

数学课程的总目标

通过义务教育阶段的数学学习，学生逐步：

1. 会用数学的眼光观察现实世界；
2. 会用数学的思维思考现实世界；
3. 会用数学的语言表达现实世界。

(简称“三会”)。

数学考试丢分的四大原因

1. 知识点不透彻；

2. 题型不熟练；

3. 计算不准确；

4. 计算速度慢。

(简称“四因”)。

学好数学的五个步骤

1. 发现个案（发现有趣的个案）；
2. 类似案例（寻找类似的案例）；
3. 总结规律（找到一般的规律：从特殊到一般）；
4. 定义证明（给出定义或证明）。
5. 实际应用（应用到实践中去：从一般到特殊）。

（简称“五步骤”）。

第一步到第三步：大胆假设；第四步：小心求证；第五步：放心应用。

1.1 有理数的引入

定义

正整数、0 和负整数统称为整数 (integer), 正分数和负分数统称为分数 (fraction).
整数和分数统称为有理数 (rational number).

有理数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{整数} \left\{ \begin{array}{l} \text{正整数} \\ 0 \\ \text{负整数} \end{array} \right. \\ \text{分数} \left\{ \begin{array}{l} \text{正分数} \\ \text{负分数} \end{array} \right. \end{array} \right.$

小数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{有限小数} \\ \text{无限小数} \left\{ \begin{array}{l} \text{无限循环小数} \\ \text{无限不循环小数} \end{array} \right. \end{array} \right.$

0 既不是正数，也不是负数，是正数与负数的分界点。
有限小数和无限循环小数是分数，无限不循环小数不是分数。
思考：无限不循环小数是什么数？

小数如何转化为分数

有限小数如何转化为分数：

$$0.245 = \frac{245}{1000} = \frac{49}{200}$$

无限循环小数如何转化为分数？【华东师范大学七年级上册（2024） P73】

$$1000 \times 0.\dot{2}4\dot{5} = 245.\dot{2}4\dot{5} = 245 + 0.\dot{2}4\dot{5}$$

$$999 \times 0.\dot{2}4\dot{5} = 245$$

$$0.\dot{2}4\dot{5} = \frac{245}{999}$$

数集与有理数集

数集的表示方法【数学 A 版必修第一册 1.1 集合的概念】：
集合 A 是小于 10 的自然数组成的集合，表示方法如下：

1. 列举法： $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
2. 描述法： $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x < 10\}$

有理数集的表示方法： $Q = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$

数学中常见数集及其记法：

1. 全体非负整数组成的集合称为非负整数集（或自然数集），记作 \mathbb{N} .
2. 全体正整数组成的集合称为正整数集，记作 \mathbb{N}^* 或 \mathbb{N}_+ .
3. 全体整数组成的集合称为整数集，记作 \mathbb{Z} .
4. 全体有理数组成的集合称为有理数集，记作 \mathbb{Q} .
5. 全体实数组成的集合称为实数集，记作 \mathbb{R} .

