

# 数学课程的总目标

通过义务教育阶段的数学学习，学生逐步：

1. 会用数学的眼光观察现实世界；
2. 会用数学的思维思考现实世界；
3. 会用数学的语言表达现实世界。

简称“三会”。

# 数学考试丢分的四大原因

1. 知识不透彻；
2. 题型不熟练；
3. 计算不准确；
4. 计算速度慢。

简称“四因”。

# 学好数学的五个步骤

1. 发现个案（发现有趣的个案）；
2. 类似案例（寻找类似的案例）；
3. 总结规律（找到一般的规律：从特殊到一般）；
4. 定义证明（给出定义或证明）。
5. 实际应用（应用到实践中去：从一般到特殊）。

简称“五步骤”，1-3：大胆假设；4：小心求证；5：放心应用。

# 1.1 有理数的引入

## 定义

正整数、0 和负整数统称为整数 (integer), 正分数和负分数统称为分数 (fraction).  
整数和分数统称为有理数 (rational number).

有理数  $\left\{ \begin{array}{l} \text{整数} \left\{ \begin{array}{l} \text{正整数} \\ 0 \\ \text{负整数} \end{array} \right. \\ \text{分数} \left\{ \begin{array}{l} \text{正分数} \\ \text{负分数} \end{array} \right. \end{array} \right.$

小数  $\left\{ \begin{array}{l} \text{有限小数} \\ \text{无限小数} \left\{ \begin{array}{l} \text{无限循环小数} \\ \text{无限不循环小数} \end{array} \right. \end{array} \right.$

0 既不是正数，也不是负数，是正数与负数的分界点。  
有限小数和无限循环小数是分数，无限不循环小数不是分数。  
思考：无限不循环小数是什么数？

# 小数如何转化为分数

有限小数如何转化为分数：

$$0.245 = \frac{245}{1000} = \frac{49}{200}$$

无限循环小数如何转化为分数？【华东师范大学七年级上册（2024） P73】

$$1000 \times 0.\dot{2}4\dot{5} = 245.\dot{2}4\dot{5} = 245 + 0.\dot{2}4\dot{5}$$

$$999 \times 0.\dot{2}4\dot{5} = 245$$

$$0.\dot{2}4\dot{5} = \frac{245}{999}$$

# 无限循环小数化为分数

将  $0.\dot{3}$  转化为分数

解：设  $a = 0.\dot{3}$ ，则：

$$10a = 3.\dot{3} = 3 + 0.\dot{3} = 3 + a,$$

$$9a = 3$$

$$\therefore a = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

# 无限循环小数化为分数

将  $0.\dot{2}\dot{5}$  转化为分数

解：设  $a = 0.\dot{2}\dot{5}$ ，则：

$$100a = 25.\dot{2}\dot{5} = 25 + a,$$

$$99a = 25$$

$$\therefore a = \frac{25}{99}$$

# 无限循环小数化为分数

将  $0.3\dot{2}\dot{5}$  转化为分数

解：设  $a = 0.3\dot{2}\dot{5}$ ，则：

$$10a = 3 + 0.\dot{2}\dot{5} = 3 + \frac{25}{99}$$

$$10a = \frac{3 \times 99 + 25}{99} = \frac{322}{99}$$

$$\therefore a = \frac{322}{990} = \frac{161}{495}$$



# 数集与有理数集

数集的表示方法【数学 A 版必修第一册 1.1 集合的概念】：  
集合  $A$  是小于 10 的自然数组成的集合，表示方法如下：

1. 列举法：  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
2. 描述法：  $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x < 10\}$

**有理数集的表示方法：**  $Q = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$

数学中常见数集及其记法：

1. 全体非负整数组成的集合称为非负整数集（或自然数集），记作  $\mathbb{N}$ .
2. 全体正整数组成的集合称为正整数集，记作  $\mathbb{N}^*$  或  $\mathbb{N}_+$ .
3. 全体整数组成的集合称为整数集，记作  $\mathbb{Z}$ .
4. 全体有理数组成的集合称为有理数集，记作  $\mathbb{Q}$ .
5. 全体实数组成的集合称为实数集，记作  $\mathbb{R}$ .

# 思考有理数集的表示方法

为什么可以用下面的方法表示有理数集？

$$Q = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$$

# 1.2 数轴

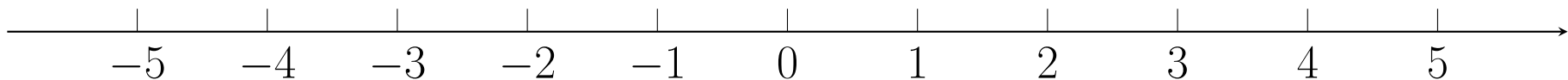
## 定义

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

数轴的四要素：

1. 原点
2. 正方向
3. 单位长度
4. 直线（强调三要素的只包括前三条）

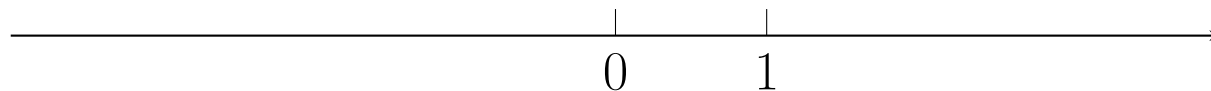
数轴示例：



## 定义

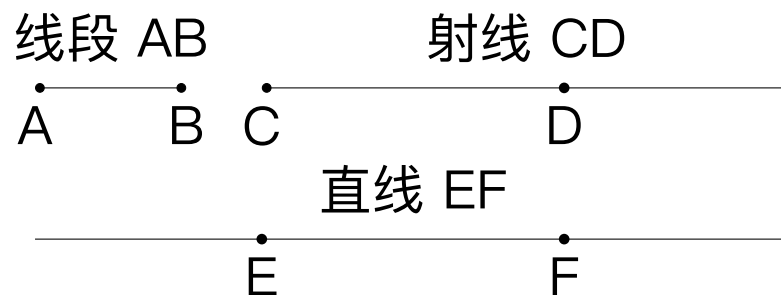
规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

