

# 数学课程的总目标

通过义务教育阶段的数学学习，学生逐步：

1. 会用数学的眼光观察现实世界；
2. 会用数学的思维思考现实世界；
3. 会用数学的语言表达现实世界。

(简称“三会”)。

# 数学考试丢分的四大原因

1. 知识点不透彻；
  2. 题型不熟练；
  3. 计算不准确；
  4. 计算速度慢。
- (简称“四因”)。

# 学好数学的五个步骤

1. 发现个案（发现有趣的个案）；
2. 类似案例（寻找类似的案例）；
3. 总结规律（找到一般的规律：从特殊到一般）；
4. 定义证明（给出定义或证明）。
5. 实际应用（应用到实践中去：从一般到特殊）。

（简称“五步骤”）。

第一步到第三步：大胆假设；第四步：小心求证；第五步：放心应用。

# 1.1 有理数的引入

## 定义

正整数、0 和负整数统称为整数 (integer), 正分数和负分数统称为分数 (fraction). 整数和分数统称为有理数 (rational number).

有理数  $\left\{ \begin{array}{l} \text{整数} \left\{ \begin{array}{l} \text{正整数} \\ 0 \\ \text{负整数} \end{array} \right. \\ \text{分数} \left\{ \begin{array}{l} \text{正分数} \\ \text{负分数} \end{array} \right. \end{array} \right.$

小数  $\left\{ \begin{array}{l} \text{有限小数} \\ \text{无限小数} \left\{ \begin{array}{l} \text{无限循环小数} \\ \text{无限不循环小数} \end{array} \right. \end{array} \right.$

0 既不是正数，也不是负数，是正数与负数的分界点。

有限小数和无限循环小数是分数，无限不循环小数不是分数。

思考：无限不循环小数是什么数？

# 小数如何转化为分数

有限小数如何转化为分数：

$$0.245 = \frac{245}{1000} = \frac{49}{200}$$

无限循环小数如何转化为分数？【华东师范大学七年级上册（2024） P73】

$$1000 \times 0.\dot{2}4\dot{5} = 245.\dot{2}4\dot{5} = 245 + 0.\dot{2}4\dot{5}$$

$$999 \times 0.\dot{2}4\dot{5} = 245$$

$$0.\dot{2}4\dot{5} = \frac{245}{999}$$

# 数集与有理数集

数集的表示方法【数学 A 版必修第一册 1.1 集合的概念】：  
集合 A 是小于 10 的自然数组成的集合，表示方法如下：

1. 列举法：  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
2. 描述法：  $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x < 10\}$

有理数集的表示方法：  $Q = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$

数学中常见数集及其记法：

1. 全体非负整数组成的集合称为非负整数集（或自然数集），记作  $\mathbb{N}$ .
2. 全体正整数组成的集合称为正整数集，记作  $\mathbb{N}^*$  或  $\mathbb{N}_+$ .
3. 全体整数组成的集合称为整数集，记作  $\mathbb{Z}$ .
4. 全体有理数组成的集合称为有理数集，记作  $\mathbb{Q}$ .
5. 全体实数组成的集合称为实数集，记作  $\mathbb{R}$ .

# 思考有理数集的表示方法

为什么可以用下面的方法表示有理数集？

$$Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$$

# 1.2 数轴

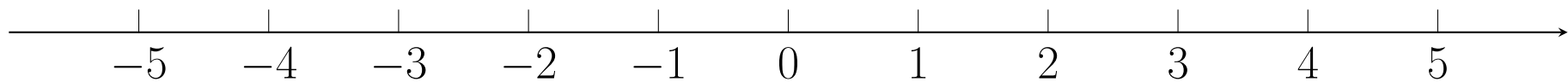
## 定义

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

数轴的四要素:

1. 原点
2. 正方向
3. 单位长度
4. 直线 (强调三要素的只包括前三条)

数轴示例:

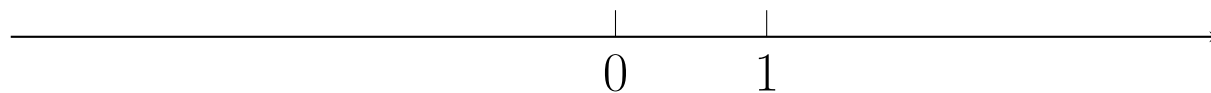




# 最简数轴

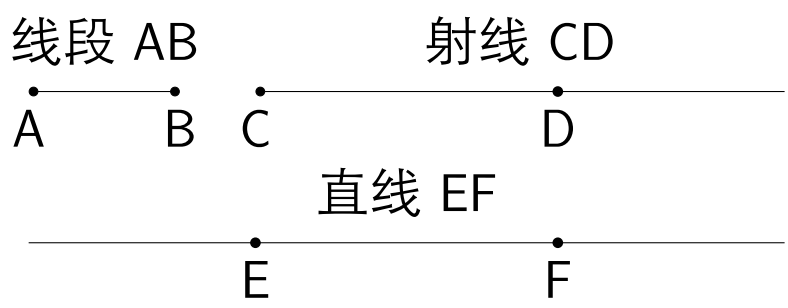
**定义**  
规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

以下图形是不是一个数轴？



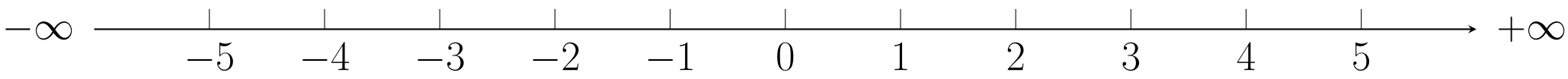
# 类比思维

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).



【北京师范大学四年级上册（2013）P16】

- 线段：线段有两个端点，线段有一定的长度。
- 射线：射线有一个端点，射线可以向一个方向无限延伸。
- 直线：直线没有端点，直线可以向两个方向无限延伸。



实数集  $\mathbb{R}$  可以用区间表示为  $(-\infty, +\infty)$ ,  $\infty$  读作“无穷大”, “ $-\infty$ ” 读作“负无穷大”, “ $+\infty$ ” 读作“正无穷大”. 【必修 A 版一册 P64】

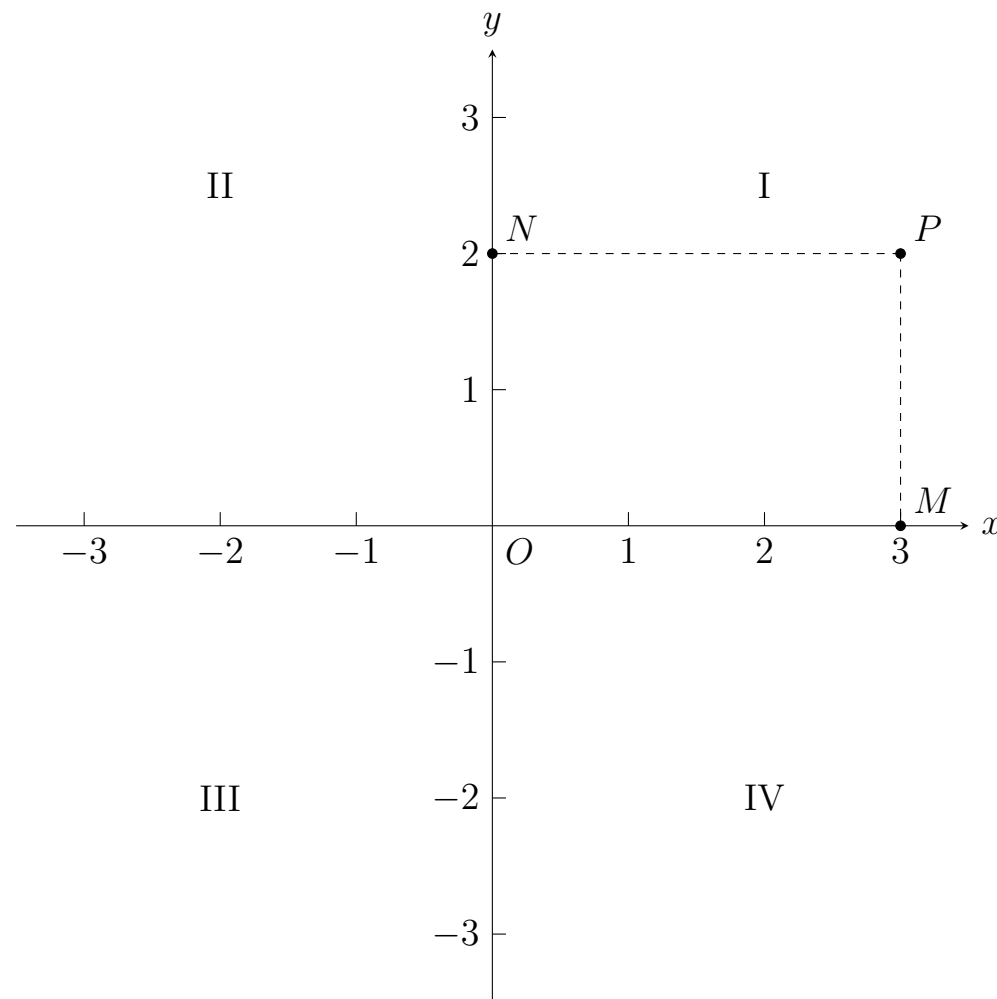
## 17.2 函数图象 (平面直角坐标系)

