数学课程的总目标

通过义务教育阶段的数学学习，学生逐步：

1. **会用数学的眼光观察现实世界；**
2. **会用数学的思维思考现实世界；**
3. **会用数学的语言表达现实世界。**

简称“三会”。

数学考试丢分的四大原因

1. **知识点不透彻；**
2. **题型不熟练；**
3. **计算不准确；**
4. **计算速度慢。**

简称“四因”。

学好数学的五个步骤

1. 发现个案（发现有趣的个案）；

2. 类似案例（寻找类似的案例）；

3. 总结规律（找到一般的规律：从特殊到一般）；

4. 定义证明（给出定义或证明）。

5. 实际应用（应用到实践中去：从一般到特殊）。

简称“五步骤”，1-3：大胆假设；4：小心求证；5：放心应用。

1.1 有理数的引入

定义

正整数、0 和负整数统称为整数 (integer), 正分数和负分数统称为分数 (fraction). 整数和分数统称为有理数 (rational number).

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ 0\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\qquad \text{小数}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限小数}\begin{cases}\text{无限循环小数}\\ \text{无限不循环小数}\end{cases}\end{cases}$$

0 既不是正数，也不是负数，是正数与负数的分界点。

有限小数和无限循环小数是分数，无限不循环小数不是分数。

思考：无限不循环小数是什么数?

小数如何转化为分数

有限小数如何转化为分数：

$$0.245 = \frac{245}{1000} = \frac{49}{200}$$

无限循环小数如何转化为分数?【华东师范大学七年级上册（2024）P73】

$$1000 \times 0.\dot{2}4\dot{5} = 245.\dot{2}4\dot{5} = 245 + 0.\dot{2}4\dot{5}$$

$$999 \times 0.\dot{2}4\dot{5} = 245$$

$$0.\dot{2}4\dot{5} = \frac{245}{999}$$

无限循环小数化为分数

将 $0.\dot{3}$ 转化为分数

解：设 $a=0.\dot{3}$，则：

$$10a=3.\dot{3}=3+0.\dot{3}=3+a,$$

$$9a=3$$

$$\therefore a=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

将 $0.\dot{2}\dot{5}$ 转化为分数

解：设 $a = 0.\dot{2}\dot{5}$，则：

$$100a = 25.\dot{2}\dot{5} = 25 + a,$$

$$99a = 25$$

$$\therefore a = \frac{25}{99}$$

将 $0.3\dot{2}\dot{5}$ 转化为分数

解：设 $a=0.3\dot{2}\dot{5}$，则：

$$10a=3+0.\dot{2}\dot{5}=3+\frac{25}{99}$$

$$10a=\frac{3\times 99+25}{99}=\frac{322}{99}$$

$$\therefore a=\frac{322}{990}=\frac{161}{495}$$

数集与有理数集

数集的表示方法【数学 A 版必修第一册 1.1 集合的概念】:
集合 A 是小于 10 的自然数组成的集合，表示方法如下：

1. 列举法：$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
2. 描述法：$A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x < 10\}$

有理数集的表示方法： $Q = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$

数学中常见数集及其记法：
1. 全体非负整数组成的集合称为非负整数集（或自然数集），记作 $\mathbb{N}$.
2. 全体正整数组成的集合称为正整数集，记作 $\mathbb{N}^*$ 或 $\mathbb{N}_+$.
3. 全体整数组成的集合称为整数集，记作 $\mathbb{Z}$.
4. 全体有理数组成的集合称为有理数集，记作 $\mathbb{Q}$.
5. 全体实数组成的集合称为实数集，记作 $\mathbb{R}$.

思考有理数集的表示方法

为什么可以用下面的方法表示有理数集?

