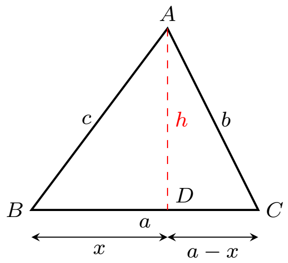
海伦公式的证明

a,b,c 为三角形三边长，半周长 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$。



证明：设三角形 ABC 中：高 AD 长度为 h，线段 BD 长度为 x，线段 DC 长度为 $a-x$，根据勾股定理得到：

$$\begin{cases} c^2 = h^2 + x^2 & \triangle ABD \\ b^2 = h^2 + (a-x)^2 & \triangle ACD \end{cases}$$

将两式相减消去 h^2：

$$c^2 - b^2 = x^2 - (a-x)^2 = 2ax - a^2$$

解得：

$$x = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

代入第一个方程求高度，得到：

$$\left(a^2+c^2-b^2\right)^2$$

三角形面积表达式：

$$S = \frac{1}{2}ah \Rightarrow S^2 = \frac{a^2}{4}h^2$$

将 h^2 表达式代入：

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4}a^2\left[c^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}\right] \\ &= \frac{4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}{16} \\ &= \frac{(2ac)^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}{16} \\ &= \frac{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)}{16} \\ &= \frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{16} \\ &= \frac{(a+b+c)}{2}\cdot\frac{(a+c-b)}{2}\cdot\frac{(a+b-c)}{2}\cdot\frac{(b+c-a)}{2} \\ &= p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$