_{j=1}^k auskmitx = \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j ==> (satz9.1)\phi(x) = \phi\sum_{j=1}^q \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^q \phi(\alpha_j v_j) ==> wenn(1)\Phi(x)\sum_{j=1}^q \phi(\alpha_j w_j) ==> falls\phi einelineareabbilcungmit(1)soeindeutigbestimmtexistens : Def\phi : V-- > W derartdassjedemx \in wieobenmitseinerBasisdarstellungzugeordnetwird : \Phi(x) := \sum_{j=1}^q \phi(\alpha_j w_j)Nachweisvon(1) : kin_{1,q} : v_k = \sum_{j=1}^q \delta_{jk} v_i(3) ==> \forall k \in Z_{1,q}\phi(v_k) = \sum_{j=1}^q \delta_{jk} w_i = w_k ==> (1)erf\frac{1}{4}lltnnachweisderlinearittvon\Phi : seienx, yV sowie\alpha, \beta_{\dot{z}} ==>!(\alpha_i)_{j=1}^q ausmit(2)indy = \sum_{j=1}^k \beta_j w_j(5) ==> \alpha x + \beta y = \alpha\sum_{j=1}^k \alpha_j v_j + \sum_{j=1}^k \beta_j w_j = \sum_{j=1}^k \alpha\alpha_j + \beta_j = \Phi(\P lphax + \beta y) = \sum_{j=1}^k \alpha\alpha_j + \beta_j w_i = \alpha\sum_{j=1}^k \alpha_j v_j + \beta\sum_{j=1}^k \beta_j w_j = \alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y)00 > \phi linear$

x $\in V\Phi(x) := \sum_{j=1}^q \phi(\alpha_j w_j)'(w1, ..., wq) ==> im \leq' (w1, ..., wq)(6)seiumgekehrtw'(w1, ..., wq)$ $\gamma_1, ..., \gamma_q \in: w = \sum_{j=1}^k \gamma_j w_j ==> w = \sum_{j=1}^q \beta_j\Phi(v_i) = \phi(\sum_{j=1}^k \beta_j v_j)Im\Phi ==>' (w1, ..., wq \subseteqq \Im\Phi F9.7seienV undW V_{\dot{c}} rwobei1 < +\inf, seirsowiev_1, v_2, .., v_r V undw_1, w_2, .., w_r W seivorrausgesetz$ $V -- > W, mit\Phi(v_j) = W_j\forall j_{1,r} beweis : NachBasisergnzungssatzr \leq qimFallr = qwendes9.6an.imfallr < qk\P nnennachBasisergnzungssatzvektorenv_r + 1, ..., v_q V derartergnztwerden, dassv_1, ..., v_r, v_r+1, ..., v_q einebasisvonV istindwirk\P nnenS9.6anwen$ $qundW \neq 0_w dielineareabbildungnichteindeutigbestimmtist.L9.8seienV undW vrsowie\Phi : v-- > W einelineareabbildung, danngilt \dim\Im\Phi \leq dimV.S9.9seienV undW - V ektorrumewobeidimV < \inf, sowie\Phi : v-- > W einelineareabbildungdanngilt \dim(\Im\Phi+$dann gilt dim(ker Φ= dim V Definition:seien V und W -VektorrÃume sowie $\Phi : v-- > W einelineareabbildungdannheitRang_K von\Phi. = \dim(\Im\Phi$ der Rang von $\Phi Satz9.10seienV undW - V ektorrumesowie\Phi : v-- > W einelineareabbildung(a)falls\phi injek$ $\Im\Phi-- > V ebenfallslinear(b)imfalldassdimV = dimW < \inf gilt, sindfolgendaaaussagenquival$ $1\phi istbijektiv11\Phi istinjektiv111\phi istsurjektiv$

wiederholung: koordinaten abbildung siehe Algebra 1 Bemerkung: betravchten wir die natÃ$\frac{1}{4}$rliche basis B:= (e$_1^{(q)}, e_1^{(q)}, ..., e_q^{(q)}))des^q giltf\frac{1}{4}rjedewahlvonx =$

$(x_1, x_2, ..., x_q)^{Tq} diebeziehung \Omega(x) = xwegenx = \sum_{j=1}^{q} x_j e_j^{(q)} dasfolgendetheoremistgrobgesagtdie$
S9.11 sein q sowie V ein V¿r mit dim V = q bezeichne (v$_1$, ..., v_q)$einebasisvonVdannsitdiekoordina$
$V-->^q bez\frac{1}{4}glichdergeordnetenbasisBeinisomorphismusinsbesonderesindVundK^q isomorphism$
$vj\forall jin_q eeoindeutigbestimmtelineareabbildung_B : K^q --> V$