$$Q = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$$

将 $0.\dot{3}$ 转化为分数

解：设 $a=0.\dot{3}$，则：

$$10a=3.\dot{3}=3+0.\dot{3}=3+a,$$

$$9a=3$$

$$\therefore a=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

将 $0.\dot{2}\dot{5}$ 转化为分数

解：设 $a=0.\dot{2}\dot{5}$，则：

$$100a=25.\dot{2}\dot{5}=25+a,$$

$$99a=25$$

$$\therefore a=\frac{25}{99}$$

将 $0.3\dot{2}\dot{5}$ 转化为分数

解：设 $a=0.3\dot{2}\dot{5}$，则：

$$10a=3+0.\dot{2}\dot{5}=3+\frac{25}{99}$$

$$10a=\frac{3\times 99+25}{99}=\frac{322}{99}$$

$$\therefore a=\frac{322}{990}=\frac{161}{495}$$

1.2 数轴

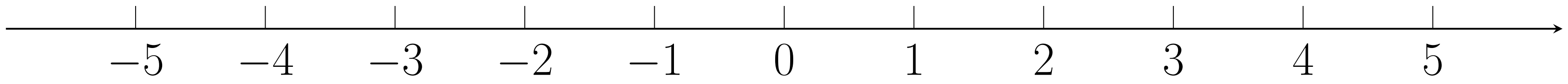
定义

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

数轴的四要素：

1. 原点
2. 正方向
3. 单位长度
4. 直线（强调三要素的只包括前三条）

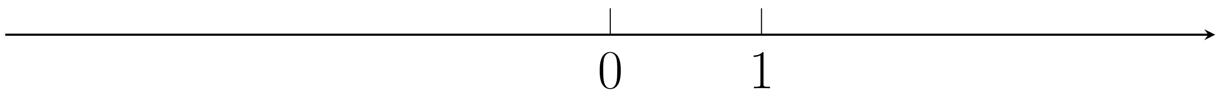
数轴示例：



定义

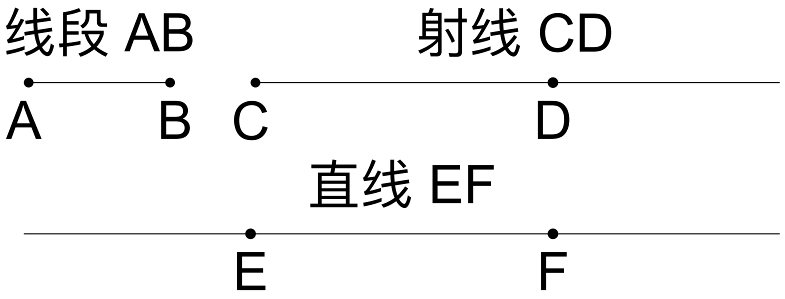
规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

以下图形是不是一个数轴?

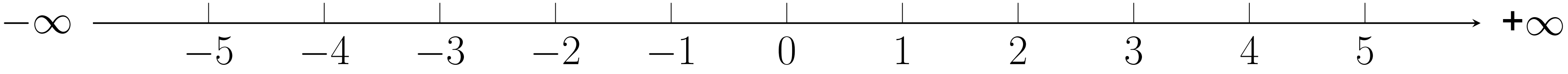


类比思维

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).



【北京师范大学四年级上册（2013）P16】
线段：线段有两个端点，线段有一定的长度。
射线：射线有一个端点，射线可以向一个方向无限延伸。
直线：直线没有端点，直线可以向两个方向无限延伸。



实数集 $\mathbb{R}$ 可以用区间表示为 $(-\infty,+\infty)$，∞ 读作“无穷大”, “$-\infty$”读作“负无穷大”, “$+\infty$”读作“正无穷大”.【必修 A 版一册 P64】

在数学中，我们可以用一对有序实数来确定平面上点的位置。

为此，在平面上画两条原点重合、互相垂直且具有相同单位长度的数轴，这就建立了平面直角坐标系 (rectangle coordinate system)。

通常把其中水平的数轴叫做 x 轴或横轴，取向右为正方向；铅直的数轴叫做 y 轴或纵轴，取向上为正方向；两条数轴的交点 O 叫做坐标原点。

为了纪念法国数学家笛卡儿，通常称为笛卡儿直角坐标系。

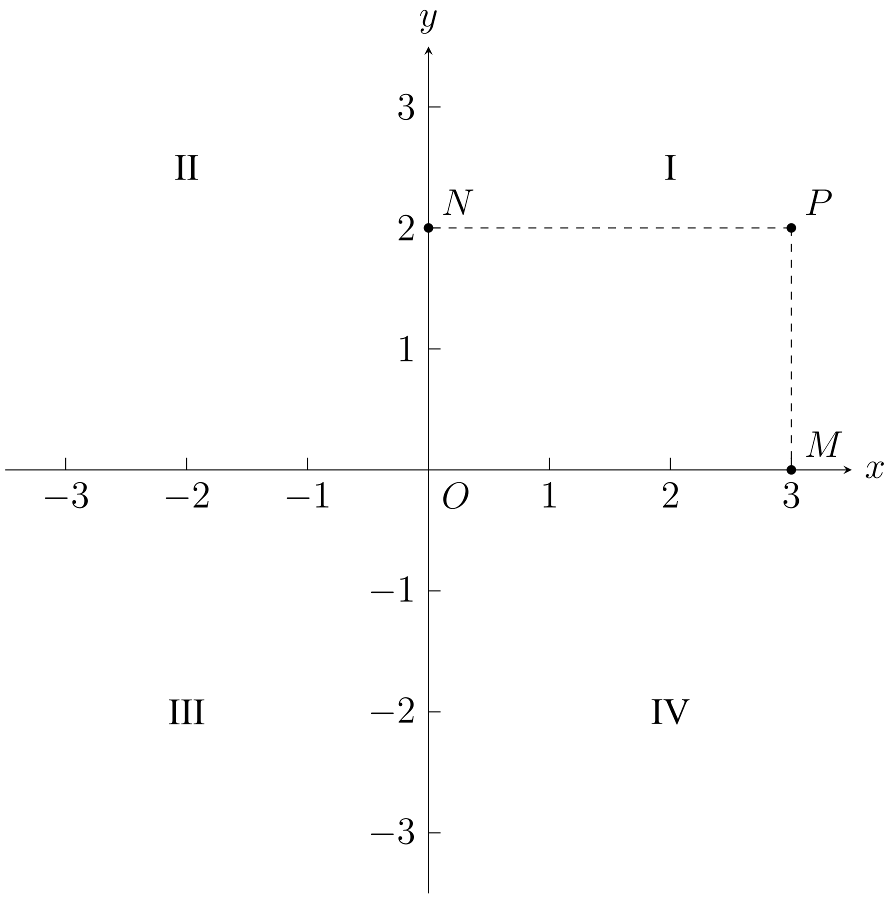


图: 17.2.2

在平面直角坐标系中，任意一点都可以用一对有序实数来表示。例如，图 17.2.2 中的点 P，从点 P 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足分别为点 M 和点 N。

这时，点 M 在 x 轴上对应的数为 3，称为点 P 的横坐标 (abscissa)。点 N 在 y 轴上对应的数为 2，称为点 P 的纵坐标 (ordinate)。

