Lineare Algebra II

Skript zur Vorlesung von Prof Fritzsche
gesetzt von
einem Studierenden...

1 Lineare Abbildungen

Sei $\mathcal{K}$ ein Körper und V,W $\mathcal{K}$-Vektorräume definition: Abbildung $\Phi : V \to W$ heißt

1. additiv, falls für $\forall v_2, v_2 \in v$ gilt $\Phi(v_1 + v_2) = \Phi(v_1) + \Phi(v_2)$
2. homogen
3. $\mathcal{K}$ linear falls $\forall \alpha \in \mathcal{K} \forall v \in V \Phi(\alpha v) = \alpha\Phi(v)$ oder
4. epimorphismus falls Φ linear und surjektiv
5. homomorphismus falls Φlinear und injektiv
6. isomorphismus falls whatever

Die vektorräume V und W heissen isomorph, falls ein isomorphismus $\Phi : V \to W$ existiert.
Im fall $V = W$wird ein $\mathcal{K}$homomorphismus auch auch endomorphismus genannt genauso wie ein isomorphismus auch antomorphismus.
Beispiel: Sei $\mu \in \mathcal{K}$, und $\Phi : V \to V$ dann ist $\Phi(v) = \mu v$ eine lineare Abbildung dann $\forall v_1, v_2 \in V \forall \alpha \in \mathcal{K}$

$$\Phi(v_1 + v_2) = (v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = \Phi(v_1) + \Phi(v_2)$$

$$\Phi(\alpha v_1) = (\alpha v_1) = (\alpha)v_1 = (\alpha)v_1 = \alpha(v_1) = \alpha\Phi(v_1)$$

beispiel mit nullvektor fehlt
beispiel: sei $A \in \mathcal{K}^{Q\times P}$ dann ist $\Phi : \mathcal{K}^Q \to \mathcal{K}^P, \Phi(x) = Ax$ linear denn $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{K}$

$$\Phi(x_1 + x_2) = A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$$

$$\Phi(\alpha x_1) = A(\alpha x_1) = \alpha A x_1 = \alpha \Phi(x_1)$$

bemerkung sei $\Phi : V \to W$ dann ist Φ genau dann linear wenn $\forall v_1, v_2 \in V \forall \alpha_1 \alpha_2 \in \mathcal{K} : \Phi(\alpha x_1 + \alpha x_2) =: \Phi(\alpha x_1) + \Phi(\alpha x_2)$ falls Φ linear so gilt $\Phi(\sum \alpha_i V_i) = \sum \Phi \alpha_i V_i \forall n \in \mathcal{N} v_1, ..., v_n \in V alle \alpha_1, ..., \alpha n \in \mathcal{K}$ warum gilt das nicht für$n \to$ inf

Beispiel 1 *$V = C[a,b]\mathbb{R}$-vektorraum aller stetigen funktionen $F : [a,b] \to \mathbb{R} \Rightarrow \Phi : C[a,b] \to \mathbb{R}$ gemäß $\Phi(f) := \int_a^b f(x)dx$ eine lineare Abbildung*

Beispiel 2 *sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller auf $\mathbb{R}$ definierten beliebig oft differenzierbaren reelwertigen funktionen, dann ist $\Phi(f) = f$ eie lineare Abbildung $V \to W linear\ ist,\ so : \forall v_1, v_2 \in V \Phi(v_1 - v_2) = \Phi(v_1) + (-1)v_2) = \Phi(v_1) + (-1)\Phi(v_2) = \Phi(v_1) - \Phi(v_2) \Rightarrow \Phi(-v_2) = -\Phi(v_2)$*

Satz 1 *Satz 9.1, sei $\Phi V \to W$ linnear und sei U ein unterraum von V, dann ist $\Phi(U) := w \in W | \exists v \in U w = \Phi(u)$ ein unterraum von W Beweis: ommitted sei $\alpha \in \mathcal{K} dann\ \alpha w_1 = \alpha \Phi(w_1) = \Phi(\alpha w_1) \in \Phi(U) \Longrightarrow (wegen S9.1)\Phi(U)$ ist Unterraum von W QED*

