一类积分方程的上下解方法

陈泽汛

（数学与统计学院　　09 级　数学与应用数学专业）

摘要：本文首先根据微分方程中上解和下解的定义，导出相应的积分方程的上解和下解的定义，并给出积分方程上解和下解的存在性的相关证明。然后运用上下解的方法讨论了一类积分方程的解的存在唯一性。

关键词：积分方程、上下解方法、存在性、唯一性

非线性泛函分析是现代分析的一个主要分支，已成为现代数学中重要的研究方向之一，它是处理许多非线性问题的重要和有利工具，其主要研究方法有: 上下解方法、迭合度理论、不动点理论、变分法等, 它们可以对非线性问题给出合理而精确的解释, 特别在解决微分方程问题中更是有其重大意义。目前在微分方程的研究中，非线性泛函分析中的经典方法上下解方法已经得到了广泛应用。由于积分方程在许多方面有着共通之处，故本文利用上下解方法讨论非线性的第二类 Volterra 方程解的相关性质

首先，我们根据微分方程中上解和下解的定义，导出一类一般化的非线性第二类 Volterra 方程的上解和下解的概念。

考虑非线性第二类 Volterra 方程

$$u(x)-\lambda\int_0^x K(x,t,u(t))\mathrm{d}t = f(x), x\in[0,T] \tag{1.1}$$

其中 $f: J\to\mathbb{R}$ 且连续， $K: J\times J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 且连续；设 $T>0$，$\lambda>0$ 为常数，$J=[0,T]$ ， $C[J,\mathbb{R}]=\{u(x): J\to\mathbb{R}\}$ ，　同时 $C[J,\mathbb{R}]$ 中的半序由锥 $P=\{u\in C[J,\mathbb{R}]\,|\,u(x)\ge 0,\forall x\in J\}$ 导出[。[1]

定义 1 设 $w(x),v(x)\in C[J,\mathbb{R}]$，$f: J\to\mathbb{R}$ 且连续，$K: J\times J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 且连续

若 $w(x)$ 满足

$$w(x)\ge\lambda\int_0^x K(x,t,w(t))\mathrm{d}t+f(x),\forall x\in J \tag{1.2}$$

则称 $w(x)$ 是积分方程(1.1)的一个上解

若 $v(x)$ 满足

$$v(x)\le\lambda\int_0^x K(x,t,v(t))\mathrm{d}t+f(x),\forall x\in J \tag{1.3}$$

其中 $f:J\to\mathbb{R}$ 且连续，$K:J\times J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 且连续。则称 $v(x)$ 是积分方程(1.1)的一个下解。

对于积分方程(1.1)，其上解和下解有下列重要关系：

定理 1 设 $w(x),v(x)\in C[J,\mathbb{R}]$ 分别为方程(1.1)的上解和下解，若存在常数 $L>0$ 使得 K 满足以下条件

$$0\le K(x,t,u_1)\text{-}K(x,t,u_2)\le L(u_1\text{-}u_2),\forall x,t\in J,u_1\ge u_2 \tag{1.4}$$

则必有 $v(x)\le w(x),\forall x\in J$ 。

证明 任给 $\varepsilon>0$，令 $w_\varepsilon(x)=w(x)+\lambda\varepsilon e^{2Lx}$，则 $w_\varepsilon(x)>w(x)$，并且由(1.2)与(1.4)的后半不等式知对于任给 $x\in J$，有

$$\begin{aligned}w_\varepsilon(x)=w(x)+\lambda\varepsilon e^{2Lx}&\ge\lambda\int_0^x K(x,t,w(t))dt+f(x)+\lambda\varepsilon e^{2Lx}\\&\ge\lambda\int_0^x K(x,t,w_\varepsilon(t))dt+f(x)+\frac{1}{2}\lambda\varepsilon e^{2Lx}\\&>\lambda\int_0^x K(x,t,w_\varepsilon(t))dt+f(x)\end{aligned} \tag{1.5}$$