以下图形是不是一个数轴？



# 类比思维

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

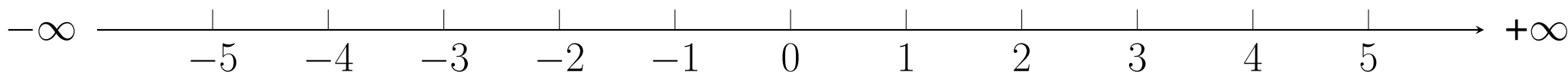


【北京师范大学四年级上册 (2013) P16】

线段：线段有两个端点，线段有一定的长度。

射线：射线有一个端点，射线可以向一个方向无限延伸。

直线：直线没有端点，直线可以向两个方向无限延伸。



实数集  $\mathbb{R}$  可以用区间表示为  $(-\infty, +\infty)$ ,  $\infty$  读作“无穷大”, “ $-\infty$ ”读作“负无穷大”, “ $+\infty$ ”读作“正无穷大”. 【必修 A 版一册 P64】

## 17.2 函数图象 (平面直角坐标系)

在数学中，我们可以用一对有序实数来确定平面上点的位置。

为此，在平面上画两条原点重合、互相垂直且具有相同单位长度的数轴，这就建立了平面直角坐标系 (rectangle coordinate system)。

通常把其中水平的数轴叫做  $x$  轴或横轴，取向右为正方向；铅直的数轴叫做  $y$  轴或纵轴，取向上为正方向；两条数轴的交点  $O$  叫做坐标原点。

为了纪念法国数学家笛卡儿，通常称为笛卡儿直角坐标系。

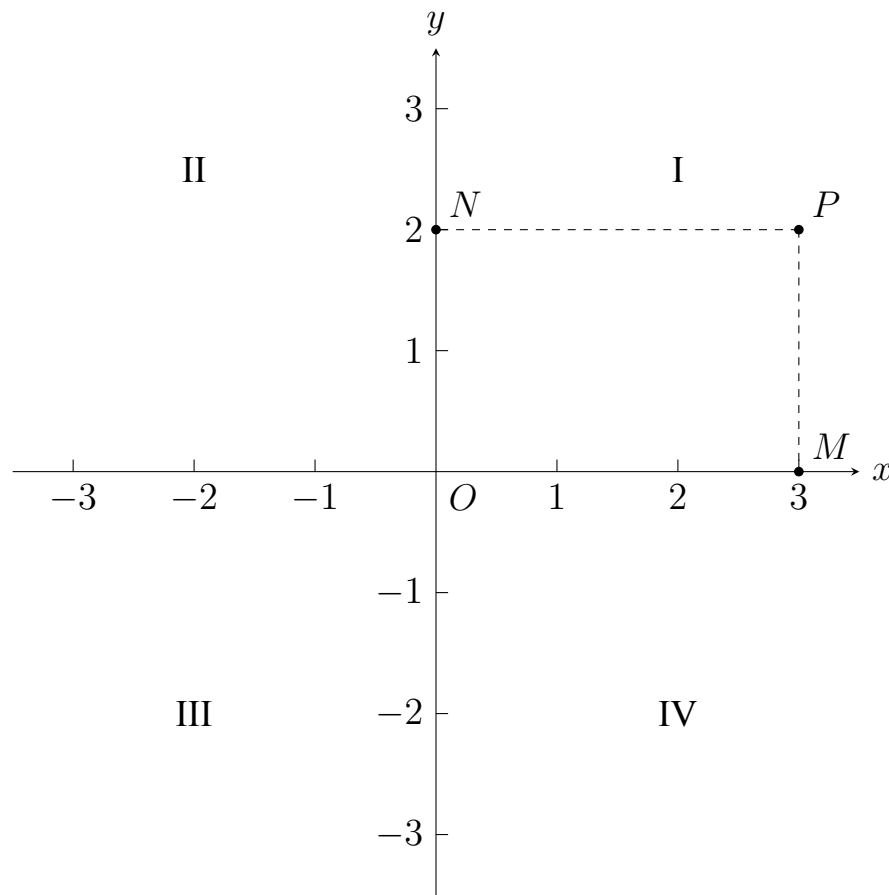


图: 17.2.2

# 平面直角坐标系

在平面直角坐标系中，任意一点都可以用一对有序实数来表示。例如，图 17.2.2 中的点  $P$ ，从点  $P$  分别向  $x$  轴和  $y$  轴作垂线，垂足分别为点  $M$  和点  $N$ 。

这时，点  $M$  在  $x$  轴上对应的数为 3，称为点  $P$  的横坐标 (abscissa)。点  $N$  在  $y$  轴上对应的数为 2，称为点  $P$  的纵坐标 (ordinate)。

依次写出点  $P$  的横坐标和纵坐标，得到一对有序实数  $(3, 2)$ ，称为点  $P$  的坐标。这时点  $P$  可记作  $P(3, 2)$ 。

在平面直角坐标系中，两条坐标轴把平面分成如图 17.2.2 所示的 I、II、III、IV 四个区域，分别称为第一、二、三、四象限。坐标轴上的点不属于任何一个象限。