思考有理数集的表示方法

为什么可以用下面的方法表示有理数集？

$$Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$$

1.2 数轴

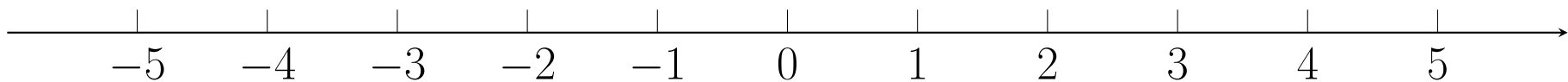
定义

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

数轴的四要素：

1. 原点
2. 正方向
3. 单位长度
4. 直线（强调三要素的只包括前三条）

数轴示例：

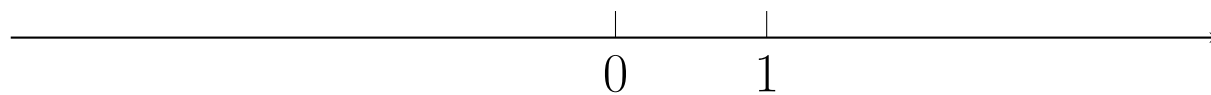


最简数轴

定义

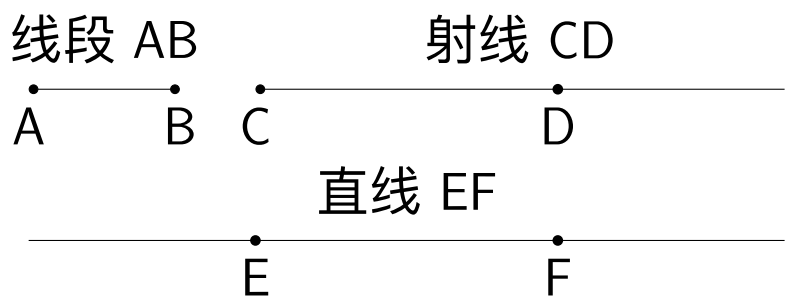
规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

以下图形是不是一个数轴？



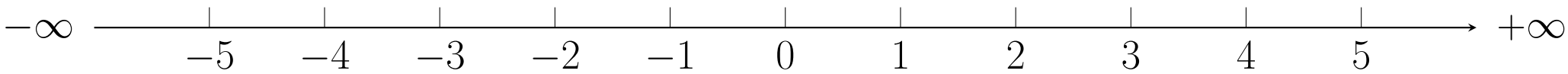
类比思维

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).



【北京师范大学四年级上册 (2013) P16】

- 线段：线段有两个端点，线段有一定的长度。
- 射线：射线有一个端点，射线可以向一个方向无限延伸。
- 直线：直线没有端点，直线可以向两个方向无限延伸。



实数集 \mathbb{R} 可以用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$, ∞ 读作“无穷大”, “ $-\infty$ ”读作“负无穷大”, “ $+\infty$ ”读作“正无穷大”. 【必修 A 版一册 P64】

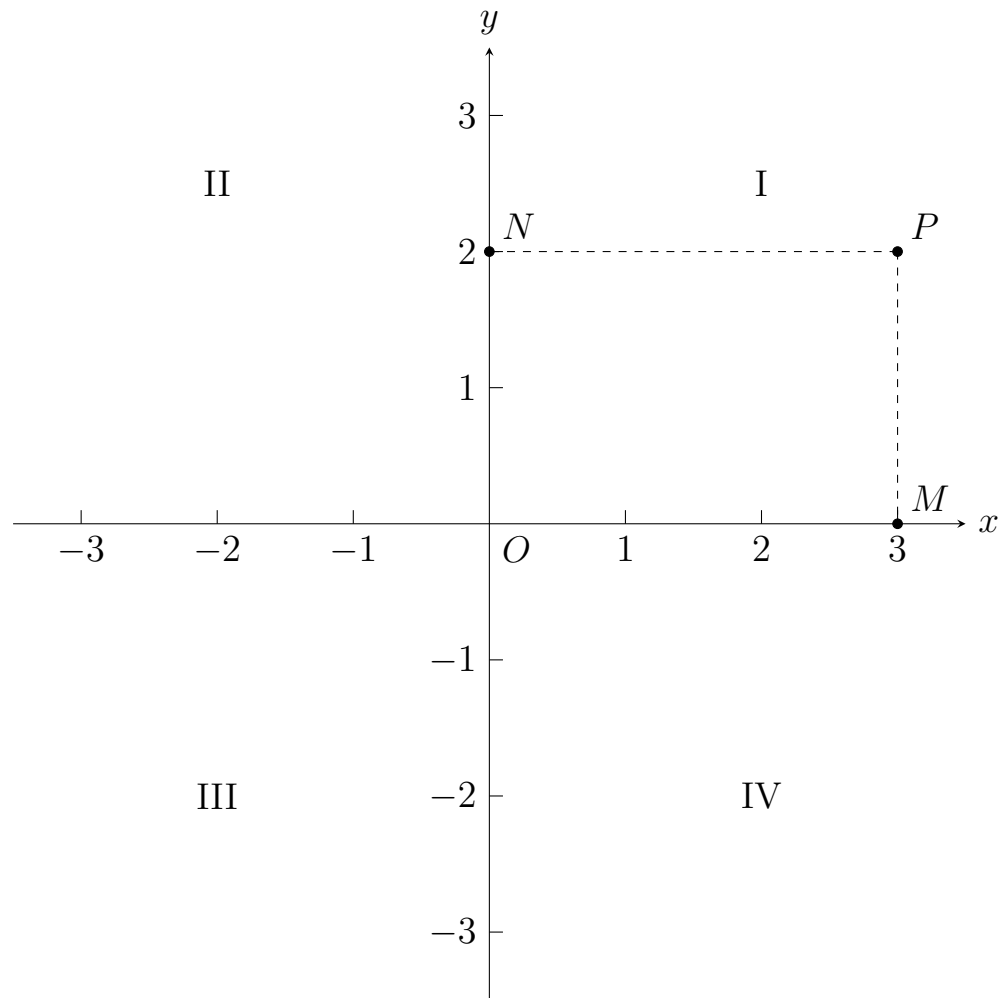
17.2 函数图象 (平面直角坐标系)

