四阶微分方程 Dirichlet 边值问题
特征值估计与重数研究

数学与统计学院数学与应用数学专业　陈泽汛

指导老师　綦建刚

摘　　要： 本文研究了在 Dirichlet 边界条件下的四阶 Sturm-Liouville 特征值问题。首先，文中给出了初值问题基本解组的估计以及特征值的等价定义。之后，证明了特征值的实值性与可数性。同时，计算得出 Dirichlet 边值条件下，几何重数与代数重数都等于 1。本文的研究是对文献[8]中二阶 Sturm-Liouville 方程特征值的相关问题的推广。

关键词： 四阶 Sturm-Liouville 方程　Dirichlet 边值条件　边值问题　特征值　代数重数　几何重数　解的估计　实值性　可数性

Abstract: In this paper, we study the fourth-order Sturm-Liouville eigenvalue problems with Dirichlet boundary condition. Here we first present some useful estimations of the fundamental solutions of initial problems and an equivalent definition of the eigenvalues. Then we prove that the eigenvalues are real and countable. Meanwhile, we also conclude that algebraic and geometric multiplicities are both equal to 1. All these discussions are the improvement of the second-order Sturm-Liouville eigenvalue problems in bibliography [8].

Key words: Sturm-Liouville problem　eigenvalue　Dirichlet boundary condition　estimation of the solutions　Fourth-Order equation　real　countable　algebraic and geometric multiplicities

一、绪　论

Sturm-Liouville 问题（简称 S-L 问题）起源于十九世纪初叶，J.Fourier 对热传导问题的数学处理。19 世纪 30 年代，Sturm 和 Liouville 把 Fourier 的方法进行改进后，进行一般化讨论，即后来成为解决一类数学物理方程（特别是弦和面的振动方程、波动方程、固体热传导方程等）的定解问题的基础。

在近两个世纪的发展过程中，其经典 S-L 理论得到了广泛的应用验证与推广。与此同时，由于各方学者在 S-L 问题相关领域，例如 S-L 的谱、谱的反问题、奇异微分算子、算子的迹、高阶微分方程以及微分方程组等方面取得了大量开拓性的进展，极大的丰富了该问题。

(一) Sturm-Liouville 理论的产生与发展

1836 年至 1837 年期间，Sturm 和 Liouville 接连发表了一系列关于正则二阶微分算子谱问题的学术论文，这些文章奠定了 S-L 理论的思想基础，并对一般的线性以及非线性微分方程的研究产生了重大影响[23]。

1910 年，Wely 将当时经典的 S-L 理论进行严格的处理，并在这个基础上，把问题推广到了无限区间上，而开创奇异微分算子理论的研究[15]。1932 年 Non.Neumann 为其量子力学著作建立了完善的数学理论，特别是无界自共轭算子的谱理论，这对量子力学的发展起到了极大的推动作用，同时也让奇异 S-L 算子理论成为量子力学中最为有用的数学工具。1962 年 Titchmarsh [2]又一次推进了 S-L 理论的研究。此外，复系数微分方程是最早是在处理带有能量耗散的量子力学问题中被人所关注研究的，Naimark M.A 和 Levin B.Y.在处理带有复势函数的 Schrödinger 算子谱分析[3,6]。在这之后，又有 Zettl A., Edmunds D.E, Naimark M.A 等国际知名学者在微分方程算子理论方面做了大量开拓性工作[4,9,27]，使得微分算子的领域更加广泛。近些年来，Wu H., Kong Q.与 Zettl A.等首次又将几何的观点应用于微分方程的研究中，给出了线性微

分算子边值条件的空间结构，并且进一步拓展了该问题的谱对边界条件的依赖性，从而揭示出谱的许多较为深刻的特性[12,13,15]。

正是在这一系列的理论成果的推动下，S-L 理论才成为了一个系统的理论领域。

(二) 四阶 Sturm-Liouville 问题的背景与意义

相对二阶微分方程，但四阶的 S-L 问题的研究就相对少了不少。当然四阶微分方程，例如在 Dirichlet 边界条件下，特征函数是存在的，这点不少文献都已经给出了证明，如[29]。同时，四阶 S-L 问题在实际问题中也有着广泛应用。例如弹性杆件的纵向振动和扭转振动问题得到的就是二阶方程，而横向振动振动问题得到的便是四阶方程。因而有关特征值的研究对材料力学问题有着极其重要的实际意义。

(三) 各类边界条件的分类

由于 Wu H., Kong Q.与 Zettl A.之前的工作，我们知道 S-L 特征值问题对的边值条件的依赖性，因而边界条件的分类对其问题的研究具有重要意义。Wu H., Kong Q.与 Zettl A.在文献[14]中给出了分离边界条件和耦合边界条件的定义。根据其定义，许多文献都是按照分离边界条件下进行问题讨论的，这是因为在耦合条件下讨论相关问题的时候难度较大。杨树生和张晓军在文献[26]中给出分离自伴边界条件与耦合边界条件的关系，同时也找出了其他自伴边界条件与他们之间的关系。

在这样的定义分类条件下，我们很容易就可以验证第一类边界条件（Dirichlet）、第二类边界条件（Neumann）都是属于自伴可分离边界条件，因而在这类边界条件下对于特征值的相关问题可以大多可以借鉴 Wu H., Kong Q.与 Zettl A.在文献[1,12,13,15]所采用的方法与结论。例如许多国内文献[20,24,32]都是基于 Wu H., Kong Q.与 Zettl A.等人在文献[1]的研究。

此外，由于 Dirichlet 边界条件下的 S-L 问题是其中最为典型也是最为常见的一类经典问题，因而对 Dirichlet 边界条件下 S-L 特征值问题的探究是研究复杂边界条件下的 S-L 的基础和保证。例如，文献[16]就是利用经典的“Sturm 打靶法”处理一般化的可分离边界条件下的 S-L 问题特征值的重数问题以及其他相关问题。

(四) 研究内容和结论

本文的研究主要是以 Jürgen Pöschel 和 Eugene Trubowite 在文献[8]中对二阶 S-L 方程特征值相关问题的讨论为基础，推广到四阶方程在 Dirichlet 边界条件下的特征值问题，其中包括先对四阶方程的初值问题的解进行基本估计，以及对四阶问题特征值的等价定义与几何、代数重数的计算。

本文研究内容具体包括：

1. 求解未扰动方程的基本解组，并构造 Wronskian 行列式。
2. 基本解组的估计。
3. 原始方程的常数变异公式。
4. 建立特征值的代数方程。
5. 特征值可数性、实值性的证明。
6. 几何、代数重数计算。

本文的具体研究结论：

1. 建立特征值所满足的代数方程。
2. 证明实值性与可数性。
3. 计算得出代数重数等于几何重数等于 1。

二、初值问题的解的基本估计与预备知识

本章节我们讨论经典形式的 S-L 方程的初值问题的解，即方程

$$y^{(4)}+q(x)y=\lambda y,\quad 0\le x\le 1, \tag{0.1}$$

其中，$\lambda\in\mathbb{C}, q\in L^2_{\mathbb{C}}=L^2_{\mathbb{C}}[0,1]$，即 Hilbert 空间在 $[0,1]$ 所有复值、平方可积的函数。

现在我们首先要构造方程(0.1)满足以下初值条件的四个解 y_1,y_2,y_3,y_4

$$\begin{bmatrix} y_1(0,\lambda,q) & y_2(0,\lambda,q) & y_3(0,\lambda,q) & y_4(0,\lambda,q) \\ y_1'(0,\lambda,q) & y_2'(0,\lambda,q) & y_3'(0,\lambda,q) & y_4'(0,\lambda,q) \\ y_1''(0,\lambda,q) & y_2''(0,\lambda,q) & y_3''(0,\lambda,q) & y_4''(0,\lambda,q) \\ y_1'''(0,\lambda,q) & y_2'''(0,\lambda,q) & y_3'''(0,\lambda,q) & y_4'''(0,\lambda,q) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda} \end{bmatrix}.$$

同时，我们还需要可以得出任意方程(0.1)的解都可以表示成为这四个解的线性表示，即

$$y(x)=y(0)y_1(x)+y'(0)y_2(x)+\frac{y''(0)}{\sqrt{\lambda}}y_3(x)+\frac{y'''(0)}{\sqrt{\lambda}}y_4(x).$$

（一） 构造基本解组

由于形式幂级数也是微分方程求解中常用的一种方法，本章也将采用 Jürgen Pöschel 和 Eugene Trubowite 在文献[8]中采用形式幂级数的方法对 y_1,y_2,y_3,y_4 进行构造。

下面先给出一个引理。

引理 2.1 若 $f\in L^2_{\mathbb{C}}, a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{C}$，则方程

$$y^{(4)}=\lambda y-f(x),\quad 0\le x\le 1$$

满足初值条件

$$y(0)=a_1,\quad y'(0)=a_2,\quad y''(0)=a_3,\quad y'''(0)=a_4$$

的唯一解是

$$y(x)=a_1\tau_\lambda(x)+a_2\omega_\lambda(x)+\frac{a_3}{\sqrt{\lambda}}c_\lambda(x)+\frac{a_4}{\sqrt{\lambda}}s_\lambda(x)+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x s_\lambda(x-t)f(t)\mathrm{d}t. \tag{0.2}$$