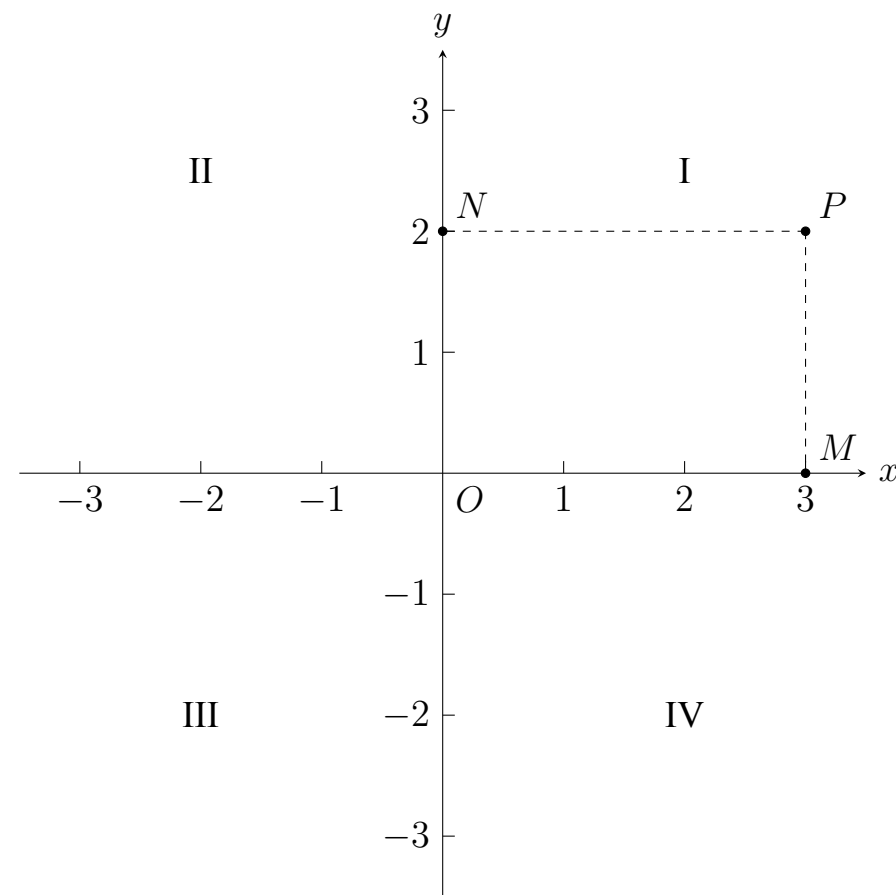


图: 17.2.2

# 1.3 相反数

## 定义

只有正负号不同的两个数称互为相反数 (opposite number)。  
我们规定：0 的相反数是 0。

数学表达式:  $a + b = 0$  或:  $x + y = 0$

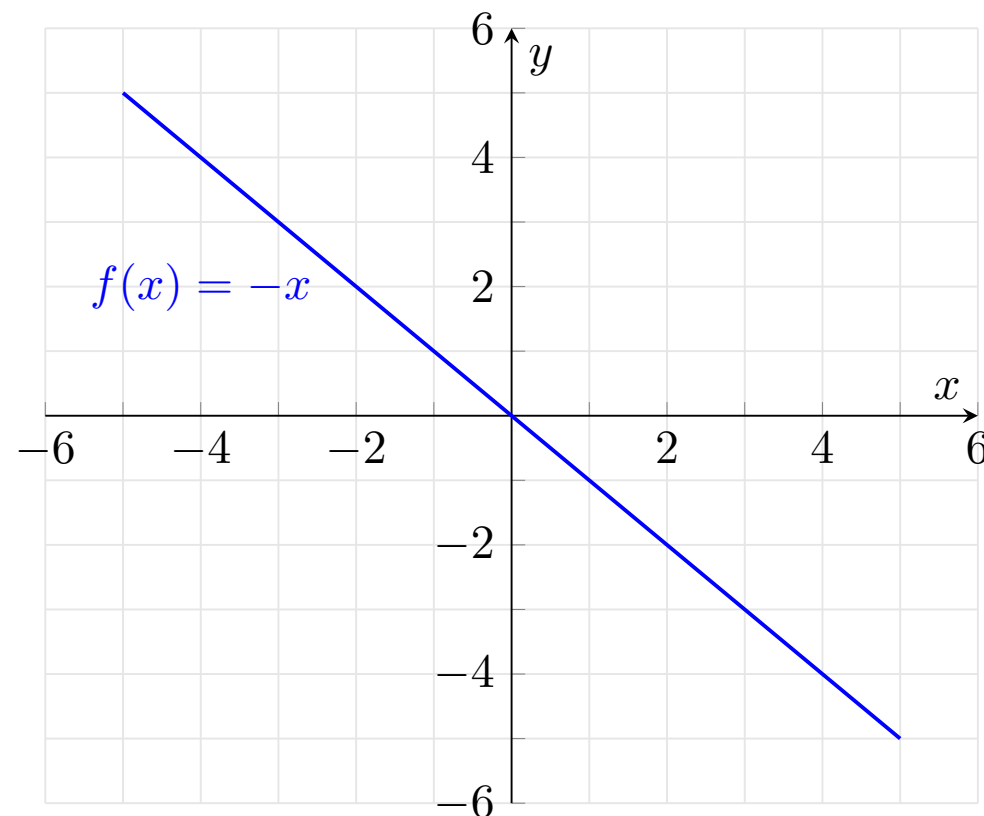
函数定义:  $f(x) = -x$

定义域:  $x \in \mathbb{R}$

值域:  $y \in \mathbb{R}$

对称性: 关于原点中心对称

其它特征: 当  $a, b \neq 0$  时,  
 $a \div b = -1$





# 倒数的定义及函数图象

## 定义

乘积为 1 的两个数互为倒数。

注意：0 没有倒数。

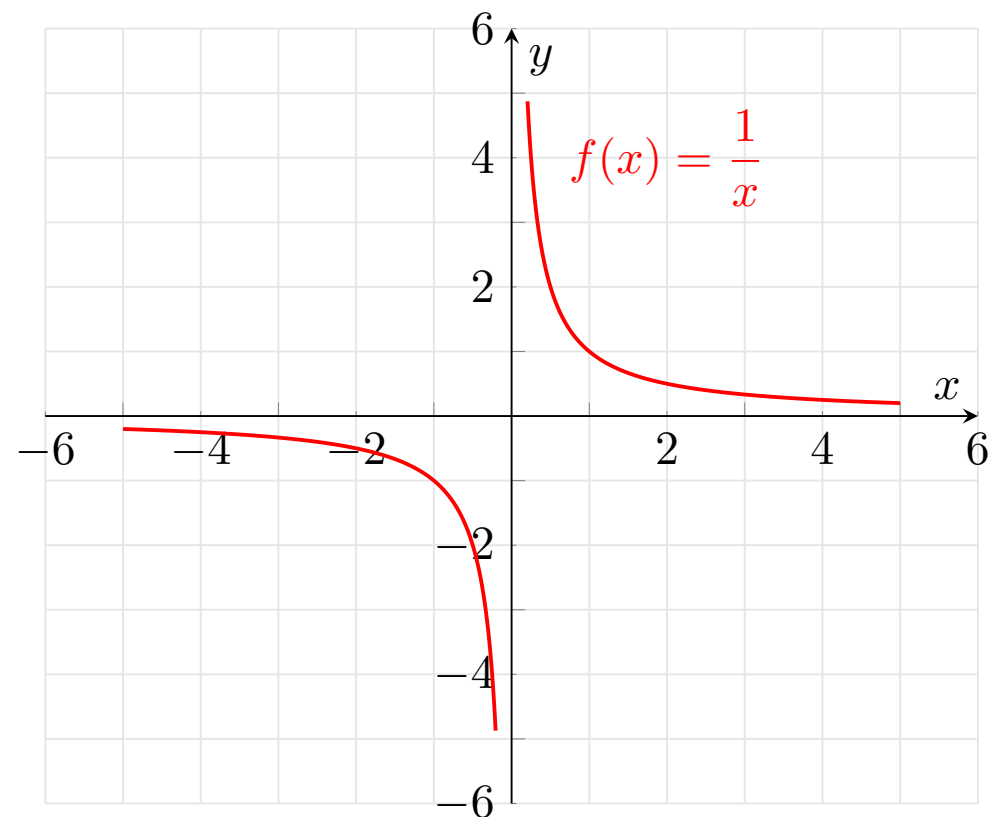
