等差数列与等比数列

丁保华

致慧星空工作室

2025 年 6 月 28 日

目录

数列的概念

定义：按照一定顺序排列的一列数称为数列。数列中的每一个数叫作这个数列的项。

分类：有穷数列（项数有限）、无穷数列（项数无限）。

表示方法：列举法、递推公式法、通项公式法等。

列举法：$2, 5, 8, 11, 14, \ldots$，这个数列的首项为 2，公差为 3。通过观察可以发现，每一项都比前一项大 3。

递推公式法：$a_n = a_{n-1} + d \quad$ 对于 $\quad n \geq 2$

通项公式法：$a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$

等差数列的定义

定义：一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫作等差数列。这个常数叫作等差数列的公差，通常用字母d表示。

关键词：逐项差、常数。

等差数列的通项公式

已知条件：等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d。
推导过程：

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d
\end{aligned}
$$

等差数列的递推公式为 $a_n = a_{n-1} + d(n \geq 2)$。
等差数列的通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d$。

等差数列的前 n 项和公式推导

已知条件：等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，前 n 项和为 S_n。
推导过程：

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

或

$$S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$$

等差数列的前 n 项和公式为 $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} = n \cdot a_1 + \dfrac{n(n-1)d}{2}$。

等差数列的推论及案例

推论一：在有穷等差数列中，与首末两项等距离的两项之和相等，且等于首项与末项之和。

案例：等差数列 2，5，8，11，14，首项为 2，末项为 14，第二项 5 与倒数第二项 11 的和为 16，第三项 8 与倒数第三项 8 的和也为 16，且 2 + 14 = 16。

推论二：等差数列的部分和性质：设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}, \ldots$ 构成等差数列。

案例：等差数列 3，7，11，15，19，...，其前 2 项和 $S_2=3+7=10$，前 4 项和 $S_4=3+7+11+15=36$，则 $S_4-S_2=26$，前 6 项和 $S_6=3+7+11+15+19+23=84$，$S_6-S_4=48$，显然 10，26，48,...构成公差为 16 的等差数列。

推论三：等差数列的项的和的性质：若 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，则数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 也是等差数列，其公差为 2d。

案例：等差数列 1，4，7，10，13，...，公差 $d=3$，则数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 为 5，11，17，23，...，公差为 6 = 2d。

等比数列的定义

定义：一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列就叫作等比数列。这个常数叫作等比数列的公比，通常用字母 q 表示（$q \neq 0$）。
关键词：逐项比、常数。

等比数列的通项公式推导

已知条件：等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 q（$q \neq 0$）。
推导过程：

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_2 q = a_1 q^2 \\ a_4 &= a_3 q = a_1 q^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 q^{n-1} \end{aligned}$$

等比数列的递推公式为 $a_n = a_{n-1} q$。
等比数列的通项公式为 $a_n = a_1 q^{n-1}$。

等比数列的前 n 项和公式推导

已知条件：等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 q（$q \neq 0$），前 n 项和为 S_n。
推导过程：

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$$

当 $q = 1$ 时，$S_n = na_1$；当 $q \neq 1$ 时，

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

公式呈现：等比数列的前 n 项和公式为 $S_n = \begin{cases} na_1, & q = 1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases}$。

等比数列的推论及案例

推论一：在有穷等比数列中，与首末两项等距离的两项之积相等，且等于首项与末项之积。

案例：等比数列 1，2，4，8，16，首项为 1，末项为 16，第二项 2 与倒数第二项 8 的积为 16，第三项 4 与倒数第三项 4 的积也为 16，且 1 × 16 = 16。

推论二：等比数列的部分积性质：设 $\{a_n\}$ 是等比数列，其前 n 项积为 T_n，则 $T_n, \frac{T_{2n}}{T_n}, \frac{T_{3n}}{T_{2n}}, \ldots$ 构成等比数列。

案例：等比数列 2，4，8，16，32，...，其前 2 项积 $T_2 = 2{\times}4 = 8$，前 4 项积 $T_4 = 2{\times}4{\times}8{\times}16 = 1024$，则 $\frac{T_4}{T_2} = 128$，前 6 项积 $T_6 = 2{\times}4{\times}8{\times}16{\times}32{\times}64 = 2^{6+5+4+3+2+1} = 2^{21} = 2097152$，$\frac{T_6}{T_4} = 2048$，显然 8，128，2048,...构成公比为 16 的等比数列。

推论三：等比数列的项的和的性质：若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，则数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 也是等比数列，其公比为 q。

案例：等比数列 3，6，12，24，48，...，公比 $q = 2$，则数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 为 9，18，36，72，...，公比为 2 = q。

通项式与前 n 项和的综合应用

例题 1：已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3 = 7$，$a_6 = 16$，求这个数列的通项公式和前 10 项的和。

解答：

$$a_1 + 2d = 7$$

$$a_1 + 5d = 16$$

解得：$a_1 = 1, d = 3$

通项公式：$a_n = 1 + (n-1)\times 3 = 3n - 2$

前 10 项和：$S_{10} = 10\times\frac{2\times 1 + (10-1)\times 3}{2} = 10\times\frac{2+27}{2} = 10\times 29/2 = 145$

例题 2：已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2 = 6$，$a_5 = 48$，求这个数列的通项公式和前 6 项的和。

解答：

$$a_1 q = 6$$

$$a_1 q^4 = 48$$

解得：$a_1 = 3, q = 2$

通项公式：$a_n = 3 \times 2^{n-1}$

前 6 项和：$S_6 = 3 \times \frac{1 - 2^6}{1 - 2} = 3 \times \frac{1 - 64}{-1} = 3 \times (-63)/(-1) = 3 \times 63 = 189$

练习与巩固

练习题 1：已知等差数列的首项为 5，公差为 4，求第 8 项和前 8 项的和。

练习题 2：已知等比数列的首项为 2，公比为 3，求第 5 项和前 5 项的和。

练习题 3：已知等差数列的前三项分别为 2，5，8，求其通项公式及前 10 项的和。

练习题 4：已知等比数列的前三项分别为 3，6，12，求其通项公式及前 6 项的和。

总结与回顾

等差数列：

定义：从第 2 项起，每一项与前一项的差等于同一个常数。

通项公式：$a_n = a_1 + (n-1)d$

前 n 项和公式：$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 或 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$

推论：项的对称性、部分和性质、项的和的性质

等比数列：

定义：从第 2 项起，每一项与前一项的比等于同一个常数。

通项公式：$a_n = a_1 q^{n-1}$。

前 n 项和公式：$S_n = \begin{cases} na_1, & q = 1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases}$

推论：项的对称性、部分积性质、项的和的性质。

通项式与前 n 项和的关系：通项式是求前 n 项和的基础，前 n 项和公式的应用需要结合通项式中的首项、公差或公比等参数。