F9.2 sei$\Phi V \to W$ eine linneare Abbildung, dann ist das bild $\operatorname{Im}\Phi$ ein unterraum von W beweis wende s9.1 für U=V an dim($\operatorname{Im}\Phi$) $\leq /dim W$ man nennt die dimension des Bildes $\operatorname{Im}\Phi$den Rang vonΦ

Satz 2 *satz 9.3 sei $\Phi V \to W$eine linneare Abbildung, des weiteren sei $\tilde{U}$ ein unterrraum von W dann ist das vollständige Urbild*

$$\Phi(\tilde{U}) = v \in V : \Phi(v) \in \tilde{U}$$

von $\tilde{U}$ unter Φ ein unterraum von V

Beispiel 3 *beispiel $0_n \in \tilde{U} \Rightarrow \Phi(0_v) = O_w \in \tilde{U} \Rightarrow 0_v \in \Phi(\tilde{U}) \Rightarrow \Phi(\tilde{U}) \neq \emptyset$ sei $v_1, v_2 \in \Phi(\tilde{U}) \Rightarrow \Phi(v_1), \Phi(v_2) \in \tilde{U} \Rightarrow \Phi(v_1 + v_2) = \Phi(v_1) + \Phi(v_2) \in \tilde{U}) \Rightarrow v_1 + v_2 \in \Phi(\tilde{U})$ sei $\alpha \in \mathcal{K} \Rightarrow \Phi(\alpha v_1) = \alpha \Phi(v_1) \in \tilde{U} \Rightarrow \alpha v_1 \in \Phi(tildeU) \Rightarrow \Phi(\tilde{U})$ ist unterraum von$V$qed*

F9.4 sei $\Phi V \to W$eine linneare Abbildung, dann ist der Kern von Φ dh. die Menge$\mathcal{K}er\Phi := v \in V : \Phi(v) = 0_w$ ein unterraum von V beweis wende S9.3 für $\tilde{U} = 0_w$an bemerkung sei $\Phi V \to W$ linnear falls$v_1, v_2 \in V$ derart dass $\Phi v_1 = \Phi v_2, so \Phi(v_1 - v_2) = \Phi(v_1) - \Phi(v_2) = 0w$, dh. $v_1 - v_2 \in \mathcal{K}er\Phi$ beweis: falls$\mathcal{K}er\Phi = 0v$ so folgt aus vorrausgehendem beweis die injektivität von Φ falls umgekehrt Φ als injektiv vorrausgesetzt wird folg aus $\Phi 0_v = 0_w$ unmittelbar$\mathcal{K}er\Phi = 0_v$.

Beispiel 4 *Sei* $A \in \mathcal{K}P \times Q$ *. für* $\Phi : \mathcal{K}^q \to \mathcal{K}^P$ *gemäß* $\Phi(x) := Ax$ *gelten, dann* $\operatorname{Im}\Phi = \Phi(x) : x \in \mathcal{K}^q = Ax : x \in \mathcal{K}^q = \mathcal{A}$ *und* $\mathcal{K}er\Phi = x \in \mathcal{K}^q : \Phi(x)0_p x_1 = x \in \mathcal{K}^q : Ax = 0_p x_1 = \mathcal{A}$

