

数学课程的总目标

通过义务教育阶段的数学学习，学生逐步：

1. 会用数学的眼光观察现实世界；
2. 会用数学的思维思考现实世界；
3. 会用数学的语言表达现实世界。

简称“三会”。

数学考试丢分的四大原因

1. 知识不透彻；
2. 题型不熟练；
3. 计算不准确；
4. 计算速度慢。

简称“四因”。

学好数学的五个步骤

1. 发现个案（发现有趣的个案）；
2. 类似案例（寻找类似的案例）；
3. 总结规律（找到一般的规律：从特殊到一般）；
4. 定义证明（给出定义或证明）。
5. 实际应用（应用到实践中去：从一般到特殊）。

简称“五步骤”，1-3：大胆假设；4：小心求证；5：放心应用。

1.1 有理数的引入

定义

正整数、0 和负整数统称为整数 (integer), 正分数和负分数统称为分数 (fraction).
整数和分数统称为有理数 (rational number).

有理数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{整数} \left\{ \begin{array}{l} \text{正整数} \\ 0 \\ \text{负整数} \end{array} \right. \\ \text{分数} \left\{ \begin{array}{l} \text{正分数} \\ \text{负分数} \end{array} \right. \end{array} \right.$

小数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{有限小数} \\ \text{无限小数} \left\{ \begin{array}{l} \text{无限循环小数} \\ \text{无限不循环小数} \end{array} \right. \end{array} \right.$

0 既不是正数，也不是负数，是正数与负数的分界点。
有限小数和无限循环小数是分数，无限不循环小数不是分数。
思考：无限不循环小数是什么数？

小数如何转化为分数

有限小数如何转化为分数：

$$0.245 = \frac{245}{1000} = \frac{49}{200}$$

无限循环小数如何转化为分数？【华东师范大学七年级上册（2024） P73】

$$1000 \times 0.\dot{2}4\dot{5} = 245.\dot{2}4\dot{5} = 245 + 0.\dot{2}4\dot{5}$$

$$999 \times 0.\dot{2}4\dot{5} = 245$$

$$0.\dot{2}4\dot{5} = \frac{245}{999}$$

无限循环小数化为分数

将 $0.\dot{3}$ 转化为分数

解：设 $a = 0.\dot{3}$ ，则：

$$10a = 3.\dot{3} = 3 + 0.\dot{3} = 3 + a,$$

$$9a = 3$$

$$\therefore a = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

无限循环小数化为分数

将 $0.\dot{2}\dot{5}$ 转化为分数

解：设 $a = 0.\dot{2}\dot{5}$ ，则：

$$100a = 25.\dot{2}\dot{5} = 25 + a,$$

$$99a = 25$$

$$\therefore a = \frac{25}{99}$$

无限循环小数化为分数

将 $0.3\dot{2}\dot{5}$ 转化为分数

解：设 $a = 0.3\dot{2}\dot{5}$ ，则：

$$10a = 3 + 0.\dot{2}\dot{5} = 3 + \frac{25}{99}$$

$$10a = \frac{3 \times 99 + 25}{99} = \frac{322}{99}$$

$$\therefore a = \frac{322}{990} = \frac{161}{495}$$

数集与有理数集

数集的表示方法【数学 A 版必修第一册 1.1 集合的概念】：
集合 A 是小于 10 的自然数组成的集合，表示方法如下：

1. 列举法： $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
2. 描述法： $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x < 10\}$

有理数集的表示方法： $Q = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$

数学中常见数集及其记法：

1. 全体非负整数组成的集合称为非负整数集（或自然数集），记作 \mathbb{N} .
2. 全体正整数组成的集合称为正整数集，记作 \mathbb{N}^* 或 \mathbb{N}_+ .
3. 全体整数组成的集合称为整数集，记作 \mathbb{Z} .
4. 全体有理数组成的集合称为有理数集，记作 \mathbb{Q} .
5. 全体实数组成的集合称为实数集，记作 \mathbb{R} .

思考有理数集的表示方法

为什么可以用下面的方法表示有理数集？

$$Q = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$$

1.2 数轴

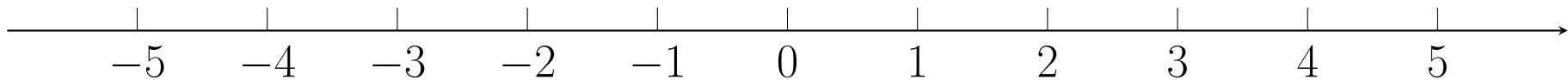
定义

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

数轴的四要素：

1. 原点
2. 正方向
3. 单位长度
4. 直线（强调三要素的只包括前三条）

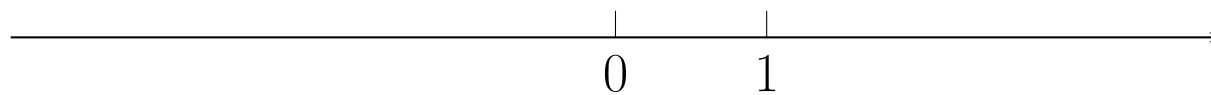
数轴示例：



定义

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

以下图形是不是一个数轴？



类比思维

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

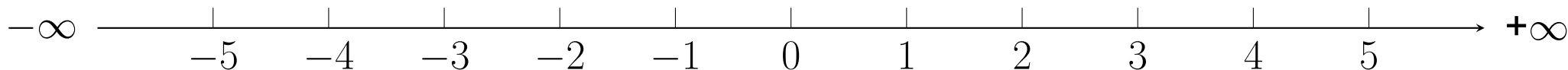


【北京师范大学四年级上册 (2013) P16】

线段：线段有两个端点，线段有一定的长度。

射线：射线有一个端点，射线可以向一个方向无限延伸。

直线：直线没有端点，直线可以向两个方向无限延伸。



实数集 \mathbb{R} 可以用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$, ∞ 读作“无穷大”, “ $-\infty$ ”读作“负无穷大”, “ $+\infty$ ”读作“正无穷大”. 【必修 A 版一册 P64】

