

# 数列的综合应用

题目 1: 已知数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$ ,  $a_1 = 3$ ,

(1) 证明数列  $\{a_{n+1} - 3a_n\}$  为等比数列;

(2) 设  $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

# 数列的综合应用

题目 1: 已知数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$ ,  $a_1 = 3$ ,

(1) 证明数列  $\{a_{n+1} - 3a_n\}$  为等比数列;

(2) 设  $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

证明:

(1)  $4a_{n+1} = 4S_{n+1} - 4S_n = 3a_{n+1} + 9a_n - (3a_n + 9a_{n-1}) = 3a_{n+1} + 6a_n - 9a_{n-1}$ ,

# 数列的综合应用

题目 1: 已知数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$ ,  $a_1 = 3$ ,

(1) 证明数列  $\{a_{n+1} - 3a_n\}$  为等比数列;

(2) 设  $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

证明:

(1)  $4a_{n+1} = 4S_{n+1} - 4S_n = 3a_{n+1} + 9a_n - (3a_n + 9a_{n-1}) = 3a_{n+1} + 6a_n - 9a_{n-1}$ ,  
所以  $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1} \quad (n \geq 2)$

# 数列的综合应用

题目 1: 已知数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$ ,  $a_1 = 3$ ,

(1) 证明数列  $\{a_{n+1} - 3a_n\}$  为等比数列;

(2) 设  $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

证明:

(1)  $4a_{n+1} = 4S_{n+1} - 4S_n = 3a_{n+1} + 9a_n - (3a_n + 9a_{n-1}) = 3a_{n+1} + 6a_n - 9a_{n-1}$ ,

所以  $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$  ( $n \geq 2$ )

令  $c_n = a_{n+1} - 3a_n$ , 则

$C_{n+1} = a_{n+2} - 3a_{n+1} = 6a_{n+1} - 9a_n - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n) = 3C_n$ ,

所以  $\frac{C_{n+1}}{C_n} = 3$ , 因此数列  $\{a_{n+1} - 3a_n\}$  是公比为 3 的等比数列。

# 数列的综合应用

题目 1: 已知数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$ ,  $a_1 = 3$ ,

(1) 证明数列  $\{a_{n+1} - 3a_n\}$  为等比数列;

(2) 设  $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

证明:

(1)  $4a_{n+1} = 4S_{n+1} - 4S_n = 3a_{n+1} + 9a_n - (3a_n + 9a_{n-1}) = 3a_{n+1} + 6a_n - 9a_{n-1}$ ,

所以  $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1} \quad (n \geq 2)$

令  $c_n = a_{n+1} - 3a_n$ , 则

$C_{n+1} = a_{n+2} - 3a_{n+1} = 6a_{n+1} - 9a_n - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n) = 3C_n$ ,

所以  $\frac{C_{n+1}}{C_n} = 3$ , 因此数列  $\{a_{n+1} - 3a_n\}$  是公比为 3 的等比数列。

由  $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$  得  $4S_2 = 4a_2 + 4a_1 = 3a_2 + 9a_1 \Rightarrow a_2 = 5a_1 = 15$

# 数列的综合应用

题目 1: 已知数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$ ,  $a_1 = 3$ ,

(1) 证明数列  $\{a_{n+1} - 3a_n\}$  为等比数列;

(2) 设  $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

证明:

(1)  $4a_{n+1} = 4S_{n+1} - 4S_n = 3a_{n+1} + 9a_n - (3a_n + 9a_{n-1}) = 3a_{n+1} + 6a_n - 9a_{n-1}$ ,

所以  $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1} \quad (n \geq 2)$

令  $c_n = a_{n+1} - 3a_n$ , 则

$C_{n+1} = a_{n+2} - 3a_{n+1} = 6a_{n+1} - 9a_n - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n) = 3C_n$ ,