依次写出点 P 的横坐标和纵坐标，得到一对有序实数 (3, 2)，称为点 P 的坐标。这时点 P 可记作 $P(3,2)$。

在平面直角坐标系中，两条坐标轴把平面分成如图 17.2.2 所示的 I、II、III、IV 四个区域，分别称为第一、二、三、四象限。坐标轴上的点不属于任何一个象限。

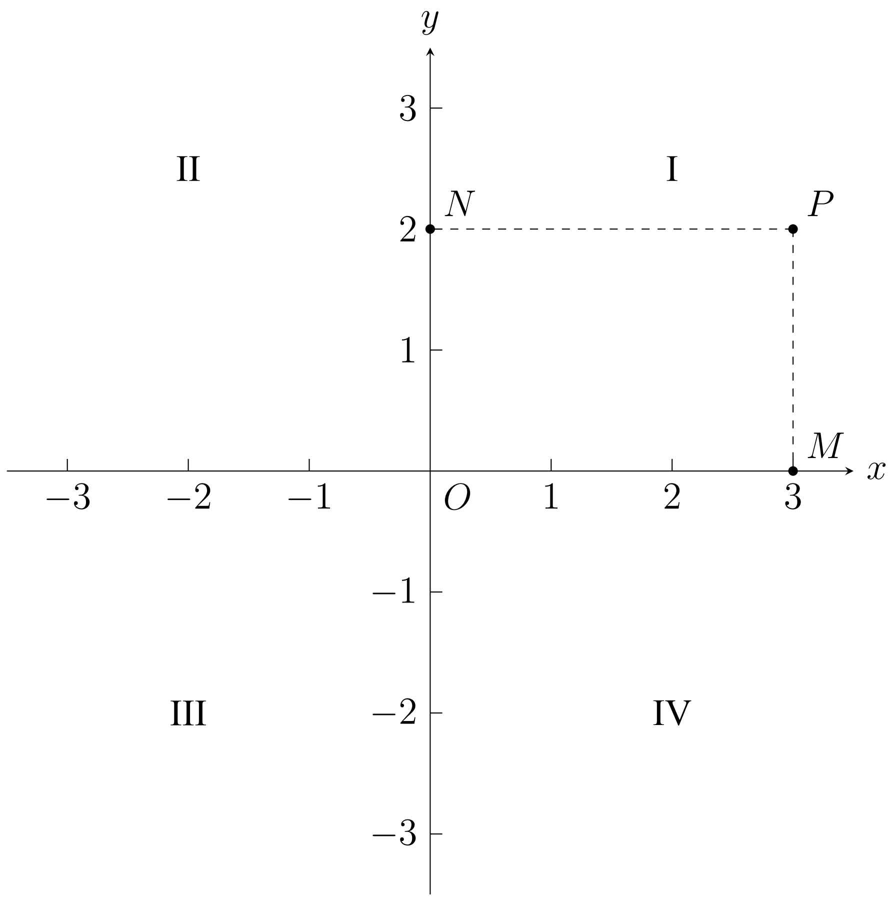
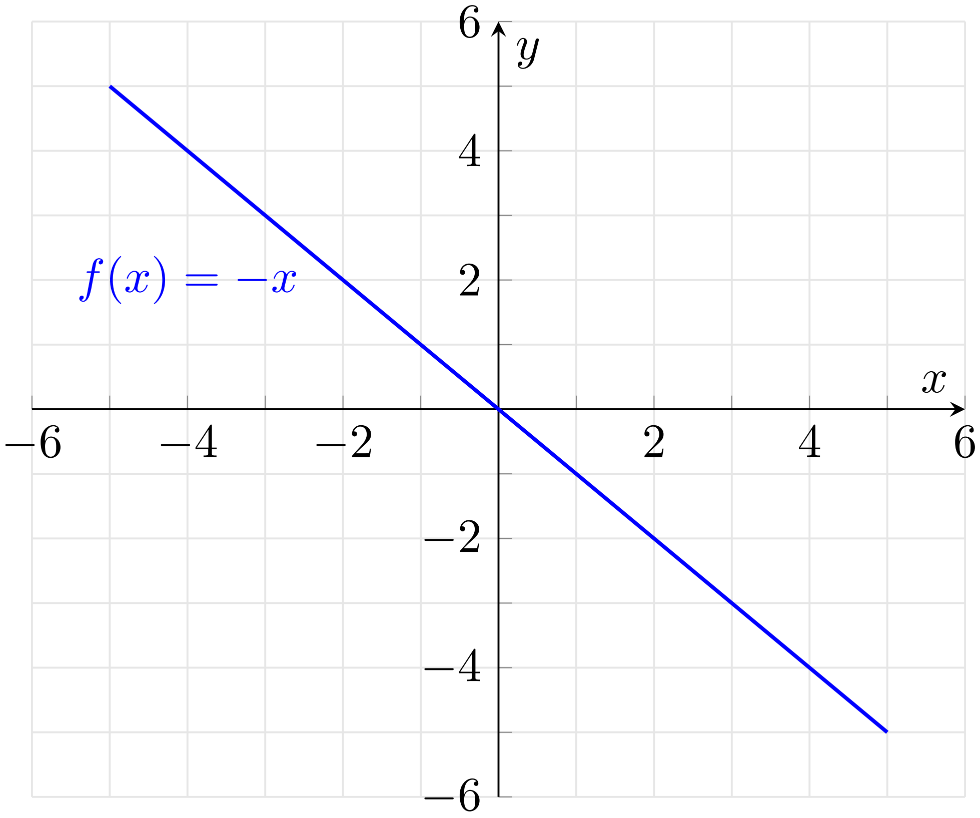


图: 17.2.2

定义

只有正负号不同的两个数称互为相反数 (opposite number)。
我们规定: 0 的相反数是 0 .