3 beweis 9.11

wir zeigen zundÃchst, dass $\Omega_B : V \to^q bijektivist$

$\Omega_B$ist surjektiv, denn : ist $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix} \in K^q$ beliebig, so erfÃ$\frac{1}{4}$llt $\curvearrowleft := \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \succapprox_j$
dann ist

$$\omega_b(\curvearrowleft = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix})$$

Omega$_B istinjektiv, dennSeienx,y\in V$ beliebig, mit $\Omega_B(\curvearrowleft) = \Omega_B(\curvearrowright)$ mit $\alpha_j := (e_j^(q))^T \Omega_B(\curvearrowleft), j = 1, 2, ..., q$, gilst also

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix}$$

$$= \Omega_B(\curvearrowleft) = \Omega_B(\curvearrowright$$

$$==> \curvearrowleft = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \succapprox_j = \curvearrowright$$

$==>$ Omega$_B istbijektiv \Omega_B$ ist klinear denn seien $\curvearrowleft, \curvearrowright \in Vin \lambda, \mu \in_¿ Mit \alpha_j := (e_j^(q))^T \Omega_B(\curvearrowleft)$ und $\beta_j := (e_j^(q))^T \Omega_B(\curvearrowright), j = 1, 2, ..., q$
gilt, dann

$$\Omega_B(\curvearrowleft = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix} \quad \Omega_B(\curvearrowright = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_q \end{pmatrix}$$

sowie

$$\curvearrowleft = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \succapprox_j und \curvearrowright = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \succapprox_j =$$

$$==> +y = \curvearrowleft = \alpha \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \gtrapprox_j + \curvearrowright \sum_{j=1}^{q} \beta_j \gtrapprox_j = \sum_{j=1}^{q} (\lambda\alpha_j + \beta_j) \gtrapprox_j = \omega_B +$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_q \mu\beta_q \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_q \end{pmatrix}$$

nach satz 9.6 gibt es genau dann eine lineare abbildung wenn $\Phi_B :^q -- > V$, it $\phi_B(e_j^(q))$
ommitted

4 lemma 9.12

seien $q \in \mathbb{N}$ und $V, W\mathcal{K}$-VektorrÃume, wobei $\dim v = q$ gelten weiter sei $v_1, ..., v_q$ eine basis vom Vund $\Phi : V - - > W$ eine lineare Abbildung, dann gelten:

a) Im $\Phi = span(\Phi(v_{1),...,\phi(v_2))}$ insbesondere ist Φ genau dann surjektiv wenn $\Phi(v_1), ..., \Phi(v_q)$ ein ein erzeugendensystem von W ist.

b) Φ ist ganau dann injektiv, wenn $\Phi(v_1), ..., \Phi(v_q)$ lin unabhÃngig sind

c) Φ ist ganau dann bijektiv, wenn $\Phi(v_1), ..., \Phi(v_q)$ eine basisi von W ist

5 beweis(im seminar)

6 satz9.13

seien $V, W\mathcal{K} - Vektorrume$ mit $\dim V < \inf$ dann sind V und W genau dann isomorph wenn $\dim V = W$gilt.

6.1 beweis im seminar, 5pkt

6.2 lemma 9.14

seine $p, q \in \mathbb{N}$ sowie $\phi :_{\text{¿}} q - - >^p$ eine lineare abbildung, dann gibt es genau dann eine Matrix $\mathbb{A} \in^{p \times q}$ mit $\Phi(x) = Ax$ fÃ$\frac{1}{4}$r alle $x \in_{\text{¿}} q$, nÃmlich $A = (\Phi(e_1^(q)), ..., \Phi(e_q^(q)))$

6.3 beweis

Sei $B := (\Phi(e_1^(q)), ..., \Phi(e_q^(q)))$. nach Bsp ist $\Psi :^q -- >^p$ gemÃÃ $\Psi(x) := Bx$ eine lin. abb. fÃ$\frac{1}{4}$r alle $j = 1, 2, ..., q$ gilt $\Phi(e_j^(q)) = B(e_j^(q)) = \Psi(e_j^(q))$ ==>(s9.6) $\Phi = \Psi$ ==> $A = B$ ist eine matrix aus $^{p\times q}$ mit 1 fÃ$\frac{1}{4}$r alle $x \in^q$ sei nun $A \in^{p\times q}$ beliebig mit (1)fÃ$\frac{1}{4}$r alle xin^q

$$==> A = A * I_q = A(e_1^(q)), ..., (e_q^(q)) = (Ae_1^(q)), ..., A(e_q^(q))$$

=(1)

$$(\Phi e_1^(q)), ..., \phi(e_q^(q))$$

qed Im fall von lemma 9.14 ist die Unterscheidungvon ,lin abb $\phi :_¿ q - - >^p$und matritzen aus $^p\times qalsonichtwesentlich.einesolchenzusammenhangzwischenlinearenabbi$