17.2 函数图象 (平面直角坐标系)

在数学中，我们可以用一对有序实数来确定平面上点的位置。

为此，在平面上画两条原点重合、互相垂直且具有相同单位长度的数轴，这就建立了平面直角坐标系 (rectangle coordinate system)。

通常把其中水平的数轴叫做 x 轴或横轴，取向右为正方向；铅直的数轴叫做 y 轴或纵轴，取向上为正方向；两条数轴的交点 O 叫做坐标原点。

为了纪念法国数学家笛卡儿，通常称为笛卡儿直角坐标系。

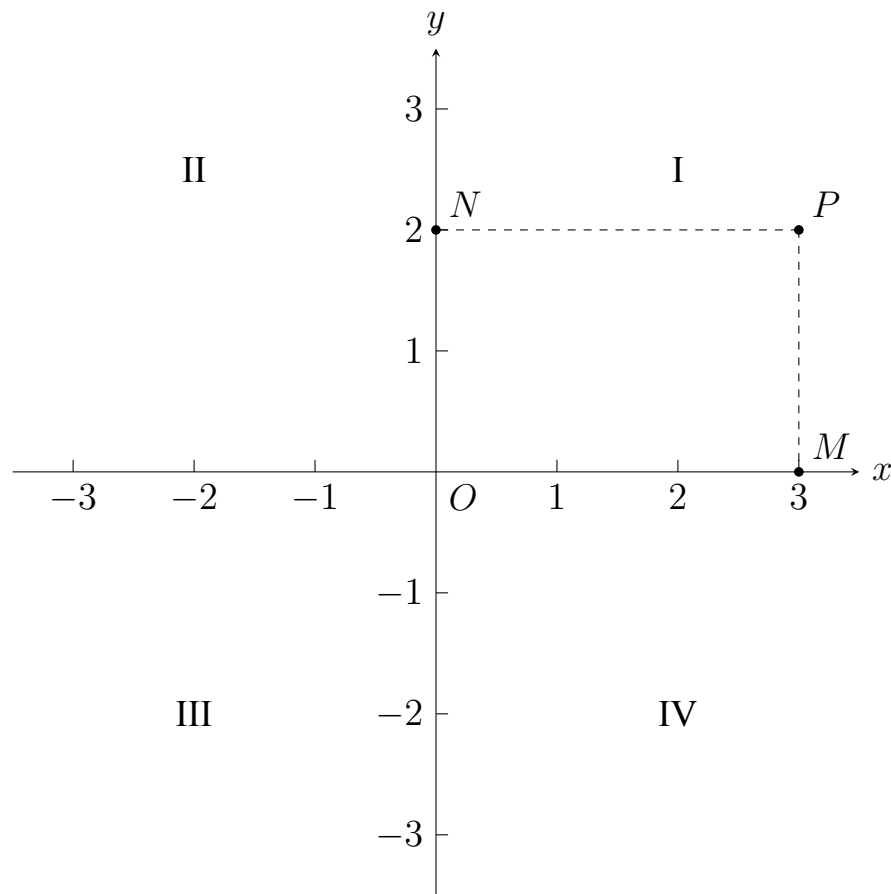


图: 17.2.2

平面直角坐标系

在平面直角坐标系中，任意一点都可以用一对有序实数来表示。例如，图 17.2.2 中的点 P ，从点 P 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足分别为点 M 和点 N 。

这时，点 M 在 x 轴上对应的数为 3，称为点 P 的横坐标 (abscissa)。点 N 在 y 轴上对应的数为 2，称为点 P 的纵坐标 (ordinate)。

依次写出点 P 的横坐标和纵坐标，得到一对有序实数 $(3, 2)$ ，称为点 P 的坐标。这时点 P 可记作 $P(3, 2)$ 。

在平面直角坐标系中，两条坐标轴把平面分成如图 17.2.2 所示的 I、II、III、IV 四个区域，分别称为第一、二、三、四象限。坐标轴上的点不属于任何一个象限。