数学表达式: $a + b = 0$　**或**: $x + y = 0$
函数定义: $f(x) = -x$
定义域: $x \in \mathbb{R}$
值域: $y \in \mathbb{R}$
对称性: 关于原点中心对称
其它特征：当 a, b ≠ 0 时, $a \div b = -1$



倒数的定义及函数图象

定义

乘积为 1 的两个数互为倒数。
注意：0 没有倒数。

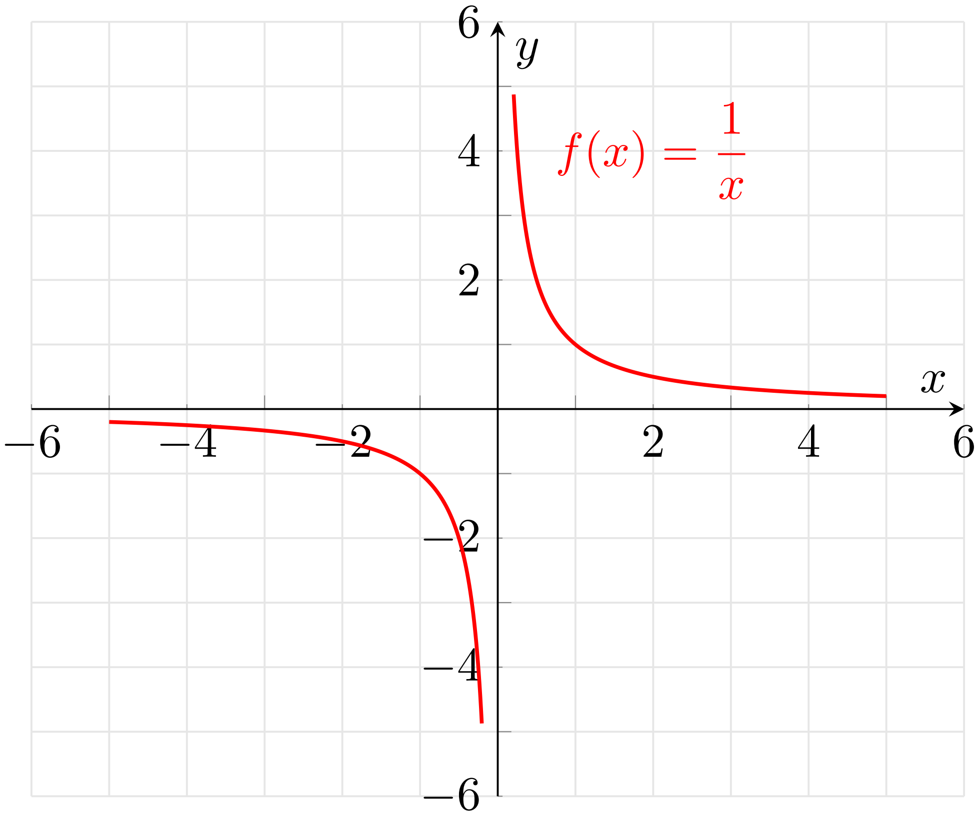
数学表达式: $a \cdot b = 1$

函数定义: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

定义域: $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

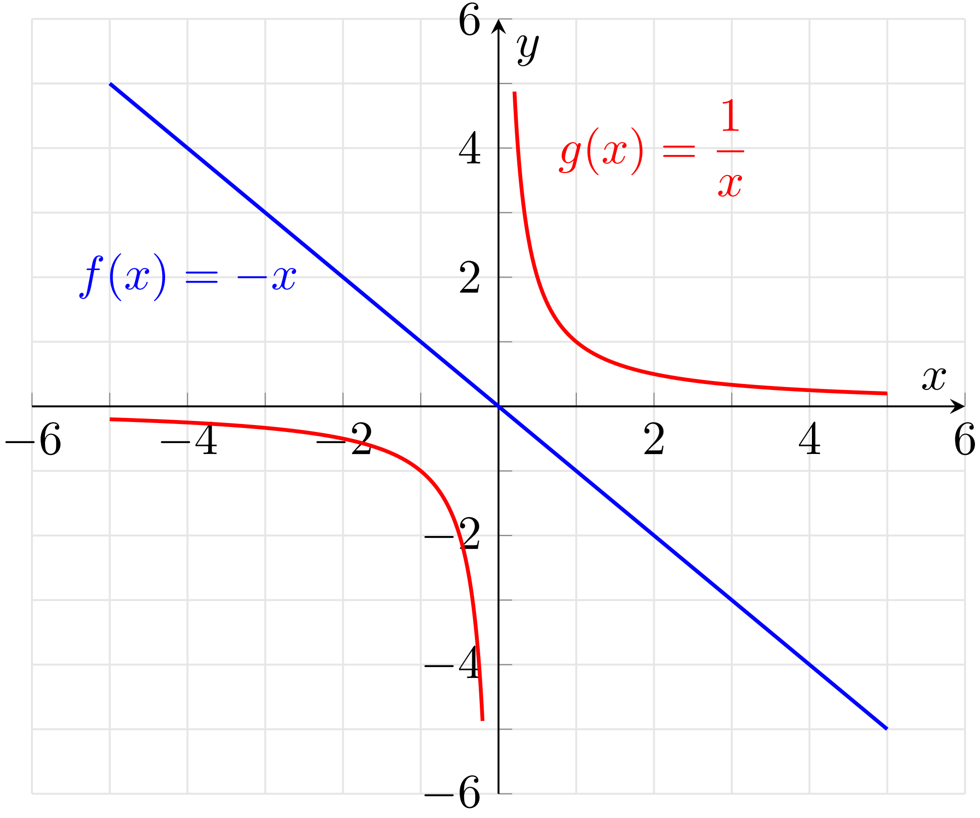
值域: $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

