1.1 有理数的引入

定义

正整数、0 和负整数统称为整数 (integer), 正分数和负分数统称为分数 (fraction). 整数和分数统称为有理数 (rational number).

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ 0\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\qquad \text{小数}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限小数}\begin{cases}\text{无限循环小数}\\ \text{无限不循环小数}\end{cases}\end{cases}$$

0 既不是正数，也不是负数，是正数与负数的分界点。

有限小数和无限循环小数是分数，无限不循环小数不是分数。

思考：无限不循环小数是什么数?

小数如何转化为分数

有限小数如何转化为分数：

$$0.245=\frac{245}{1000}=\frac{49}{200}$$

无限循环小数如何转化为分数？【华东师范大学七年级上册（2024）P73】

$$\begin{aligned}1000\times 0.\dot{2}4\dot{5}&=245.\dot{2}4\dot{5}=245+0.\dot{2}4\dot{5}\\999\times 0.\dot{2}4\dot{5}&=245\\0.\dot{2}4\dot{5}&=\frac{245}{999}\end{aligned}$$

将 $0.\dot{3}$ 转化为分数

解：设 $a = 0.\dot{3}$，则：

$$10a = 3.\dot{3} = 3 + 0.\dot{3} = 3 + a,$$

$$9a = 3$$

$$\therefore a = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

无限循环小数化为分数

将 $0.\dot{2}\dot{5}$ 转化为分数

解：设 $a = 0.\dot{2}\dot{5}$，则：

$$100a = 25.\dot{2}\dot{5} = 25 + a,$$

$$99a = 25$$

$$\therefore a = \frac{25}{99}$$

将 $0.3\dot{2}\dot{5}$ 转化为分数

解：设 $a=0.3\dot{2}\dot{5}$，则：

$$10a=3+0.\dot{2}\dot{5}=3+\frac{25}{99}$$

$$10a=\frac{3\times 99+25}{99}=\frac{322}{99}$$

$$\therefore a=\frac{322}{990}=\frac{161}{495}$$

数集与有理数集

数集的表示方法【数学 A 版必修第一册 1.1 集合的概念】:
集合 A 是小于 10 的自然数组成的集合，表示方法如下:

1. 列举法: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
2. 描述法: $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x < 10\}$

有理数集的表示方法: $Q = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$

数学中常见数集及其记法:

1. 全体非负整数组成的集合称为非负整数集（或自然数集），记作 $\mathbb{N}$.
2. 全体正整数组成的集合称为正整数集，记作 $\mathbb{N}^*$ 或 $\mathbb{N}_+$.
3. 全体整数组成的集合称为整数集，记作 $\mathbb{Z}$.
4. 全体有理数组成的集合称为有理数集，记作 $\mathbb{Q}$.
5. 全体实数组成的集合称为实数集，记作 $\mathbb{R}$.

思考有理数集的表示方法

为什么可以用下面的方法表示有理数集?

$$Q = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$$