数学课程的总目标

通过义务教育阶段的数学学习，学生逐步：

1. **会用数学的眼光观察现实世界；**

2. **会用数学的思维思考现实世界；**

3. **会用数学的语言表达现实世界。**

（简称“三会”）。

数学考试丢分的四大原因

1. **知识点不透彻；**

2. **题型不熟练；**

3. **计算不准确；**

4. **计算速度慢。**

（简称“四因”）。

学好数学的五个步骤

1. 发现个案（发现有趣的个案）；

2. 类似案例（寻找类似的案例）；

3. 总结规律（找到一般的规律：从特殊到一般）；

4. 定义证明（给出定义或证明）。

5. 实际应用（应用到实践中去：从一般到特殊）。

简称“五步骤”，第一步到第三步：大胆假设；第四步：小心求证；第五步：放心应用。

1.1 有理数的引入

定义

**正整数、0 和负整数统称为整数 (integer)，正分数和负分数统称为分数 (fraction).
整数和分数统称为有理数 (rational number).**

$$
\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ 0\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}
\qquad
\text{小数}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限小数}\begin{cases}\text{无限循环小数}\\ \text{无限不循环小数}\end{cases}\end{cases}
$$

0 既不是正数，也不是负数，是正数与负数的分界点。
有限小数和无限循环小数是分数，无限不循环小数不是分数。
思考：无限不循环小数是什么数?

小数如何转化为分数

有限小数如何转化为分数:

$$0.245 = \frac{245}{1000} = \frac{49}{200}$$

无限循环小数如何转化为分数?【华东师范大学七年级上册（2024）P73】

$$1000 \times 0.\dot{2}4\dot{5} = 245.\dot{2}4\dot{5} = 245 + 0.\dot{2}4\dot{5}$$

$$999 \times 0.\dot{2}4\dot{5} = 245$$

$$0.\dot{2}4\dot{5} = \frac{245}{999}$$

数集与有理数集

数集的表示方法【数学 A 版必修第一册 1.1 集合的概念】:
集合 A 是小于 10 的自然数组成的集合，表示方法如下:
1. 列举法: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
2. 描述法: $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x < 10\}$

有理数集的表示方法: $Q = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$

数学中常见数集及其记法:
1. 全体非负整数组成的集合称为非负整数集（或自然数集），记作 $\mathbb{N}$.
2. 全体正整数组成的集合称为正整数集，记作 $\mathbb{N}^*$ 或 $\mathbb{N}_+$.
3. 全体整数组成的集合称为整数集，记作 $\mathbb{Z}$.
4. 全体有理数组成的集合称为有理数集，记作 $\mathbb{Q}$.
5. 全体实数组成的集合称为实数集，记作 $\mathbb{R}$.

思考有理数集的表示方法

为什么可以用下面的方法表示有理数集?

$$Q = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$$

1.2 数轴

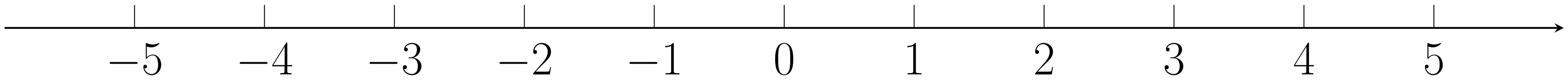
定义

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

数轴的四要素:

1. 原点
2. 正方向
3. 单位长度
4. 直线（强调三要素的只包括前三条）

数轴示例:

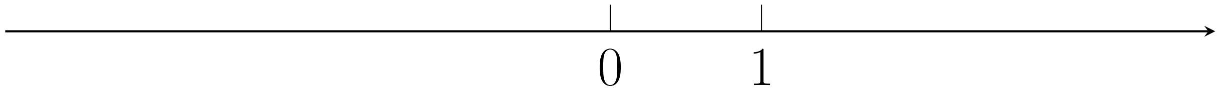


最简数轴

定义

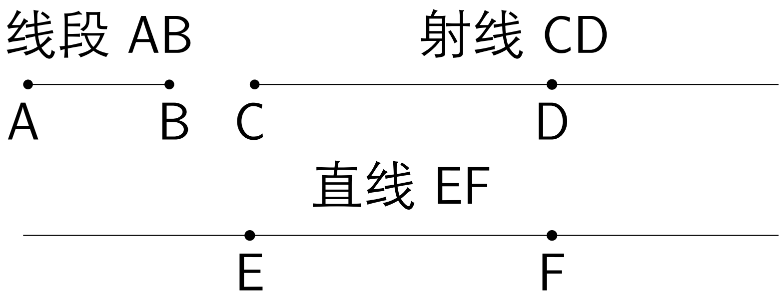
规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

以下图形是不是一个数轴?