对称性: 关于原点中心对称



相反数与倒数的比较

相反数的表达式: $a+b=0$
倒数的表达式: $a\cdot b=1$
对称性: 相反数与倒数均关于原点中心对称



定义：我们把在数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做数 a 的绝对值, 记作 $|a|$.

1. 一个正数的绝对值是它本身;
2. 0 的绝对值是 0;
3. 一个负数的绝对值是它的相反数.

数学表达式: $|x|$

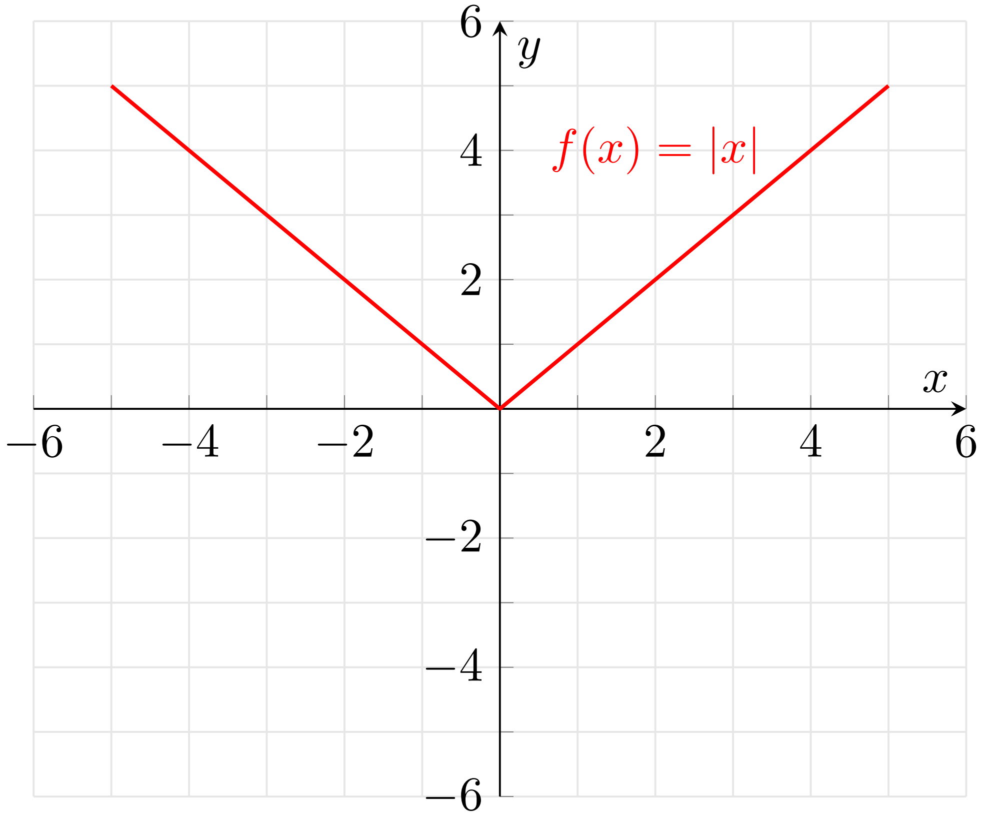
函数定义:

$$f(x)=\begin{cases} x, x>0 \\ 0, x=0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$