所以  $\frac{C_{n+1}}{C_n} = 3$ , 因此数列  $\{a_{n+1} - 3a_n\}$  是公比为 3 的等比数列。

由  $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$  得  $4S_2 = 4a_2 + 4a_1 = 3a_2 + 9a_1 \Rightarrow a_2 = 5a_1 = 15$

$c_1 = a_2 - 3a_1 = 15 - 9 = 6$ , 因此数列  $\{a_{n+1} - 3a_n\}$  是首项为 6、公比为 3 的等比数列。

# 数列的综合应用

题目 1: 已知数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$ ,  $a_1 = 3$ ,  
(2) 设  $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

# 数列的综合应用

题目 1: 已知数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$ ,  $a_1 = 3$ ,  
(2) 设  $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

解:

已经求得  $a_n = (2n+1) \cdot 3^{n-1}$ , 其特征方程为  $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r-3)^2 = 0$ ,



# 数列的综合应用

题目 1: 已知数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$ ,  $a_1 = 3$ ,  
(2) 设  $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

解:

已经求得  $a_n = (2n+1) \cdot 3^{n-1}$ , 其特征方程为  $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r-3)^2 = 0$ ,  
求得特征方程具有重根  $r = 3$ , 因此数列  $\{a_n\}$  可以写成的  $a_n = (C_1 + C_2n)3^n$  形式,  
将  $a_1, a_2$  的值带入, 得到方程组

# 数列的综合应用

题目 1: 已知数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$ ,  $a_1 = 3$ ,  
(2) 设  $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

解:

已经求得  $a_n = (2n+1) \cdot 3^{n-1}$ , 其特征方程为  $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r-3)^2 = 0$ ,  
求得特征方程具有重根  $r = 3$ , 因此数列  $\{a_n\}$  可以写成的  $a_n = (C_1 + C_2n)3^n$  形式,  
将  $a_1, a_2$  的值带入, 得到方程组

$$\begin{cases} 3(C_1 + C_2) = 3 \\ 9(C_1 + 2C_2) = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3} \\ C_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a_n = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n)3^n = (2n+1)3^{n-1}$$

# 数列的综合应用

题目 1: 已知数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$ ,  $a_1 = 3$ ,  
(2) 设  $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

解:

已经求得  $a_n = (2n+1) \cdot 3^{n-1}$ , 其特征方程为  $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r-3)^2 = 0$ ,  
求得特征方程具有重根  $r = 3$ , 因此数列  $\{a_n\}$  可以写成的  $a_n = (C_1 + C_2n)3^n$  形式,  
将  $a_1, a_2$  的值带入, 得到方程组

$$\begin{cases} 3(C_1 + C_2) = 3 \\ 9(C_1 + 2C_2) = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3} \\ C_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a_n = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n)3^n = (2n+1)3^{n-1}$$

$$b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} = \left( \frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) 3^{n-1} = \frac{1}{n+2} 3^n - \frac{1}{n+1} 3^{n-1}$$

# 数列的综合应用

题目 1: 已知数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$ ,  $a_1 = 3$ ,  
(2) 设  $b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

解:

已经求得  $a_n = (2n+1) \cdot 3^{n-1}$ , 其特征方程为  $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r-3)^2 = 0$ ,  
求得特征方程具有重根  $r = 3$ , 因此数列  $\{a_n\}$  可以写成的  $a_n = (C_1 + C_2n)3^n$  形式,  
将  $a_1, a_2$  的值带入, 得到方程组

$$\begin{cases} 3(C_1 + C_2) = 3 \\ 9(C_1 + 2C_2) = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3} \\ C_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a_n = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n)3^n = (2n+1)3^{n-1}$$

$$b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} = \left( \frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) 3^{n-1} = \frac{1}{n+2} 3^n - \frac{1}{n+1} 3^{n-1}$$

所以

$$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{1}{3}3^1 - \frac{1}{2}3^0 + \frac{1}{4}3^2 - \frac{1}{3}3^1 + \cdots + \frac{1}{n+2}3^n - \frac{1}{n+1}3^{n-1} = \frac{3^n}{n+2} - \frac{1}{2}$$