在数学中，我们可以用一对有序实数来确定平面上点的位置。

为此，在平面上画两条原点重合、互相垂直且具有相同单位长度的数轴，这就建立了平面直角坐标系 (rectangle coordinate system)。

通常把其中水平的数轴叫做 x 轴或横轴，取向右为正方向；铅直的数轴叫做 y 轴或纵轴，取向上为正方向；两条数轴的交点 O 叫做坐标原点。

为了纪念法国数学家笛卡儿，通常称为笛卡儿直角坐标系。



平面直角坐标系

在平面直角坐标系中，任意一点都可以用一对有序实数来表示。例如，图 17.2.2 中的点 P ，从点 P 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足分别为点 M 和点 N 。

这时，点 M 在 x 轴上对应的数为 3，称为点 P 的横坐标 (abscissa)。点 N 在 y 轴上对应的数为 2，称为点 P 的纵坐标 (ordinate)。

依次写出点 P 的横坐标和纵坐标，得到一对有序实数 $(3, 2)$ ，称为点 P 的坐标。这时点 P 可记作 $P(3, 2)$ 。

在平面直角坐标系中，两条坐标轴把平面分成如图 17.2.2 所示的 I、II、III、IV 四个区域，分别称为第一、二、三、四象限。坐标轴上的点不属于任何一个象限。

