一阶线性递推数列通项公式的推导

丁保华

致慧星空工作室

2025 年 5 月 4 日

一阶线性递推关系式定义

一阶线性递推关系式形如 $a_{n+1} = pa_n + q$（$p\neq1$，p 和 q 是常数）

“一阶”：相邻两项间有关联，a_{n+1} 和 a_n

“线性”：a_n 的次数为 1

如果 $p = 1$ 呢?

一阶线性递推关系式定义

一阶线性递推关系式形如 $a_{n+1} = pa_n + q$（$p \neq 1$，p 和 q 是常数）

“一阶”：相邻两项间有关联，a_{n+1} 和 a_n

“线性”：a_n 的次数为 1

如果 $p = 1$ 呢?

数列 $\{a_n\}$ 就是公差为 q 的等差数列

推导通项公式的步骤 – 构造归零形式

构造新数列：$a_{n+1} - k = p(a_n - k)$，确定常数 k
展开并代入原递推式，比较常数项得 $k = \dfrac{q}{1-p}(p \neq 1)$

推导通项公式的步骤 – 构造等比数列

得到 $\{a_n - \dfrac{q}{1-p}\}$ 是公比为 p 的等比数列

首项为 $a_1 - \dfrac{q}{1-p}$，通项为 $\left(a_1 - \dfrac{q}{1-p}\right)p^{n-1}$

推导通项公式的步骤 – 求出原数列通项

$$a_n = \left(a_1 - \frac{q}{1-p}\right) p^{n-1} + \frac{q}{1-p}$$

以 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 为例，$p = 2$，$q = 1$，$k = -1$

$\{a_n + 1\}$ 是公比为 2 的等比数列，首项为 $a_1 + 1$

通项公式为 $a_n = (a_1 + 1) \cdot 2^{n-1} - 1$

举例验证

已知 $a_1 = 1$，代入通项公式得 $a_n = 2^n - 1$
验证 $n = 1$，$a_1 = 2^1 - 1 = 1$，符合已知条件
验证 $n = 2$，按递推关系式 $a_2 = 3$，按通项公式 $a_2 = 3$，正确

总结

通过构造新数列，将一阶线性递推数列转化为等比数列来求通项公式
掌握这种方法可以解决类似的一阶线性递推数列问题