在数学中，我们可以用一对有序实数来确定平面上点的位置。

为此，在平面上画两条原点重合、互相垂直且具有相同单位长度的数轴，这就建立了平面直角坐标系 (rectangle coordinate system)。

通常把其中水平的数轴叫做  $x$  轴或横轴，取向右为正方向；铅直的数轴叫做  $y$  轴或纵轴，取向上为正方向；两条数轴的交点  $O$  叫做坐标原点。

为了纪念法国数学家笛卡儿，通常称为笛卡儿直角坐标系。



# 平面直角坐标系

在平面直角坐标系中，任意一点都可以用一对有序实数来表示。例如，图 17.2.2 中的点  $P$ ，从点  $P$  分别向  $x$  轴和  $y$  轴作垂线，垂足分别为点  $M$  和点  $N$ 。

这时，点  $M$  在  $x$  轴上对应的数为 3，称为点  $P$  的横坐标 (abscissa)。点  $N$  在  $y$  轴上对应的数为 2，称为点  $P$  的纵坐标 (ordinate)。

依次写出点  $P$  的横坐标和纵坐标，得到一对有序实数  $(3, 2)$ ，称为点  $P$  的坐标。这时点  $P$  可记作  $P(3, 2)$ 。

在平面直角坐标系中，两条坐标轴把平面分成如图 17.2.2 所示的 I、II、III、IV 四个区域，分别称为第一、二、三、四象限。坐标轴上的点不属于任何一个象限。