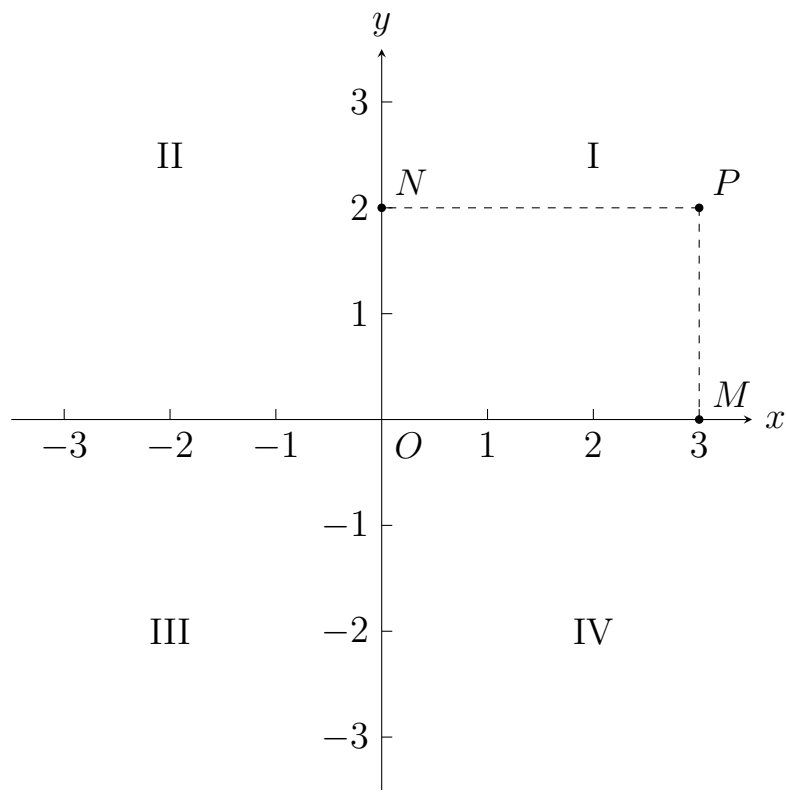


图: 17.2.2

1.3 相反数

定义

只有正负号不同的两个数称互为相反数 (opposite number)。
我们规定：0 的相反数是 0。

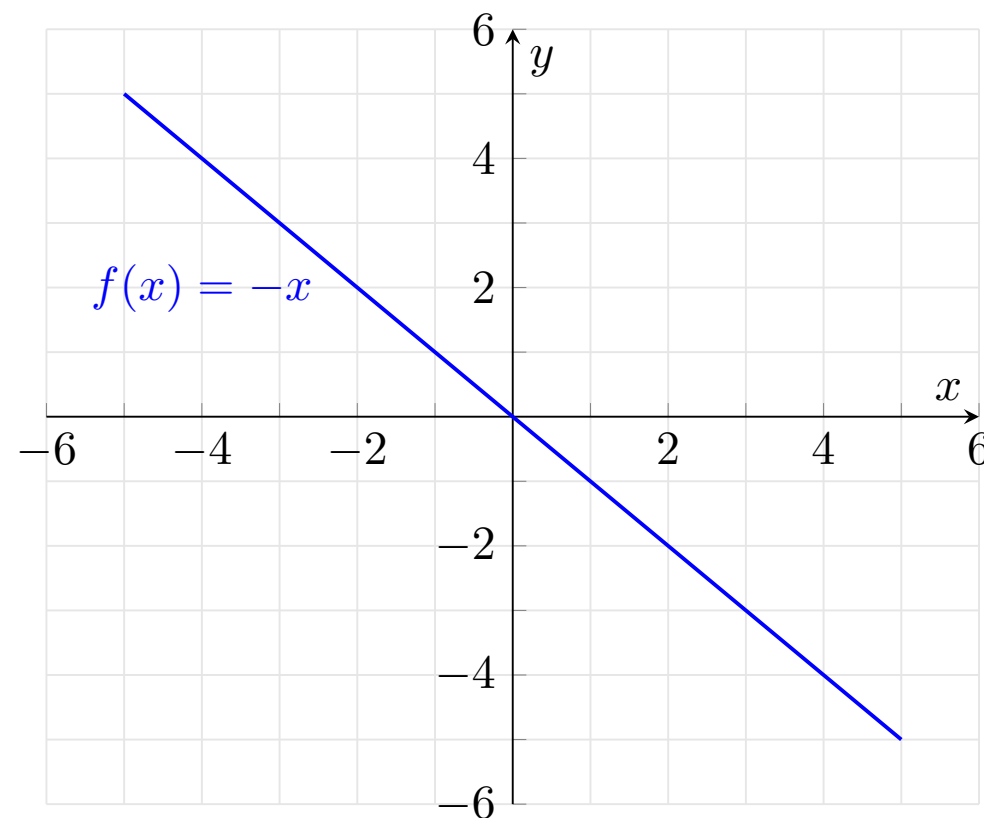
数学表达式: $a + b = 0$

函数定义: $f(x) = -x$

定义域: $x \in \mathbb{R}$

值域: $y \in \mathbb{R}$

对称性: 关于原点中心对称



倒数的定义及函数图象

定义

乘积为 1 的两个数互为倒数。

注意：0 没有倒数。

