非齐次线性微分方程有界解的存在唯一性探究

陈泽汛

（数学与统计学院　　09 级　数学与应用数学专业）

摘要：微分方程理论是分析理论的一个重要分支，具有其相关的各种性质。一直以来方程求解都是数学中的一个重要课题，但对于微分方程，由于高阶方程的解很难显式表示，从而不解方程而讨论解的各种性质是微分方程理论体系的重要组成部分。本文从微分方程解的有界性入手，探究了非齐次微分方程的有界解存在且唯一的充分性条件。

关键词：微分方程、有界解、存在性、唯一性

引言：有界性是函数的基本的性质之一，同样在微分方程理论系统中，解的有界性是解的重要性质之一，这种性质与解的渐进性、稳定性有着密切联系，因而探究微分方程解的有界性对微分方程理解和发展有着重要意义。

一、　一阶非齐次线性微分方程

首先我们从最简单的一阶常系数方程看起

例 1.1　已知$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$连续函数，若$|f(x)| \le M$，其中$M>0$，求证：

$$y' + y = f(x) \tag{1.1}$$

存在有界解，且唯一。其中y'表示$\frac{dy}{dx}$。

证明：存在性：由于该方程为一阶常系数微分方程，故其通解可以直接写出

$$\varphi(x) = e^{-x}\left(c + \int_0^x e^t f(t)\,dt\right),\ x \in (-\infty,+\infty)$$

在$[0,+\infty)$上，对于$\forall c\epsilon\mathbb{R}$，$ce^{-x}$有界，且满足

$$\left|e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt\right| \le e^{-x}M|e^x - 1| \le M$$

因而$\varphi(x)$在$[0,+\infty)$上有界。

在$(-\infty,0)$上，由于$|f(x)| \le M$，故$\int_{-\infty}^0 e^t f(t)\,dt < +\infty$

取$c_0 = \int_{-\infty}^0 e^t f(t)\,dt$，则相应的解为

$$|\varphi_0(x)| = \left|e^{-x}\int_{-\infty}^x e^t f(t)\,dt\right| \le e^{-x}M\left|\int_{-\infty}^x e^t\,dt\right| \le M$$

故对于方程（1.1）存在有界解。

唯一性：若存在$\tilde{c} \ne c_0$，则可令$\tilde{c} = c_0 + \xi$（$\xi \ne 0$），则其相应的解为

$$\widetilde{\varphi(x)} = \varphi_0(x) + \xi e^{-x}$$

显然等式右边第一项有界，第二项在$(-\infty,+\infty)$无界，因而假设不成立，故方程（1.1）有界解唯一。

证毕

推广Ⅰ

ⅰ、将上述方程(1.1)改为

$$y'+ay=f(x)\left(a\in\mathbb{R}，\ a>0\right) \tag{1.2}$$

其余条件不变，则结论可以仿照上述推导过程证明成立。

ⅱ、对于方程(1.2)，若$a<0$, 则取$c_0=\int_{+\infty}^{0}e^{at}f(t)\,dt$, 则相应的解为

$$|\varphi_0(x)|=\left|e^{-ax}\int_{+\infty}^{x}e^{at}f(t)\,dt\right|\le Me^{-ax}\left|\int_{+\infty}^{x}e^{at}\,dt\right|\le\left|\frac{M}{a}\right|$$

故而存在有界解，同理可仿照(1.1)中唯一性的证明得出有界解唯一。

ⅲ、对于方程(1.2)，若$a=0$, 则原方程变为$y'=f(x)$，此时

$$y=\int f(x)\,dx+c$$

例如$f(x)=1$时显然y无界，但当$f(x)=\arctan x$时，y显然有界。但无论如何让即便是存在也不唯一，因为上述的y是一函数族。

基于上述讨论，我们得到以下结论：

定理 1.1 设$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$有界连续函数，则下述常系数非齐次微分方程一定存在唯一有界解。

$$\boldsymbol{y'+ay=f(x)\left(a\in\mathbb{R}，\ a\neq 0\right)} \tag{1.3}$$

其中y'表示$\frac{dy}{dx}$。

ⅳ、考查一阶变系数微分方程

探究问题： 设$f(x)$，$a(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$连续函数，且$|f(x)|\le M$，其中$M>0$，试问方程

$$y'+a(x)y=f(x)$$

在什么条件下存在有界解，若存在是否唯一。其中y'表示$\frac{dy}{dx}$。

分析：记$A(x)=\int_0^x a(t)\,dt$，则由常数变异公式，我们可得该方程的通解

$$\varphi(x)=e^{-A(x)}\left[c+\int_0^x e^{A(t)}f(t)\,dt\right],\ x\in(-\infty,+\infty)$$

