函数的核心概念与常见类型

丁保华

致慧星空工作室

2025 年 6 月 28 日

目录

函数的定义

函数的定义：数学必修 A 第一册 P62

一般地，设 A、B 是非空的实数集，如果对于集合 A 中的任意一个数 x，按照某种确定的对应关系 f，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应，那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数 (function)，记作$y=f(x), x\in A$。

其中：其中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域 (domain)；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)|x\in A\}$ 叫做函数的值域 (range).

函数的共性：

1. 包含两个非空的数集，用 A 和 B 来表示。
2. 有一个对应关系。
3. 对于定义域 (集合 A) 中的任意一个数 x（自变量），值域 (集合 B) 中都有唯一确定的数 y（因变量）与之对应。

示例：

考虑函数 $y=2x+1$，当 $x=1$ 时，$y=3$；$x=2$ 时，$y=5$。

函数的定义域

定义域：

是函数自变量的取值范围。

确定定义域时，需考虑使函数运算有意义的条件。

常见限制条件：

分式中分母不能为零，如函数 $y = \dfrac{1}{x-1}$，定义域为 $x \neq 1$。

偶次根式被开方数非负，如函数 $y = \sqrt{x}$，定义域为 $x \geq 0$。

例题：

求函数 $y = \dfrac{x+2}{x^2-4}$ 和 $y = \sqrt[3]{2x-1}$ 的定义域。

函数的值域

值域：

是函数因变量的取值范围，取决于定义域和对应法则。

求值域的方法：

直接法： 如函数 $y = x^2$，定义域为实数集，值域为 $y \geq 0$。

配方法： 如函数 $y = x^2 - 4x + 3$，配成 $y = (x-2)^2 - 1$，值域为 $y \geq -1$。

反函数法： 通过求反函数的定义域得到原函数的值域。

实例分析：

求函数 $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ 的值域。

区间的概念

区间的定义：

是数学中表示实数集合的一种方式，用于描述函数的定义域、值域以及一些性质时的连续范围。

区间的分类：

闭区间： 满足不等式 $a \le x \le b$ 的实数 x 的集合，叫做闭区间，表示为 [a, b]，即包含两端的端点 a 和 b。

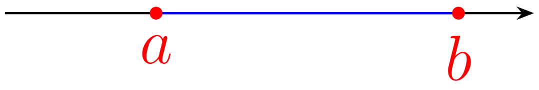
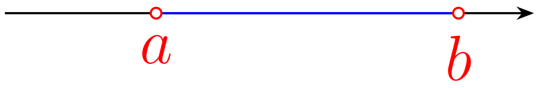
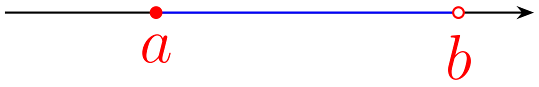
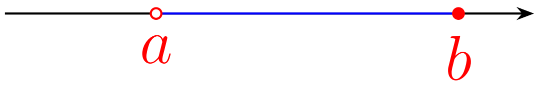
开区间： 满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的集合，叫做开区间，表示为 (a, b)，即不包含两端的端点 a 和 b。

半开半闭区间： 满足不等式 $a \le x < b$ 或 $a < x \le b$ 的实数 x 的集合，叫做半开半闭区间，表示为 [a, b) 或 (a, b]，即一端包含端点，另一端不包含。

区间与数轴表示

区间的图形表示：

在数轴上，闭区间用实心点表示端点，开区间用空心点表示端点。

区间	数轴表示
$[a,b]$	
(a,b)	
$[a,b)$	
$(a,b]$	

区间的应用

定义域和值域的区间表示：

例如，函数 $y = \sqrt{x-1}$ 的定义域为 [1, +∞)，值域为 [0, +∞)。

函数单调性的区间表示：

例如，函数 $y = x^2$ 在区间 (–∞, 0] 上单调递减，在区间 [0, +∞) 上单调递增。

区间运算：

区间的并：例如，(1, 3) ∪ [5, 7] 表示两个不连续的区间。
区间的交：例如，(2, 6) ∩ [4, 8) = [4, 6)。
区间的差：例如，[1, 7] [3, 5] = [1, 3) ∪ (5, 7]。

