一元一次方程

丁保华

致慧星空工作室

2025 年 6 月 22 日

方程的定义

方程的定义：

含有未知数的等式叫做方程。

例如：

$$2x + 3 = 7$$

其中 x 是未知数，这个等式就构成了一个方程。

一元一次方程的定义

一元一次方程的定义：

在一个方程中，只含有一个未知数（元），并且未知数的指数都是 1（次），这样的方程叫做一元一次方程。

例如：

$$3x - 5 = 10 \text{ 是一元一次方程}$$

因为只含有一个未知数 x，且未知数 x 的次数为 1。

补充说明：

一般用x、y、z表示未知数，用a、b、c表示常数。

拓展提问

提问：

1. 什么是二元一次方程？试举例说明。

拓展提问

提问：

1. 什么是二元一次方程？试举例说明。
2. 什么是三元一次方程？试举例说明。

拓展提问

提问：

1. 什么是二元一次方程？试举例说明。
2. 什么是三元一次方程？试举例说明。
3. 什么是一元二次方程？试举例说明。

拓展提问

提问:

1. 什么是二元一次方程? 试举例说明。
2. 什么是三元一次方程? 试举例说明。
3. 什么是一元二次方程? 试举例说明。
4. 什么是一元三次方程? 试举例说明。

拓展提问

提问：

1. 什么是二元一次方程？试举例说明。
2. 什么是三元一次方程？试举例说明。
3. 什么是一元二次方程？试举例说明。
4. 什么是一元三次方程？试举例说明。
5. 什么是二元二次方程？试举例说明。

等式的基本性质

见：《七年级下册》5.2 解一元一次方程 P6。

性质 1： 等式两边同时加上（或减去）同一个数或同一个整式，所得结果仍然是等式。

$$
\text{如果有} \quad a = b, \quad \text{则：}
$$
$$
a + c = b + c
$$
$$
a - c = b - c
$$

性质 2： 等式两边同时乘以或除以同一个数 (除数不为 0)，所得结果仍然是等式。

$$
\text{如果有} \quad a = b, \quad \text{则：}
$$
$$
ac = bc
$$
$$
\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \quad (c \neq 0)
$$

思考：为什么性质 2 只强调同一个数?

方程的变形规则

见：《七年级下册》5.2 解一元一次方程 P7。

由等式的基本性质，可以得到方程的变形规则。

1. 方程两边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，方程的解不变。
2. 方程两边都乘以 (都或除以)同一个不为 0 的数，方程的解不变。

方程变形规则的应用：

1. 利用变形规则 1, 将方程中的某些项改变符号后, 从方程的一边移到另一边。像这样的变形叫做移项 (transposition)。
   如：$x+3=5$，方程两边都减去 3，得 $x=5-3 \Rightarrow x=2$
2. 利用变形规则 2, 将方程的两边都除以未知数的系数. 像这样的变形通常称作“将未知数的系数化为 1”，简称“简化系数”。
   如：$3x=15$，方程的两边都除以 3，得 $x=15 \div 3 \Rightarrow x=5$

思考：为什么变形规则 2 只强调同一个不为 0 的数?

方程的解

能使方程左、右两边的值相等的未知数的值, 叫做方程的解 (solution).

例如 $x = 2$ 是方程 $x + 3 = 5$ 的解, 它能使得方程的左、右两边的值相等 (都等于 5) .
当方程中只有一个未知数时, 方程的解也叫做方程的根 (root).
这些性质是解方程的基础。通过运用这些性质，我们可以对一元一次方程进行变形，从而求出未知数的值，即解方程。

例如，对于方程

$$2x + 4 = 10$$

我们可以先移项，即：利用性质 1，两边同时减去 4(也就是将 4 移项到方程的右边)，得到

$$2x = 6$$

再简化系数，即：利用性质 2，两边同时除以 2，得到

$$x = 3$$

这就是方程的解。

解方程的步骤

解方程的步骤一般为：

1. 移项
2. 合并同类项
3. 简化系数

移项的定义与示例

把方程中的某些项改变符号后，从方程的一边移到另一边，这种变形叫做移项。

1. 常数移项：$x+3=5$
   将常数项 3 从方程的左边移项到方程的右边，得：$x=5-3 \Rightarrow x=2$
2. 未知数移项：$3x=2x+5$
   将含有未知数的整式项 $2x$ 从方程的右边移项到方程的左边，得：
   $3x-2x=5 \Rightarrow x=5$
3. 同时移项：$3x-5=2x+10$
   首先，将含有未知数的整式项移到左边，常数项移到右边。
   把 $2x$ 移到左边变为 $-2x$，把 -5 移到右边变为 $+5$。
   方程变为：$3x-2x=10+5$。
   然后合并同类项，左边变为 x，右边变为 15，得到方程的解：$x=15$。
4. 左右交换位置：$10=x+5$
   $x+5=10 \Rightarrow x=10-5 \Rightarrow x=5$

简化系数的定义与示例

将方程两边同时除以未知数的系数，使未知数的系数变为 1，从而得到方程的解。

1. 整数系数的简化

   求方程 $4x = 20$ 的解。

   分析：方程两边同时除以 4，得到方程左边得到 x，即简化系数为 1。

   解：

简化系数的定义与示例

将方程两边同时除以未知数的系数，使未知数的系数变为 1，从而得到方程的解。

1. 整数系数的简化

   求方程 $4x = 20$ 的解。

   分析：方程两边同时除以 4，得到方程左边得到 x，即简化系数为 1。

   解：

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{20}{4} \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