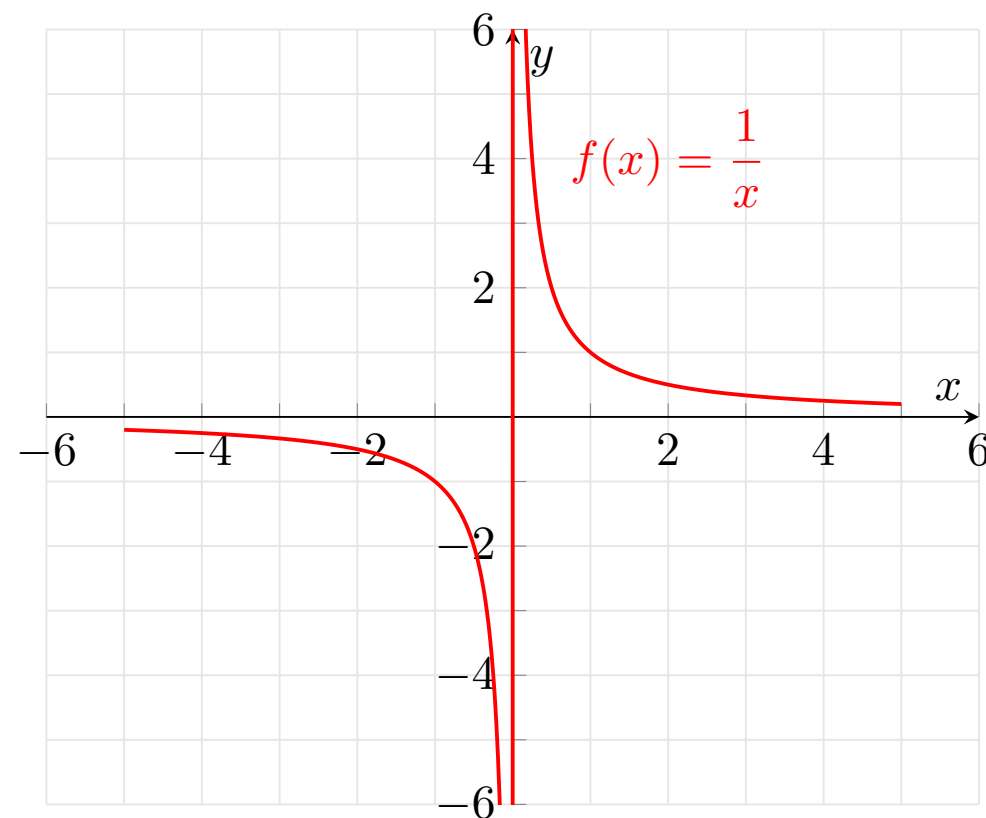
数学表达式: $a \cdot b = 1$

函数定义: $f(x) = \frac{1}{x}$

定义域: $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

值域: $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

对称性: 关于原点中心对称

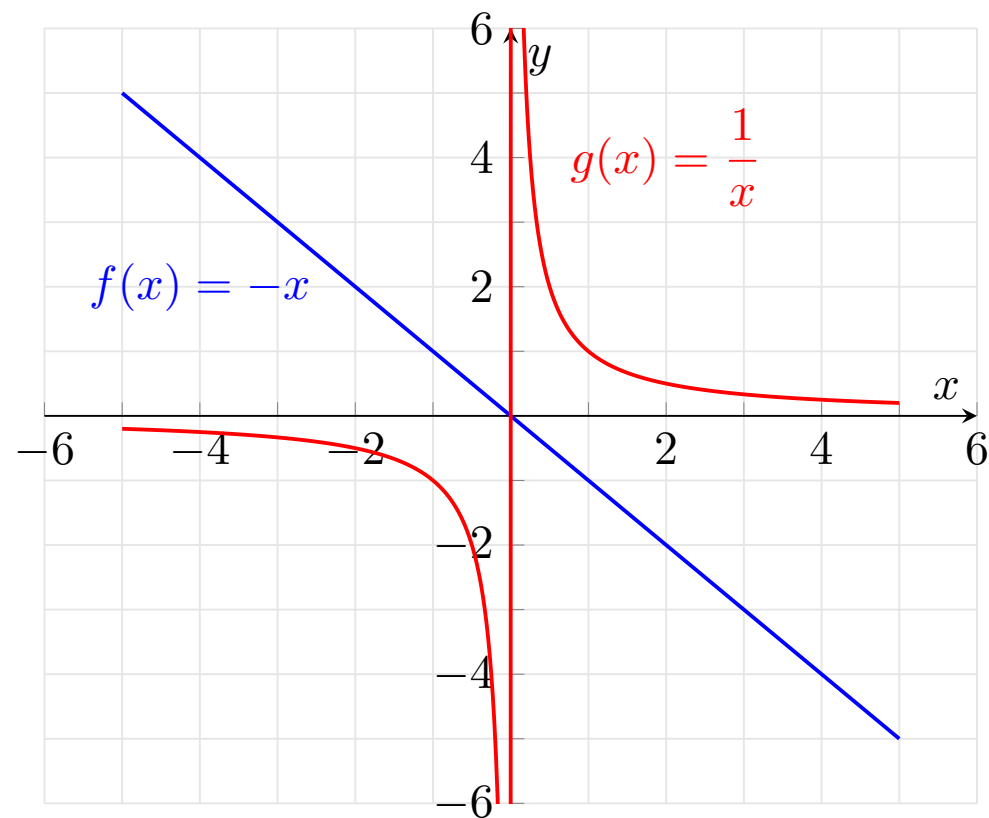


相反数与倒数的比较

相反数的表达式: $a + b = 0$

