题目 3：已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且满足 $a_{2n} = 2a_n + 1(n \in \mathbb{N}^*)$。
(1) 若 $a_1 = 1$，求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

题目 3：已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且满足 $a_{2n} = 2a_n + 1(n \in \mathbb{N}^*)$。
(1) 若 $a_1 = 1$，求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

解：
(1) 当 $n = 1$ 时，由 $a_{2n} = 2a_n + 1$ 得 $a_2 = 2a_1 + 1 = 3$，所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$,

题目 3：已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且满足 $a_{2n} = 2a_n + 1(n \in \mathbb{N}^*)$。
(1) 若 $a_1 = 1$，求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

解：
(1) 当 $n = 1$ 时，由 $a_{2n} = 2a_n + 1$ 得 $a_2 = 2a_1 + 1 = 3$，所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$,
所以等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = a_1 + 2(n-1) = 2n - 1$,

题目 3：已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且满足 $a_{2n}=2a_n+1(n\in\mathbb{N}^*)$。
(1) 若 $a_1=1$，求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

解：
(1) 当 $n=1$ 时，由 $a_{2n}=2a_n+1$ 得 $a_2=2a_1+1=3$，所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $a_2-a_1=3-1=2$,
所以等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+2(n-1)=2n-1$,
所以前 n 项和为 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$

题目 3：已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且满足 $a_{2n} = 2a_n + 1(n \in \mathbb{N}^*)$。
(1) 若 $a_1 = 1$，求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

解：
(1) 当 $n = 1$ 时，由 $a_{2n} = 2a_n + 1$ 得 $a_2 = 2a_1 + 1 = 3$，所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$，
所以等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = a_1 + 2(n-1) = 2n - 1$，
所以前 n 项和为 $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} = \dfrac{n(1 + 2n - 1)}{2} = n^2$

题目 3：已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且满足 $a_{2n}=2a_n+1(n\in\mathbb{N}^*)$。

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{5}{b_2}-\frac{1}{b_1}=\frac{3}{4}$，且数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=(3n-4)2^{n+1}+8$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

题目 3：已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且满足 $a_{2n} = 2a_n + 1(n \in \mathbb{N}^*)$。

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{5}{b_2} - \frac{1}{b_1} = \frac{3}{4}$，且数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = (3n-4)2^{n+1} + 8$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

解：(2) 当 $n = 1$ 时，$a_1 \cdot b_1 = T_1 = (3-4) \cdot 2^2 + 8 = -4 + 8 = 4$，所以 $b_1 = \frac{4}{a_1}$，

题目 3：已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且满足 $a_{2n}=2a_n+1(n\in\mathbb{N}^*)$。

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\dfrac{5}{b_2}-\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{3}{4}$，且数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=(3n-4)2^{n+1}+8$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

解：(2) 当 $n=1$ 时，$a_1\cdot b_1=T_1=(3-4)\cdot 2^2+8=-4+8=4$，所以 $b_1=\dfrac{4}{a_1}$，

$n=2$ 时，$a_2\cdot b_2=T_2-T_1=(6-4)\cdot 2^3+8-4=20$，所以 $b_2=\dfrac{20}{a_2}$，

题目 3：已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且满足 $a_{2n}=2a_n+1(n\in\mathbb{N}^*)$。

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\dfrac{5}{b_2}-\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{3}{4}$，且数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=(3n-4)2^{n+1}+8$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

解：(2) 当 $n=1$ 时，$a_1\cdot b_1=T_1=(3-4)\cdot 2^2+8=-4+8=4$，所以 $b_1=\dfrac{4}{a_1}$，

$n=2$ 时，$a_2\cdot b_2=T_2-T_1=(6-4)\cdot 2^3+8-4=20$，所以 $b_2=\dfrac{20}{a_2}$，

由 $a_{2n}=2a_n+1$ 得 $a_2=2a_1+1$，所以 $b_2=\dfrac{20}{a_2}=\dfrac{20}{2a_1+1}$，

题目 3：已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且满足 $a_{2n} = 2a_n + 1(n \in \mathbb{N}^*)$。

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{5}{b_2} - \frac{1}{b_1} = \frac{3}{4}$，且数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = (3n-4)2^{n+1} + 8$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

解：(2) 当 $n = 1$ 时，$a_1 \cdot b_1 = T_1 = (3-4) \cdot 2^2 + 8 = -4 + 8 = 4$，所以 $b_1 = \frac{4}{a_1}$，

$n = 2$ 时，$a_2 \cdot b_2 = T_2 - T_1 = (6-4) \cdot 2^3 + 8 - 4 = 20$，所以 $b_2 = \frac{20}{a_2}$，