2

Bemerkung: sei U, V und $W\mathcal{K}$-Vektoräume sowie $\Psi : U \to V, \Phi : U \to V$ lineare abbildung, dann ist auch $\Phi\dot{\Psi} : U \to V$ eine lineare abbildung, denn $\forall u1, u2 \in U, \alpha 1, \alpha 2 in \mathcal{K}\ \Phi\dot{\Psi}(\alpha_1 u_1 \alpha 2 u_2) = \Phi(\Psi(\alpha_1 u_1 \alpha 2 u_2)) = \Phi(\Psi(\alpha_1 u_1)\Psi(\alpha 2 u_2)) = \alpha_1 \phi(\Psi(u1))$ S 9.6 seien $V und W\mathcal{K}$-vektorräume, wobei $1 \leq q <$ inf für $q = \dim V$ erfüllt sei des weiteren seien $v_1, v_2, ..., v_n$ eine basis von V wobei $w_1, w_2, ..., w_n \in W$ dann gibt es genau eine lieare abbildung $\Phi : v \to W mit \phi(v_i) = w_i$ für jedes $iin\mathbb{Z}$ diese lineare abbildung Φ erfüllt $Im\Phi = span(w_1, w_2, ..., w_n)$. beweis: sei $x \in V$, $\Rightarrow \exists!$ folge $(\alpha_j)_{j=1}^k$ aus $\mathcal{K}$ mit $x = \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j$
$\Rightarrow^(satz 9.1)\phi(x) =$
$\phi \sum_{j=1}^q \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^q \phi(\alpha_j v_j) \Rightarrow wenn$ (1)
$\Phi(x) \sum_{j=1}^q \phi(\alpha_j w_j) \Rightarrow falls \phi$ eine lineare abbildung mit (1) so eindeutig bestimmt existens: Def $\phi : V \to W$ derart dass jedem $x \in V$ wie oben mit seiner Basisdarstellung zugeordnet wird: $\Phi(x) := \sum_{j=1}^q \phi(\alpha_j w_j)$ Nachweis von (1): $\forall k in \mathbb{Z}_{1,q} : v_k = \sum_{j=1}^q \delta_{jk} v_i$ (3) $\Rightarrow \forall k \in mathbbZ_{1,q} \phi(v_k) = \sum_{j=1}^q \delta_{jk} w_i = w_k \Rightarrow$ (1) erfüllt nachweis der linearität von Φ: seien $x, y \in V$ sowie $\alpha, \beta \in \mathcal{K} :\Rightarrow \exists!(\alpha_i)_{j=1}^q$ aus $\mathcal{K}$ mit (2) und $y = \sum_{j=1}^k \beta_j w_j$ (5)
$\Rightarrow \alpha x + \beta y = \alpha \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j + \sum_{j=1}^k \beta_j w_j = \sum_{j=1}^k \alpha\alpha_j + \beta\beta_j = \Phi(\alpha x + \beta y)$
$= \sum_{j=1}^k \alpha\alpha_j + \beta\beta_j w_i =$
$\alpha \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j + \beta \sum_{j=1}^k \beta_j w_j = \alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y)$
$\Rightarrow \Phi$ linear
$\forall x \in V \Phi(x) := \sum_{j=1}^q \phi(\alpha_j w_j) \in \text{span}'(w1, ..., wq) \Rightarrow im\Phi \leq SPAN'(w1, ..., wq)$ (6)
sei umgekehrt $w \in \text{span}'(w1, ..., wq)$§ vorgegeben $\Rightarrow \exists \gamma_1, ..., \gamma_q \in \mathcal{K} : w = \sum_{j=1}^k \gamma_j w_j$
$\Rightarrow w = \sum_{j=1}^q \beta_j \Phi(v_i) = \phi(\sum_{j=1}^k \beta_j v_j) \in Im\Phi$
$\Rightarrow \text{span}'(w1, ..., wq) \subsetneqq \operatorname{Im}\Phi$
F9.7 seien V und $W\mathcal{K}$- VR wobei $1 \leq \dim V < +\text{inf}$, sei $r \in \mathbb{N}$ sowie $v_1, v_2, .., v_r \in V$ und $w_1, w_2, .., w_r \in W$ sei vorrausgesetz dass $v_1, .., v_r$ linear unabhängig, dann gibt es mindestens eine lineare abbildung $\Phi : V \to W$, mit $\Phi(v_j) = W_j \forall j \in \mathcal{N}_{1,r}$ beweis: Nach Basisergänzungssatz $r \leq q$ im Fall

$r = q$ wende s 9.6 an. im fall $r < q$ können nach Basisergänzungssatz vektoren $v_r + 1, ..., v_q \in V$ derart ergänzt werden, dass $v_1, ..., v_r, v_r + 1, ..., v_q$ eine basis von V ist und wir können S 9.6 anwenden QED

Bemerkung 1 *aus dem beweis von folgerung 9.7 ist ersichtlich, dass im fall dass $r < q$ und $W \neq 0_w$ die lineare abbildung nicht eindeutig bestimmt ist.*

Lemma 1 *seien V und W $\mathcal{K}$ VR sowie $\Phi : v \to W$ eine lineare abbildung, dann gilt* $\dim \operatorname{Im} \Phi \leq \dim V$.

