二阶变系数齐次线性微分方程可化为常系数方程的条件探究

陈泽汛
（数学与统计学院　　09 级 数学与应用数学专业）

摘要：一般的二阶变系数线性微分方程通常没有统一的的求解方法，但是对于一些特殊的变系数方程，通过适当的转化可以化为常系数方程，从而可以求解。本文将通过变量代换的方法，寻求二阶变系数齐次微分方程可化为常系数齐次微分方程所应满足的条件。

关键词：二阶，线性，变系数，常系数，微分方程，变量代换

引言：在微分方程的理论中，线性微分方程占据着举足轻重的地位。而在这其中最为简单的二阶变系数齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的求解问题更是对物理、力学、工程技术有着重要意义。同时我们也知道对于常系数齐次线性微分方程可以采用特征根法，较为简便的求得其解. 而一般的变系数齐次线性微分方程没有统一的求解方法。那么我们是不是可以将一部分较为特殊的变系数齐次线性微分方程通过一定的转化而得出常系数齐次线性微分方程，从而达到求解的目的呢？本文给出了实现这种转化的一个条件， 并利用欧拉方程说明了这个条件的实用性。

正文：

一、条件探究

下面我们来考查一般的二阶变系数齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（1）$$

其中 $p(x),q(x)$ 连续， $x\in I$ 。 我们考虑如下的变量（自变量和因变量）变换：

$$y(x)=z(t),\quad x=\varphi(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（2）$$

记

$$z'=\frac{dz}{dt},\ x'=\frac{dx}{dt},\quad y'=\frac{dy}{dx},\quad z''=\frac{d^2z}{dt^2},\quad x''=\frac{d^2x}{dt^2},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\therefore z'=\frac{dz}{dt}=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=y'\varphi'(t)=y'x' \quad \cdots\cdots\cdots（3）$$

$$z''=\frac{d(y'x')}{dt}=\frac{dy'}{dt}x'+\frac{dx'}{dt}y'=(x')^2y''+x''y' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

从（2）、（3）、（4）解出 y,y',y'' 得

$$\begin{cases} y = z \\ y' = \dfrac{z'}{x'} \\ y'' = \dfrac{z''}{(x')^2} - \dfrac{z'x''}{(x')^3} \end{cases}$$

现在将 y, y', y'' 带入原方程，可得下面等式：

$$(\frac{1}{x'})^2 z'' + \left[\frac{x'p(x)}{(x')^2} - \frac{x''}{(x')^3}\right] z' + q(x)z = 0 \quad \text{也即}$$

$$z'' + \left[x'p(x) - \frac{x''}{x'}\right] z' + q(x)(x')^2 z = 0$$

若要可以化为常系数方程，则上面方程各项系数需为常数，即

$$\begin{cases} x'p(x) - \dfrac{x''}{x'} = C_1. & \text{......(5)} \\ q(x)(x')^2 = C_2 & \text{........(6)} \end{cases},$$

其中C_1,C_2为常数。对（5）关于 t 求导并记为（7），联立（5），（6），（7）得到

$$\begin{cases} x'p(x) - \dfrac{x''}{x'} = C_1 \text{........................(5)} \\ q(x)(x')^2 = C_2 \text{..........................(6),} \\ \\ 2x'x''q(x) + (x')^3 q'(x) = 0 \text{........(7)} \end{cases}$$

联立（5），（6），（7）后消去 x', x'' 得到

$C_2[2p(x)q(x) + q'(x)]^2 - 4{C_1}^2 q^3(x) = 0$。

即若存在 C_1,C_2 可以使得上式成立，则原变系数方程可化为常系数方程。

1）、若 $q(x) = 0$,则原二阶方程可以通过降次的方法转化为一阶方程，故可以直接求其解。

2）、若 $q(x) \neq 0$。　　$\therefore C_2 \neq 0$　　$\therefore$ 记判别式$\Delta = \dfrac{[2p(x)q(x) + q'(x)]^2}{q^3(x)}$.

若 $\Delta = \dfrac{4{C_1}^2}{C_2} = C, C$为常数，则原二阶变系数齐次线性微分方程

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$可化为形如$z''+C_1z'+C_2z=0$的二阶常系数齐次线性微分方程。 此外，若

$$\Delta=\frac{4C_1{}^2}{C_2}=C,$$

C为常数，则可以给定C_1,C_2， 根据方程组（5），（6）解出所需要的变换$x=\varphi(t)$。

小结：上述过程虽是针对二阶方程进行的，但以同样的方法也可以导出 n 阶变系数齐次线性微分方程可化为常系数的判别式。

二、**应用**

考查最二阶欧拉方程：

$$x^2y''+xy'+y=0,$$

将其化为标准形式

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=0,$$

则此式中 $p(x)=\dfrac{1}{x},q(x)=\dfrac{1}{x^2}$。

$$\therefore\Delta=\frac{\left[2p(x)q(x)+q'(x)\right]^2}{q^3(x)}=\frac{\left[2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}-2x^{-3}\right]^2}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^3}=0。$$

$\therefore$原变系数方程可以化为常系数方程，且由于 $C=\dfrac{4C_1{}^2}{C_2}=0,且C_2\neq 0$，

将其带回方程组（5），（6）可以解得：

$$C_1=0,\quad C_2=1,\quad x=e^t.$$

这样就可以将原方程化为常系数方程$z''+z=0$。

总结：根据上述判别式我们可以较为方便的判断出一个二阶变系数齐次线性微分方程是否可以化成常系数方程。　　　我们也可以考虑下面的变换形式

$$y=g(x)z(t),\quad x=\varphi(t)$$

待续。