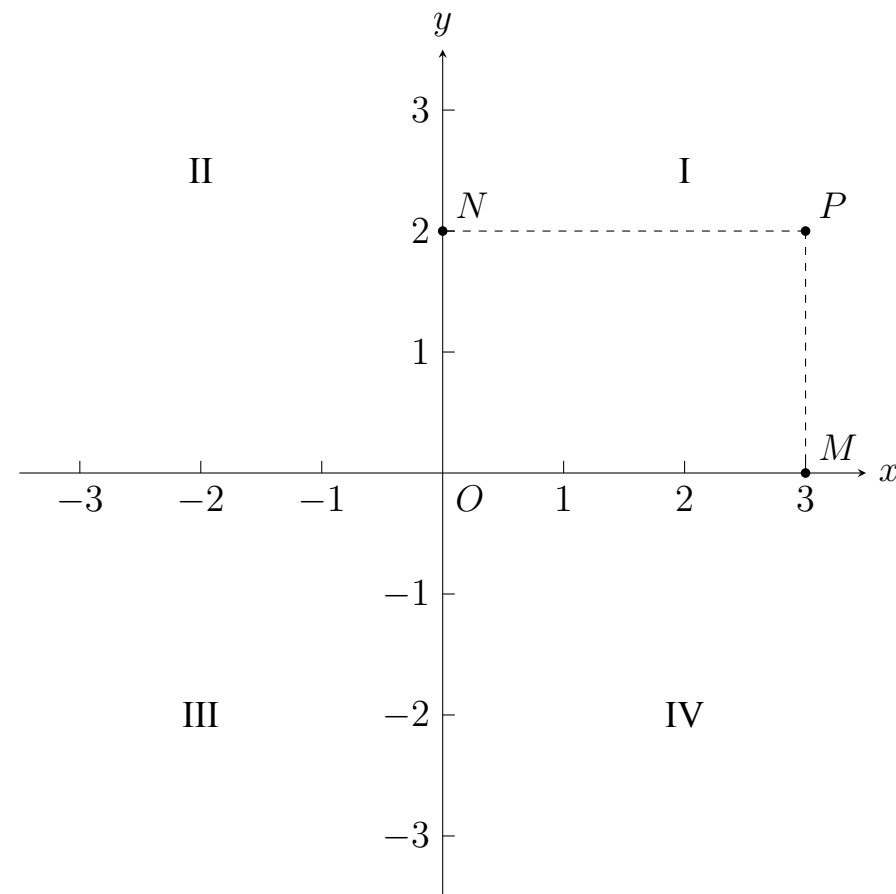


图: 17.2.2

1.3 相反数

定义

只有正负号不同的两个数称互为相反数 (opposite number)。
我们规定：0 的相反数是 0。

数学表达式: $a + b = 0$ 或: $x + y = 0$

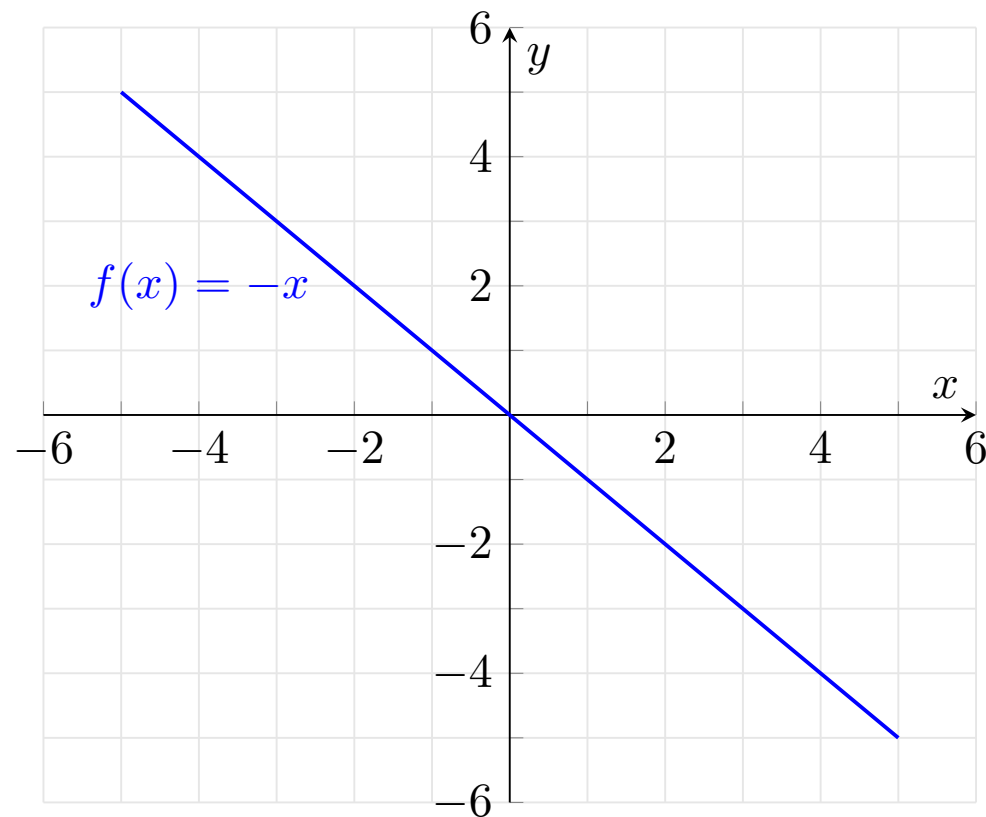
函数定义: $f(x) = -x$

定义域: $x \in \mathbb{R}$

值域: $y \in \mathbb{R}$

对称性: 关于原点中心对称

其它特征: 当 $a, b \neq 0$ 时, $a \div b = -1$



倒数的定义及函数图象

定义

乘积为 1 的两个数互为倒数。

注意：0 没有倒数。

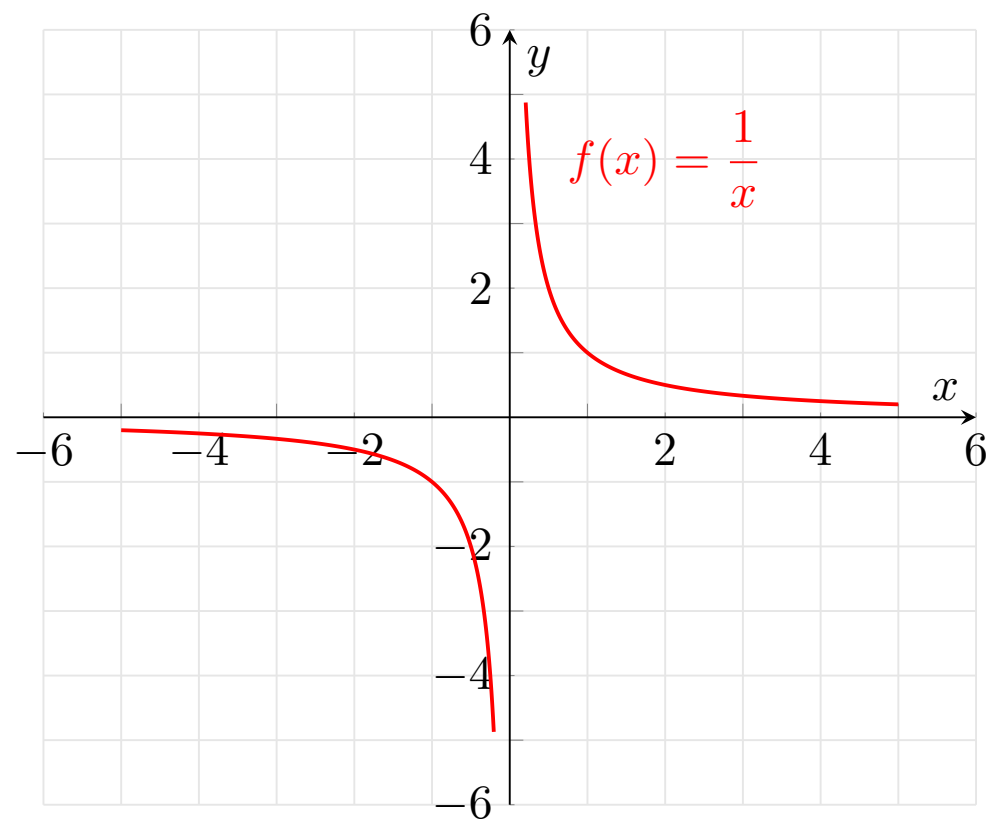