Satz 3 *S9.9 seien V und $W\mathcal{K}$-Vektorräume wobei* $\dim V < \inf$*, sowie* $\Phi : V \to W$ *eine lineare abbildung dann gilt* $\dim(\operatorname{Im}\Phi + danngilt \dim(\mathcal{K}er\Phi) = \dim V$

Definition: seien V und $W\mathcal{K}$-Vektorräume sowie $\Phi : V \to W$ eine lineare abbildung dann heißt $Rang_K$ von $\Phi := \dim(\operatorname{Im}\Phi)$ der Rang von Φ Satz 9.10 seien V und $W\mathcal{K}$-Vektorräume sowie $\Phi : V \to W$ eine lineare abbildung (a) falls Φ injektiv, so ist die Umkehrbildung $\Phi^{-1} : \operatorname{Im}\Phi \to V$ ebenfalls linear (b) im fall dass $\dim V = \dim W < \inf$ gilt, sind folgenda Aussagen äquivalent: 1 Φ ist bijektiv 11 Φ ist injektiv 111 Φ ist surjektiv

wiederholung: koordinaten abbildung siehe Algebra 1

Bemerkung 2 *betrachten wir die natürliche basis $B := (e_1^{(q)}, e_1^{(q)}, ..., e_q^{(q)}))$ des $\mathcal{K}^q$ gilt für jede wahl von $x = (x_1, x_2, ..., x_q)^T \in \mathcal{K}^q$ die Beziehung $\Omega(x) = x$ wegen $x = \sum_{j=1}^{q} x_j e_j^{(q)}$ das folgende Theorem ist grob gesagt die grundlage dafür, dass das rechnen in (nicht trivialen) endlich dimensionalen $\mathcal{K}$-Vektorräumen auf das renchen in $\mathcal{K}^q$ zurückgeführt weden kann, wobei q die dimension des urbildvektorraumes der linearen abbildung darstellt.*

S9.11 sein $q \in \mathbb{N}$ sowie V ein $\mathcal{K}$ VR mit $\dim V = q$ bezeichne $(v_1, ..., v_q)$ eine basis von V dann ist die Koordinatenabbildung $\Omega_B : V \to \mathcal{K}^q$ bezüglich der geordneten Basis B ein isomorphismus insbesondere sind V und $\mathcal{K}^q$ isomorphismus die gemäß S9.6 durch die bedingung $\Phi_B(e_j^{(q)}) = vj \forall j \in \mathbb{Z}_q$ eindeutig bestimmte lineare abbildung $\Phi_B : K^q \to V$

3 beweis 9.11

wir zeigen zundächst, dass $\Omega_B : V \to \mathcal{K}^q$ bijektiv ist

- $\Omega_B$ist surjektiv, denn : ist $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_q\end{pmatrix} \in K^q$ beliebig, so erfüllt $\curvearrowleft := \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \succapprox_j$ dann ist

$$\omega_b(\curvearrowleft = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_q\end{pmatrix})$$

- $Omega_B$ ist injektiv, denn Seien $\curvearrowleft, \curvearrowright \in V$ beliebig, mit $\Omega_B(\curvearrowleft) = \Omega_B(\curvearrowright)$ mit $\alpha_j := (e_j^(q))^T \Omega_B(\curvearrowleft), j = 1, 2, ..., q$, gilst also

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_q\end{pmatrix}$$

$$= \Omega_B(\curvearrowleft) = \Omega_B(\curvearrowright$$

$$\Rightarrow \curvearrowleft = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \succapprox_j = \curvearrowright$$

$\Rightarrow \Omega_B$ ist bijektiv

- Ω_B ist $\mathcal{K}$-linear denn seien $\curvearrowleft, \curvearrowright \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathcal{K}$ Mit $\alpha_j := (e_j^(q))^T \Omega_B(\curvearrowleft)$ und $\beta_j := (e_j^(q))^T \Omega_B(\curvearrowright), j = 1, 2, ..., q$
gilt, dann

$$\Omega_B(\curvearrowleft = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_q\end{pmatrix} \quad \Omega_B(\curvearrowright = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_q\end{pmatrix}$$

sowie

$$\curvearrowleft = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \succapprox_j und \curvearrowright = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \succapprox_j =$$

