

数列的综合应用

题目 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$, $a_1 = 3$,

(1) 证明数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 为等比数列;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

数列的综合应用

题目 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$, $a_1 = 3$,

(1) 证明数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 为等比数列;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

证明:

(1) $4a_{n+1} = 4S_{n+1} - 4S_n = 3a_{n+1} + 9a_n - (3a_n + 9a_{n-1}) = 3a_{n+1} + 6a_n - 9a_{n-1}$,

数列的综合应用

题目 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$, $a_1 = 3$,

(1) 证明数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 为等比数列;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

证明:

(1) $4a_{n+1} = 4S_{n+1} - 4S_n = 3a_{n+1} + 9a_n - (3a_n + 9a_{n-1}) = 3a_{n+1} + 6a_n - 9a_{n-1}$,
所以 $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1} \quad (n \geq 2)$

数列的综合应用

题目 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$, $a_1 = 3$,

(1) 证明数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 为等比数列;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

证明:

(1) $4a_{n+1} = 4S_{n+1} - 4S_n = 3a_{n+1} + 9a_n - (3a_n + 9a_{n-1}) = 3a_{n+1} + 6a_n - 9a_{n-1}$,

所以 $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1} \quad (n \geq 2)$

令 $c_n = a_{n+1} - 3a_n$, 则

$C_{n+1} = a_{n+2} - 3a_{n+1} = 6a_{n+1} - 9a_n - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n) = 3C_n$,

所以 $\frac{C_{n+1}}{C_n} = 3$, 因此数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列。

数列的综合应用

题目 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$, $a_1 = 3$,

(1) 证明数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 为等比数列;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

证明:

(1) $4a_{n+1} = 4S_{n+1} - 4S_n = 3a_{n+1} + 9a_n - (3a_n + 9a_{n-1}) = 3a_{n+1} + 6a_n - 9a_{n-1}$,

所以 $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$ ($n \geq 2$)

令 $c_n = a_{n+1} - 3a_n$, 则

$C_{n+1} = a_{n+2} - 3a_{n+1} = 6a_{n+1} - 9a_n - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n) = 3C_n$,

所以 $\frac{C_{n+1}}{C_n} = 3$, 因此数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列。

由 $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$ 得 $4S_2 = 4a_2 + 4a_1 = 3a_2 + 9a_1 \Rightarrow a_2 = 5a_1 = 15$

数列的综合应用

题目 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$, $a_1 = 3$,

(1) 证明数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 为等比数列;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

证明:

(1) $4a_{n+1} = 4S_{n+1} - 4S_n = 3a_{n+1} + 9a_n - (3a_n + 9a_{n-1}) = 3a_{n+1} + 6a_n - 9a_{n-1}$,

所以 $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1} \quad (n \geq 2)$

令 $c_n = a_{n+1} - 3a_n$, 则

$C_{n+1} = a_{n+2} - 3a_{n+1} = 6a_{n+1} - 9a_n - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n) = 3C_n$,

所以 $\frac{C_{n+1}}{C_n} = 3$, 因此数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列。

由 $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$ 得 $4S_2 = 4a_2 + 4a_1 = 3a_2 + 9a_1 \Rightarrow a_2 = 5a_1 = 15$

$c_1 = a_2 - 3a_1 = 15 - 9 = 6$, 因此数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 是首项为 6、公比为 3 的等比数列。

数列的综合应用

题目 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$, $a_1 = 3$,
(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

数列的综合应用

题目 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$, $a_1 = 3$,
(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

解:

已经求得 $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$, 其特征方程为 $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r - 3)^2 = 0$,

数列的综合应用

题目 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$, $a_1 = 3$,
(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

解:

已经求得 $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$, 其特征方程为 $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r - 3)^2 = 0$,
求得特征方程具有重根 $r = 3$, 因此数列 $\{a_n\}$ 可以写成的 $a_n = (C_1 + C_2n)3^n$ 形式,
将 a_1, a_2 的值带入, 得到方程组

数列的综合应用

题目 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$, $a_1 = 3$,
(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

解:

已经求得 $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$, 其特征方程为 $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r - 3)^2 = 0$,
求得特征方程具有重根 $r = 3$, 因此数列 $\{a_n\}$ 可以写成的 $a_n = (C_1 + C_2n)3^n$ 形式,
将 a_1, a_2 的值带入, 得到方程组

$$\begin{cases} 3(C_1 + C_2) = 3 \\ 9(C_1 + 2C_2) = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3} \\ C_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a_n = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n)3^n = (2n + 1)3^{n-1}$$

数列的综合应用

题目 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$, $a_1 = 3$,
(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

解:

已经求得 $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$, 其特征方程为 $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r - 3)^2 = 0$,
求得特征方程具有重根 $r = 3$, 因此数列 $\{a_n\}$ 可以写成的 $a_n = (C_1 + C_2n)3^n$ 形式,
将 a_1, a_2 的值带入, 得到方程组

$$\begin{cases} 3(C_1 + C_2) = 3 \\ 9(C_1 + 2C_2) = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3} \\ C_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a_n = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n)3^n = (2n + 1)3^{n-1}$$

$$b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}3^{n-1} = \left(\frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)3^{n-1} = \frac{3^n}{n+2} - \frac{3^{n-1}}{n+1}$$

数列的综合应用

题目 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$, $a_1 = 3$,
(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

解:

已经求得 $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$, 其特征方程为 $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r - 3)^2 = 0$,
求得特征方程具有重根 $r = 3$, 因此数列 $\{a_n\}$ 可以写成的 $a_n = (C_1 + C_2n)3^n$ 形式,
将 a_1, a_2 的值带入, 得到方程组

$$\begin{cases} 3(C_1 + C_2) = 3 \\ 9(C_1 + 2C_2) = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3} \\ C_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a_n = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n)3^n = (2n + 1)3^{n-1}$$

$$b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}3^{n-1} = \left(\frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)3^{n-1} = \frac{3^n}{n+2} - \frac{3^{n-1}}{n+1}$$

$$\text{所以 } T_n = b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1 = \frac{3^n}{n+2} - \frac{3^{n-1}}{n+1} + \frac{3^{n-1}}{n+1} - \frac{3^{n-2}}{n} + \cdots + \frac{3^1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{3^n}{n+2} - \frac{1}{2}$$

后记

怎么能够得到 $\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+1}$?

后记

怎么能够得到 $\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+1}$?

解：

设 $\frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} = \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$ ，则 $\frac{a \cdot n + 2a + b \cdot n + b}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$

后记

怎么能够得到 $\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+1}$?

解：

设 $\frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} = \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$ ，则 $\frac{a \cdot n + 2a + b \cdot n + b}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$

所以 $a \cdot n + 2a + b \cdot n + b = 2n + 1 \Rightarrow (a+b)n + (2a+b) = 2n + 1$ ，得到

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

后记

怎么能够得到 $\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+1}$?

解：

设 $\frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} = \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$ ，则 $\frac{a \cdot n + 2a + b \cdot n + b}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$

所以 $a \cdot n + 2a + b \cdot n + b = 2n + 1 \Rightarrow (a+b)n + (2a+b) = 2n + 1$ ，得到

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$$

后记

怎么能够得到 $\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+1}$?

解：

设 $\frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} = \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$ ，则 $\frac{a \cdot n + 2a + b \cdot n + b}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$

所以 $a \cdot n + 2a + b \cdot n + b = 2n + 1 \Rightarrow (a+b)n + (2a+b) = 2n + 1$ ，得到

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+1}$$

验证： $\frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{3(n+1) - (n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$