数学表达式: $a \cdot b = 1$

函数定义: $f(x) = \frac{1}{x}$

定义域: $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

值域: $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

对称性: 关于原点中心对称

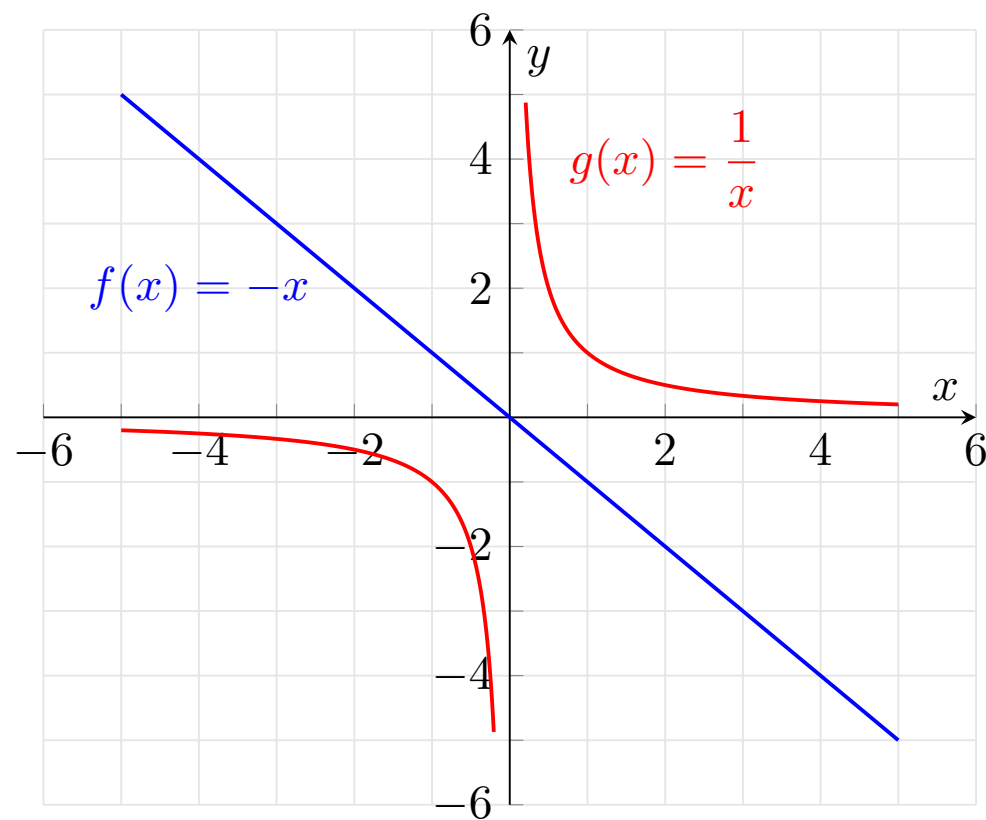


相反数与倒数的比较

相反数的表达式: $a + b = 0$

倒数的表达式: $a \cdot b = 1$

对称性: 相反数与倒数均关于原点中心对称



1.4 绝对值

定义： 我们把在数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做数 a 的绝对值, 记作 $|a|$.

