

高中数学证明余弦定理

在三角形 ABC 中，边长分别为 a 、 b 、 c ，角 C 是夹在边 a 和 b 之间的角。我们要证明余弦定理：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

证明过程

步骤 1：坐标系设定

我们将三角形 ABC 的顶点分别放置在平面直角坐标系中：- 点 $A(0,0)$
- 点 $B(c,0)$ - 点 $C(x,y)$

因此，三角形的边长分别为：

$$AB = c$$

$$AC = a = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$BC = b = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

步骤 2：利用余弦定义表达角 C

根据余弦的定义，角 C 的余弦值为：

$$\cos C = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AC}| |\vec{BC}|}$$

点积计算为：

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = x \cdot (x - c) + y \cdot y = x^2 - xc + y^2$$

因此：

$$\cos C = \frac{x^2 - xc + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x - c)^2 + y^2}}$$

步骤 3：代数推导

通过代数变换，结合勾股定理，最终可以得到：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$