类比思维

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

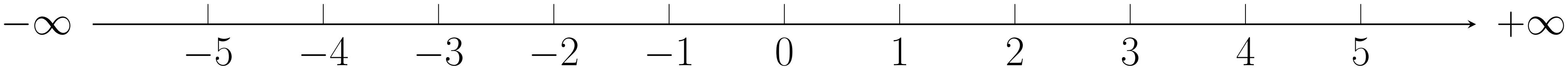


【北京师范大学四年级上册（2013）P16】

线段：线段有两个端点，线段有一定的长度。

射线：射线有一个端点，射线可以向一个方向无限延伸。

直线：直线没有端点，直线可以向两个方向无限延伸。



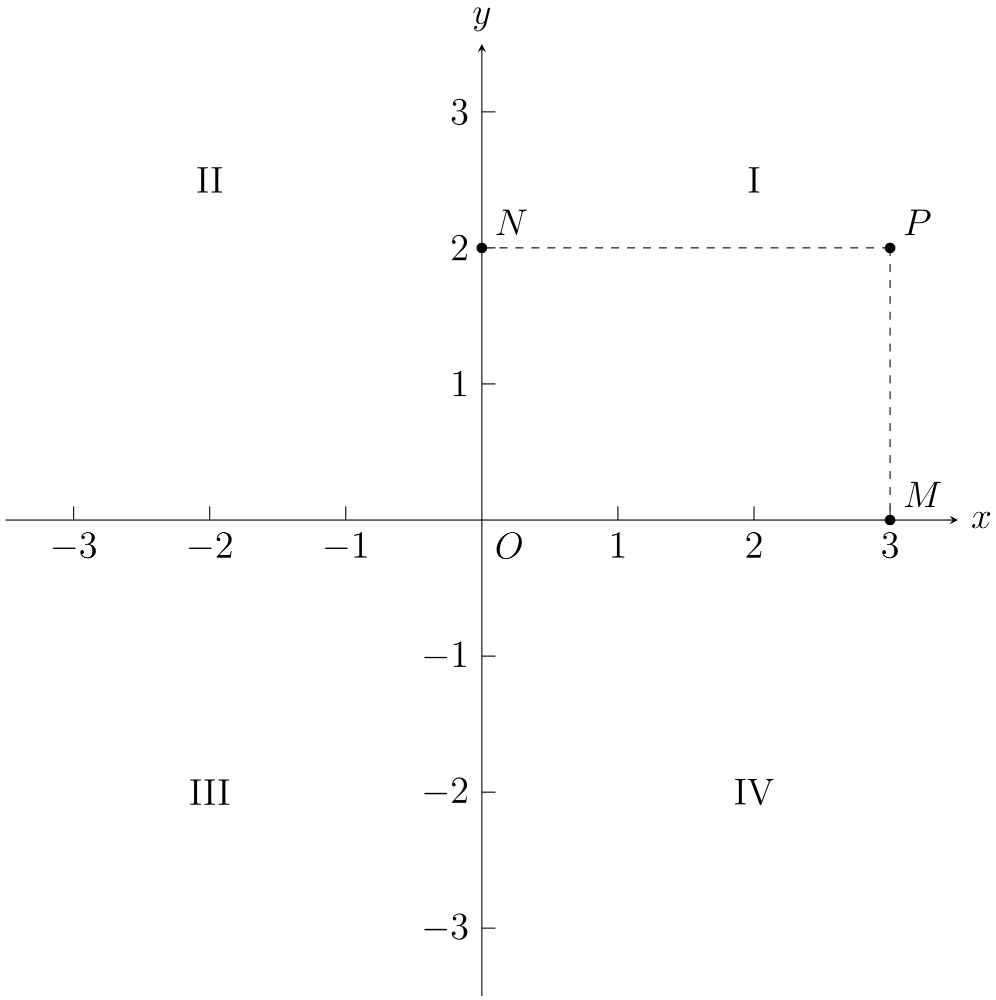
实数集 $\mathbb{R}$ 可以用区间表示为 $(-\infty,+\infty)$，∞ 读作“无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”，“$+\infty$”读作“正无穷大”.【必修 A 版一册 P64】