其中

$$\tau_\lambda(x)=\frac{\cosh(\lambda^{\frac14}x)+\cos(\lambda^{\frac14}x)}{2},\quad \omega_\lambda(x)=\frac{1}{\lambda^{\frac14}}\left[\frac{\sinh(\lambda^{\frac14}x)+\sin(\lambda^{\frac14}x)}{2}\right],$$

$$c_\lambda(x)=\frac{\cosh(\lambda^{\frac14}x)-\cos(\lambda^{\frac14}x)}{2},\quad s_\lambda(x)=\frac{1}{\lambda^{\frac14}}\left[\frac{\sinh(\lambda^{\frac14}x)-\sin(\lambda^{\frac14}x)}{2}\right].$$

证明： 考虑积分

$$y_f(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x s_\lambda(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x\left[\frac{\sinh(\lambda^{\frac14}x)-\sin(\lambda^{\frac14}x)}{2\lambda^{\frac14}}\right]f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由于 $\sin x$ 与 $\sinh x$ 满足性质，

$$\sin(x-y)=\sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y),\quad \cos^2(x)+\sin^2(x)=1,$$
$$\sinh(x-y)=\sinh(x)\cosh(y)-\cosh(x)\sinh(y),\quad \cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1.$$

因而

$$\begin{aligned}y_f(x)=&\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left[\frac{\sinh(\lambda^{\frac14}x)}{\lambda^{\frac14}}\int_0^x\cosh(\lambda^{\frac14}t)f(t)\,\mathrm{d}t-\cosh(\lambda^{\frac14}x)\int_0^x\frac{\sinh(\lambda^{\frac14}t)}{\lambda^{\frac14}}f(t)\,\mathrm{d}t\right]\\&-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left[\frac{\sin(\lambda^{\frac14}x)}{\lambda^{\frac14}}\int_0^x\cos(\lambda^{\frac14}t)f(t)\,\mathrm{d}t-\cos(\lambda^{\frac14}x)\int_0^x\frac{\sin(\lambda^{\frac14}t)}{\lambda^{\frac14}}f(t)\,\mathrm{d}t\right].\end{aligned}$$

又由于 $\cosh(t)f(t),\cos(t)f(t),\sinh(t)f(t),\sin(t)f(t)$ 可积，y_f 绝对连续，因此可得

$$\begin{aligned}y_f^{(4)}(x)=&\frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda}}\left[\frac{\sinh(\lambda^{\frac14}x)}{\lambda^{\frac14}}\int_0^x\cosh(\lambda^{\frac14}t)f(t)\,\mathrm{d}t-\cosh(\lambda^{\frac14}x)\int_0^x\frac{\sinh(\lambda^{\frac14}t)}{\lambda^{\frac14}}f(t)\,\mathrm{d}t\right]\\&-\frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda}}\left[\frac{\sin(\lambda^{\frac14}x)}{\lambda^{\frac14}}\int_0^x\cos(\lambda^{\frac14}t)f(t)\,\mathrm{d}t-\cos(\lambda^{\frac14}x)\int_0^x\frac{\sin(\lambda^{\frac14}t)}{\lambda^{\frac14}}f(t)\,\mathrm{d}t\right]-f(x).\end{aligned}$$

故 y_f 是 $y^{(4)}=\lambda y-f(x)$ 满足初值条件 $y_f(0)=0,y_f'(0)=0,y_f''(0)=0,y_f'''(0)=0$ 的一个特解，又由于 $\tau_\lambda,\omega_\lambda,c_\lambda,s_\lambda$ 是齐次方程满足 $y(0)=a_1,y'(0)=a_2,y''(0)=a_3,\ y'''(0)=a_4$ 的解，因而

$$y(x)=a_1\tau_\lambda(x)+a_2\omega_\lambda(x)+\frac{a_3}{\sqrt{\lambda}}c_\lambda(x)+\frac{a_4}{\sqrt{\lambda}}s_\lambda(x)+y_f.$$

是原方程满足原初值条件的解。

下面我们考虑唯一性。

假设 $\tilde{y}$ 是该非齐次方程满足相同初值 χ 条件的另一个解。则 $v=y-\tilde{y}$ 满足

$$v^{(4)}=\lambda v,\quad v(0)=0,\quad v'(0)=0,\quad v''(0)=0,\quad v'''(0)=0.$$

由于该方程只有零解，所以 $y=\tilde{y}$。

现在我们开始来构造 y_1,y_2,y_3,y_4。不失一般性我们先构造 y_1。假定 $y_1(x,\lambda,q)$ 表示成在 q 处的幂级数展开，即

$$y_1(x,\lambda,q)=T_0(x,\lambda)+\sum_{n\geq1}T_n(x,\lambda,q).$$

其中

$$T_n(x,\lambda,q)=T_n(x,\lambda,q_1,\cdots q_n)\big|_{q_1=\cdots q_n=q},$$

同时$T_n(x,\lambda,q_1,\cdots q_n)$对于每个$x,\lambda$是一个在$L^2_{\mathbb{C}}\times\cdots\times L^2_{\mathbb{C}}$上的有界的，多线性的对称形式。

另外零阶项是由$q=0$的时候决定的，因而可以表示成

$$T_0(x,\lambda)=\frac{\cosh(\lambda^{\frac{1}{4}}x)+\cos(\lambda^{\frac{1}{4}}x)}{2},$$

我们在形式上对该幂级数进行四次求导（保证相同的q），可以得到

$$T_n^{(4)}=\lambda T_n-qT_{n-1},\quad n\ge 1.$$

其初值条件是为

$$T_n(0,\lambda,q)=0,\quad T_n'(0,\lambda,q)=0,\quad T_n''(0,\lambda,q)=0,\quad T_n'''(0,\lambda,q)=0,\quad n\ge 1.$$

因为对于所有的q有

$$y_1(0)=1+\sum\nolimits_{n\ge 1}T_n(0)=1,\quad y_1'(0)=\sum\nolimits_{n\ge 1}T_n'(0)=0,$$
$$y_1''(0)=\sum\nolimits_{n\ge 1}T_n''(0)=0,\quad y_1'''(0)=\sum\nolimits_{n\ge 1}T_n'''(0)=0.$$

所以可以依据引理 2.1 得出

$$T_n(x,\lambda,q)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)T_{n-1}(t,\lambda,q)\,\mathrm{d}t,\quad n\ge 1.$$

因此

$$\begin{aligned}T_1(x,\lambda,q)&=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)T_0(t,\lambda,q)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x \tau_\lambda(t_1)s_\lambda(x-t_1)q(t_1)\,\mathrm{d}t_1,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}T_2(x,\lambda,q)&=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x s_\lambda(x-t_2)q(t_2)T_1(t_2,\lambda,q)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{(\sqrt{\lambda})^2}\int_0^x s_\lambda(x-t_2)q(t_2)\left[\int_0^{t_2}\tau_\lambda(t_1)s_\lambda(x-t_1)q(t_1)\,\mathrm{d}t_1\right]\mathrm{d}t_2\\&=\frac{1}{(\sqrt{\lambda})^2}\int_{0\le t_1\le t_2\le t_3=x}\tau_\lambda(t_1)\prod_{i=1}^{2}\left[s_\lambda(t_{i+1}-t_i)q(t_i)\right]\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2.\end{aligned}$$

重复上述过程可以得出

$$T_n(x,\lambda,q)=\frac{1}{(\sqrt{\lambda})^n}\int_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}=x}\tau_\lambda(t_1)\prod_{i=1}^{n}\left[s_\lambda(t_{i+1}-t_i)q(t_i)\right]\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n,\quad n\ge 1.\tag{0.3}$$

因此可以得到

$$y_1(x,\lambda,q)=\tau_\lambda(x)+\sum_{n\ge 1}T_n(x,\lambda,q).$$

采取同样的方法可以得到y_2, y_3, y_4

$$y_2(x,\lambda,q) = \omega_\lambda(x) + \sum_{n\ge1} W_n(x,\lambda,q).$$
$$y_3(x,\lambda,q) = c_\lambda(x) + \sum_{n\ge1} C_n(x,\lambda,q).$$
$$y_4(x,\lambda,q) = s_\lambda(x) + \sum_{n\ge1} S_n(x,\lambda,q).$$

其中

$$W_n(x,\lambda,q) = \frac{1}{(\sqrt{\lambda})^n} \int_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}=x} \omega_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^{n} \left[s_\lambda(t_{i+1}-t_i) q(t_i) \right] \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n, \quad n \ge 1. \tag{0.4}$$

$$C_n(x,\lambda,q) = \frac{1}{(\sqrt{\lambda})^n} \int_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}=x} c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^{n} \left[s_\lambda(t_{i+1}-t_i) q(t_i) \right] \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n, \quad n \ge 1. \tag{0.5}$$

$$S_n(x,\lambda,q) = \frac{1}{(\sqrt{\lambda})^n} \int_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}=x} s_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^{n} \left[s_\lambda(t_{i+1}-t_i) q(t_i) \right] \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n, \quad n \ge 1. \tag{0.6}$$

目前为止，这里仅仅得到了一些形式计算。下面我们将说明这些级数收敛到方程(0.1)的真正解。

首先定义有两个记号表示在$L^2_{\mathbb{C}}$上的内积和范数

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \bar{g}(t) \mathrm{d}t \qquad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