倒数的表达式: $a \cdot b = 1$

对称性: 相反数与倒数均关于原点中心对称



1.4 绝对值

定义： 我们把在数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做数 a 的绝对值，记作 $|a|$.

1. 一个正数的绝对值是它本身;
2. 0 的绝对值是 0;
3. 一个负数的绝对值是它的相反数.

数学表达式: $|x|$

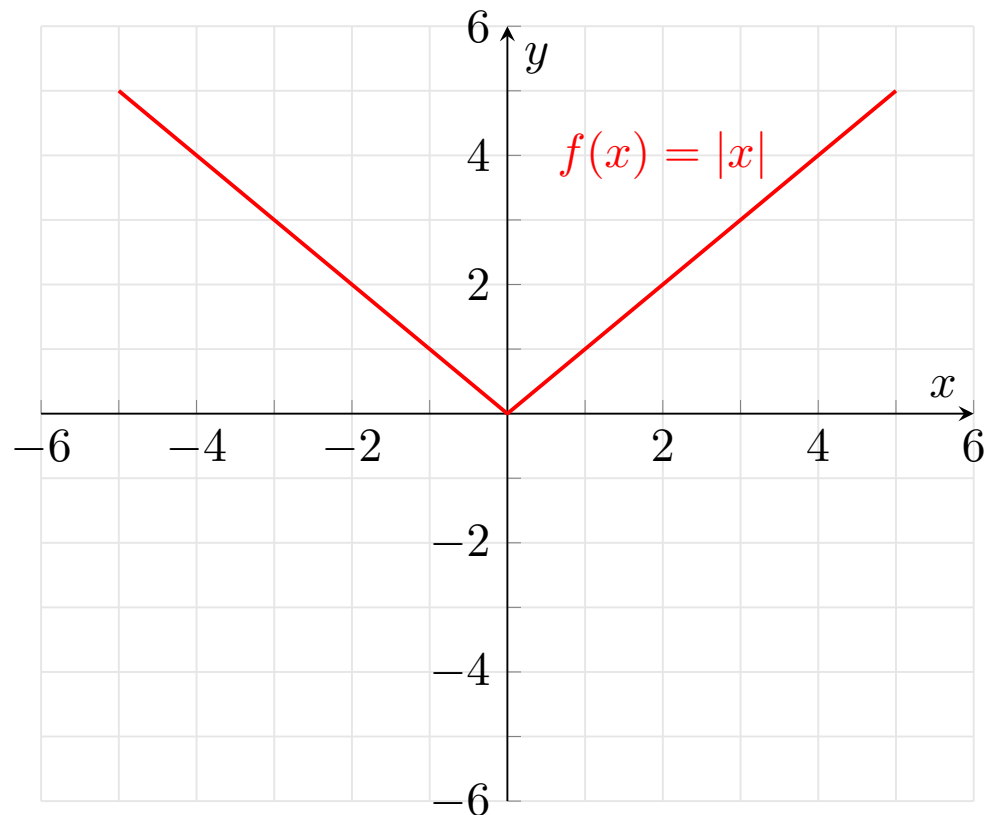
函数定义:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