观察常系数方程的时，存在唯一性的条件是$a\neq 0$，故此时可尝试增加条件：

$a(x)$在$\mathbb{R}$上没有零点，换言之$a(x)$在$\mathbb{R}$上恒大于零或者恒小于零

再分析：若我们仍想要按照常系数的方法对$\varphi(x)$进行有界性估计的话，只是

$a(x)$没有零点是不够的，我们需要对$a(x)$进行进一步限制，由于$A'(x)=a(x)$，且

$$\left|e^{-A(x)}\int_0^x e^{A(t)}f(t)\,dt\right| = \left|e^{-A(x)}\int_0^x \frac{e^{A(t)}f(t)\,d\big(A(t)\big)}{a(t)}\right|$$

因而我们可以对增加的条件进行补充：

对于$\forall x\in\mathbb{R}$，恒有$|a(x)|\geq p\ >0$，其中p为任一固定常实数

总结后可以得到以下定理：

定理 1.2 若$f(x)$，$a(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$连续函数，且对于$\forall x\in\mathbb{R}$，恒有$|f(x)|\leq M$，$|a(x)|\geq p$，其中p为任一固定常实数，且$p>0$，$M>0$，则一阶非齐次线性微分方程

$$\boldsymbol{y'+a(x)y=f(x)} \tag{1.4}$$

存在唯一有界解。其中y'表示$\frac{dy}{dx}$。

（注：其中若$a(x)\equiv p$，则原方程退化为常系数方程，但结论依旧成立）

证明：存在性：由于$A(x)=\int_0^x a(t)\,dt$，故$A'(x)=a(x)$。又因为$a(x)$在$\mathbb{R}$上恒大于p（恒小于$-p$），$p>0$，故$A(x)$严格单调递增（严格单调递减）不妨设$A(x)$严格单调递增，即$a(x)>p$, 并记$|A(x)|\leq A$，（A可以为$+\infty$）也即

$$A(+\infty)=A,\ A(-\infty)=-A$$

在$[0,+\infty)$上，对于$\forall c\epsilon\mathbb{R}$，$ce^{-A(x)}$有界，且满足

$$\begin{aligned}\left|e^{-A(x)}\int_0^x e^{A(t)}f(t)\,dt\right| &= \left|e^{-A(x)}\int_0^x e^{A(t)}f(t)\,dt\right| \\ &\leq M\left|e^{-A(x)}\int_0^x \frac{e^{A(t)}a(t)\,dt}{a(t)}\right| \\ &\leq \frac{M}{P}e^{-A(x)}\left|\int_0^x e^{A(t)}\,d\big(A(t)\big)\right| \\ &\leq \frac{M}{p}e^{-A(x)}\left|e^{A(x)}-1\right| \\ &\leq \frac{M}{p}\end{aligned}$$

其中第二个不等号是由于$[0,+\infty)$上$a(x)>p>0$，$A(x)\geq 0$，$A(x)\in[0,A]$，故

$$e^{-A(x)}\left|e^{A(x)}-1\right| = \left|1-e^{-A(x)}\right|\leq 1$$

因而$\varphi(x)$在$[0,+\infty)$上有界。

在$(-\infty,0)$上，由于$|f(x)|\leq M$，故

$$\int_{-\infty}^0 e^{A(t)}f(t)\,dt<+\infty$$

取$c_0=\int_{-\infty}^{0}e^{A(t)}f(t)\,dt$，则相应的解为

$$
\begin{aligned}
|\varphi_0(x)| &= \left|e^{-A(x)}\int_{-\infty}^{x}e^{A(t)}f(t)\,dt\right| \\
&\le M\left|e^{-A(x)}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{A(t)}a(t)\,dt}{a(t)}\right| \\
&\le \frac{M}{P}e^{-A(x)}\left|\int_{-\infty}^{x}e^{A(t)}\,d\big(A(t)\big)\right| \\
&\le \frac{M}{P}
\end{aligned}
$$

其中第二个不等号是由于在$(-\infty,0)$，$a(x)>p>0$， $A(x)\le 0$，故$A(x)\in[-A,0]$ 则

$$|A(x)|\le A，e^{-A(x)-A}\le 0$$

所以

$$e^{-A(x)}\left|\int_{-\infty}^{x}e^{A(t)}\,d\big(A(t)\big)\right|=\left|1-e^{-A(x)-A}\right|\le 1$$

故对于方程（1.4）存在有界解。

唯一性：若存在$\tilde{c}\ne c_0$，令$\tilde{c}=c_0+\xi$，$\xi\ne 0$，则其相应的解为$\widetilde{\varphi(x)}=\varphi_0(x)+\xi e^{-x}$ 显然等式右边第一项有界，第二项在$(-\infty,+\infty)$无界，因而假设不成立，故方程（1.4）有界解唯一。

