

等差数列与等比数列

丁保华

致慧星空工作室

2025 年 6 月 22 日

目录

1

数列的概念

2

等差数列

- 定义
- 通项公式
- 前 n 项和公式推导
- 推论及案例

3

等比数列

- 定义
- 通项公式推导
- 前 n 项和公式推导
- 推论及案例

4

综合应用

5

综合应用

6

练习与巩固

7

总结与回顾

数列的概念

定义：按照一定顺序排列的一列数称为数列。数列中的每一个数叫作这个数列的项。

分类：有穷数列（项数有限）、无穷数列（项数无限）。

表示方法：列举法、递推公式法、通项公式法等。

列举法：2, 5, 8, 11, 14, ..., 这个数列的首项为 2，公差为 3。通过观察可以发现，每一项都比前一项大 3。

递推公式法： $a_n = a_{n-1} + d$ 对于 $n \geq 2$

通项公式法：

等差数列的定义

定义：一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫作等差数列。这个常数叫作等差数列的公差，通常用字母 d 表示。

关键词：逐项差、常数。

等差数列的通项公式

已知条件：等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d 。

推导过程：

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

\vdots

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

等差数列的递推公式为 $a_n = a_{n-1} + d (n \geq 2)$ 。

等差数列的通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 。

等差数列的前 n 项和公式推导

已知条件：等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d ，前 n 项和为 S_n 。

推导过程：

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

或

$$S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$$

等差数列的前 n 项和公式为 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$ 。

等差数列的推论及案例

推论一：在有穷等差数列中，与首末两项等距离的两项之和相等，且等于首项与末项之和。

案例：等差数列 2, 5, 8, 11, 14, 首项为 2, 末项为 14, 第二项 5 与倒数第二项 11 的和为 16, 第三项 8 与倒数第三项 8 的和也为 16, 且 $2 + 14 = 16$ 。

推论二：等差数列的部分和性质：设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 构成等差数列。

案例：等差数列 3, 7, 11, 15, 19, ..., 其前 2 项和 $S_2 = 3 + 7 = 10$, 前 4 项和 $S_4 = 3 + 7 + 11 + 15 = 36$, 则 $S_4 - S_2 = 26$, 前 6 项和 $S_6 = 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 = 84$, $S_6 - S_4 = 48$, 显然 10, 26, 48, ... 构成公差为 16 的等差数列。

推论三：等差数列的项的和的性质：若 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，则数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 也是等差数列，其公差为 $2d$ 。

案例：等差数列 1, 4, 7, 10, 13, ..., 公差 $d = 3$, 则数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 为 5, 11, 17, 23, ..., 公差为 $6 = 2d$ 。

等比数列的定义

定义：一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列就叫作等比数列。这个常数叫作等比数列的公比，通常用字母 q 表示 ($q \neq 0$)。

关键词：逐项比、常数。

等比数列的通项公式推导

已知条件：等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公比为 q ($q \neq 0$)。

推导过程：

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

等比数列的递推公式为 $a_n = a_{n-1} q$ 。

等比数列的通项公式为 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 。

等比数列的前 n 项和公式推导

已知条件：等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公比为 q ($q \neq 0$)，前 n 项和为 S_n 。

推导过程：

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$$

当 $q = 1$ 时， $S_n = na_1$ ；当 $q \neq 1$ 时，

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

公式呈现：等比数列的前 n 项和公式为 $S_n = \begin{cases} na_1, & q = 1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases}$ 。

等比数列的推论及案例

推论一：在有穷等比数列中，与首末两项等距离的两项之积相等，且等于首项与末项之积。

案例：等比数列 1, 2, 4, 8, 16, 首项为 1, 末项为 16, 第二项 2 与倒数第二项 8 的积为 16, 第三项 4 与倒数第三项 4 的积也为 16, 且 $1 \times 16 = 16$ 。

推论二：等比数列的部分积性质：设 $\{a_n\}$ 是等比数列，其前 n 项积为 T_n ，则 $T_n, \frac{T_{2n}}{T_n}, \frac{T_{3n}}{T_{2n}}, \dots$ 构成等比数列。

案例：等比数列 2, 4, 8, 16, 32, ..., 其前 2 项积 $T_2 = 2 \times 4 = 8$, 前 4 项积 $T_4 = 2 \times 4 \times 8 \times 16 = 1024$, 则 $\frac{T_4}{T_2} = 128$, 前 6 项积

$T_6 = 2 \times 4 \times 8 \times 16 \times 32 \times 64 = 2^{6+5+4+3+2+1} = 2^{21} = 2097152$, $\frac{T_6}{T_4} = 2048$, 显然 8, 128, 2048, ... 构成公比为 16 的等比数列。

推论三：等比数列的项的和的性质：若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，则数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 也是等比数列，其公比为 q 。

案例：等比数列 3, 6, 12, 24, 48, ..., 公比 $q = 2$, 则数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 为 9, 18, 36, 72, ..., 公比为 $2 = q$ 。

通项式与前 n 项和的综合应用

例题 1: 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 7$, $a_6 = 16$, 求这个数列的通项公式和前 10 项的和。

解答:

$$a_1 + 2d = 7$$

$$a_1 + 5d = 16$$

解得: $a_1 = 1, d = 3$

通项公式: $a_n = 1 + (n - 1) \times 3 = 3n - 2$

$$\text{前 10 项和: } S_{10} = 10 \times \frac{2 \times 1 + (10 - 1) \times 3}{2} = 10 \times \frac{2 + 27}{2} = 10 \times 29 / 2 = 145$$

通项式与前 n 项和的综合应用

例题 2：已知等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = 6$ ， $a_5 = 48$ ，求这个数列的通项公式和前 6 项的和。

解答：

$$a_1 q = 6$$

$$a_1 q^4 = 48$$

$$\text{解得： } a_1 = 3, q = 2$$

$$\text{通项公式： } a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

$$\text{前 6 项和： } S_6 = 3 \times \frac{1 - 2^6}{1 - 2} = 3 \times \frac{1 - 64}{-1} = 3 \times (-63) / (-1) = 3 \times 63 = 189$$

- 练习题 1: 已知等差数列的首项为 5, 公差为 4, 求第 8 项和前 8 项的和。
- 练习题 2: 已知等比数列的首项为 2, 公比为 3, 求第 5 项和前 5 项的和。
- 练习题 3: 已知等差数列的前三项分别为 2, 5, 8, 求其通项公式及前 10 项的和。
- 练习题 4: 已知等比数列的前三项分别为 3, 6, 12, 求其通项公式及前 6 项的和。

总结与回顾

等差数列：

定义：从第 2 项起，每一项与前一項的差等于同一个常数。

通项公式： $a_n = a_1 + (n - 1)d$

前 n 项和公式： $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 或 $S_n = na_1 + \frac{n(n - 1)d}{2}$

推论：项的对称性、部分和性质、项的和的性质

等比数列：

定义：从第 2 项起，每一项与前一項的比等于同一个常数。

通项公式： $a_n = a_1 q^{n-1}$ 。

前 n 项和公式： $S_n = \begin{cases} na_1, & q = 1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases}$

推论：项的对称性、部分积性质、项的和的性质。

通项式与前 n 项和的关系：通项式是求前 n 项和的基础，前 n 项和公式的应用需要结合通项式中的首项、公差或公比等参数。