定理 2.1 系数分别由(0.3)，(0.4)，(0.5)，(0.6)决定的y_1, y_2, y_3, y_4 的形式幂级数展开在有界子集$[0,1]\times\mathbb{C}\times L^2_{\mathbb{C}}$上一致收敛到方程$y^{(4)} + q(x)\mathrm{y} = \lambda y, \quad 0 \le x \le 1$ 的唯一解，满足初值条件

$$\begin{bmatrix} y_1(0,\lambda,q) & y_2(0,\lambda,q) & y_3(0,\lambda,q) & y_4(0,\lambda,q) \\ y_1'(0,\lambda,q) & y_2'(0,\lambda,q) & y_3'(0,\lambda,q) & y_4'(0,\lambda,q) \\ y_1''(0,\lambda,q) & y_2''(0,\lambda,q) & y_3''(0,\lambda,q) & y_4''(0,\lambda,q) \\ y_1'''(0,\lambda,q) & y_2'''(0,\lambda,q) & y_3'''(0,\lambda,q) & y_4'''(0,\lambda,q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda} \end{bmatrix}.$$

此外，y_1, y_2, y_3, y_4还满足积分方程

$$y_1(x,\lambda,q)=\tau_\lambda(x)+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)y_1(x,\lambda,q)\mathrm{d}t$$
$$y_2(x,\lambda,q)=\omega_\lambda(x)+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)y_2(x,\lambda,q)\mathrm{d}t$$
$$y_3(x,\lambda,q)=c_\lambda(x)+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)y_3(x,\lambda,q)\mathrm{d}t$$
$$y_4(x,\lambda,q)=s_\lambda(x)+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)y_4(x,\lambda,q)\mathrm{d}t.$$

同时还有估计

$$\left|y_j(x,\lambda,q)\right|\le\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right],\quad j=1,2,3,4 \tag{0.7}$$

其中

$$\mathrm{M}(\lambda)=\max\left\{\left|\Re(\lambda^{\frac14})\right|,\left|\Im(\lambda^{\frac14})\right|\right\}.$$

证明： 不妨先讨论 y_1 的证明，y_2,y_3,y_4 的类似。

先看几个基本不等式

$$\left|\cos(\lambda^{\frac14}x)\right|\le\frac12\left|e^{i\lambda^{\frac14}x}+e^{-i\lambda^{\frac14}x}\right|\le\exp\left(\left|\Im(\lambda^{\frac14})\right|x\right).$$

同时对于 $0\le x\le 1$，

$$\left|\frac{\sin(\lambda^{\frac14}x)}{\lambda^{\frac14}}\right|=\left|\int_0^x\cos(\lambda^{\frac14}t)\,\mathrm{d}t\right|\le\int_0^x\exp\left(\left|\Im(\lambda^{\frac14}t)\right|\mathrm{d}t\right)\le\exp\left(\left|\Im(\lambda^{\frac14})\right|x\right).$$

同理可得

$$\left|\cosh(\lambda^{\frac14}x)\right|\le\exp\left(\left|\Re(\lambda^{\frac14})\right|x\right)$$
$$\left|\sinh(\lambda^{\frac14}x)\right|\le\exp\left(\left|\Re(\lambda^{\frac14})\right|x\right).$$

因此

$$\tau_\lambda(x)=\left|\frac{\cosh(\lambda^{\frac14}x)+\cos(\lambda^{\frac14}x)}{2}\right|\le\frac12\left(\left|\cosh(\lambda^{\frac14}x)\right|+\left|\cos(\lambda^{\frac14}x)\right|\right)\le\exp\left(\mathrm{M}(\lambda)x\right).$$

同理可得

$$\left|\omega_\lambda(x)\right|\le\exp\left(\mathrm{M}(\lambda)x\right)$$
$$\left|c_\lambda(x)\right|\le\exp\left(\mathrm{M}(\lambda)x\right)$$
$$\left|s_\lambda(x)\right|\le\exp\left(\mathrm{M}(\lambda)x\right).$$

所以 y_1 的展开式中第 n 项可以被控制为

$$\begin{aligned}|T_n(x,\lambda,q)| &\le \frac{1}{|(\sqrt{\lambda})^n|}\int_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}=x}|\tau_\lambda(t_1)|\prod_{i=1}^{n}|s_\lambda(t_{i+1}-t_i)q(t_i)|\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n \\ &\le \frac{1}{|(\sqrt{\lambda})^n|}\exp(\mathrm{M}(\lambda)x)\int_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}=x}\prod_{i=1}^{n}|q(t_i)|\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n \quad .\end{aligned}$$

第二行中的积分值并不因为该改变$t_1,\cdots t_n$的顺序而改变，同时积分区域事实上也可以改写为$[0,x]^n$，因而可得

$$\begin{aligned}\int_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}=x}\prod_{i=1}^{n}|q(t_i)|\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n &= \frac{1}{n!}\int_{[0,x]^n}\prod_{i=1}^{n}|q(t_i)|\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n \\ &= \frac{1}{n!}\left[\int_0^x|q(t)|\,\mathrm{d}t\right]^n \\ &\le \frac{1}{n!}(\|q\|\sqrt{x})^n,\end{aligned}$$

其中第二个不等式由 Schwarz 不等式可得。因此我们有估计

$$|T_n(x,\lambda,q)| \le \frac{1}{n!}\exp(\mathrm{M}(\lambda)x)\left(\frac{\|q\|\sqrt{x}}{|\sqrt{\lambda}|}\right)^n .$$

这说明y_1的形式幂级数在有界子集$[0,1]\times\mathbb{C}\times L^2_{\mathbb{C}}$上一致收敛到一个连续函数。因而对其控制函数求和即可得出y_1的估计式。

同时由于原形式幂级数一致收敛，因为求和与求积分可以交换顺序，所以有

$$\begin{aligned}y_1(x,\lambda,q) &= \tau_\lambda(x)+\sum_{n\ge1}T_n(x,\lambda,q) \\ &= \tau_\lambda(x)+\sum_{n\ge1}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)T_{n-1}(x,\lambda,q)\mathrm{d}t \\ &= \tau_\lambda(x)+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)\sum_{n\ge1}T_{n-1}(x,\lambda,q)\mathrm{d}t \\ &= \tau_\lambda(x)+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)y_1(x,\lambda,q)\mathrm{d}t \quad .\end{aligned}$$

由引理 2.1 可知y_1是方程的$y^{(4)}+q(x)\mathrm{y}=\lambda y$满足初值条件的解。

为了证明唯一性，我们假设$\tilde{y}_1$是另一个方程(0.1)与y_1满足相同初值条件的解。又由引理 2.1，

$$\tilde{y}_1(x,\lambda,q)=\tau_\lambda(x)+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)\tilde{y}_1(x,\lambda,q)\mathrm{d}t.$$

因而，$v=y_1-\tilde{y}_1$满足

$$v(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)v(x,\lambda,q)\mathrm{d}t,$$

因此由 Schwarz 不等式，

$$\begin{aligned}|v(x)|^2 &\le \frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|^2}\int_0^x \left|s_\lambda(x-t)q(t)\right|^2 \mathrm{d}t\cdot\int_0^x |v(t)|^2\,\mathrm{d}t \\ &\le c\int_0^x |v(t)|^2\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中 $c=\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|^2}\|q\|\max\left|s_\lambda^2(t)\right|$。

此外由于非负函数 $F(x)=e^{-cx}\int_0^x \left|v(t)\right|^2\mathrm{d}t$ 在区间 $[0,1]$ 只有非正的导数，且 $F(0)=0$，因此在 $[0,1]$ 上 $F(x)\equiv 0$，从而 $v\equiv 0$，唯一性得证。

（二） 基本解组的分析性质

定理 2.2

(A) 对于任意 $x\in[0,1]$，

$$y_j(x,\lambda,q),y_j'(x,\lambda,q),y_j''(x,\lambda,q),y_j'''(x,\lambda,q),\quad j=1,2,3,4$$

都是在整函数 $\mathbb{C}\times L_{\mathbb{C}}^2$，同时他们都在 $\mathbb{R}\times L_{\mathbb{C}}^2$ 是实值的。

(B) 原方程(0.1)的解 $y_j(\cdot,\lambda,q),\quad j=1,2,3,4$ 是一个从 $\mathbb{C}\times L_{\mathbb{C}}^2$ 到 $H_{\mathbb{C}}^2$ 的一个解析映射[1]。

证明： 证明过程与文献[8]中关于解析性质的讨论完全类似。

（三） Wronskian 行列式

引理 2.2（Wronskian）y_1,y_2,y_3,y_4 的 Wronskian 行列式可以表示成 $\Omega(\lambda)$，其中由于

$$\Omega(\lambda)=\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda,q) & y_2(x,\lambda,q) & y_3(x,\lambda,q) & y_4(x,\lambda,q)\\ y_1'(x,\lambda,q) & y_2'(x,\lambda,q) & y_3'(x,\lambda,q) & y_4'(x,\lambda,q)\\ y_1''(x,\lambda,q) & y_2''(x,\lambda,q) & y_3''(x,\lambda,q) & y_4''(x,\lambda,q)\\ y_1'''(x,\lambda,q) & y_2'''(x,\lambda,q) & y_3'''(x,\lambda,q) & y_4'''(x,\lambda,q)\end{vmatrix}=\lambda. \qquad (0.8)$$

