一元一次方程

丁保华

致慧星空工作室

2025 年 6 月 22 日

方程的定义

方程的定义：

含有未知数的等式叫做方程。

例如：

$$2x + 3 = 7$$

其中 x 是未知数，这个等式就构成了一个方程。

一元一次方程的定义

一元一次方程的定义：

在一个方程中，只含有一个未知数（元），并且未知数的指数都是 1（次），这样的方程叫做一元一次方程。

例如：

$$3x - 5 = 10 \text{ 是一元一次方程}$$

因为只含有一个未知数 x，且未知数 x 的次数为 1。

补充说明：

一般用x、y、z表示未知数，用a、b、c表示常数。

拓展提问

提问：

1. 什么是二元一次方程？试举例说明。

拓展提问

提问：

1. 什么是二元一次方程？试举例说明。
2. 什么是三元一次方程？试举例说明。

拓展提问

提问：

1. 什么是二元一次方程？试举例说明。
2. 什么是三元一次方程？试举例说明。
3. 什么是一元二次方程？试举例说明。

拓展提问

提问：

1. 什么是二元一次方程？试举例说明。
2. 什么是三元一次方程？试举例说明。
3. 什么是一元二次方程？试举例说明。
4. 什么是一元三次方程？试举例说明。

拓展提问

提问：

1. 什么是二元一次方程？试举例说明。
2. 什么是三元一次方程？试举例说明。
3. 什么是一元二次方程？试举例说明。
4. 什么是一元三次方程？试举例说明。
5. 什么是二元二次方程？试举例说明。

等式的基本性质

见：《七年级下册》5.2 解一元一次方程 P6。

性质 1： 等式两边同时加上（或减去）同一个数或同一个整式，所得结果仍然是等式。

$$\text{如果有}\quad a=b,\quad \text{则：}$$
$$a+c=b+c$$
$$a-c=b-c$$

性质 2： 等式两边同时乘以或除以同一个数 (除数不为 0)，所得结果仍然是等式。

$$\text{如果有}\quad a=b,\quad \text{则：}$$
$$ac=bc$$
$$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}\quad (c\neq 0)$$

思考：为什么性质 2 只强调同一个数?

方程的变形规则

见：《七年级下册》5.2 解一元一次方程 P7。
由等式的基本性质，可以得到方程的变形规则。

1. 方程两边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，方程的解不变。
2. 方程两边都乘以 (都或除以)同一个不为 0 的数，方程的解不变。

方程变形规则的应用：

1. 利用变形规则 1, 将方程中的某些项改变符号后, 从方程的一边移到另一边。像这样的变形叫做移项 (transposition)。
   如：$x+3=5$，方程两边都减去 3，得 $x=5-3 \Rightarrow x=2$
2. 利用变形规则 2, 将方程的两边都除以未知数的系数. 像这样的变形通常称作“将未知数的系数化为 1”，简称“简化系数”。
   如：$3x=15$，方程的两边都除以 3，得 $x=15 \div 3 \Rightarrow x=5$

思考：为什么变形规则 2 只强调同一个不为 0 的数?

方程的解

能使方程左、右两边的值相等的未知数的值, 叫做方程的解 (solution).

例如 $x = 2$ 是方程 $x + 3 = 5$ 的解, 它能使得方程的左、右两边的值相等 (都等于 5) .
当方程中只有一个未知数时, 方程的解也叫做方程的根 (root).
这些性质是解方程的基础。通过运用这些性质，我们可以对一元一次方程进行变形，从而求出未知数的值，即解方程。

例如，对于方程

$$2x + 4 = 10$$

我们可以先移项，即：利用性质 1，两边同时减去 4(也就是将 4 移项到方程的右边)，得到

$$2x = 6$$

再简化系数，即：利用性质 2，两边同时除以 2，得到

$$x = 3$$

这就是方程的解。

解方程的步骤

解方程的步骤一般为：

1. 移项
2. 合并同类项
3. 简化系数

移项的定义与示例

把方程中的某些项改变符号后，从方程的一边移到另一边，这种变形叫做移项。

1. 常数移项：$x+3=5$
   将常数项 3 从方程的左边移项到方程的右边，得：$x=5-3 \Rightarrow x=2$
2. 未知数移项：$3x=2x+5$
   将含有未知数的整式项 $2x$ 从方程的右边移项到方程的左边，得：
   $3x-2x=5 \Rightarrow x=5$
3. 同时移项：$3x-5=2x+10$
   首先，将含有未知数的整式项移到左边，常数项移到右边。
   把 $2x$ 移到左边变为 $-2x$，把 -5 移到右边变为 $+5$。
   方程变为：$3x-2x=10+5$。
   然后合并同类项，左边变为 x，右边变为 15，得到方程的解：$x=15$。
4. 左右交换位置：$10=x+5$
   $x+5=10 \Rightarrow x=10-5 \Rightarrow x=5$

简化系数的定义与示例

将方程两边同时除以未知数的系数，使未知数的系数变为 1，从而得到方程的解。

1. 整数系数的简化

   求方程 $4x = 20$ 的解。

   分析：方程两边同时除以 4，得到方程左边得到 x，即简化系数为 1。

   解：

简化系数的定义与示例

将方程两边同时除以未知数的系数，使未知数的系数变为 1，从而得到方程的解。

1. 整数系数的简化

   求方程 $4x = 20$ 的解。

   分析：方程两边同时除以 4，得到方程左边得到 x，即简化系数为 1。

   解：

$$x = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

2. 分数系数的简化

   求方程 $\frac{1}{4}x = 5$ 的解。

   分析：方程两边同时乘以 4，得到方程左边得到 x，即简化系数为 1。

   解：

简化系数的定义与示例

将方程两边同时除以未知数的系数，使未知数的系数变为 1，从而得到方程的解。

1. 整数系数的简化

   求方程 $4x = 20$ 的解。
   分析：方程两边同时除以 4，得到方程左边得到 x，即简化系数为 1。
   解：

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{20}{4} \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