1. 一个正数的绝对值是它本身;
2. 0 的绝对值是 0;
3. 一个负数的绝对值是它的相反数.

数学表达式: $|x|$

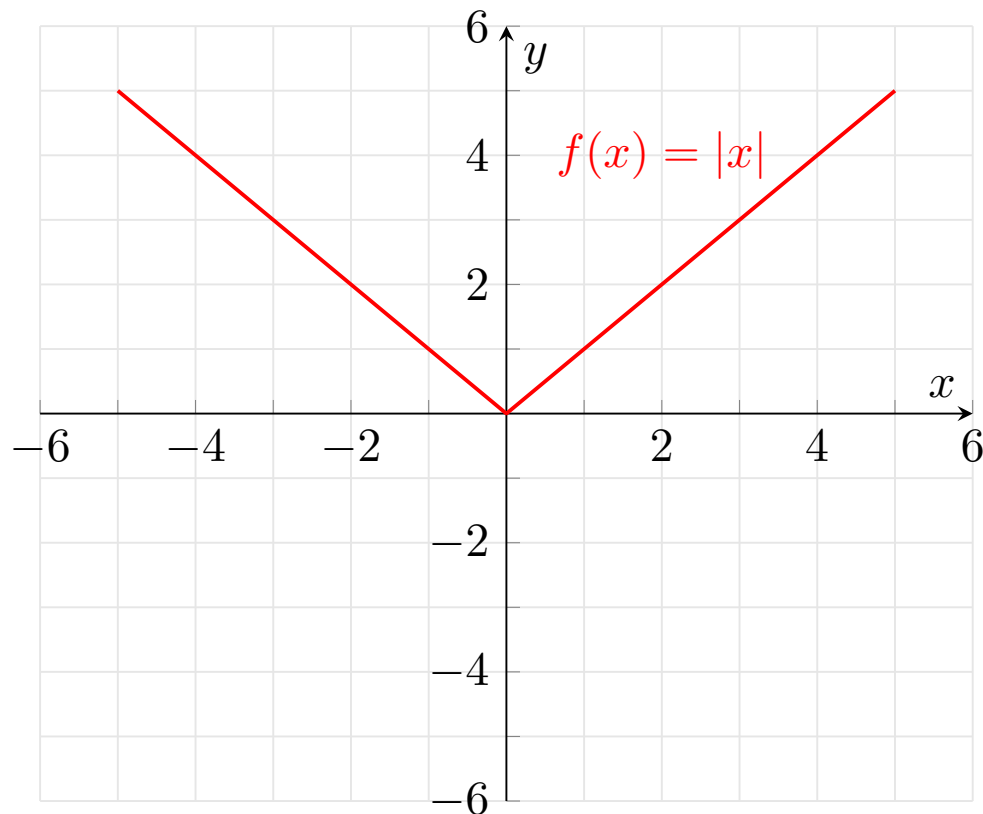
函数定义:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