因此，y_1,y_2,y_3,y_4 线性无关。

---

[1] 对于任意非负整数 k，$H_{\mathbb{C}}^k=H_{\mathbb{C}}^k[0,1]$ 定义为 Hilbert 空间 $[0,1]$ 上在 L^2 有 k 阶导数的所有复值函数。$H_{\mathbb{R}}^k$ 是 $H_{\mathbb{C}}^k$ 上所有实值函数的子空间。特别的，$L_{\mathbb{C}}^2=H_{\mathbb{C}}^0$ 以及 $L_{\mathbb{R}}^2=H_{\mathbb{R}}^0$。

证明：根据行列式性质以及 y_1,y_2,y_3,y_4 为方程(0.1)的解，可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\Omega(x,\lambda,q)&=\frac{\partial}{\partial x}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y_4''' \end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \\ y_1^{(4)} & y_2^{(4)} & y_3^{(4)} & y_4^{(4)} \end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \\ (\lambda-q)y_1 & (\lambda-q)y_2 & (\lambda-q)y_3 & (\lambda-q)y_4 \end{vmatrix}\\ &=0\end{aligned}$$

因此由 $\Omega(x,\lambda,q)$ 的连续性可得

$$\Omega(x,\lambda,q)=\Omega(0,\lambda,q)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda} \end{vmatrix}=\lambda.$$

所以 $\Omega(x,\lambda,q)=\Omega(\lambda)=\lambda$，从而由常微分方程的理论[21]可知，$y_1,y_2,y_3,y_4$ 线性无关。

（四） 常数变异公式的构造

定理 2.3 若 $f\in L^2_{\mathbb{C}},a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{C}$，则非齐次方程

$$y^{(4)}+q(x)y=\lambda y-f\left(x\right),\quad 0\le x\le 1,$$

存在唯一的解满足初值条件

$$y\left(0\right)=a_1,\quad y'(0)=a_2,\quad y''\left(0\right)=a_3,\quad y'''\left(0\right)=a_4,$$

其中这个解可以表示为

$$\begin{aligned}y\left(x\right)&=a_1y_1(x)+a_2y_2(x)+\frac{a_3}{\sqrt{\lambda}}y_3(x)+\frac{a_4}{\sqrt{\lambda}}y_4(x)\\ &\quad+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x\left[\begin{vmatrix} y_1(t) & y_4(t) \\ y_1(x) & y_4(x) \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} y_2(t) & y_3(t) \\ y_2(x) & y_3(x) \end{vmatrix}\right]f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{0.9}$$

证明： 该证明与引理 2.1 的方法一样，只需将原式中的 $s_\lambda(x-t)$，即

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\left[\frac{\sinh(\lambda^{\frac{1}{4}}(x-t)-\sin(\lambda^{\frac{1}{4}}(x-t))}{2}\right],$$

利用 $\sinh(x),\sin(x)$ 函数的减法公式所得的多项式替换为

$$\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} y_1(t)+y_3(t) & y_2(t)+y_4(t) \\ y_1(x)+y_3(x) & y_2(x)+y_4(x) \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} y_1(t)-y_3(t) & y_2(t)-y_4(t) \\ y_1(x)-y_3(x) & y_2(x)-y_4(x) \end{vmatrix}\right],$$

并且利用引理 2.2 中的结论 $\Omega(x,\lambda,q)=\lambda$ 化简后即可得出结论。

推论 2.1 每一个方程(0.1)的解都可以唯一的表示成

$$y(x)=y(0)y_1(x)+y'(0)y_2(x)+\frac{y''(0)}{\sqrt{\lambda}}y_3(x)+\frac{y'''(0)}{\sqrt{\lambda}}y_4(x). \tag{0.10}$$

同时，如果一个解在 $[0,1]$ 上有 4 重根，则它恒等于 0。

证明： 由定理 2.3 可以直接得到推论中的第一条等式。下面我们验证第二条，若 x_0 是解的 4 重根，则

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0,\lambda,q) & y_2(x_0,\lambda,q) & y_3(x_0,\lambda,q) & y_4(x_0,\lambda,q) \\ y_1'(x_0,\lambda,q) & y_2'(x_0,\lambda,q) & y_3'(x_0,\lambda,q) & y_4'(x_0,\lambda,q) \\ y_1''(x_0,\lambda,q) & y_2''(x_0,\lambda,q) & y_3''(x_0,\lambda,q) & y_4''(x_0,\lambda,q) \\ y_1'''(x_0,\lambda,q) & y_2'''(x_0,\lambda,q) & y_3'''(x_0,\lambda,q) & y_4'''(x_0,\lambda,q) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \frac{y''(0)}{\sqrt{\lambda}} \\ \frac{y'''(0)}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ y''(x_0) \\ y'''(x_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由引理 2.2 可知

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0,\lambda,q) & y_2(x_0,\lambda,q) & y_3(x_0,\lambda,q) & y_4(x_0,\lambda,q) \\ y_1'(x_0,\lambda,q) & y_2'(x_0,\lambda,q) & y_3'(x_0,\lambda,q) & y_4'(x_0,\lambda,q) \\ y_1''(x_0,\lambda,q) & y_2''(x_0,\lambda,q) & y_3''(x_0,\lambda,q) & y_4''(x_0,\lambda,q) \\ y_1'''(x_0,\lambda,q) & y_2'''(x_0,\lambda,q) & y_3'''(x_0,\lambda,q) & y_4'''(x_0,\lambda,q) \end{vmatrix}\neq 0,$$

所以

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \frac{y''(0)}{\sqrt{\lambda}} \\ \frac{y'''(0)}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

因此 $y(x)$ 恒等于 0。

（五） 解的基本估计

定理 2.4（基本估计） 在$[0,1]\times\mathbb{C}\times L^2_{\mathbb{C}}$，

$$\left|y_1(x,\lambda,q)-\tau_\lambda(x)\right|\le\frac{1}{\left|\lambda^{\frac14}\right|}\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]$$

$$\left|y_2(x,\lambda,q)-\omega_\lambda(x)\right|\le\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]$$

$$\left|y_3(x,\lambda,q)-c_\lambda(x)\right|\le\frac{1}{\left|\lambda^{\frac14}\right|}\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]$$

$$\left|y_4(x,\lambda,q)-s_\lambda(x)\right|\le\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right].$$

以及

$$\left|y_1'(x,\lambda,q)-\tau_\lambda'(x)\right|\le\frac{\|q\|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]$$

$$\left|y_2'(x,\lambda,q)-\omega_\lambda'(x)\right|\le\frac{\|q\|}{\left|\lambda^{\frac34}\right|}\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]$$

$$\left|y_3'(x,\lambda,q)-c_\lambda'(x)\right|\le\frac{\|q\|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]$$

$$\left|y_4'(x,\lambda,q)-s_\lambda'(x)\right|\le\frac{\|q\|}{\left|\lambda^{\frac34}\right|}\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right].$$

以及

$$\left|y_1''(x,\lambda,q)-\tau_\lambda''(x)\right|\le\|q\|\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]$$

$$\left|y_2''(x,\lambda,q)-\omega_\lambda''(x)\right|\le\frac{\|q\|}{\left|\lambda^{\frac14}\right|}\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]$$

$$\left|y_3''(x,\lambda,q)-c_\lambda''(x)\right|\le\|q\|\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]$$

$$\left|y_4''(x,\lambda,q)-s_\lambda''(x)\right|\le\frac{\|q\|}{\left|\lambda^{\frac14}\right|}\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right].$$

以及

$$\left|y_1'''(x,\lambda,q)-\tau_\lambda'''(x)\right|\le\|q\|\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right|\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]$$

$$\left|y_2'''(x,\lambda,q)-\omega_\lambda'''(x)\right|\le\|q\|\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]$$

$$\left|y_3'''(x,\lambda,q)-c_\lambda'''(x)\right|\le\|q\|\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right|\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]$$

$$\left|y_4'''(x,\lambda,q)-s_\lambda'''(x)\right|\le\|q\|\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right].$$

证明： 不妨先先考虑 y_1 ，由公式(0.3)可得

$$\left|y_1(x,\lambda,q)-\tau_\lambda(x)\right|\le\sum_{n\ge1}\left|T_n(x,\lambda,q)\right|.$$

对于每一项 $T_n(x,\lambda,q), n\ge1$ 都包含有界项 $s_\lambda(x-t_n)$，即

$$\left|s_\lambda(t)\right|=\left|\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\frac{\sinh(\lambda^{\frac{1}{4}}t)-\sin(\lambda^{\frac{1}{4}}t)}{2}\right|=\frac{1}{\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right|}\left|\frac{\sinh(\lambda^{\frac{1}{4}}t)-\sin(\lambda^{\frac{1}{4}}t)}{2}\right|\le\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)t\right],\quad 0\le t\le1.$$

因此，重复定理 2.1 的证明过程，我们可以得到估计

$$\left|T_n(x,\lambda,q)\right|\le\frac{1}{\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right|}\exp(\mathrm{M}(\lambda)x)\frac{1}{n!}\left(\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right)^n,\quad n\ge1\quad .$$