在数学中，我们可以用一对有序实数来确定平面上点的位置。

为此，在平面上画两条原点重合、互相垂直且具有相同单位长度的数轴，这就建立了平面直角坐标系 (rectangle coordinate system)。

通常把其中水平的数轴叫做 x 轴或横轴，取向右为正方向；铅直的数轴叫做 y 轴或纵轴，取向上为正方向；两条数轴的交点 O 叫做坐标原点。

为了纪念法国数学家笛卡儿，通常称为笛卡儿直角坐标系。



图：17.2.2

平面直角坐标系

在平面直角坐标系中，任意一点都可以用一对有序实数来表示。例如，图 **17.2.2** 中的点 P，从点 P 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足分别为点 M 和点 N。

这时，点 **M** 在 x 轴上对应的数为 **3**，**称为点 P 的横坐标 (abscissa)**。点 N 在 y 轴上对应的数为 **2**，**称为点 P 的纵坐标 (ordinate)**。

依次写出点 P 的横坐标和纵坐标，得到一对有序实数 **(3, 2)**，称为点 P 的坐标。这时点 P 可记作 $P(3, 2)$。

在平面直角坐标系中，两条坐标轴把平面分成如图 **17.2.2** 所示的 **I**、**II**、**III**、**IV** 四个区域，**分别称为第一、二、三、四象限。坐标轴上的点不属于任何一个象限。**

