题目 1：已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，$4S_{n+1}=3a_{n+1}+9a_n$，$a_1=3$，

(1) 证明数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ 为等比数列；

(2) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

题目 1：已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，$4S_{n+1}=3a_{n+1}+9a_n$，$a_1=3$，
(1) 证明数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ 为等比数列；
(2) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

证明：
(1) $4a_{n+1}=4S_{n+1}-4S_n=3a_{n+1}+9a_n-(3a_n+9a_{n-1})=3a_{n+1}+6a_n-9a_{n-1}$，

题目 1：已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，$4S_{n+1}=3a_{n+1}+9a_n$，$a_1=3$，
(1) 证明数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ 为等比数列；
(2) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

证明：
(1) $4a_{n+1}=4S_{n+1}-4S_n=3a_{n+1}+9a_n-(3a_n+9a_{n-1})=3a_{n+1}+6a_n-9a_{n-1}$，
所以 $a_{n+1}=6a_n-9a_{n-1}\quad(n\geq 2)$

题目 1：已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，$4S_{n+1}=3a_{n+1}+9a_n$，$a_1=3$，
(1) 证明数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ 为等比数列；
(2) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

证明：
(1) $4a_{n+1}=4S_{n+1}-4S_n=3a_{n+1}+9a_n-(3a_n+9a_{n-1})=3a_{n+1}+6a_n-9a_{n-1}$，
所以 $a_{n+1}=6a_n-9a_{n-1}\quad(n\geq 2)$
令 $c_n=a_{n+1}-3a_n$，则
$C_{n+1}=a_{n+2}-3a_{n+1}=6a_{n+1}-9a_n-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)=3C_n$，
所以 $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=3$，因此数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列。

题目 1：已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，$4S_{n+1}=3a_{n+1}+9a_n$，$a_1=3$，
(1) 证明数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ 为等比数列；
(2) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

证明：
(1) $4a_{n+1}=4S_{n+1}-4S_n=3a_{n+1}+9a_n-(3a_n+9a_{n-1})=3a_{n+1}+6a_n-9a_{n-1}$，
所以 $a_{n+1}=6a_n-9a_{n-1} \quad (n\geq 2)$
令 $c_n=a_{n+1}-3a_n$，则
$C_{n+1}=a_{n+2}-3a_{n+1}=6a_{n+1}-9a_n-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)=3C_n$，
所以 $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=3$，因此数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列。
由 $4S_{n+1}=3a_{n+1}+9a_n$ 得 $4S_2=4a_2+4a_1=3a_2+9a_1 \quad \Rightarrow a_2=5a_1=15$

数列的综合应用

题目 1：已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，$4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$，$a_1 = 3$，
(1) 证明数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 为等比数列；
(2) 设 $b_n = \dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

证明：
(1) $4a_{n+1} = 4S_{n+1} - 4S_n = 3a_{n+1} + 9a_n - (3a_n + 9a_{n-1}) = 3a_{n+1} + 6a_n - 9a_{n-1}$，
所以 $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1} \quad (n \geq 2)$
令 $c_n = a_{n+1} - 3a_n$，则
$C_{n+1} = a_{n+2} - 3a_{n+1} = 6a_{n+1} - 9a_n - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n) = 3C_n$，
所以 $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = 3$，因此数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列。
由 $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$ 得 $4S_2 = 4a_2 + 4a_1 = 3a_2 + 9a_1 \quad \Rightarrow a_2 = 5a_1 = 15$
$c_1 = a_2 - 3a_1 = 15 - 9 = 6$，因此数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 是首项为 6、公比为 3 的等比数列。

题目 1：已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，$4S_{n+1}=3a_{n+1}+9a_n$，$a_1=3$，

(2) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

题目 1：已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，$4S_{n+1}=3a_{n+1}+9a_n$，$a_1=3$，
(2) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

解：
已经求得 $a_{n+1}=6a_n-9a_{n-1}$，其特征方程为 $r^2-6r+9=0 \quad \Rightarrow (r-3)^2=0$，

题目 1：已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，$4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$，$a_1 = 3$，

(2) 设 $b_n = \dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

解：

已经求得 $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$，其特征方程为 $r^2 - 6r + 9 = 0 \quad \Rightarrow (r-3)^2 = 0$，
求得特征方程具有重根 $r = 3$，因此数列 $\{a_n\}$ 可以写成的 $a_n = (C_1 + C_2 n)3^n$ 形式，
将 a_1, a_2 的值带入，得到方程组

题目 1：已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，$4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$，$a_1 = 3$，
(2) 设 $b_n = \dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

