等差数列与等比数列

丁保华

致慧星空工作室

2025 年 5 月 4 日

1. 数列的概念回顾

2. 等差数列
   - 定义
   - 通项公式推导与证明
   - 前 n 项和公式推导与证明
   - 基本推论

3. 等比数列
   - 定义
   - 通项公式推导与证明
   - 前 n 项和公式推导与证明
   - 基本推论

数列的概念回顾

定义：按照一定顺序排列的一列数称为数列。数列中的每一个数叫做这个数列的项，排在第一位的数是第一项（或首项），排在第 n 位的数是第 n 项（或通项）。

表示方法：一般用 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ 表示数列的各项，其中 a_n 表示数列的通项。数列可以看作是定义域为正整数集或其有限子集 $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ 的函数 $a_n = f(n)$，当自变量依次取 $1, 2, 3, \ldots, n$ 时对应的函数值依次排列而成。

等差数列的定义

定义：一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差，公差通常用字母 d 表示。

符号表示：对于等差数列 $\{a_n\}$，有 $a_n - a_{n-1} = d \quad (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*, d\text{为常数})$

等差数列的通项公式推导与证明

推导过程：以首项为 a_1，公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 为例。

$$
\begin{aligned}
a_2 - a_1 = d &\Rightarrow a_2 = a_1 + d \\
a_3 - a_2 = d &\Rightarrow a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\
a_4 - a_3 = d &\Rightarrow a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1)d
\end{aligned}
$$

证明：采用数学归纳法。

当 $n = 1$ 时，$a_1 = a_1 + (1-1)d = a_1$，等式成立。
假设当 $n = k$（$k \geq 1$）时，等式成立，即 $a_k = a_1 + (k-1)d$。
那么，当 $n = k+1$ 时，$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd$，等式也成立。
根据数学归纳法原理，等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 对于所有正整数 n 都成立。

等差数列前 n 项和公式推导与证明

推导过程：设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$。

由于 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_n + a_1$，共有 $\frac{n}{2}$ 对这样的和，所以 $S_n = \frac{n}{2} \times (a_1 + a_n)$。

又因为 $a_n = a_1 + (n-1)d$，代入上式得 $S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$。

证明：采用倒序相加法。

将 S_n 和倒序后的 S_n 相加：

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

两式相加得 $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

共有 n 个 $(a_1 + a_n)$ 项，

所以 $2S_n = n(a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \dfrac{n}{2} \times (a_1 + a_n)$

再结合 $a_n = a_1 + (n-1)d$，得到 $S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$。

等差数列的基本推论

推论 1（通项公式的变形）：由 $a_n = a_1 + (n-1)d$，可得 $a_n = a_m + (n-m)d \quad (m, n \in \mathbb{N}^*$且$m \le n)$，这体现了等差数列中任意两项之间的关系，知道其中一项和公差以及项数关系，就可以求出另一项。

推论 2（等差中项公式）：$a_{n-m} + a_{n+m} = 2a_n$ 或 $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-m} + a_{n+m})$，其中：$m, n \in \mathbb{N}^*$且$m < n$。等差中项公式是等差数列的一个重要性质。

推论 3（前 n 项和的性质）：$S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 也成等差数列，公差为 $n^2 d$。这个推论可以用来解决涉及等差数列前若干项和的有关问题，通过将前 n 项和看作新的数列，利用等差数列的性质进行求解。

推论 4（等差中项与前 n 项和的关系）：若等差数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项之和分别为 S_n 与 T_n，则 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$。

等比数列的定义

定义：一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，那么这个数列就叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母 q 表示（$q \neq 0$）。

符号表示：对于等比数列 $\{a_n\}$，有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (n \in \mathbb{N}^*, q \neq 0)$。

等比数列的通项公式推导与证明

推导过程：以首项为 a_1，公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 为例。

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 q \\
a_3 &= a_2 q = a_1 q^2 \\
a_4 &= a_3 q = a_1 q^3 \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 q^{n-1}
\end{aligned}
$$

证明：采用数学归纳法。

当 $n = 1$ 时，$a_1 = a_1 q^0 = a_1$，等式成立。
假设当 $n = k$（$k \geq 1$）时，等式成立，即 $a_k = a_1 q^{k-1}$。
那么，当 $n = k + 1$ 时，$a_{k+1} = a_k q = a_1 q^{k-1} \times q = a_1 q^k$，等式也成立。
根据数学归纳法原理，等比数列的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 对于所有正整数 n 都成立。

等比数列前 n 项和公式推导与证明

推导过程：设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$。

当 $q = 1$ 时，数列的每一项都相等，所以 $S_n = na_1$。

当 $q \neq 1$ 时，将 S_n 乘以 q 得

$qS_n = a_1q + a_2q + \cdots + a_nq = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_nq$。

用原式 S_n 减去这个式子：

$$S_n - qS_n = a_1 - a_nq \Rightarrow S_n(1-q) = a_1 - a_nq$$

$$\text{又因为}\quad a_n = a_1q^{n-1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_1q^{n-1} \times q}{1-q} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

证明：当 $q = 1$ 时，显然成立；当 $q \neq 1$ 时，上述推导过程已经证明了公式的正确性。

等比数列的基本推论

推论 1（通项公式的变形）：由 $a_n = a_1 q^{n-1}$，可得 $a_n = a_m q^{n-m} \quad (m, n \in \mathbb{N}^*)$，它反映了等比数列中任意两项之间的关系，类似于等差数列中的相应推论，可用于已知某些项和公比求其他项的情况。

推论 2（等比中项公式）：$a_{n-m} \cdot a_{n+m} = a_n^2$。这个推论体现了等比数列中相邻三项(以中间项为对称轴的三项）的中间项与前后两项的积的关系，但要注意等比中项可能有两个值（正负），需要根据数列的具体情况进行取舍。

推论 3（前 n 项和的性质）：$S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 也成等比数列，公比为 q^n。这个推论与等差数列前若干项和的推论类似，不过公比变成了原来的 n 次方，可用于解决有关等比数列前若干项和的综合问题。