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y = \curvearrowleft = \alpha \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \succapprox_j + \curvearrowright \mu \sum_{j=1}^{q} \beta_j \succapprox_j = \sum_{j=1}^{q} (\lambda\alpha_j + \mu\beta_j) \succapprox_j = \omega_B \lambda x + \mu$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1\\ \vdots\\ \lambda\alpha_q \mu\beta_q\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_q\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_q\end{pmatrix}$$

nach satz 9.6 gibt es genau dann eine lineare abbildung wenn $\Phi_B : \mathcal{K}^q \to V$
, it $\phi_B(e_j^(q))$

4 lemma 9.12

seien $q \in \mathbb{N}$ und $V, W\mathcal{K}$-Vektorräume, wobei $\dim v = q$ gelten weiter sei $v_1, ..., v_q$ eine basis vom Vund $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung, dann gelten:

a) Im $\Phi = span(\Phi(v_1), ..., \Phi(v_2))$ insbesondere ist Φ genau dann surjektiv wenn $\Phi(v_1), ..., \Phi(v_q)$ ein ein erzeugendensystem von W ist.

b) Φ ist ganau dann injektiv, wenn $\Phi(v_1), ..., \Phi(v_q)$ lin unabhängig sind

c) Φ ist ganau dann bijektiv, wenn $\Phi(v_1), ..., \Phi(v_q)$ eine basisi von W ist

5 beweis(im seminar)

6 satz9.13

seien $V, W\mathcal{K}$-Vektorräume mit $\dim V < \inf$ dann sind V und W genau dann isomorph wenn $\dim V = \dim W$gilt.

6.1 beweis im seminar, 5pkt

6.2 lemma 9.14

seine $p, q \in \mathbb{N}$ sowie $\phi : \mathcal{K}^q \to \mathcal{K}^p$ eine lineare abbildung, dann gibt es genau dann eine Matrix $\mathbb{A} \in \mathcal{K}^{p\times q}$ mit $\Phi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathcal{K}^q$, nämlich $A = (\Phi(e_1^(q)), ..., \Phi(e_q^(q)))$

6.3 beweis

Sei $B := (\Phi(e_1^(q)), ..., \Phi(e_q^(q)))$. nach Bsp ist $\Psi : \mathcal{K}^q \to \mathcal{K}^p$ gemäß $\Psi(x) := Bx$ eine lin. abb. für alle $j = 1, 2, ..., q$ gilt $\Phi(e_j^(q)) = B(e_j^(q)) = \Psi(e_j^(q))$ $\Rightarrow$(s9.6) $\Phi = \Psi \Rightarrow A = B$ ist eine matrix aus $\mathcal{K}^{p\times q}$ mit 1 für alle $x \in \mathcal{K}^q$ sei nun $A \in \mathcal{K}^{p\times q}$ beliebig mit (1)für alle $xin\mathcal{K}^q$

$$\Rightarrow A = A * I_q = A(e_1^(q)), ..., (e_q^(q)) = (Ae_1^(q)), ..., A(e_q^(q))$$

=(1)

$$(\Phi e_1^(q)), ..., \phi(e_q^(q))$$

qed Im fall von lemma 9.14 ist die Unterscheidungvon ,lin abb $\phi : \mathcal{K}^q \to \mathcal{K}^p$und matritzen aus $\mathcal{K}^p \times q$ also nicht wesentlich . eine solchen zusammenhang zwischen linearen abbildungen und matrizen gibt es jedoch nuc in den Standardräumen .