对这些控制函数项包括 $n=0$ 项求和即可得出第一组第一个不等式。同样的方法可以得出第一组的其他不等式，只不过在第一组的第二个不等式的推导过程中还需要利用

$\left|\omega_\lambda(t)\right|=\left|\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\frac{\sinh(\lambda^{\frac{1}{4}}t)+\sin(\lambda^{\frac{1}{4}}t)}{2}\right|=\frac{1}{\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right|}\left|\frac{\sinh(\lambda^{\frac{1}{4}}t)+\sin(\lambda^{\frac{1}{4}}t)}{2}\right|\le\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)t\right],\quad 0\le t\le1.$ 下面来估计第 1 组不等式，首先对 y_1 的满足的积分方程两边微分

$$y_1'(x,\lambda,q)=\tau_\lambda'(x)+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x c_\lambda(x-t)q(t)y_1(x,\lambda,q)\mathrm{d}t.$$

利用定理 2.1 的估计以及不等式 $\left|c_\lambda(t)\right|\le\exp\left(\mathrm{M}(\lambda)t\right)$ 可得，

$$\left|y_1'(x,\lambda,q)-\tau_\lambda'(x)\right| \le \frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\exp(\mathrm{M}(\lambda)x)\int_0^x |q(t)| \exp\left[\frac{\|q\|\sqrt{t}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]\mathrm{d}t$$

$$\le \frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]\int_0^x |q(t)|\mathrm{d}t$$

$$\le \frac{\|q\|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right].$$

同理可以估计第 2 组的其他不等式，只不过在估计第 2、4 个不等式时，还需利用

$$\left|y_j(x,\lambda,q)\right| \le \frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\exp\left[\mathrm{M}(\lambda)x+\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right],\quad j=2,4 \quad .$$

剩余的第 3、4 组不等式可以对 y_1,y_2,y_3,y_4 的积分方程两边求 2、3 次微分，然后按照以上方法求得。

三、Dirichlet 边值条件下的特征值重数问题

本章节我们将讨论 Dirichlet 边值条件下，简单形式的四阶 S-L 问题，即方程

$$y^{(4)}+q(x)y=\lambda y,\quad 0\le x\le 1. \tag{1.1}$$

其中，$\lambda\in\mathbb{C}, q\in L^2_{\mathbb{R}}=L^2_{\mathbb{R}}[0,1]$，即 Hilbert 空间在 $[0,1]$ 所有实值、平方可积的函数。

下面再来表述一下四阶形式的 Dirichlet 边值问题。

Dirichlet 边值问题：方程(1.1)在满足 Dirichlet 边界条件下，是否存在非零解。其中 Dirichlet 边界即

$$y(0)=y(1)=0,\quad y''(0)=y''(1)=0.$$

（一） 特征值的定义

定义 3.1 $\lambda\in\mathbb{C}$ 是一个关于 q 的 Dirichlet **特征值**，若上述 Dirichlet 边值问题有非零解；对此特征值对应的非零解称作关于 q 与 λ 的**特征函数**。所有关于 q 的特征值构成的集合称作它的 Dirichlet **谱**[7,8]。

下面参照 Jürgen Pöschel 和 Eugene Trubowite 在文献[8]第二节中的利用经典“Sturm 打靶法”对二阶 Dirichlet 边值问题的讨论，构建四阶 Dirichlet 边值问题相关理论。

首先我们给出四阶问题 Dirichlet 特征值的等价定义。

定理 3.1 $\lambda\in\mathbb{C}$ 是一个关于 q 的 Dirichlet 特征值的充分必要条件是

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} y_2(1,\lambda,q) & y_4(1,\lambda,q) \\ y_2''(1,\lambda,q) & y_4''(1,\lambda,q) \end{vmatrix}=0. \tag{1.2}$$

其中 y_2, y_4 为第二章中所定义满足初值问题的解。

证明： 根据第二章中的推论 2.1 中的公式(0.10)以及四阶形式的 Dirichlet 边界的定义可得，任意方程(1.1)边值问题的解都可以表示成

$$y(x,\lambda,q)=y'(0)y_2(x,\lambda,q)+\frac{y'''(0)}{\sqrt{\lambda}}y_4(x,\lambda,q). \tag{1.3}$$

必要性：若 $\lambda\in\mathbb{C}$ 是一个关于 q 的 Dirichlet 特征值，则 $y(x,\lambda,q)$ 满足 Dirichlet 边界条件，即

$$y(0,\lambda,q)=y'(0)y_2(0,\lambda,q)+\frac{y'''(0)}{\sqrt{\lambda}}y_4(0,\lambda,q)=0$$
$$y''(0,\lambda,q)=y'(0)y_2''(0,\lambda,q)+\frac{y'''(0)}{\sqrt{\lambda}}y_4''(0,\lambda,q)=0$$

$$y(1,\lambda,q)=y'(0)y_2(1,\lambda,q)+\frac{y'''(0)}{\sqrt{\lambda}}y_4(1,\lambda,q)=0$$
$$y''(1,\lambda,q)=y'(0)y_2''(1,\lambda,q)+\frac{y'''(0)}{\sqrt{\lambda}}y_4''(1,\lambda,q)=0$$

由于前面 y_2, y_4 为第二章中所定义的满足初值问题的解，因而前面两个等式是显然的。我们可以把后面来两个等式写成矩阵形式，即

$$\begin{bmatrix} y_2(1,\lambda,q) & y_4(1,\lambda,q) \\ y_2''(1,\lambda,q) & y_4''(1,\lambda,q) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y'(0) \\ \dfrac{y'''(0)}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y(1,\lambda,q) \\ y''(1,\lambda,q) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

由于 $y'(0),\dfrac{y'''(0)}{\sqrt{\lambda}}$ 不同时为零，即此矩阵方程有非零解，故

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} y_2(1,\lambda,q) & y_4(1,\lambda,q) \\ y_2''(1,\lambda,q) & y_4''(1,\lambda,q) \end{vmatrix}=0.$$

充分性： 若有 $\lambda\in\mathbb{C}$ 满足公式(1.2)，则必然有方程(1.4)，因此其解即为满足 Dirichlet 边界的非零解，所以 $\lambda\in\mathbb{C}$ 是关于 q 的 Dirichlet 特征值。

（二） 特征值的可数性与实值性

下面我们先考查特征值的可数性。

当 $q=0$ 时，由定理 3.1 以及第二章中关于 y_2, y_4 的构造，我们可以得到，

$$\Delta_{q=0}(\lambda)=\begin{vmatrix} y_2(1,\lambda,q) & y_4(1,\lambda,q) \\ y_2''(1,\lambda,q) & y_4''(1,\lambda,q)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\omega_\lambda(1) & s_\lambda(1) \\ \omega_\lambda''(1) & s_\lambda''(1)\end{vmatrix}=\sinh(\lambda^{\frac{1}{4}})\sin(\lambda^{\frac{1}{4}}).$$

因此，此问题的 Dirichlet 谱则一个可数的序列，

$$\pi^4,2^4\pi^4,3^4\pi^4,\cdots,n^4\pi^4,\cdots.$$

为此，我们打算给出对于任意 $q\in L^2_{\mathbb{C}}$ 的特征值的可数性证明，同时这个证明也粗略的给出了特征值的位置估计。当时方法仍然是采用文献[8]中对二阶的讨论的方法。

首先先给出一个基于复变函数的简单引理。

引理 3.1 若对于任意的整数 n 都有 $|z-n\pi|\ge\frac{\pi}{4}$，则

$$e^{|\Im(z)|}\le 4|\sin(z)|, \tag{1.5}$$

$$e^{|\Re(z)|}\le 4|\sinh(z)|. \tag{1.6}$$

证明： 先证明第一个不等式，令 $z=x+iy,x,y\in\mathbb{R}$。由于 $|\sin(z)|$ 是偶函数且以 π 为周期，所以只需证明 $0\le x\le\frac{\pi}{2},|z|\ge\frac{\pi}{4}$ 即可。

由正余弦、双曲正余弦函数的复数形式可以得到

$$|\sin(z)|^2=\cosh^2(y)-\cos^2(x).$$

对于 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2},\forall y\in\mathbb{R}$ 有，

$$\cos^2(x)\le\frac{3}{4}\le\frac{3}{4}\cosh^2(y).$$

对于 $0\le x\le\frac{\pi}{6}$，其估计 $|z|\ge\frac{\pi}{4}$ 表明，$y^2\ge(\pi/4)^2-x^2\ge\frac{5}{144}\pi^2\ge\frac{1}{3}$，因此也有

$$\cosh^2(y)\ge 1+y^2\ge\frac{4}{3}\ge\frac{4}{3}\cos^2(x).$$

综合以上两式，可得出

$$|\sin(z)|^2\ge\frac{1}{4}\cosh^2(y)\ge\frac{1}{16}e^{2|y|}.$$

从而第一个不等式得证。

第二个不等式也可以类似证明，只是其中 $|\sinh(z)|$ 是偶函数且以 πi 为周期，所以只需证明 $0\le y\le\frac{\pi}{2},|z|\ge\frac{\pi}{4}$ 即可，剩余证明过程完全模仿之前过程，只是将 x,y 的位置全部替换。

定理 3.2（可数性） 当 $q\in L^2_{\mathbb{C}},\exists N\in\mathbb{N}$，当 $|\Im(\lambda)|<|\Re(\lambda)|$ 时，$\Delta(\lambda)$ 在 1/8 平面

$$\left|\Im(\lambda)\right| < \left|\Re(\lambda)\right| < (N+\frac{1}{2})^4\pi^4,$$