数学表达式:  $a \cdot b = 1$

函数定义:  $f(x) = \frac{1}{x}$

定义域:  $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

值域:  $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

对称性: 关于原点中心对称

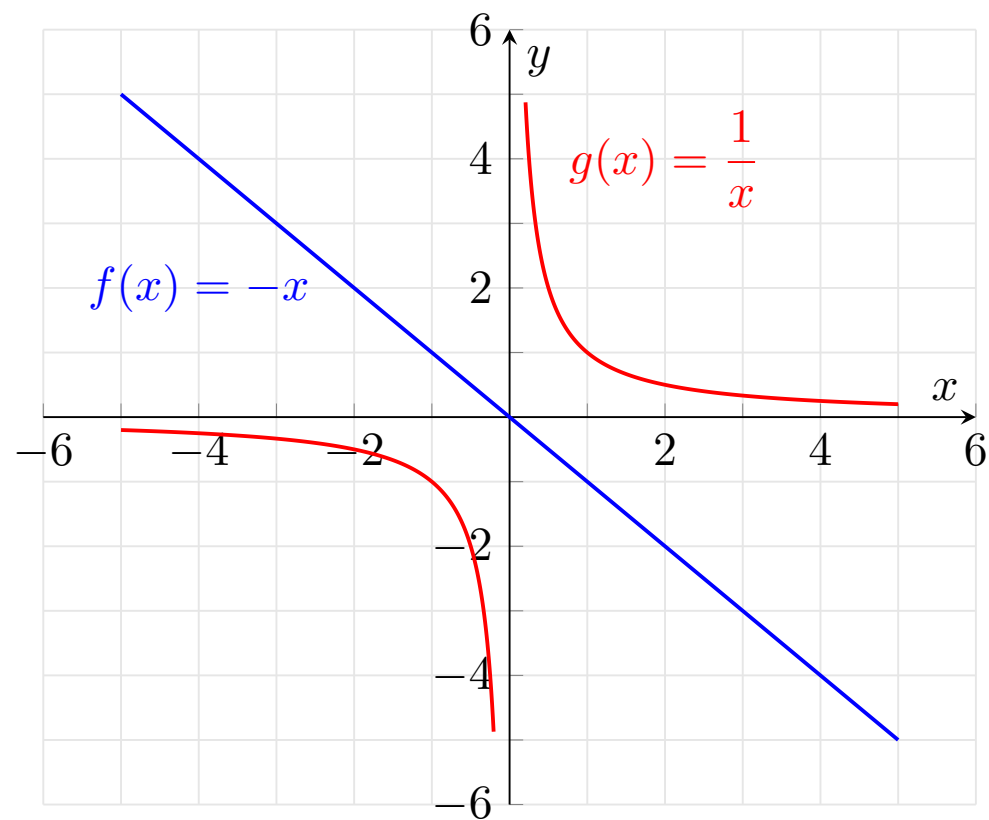


# 相反数与倒数的比较

相反数的表达式:  $a + b = 0$

倒数的表达式:  $a \cdot b = 1$

对称性: 相反数与倒数均关于原点中心对称



# 1.4 绝对值

**定义：** 我们把在数轴上表示数  $a$  的点与原点的距离叫做数  $a$  的绝对值，记作  $|a|$ 。

1. 一个正数的绝对值是它本身；
2. 0 的绝对值是 0；
3. 一个负数的绝对值是它的相反数.