2. 分数系数的简化

   求方程 $\frac{1}{4}x = 5$ 的解。
   分析：方程两边同时乘以 4，得到方程左边得到 x，即简化系数为 1。
   解：

$$
\begin{aligned}
x &= 5 \times 4 \\
x &= 20
\end{aligned}
$$

行程问题及其示例

涉及路程、速度和时间的关系，通常有相遇问题、追及问题等。

甲、乙两人分别从相距 90 千米的 A、B 两地骑行出发，相向而行。甲的速度是 12 千米/时，乙的速度是 18 千米/时。甲从 A 地出发骑行了 2.5 小时之后，乙从 B 地骑行出发，乙出发后经过多少小时两人相遇?

解：

行程问题及其示例

涉及路程、速度和时间的关系，通常有相遇问题、追及问题等。
甲、乙两人分别从相距 90 千米的 A、B 两地骑行出发，相向而行。甲的速度是 12 千米/时，乙的速度是 18 千米/时。甲从 A 地出发骑行了 2.5 小时之后，乙从 B 地骑行出发，乙出发后经过多少小时两人相遇?

解：
设经过 x 小时两人相遇。根据路程 = 速度 × 时间，甲先骑行了 $12 \times 2.5 = 30$ 千米，然后，甲又骑行了 $12x$ 千米，乙骑行了 $18x$ 千米。所以：

$$
\begin{aligned}
12 \times 2.5 + 12x + 18x &= 90 \\
30 + 30x &= 90 \\
30x = 90 - 30 &= 60 \\
x &= 60 \div 30 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

答：已出发后经过 2 小时，两人相遇。

工程问题及其示例

涉及工作总量、工作效率和工作时间的关系，通常假设工作总量为单位“1”。

小亮和老师一起整理了一篇教学材料, 准备录入成电子稿. 按篇幅估计, 老师单独录入需 4 h 完成, 小亮单独录入需 6 h 完成. 小亮先录入了 1h 后, 老师开始一起录入, 问: 还需要多少小时完成?

解:

工程问题及其示例

涉及工作总量、工作效率和工作时间的关系，通常假设工作总量为单位“1”。
小亮和老师一起整理了一篇教学材料, 准备录入成电子稿. 按篇幅估计, 老师单独录入需 4 h 完成, 小亮单独录入需 6 h 完成. 小亮先录入了 1h 后, 老师开始一起录入, 问: 还需要多少小时完成?

解:

设总工作量为 1，则小亮每小时工作量为：$\frac{1}{6}$，老师每小时工作量为：$\frac{1}{4}$

设还需要 x 小时可以完成，则：

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}x=1,$$

$$2+3x+2x=12 \quad \Rightarrow \quad 5x=10,$$

$$x=2$$

答：还需要 2 小时能够完成。

涉及成本、售价、利润、利润率等经济指标之间的关系。
学校准备添置一批课桌椅, 原订购 60 套, 每套 200 元. 店方表示: 如果多购买, 可以优惠. 结果校方购买了 72 套, 每套减价 6 元, 而商店获得同样多的利润. 求每套课桌椅的成本.

解: 设每套桌椅的成本为 x 元, 则:

经济问题及其示例

涉及成本、售价、利润、利润率等经济指标之间的关系。

学校准备添置一批课桌椅, 原订购 60 套, 每套 200 元. 店方表示: 如果多购买, 可以优惠. 结果校方购买了 72 套, 每套减价 6 元, 而商店获得同样多的利润. 求每套课桌椅的成本.

解：设每套桌椅的成本为 x 元，则：

$$
\begin{aligned}
60(200-x) &= 72(200-6-x) \\
5(200-x) &= 6(200-6-x) \\
1000-5x &= 1200-36-6x \\
x &= 1200-1000-36 = 200-36 = 164
\end{aligned}
$$

答：每套桌椅的成本为 164 元。

浓度问题及其示例

涉及溶液的浓度、溶质质量、溶液质量之间的关系。通常已知不同浓度的溶液混合后的浓度，求某种溶液的质量或浓度等。

题型知识说明：

1. 溶液质量 = 溶质质量 + 溶剂质量
2. 浓度 = 溶质质量 ÷ 溶液质量 × 100%
3. 溶质质量 = 溶液质量 × 浓度
4. 溶液质量 = 溶质质量 ÷ 浓度
5. 溶剂质量 = 溶液质量 − 溶质质量 = 溶液质量 × (100% − 浓度)

浓度问题及其示例

例题：有一个 20 克的盐水溶液，浓度为 15%。现在向其中加入一定量的水后，溶液的浓度变为 10%。问加入了多少克水?

解：设加入了 x 克水，则：

浓度问题及其示例

例题：有一个 20 克的盐水溶液，浓度为 15%。现在向其中加入一定量的水后，溶液的浓度变为 10%。问加入了多少克水?

解：设加入了 x 克水，则：

$$(20 + x) \times 10\% = 20 \times 15\% \tag{1}$$
$$2 + 0.1x = 3 \tag{2}$$
$$0.1x = 3 - 2 = 1 \tag{3}$$
$$x = 10 \tag{4}$$

答：加入了 10 克水。

总结

本章我们学习了：

1. 方程的定义、方程的解
2. 一元一次方程的定义
3. 等式的基本性质
4. 方程的变形规则：移项和简化系数
5. 方程的求解方法
6. 一元一次方程在行程、工程、经济、浓度等问题中的应用。

希望大家能够熟练掌握这些知识，并将一元一次方程及其求解的知识应用到解决实际生活中的问题。