

等差数列与等比数列

丁保华

致慧星空工作室

2025 年 5 月 3 日

1 数列的概念回顾

2 等差数列

- 定义
- 通项公式推导与证明
- 前 n 项和公式推导与证明
- 基本推论

3 等比数列

- 定义
- 通项公式推导与证明
- 前 n 项和公式推导与证明
- 基本推论

数列的概念回顾

定义：按照一定顺序排列的一列数称为数列。数列中的每一个数叫做这个数列的项，排在第一位的数是第一项（或首项），排在第 n 位的数是第 n 项（或通项）。

表示方法：一般用 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 表示数列的各项，其中 a_n 表示数列的通项。数列可以看作是定义域为正整数集或其有限子集 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的函数 $a_n = f(n)$ ，当自变量依次取 $1, 2, 3, \dots, n$ 时对应的函数值依次排列而成。

等差数列的定义

定义：一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差，公差通常用字母 d 表示。

符号表示：对于等差数列 $\{a_n\}$ ，有 $a_n - a_{n-1} = d$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*, d$ 为常数)

等差数列的通项公式推导与证明

推导过程：以首项为 a_1 ，公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 为例。

$$a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 - a_2 = d \Rightarrow a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 - a_3 = d \Rightarrow a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

\vdots

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

证明：采用数学归纳法。

当 $n = 1$ 时， $a_1 = a_1 + (1 - 1)d = a_1$ ，等式成立。

假设当 $n = k$ ($k \geq 1$) 时，等式成立，即 $a_k = a_1 + (k - 1)d$ 。

那么，当 $n = k + 1$ 时， $a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k - 1)d + d = a_1 + kd$ ，等式也成立。

根据数学归纳法原理，等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ 对于所有正整数 n 都成立。

等差数列前 n 项和公式推导与证明

推导过程： 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 。

由于 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_n + a_1$ ，共有 $\frac{n}{2}$ 对这样的和，所以 $S_n = \frac{n}{2} \times (a_1 + a_n)$ 。

又因为 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ，代入上式得 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ 。

证明： 采用倒序相加法。

将 S_n 和倒序后的 S_n 相加：

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

两式相加得 $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

共有 n 个 $(a_1 + a_n)$ 项，

$$\text{所以 } 2S_n = n(a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} \times (a_1 + a_n)$$

再结合 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ，得到 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ 。

等差数列的基本推论

推论 1 (通项公式的变形): 由 $a_n = a_1 + (n - 1)d$, 可得
 $a_n = a_m + (n - m)d$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$ 且 $m \leq n$), 这体现了等差数列中任意两项之间的关系, 知道其中一项和公差以及项数关系, 就可以求出另一项。

推论 2 (等差中项公式): $a_{n-m} + a_{n+m} = 2a_n$ 或 $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-m} + a_{n+m})$, 其中:
 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 且 $m < n$ 。等差中项公式是等差数列的一个重要性质。

推论 3 (前 n 项和的性质): $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 也成等差数列, 公差为 n^2d 。这个推论可以用来解决涉及等差数列前若干项和的有关问题, 通过将前 n 项和看作新的数列, 利用等差数列的性质进行求解。

等比数列的定义

定义：一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，那么这个数列就叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母 q 表示 ($q \neq 0$)。

符号表示：对于等比数列 $\{a_n\}$ ，有 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*, q \neq 0)$ 。

等比数列的通项公式推导与证明

推导过程：以首项为 a_1 ，公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 为例。

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

证明：采用数学归纳法。

当 $n = 1$ 时， $a_1 = a_1 q^0 = a_1$ ，等式成立。

假设当 $n = k$ ($k \geq 1$) 时，等式成立，即 $a_k = a_1 q^{k-1}$ 。

那么，当 $n = k + 1$ 时， $a_{k+1} = a_k q = a_1 q^{k-1} \times q = a_1 q^k$ ，等式也成立。

根据数学归纳法原理，等比数列的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 对于所有正整数 n 都成立。

等比数列前 n 项和公式推导与证明

推导过程： 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 。

当 $q = 1$ 时，数列的每一项都相等，所以 $S_n = na_1$ 。

当 $q \neq 1$ 时，将 S_n 乘以 q 得

$$qS_n = a_1q + a_2q + \cdots + a_nq = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_nq。$$

用原式 S_n 减去这个式子：

$$S_n - qS_n = a_1 - a_nq \Rightarrow S_n(1 - q) = a_1 - a_nq$$

$$\text{又因为 } a_n = a_1q^{n-1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_1q^{n-1} \times q}{1 - q} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

证明： 当 $q = 1$ 时，显然成立；当 $q \neq 1$ 时，上述推导过程已经证明了公式的正确性。

等比数列的基本推论

推论 1 (通项公式的变形): 由 $a_n = a_1 q^{n-1}$, 可得 $a_n = a_m q^{n-m}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$ 且 $m \leq n$), 它反映了等比数列中任意两项之间的关系, 类似于等差数列中的相应推论, 可用于已知某些项和公比求其他项的情况。

推论 2 (等比中项公式): $a_{n-m} \cdot a_{n+m} = a_n^2$ 。这个推论体现了等比数列中相邻三项 (以中间项为对称轴的三项) 的中间项与前后两项的积的关系, 但要注意等比中项可能有两个值 (正负), 需要根据数列的具体情况进行取舍。

推论 3 (前 n 项和的性质): $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 也成等比数列, 公比为 q^n 。这个推论与等差数列前若干项和的推论类似, 不过公比变成了原来的 n 次方, 可用于解决有关等比数列前若干项和的综合问题。