存在 N 个根（重根按重数记个数)。同时对于 $\forall n > N$，$\Delta(\lambda)$ 在苹果形区域

$$\left|\lambda^{\frac{1}{4}} - n\pi\right| < \frac{\pi}{2},$$

分别除了一个单根以外没有其他任何根。

证明：　由于 $\left(\|q\|+1\right)\exp\left[\frac{2\|q\|}{\sqrt{x}}\right]$ 关于任意正数 x 单调递减，因而存在足够大的 N，使得 $N > 16\left(\|q\|+1\right)\exp\left[\frac{2\|q\|}{\sqrt{N}}\right]$。固定这个 N，令 $K > N$ 是另外一个整数。考虑轨道

$$\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right| = (K+\frac{1}{2})\pi,$$

$$\Re(\lambda^{\frac{1}{4}}) = (N+\frac{1}{2})\pi, \quad \Im(\lambda^{\frac{1}{4}}) = (N+\frac{1}{2})\pi$$

$$\left|\Im(\lambda)\right| < \left|\Re(\lambda)\right|$$

以及

$$\left|\lambda^{\frac{1}{4}} - n\pi\right| < \frac{\pi}{2}, \quad n > N.$$

如图 3.1，图 3.2，其中 $\Re(\lambda^{\frac{1}{4}}) = (N+\frac{1}{2})\pi, \quad \Im(\lambda^{\frac{1}{4}}) = (N+\frac{1}{2})\pi$ 是同一条轨道

λ平面的各个轨道表示图(原始大小)

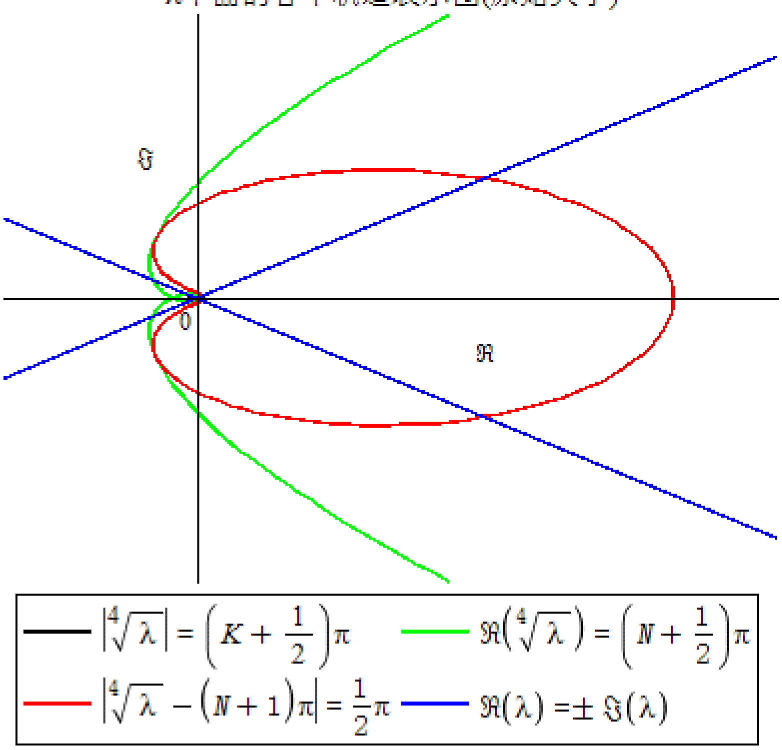

图 3.1（横纵轴比例 1:2）

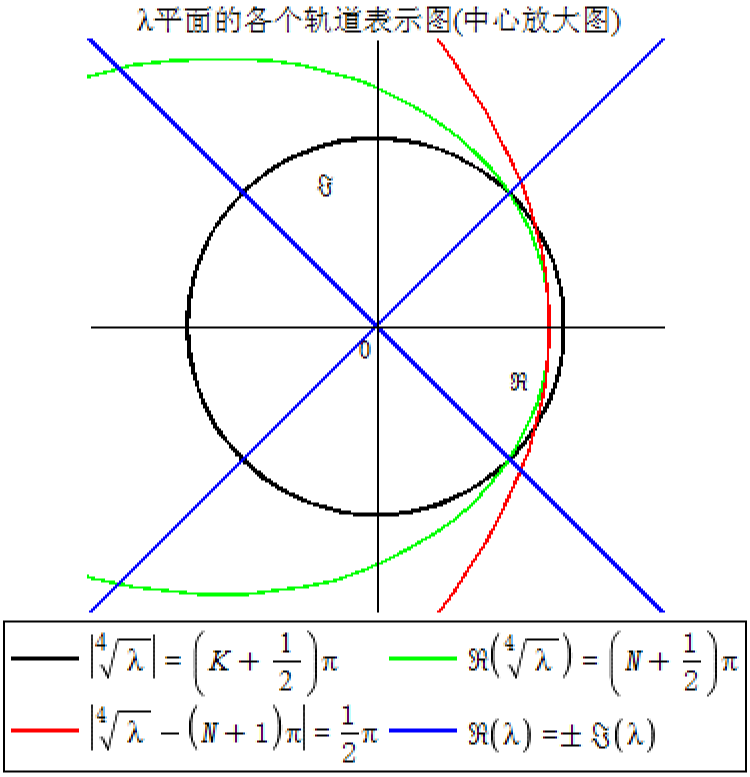

图 3.2（横纵轴比例 1：1）

则引理 3.1 中估计式(1.5)(1.6)在这些轨道上都成立，并且在这些轨道所构成的区域内，由引理 3.1 可知，成立以下估计，

$$e^{2|\Im(z)|} \le 16|\sin(z)\sinh(z)|,$$

$$e^{2|\Re(z)|} \le 16|\sin(z)\sinh(z)|,$$

从而有

$$\begin{aligned}\exp\left[2M(\lambda)\right] &= \exp\left[2\max\left\{\left|\Re(\lambda^{\frac{1}{4}})\right|,\left|\Im(\lambda^{\frac{1}{4}})\right|\right\}\right]\\ &\le 16\left|\sinh(\lambda^{\frac{1}{4}})\sin(\lambda^{\frac{1}{4}})\right|\end{aligned}$$

下面我们将根据定理 2.4 的对 y_2, y_4, y_2'', y_4'' 的基本估计来确定 $\Delta(\lambda)$ 在本定理所确定的区域内零点的个数。

$$\begin{aligned}\left|\Delta(\lambda)-\Delta_{q=0}(\lambda)\right| &= \left|\begin{vmatrix} y_2(1,\lambda,q) & y_4(1,\lambda,q)\\ y_2''(1,\lambda,q) & y_4''(1,\lambda,q)\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\omega_\lambda(1) & s_\lambda(1)\\ \omega_\lambda''(1) & s_\lambda''(1)\end{vmatrix}\right|\\ &= \left|\left[y_2(1,\lambda,q)y_4''(1,\lambda,q)-\omega_\lambda(1)s_\lambda''(1)\right]-\left[y_4(1,\lambda,q)y_2''(1,\lambda,q)-s_\lambda(1)\omega_\lambda''(1)\right]\right|\\ &\le \left|y_2(1,\lambda,q)y_4''(1,\lambda,q)-\omega_\lambda(1)s_\lambda''(1)\right| + \left|y_4(1,\lambda,q)y_2''(1,\lambda,q)-s_\lambda(1)\omega_\lambda''(1)\right|.\end{aligned}$$

首先估计不等号右侧第一项，此处 $y_2(x,\lambda,q), y_4(x,\lambda,q), y_2''(x,\lambda,q), y_4''(x,\lambda,q)$ 简记为 y_2, y_4, y_2'', y_4''，利用基本估计以及估计公式(0.7)对其估计可得

$$\begin{aligned}\left|y_2 y_4'' - \omega_\lambda(1) s_\lambda''(1)\right| &= \left|y_2 y_4'' - y_2 s_\lambda''(1) + y_2 s_\lambda''(1) - \omega_\lambda(1) s_\lambda''(1)\right| \\ &\le |y_2|\left|y_4'' - s_\lambda''(1)\right| + \left|y_2 - \omega_\lambda(1)\right|\left|s_\lambda''(1)\right| \\ &\le \frac{\|q\|}{\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right|}\exp\left[2\mathrm{M}(\lambda) + \frac{2\|q\|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right] + \frac{1}{\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right|}\exp\left[2\mathrm{M}(\lambda) + \frac{2\|q\|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right].\end{aligned}$$

同理，也可对不等号右侧第二项进行估计，

$$\left|y_4 y_2'' - s_\lambda(1)\omega_\lambda''(1)\right| \le \frac{\|q\|}{\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right|}\exp\left[2\mathrm{M}(\lambda) + \frac{2\|q\|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right] + \frac{1}{\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right|}\exp\left[2\mathrm{M}(\lambda) + \frac{2\|q\|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right].$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\Delta(\lambda) - \Delta_{q=0}(\lambda)\right| &\le \frac{2\|q\|}{\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right|}\exp\left[2\mathrm{M}(\lambda) + \frac{2\|q\|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right] + \frac{2}{\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right|}\exp\left[2\mathrm{M}(\lambda) + \frac{2\|q\|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right] \\ &= 2\left[\frac{\|q\|+1}{\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right|}\right]\exp\left[\frac{2\|q\|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]\exp\left[2\mathrm{M}(\lambda)\right].\end{aligned}$$