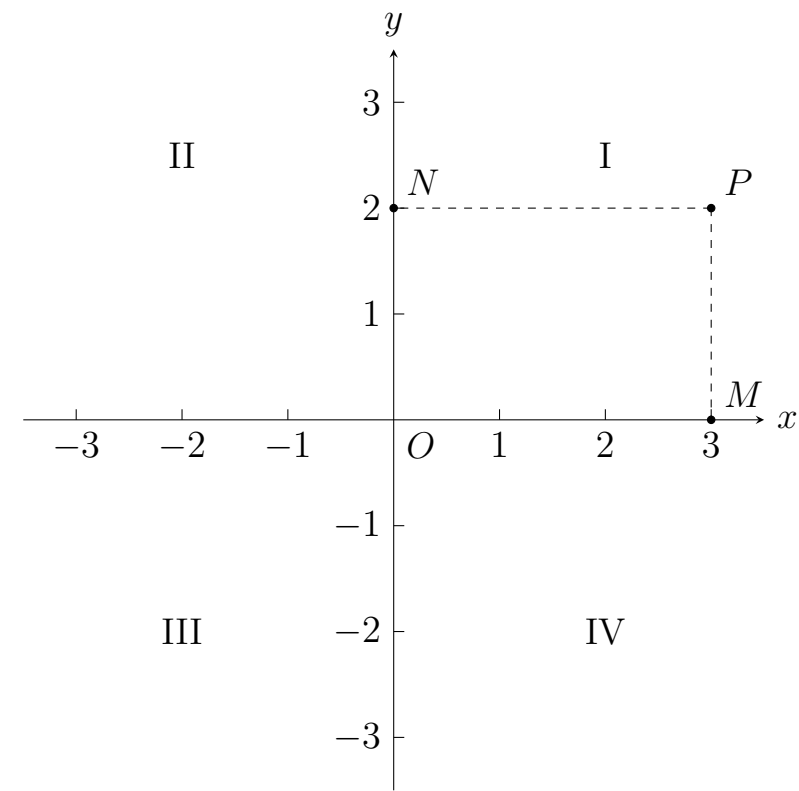


图: 17.2.2

# 1.3 相反数

## 定义

只有正负号不同的两个数称互为相反数 (opposite number)。  
我们规定：0 的相反数是 0。

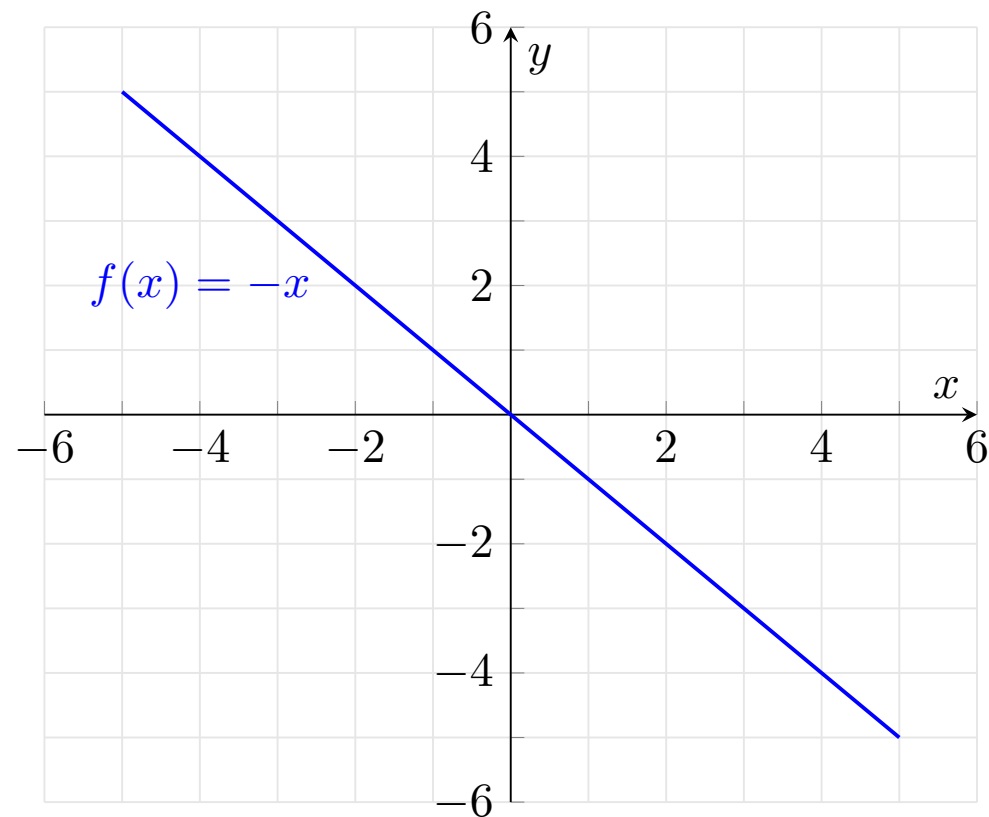
数学表达式:  $a + b = 0$

函数定义:  $f(x) = -x$

定义域:  $x \in \mathbb{R}$

值域:  $y \in \mathbb{R}$

对称性: 关于原点中心对称



# 倒数的定义及函数图象

## 定义

乘积为 1 的两个数互为倒数。