定义域: $x \in \mathbb{R}$

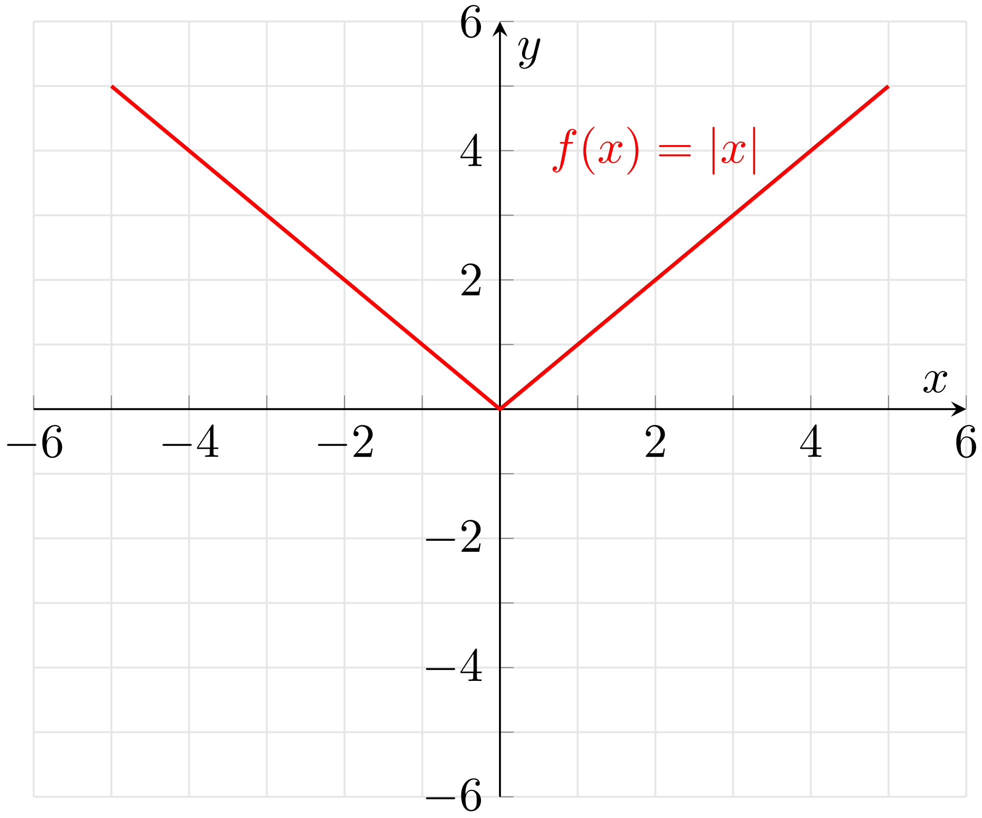
值域: $y \in \mathbb{R}, y \geq 0$

对称性: 关于 y 轴对称

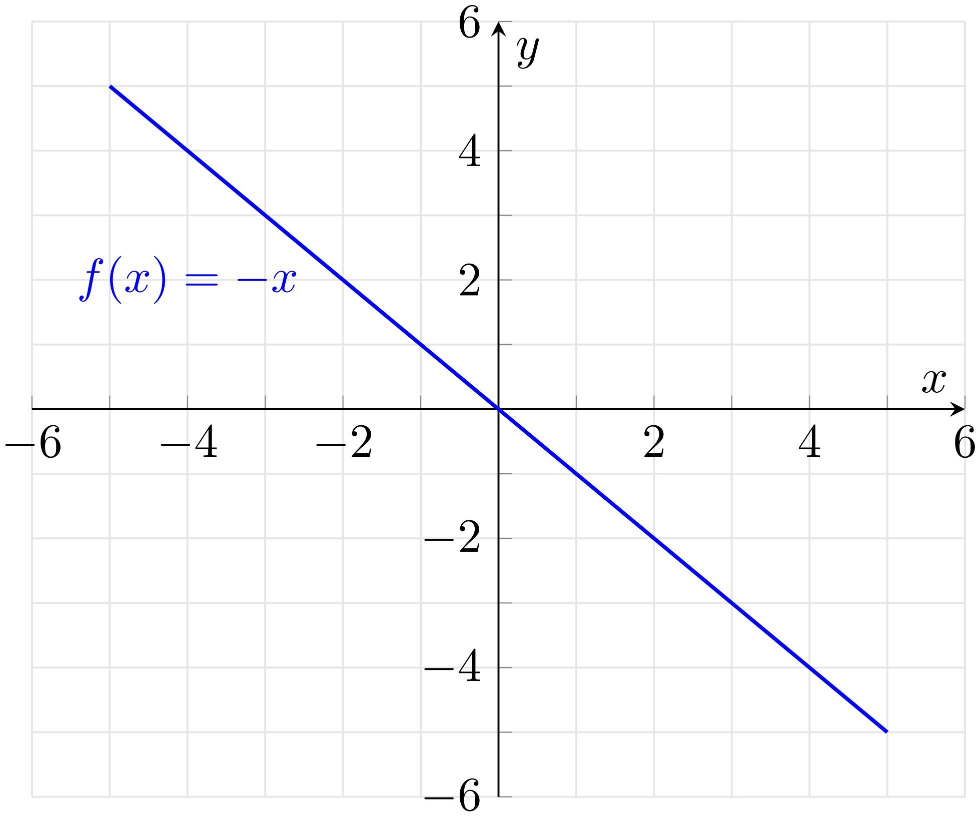


绝对值与相反数的比较

绝对值的函数图象



相反数的函数图象

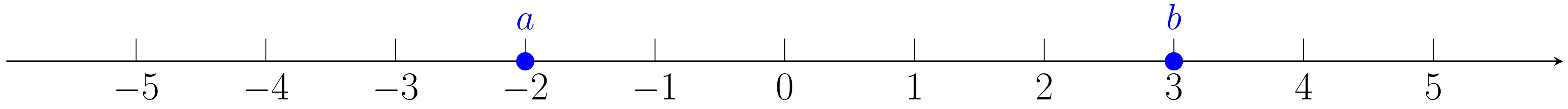


1.5 有理数的大小比较规则

1. 数轴上右边的数比左边的数大
2. 正数 > 0
3. 负数 < 0
4. 正数 > 负数
5. 两个负数比较，绝对值大的反而小！
   如果 $a > b > 0$，则：$-a < -b < 0$

数轴比较法

1. 画数轴并标出所有数



2. 从左到右（从小到大）排列

3. 结果：$a < b$

1.6 有理数的加法法则

1. 同号两数相加, 取与加数相同的正负号, 并把绝对值相加;
   当$a, b > 0$时,
   $(+a) + (+b) = +(a + b) = a + b$
   $(-a) + (-b) = -(a + b)$