由于 $\left(\|q\|+1\right)\exp\left[\frac{2\|q\|}{\sqrt{x}}\right]$ 单调递减以及轨道条件，可得

$$\begin{aligned}\left|\Delta(\lambda) - \Delta_{q=0}(\lambda)\right| &\le 2\left[\frac{\|q\|+1}{\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right|}\right]\exp\left[\frac{2\|q\|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]\exp\left[2\mathrm{M}(\lambda)\right] \\ &\le \frac{2\cdot 16\left(\|q\|+1\right)}{\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right|}\exp\left[\frac{2\|q\|}{\sqrt{N}}\right]\left|\sinh(\lambda^{\frac{1}{4}})\sin(\lambda^{\frac{1}{4}})\right| \\ &\le \frac{2N}{\left|\lambda^{\frac{1}{4}}\right|}\left|\sinh(\lambda^{\frac{1}{4}})\sin(\lambda^{\frac{1}{4}})\right| \\ &\le \left|\sinh(\lambda^{\frac{1}{4}})\sin(\lambda^{\frac{1}{4}})\right|.\end{aligned}$$

即

$$\left|\Delta(\lambda) - \sinh(\lambda^{\frac{1}{4}})\sin(\lambda^{\frac{1}{4}})\right| < \left|\sinh(\lambda^{\frac{1}{4}})\sin(\lambda^{\frac{1}{4}})\right|.$$

由 Rouché定理[5]，$\Delta(\lambda)$ 的零点个数与 $\sinh(\lambda^{\frac{1}{4}})\sin(\lambda^{\frac{1}{4}})$ 在该区域内的零点个数相同。由于 $\Delta_{q=0}(\lambda) = \sinh(\lambda^{\frac{1}{4}})\sin(\lambda^{\frac{1}{4}})$ 在给定 1/8 平面内的有 N 个零点，在苹果形区域与蓝线区域所围成的区

域内有一个零点，所以当$\left|\Im(\lambda)\right|<\left|\Re(\lambda)\right|$时，$\Delta(\lambda)$在给定 1/8 平面内的有$N$个零点，在苹果形区域内有一个零点。

下面证明，在q 为实值函数时，特征值的实值性。

定理 3.3（实值性） 任意$q\in L^2_{\mathbb{R}}$的 Dirichlet 谱都是实数。

证明： 设λ是一个关于q的 Dirichlet 特征值，对应的特征函数为$y(x)$，则有

$$y^{(4)}+q(x)y=\lambda y. \tag{1.7}$$

由于q实值函数，对方程两边去共轭，则有

$$\bar{y}^{(4)}+q(x)\bar{y}=\bar{\lambda}\bar{y}. \tag{1.8}$$

将等式(1.7)乘以$\bar{y}$，等式(1.8)乘以y，两式作差可得，

$$(\bar{\lambda}-\lambda)\left|y\right|^2=y^{(4)}\bar{y}-\bar{y}^{(4)}y.$$

对上式两边在$[0,1]$上做积分，

$$\begin{aligned}(\bar{\lambda}-\lambda)\int_0^1\left|y\right|^2\mathrm{d}t&=\int_0^1\left[y^{(4)}\bar{y}-\bar{y}^{(4)}y\right]\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\bar{y}\mathrm{d}y'''-\int_0^1 y\mathrm{d}\bar{y}'''\\&=\left[\bar{y}y'''\mid_0^1-\int_0^1\bar{y}'\mathrm{d}y''\right]-\left[y\bar{y}'''\mid_0^1-\int_0^1 y'\mathrm{d}\bar{y}''\right]\\&=\left[-\bar{y}'y''\mid_0^1+\int_0^1\bar{y}''y''\mathrm{d}t\right]-\left[y'\bar{y}''\mid_0^1+\int_0^1\bar{y}''y''\mathrm{d}t\right]\\&=0\end{aligned}$$

由于$\int_0^1\left|y\right|^2\mathrm{d}t\neq 0$，故$\bar{\lambda}-\lambda=0$，即$\lambda$为实数。当然这也可以利用自伴算子的理论进行证明，详细见文献[10,22]。

（三） 特征值的代数重数与几何重数

下面我们给出几何重数与代数重数的定义并给出四阶的 Dirichlet 问题的几何与代数重数的计算。

定义 3.2 对应特征值λ的特征函数构成的特征子空间的维数称特征值λ的**几何重数**。同时，$\Delta(\lambda)$的零点的代数重数[2]称为特征值λ的**代数重数**。

[2] 根据第二章中有关解析性质的讨论可知$\Delta(\lambda)$是一个整函数，因而这里零点的代数重数即为，若$(d^{(n)}/d\lambda^n)\Delta(\lambda)=0$，而$(d^{(n+1)}/d\lambda^{n+1})\Delta(\lambda)\neq 0$，则称零点的代数重数为$n$。

定理 3.5 对应于四阶 S-L 方程(1.1)的每一个 Dirichlet 特征值，有且仅有一个线性无关的特征函数，即几何重数为 1。

证明：本处所采用方法类似于文献[25]中所采用的，令 $\lambda=\lambda_*$ 是四阶 S-L 方程(1.1)的 Dirichlet 特征值，根据公式(1.3)可知，对应的特征函数 $y(x,\lambda_*,q)=y'(0)y_2(x,\lambda_*,q)+y'''(0)\big/\sqrt{\lambda_*}\cdot y_4(x,\lambda_*,q)$，由于 $y'(0),y'''(0)$ 不同时为零，不妨假设 $y'(0)\neq 0$，则

$$y(x,\lambda_*,q)=y'(0)\left[y_2(x,\lambda_*,q)+\frac{y'''(0)}{y'(0)\cdot\sqrt{\lambda_*}}y_4(x,\lambda_*,q)\right],$$

由于 λ_* 为方程(1.1)的特征值，根据方程组(1.4)可以计算得出，

$$\frac{y'''(0)}{y'(0)\cdot\sqrt{\lambda_*}}=-\frac{y_2(1,\lambda_*,q)}{y_4(1,\lambda_*,q)}=-\frac{y_2''(1,\lambda_*,q)}{y_4''(1,\lambda_*,q)}=p(\lambda_*).$$

因此，任意特征函数都可以表示成

$$y(x,\lambda_*,q)=k\left[y_2(x,\lambda_*,q)+p(\lambda_*)\cdot y_4(x,\lambda_*,q)\right],$$

所以特征子空间的维数为 1，即几何重数为 1。

定理 3.6 若 λ 是一个关于 $q\in L^2_{\mathbb{R}}$ 上的 Dirichlet 特征值，则 $\Delta(\lambda)$ 只有单根，即 Dirichlet 特征值的代数重数为 1。

证明： 令特征函数 $y=y(x,\lambda)$，记 $\cdot=\partial/\partial\lambda$，对方程(1.1)两边同时对 λ 求微分[3]，可得

$$\dot{y}^{(4)}+q(x)\dot{y}=\lambda\dot{y}+y. \tag{1.9}$$

将等式(1.9)乘以 y，等式(1.1)乘以 $\dot{y}$，两式作差可得，

$$y^2=y^{(4)}\dot{y}-\dot{y}^{(4)}y.$$

对上式两边在 $[0,1]$ 上做积分，

$$\begin{aligned}\int_0^1 y^2(t,\lambda)\mathrm{d}t&=\int_0^1\left[\dot{y}^{(4)}y-y^{(4)}\dot{y}\right]\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1 y\mathrm{d}\dot{y}'''-\int_0^1\dot{y}\mathrm{d}y'''\\
&=\left[y\dot{y}'''\big|_0^1-\int_0^1 y'\mathrm{d}\dot{y}''\right]-\left[\dot{y}y'''\big|_0^1-\int_0^1\dot{y}'\mathrm{d}y''\right]\\
&=\left[y\dot{y}'''\big|_0^1-y'\dot{y}''\big|_0^1+\int_0^1 y''\dot{y}''\mathrm{d}t\right]-\left[\dot{y}y'''\big|_0^1-\dot{y}'y''\big|_0^1+\int_0^1 y''\dot{y}''\mathrm{d}t\right]\\
&=-y'\dot{y}''\big|_0^1-\dot{y}y'''\big|_0^1\\
&=-y'(1,\lambda)\dot{y}''(1,\lambda)-\dot{y}(1,\lambda)y'''(1,\lambda).\end{aligned}$$

[3] 为了避免关于 x,λ 求导的顺序问题，这里要求 q 是连续的。

其中第五、六个等号是利用 Dirichlet 边界条件化简得出的。

又由于对于任意的特征值 λ 都有 $y(x,\lambda,q)=k\left[y_2(x,\lambda,q)+p(\lambda)\cdot y_4(x,\lambda,q)\right]$, 将其代入上式，再利用公式(1.4)，第二章中的引理 2.2 中的 Wronskian 行列式 $\Omega(\lambda)=\lambda$，以及文献[28,30]中的结论，我们可以得出，

$$\tilde{k}\dot{\Delta}(\lambda)=\int_0^1 y^2(t,\lambda)\mathrm{d}t=\left\|y(\cdot,\lambda)\right\|.$$

其中 $\tilde{k}$ 是一个关于 λ 常数。

由于 y 是实值函数对于实数 λ，因而 $\dot{\Delta}(\lambda)\neq 0$，也即其代数重数为 1.