7 Satz9.15

seinen $p, q \in \mathbb{N}$ sowie V und W $\mathcal{K}$ Vektorraum mit $\dim V = q$und $\dim W = p$ weiter sie $B = (v_1, ..., v_q)$ eine (geordnete) basis von V ist und $C = (w_1, ..., w_p)$ eine (geordnete) basis von W ist sowie $\Phi : V \to W$ eine lineare abbildung a) es gibt eine matrix $A = (\alpha_{jk})_{j=1,...,qk=1,...,p} \in \mathcal{K}^{p\times q}$ mit $\phi(v_k) = \sum_j = 1^p \alpha_{jk} w_j$ für alle $k = 1, ..., q$, nämlich $A = (\omega_C(\Phi(v_1), ..., \omega_C(\Phi(v_q))$ wobei $\Omega_C : W \to \mathcal{K}^p$ die koordinatenabbildung bezüglich der basis C in W ist b) Es gibt genau eine matrix $\tilde{A} \in \mathcal{K}^{p\times q}$ mit $\Omega_C(\Phi(v)) = \tilde{A}_{\Omega_B}(v)$ für alle $vinV$ (3) nämlich $\tilde{A} = A$ beweis: a) für jedes $k = 1, ..., q$ besitzt der Vektor $\Phi(v_k)$aus W gemäß lemma 3.6 eine eindeutige Darstellung $\Phi(v_k) = \lambda_1^{(k)} w_1, ..., \lambda_p^{(k)} w_p$ bezüglich der Basis C in W Mit $\lambda_{jk} := \lambda_j^{(k)}, j = 1, ..., q$ folgt (1) $\Rightarrow A \in \mathcal{K}^{p\times q}$ mit (1) existiert und ist eindeutig bestimmt. Für alle $k = 1, ..., q$folgt ais (1)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{pk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(k)} \\ \vdots \\ \lambda(k)_p \end{pmatrix} = \Phi(v_k)$$

also (2) b) sei v in V beliebig Mit $\beta_k := (e_k^q)^T \Omega_B(v) k = 1, ..., q$ist

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_q \end{pmatrix}$$

$= \omega_B(v)$ dann haben wir $v = \sum_j = 1^p \beta_k v_k$ und wegen der linearität von Φ und (1) somit $\Phi(v) = \sum_j = 1^p \beta_k \Phi(v_k) = (1) \sum_j = 1^p \beta_k \sum_j = 1^p \alpha_{jk}(w_j) = \sum_j = 1^p \beta_k (\sum_j = 1^p \alpha_{jk} \beta_k) w_j \Rightarrow$

$$\Omega_C(\phi(v)) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p \alpha_{1k}\beta_k \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p \alpha_{1k}\beta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1q} \\ \dots & \ddots & h \dots \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_q \end{pmatrix} = A\Omega_B(v).$$

$\Rightarrow \tilde{A} := A$ erfüllt (3) sei nun $\tilde{A} \in \mathcal{K}^{p\times q}$ beliebig mit (3) für alle $k = 1, ..., q$ ist wegen $v_k = \sum \delta_{jk} v_k = 0v_1 + ... + 1v_k + ... + 0v_q$ zunächst

$$\omega_B(v_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_k^(q)$$

und wegen (3) folglich

$$\Omega_C(\phi(v_K)) = \tilde{A}\Omega_B(v_k) = \tilde{A}e_k^(q) = ktespaltevom\tilde{A}$$

(4) $\Rightarrow$

$$\tilde{A} = \tilde{A}I_q = \tilde{A}(e_1^(q)), ..., (e_q^(q)) = (\tilde{A}e_1^(q)), ..., \tilde{A}(e_q^(q)) = (\Phi e_1^(q)), ..., \phi(e_q^(q)) = A$$

