

不重根二阶齐次递推公式的通项公式推导

丁保华

致慧星空工作室

2025 年 5 月 3 日

问题说明

给定二阶齐次递推公式：

$$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$$

初始条件为：

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 9$$

求该数列的通项公式。

特征方程

假设等比数列形式 $a_n = r^n$ ，代入递推公式得到：

$$r^{n+1} = 5r^n - 6r^{n-1}$$

整理后得到特征方程：

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r - 3)^2 = 0$$

因此，特征方程有两个根分别为 $r_1 = 2, r_2 = 3$ 。

当特征方程有两个不同的实根 r_1 和 r_2 时，通解为：

$$a_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

其中， A 和 B 由初始条件确定。

代入初始条件求通项

已知 $a_1 = 5$, $a_2 = 13$:

代入 $n = 1$:

$$A \times 2 + B \times 3 = 5$$

代入 $n = 2$:

$$A \times 4 + B \times 9 = 13$$

解得:

$$A = 1$$

$$B = 1$$

通项公式

所以，该数列的通项公式为：

$$a_n = 2^n + 3^n$$

验证：

$$a_1 = 2^1 + 3^1 = 2 + 3 = 5$$

$$a_2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$