数学表达式:  $|x|$

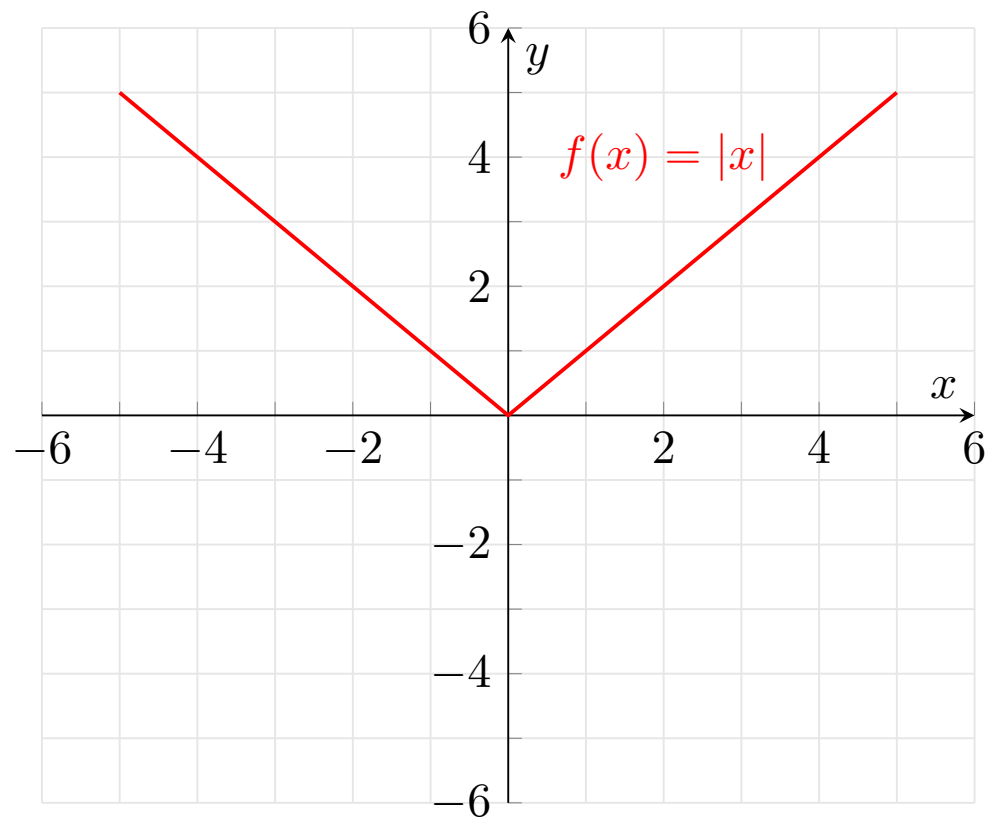
函数定义:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