8 bemerkung

es liegen die situation von satz 9.15 vor dann heißt die durch (2) gegebene Matrix $A \in \mathcal{K}^{p\times q}$die darstellungsmatrix der lin abb $\Phi : V \to W$ bzw der geordneten basen B und C für A wird dann $\Phi_{B,C}$ geschrieben Kennt man die matrix $\Phi_{B,C}$ so lässt sich gemäß (3) dann $\Phi(v)$für jedes $v \in B$ wie folgt berechnen: ist $v = \sum \beta_k v_k$ die darstellung vom v bzw B so bildet man $(\beta_1, ..., \beta_q)$ und erhält $\Phi(v)$ gemäß $\sum \gamma_j w_j$. $\Phi : V \to W, B := (v_1, ..., v_q), C = (w_1, ..., w_p)$ $\Omega_C[\Phi(v)] = \gneqq_{B,C}\Omega_B(v) \quad \forall v$
inV betrachten $M_{\gneqq_{B,C}} : \mathcal{K}^q \to \mathcal{K}^p$ gemäß $M_{\gneqq_{B,C}}(x) = \gneqq_{B,C}(x)$ Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \to^{\Phi} & W \\ \Omega_B \downarrow & & \uparrow \Omega_C \\ \mathcal{K}^q & \to^{M_{\gneqq_{B,C}}} & \text{II} \end{array}$$

q:= dim V p:= dim W B.: Im spezialfall $V = K^q$ und$W = K^p$ sowie$B := (e_1^{(q)}, e_1^{(q)}, ..., e_q^{(q)})$ und$C := (e_1^{(p)}, e_1^{(p)}, ..., e_p^{(p)})$ ist$\gneqq_{B,C}$gerade die in 9.14 beschriebene Matrix A welche $\Phi(x) = A(x)\ \forall x \in \mathcal{K}^q$ erfüllt (vgl bemerkung vor theorem 9.10)

Lemma 2 *seine $p, qn \in \mathbb{N}$ sowie V und $W\mathcal{K}$-Vektorraum mit* $\dim V = q$ *und* $\dim W = p$ *des weiteren sei $B := (v_1, ..., v_q)$ eine basisi von V und $C := (w_1, , .., w_p)$ eine basis von W Für jedes $A \in \mathbb{C}$ gibt es genau dann eine lineare abbildung $\Phi : v \to W$ mit $\gneqq_{B,C} = A$*

Beweis 1 *sei $\Phi : V \to W$ gemäß $\Phi(v) := \sum_{j=1}^{p}(e_j^{(p)})^T A\Omega_B(v)w_j$ (1) definiert $\Rightarrow \forall v, v' \in V : \Phi(v + v') =^(1) \sum_{j=1}^{p}(e_j^{(p)})^T A\Omega_B(v + v')w_j = ... = \Phi(v)+\Phi(v'); \forall\alpha \in K : \Phi(\alpha v) =^(1) \sum_{j=1}^{p}(e_j^{(p)})^T A\Omega_B(\alpha v+)w_j = \alpha\Phi(v) \Rightarrow \Phi$ linear $\forall v \in V\Omega_C[\Phi(v)] =^(1) \begin{pmatrix} (e_1^{(q)})^T A\Omega_B(v) \\ \vdots \\ e_1^{(q)})^T A\Omega_B(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e_1^{(q)})^T \\ \vdots \\ e_1^{(q)})^T A \end{pmatrix} A\Omega_B(v) = I_pA\Omega_B(v) \Rightarrow^{thm9.15} \gneqq_{B,C} \Rightarrow$ existent eindeutigkeitsnachweis: sei $\Psi : V \to W$ eine beliebige lineare abbildung mit $\gneqq_{B,C} = A\ \forall kin\mathbb{Z}_{1...q} : \Omega_C[\Phi(v_k)] =$*

$\gneqq_{B,C}\omega_B(v) = Ae_k^{(q)} = \lneqq_{B,C}e_k^{(q)} = \lneqq_{B,C}\Omega_B(v_k) =^(S9.15)\Omega_C(\Phi(v_k)) \Rightarrow$
$\forall k \in \mathbb{Z}_{1...q}\Psi(v_k) = \Phi(v_k)$
$\Rightarrow^(9.6)\Phi = \Psi \ QeD$

Satz 4

siein V und Wk Vektorraum dann ist die menke $HOM_K(V, W)$ aller K homomorphisen von Vunc W ein interraum des K Vektorraum $abb(v, W)$ aller abbildungen von V nach W beweis : übung $V* := HOM_K(V, W)$ neannt werden nt man bektorraum vn v dessen elemente linearformen von V gen