定义域: $x \in \mathbb{R}$

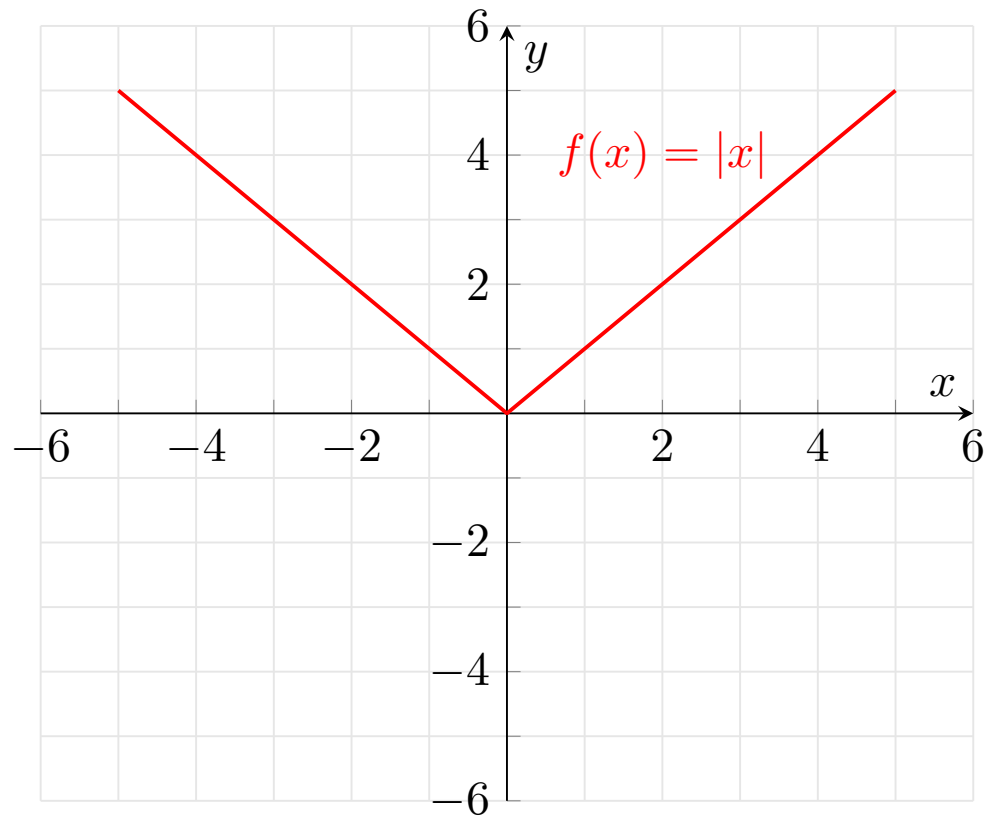
值域: $y \in \mathbb{R}, y \geq 0$

对称性: 关于 y 轴对称

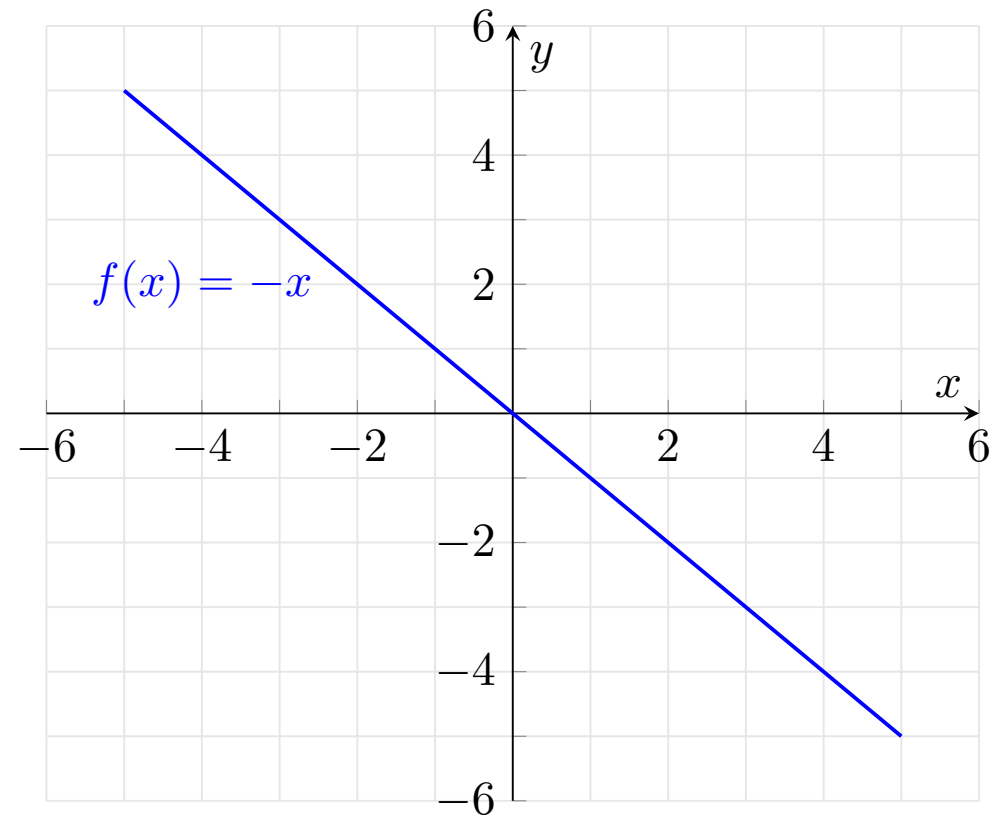


绝对值与相反数的比较

绝对值的函数图象



相反数的函数图象

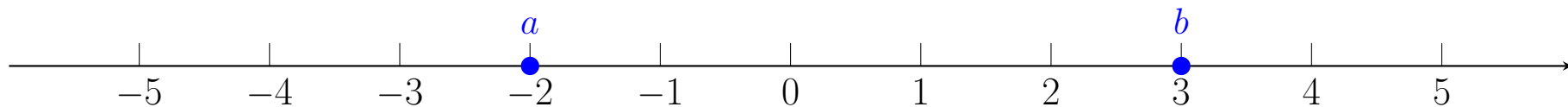


1.5 有理数的大小比较规则

1. 数轴上右边的数比左边的数大
2. 正数 > 0
3. 负数 < 0
4. 正数 $>$ 负数
5. 两个负数比较，绝对值大的反而小！
如果 $a > b > 0$ ，则： $-a < -b < 0$

数轴比较法

1. 画数轴并标出所有数



2. 从左到右（从小到大）排列

3. 结果： $a < b$

1.6 有理数的加法法则

1. 同号两数相加, 取与加数相同的正负号, 并把绝对值相加;

当 $a, b > 0$ 时,

$$(+a) + (+b) = +(a + b) = a + b$$

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

2. 绝对值不相等的异号两数相加, 取绝对值较大的加数的正负号, 并用较大的绝对值减去较小的绝对值;

当 $a > b > 0$ 时,

$$(-a) + (+b) = -(a - b)$$

$$(+a) + (-b) = +(a - b) = a - b$$

3. 互为相反数的两个数相加得 0;

$$a + (-a) = 0$$

有理数加法的运算律

1. 加法交换律：两个数相加，交换加数的位置，和不变.

$$a + b = b + a$$

2. 加法结合律：三个数相加，先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

有理数去括号与添括号规则

括号前的符号与数字前的符号存在下列关系，则：

1. 同号取正（去添括号，取正号）

$$+(+a) = +a = a$$

$$-(-a) = +a = a$$

2. 异号取负（去添括号，取负号）

$$-(+a) = -a$$

$$+(-a) = -a$$

1.7 有理数的减法

有理数的减法法则：

1. 减去一个数，等于加上这个数的相反数.