注意：0 没有倒数。

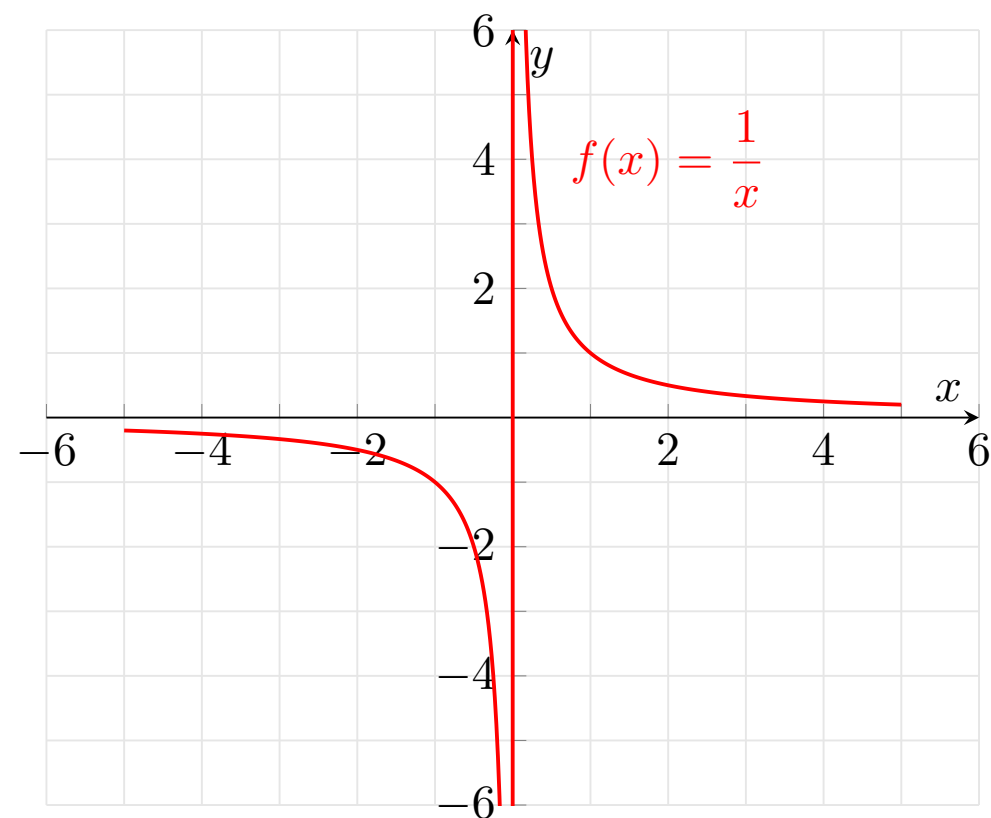
数学表达式:  $a \cdot b = 1$

函数定义:  $f(x) = \frac{1}{x}$

定义域:  $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

值域:  $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

对称性: 关于原点中心对称

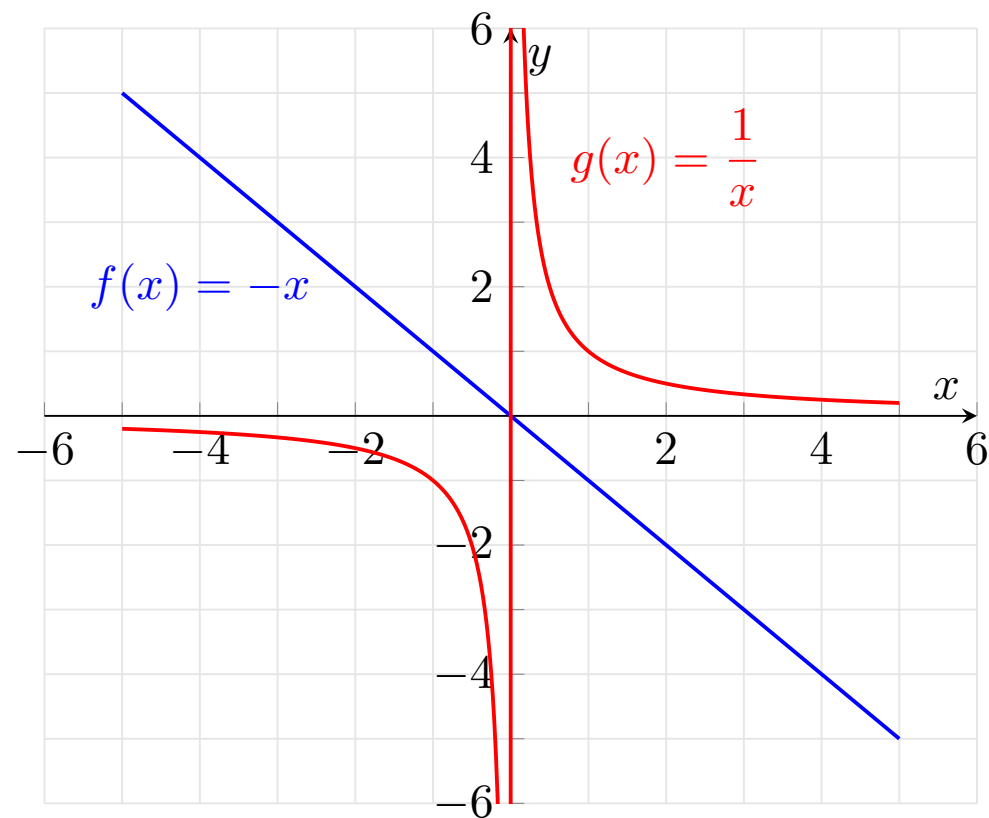