2. 绝对值不相等的异号两数相加, 取绝对值较大的加数的正负号, 并用较大的绝对值减去较小的绝对值;
   当$a > b > 0$时,
   $(-a) + (+b) = -(a - b)$
   $(+a) + (-b) = +(a - b) = a - b$

3. 互为相反数的两个数相加得 0;
   $a + (-a) = 0$

有理数加法的运算律

1. 加法交换律：两个数相加，交换加数的位置，和不变.

$$a + b = b + a$$

2. 加法结合律: 三个数相加, 先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

有理数去括号规则

括号前的符号与数字前的符号存在下列关系，则：

1. 同号取正（去括号，取正号）

$$+(+a) = +a = a$$

$$-(-a) = +a = a$$

2. 异号取负（去括号，取负号）

$$-(+a) = -a$$

$$+(-a) = -a$$

有理数的减法法则:

1. 减去一个数, 等于加上这个数的相反数.

$$a - b = a + (-b)$$

$$a - (-b) = a + (+b) = a + b$$

1.8 有理数的加减混合运算

1. 加减法是一级运算，优先级最低；
2. 加法与减法互为逆运算，加法与减法带符号统一理解为加法；
3. 减一个数，等于加相反数：$a-b=a+(-b)$ 或 $a-(-b)=a+b$；
4. 加一个数，等于减相反数：$a+b=a-(-b)$ 或 $a+(-b)=a-b$；
5. 同号取正（去括号，取正号）

$$+(+a)=+a=a$$

$$-(-a)=+a=a$$

6. 异号取负（去括号，取负号）

$$-(+a)=-a$$

$$+(-a)=-a$$

7. 加法具有交换律：$a+b+c=a+c+b$；

1.9 有理数的乘法

有理数的乘法法则：

1. 同号得正：$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$
2. 异号得负（绝对值相乘）：$(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-a\cdot b$
3. 乘零得零：$a\cdot 0=0\cdot a=0$
4. 交换律：$a\cdot b\cdot c=a\cdot c\cdot b=b\cdot c\cdot a$
5. 结合律：$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
6. 分配律：$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

1.9 有理数的乘法

有理数的乘法法则：

1. 同号得正：$(-a)(-b)=ab$
2. 异号得负（绝对值相乘）：$(-a)b=a(-b)=-ab$
3. 乘零得零：$a\cdot 0=0a=0$
4. 交换律：$abc=acb=bca$
5. 结合律：$(ab)c=a(bc)$
6. 分配律：$a(b+c)=ab+ac$

1.10 有理数的除法

有理数的乘法法则：

1. 同号得正：$(-a)\div(-b) = a\div b = \dfrac{a}{b}$
2. 异号得负（绝对值相除）：$(-a)\div b = a\div(-b) = -a\div b = -\dfrac{a}{b}$
3. 零除得零（0 不能为除数）：$0\div a = 0$
4. 除以一数，等于乘其倒数：$a\div b = a \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$

1.11 有理数的乘方

有理数的乘方：求几个相同乘数的积的运算，叫做乘方 (involution)。其中，

1. 乘方的结果叫做幂 (power)
2. a 叫做底数 (base number)
3. n 叫做指数 (exponent)
4. a^n 读作 a 的 n 次方
5. 也可读作 a 的 n 次幂

乘方的运算法则：

1. 乘方是第三级运算，优先级高于乘除法运算（见 P.59）
2. $a^1 = a$
3. 乘方的乘法运算：$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
4. 乘方的除法运算：$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$
5. 乘方的乘方运算：$(a^m)^n = a^{mn}$
6. $a^0 = a^{m-m} = a^m \div a^m = 1 \quad (a \neq 0)$
7. $a^{-1} = a^0 \div a^1 = \dfrac{1}{a} \quad (a \neq 0)$
8. 整数的任何次幂都是整数
9. 负数的偶数次幂是正数（偶负得正），负数的奇数次幂是负数（奇负得负）
10. 乘方运算具有右结合的性质：$a^{m^n} = a^{(m^n)}$

科学记数法:

1. 一个绝对值大于 10 的数可以记成 $a{\times}10^n$ 的形式, 其中 $1{\le}|a| < 10$, n 是正整数. 像这样的记数法叫做科学记数法. 例如:
   $8\ \ 000\ \ 000 = 8{\times}10^6$
2. 一个绝对值小于 1 的数可以记成 $a{\times}10^{-n}$ 的形式, 其中 $1{\le}|a| < 10$, n 是正整数. 像这样的记数法也叫做科学记数法. 例如:
   $0.000\ \ 008 = 8{\times}10^{-6}$

有理数的混合运算:

1. 加法和减法叫做第一级运算，互为逆运算
2. 乘法和除法叫做第二级运算，互为逆运算
3. 乘方、开方和对数叫做第三级运算，开方是乘方求底数的逆运算，对数是乘方求指数的逆运算

运算的优先级:

1. 先做乘方, 再做乘除, 最后做加减;
2. 同级运算, 按照从左至右的顺序进行;
3. 如果有括号, 就先算小括号里的, 再算中括号里的, 然后算大括号里的

第一章小结

负数的性质：假设 $a > b > 0$,

1. 负数小于零： $-a = 0 - a < 0$
2. 负数小于正数： $-a < b < a$
3. 绝对值大的负数反而小： $-a < -b < 0 < b < a$
4. 负数的绝对值等于相反数 $|-a| = a$
5. 相反数之和为零