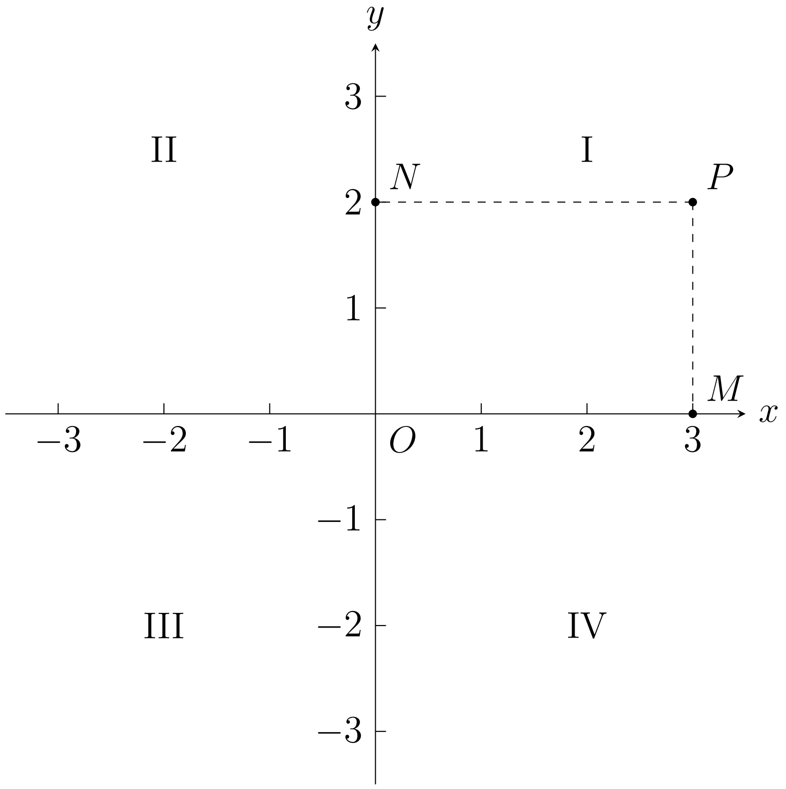


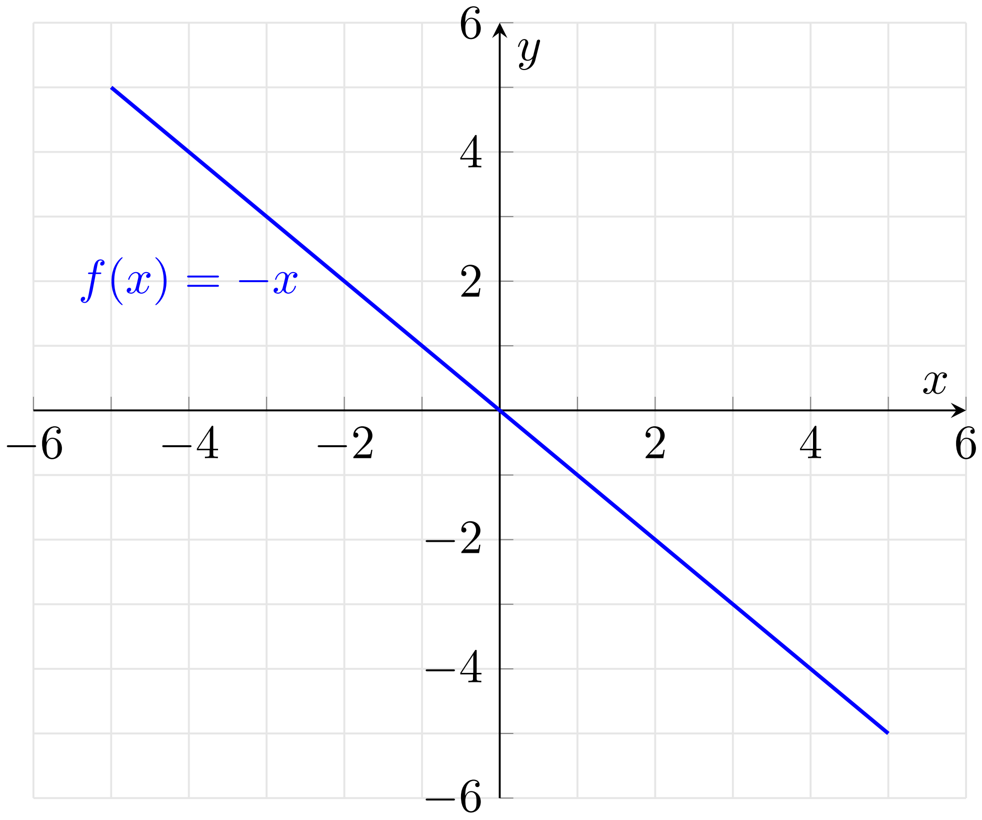
图: 17.2.2

1.3 相反数

定义

只有正负号不同的两个数称互为相反数 (opposite number)。
我们规定：0 的相反数是 0 .

数学表达式: $a + b = 0$
函数定义: $f(x) = -x$
定义域: $x \in \mathbb{R}$
值域: $y \in \mathbb{R}$
对称性: 关于原点中心对称