由 $a_{2n} = 2a_n + 1$ 得 $a_2 = 2a_1 + 1$，所以 $b_2 = \frac{20}{a_2} = \frac{20}{2a_1 + 1}$，

由 $\frac{5}{b_2} - \frac{1}{b_1} = \frac{3}{4}$ 得 $\frac{(2a_1 + 1)}{4} - \frac{a_1}{4} = \frac{a_1 + 1}{4} = \frac{3}{4}$，

题目 3：已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且满足 $a_{2n}=2a_n+1(n\in\mathbb{N}^*)$。

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{5}{b_2}-\frac{1}{b_1}=\frac{3}{4}$，且数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=(3n-4)2^{n+1}+8$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

解：(2) 当 $n=1$ 时，$a_1\cdot b_1=T_1=(3-4)\cdot 2^2+8=-4+8=4$，所以 $b_1=\frac{4}{a_1}$，

$n=2$ 时，$a_2\cdot b_2=T_2-T_1=(6-4)\cdot 2^3+8-4=20$，所以 $b_2=\frac{20}{a_2}$，

由 $a_{2n}=2a_n+1$ 得 $a_2=2a_1+1$，所以 $b_2=\frac{20}{a_2}=\frac{20}{2a_1+1}$，

由 $\frac{5}{b_2}-\frac{1}{b_1}=\frac{3}{4}$ 得 $\frac{(2a_1+1)}{4}-\frac{a_1}{4}=\frac{a_1+1}{4}=\frac{3}{4}$，

所以 $a_1=2$，$a_2=2a_1+1=5$，$a_n=2+(n-1)(a_2-a_1)=2+3(n-1)=3n-1$，

$b_1=2$，$b_2=4$，

题目 3：已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且满足 $a_{2n}=2a_n+1(n\in\mathbb{N}^*)$。
(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{5}{b_2}-\frac{1}{b_1}=\frac{3}{4}$，且数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=(3n-4)2^{n+1}+8$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

解：(2) 当 $n=1$ 时，$a_1\cdot b_1=T_1=(3-4)\cdot 2^2+8=-4+8=4$，所以 $b_1=\frac{4}{a_1}$，
$n=2$ 时，$a_2\cdot b_2=T_2-T_1=(6-4)\cdot 2^3+8-4=20$，所以 $b_2=\frac{20}{a_2}$，
由 $a_{2n}=2a_n+1$ 得 $a_2=2a_1+1$，所以 $b_2=\frac{20}{a_2}=\frac{20}{2a_1+1}$，
由 $\frac{5}{b_2}-\frac{1}{b_1}=\frac{3}{4}$ 得 $\frac{(2a_1+1)}{4}-\frac{a_1}{4}=\frac{a_1+1}{4}=\frac{3}{4}$，
所以 $a_1=2$，$a_2=2a_1+1=5$，$a_n=2+(n-1)(a_2-a_1)=2+3(n-1)=3n-1$，
$b_1=2$，$b_2=4$，
$n\geq 2$ 时，$a_n\cdot b_n=T_n-T_{n-1}=(3n-4)2^{n+1}+8-(3n-7)2^n-8=(3n-1)2^n$，

题目 3：已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且满足 $a_{2n}=2a_n+1(n\in\mathbb{N}^*)$。

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{5}{b_2}-\frac{1}{b_1}=\frac{3}{4}$，且数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=(3n-4)2^{n+1}+8$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

解：(2) 当 $n=1$ 时，$a_1\cdot b_1=T_1=(3-4)\cdot 2^2+8=-4+8=4$，所以 $b_1=\frac{4}{a_1}$，

$n=2$ 时，$a_2\cdot b_2=T_2-T_1=(6-4)\cdot 2^3+8-4=20$，所以 $b_2=\frac{20}{a_2}$，

由 $a_{2n}=2a_n+1$ 得 $a_2=2a_1+1$，所以 $b_2=\frac{20}{a_2}=\frac{20}{2a_1+1}$，

由 $\frac{5}{b_2}-\frac{1}{b_1}=\frac{3}{4}$ 得 $\frac{(2a_1+1)}{4}-\frac{a_1}{4}=\frac{a_1+1}{4}=\frac{3}{4}$，

所以 $a_1=2$，$a_2=2a_1+1=5$，$a_n=2+(n-1)(a_2-a_1)=2+3(n-1)=3n-1$，

$b_1=2$，$b_2=4$，

$n\geq 2$ 时，$a_n\cdot b_n=T_n-T_{n-1}=(3n-4)2^{n+1}+8-(3n-7)2^n-8=(3n-1)2^n$，

所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^n$