定义域:  $x \in \mathbb{R}$

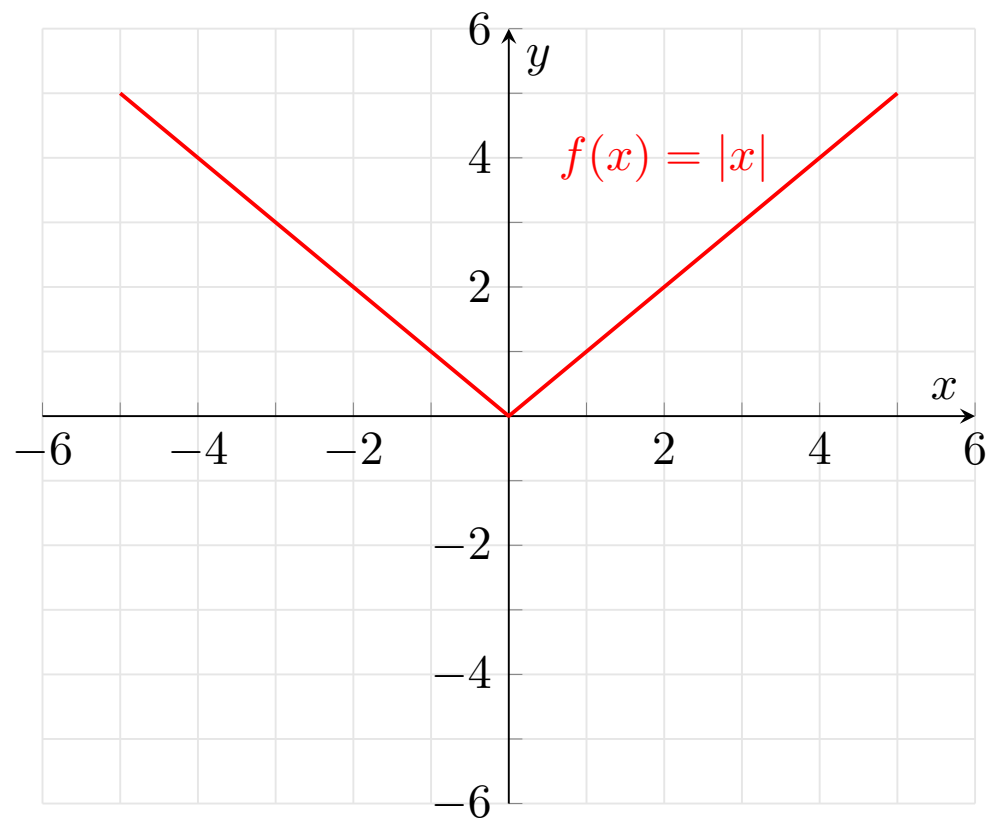
值域:  $y \in \mathbb{R}, y \geq 0$

对称性: 关于  $y$  轴对称

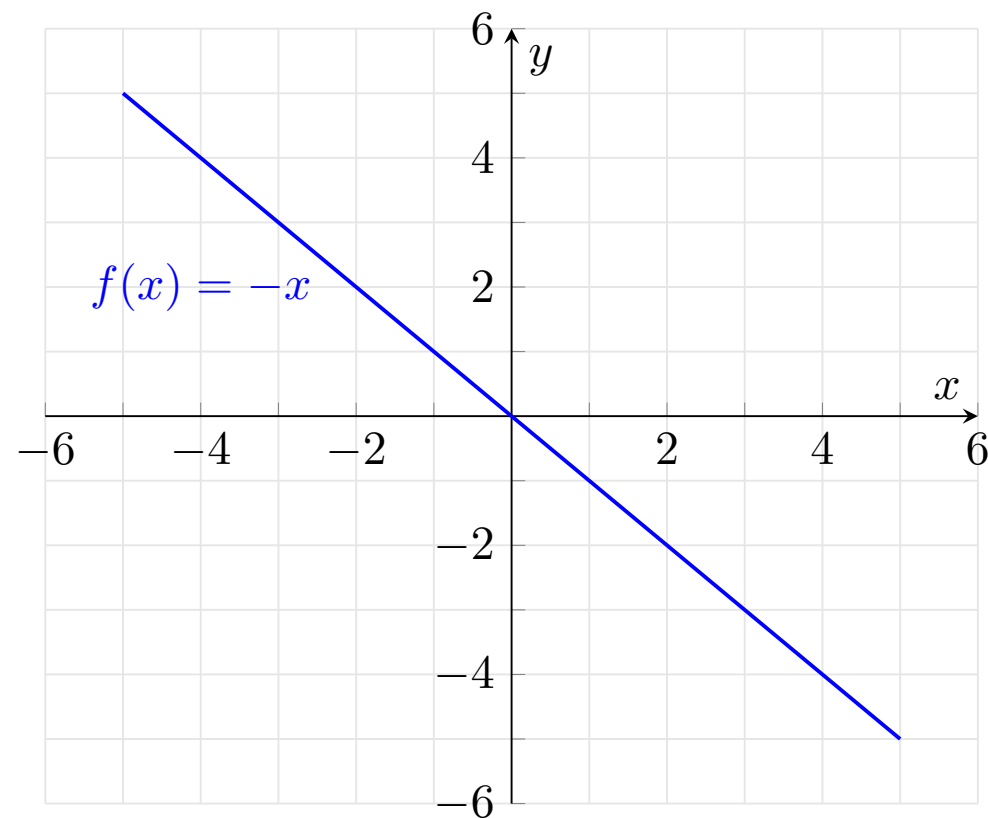


# 绝对值与相反数的比较

## 绝对值的函数图象



## 相反数的函数图象

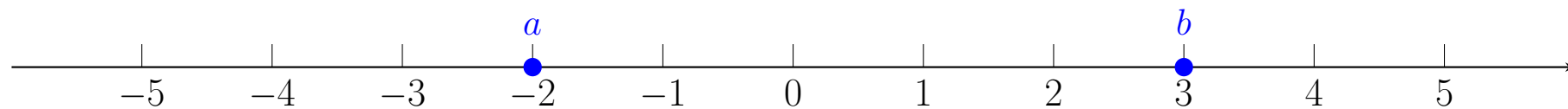


# 1.5 有理数的大小比较规则

1. 数轴上右边的数比左边的数大
2. 正数  $> 0$
3. 负数  $< 0$
4. 正数  $>$  负数
5. 两个负数比较，绝对值大的反而小！  
如果  $a > b > 0$ ，则：  $-a < -b < 0$

# 数轴比较法

1. 画数轴并标出所有数



2. 从左到右（从小到大）排列

3. 结果：  $a < b$

# 1.6 有理数的加法法则

1. 同号两数相加, 取与加数相同的正负号, 并把绝对值相加;

当 $a, b > 0$ 时,

$$(+a) + (+b) = +(a + b) = a + b$$

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

2. 绝对值不相等的异号两数相加, 取绝对值较大的加数的正负号, 并用较大的绝对值减去较小的绝对值;

当 $a > b > 0$ 时,

$$(-a) + (+b) = -(a - b)$$

$$(+a) + (-b) = +(a - b) = a - b$$

3. 互为相反数的两个数相加得 0;

$$a + (-a) = 0$$

# 有理数加法的运算律

1. 加法交换律：两个数相加，交换加数的位置，和不变.

$$a + b = b + a$$

2. 加法结合律：三个数相加，先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$



# 有理数去括号与添括号规则

括号前的符号与数字前的符号存在下列关系，则：

## 1. 同号取正（去添括号，取正号）

$$+(+a) = +a = a$$

$$-(-a) = +a = a$$

## 2. 异号取负（去添括号，取负号）

$$-(+a) = -a$$

$$+(-a) = -a$$

## 1.7 有理数的减法

有理数的减法法则：

1. 减去一个数，等于加上这个数的相反数.