倒数的定义及函数图象

定义

乘积为 1 的两个数互为倒数。
注意：0 没有倒数。

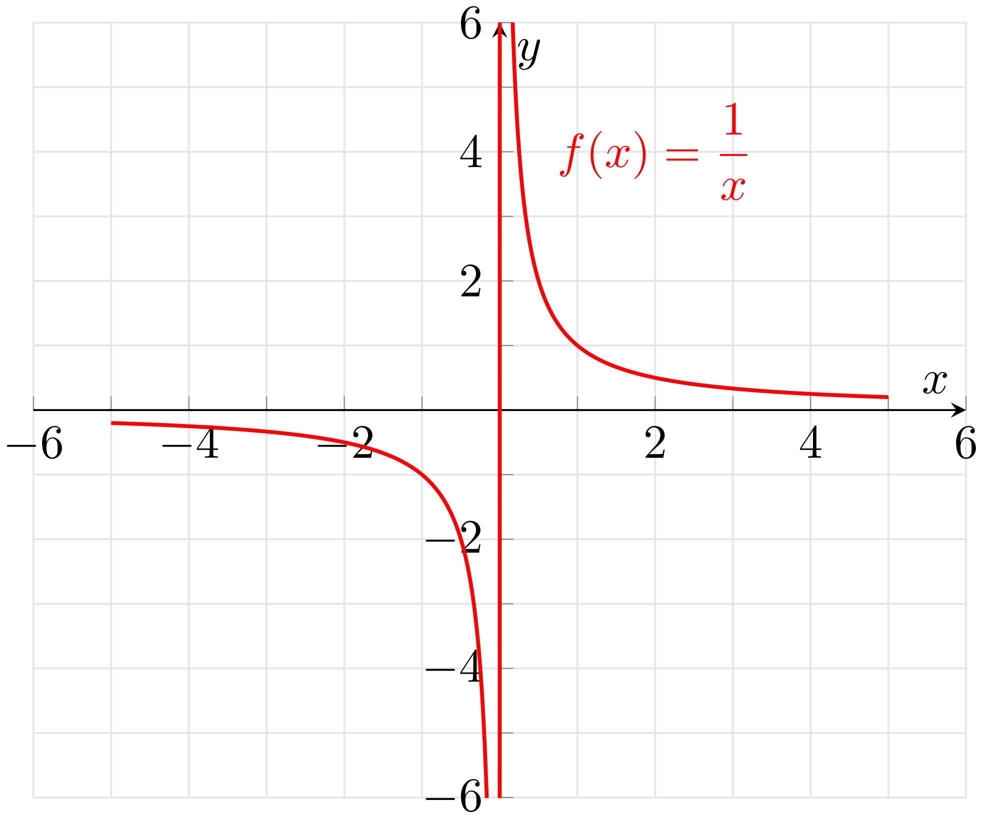
数学表达式: $a \cdot b = 1$

函数定义: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

定义域: $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

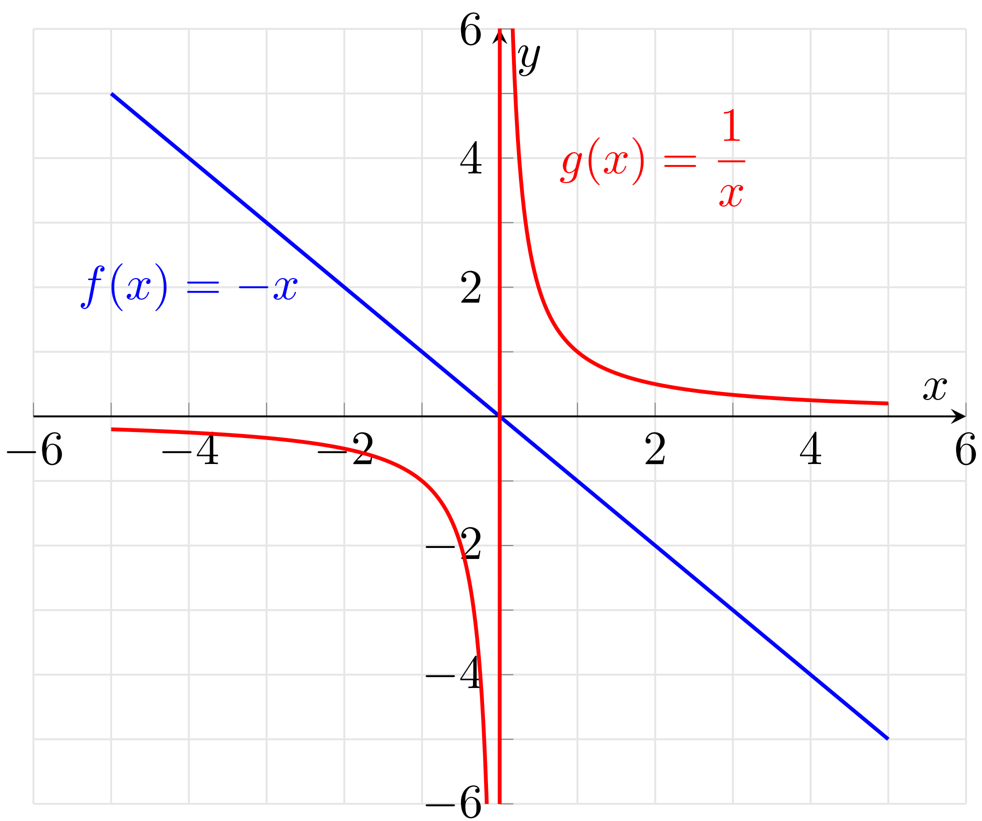
值域: $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