2. 分数系数的简化

   求方程 $\frac{1}{4}x = 5$ 的解。

   分析：方程两边同时乘以 4，得到方程左边得到 x，即简化系数为 1。

   解：

简化系数的定义与示例

将方程两边同时除以未知数的系数，使未知数的系数变为 1，从而得到方程的解。

1. 整数系数的简化

   求方程 $4x = 20$ 的解。

   分析：方程两边同时除以 4，得到方程左边得到 x，即简化系数为 1。

   解：

$$x = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

2. 分数系数的简化

   求方程 $\frac{1}{4}x = 5$ 的解。

   分析：方程两边同时乘以 4，得到方程左边得到 x，即简化系数为 1。

   解：

$$x = 5 \times 4$$
$$x = 20$$

行程问题及其示例

涉及路程、速度和时间的关系，通常有相遇问题、追及问题等。
甲、乙两人分别从相距 90 千米的 A、B 两地骑行出发，相向而行。甲的速度是 12 千米/时，乙的速度是 18 千米/时。甲从 A 地出发骑行了 2.5 小时之后，乙从 B 地骑行出发，乙出发后经过多少小时两人相遇?

解：

行程问题及其示例

涉及路程、速度和时间的关系，通常有相遇问题、追及问题等。
甲、乙两人分别从相距 90 千米的 A、B 两地骑行出发，相向而行。甲的速度是 12 千米/时，乙的速度是 18 千米/时。甲从 A 地出发骑行了 2.5 小时之后，乙从 B 地骑行出发，乙出发后经过多少小时两人相遇？

解：
设经过 x 小时两人相遇。根据路程 = 速度 × 时间，甲先骑行了 $12 \times 2.5 = 30$ 千米，然后，甲又骑行了 $12x$ 千米，乙骑行了 $18x$ 千米。所以：

$$\begin{aligned} 12 \times 2.5 + 12x + 18x &= 90 \\ 30 + 30x &= 90 \\ 30x = 90 - 30 &= 60 \\ x &= 60 \div 30 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

答：已出发后经过 2 小时，两人相遇。

工程问题及其示例

涉及工作总量、工作效率和工作时间的关系，通常假设工作总量为单位“1”。
小亮和老师一起整理了一篇教学材料, 准备录入成电子稿. 按篇幅估计, 老师单独录入需 4 h 完成, 小亮单独录入需 6 h 完成. 小亮先录入了 1h 后, 老师开始一起录入, 问: 还需要多少小时完成?

解:

工程问题及其示例

涉及工作总量、工作效率和工作时间的关系，通常假设工作总量为单位“1”。
小亮和老师一起整理了一篇教学材料, 准备录入成电子稿. 按篇幅估计, 老师单独录入需 4 h 完成, 小亮单独录入需 6 h 完成. 小亮先录入了 1h 后, 老师开始一起录入, 问: 还需要多少小时完成?

解:

设总工作量为 1，则小亮每小时工作量为：$\frac{1}{6}$，老师每小时工作量为：$\frac{1}{4}$

设还需要 x 小时可以完成，则：

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}x=1,$$

$$2+3x+2x=12 \quad \Rightarrow \quad 5x=10,$$

$$x=2$$

答：还需要 2 小时能够完成。

经济问题及其示例

涉及成本、售价、利润、利润率等经济指标之间的关系。
学校准备添置一批课桌椅, 原订购 60 套, 每套 200 元. 店方表示: 如果多购买, 可以优惠. 结果校方购买了 72 套, 每套减价 6 元, 而商店获得同样多的利润. 求每套课桌椅的成本.

解： 设每套桌椅的成本为 x 元， 则:

经济问题及其示例

涉及成本、售价、利润、利润率等经济指标之间的关系。
学校准备添置一批课桌椅, 原订购 60 套, 每套 200 元. 店方表示: 如果多购买, 可以优惠. 结果校方购买了 72 套, 每套减价 6 元, 而商店获得同样多的利润. 求每套课桌椅的成本.

解：设每套桌椅的成本为 x 元，则：

$$
\begin{aligned}
60(200-x) &= 72(200-6-x) \\
5(200-x) &= 6(200-6-x) \\
1000-5x &= 1200-36-6x \\
x &= 1200-1000-36 = 200-36 = 164
\end{aligned}
$$

答：每套桌椅的成本为 164 元。

浓度问题及其示例

涉及溶液的浓度、溶质质量、溶液质量之间的关系。通常已知不同浓度的溶液混合后的浓度，求某种溶液的质量或浓度等。

题型知识说明：

1. 溶液质量 = 溶质质量 + 溶剂质量
2. 浓度 = 溶质质量 ÷ 溶液质量 × 100%
3. 溶质质量 = 溶液质量 × 浓度
4. 溶液质量 = 溶质质量 ÷ 浓度
5. 溶剂质量 = 溶液质量 − 溶质质量 = 溶液质量 × (100% − 浓度)

浓度问题及其示例

例题：有一个 20 克的盐水溶液，浓度为 15%。现在向其中加入一定量的水后，溶液的浓度变为 10%。问加入了多少克水?

解：设加入了 x 克水，则：

浓度问题及其示例

例题：有一个 20 克的盐水溶液，浓度为 15%。现在向其中加入一定量的水后，溶液的浓度变为 10%。问加入了多少克水?

解：设加入了 x 克水，则：

$$(20+x)\times 10\% = 20\times 15\% \quad (1)$$
$$2+0.1x = 3 \quad (2)$$
$$0.1x = 3-2 = 1 \quad (3)$$
$$x = 10 \quad (4)$$

答：加入了 10 克水。

总结

本章我们学习了：

1. 方程的定义、方程的解
2. 一元一次方程的定义
3. 等式的基本性质
4. 方程的变形规则：移项和简化系数
5. 方程的求解方法
6. 一元一次方程在行程、工程、经济、浓度等问题中的应用。

希望大家能够熟练掌握这些知识，并将一元一次方程及其求解的知识应用到解决实际生活中的问题。