$$a - b = a + (-b)$$

$$a - (-b) = a + (+b) = a + b$$

# 1.8 有理数的加减混合运算

1. 加减法是一级运算，优先级最低；
2. 加法与减法互为逆运算，加法与减法带符号统一理解为加法；
3. 减一个数，等于加相反数： $a - b = a + (-b)$  或  $a - (-b) = a + b$ ；
4. 加一个数，等于减相反数： $a + b = a - (-b)$  或  $a + (-b) = a - b$ ；
5. 同号取正（去括号，取正号）

$$+(+a) = +a = a$$

$$-(-a) = +a = a$$

6. 异号取负（去括号，取负号）

$$-(+a) = -a$$

$$+(-a) = -a$$

7. 加法具有交换律： $a + b + c = a + c + b$ ；

# 1.9 有理数的乘法

有理数的乘法法则：

1. 同号得正： $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
2. 异号得负（绝对值相乘）： $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -a \cdot b$
3. 乘零得零： $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
4. 交换律： $a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = b \cdot c \cdot a$
5. 结合律： $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
6. 分配律： $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

# 1.9 有理数的乘法

有理数的乘法法则：

1. 同号得正： $(-a)(-b) = ab$
2. 异号得负（绝对值相乘）： $(-a)b = a(-b) = -ab$
3. 乘零得零： $a \cdot 0 = 0a = 0$
4. 交换律： $abc = acb = bca$
5. 结合律： $(ab)c = a(bc)$
6. 分配律： $a(b + c) = ab + ac$

## 1.10 有理数的除法

有理数的乘法法则：

1. 同号得正： $(-a) \div (-b) = a \div b = \frac{a}{b}$

2. 异号得负（绝对值相除）： $(-a) \div b = a \div (-b) = -a \div b = -\frac{a}{b}$

3. 零除得零（0 不能为除数）： $0 \div a = 0$

4. 除以一数，等于乘其倒数： $a \div b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

## 1.11 有理数的乘方

有理数的乘方：求几个相同乘数的积的运算，叫做乘方 (involution)。其中，

1. 乘方的结果叫做幂 (power)
2.  $a$  叫做底数 (base number)
3.  $n$  叫做指数 (exponent)
4.  $a^n$  读作  $a$  的  $n$  次方
5. 也可读作  $a$  的  $n$  次幂

# 1.11 有理数的乘方

乘方的运算法则：

1. 乘方是第三级运算，优先级高于乘除法运算（见 P.59）
2.  $a^1 = a$
3. 乘方的乘法运算： $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
4. 乘方的除法运算： $a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$
5. 乘方的乘方运算： $(a^m)^n = a^{mn}$
6.  $a^0 = a^{m-m} = a^m \div a^m = 1 \quad (a \neq 0)$
7.  $a^{-1} = a^{0 \div 1} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$
8. 整数的任何次幂都是整数
9. 负数的偶数次幂是正数（偶负得正），负数的奇数次幂是负数（奇负得负）
10. 乘方运算具有右结合的性质： $a^{m^n} = a^{(m^n)}$



# 1.11 有理数的乘方

科学记数法：

1. 一个绝对值大于 10 的数可以记成  $a \times 10^n$  的形式, 其中  $1 \leq |a| < 10$ ,  $n$  是正整数. 像这样的记数法叫做科学记数法. 例如:

$$8\ 000\ 000 = 8 \times 10^6$$

2. 一个绝对值小于 1 的数可以记成  $a \times 10^{-n}$  的形式, 其中  $1 \leq |a| < 10$ ,  $n$  是正整数. 像这样的记数法也叫做科学记数法. 例如:

$$0.000\ 008 = 8 \times 10^{-6}$$

# 1.12 有理数的混合运算

## 有理数的混合运算：

1. 加法和减法叫做第一级运算，互为逆运算
2. 乘法和除法叫做第二级运算，互为逆运算
3. 乘方、开方和对数叫做第三级运算，开方是乘方求底数的逆运算，对数是乘方求指数的逆运算

## 运算的优先级：

1. 先做乘方，再做乘除，最后做加减；
2. 同级运算，按照从左至右的顺序进行；
3. 如果有括号，就先算小括号里的，再算中括号里的，然后算大括号里的

# 1.13 近似数

## 近似数：

1. 与实际值非常接近的数，称为近似数 (approximate number)。例如：

$$\pi = 3.141\ 592 \dots$$

2. 只取整数，精确到个位数：应用四舍五入法，应为 3

3. 只取 1 位小数，精确到十分位（或精确到 0.1）：应为 3.1

4. 只取 2 位小数，精确到百分位（或精确到 0.01）：应为 3.14

5. 光在真空中的传播速度： $c = 299\ 792\ 458 m/s$

6. 用科学记数法，只取整数： $c = 3 \times 10^8 m/s$

7. 用科学记数法，保留 1 位小数： $c = 3.0 \times 10^8 m/s$

8. 用科学记数法，保留 5 位小数： $c = 2.99792 \times 10^8 m/s$

9. 注意：四舍五入的位置必须为精确位数的向下一位。

# 第一章小结

负数的性质：假设  $a > b > 0$ ,

1. 负数小于零：  $-a = 0 - a < 0$
2. 负数小于正数：  $-a < b < a$
3. 绝对值大的负数反而小：  $-a < -b < 0 < b < a$
4. 负数的绝对值等于相反数  $|-a| = a$
5. 相反数之和为零