定义域: $x \in \mathbb{R}$

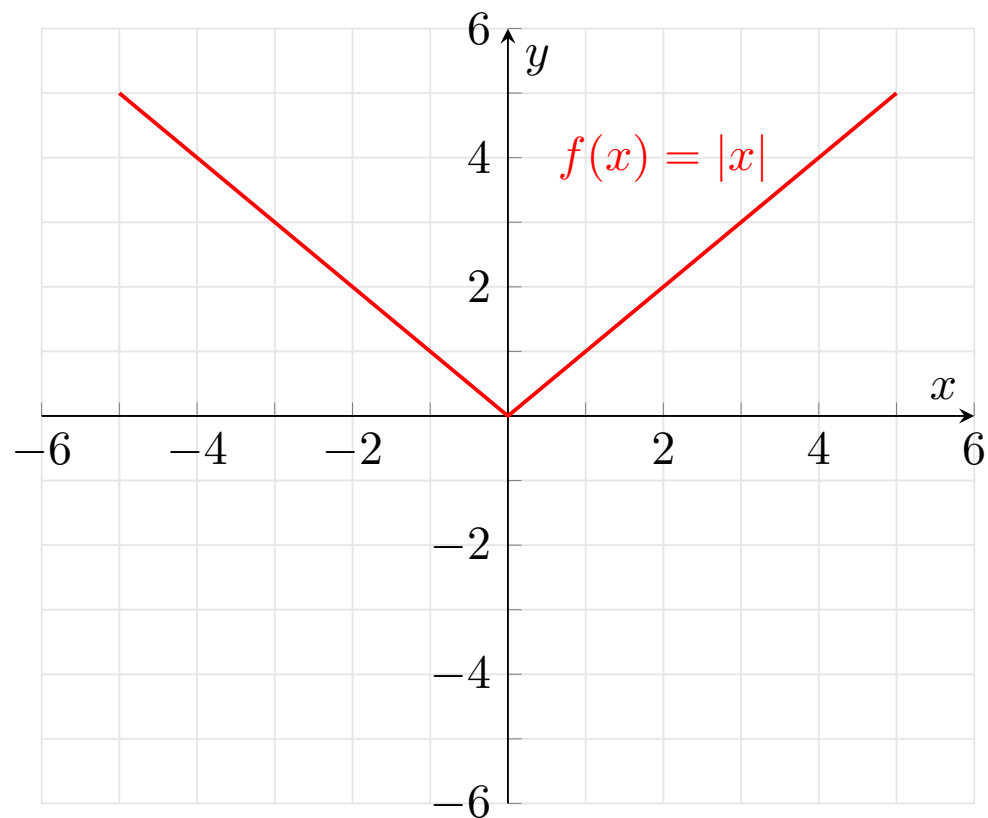
值域: $y \in \mathbb{R}, y \geq 0$

对称性: 关于 y 轴对称

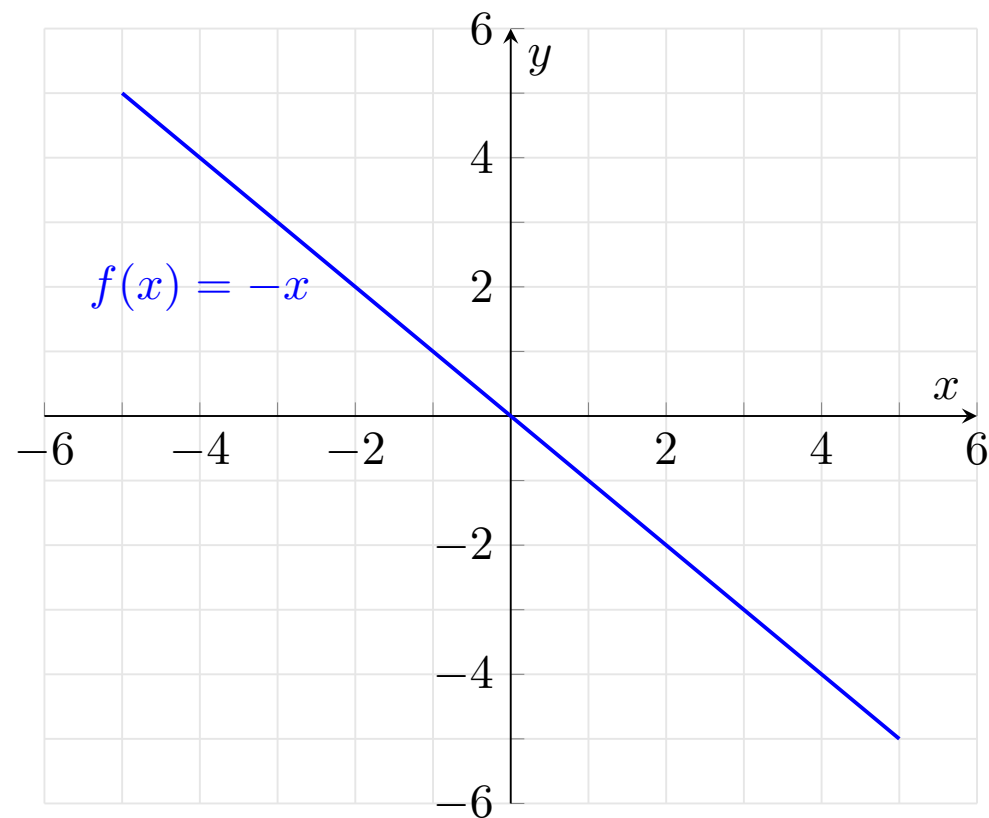


绝对值与相反数的比较

绝对值的函数图象



相反数的函数图象



1.5 有理数的大小比较规则

1. 数轴上右边的数比左边的数大
2. 正数 > 0
3. 负数 < 0
4. 正数 $>$ 负数
5. 两个负数比较，绝对值大的反而小！
如果 $a > b$ ，则： $-a < -b$

数轴比较法

1. 画数轴并标出所有数



2. 从左到右（从小到大）排列

3. 结果： $a < b$

1.6 有理数的加法法则

1. 同号两数相加, 取与加数相同的正负号, 并把绝对值相加;

当 $a, b > 0$ 时,

$$(+a) + (+b) = +(a + b) = a + b$$

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

2. 绝对值不相等的异号两数相加, 取绝对值较大的加数的正负号, 并用较大的绝对值减去较小的绝对值;

当 $a > b > 0$ 时,

$$(-a) + (+b) = -(a - b)$$

$$(+a) + (-b) = +(a - b) = a - b$$

