

二阶齐次递推公式的通项公式推导

丁保华

致慧星空工作室

2025 年 5 月 4 日

问题说明

给定二阶齐次递推公式：

$$a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$$

初始条件为：

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 15$$

求该数列的通项公式。

特征方程

假设解为等比数列形式 $a_n = r^n$ ，代入递推公式得到：

$$r^{n+1} = 6r^n - 9r^{n-1}$$

整理后得到特征方程：

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \quad \Rightarrow (r - 3)^2 = 0$$

因此，特征方程有一个重根 $r = 3$ 。

重根情况下的通项公式

由于特征方程有重根，通项公式为：

$$a_n = (C_1 + C_2 n) \cdot 3^n$$

代入初始条件 $a_1 = 3$ 和 $a_2 = 15$ ：

$$\begin{cases} 3(C_1 + C_2) = 3 \\ 9(C_1 + 2C_2) = 15 \end{cases}$$

解得：

$$C_1 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = \frac{2}{3}$$

写出通项公式

代入常数 C_1 和 C_2 得到：

$$a_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n \right) \cdot 3^n$$

化简后得到：

$$a_n = (2n + 1) \cdot 3^{n-1}$$

通过代入初始条件和递推关系验证结果正确。