同理$a(x)<-p$时也可以类似证明。

证毕

注：若$a(x)$存在零点时，则解的有界性就无法判断。例如当$f(x)=1$时，$a(x)=x$，则解为$\varphi(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$（$c+\int_{0}^{x}e^{\frac{1}{2}t^2}\,dt$），显然无界。但是当$f(x)=\cos x$，$a(x)=\cos x$，则解为$\varphi(x)=e^{-\sin x}$（$c+\int_0^x e^{\sin t}\,d(\sin t)$）时，对于任意的$c$解都有界。

二、 二阶非齐次线性微分方程

下面我们讨论二阶的情况，同样我们从常系数看起。

例 2.1 已知$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$连续函数，若$|f(x)|\le M$，其中$M>0$，求证：

$$y''+8y'+7y=f(x) \qquad (2.1)$$

存在唯一有界解。其中y''表示$\frac{d^2y}{dx^2}$，y'表示$\frac{dy}{dx}$。

证明：存在性：二阶常系数非齐次方程的通解为

$\phi(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-7x}-\frac{1}{6}e^{-7x}\int_0^x e^{7t}f(t)\,dt+\frac{1}{6}e^{-x}\int_0^x e^{t}f(t)\,dt, x\in(-\infty,+\infty)$

在$[0,+\infty)$上，对于$\forall c_1$，$c_2\epsilon\mathbb{R}$，$c_1e^{-x}+c_2e^{-7x}$有界，且满足

$$\left|\frac{1}{6}e^{-x}\int_0^x e^{t}f(t)\,dt-\frac{1}{6}e^{-7x}\int_0^x e^{7t}f(t)\,dt\right|$$

$$\leq\frac{1}{6}\left|e^{-x}\int_0^x e^{t}f(t)\,dt\right|+\frac{1}{6}\left|e^{-7x}\int_0^x e^{7t}f(t)\,dt\right|$$

$$\leq\frac{M}{6}e^{-x}|e^{x}-1|+\frac{M}{6}e^{-7x}|e^{7x}-1|\leq\frac{M}{3}$$

因而$\phi(x)$在$[0,+\infty)$上有界。

在$(-\infty,0)$上，由于$|f(x)|\leq M$，故$\int_{-\infty}^0 e^{t}f(t)\,dt<+\infty$，$\int_{-\infty}^0 e^{7t}f(t)\,dt<+\infty$

取$c_1=\frac{1}{6}\int_{-\infty}^0 e^{t}f(t)\,dt$，$c_2=-\frac{1}{6}\int_{-\infty}^0 e^{7t}f(t)\,dt$，则相应的解为

$$|\phi_0(x)|=\left|\frac{1}{6}e^{-x}\int_{-\infty}^x e^{t}f(t)\,dt-\frac{1}{6}e^{-7x}\int_{-\infty}^x e^{7t}f(t)\,dt\right|$$

$$\leq\frac{1}{6}\left|e^{-x}\int_{-\infty}^x e^{t}f(t)\,dt\right|+\frac{1}{6}\left|e^{-7x}\int_{-\infty}^x e^{7t}f(t)\,dt\right|$$

$$\leq\frac{M}{6}\left|e^{-x}\int_{-\infty}^x e^{t}\,dt\right|+\frac{M}{6}\left|e^{-7x}\int_{-\infty}^x e^{7t}\,dt\right|$$

$$\leq\frac{M}{6}+\frac{M}{42}=\frac{4}{21}M$$

故对于方程（2.1）存在有界解。

唯一性：若存在$\widetilde{c_1}\neq c_1$或$\widetilde{c_2}\neq c_2$令$\widetilde{c_1}=c_1+\xi$，$\widetilde{c_2}=c_2+\eta$，ξ，η不同时为0，不妨设$\xi\neq 0, \eta=0$则其相应的解为$\widetilde{\phi(x)}=\phi_0(x)+\xi e^{-x}$显然等式右边第一项有界，第二项在$(-\infty,+\infty)$无界，则和式也无界。若$\xi,\eta$同时不为$0$，即$\xi\neq 0,\eta\neq 0$，则相应的解为$\widetilde{\phi(x)}=\phi_0(x)+\xi e^{-x}+\eta e^{-7x}$，因为$e^{-x}\neq e^{-7x}$，因而$\xi e^{-x}+\eta e^{-7x}\neq 0$，所以$\widetilde{\phi(x)}$在$(-\infty,+\infty)$上无界，因而假设不成立，故方程（2.1）有界解唯一。

证毕

推广Ⅰ

有了一阶方程与二阶具体常系数方程的推导，我们直接考查一般的二阶常系数方程

$$y''+ay'+by=f(x) \tag{2.2}$$

其中$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$连续函数，$|f(x)| \le M$，$M>0$，a，$b \in \mathbb{R}$，考查当a，b取何种值时，可以保证方程（2.2）存在有界解，存在唯一有界解。