   $a + (-a) = 0$

   $(-a) + a = 0$
6. 相反数之商为-1（除数不为零）

   $a \div (-a) = -1$

   $(-a) \div a = -1$

第一章小结

有理数的加法法则：假设 $a > b > 0$,

1. 同号相加取其号, 绝对值作加法

$$(+a) + (+b) = +(a + b) = a + b$$

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

2. 异号相加取绝对值大的号，绝对值大减小

$$(-a) + (+b) = -(a - b)$$

$$(+a) + (-b) = +(a - b) = a - b$$

3. 相反数之和为零

$$a + (-a) = 0$$

4. 加零和不变

$$a + 0 = a$$

有理数的加法法则：

1. 加法交换律：换位相加和不变

$$a + b = b + a$$

2. 加法结合律: 先加后加和不变

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

有理数的减法法则:

1. 减去一个数, 等于加其相反数

$$a - b = a + (-b)$$

$$a - (-b) = a + (+b) = a + b$$

第一章小结

增减括号法则：

1. 偶负取正号（正号可省略）

$$+(+a) = +a = a$$

$$-(-a) = +a = a$$

2. 奇负取负号

$$-(+a) = -a$$

$$+(-a) = -a$$

$$-[-(-a)] = -a$$

第一章小结

有理数的乘法法则：

1. 偶负得正：

$$(-a)(-b)=ab$$

$$(-a)(-b)(-c)(-d)=abcd$$

2. 奇负得负（绝对值相乘）：

$$(-a)b=a(-b)=-ab$$

$$(-a)(-b)(-c)=-abc$$

3. 乘零得零：$a\cdot 0=0a=0$

4. 交换律：$abc=acb=bca=cab$

5. 结合律：$(ab)c=a(bc)$

6. 分配律：$a(b+c)=ab+ac$

有理数的除法法则：假设除数不为零，

1. 偶负得正：$(-a)\div(-b) = a\div b = \dfrac{a}{b}$
2. 奇负得负（绝对值相除）：$(-a)\div b = a\div(-b) = -a\div b = -\dfrac{a}{b}$

   $(-a)\div(-b)\div(-c) = -a\div(bc) = -\dfrac{a}{bc}$
3. 零除得零（0 不能为除数）：$0\div a = 0$
4. 除以一数，等于乘其倒数：$a\div b = a\cdot\dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$

   $a\div\dfrac{1}{b} = a\cdot b = ab$

   $a\div\dfrac{n}{m} = a\cdot\dfrac{m}{n} = \dfrac{am}{n}$

   $\dfrac{b}{a}\div\dfrac{n}{m} = \dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{m}{n} = \dfrac{bm}{an}$

第一章小结

有理数的乘方：求几个相同乘数的积的运算，叫做乘方 (involution)。其中，

1. 乘方的结果叫做幂 (power)
2. a 叫做底数 (base number)
3. n 叫做指数 (exponent)
4. a^n 读作 a 的 n 次方
5. 也可读作 a 的 n 次幂

乘方的运算法则：

1. 乘方是第三级运算，优先级高于乘除法运算（见 P.59）
2. $a^1 = a$
3. 乘方的乘法运算： $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
4. 乘方的除法运算： $a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$
5. 乘方的乘方运算： $(a^m)^n = a^{mn}$
6. $a^0 = a^{m-m} = a^m \div a^m = 1 \quad (a \neq 0)$
7. $a^{-1} = a^0 \div a^1 = \dfrac{1}{a} \quad (a \neq 0)$
8. 整数的任何次幂都是整数
9. 负数的偶数次幂是正数（偶负得正），负数的奇数次幂是负数（奇负得负）
10. 乘方运算具有右结合的性质： $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

第一章小结

有理数的混合运算:

1. 加法和减法叫做第一级运算，互为逆运算
2. 乘法和除法叫做第二级运算，互为逆运算
3. 乘方、开方和对数叫做第三级运算，开方是乘方求底数的逆运算，对数是乘方求指数的逆运算

运算的优先级:

1. 先做乘方, 再做乘除, 最后做加减;
2. 同级运算, 按照从左至右的顺序进行;
3. 如果有括号, 就先算小括号里的, 再算中括号里的, 然后算大括号里的

第一章小结

近似数：

1. 与实际值非常接近的数, 称为近似数 (approximate number)。例如：
   $\pi = 3.141\ 592\cdots$
2. 只取整数，精确到个位数：应用四舍五入法，应为 3
3. 只取 1 位小数，精确到十分位（或精确到 0.1）：应为 3.1
4. 只取 2 位小数，精确到百分位（或精确到 0.01）：应为 3.14
5. 光在真空中的传播速度：$c = 299\ 792\ 458 m/s$
6. 用科学记数法，只取整数：$c = 3\times10^8 m/s$
7. 用科学记数法，保留 1 位小数：$c = 3.0\times10^8 m/s$
8. 用科学记数法，保留 5 位小数：$c = 2.99792\times10^8 m/s$
9. 注意：四舍五入的位置必须为精确位数的向下一位。

自然语言与数学语言的比较：

(a) 自然语言：- 3 与 0.3 的和乘以 2 的倒数（P.78）

(b) 数学语言：$(-3+0.3)\times\frac{1}{2}=-2.7\times\frac{1}{2}=-\frac{27}{20}=-1.35$

(c) 自然语言：- 3 与 0.3 的和乘以 2的积的倒数

(d) 数学语言：$\frac{1}{(-3+0.3)\times 2}=\frac{1}{-5.4}=-\frac{10}{50}=-\frac{5}{27}$