3. 互为相反数的两个数相加得 0;

$$a + (-a) = 0$$

有理数加法的运算律

1. 加法交换律：两个数相加，交换加数的位置，和不变.

$$a + b = b + a$$

2. 加法结合律：三个数相加，先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

有理数去括号规则

括号前的符号与数字前的符号存在下列关系，则：

1. 同号取正（去括号，取正号）

$$+(+a) = +a = a$$

$$-(-a) = +a = a$$

2. 异号取负（去括号，取负号）

$$-(+a) = -a$$

$$+(-a) = -a$$

1.7 有理数的减法

有理数的减法法则：

1. 减去一个数，等于加上这个数的相反数.

$$a - b = a + (-b)$$

$$a - (-b) = a + (+b) = a + b$$

1.8 有理数的加减混合运算

1. 加减法是一级运算，优先级最低；
2. 加法与减法互为逆运算，加法与减法带符号统一理解为加法；
3. 减一个数，等于加相反数： $a - b = a + (-b)$ 或 $a - (-b) = a + b$ ；
4. 加一个数，等于减相反数： $a + b = a - (-b)$ 或 $a + (-b) = a - b$ ；
5. 同号取正（去括号，取正号）

$$+(+a) = +a = a$$

$$-(-a) = +a = a$$

6. 异号取负（去括号，取负号）