分析：按照常系数方程的求解方法，首先我们要考虑的是a^2-4b，故记$\Delta = a^2-4b$，我们按照Δ的取值来讨论：

ⅰ、$\Delta>0$，此时（2.2）的特征方程必有两个相异的特征根，记为λ_1,λ_2，若$b\neq 0$，则$\lambda_1\lambda_2\neq 0$，因而$\int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda_1 t} f(t)\,dt < +\infty$，$\int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda_2 t} f(t)\,dt < +\infty$取$c_1 = m\int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda_1 t} f(t)\,dt$，$c_2 = n\int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda_2 t} f(t)\,dt$，其中$m$，$n$是由常数变异法确定的常数。仿照（2.1）的证明可以得出其有界解存在且唯一。若$b=0$则存在一个零根，此时有界解的存在性仍可得证，但唯一性就无法得出了，因为当存在零根时，待定系数可以任意给定某个常数都可以满足条件，故此时存在有界解但不唯一。

ⅱ、$\Delta=0$，记特征根为λ,对应的齐次方程的两个无关解为$xe^{\lambda x}$，$e^{\lambda x}$，此时通解中比含有$xe^{\lambda x}$项，无论如何调整系数，该项在$(-\infty,+\infty)$上必然无界，故解必然无界。

ⅲ、$\Delta<0$，记两个特征根$\lambda_1=\frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}=\alpha+i\beta$，$\lambda_2=\frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}=\alpha-i\beta$，其中$\alpha$，$\beta\epsilon\mathbb{R}$。则由常数变异公式可以得出通解为

$$\begin{aligned}\phi(x) &= c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x\\ &\quad -\frac{1}{2\beta} e^{\alpha x}\sin\beta x\int_0^x e^{-\alpha t}\sin\beta t\, f(t)\,dt\\ &\quad +\frac{1}{2\beta} e^{\alpha x}\cos\beta x\int_0^x e^{-\alpha t}\cos\beta t\, f(t)\,dt\end{aligned}$$

又因为$\cos\beta x$，$\sin\beta x$有界，故将其放缩得：

$$|\phi(x)| \le |c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}| + \frac{1}{\beta}\left| e^{\alpha x}\int_0^x e^{-\alpha t} f(t)\,dt\right|$$

$$= |c_1+c_2| e^{\alpha x} + \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\left|\int_0^x e^{-\alpha t} f(t)\,dt\right|$$

仿照例 1.1 中存在性的证明过程同理可以证得上述解有界。但是根据例 1.1 中唯一性的证明，我们可以发现此时的$c_0=c_1+c_2$，因此只要$c_1+c_2=\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha x} f(t)\,dt$即可取到有界解，故此解不唯一。

综合ⅰ、ⅱ、ⅲ我们可以得到以下定理：

定理 2.1 对于二阶常系数非齐次微分方程

$$\boldsymbol{y''+ay'+by=f(x)}$$

有界解的存在唯一性与其系数的关系如下表。其中$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$连续

函数， $|f(x)| \le M$**，** $M>0$**，** a**，** $b \in \mathbb{R}$**。**（$\Delta = a^2 - 4b$）

条件		存在性	唯一性
$\Delta > 0$	$b \neq 0$	√	√
	$b = 0$	√	×
$\Delta = 0$		×	×
$\Delta < 0$		√	×

推广Ⅱ

下面我们考查一般的二阶变系数微分方程

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{2.3}$$

由于从一阶到二阶，从常系数到变系数我们一直采用的方法核心是先找出解的表达形式，然后再根据表达形式运用相关方法对解的有界性进行判断。而对于一般的二阶变系数方程（2.3），我们找不到一种通用的方法可以得出解的表达形式，因而此种方法也很难对二阶变系数的情况进行讨论。

但是对于二阶的情况我们可以采用扰动的方法将变系数方程转化为：

$$y'' + \big(a + a(x)\big)y' + \big(b + b(x)\big)y = f(x) + \varepsilon(x)$$

其中$a(x)$，$b(x)$，$\varepsilon(x)$在$x \to \infty$时为无穷小量。

有兴趣的读者可以自行用此种方法对一般的二阶变系数方程进行讨论。

参考文献

[1] 王高雄 周之铭 朱思铭等 常微分方程（第三版）,高等教育出版社，2007年

[2] 李岳生 非线性微分方程解的界、稳定性和误差估计,数学学报，第12卷第一期

[3]曹根牛,二阶变系数齐次线性微分方程与黎卡提方程,西安科技学院学报,第24卷第2期

[4] M. S. P. Eastham asymptotic solution of linear differential systems, applications of the Levinson theorem, Oxford, 1989年