$$a - b = a + (-b)$$

$$a - (-b) = a + (+b) = a + b$$

1.8 有理数的加减混合运算

1. 加减法是一级运算，优先级最低；
2. 加法与减法互为逆运算，加法与减法带符号统一理解为加法；
3. 减一个数，等于加相反数： $a - b = a + (-b)$ 或 $a - (-b) = a + b$ ；
4. 加一个数，等于减相反数： $a + b = a - (-b)$ 或 $a + (-b) = a - b$ ；
5. 同号取正（去括号，取正号）

$$+(+a) = +a = a$$

$$-(-a) = +a = a$$

6. 异号取负（去括号，取负号）

$$-(+a) = -a$$

$$+(-a) = -a$$

7. 加法具有交换律： $a + b + c = a + c + b$ ；

1.9 有理数的乘法

有理数的乘法法则：

1. 同号得正： $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
2. 异号得负（绝对值相乘）： $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -a \cdot b$
3. 乘零得零： $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
4. 交换律： $a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = b \cdot c \cdot a$
5. 结合律： $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
6. 分配律： $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

1.9 有理数的乘法

有理数的乘法法则：

1. 同号得正： $(-a)(-b) = ab$
2. 异号得负（绝对值相乘）： $(-a)b = a(-b) = -ab$
3. 乘零得零： $a \cdot 0 = 0a = 0$
4. 交换律： $abc = acb = bca$
5. 结合律： $(ab)c = a(bc)$
6. 分配律： $a(b + c) = ab + ac$

1.10 有理数的除法

有理数的乘法法则：

1. 同号得正： $(-a) \div (-b) = a \div b = \frac{a}{b}$

2. 异号得负（绝对值相除）： $(-a) \div b = a \div (-b) = -a \div b = -\frac{a}{b}$

3. 零除得零（0 不能为除数）： $0 \div a = 0$

4. 除以一数，等于乘其倒数： $a \div b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

1.11 有理数的乘方

有理数的乘方：求几个相同乘数的积的运算，叫做乘方 (involution)。其中，

1. 乘方的结果叫做幂 (power)
2. a 叫做底数 (base number)
3. n 叫做指数 (exponent)
4. a^n 读作 a 的 n 次方
5. 也可读作 a 的 n 次幂

1.11 有理数的乘方

乘方的运算法则：

1. 乘方是第三级运算，优先级高于乘除法运算（见 P.59）
2. $a^1 = a$
3. 乘方的乘法运算： $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
4. 乘方的除法运算： $a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$
5. 乘方的乘方运算： $(a^m)^n = a^{mn}$
6. $a^0 = a^{m-m} = a^m \div a^m = 1 \quad (a \neq 0)$
7. $a^{-1} = a^{0 \div 1} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$
8. 整数的任何次幂都是整数
9. 负数的偶数次幂是正数（偶负得正），负数的奇数次幂是负数（奇负得负）
10. 乘方运算具有右结合的性质： $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

1.11 有理数的乘方

科学记数法：

1. 一个绝对值大于 10 的数可以记成 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 是正整数. 像这样的记数法叫做科学记数法. 例如:

$$8\ 000\ 000 = 8 \times 10^6$$

2. 一个绝对值小于 1 的数可以记成 $a \times 10^{-n}$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 是正整数. 像这样的记数法也叫做科学记数法. 例如:

$$0.000\ 008 = 8 \times 10^{-6}$$

1.12 有理数的混合运算

有理数的混合运算：

1. 加法和减法叫做第一级运算，互为逆运算
2. 乘法和除法叫做第二级运算，互为逆运算
3. 乘方、开方和对数叫做第三级运算，开方是乘方求底数的逆运算，对数是乘方求指数的逆运算