7 Satz9.15

seinen $p, q \in \mathbb{N}$ sowie V und W $\mathcal{K}$ VR mit $\dim V = q$und $\dim W = p$ weiter sie $B = (v_1, ..., v_q)$ eine (geordnete) basis von V ist und $C = (w_1, ..., w_p)$ eine (geordnete) basis von W ist sowie $\Phi : V - - > W$ eine lineare abbildung a) es gibt eine matrix $A = (\alpha_{jk})_{j=1,...,qk=1,...,p} \in^{p\times q}$ mit $\phi(v_k) = \sum_j = 1^p \alpha_{jk} w_j$ fÃ$\frac{1}{4}$r alle $k = 1, ..., q$, nÃmlich $A = (\omega_C(\Phi(v_1), ..., \omega_C(\Phi(v_q))$ wobei $\Omega_C : W - - >_¿ p$ die koordinatenabbildung bezÃ$\frac{1}{4}$glich der basis C in W ist b) Es gibt genau eine matrix $\tilde{A} \in^{p\times q}$ mit $\Omega_C(\Phi(v)) = \tilde{A}_{\Omega B}(v)$ fÃ$\frac{1}{4}$r alle $vinV$ (3) nÃmlich =A beweis: a) fÃ$\frac{1}{4}$r jedes $k = 1, ..., q$ besitzt der Vektor $\Phi(v_k)$aus W gemÃÃ lemma 3.6 eine eindeutige Darstellung $\Phi(v_k) = \lambda_1^{(k)} w_1, ..., \lambda_p^{(k)} w_p$ bezÃ$\frac{1}{4}$glich der Basis C in W Mit $\lambda_{jk} := \lambda_j^{(k)}, j = 1, ..., q$ folgt (1) ==> $A \in^{p\times q}$ mit (1) existiert und ist eindeutig bestimmt. FÃ$\frac{1}{4}$r alle $k = 1, ..., q$folgt ais (1)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{pk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(k)} \\ \vdots \\ \lambda(k)_p \end{pmatrix} = \Phi(v_k)$$

also (2) b) sei v in V beliebig Mit $\beta_k := (e_k^q)^T \Omega_B(v) k = 1, ..., q$ist

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_q \end{pmatrix}$$

$= \omega_B(v) dannhabenwirv = \sum_j = 1^p \beta_k v_k undwegenderlinearittvon \Phi und (1) somit \Phi(v) = \sum_j = 1^p \beta_{}$

==>

$$\Omega_C(\phi(v)) = \begin{pmatrix} \sum_j = 1^p \alpha_{1k}\beta_k \\ \vdots \\ \sum_j = 1^p \alpha_{1k}\beta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1q} \\ \dots & \ddots & h \dots \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_q \end{pmatrix} = A\Omega_B(v).$$

==> $\tilde{A} := A$ erfÃ¼llt (3) sei nun A $\in^{p \times q}$ beliebig mit (3) fÃ¼r alle $k = 1, ..., q$ ist wegen $v_k = \sum \delta_{jk} v_k = 0v_1 + ... + 1v_k + ... + 0v_q$ zunÃchst

$$\omega_B(v_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_k^(q)$$

und wegen (3) folglich

$$\Omega_C(\phi(v_K)) = \tilde{A}\Omega_B(v_k) = \tilde{A}e_k^(q) = ktespaltevom\tilde{A}$$

(4) ==>

$$\tilde{A} = \tilde{A}I_q = \tilde{A}(e_1^(q)), ..., (e_q^(q)) = (\tilde{A}e_1^(q)), ..., \tilde{A}(e_q^(q)) = (\Phi e_1^(q)), ..., \phi(e_q^(q)) = A$$

8 bemerkung

es liegen die situation von satz 9.15 vor dann heiÃt die durch (2) gegebene Matrix $A \in^{p \times q}$die darstellungsmatrix der lin abb $\Phi : V - - > W$ bzw der geordneten basen B und C fÃ¼r A wird dann $\Phi_{B,C}$ geschrieben Kennt man die matrix $\Phi_{B,C}$ so lÃsst sich gemÃÃ (3) dann $\Phi(v)$fÃ¼r jedes $v \in B$ wie folgt berechnen: ist $v = \sum \beta_k v_k$ die darstellung vom v bzw B so bildet man $(\beta_1, ..., \beta_q)$ und erhÃlt $\Phi(v)$ gemÃÃ $\sum \gamma_j w_j$.