解：
已经求得 $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$，其特征方程为 $r^2 - 6r + 9 = 0 \quad \Rightarrow (r-3)^2 = 0$，
求得特征方程具有重根 $r = 3$，因此数列 $\{a_n\}$ 可以写成的 $a_n = (C_1 + C_2 n)3^n$ 形式，
将 a_1, a_2 的值带入，得到方程组

$$\begin{cases} 3(C_1 + C_2) = 3 \\ 9(C_1 + 2C_2) = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C1 = \frac{1}{3} \\ C2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a_n = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n)3^n = (2n+1)3^{n-1}$$

题目 1：已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，$4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 9a_n$，$a_1 = 3$，

(2) 设 $b_n = \dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

解：

已经求得 $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$，其特征方程为 $r^2 - 6r + 9 = 0 \quad \Rightarrow (r-3)^2 = 0$，求得特征方程具有重根 $r = 3$，因此数列 $\{a_n\}$ 可以写成的 $a_n = (C_1 + C_2 n)3^n$ 形式，将 a_1, a_2 的值带入，得到方程组

$$\begin{cases} 3(C_1 + C_2) = 3 \\ 9(C_1 + 2C_2) = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C1 = \frac{1}{3} \\ C2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a_n = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n)3^n = (2n+1)3^{n-1}$$

$$b_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}3^{n-1} = \left(\frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)3^{n-1} = \frac{3^n}{n+2} - \frac{3^{n-1}}{n+1}$$

题目 1：已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，$4S_{n+1}=3a_{n+1}+9a_n$，$a_1=3$，

(2) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

解：

已经求得 $a_{n+1}=6a_n-9a_{n-1}$，其特征方程为 $r^2-6r+9=0 \quad \Rightarrow (r-3)^2=0$，求得特征方程具有重根 $r=3$，因此数列 $\{a_n\}$ 可以写成的 $a_n=(C_1+C_2n)3^n$ 形式，将 a_1,a_2 的值带入，得到方程组

$$\begin{cases} 3(C_1+C_2)=3 \\ 9(C_1+2C_2)=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C1=\frac{1}{3} \\ C2=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a_n=(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n)3^n=(2n+1)3^{n-1}$$

$$b_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}=\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}3^{n-1}=\left(\frac{3}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)3^{n-1}=\frac{3^n}{n+2}-\frac{3^{n-1}}{n+1}$$

所以 $T_n=b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1=\dfrac{3^n}{n+2}-\dfrac{3^{n-1}}{n+1}+\dfrac{3^{n-1}}{n+1}-\dfrac{3^{n-2}}{n}+\cdots+\dfrac{3^1}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3^n}{n+2}-\dfrac{1}{2}$

后记

怎么能够得到 $\dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{3}{n+2} - \dfrac{1}{n+1}$?

怎么能够得到 $\dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{3}{n+2} - \dfrac{1}{n+1}$?

解：

设 $\dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+2} = \dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$，则 $\dfrac{a \cdot n + 2a + b \cdot n + b}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$

怎么能够得到 $\dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{3}{n+2}-\dfrac{1}{n+1}$?

解:

设 $\dfrac{a}{n+1}+\dfrac{b}{n+2}=\dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$，则 $\dfrac{a\cdot n+2a+b\cdot n+b}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$

所以 $a\cdot n+2a+b\cdot n+b=2n+1\Rightarrow(a+b)n+(2a+b)=2n+1$，得到

$$\begin{cases}a+b=2\\2a+b=1\end{cases}$$

怎么能够得到 $\dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{3}{n+2}-\dfrac{1}{n+1}$?

解:

设 $\dfrac{a}{n+1}+\dfrac{b}{n+2}=\dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$，则 $\dfrac{a\cdot n+2a+b\cdot n+b}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$

所以 $a\cdot n+2a+b\cdot n+b=2n+1\Rightarrow(a+b)n+(2a+b)=2n+1$，得到

$$\begin{cases}a+b=2\\2a+b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$$

后记

怎么能够得到 $\dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{3}{n+2}-\dfrac{1}{n+1}$?

解：

设 $\dfrac{a}{n+1}+\dfrac{b}{n+2}=\dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$，则 $\dfrac{a\cdot n+2a+b\cdot n+b}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$

所以 $a\cdot n+2a+b\cdot n+b=2n+1 \Rightarrow (a+b)n+(2a+b)=2n+1$，得到

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{3}{n+2}-\frac{1}{n+1}$$

验证：$\dfrac{3}{n+2}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{3(n+1)-(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$