运算的优先级：

1. 先做乘方，再做乘除，最后做加减；
2. 同级运算，按照从左至右的顺序进行；
3. 如果有括号，就先算小括号里的，再算中括号里的，然后算大括号里的

1.13 近似数

近似数：

1. 与实际值非常接近的数，称为近似数 (approximate number)。例如：

$$\pi = 3.141\ 592 \dots$$

2. 只取整数，精确到个位数：应用四舍五入法，应为 3

3. 只取 1 位小数，精确到十分位（或精确到 0.1）：应为 3.1

4. 只取 2 位小数，精确到百分位（或精确到 0.01）：应为 3.14

5. 光在真空中的传播速度： $c = 299\ 792\ 458 m/s$

6. 用科学记数法，只取整数： $c = 3 \times 10^8 m/s$

7. 用科学记数法，保留 1 位小数： $c = 3.0 \times 10^8 m/s$

8. 用科学记数法，保留 5 位小数： $c = 2.99792 \times 10^8 m/s$

9. 注意：四舍五入的位置必须为精确位数的向下一位。

第一章小结

负数的性质：假设 $a > b > 0$,

1. 负数小于零： $-a = 0 - a < 0$

2. 负数小于正数： $-a < b < a$

3. 绝对值大的负数反而小： $-a < -b < 0 < b < a$

4. 负数的绝对值等于相反数 $|-a| = a$

5. 相反数之和为零

$$a + (-a) = 0$$

$$(-a) + a = 0$$

6. 相反数之商为-1（除数不为零）

$$a \div (-a) = -1$$

$$(-a) \div a = -1$$

第一章小结

有理数的加法法则：假设 $a > b > 0$,

1. 同号相加取其号, 绝对值作加法

$$(+a) + (+b) = +(a + b) = a + b$$

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

2. 异号相加取绝对值大的号, 绝对值大减小

$$(-a) + (+b) = -(a - b)$$

$$(+a) + (-b) = +(a - b) = a - b$$

3. 相反数之和为零

$$a + (-a) = 0$$

4. 加零和不变

$$a + 0 = a$$

有理数的加法法则：

1. 加法交换律：换位相加和不变

$$a + b = b + a$$

2. 加法结合律：先加后加和不变

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

有理数的减法法则：

1. 减去一个数，等于加其相反数

$$a - b = a + (-b)$$

$$a - (-b) = a + (+b) = a + b$$

第一章小结

增减括号法则：

1. 偶负取正号（正号可省略）

$$+(+a) = +a = a$$

$$-(-a) = +a = a$$

2. 奇负取负号

$$-(+a) = -a$$

$$+(-a) = -a$$

$$-[-(-a)] = -a$$

第一章小结

有理数的乘法法则：

1. 偶负得正：

$$(-a)(-b) = ab$$

$$(-a)(-b)(-c)(-d) = abcd$$

2. 奇负得负（绝对值相乘）：

$$(-a)b = a(-b) = -ab$$

$$(-a)(-b)(-c) = -abc$$

3. 乘零得零： $a \cdot 0 = 0a = 0$

4. 交换律： $abc = acb = bca = cab$

5. 结合律： $(ab)c = a(bc)$

6. 分配律： $a(b + c) = ab + ac$

第一章小结

有理数的除法法则：假设除数不为零，

1. 偶负得正： $(-a) \div (-b) = a \div b = \frac{a}{b}$

2. 奇负得负（绝对值相除）： $(-a) \div b = a \div (-b) = -a \div b = -\frac{a}{b}$

$$(-a) \div (-b) \div (-c) = -a \div (bc) = -\frac{a}{bc}$$

3. 零除得零（0 不能为除数）： $0 \div a = 0$

4. 除以一数，等于乘其倒数： $a \div b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

$$a \div \frac{1}{b} = a \cdot b = ab$$

$$a \div \frac{n}{m} = a \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{n}$$

$$\frac{b}{a} \div \frac{n}{m} = \frac{b}{a} \cdot \frac{m}{n} = \frac{bm}{an}$$

第一章小结

有理数的乘方：求几个相同乘数的积的运算，叫做乘方 (involution)。其中，

1. 乘方的结果叫做幂 (power)
2. a 叫做底数 (base number)
3. n 叫做指数 (exponent)
4. a^n 读作 a 的 n 次方
5. 也可读作 a 的 n 次幂

第一章小结

乘方的运算法则：

1. 乘方是第三级运算，优先级高于乘除法运算（见 P.59）
2. $a^1 = a$
3. 乘方的乘法运算： $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
4. 乘方的除法运算： $a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$
5. 乘方的乘方运算： $(a^m)^n = a^{mn}$
6. $a^0 = a^{m-m} = a^m \div a^m = 1 \quad (a \neq 0)$
7. $a^{-1} = a^{0 \div 1} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$
8. 整数的任何次幂都是整数
9. 负数的偶数次幂是正数（偶负得正），负数的奇数次幂是负数（奇负得负）
10. 乘方运算具有右结合的性质： $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

第一章小结

有理数的混合运算：

1. 加法和减法叫做第一级运算，互为逆运算
2. 乘法和除法叫做第二级运算，互为逆运算
3. 乘方、开方和对数叫做第三级运算，开方是乘方求底数的逆运算，对数是乘方求指数的逆运算

运算的优先级：

1. 先做乘方，再做乘除，最后做加减；
2. 同级运算，按照从左至右的顺序进行；
3. 如果有括号，就先算小括号里的，再算中括号里的，然后算大括号里的

第一章小结

近似数：

1. 与实际值非常接近的数，称为近似数 (approximate number)。例如：

$$\pi = 3.141\ 592 \dots$$

2. 只取整数，精确到个位数：应用四舍五入法，应为 3

3. 只取 1 位小数，精确到十分位（或精确到 0.1）：应为 3.1

4. 只取 2 位小数，精确到百分位（或精确到 0.01）：应为 3.14

5. 光在真空中的传播速度： $c = 299\ 792\ 458 m/s$

6. 用科学记数法，只取整数： $c = 3 \times 10^8 m/s$

7. 用科学记数法，保留 1 位小数： $c = 3.0 \times 10^8 m/s$

8. 用科学记数法，保留 5 位小数： $c = 2.99792 \times 10^8 m/s$

9. 注意：四舍五入的位置必须为精确位数的向下一位。

第一章小结

自然语言与数学语言的比较：

(a) 自然语言：- 3 与 0.3 的和乘以 2 的倒数 (P.78)

(b) 数学语言： $(-3 + 0.3) \times \frac{1}{2} = -2.7 \times \frac{1}{2} = -\frac{27}{20} = -1.35$

(c) 自然语言：- 3 与 0.3 的和乘以 2 的积的倒数

(d) 数学语言： $\frac{1}{(-3 + 0.3) \times 2} = \frac{1}{-5.4} = -\frac{10}{54} = -\frac{5}{27}$

检查方法

常用检查方法：

1. 检查符号，包括中间过程的符号。牢记：
 - a. 同号相加取其号，绝对值作加法
 - b. 异号相加取绝对值大的号，绝对值大减小。
 - c. 绝对值大的负数反而小。
 - d. 乘除法或增减括号：奇负得负，偶负得正。
2. 检查个位数
3. 检查总位数
4. 检查进借位