对称性: 关于原点中心对称



相反数与倒数的比较

相反数的表达式: $a + b = 0$
倒数的表达式: $a \cdot b = 1$
对称性: 相反数与倒数均关于原点中心对称



1.4 绝对值

定义：我们把在数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做数 a 的绝对值，记作 $|a|$.

1. 一个正数的绝对值是它本身;
2. 0 的绝对值是 0;
3. 一个负数的绝对值是它的相反数.

数学表达式: $|x|$

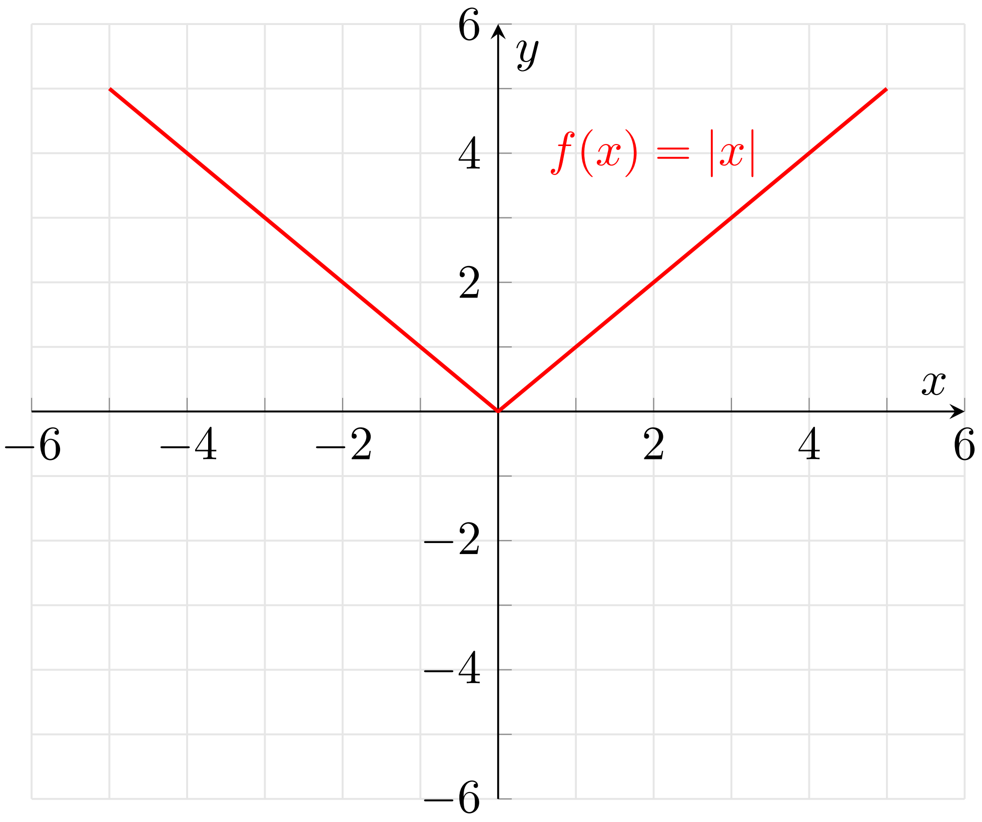
函数定义:

$$f(x) = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

定义域: $x \in \mathbb{R}$

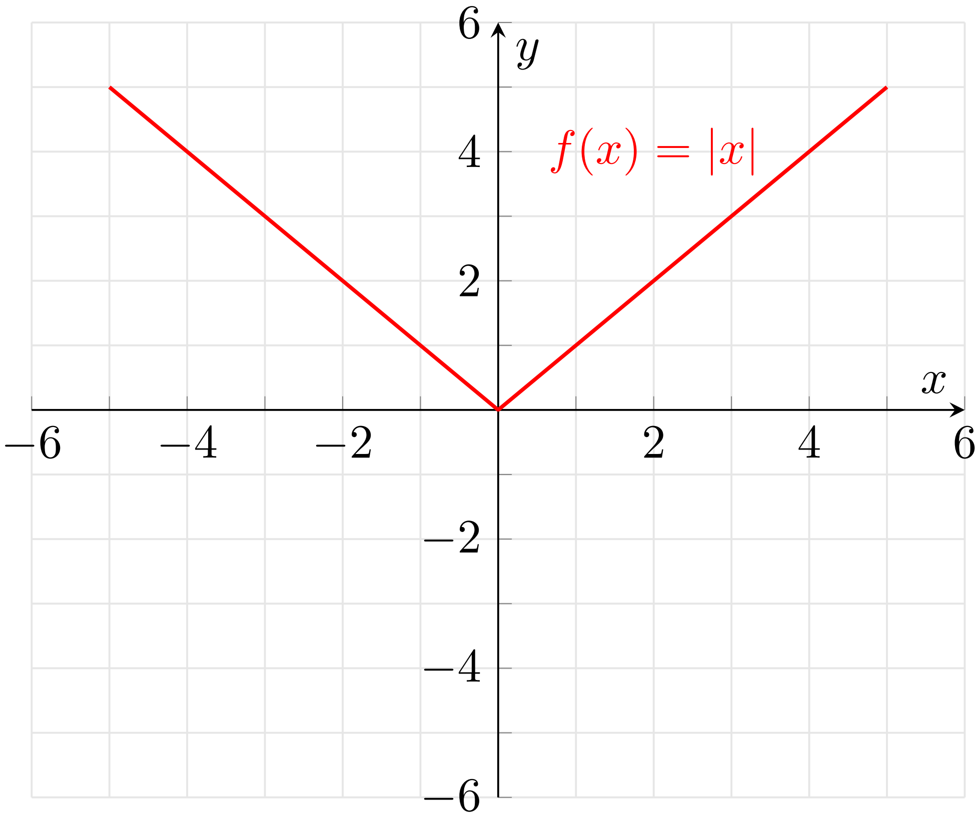
值域: $y \in \mathbb{R}, y \geq 0$

对称性: 关于 y 轴对称

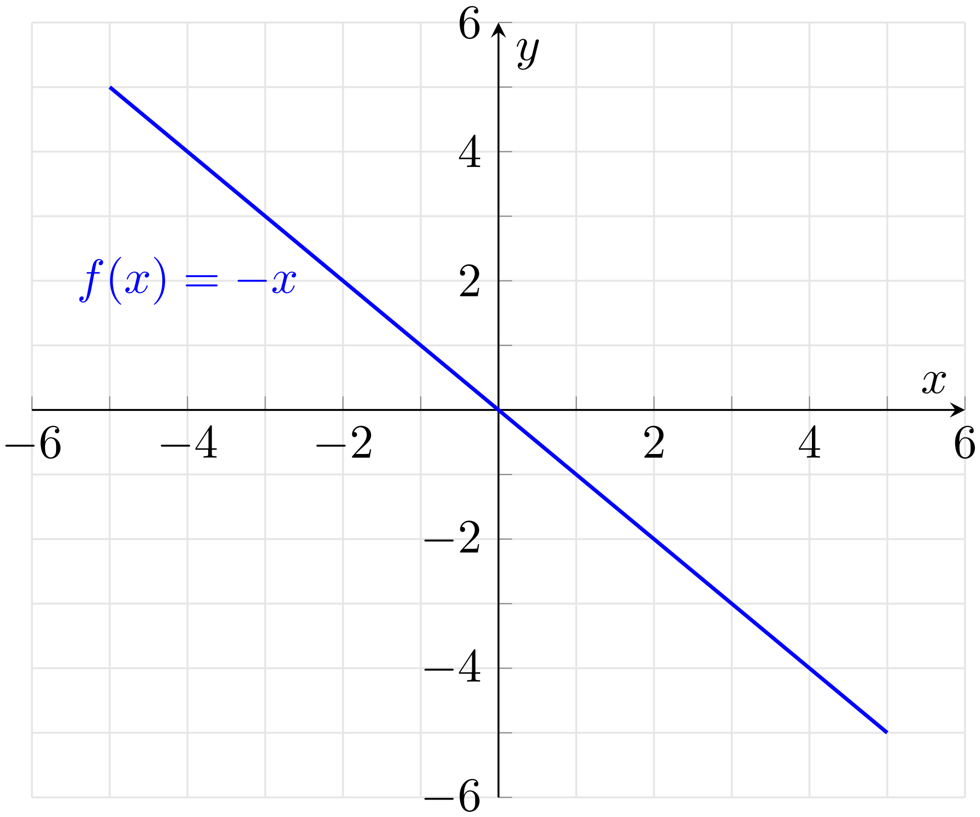


绝对值与相反数的比较

绝对值的函数图象



相反数的函数图象

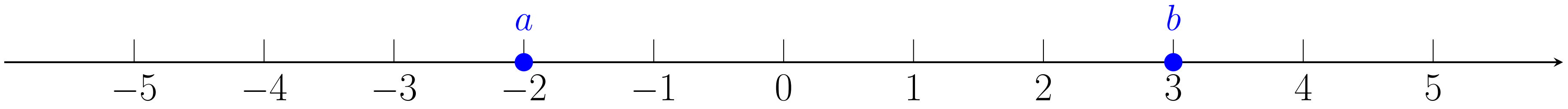


1.5 有理数的大小比较规则

1. 数轴上右边的数比左边的数大
2. 正数 $>$ 0
3. 负数 $<$ 0
4. 正数 $>$ 负数
5. 两个负数比较，绝对值大的反而小！
   如果 $a > b$，则：$-a < -b$

数轴比较法

1. 画数轴并标出所有数



2. 从左到右（从小到大）排列

3. 结果：$a < b$

1.6 有理数的加法法则

1. 同号两数相加, 取与加数相同的正负号, 并把绝对值相加;
   当$a, b > 0$时,
   $(+a)+(+b)=+(a+b)=a+b$
   $(-a)+(-b)=-(a+b)$
2. 绝对值不相等的异号两数相加, 取绝对值较大的加数的正负号, 并用较大的绝对值减去较小的绝对值;
   当$a > b > 0$时,
   $(-a)+(+b)=-(a-b)$
   $(+a)+(-b)=+(a-b)=a-b$
3. 互为相反数的两个数相加得 0;
   $a+(-a)=0$