# 相反数与倒数的比较

相反数的表达式:  $a + b = 0$

倒数的表达式:  $a \cdot b = 1$

对称性: 相反数与倒数均关于原点中心对称



# 1.4 绝对值

定义：我们把在数轴上表示数  $a$  的点与原点的距离叫做数  $a$  的绝对值，记作  $|a|$ .

1. 一个正数的绝对值是它本身;
2. 0 的绝对值是 0;
3. 一个负数的绝对值是它的相反数.

数学表达式:  $|x|$

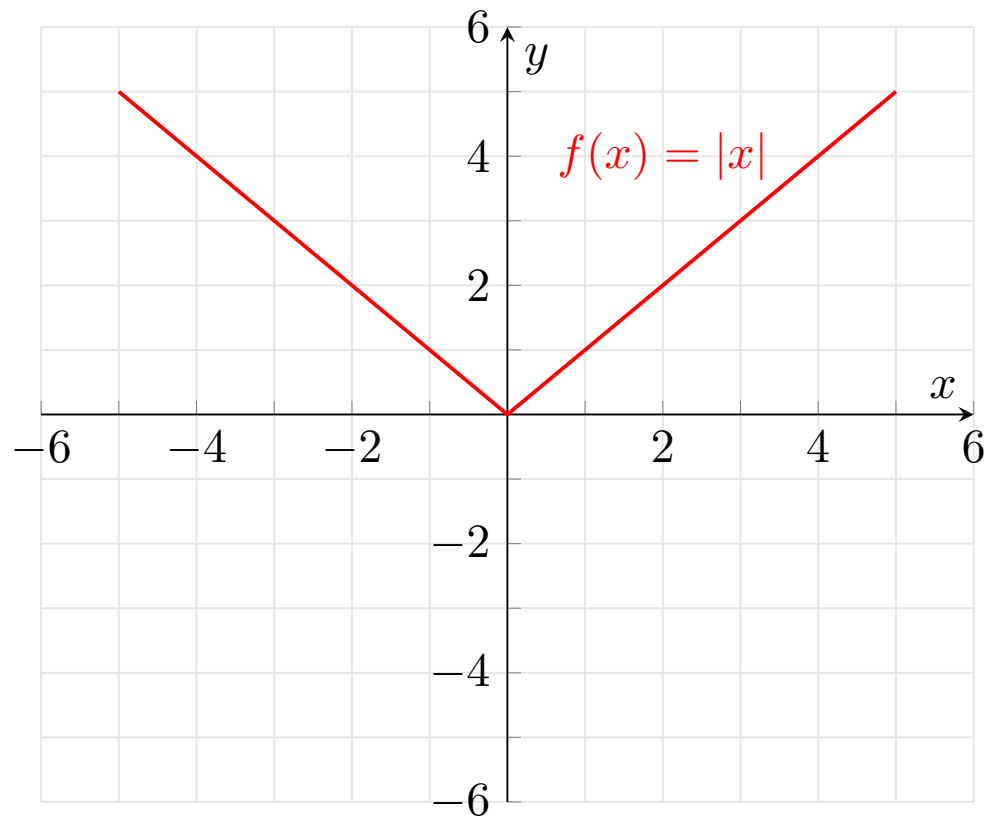
函数定义:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