例题：

用区间表示函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 的定义域和值域。

求函数 $y = -x^2 + 4$ 的单调递增区间和单调递减区间。

单调性：

描述函数在定义域某些区间上因变量的变化趋势。
分为单调递增和单调递减两种情况。

单调性定义：

单调递增：在区间内，自变量增大，因变量也随之增大。
单调递减：在区间内，自变量增大，因变量反而减小。

图像展示：

$y = x^3$（单调递增）
$y = -x + 2$（单调递减）

判断方法：

通过观察函数图像或利用导数判断单调性。

函数的奇偶性

奇偶性定义：

奇函数：对定义域内任意 x，有 $f(-x) = -f(x)$。例如，$f(x) = x^3$。

偶函数：对定义域内任意 x，有 $f(-x) = f(x)$。例如，$f(x) = x^2$。

图像特点：

奇函数图像关于原点对称。

偶函数图像关于 y 轴对称。

判断实例：

判断以下函数的奇偶性：$f(x) = x^4 - 2x^2$、$f(x) = x^5 + x$。

一次函数

一般形式：

$y = kx + b$（k、b 为常数，且 $k \neq 0$）

参数解读：

- k 决定图像倾斜程度和单调性：
  - $k > 0$：函数单调递增。
  - $k < 0$：函数单调递减。
- b 是 y 轴截距，决定图像与 y 轴交点位置。

图像绘制：

$y = x$、$y = -x + 2$、$y = 2x + 1$ 等。

实际应用：

出租车收费模型：起步价为 b，每公里计费为 k。

一次函数的斜率与截距

一次函数通常可以表示为 $y = kx + b$ 的形式，其中 k、b 是常数，$k \neq 0$.
特别地，当 $b = 0$ 时，一次函数 $y = kx$（常数 $k \neq 0$）也叫做正比例函数 (direct proportional function).

例题一、求函数 $y = 3x + 2$ 的函数图象所表示的直线的斜率与截距。
解：令 $x_1 = 0$，$x_2 = 1$，则：
$y_1 = 3x_1 + 2 = 2$,
$y_2 = 3x_2 + 2 = 3 + 2 = 5$,
斜率 = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5 - 2}{1 - 0} = 3$
截距 = $3 \times 0 + 2 = 2$
答：斜率为 3，截距为 2.

从上述例题可以看出，$y = kx + b$ 所表示的直线斜率为 k，截距为 b。

求一次函数的表达式

例题二、一次函数所表示的直线通过点 (0, –3) 与点 (2, 0)，求该函数的关系式。
解：设该一次函数的关系式为 $y = kx + b$，则：

$$\begin{cases} b = -3 \\ 2k + b = 0 \end{cases} \tag{1}$$

求解方程得：$k = \dfrac{3}{2}$。

答：该函数的关系式为 $y = \dfrac{3}{2}x - 3.$

反比例函数

反比例函数的定义：

反比例函数是一种形如 $y = \frac{k}{x}$（k 为常数且 $k \neq 0$）的函数。
自变量 x 的取值范围是 $x \neq 0$ 的所有实数，因变量 y 也随之不能为零。

反比例函数的图像：

图像是双曲线，该双曲线不与坐标轴相交。
当 $k > 0$ 时，双曲线的两支分别位于第一和第三象限。
当 $k < 0$ 时，双曲线的两支分别位于第二和第四象限。

反比例函数的性质：

函数在其定义域上是单调的。当 $k > 0$ 时，在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上都是单调递减的；当 $k < 0$ 时，在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上都是单调递增的。
反比例函数是奇函数，其图像关于原点对称。

实际应用：

例如，速度与时间的关系（当路程一定时），电流与电阻的关系（当电压一定时）等。

二次函数

一般形式：

$y = ax^2 + bx + c$（a、b、c 为常数，且 $a \neq 0$）

参数分析：

a 决定抛物线开口方向和大小：

- $a > 0$：开口向上。
- $a < 0$：开口向下。
- $|a|$ 越大，开口越小。

顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$。

对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$。

图像绘制与变换：

标准二次函数 $y = x^2$ 的图像变换。

总结与练习

总结回顾：

函数的定义、定义域、值域、单调性、奇偶性。

一次函数和二次函数的性质和图像。

练习题：

填空题： 函数 $y = 3x + 2$ 的定义域为 ______，值域为 ______。

选择题： 函数 $y = x^3$ 是 ()

A. 奇函数 B. 偶函数 C. 非奇非偶函数

解答题： 求二次函数 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 的顶点坐标和对称轴。

函数在数学的应用不胜枚举！