4. 一个数与 0 相加, 仍得这个数.
   $a+0=0$

有理数加法的运算律

1. 加法交换律：两个数相加，交换加数的位置，和不变.

$$a + b = b + a$$

2. 加法结合律: 三个数相加, 先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

有理数去括号规则

括号前的符号与数字前的符号存在下列关系，则:

1. 同号取正（去括号，取正号）

$$+(+a) = +a = a$$

$$-(-a) = +a = a$$

2. 异号取负（去括号，取负号）

$$-(+a) = -a$$

$$+(-a) = -a$$

1.7 有理数的减法

有理数的减法法则:

1. 减去一个数, 等于加上这个数的相反数.

$$a - b = a + (-b)$$

$$a - (-b) = a + (+b) = a + b$$

1.8 有理数的加减混合运算

1. 加减法是一级运算，优先级最低；
2. 加法与减法互为逆运算，加法与减法带符号统一理解为加法；
3. 减一个数，等于加相反数：$a-b=a+(-b)$ 或 $a-(-b)=a+b$；
4. 加一个数，等于减相反数：$a+b=a-(-b)$ 或 $a+(-b)=a-b$；
5. 同号取正（去括号，取正号）

   $+(+a)=+a=a$

   $-(-a)=+a=a$
6. 异号取负（去括号，取负号）

   $-(+a)=-a$

   $+(-a)=-a$
7. 加法具有交换律：$a+b+c=a+c+b$；
8. 加法具有结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$。