$$a + (-a) = 0$$

$$(-a) + a = 0$$

6. 相反数之商为-1（除数不为零）

$$a \div (-a) = -1$$

$$(-a) \div a = -1$$

# 第一章小结

有理数的加法法则：假设  $a > b > 0$ ,

1. 同号相加取其号, 绝对值作加法

$$(+a) + (+b) = +(a + b) = a + b$$

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

2. 异号相加取绝对值大的号, 绝对值大减小

$$(-a) + (+b) = -(a - b)$$

$$(+a) + (-b) = +(a - b) = a - b$$

3. 相反数之和为零

$$a + (-a) = 0$$

4. 加零和不变

$$a + 0 = a$$

有理数的加法法则：

1. 加法交换律：换位相加和不变

$$a + b = b + a$$

2. 加法结合律：先加后加和不变

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

## 有理数的减法法则：

### 1. 减去一个数，等于加其相反数

$$a - b = a + (-b)$$

$$a - (-b) = a + (+b) = a + b$$

# 第一章小结

增减括号法则：

## 1. 偶负取正号（正号可省略）

$$+(+a) = +a = a$$

$$-(-a) = +a = a$$

## 2. 奇负取负号

$$-(+a) = -a$$

$$+(-a) = -a$$

$$-[-(-a)] = -a$$



# 第一章小结

有理数的乘法法则：

1. 偶负得正：

$$(-a)(-b) = ab$$

$$(-a)(-b)(-c)(-d) = abcd$$

2. 奇负得负（绝对值相乘）：

$$(-a)b = a(-b) = -ab$$

$$(-a)(-b)(-c) = -abc$$

3. 乘零得零：  $a \cdot 0 = 0a = 0$

4. 交换律：  $abc = acb = bca = cab$

5. 结合律：  $(ab)c = a(bc)$

6. 分配律：  $a(b + c) = ab + ac$

# 第一章小结

有理数的除法法则：假设除数不为零，

1. 偶负得正： $(-a) \div (-b) = a \div b = \frac{a}{b}$

2. 奇负得负（绝对值相除）： $(-a) \div b = a \div (-b) = -a \div b = -\frac{a}{b}$

$$(-a) \div (-b) \div (-c) = -a \div (bc) = -\frac{a}{bc}$$

3. 零除得零（0 不能为除数）： $0 \div a = 0$

4. 除以一数，等于乘其倒数： $a \div b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

$$a \div \frac{1}{b} = a \cdot b = ab$$

$$a \div \frac{n}{m} = a \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{n}$$

$$\frac{b}{a} \div \frac{n}{m} = \frac{b}{a} \cdot \frac{m}{n} = \frac{bm}{an}$$

# 第一章小结

有理数的乘方：求几个相同乘数的积的运算，叫做乘方 (involution)。其中，

1. 乘方的结果叫做幂 (power)
2.  $a$  叫做底数 (base number)
3.  $n$  叫做指数 (exponent)
4.  $a^n$  读作  $a$  的  $n$  次方
5. 也可读作  $a$  的  $n$  次幂

# 第一章小结

乘方的运算法则：

1. 乘方是第三级运算，优先级高于乘除法运算（见 P.59）
2.  $a^1 = a$
3. 乘方的乘法运算： $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
4. 乘方的除法运算： $a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$
5. 乘方的乘方运算： $(a^m)^n = a^{mn}$
6.  $a^0 = a^{m-m} = a^m \div a^m = 1 \quad (a \neq 0)$
7.  $a^{-1} = a^{0 \div 1} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$
8. 整数的任何次幂都是整数
9. 负数的偶数次幂是正数（偶负得正），负数的奇数次幂是负数（奇负得负）
10. 乘方运算具有右结合的性质： $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

# 第一章小结

## 有理数的混合运算：

1. 加法和减法叫做第一级运算，互为逆运算
2. 乘法和除法叫做第二级运算，互为逆运算
3. 乘方、开方和对数叫做第三级运算，开方是乘方求底数的逆运算，对数是乘方求指数的逆运算

## 运算的优先级：

1. 先做乘方，再做乘除，最后做加减；
2. 同级运算，按照从左至右的顺序进行；
3. 如果有括号，就先算小括号里的，再算中括号里的，然后算大括号里的

# 第一章小结

## 近似数：

1. 与实际值非常接近的数，称为近似数 (approximate number)。例如：

$$\pi = 3.141\ 592 \dots$$

2. 只取整数，精确到个位数：应用四舍五入法，应为 3

3. 只取 1 位小数，精确到十分位（或精确到 0.1）：应为 3.1

4. 只取 2 位小数，精确到百分位（或精确到 0.01）：应为 3.14

5. 光在真空中的传播速度： $c = 299\ 792\ 458 m/s$

6. 用科学记数法，只取整数： $c = 3 \times 10^8 m/s$

7. 用科学记数法，保留 1 位小数： $c = 3.0 \times 10^8 m/s$

8. 用科学记数法，保留 5 位小数： $c = 2.99792 \times 10^8 m/s$

9. 注意：四舍五入的位置必须为精确位数的向下一位。

# 第一章小结

## 自然语言与数学语言的比较：

(a) 自然语言：- 3 与 0.3 的和乘以 2 的倒数 (P.78)

(b) 数学语言： $(-3 + 0.3) \times \frac{1}{2} = -2.7 \times \frac{1}{2} = -\frac{27}{20} = -1.35$

(c) 自然语言：- 3 与 0.3 的和乘以 2 的积的倒数

(d) 数学语言： $\frac{1}{(-3 + 0.3) \times 2} = \frac{1}{-5.4} = -\frac{10}{54} = -\frac{5}{27}$

# 检查方法

## 常用检查方法：

1. 检查符号，包括中间过程的符号。牢记：
  - a. 同号相加取其号，绝对值作加法
  - b. 异号相加取绝对值大的号，绝对值大减小。
  - c. 绝对值大的负数反而小。
  - d. 乘除法或增减括号：奇负得负，偶负得正。
2. 检查个位数
3. 检查总位数
4. 检查进借位