定义域:  $x \in \mathbb{R}$

值域:  $y \in \mathbb{R}, y \geq 0$

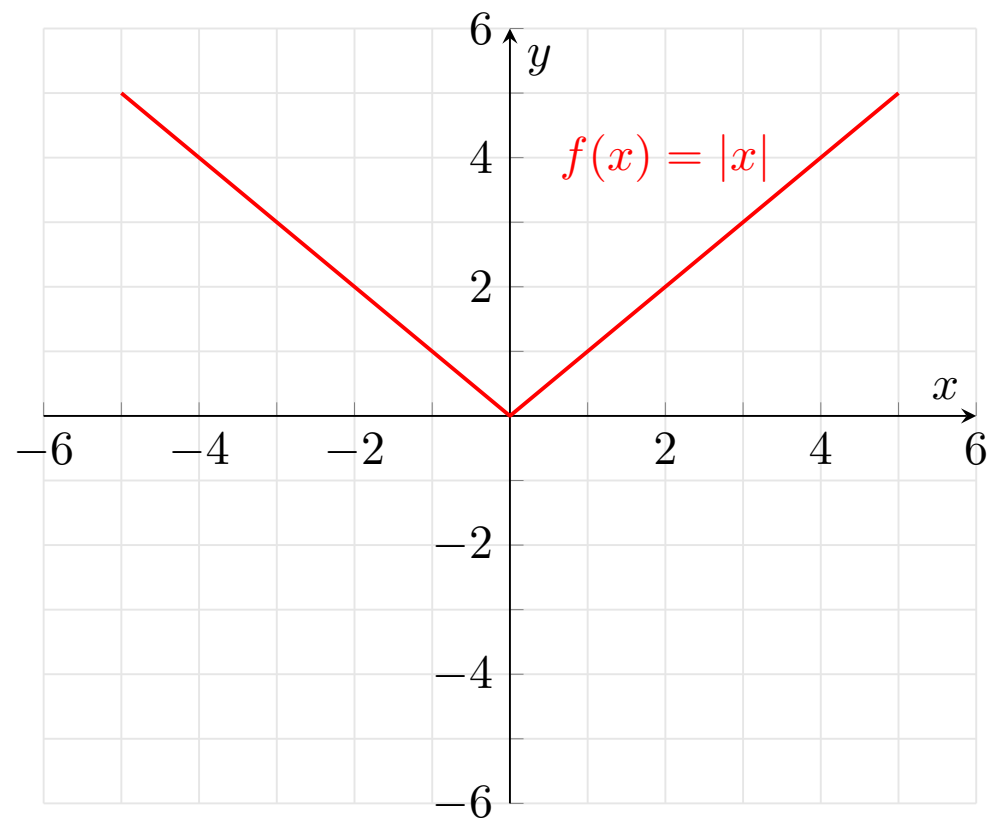
对称性: 关于  $y$  轴对称



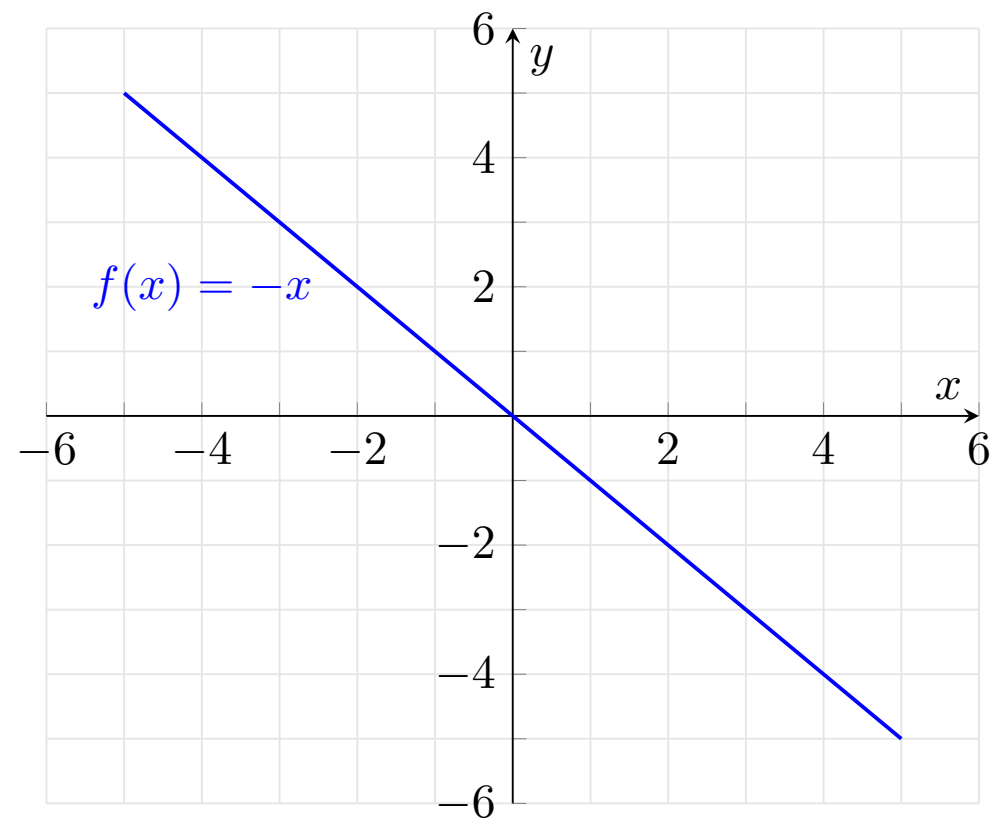


# 绝对值与相反数的比较

## 绝对值的函数图象



## 相反数的函数图象



## 1.5 有理数的大小比较规则

1. 数轴上右边的数比左边的数大
2. 正数  $> 0$
3. 负数  $< 0$
4. 正数  $>$  负数
5. 两个负数比较，绝对值大的反而小！  
如果  $a > b$ ，则：  $-a < -b$

# 数轴比较法

1. 画数轴并标出所有数



2. 从左到右（从小到大）排列

3. 结果：  $a < b$

## 1.6 有理数的加法法则

1. 同号两数相加, 取与加数相同的正负号, 并把绝对值相加;

当 $a, b > 0$ 时,

$$(+a) + (+b) = +(a + b) = a + b$$

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

2. 绝对值不相等的异号两数相加, 取绝对值较大的加数的正负号, 并用较大的绝对值减去较小的绝对值;

当 $a > b > 0$ 时,

$$(-a) + (+b) = -(a - b)$$

$$(+a) + (-b) = +(a - b) = a - b$$