这种证明方法是多样的，正如文献[8]中的第 31 页中利用 Problem 1 结合相关算子导数的定义，以及 Wronskian 行列式与 x 的无关性亦可得出此结论。

事实上，由于常型的 S–L 问题是一个经典的问题，对其几何重数与代数重数的研究也已经有了非常好的结论与方法，例如 Wu Hongyou, Kong Q, Cao Xifang, Eastham, MSP, Zettl，等人所著的文[1,14,18,19]。当然这些文献的核心思想就是借助代数重数的与几何充数的基本定义以及边界条件的空间结构对 S-L 包括重数问题在内的特征值问题作出分析讨论。作为对于这些文献的推广，许多其他学者也给出几何重数与代数重数的关系，例如文献[32]给出了复系数 S-L 问题特征值的重数相等，文献[28,30]论证了四阶以及高阶常微分算子的特征值重数相等，另外文献[20,24,31]也讨论了向量形式的 S-L 问题的特征值重数相等。当然同时这些文献也对边界条件作出了一般性的刻画，其中最为基本就是在分离自伴条件下，代数重数必然等于几何重数，这点对于高阶微分方程也是成立的[28]。 根据文献[26]中有关自伴边界条件的分类，我们很容易验证本文中给出的 Dirichlet 边界条件为自伴分离型条件，因而本文的结论亦满足这些文献中的几何重数等于代数重数结论。

此外，在这些文献中也给出了特征值的一般边界条件下的等价定义以及几何、代数重数的定义。可以证明，本文中对四阶 S–L 问题的的特征值的等价定义与文献[18,28,30,32]所叙述的等价定义是一致的。下面我们来简要说明这一点。

定理 4.1[19] $\lambda\in\mathbb{C}$ 是方程(1.1)在边界条件 $AY(a)+BY(b)=0$ 下的特征值当且仅当

$$\Delta(\lambda)=\det(A+B\Phi(b,\lambda))=0 \tag{1.10}$$

其中 $\Delta(\lambda)$ 是 λ 的整函数，叫做边界条件 $[A\,|\,B]$ 的特征，必要时用 Δ_A 表明 Δ 对边界条件 $A=[A\,|\,B]$ 的依赖性。特征值的 λ 作为 Δ 的零点的重数成为特征值 λ 的代数重数。由特征值 λ 的特征函数张成的复线性空间成为关于特征值 λ 的特征子空间，特征子空间的维数称为特征值 λ 的几何重数。

对于本文中讨论的四阶 S-L 在 Dirichlet 边界条件下的特征值，即为定理 4.1 中的一种特殊情况，其中 $[a,b]=[0,1]$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}y(x)\\y'(x)\\y''(x)\\y'''(x)\end{bmatrix}.$$

$$\Phi(x,\lambda)=\begin{bmatrix} y_1(x,\lambda,q) & y_2(x,\lambda,q) & y_3(x,\lambda,q) & y_4(x,\lambda,q) \\ y_1'(x,\lambda,q) & y_2'(x,\lambda,q) & y_3'(x,\lambda,q) & y_4'(x,\lambda,q) \\ y_1''(x,\lambda,q) & y_2''(x,\lambda,q) & y_3''(x,\lambda,q) & y_4''(x,\lambda,q) \\ y_1'''(x,\lambda,q) & y_2'''(x,\lambda,q) & y_3'''(x,\lambda,q) & y_4'''(x,\lambda,q) \end{bmatrix}$$

代入公式(1.10)可以得到，

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \det(A+B\Phi(b,\lambda)) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ y_1(1,\lambda,q) & y_2(1,\lambda,q) & y_3(1,\lambda,q) & y_4(1,\lambda,q) \\ y_1''(1,\lambda,q) & y_2''(1,\lambda,q) & y_3''(1,\lambda,q) & y_4''(1,\lambda,q) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_2(1,\lambda,q) & y_4(1,\lambda,q) \\ y_2''(1,\lambda,q) & y_4''(1,\lambda,q) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

从这里可以明显的看出本文中对特征值的特价定义与定理 4.1 中的刻画是一致的。当然，由于特征值的等价定义一致，因而之后对于几何、代数重数定义也是一致的。

事实上，这里也验证了 Dirichlet 边界条件满足文献[26]中所定义的自伴分离边界条件，因而根据文献[28,30]中的结论也可以直接得出代数重数等于几何重数，同时由于定理 3.5 证明了 Dirichlet 边界条件下的几何重数为 1，因而定理 3.6 中需要论证的代数重数也为 1。

参考文献：

[1] Eastham, M., Kong, Q., Wu, H. & Zettl, A. Inequalities among eigenvalues of Sturm–Liouville problems. *Journal of Inequalities and Applications* **3**, 25-43 (1900).

[2] Titchmarsh, E. C. *Eigenfunction expansion associated with second-order differential equations*. Vol. 5 (Oxford, 1946).

[3] Naimark, M. A. Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a nonselfadjoint operator of the second order on a semi-axis. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva* **3**, 181-270 (1954).

[4] Naĭmark, M. A. *Linear differential operators*. Vol. 2 (F. Ungar Pub. Co., 1968).

[5] 余家荣. *复变函数*. Vol. 1 (人民教育出版社, 1979).

[6] Ahlbrandt, C. D., Hinton, D. B. & Lewis, R. T. Necessary and sufficient conditions for the discreteness of the spectrum of certain singular differential operators. *Canad. J. Math* **33**, 229-246 (1981).

[7] 尤秉礼. *常微分方程补充教程*. (人民教育出版社, 1981).

[8] Pöschel, J. & Trubowite, E. *Inverse spectral theory*. Vol. 130 (Academic Press, 1987).

[9] Edmunds, D. E. & Evans, W. D. *Spectral theory and differential operators*. (Clarendon Press Oxford, 1987).

[10] 曹之江. *常微分算子丛书*. (上海科学技术出版社, 1987).

[11] 金光宇，钱椿林. 四阶常微分方程的特征值估计. *苏州丝绸工学院学报* **16**, 115-119 (1996).

[12] Kong, Q., Wu, H. & Zettl, A. Dependence of eigenvalues on the problem. *Mathematische Nachrichten* **188**, 173-201 (1997).

[13] Kong, Q., Wu, H. & Zettl, A. Dependence of the< i> n</i> th Sturm–Liouville Eigenvalue on the Problem. *J Differ Equations* **156**, 328-354 (1999).

[14] Kong, Q., Wu, H. & Zettl, A. in *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh-A-Mathematics.* 561-590 (Cambridge Univ Press).

[15] Kong, Q., Wu, H. & Zettl, A. Sturm–Liouville Problems with Finite Spectrum. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **263**, 748-762, doi:http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.2001.7661 (2001).

[16] Freiling, G. & Yurko, V. A. *Inverse Sturm-Liouville problems and their applications*. (NOVA Science Publishers Huntington, 2001).

[17] 谷超豪. *数学物理方程*. (高等教育出版社, 2002).

[18] Cao, X. & Wu, H. Geometric aspects of high-order eigenvalue problems I. Structures on spaces of boundary conditions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **2004**, 647-678 (2004).

[19] Wang, Z. & Wu, H. Equality of multiplicities of a Sturm–Liouville eigenvalue. *Journal of mathematical analysis and applications* **306**, 540-547 (2005).

[20] 张昕. *向量 Sturm-Liouville 微分方程的特征值重数问题*, 南京理工大学, (2006).

[21] 王高雄, 朱思铭, 王寿松，李艳会. *常微分方程*. Vol. 1 (高等教育出版社, 2006).

[22] 赵晓花. *一个四阶微分算子的非线性特征值问题*, 郑州大学, (2007).

[23] 王桂霞. *Sturm-Liouville 问题的谱分析与数值计算*, 内蒙古大学, (2008).

[24] 杨巧玲. *向量型 Sturm-Liouville 问题的特征值重数*, 天津大学, (2008).

[25] 赵以阁, 孙书荣. Sturm-Liouville 特征值问题. 济南大学学报 (自然科学版) 23, 299-301 (2009)

[26] 杨树生，张晓军. 自伴边界条件的分类问题. *内蒙古农业大学学报 (自然科学版)* **4**, 061 (2009).

[27] Zettl, A. *Sturm-Liouville Theory*. Vol. 121 (American Mathematical Soc., 2010).

[28] 施德才，黄振友. 高阶常微分算子特征值的重数关系. *数学学报*, 763-772 (2010).

[29] 高宏丽. 四阶微分方程 Dirichlet 边值问题解的存在性. *太原师范学院学报 (自然科学版)* **10** (2011).

[30] 林运春. 四阶常微分算子特征值的重数相等. *肇庆学院学报* **32**, 8-14 (2011).

[31] Lin, C.-W. On the multiplicity of the eigenvalues of the vectorial Sturm-Liouville equation. *Tamkang Journal of Mathematics* **42**, 265-274 (2011).

[32] 王建华，林运春. 复系数 Sturm-Liouville 问题特征值的重数相等. *内蒙古大学学报(自然科学版)*, 457-461 (2012).