Satz 5 *seien $p, qin\mathbb{N}sowieVundWKVektorraum$ mit $dimV = Q$ und $dimW = p$ daes weiteren seien $B := (v_1, ..., v_q)$ eine basisi von V und $C := (w_1, , .., w_p)$ eine basis von W dann ist $\mathcal{M}_{B,C} : Hom_K(V, W) \to \mathcal{K}^pxq$ gemäß $\Phi \to \lneqq_{B,C}$ ein isomorp hismusv von K Vektorraumäumen beweis übung*

Satz 6 *seien $r, p, qin\mathbb{N}$ sowie U, V, WK-Vektorraum mit $\dim U = r$, $\dim V = q$, $\dim W = p$ des weiteren seien $B_V := (v_1, ..., v_q)$ eine basis von V und $B_W := (w_1, , .., w_p)$ eine basis von W weiterhin seine $\Psi : U \to V\Phi : V \to W$ lineare abbildung dann ist $\chi := \Phi \circ \Psi$ eine lineare abb mit darstellungsmatrix χ_{B_U,B_W} die gleichung $\chi_{B_U,B_W} = \lneqq_{B_U,B_W} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \gneqq_{B_W,B_V}$*

Beweis 2 *nach bem vor 9.6 istχ neine lineare abb nach 9.15 $\Omega_{B_W(\Phi(v))} = \lneqq_{B_U,B_W}\Omega_{B_V(v)}\forall v \in V$ (1) $\forall l \in \mathbb{Z}_{1,..,r} : \Psi(v_l) \in V$*
$\Rightarrow \omega_{B_W[\chi(u_l)]} = \Omega_{B_W[\Phi(\psi(v_l))]} = \lneqq_{B_V,B_W}\gneqq_{B_U,B_V}e_l^{(r)}\forall l \in \mathbb{Z}_{1,l}(3)\chi_{B_U,B_W} = \chi_{B_U,B_W}I_r = \chi_{B_U,B_W}(e_1^{(r)}, ..., e_r^{(r)}) = (\chi_{B_U,B_W}e_1^{(r)}, ..., \chi_{B_U,B_W}e_r^{(r)})(\lneqq_{B_V,B_W}\gneqq_{B_U,B_V}e_1^{(r)}, .., \lneqq_{B_V,B_W}\gneqq_{B}$ $\lneqq_{B_V,B_W}\gneqq_{B_U,B_V}e_1^{(r)}, ..., e_r^{(r)}) = \lneqq_{B_V,B_W}\gneqq_{B_U,B_V}$ QED

U $\quad rightarrow^{\Phi=\Psi}$ $\quad W$
$\searrow_\psi$ $\quad \nearrow_\psi$
V
$\Omega_{B_V}\downarrow$ $\quad \downarrow\omega_{B_V}$ $\quad uparrow\omega_{B_W}^{-1}$
K^q
$\nearrow$ $\quad \searrow \mathcal{K}^r rightarrow \mathcal{K}^p$

Lemma 3 *seine $q \in N$ sowie V ein K-Vektorraum mit $dimV = q$ des weiteren seien $B := (v_1, ..., v_q)$ und $B' := (v_1', ..., v_q')$ basen von V weiterhin sei Φ eine lineare abbildung . dann ist ϕ genau dann bijektiv, wenn $\lneqq_{B,B'}$ invertierbar ist. in diesem fall ist $(\lneqq_{B,B'})^{-1}$ gerade die darstellungsmatrix der (gemäß s 9.10) abbildung $\Phi-1$ bezüglich der basis B undB'*

beweis : übungsaufgabe

Lemma 4 *seine* $q \in \mathbb{N}$ *und* V *ein*K*-Vektorraum mit* $\dim V = q$ *Des Weiteren seien* $B' := (v'_1, ..., v'_q)$ *eine basis von* V *sowie* $v_1, ..., v_q \in V$ *bezeichne* $\Gamma := (\gamma_{jk})_{j,k=1,..,q}$ *die eindeutig bestimmte kompexe qxq matrix, für die* $v_k = \sum_{j=1}^{q} \gamma_{jk} v'j$ *für jedes* $k \in \mathbb{Z}_{1,q}$ *gilt dann ist* $B := (v_1, ..., v_q)$ *eine basis von* V *wenn* Γ *invertierbar ist.*