3. 互为相反数的两个数相加得 0;

$$a + (-a) = 0$$

# 有理数加法的运算律

1. 加法交换律：两个数相加，交换加数的位置，和不变.

$$a + b = b + a$$

2. 加法结合律：三个数相加，先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

# 有理数去括号规则

括号前的符号与数字前的符号存在下列关系，则：

1. 同号取正（去括号，取正号）

$$+(+a) = +a = a$$

$$-(-a) = +a = a$$

2. 异号取负（去括号，取负号）

$$-(+a) = -a$$

$$+(-a) = -a$$

## 1.7 有理数的减法

有理数的减法法则：

1. 减去一个数，等于加上这个数的相反数.

$$a - b = a + (-b)$$

$$a - (-b) = a + (+b) = a + b$$

## 1.8 有理数的加减混合运算

1. 加减法是一级运算，优先级最低；
2. 加法与减法互为逆运算，加法与减法带符号统一理解为加法；
3. 减一个数，等于加相反数：  $a - b = a + (-b)$  或  $a - (-b) = a + b$ ；
4. 加一个数，等于减相反数：  $a + b = a - (-b)$  或  $a + (-b) = a - b$ ；
5. 同号取正（去括号，取正号）

$$+(+a) = +a = a$$

$$-(-a) = +a = a$$

6. 异号取负（去括号，取负号）