下证

$$v(x)<w_\varepsilon(x),\forall x\in J \tag{1.6}$$

反证法，若(1.6)不成立，则由 $w_\varepsilon(0)>w(0)=v(0)$ 可知必存在 $x_1\in(0,T]$，使得 $w_\varepsilon(x_1)=v(x_1)$，并且对任给 $x\in[0,x_1]$，有 $v(x)<w_\varepsilon(x)$，因此

$$w_\varepsilon(x_1)-v(x_1)>\lambda\int_0^{x_1}[K(x,t,w_\varepsilon(t))-K(x,t,v(t))]dt>0$$

但这 $w_\varepsilon(x_1)=v(x_1)$ 矛盾，故(1.6)成立，在(1.6)中令 $\varepsilon\to0$，即可得 $v(x)\le w(x),\forall x\in J$

推论 1 若存在常数 $L>0$ 使得 K 满足条件(1.4)，则积分方程(1.1)至多有一个定义在 J 上的解。

证明 用反正法，设原积分方程(1.1)有两个解 $u_1(x),u_2(x)$。把 $u_1(x)$，看做下解，$u_2(x)$ 看做上解，则由定理 1 可知 $u_1(x)\le u_2(x),\forall x\in J$。同理，若把 $u_2(x)$ 看做下解，$u_1(x)$，看做上解，则由定理 1 可知 $u_2(x)\le u_1(x),\forall x\in J$，从而有 $u_1(x)\equiv u_2(x)$。

引理 1　线性积分方程

$$u(x)-\lambda\int_0^x K(x,t)u(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{1.7}$$

其中 K， $f\in C[J,\mathbb{R}]$，

$$\int_0^x\int_0^x |K(x,t)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x = M^2 < +\infty$$

则积分方程有唯一解

$$u=(1-\lambda K)^{-1} f = f+\lambda Kf+\cdots+\lambda^n K^n f+\cdots \tag{1.8}$$

证明　定理及证明详见参考文献[2]。

引理 2　（Arzela-Ascoli 定理）集合 $M\subset C[J\cdot\mathbb{R}]$ 相对紧的充分必要条件是：

（1）　集合 M 中的函数一致有界；
（2）　集合 M 中的函数等度连续。

证明　定理及证明详见参考文献[1][4]。

定理 2　设 $K(x,t,u):J\times J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，$w(x),v(x)\in C[J,\mathbb{R}]$ 分别为方程(1.1)的上解和下解，且满足

$$v_0(x)\le w_0(x),\forall x\in J$$

若存在常数 $M>0$，且使得

$$K(x,t,u_1)\text{-}K(x,t,u_2)\ge M(u_1\text{-}u_2),\forall(x,t,u_1)\in D_1,(x,t,u_2)\in D_1,u_1\ge u_2 \tag{1.9}$$

其中 $D_1=\{(x,t,u)\in J\times J\times\mathbb{R}\,|\,v_0\le u\le w_0\}$，则存在以 v_0 为初始元的迭代列 $\{v_n\}$，单调递增一致收敛于 v^*，以 w_0 为初始元的迭代列 $\{w_n\}$，单调递减一致收敛于 w^*，其中 v^*， w^* 分别为积分方程(1.1)在 $D=\{u\in C(J,\mathbb{R})\,|\,v_0\le u\le w_0\}$ 上的最小解和最大解。

证明

（1）、对于固定的 $h=h(x)\in D$ 考察线性积分方程

$$\begin{aligned} u &= f(x)+\lambda\int_0^x[K(x,t,h(t))+M(u-h(t))]\mathrm{d}t \\ &= \lambda M\int_0^x u(t)\mathrm{d}t+\lambda\int_0^x[K(x,t,h(t))-Mh(t)]\mathrm{d}t+f(x) \end{aligned} \tag{1.10}$$

由于 $\int_0^T\int_0^T |1|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x = T^2 < +\infty$，故上述积分方程存在唯一收敛解

$$u=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(M\lambda\right)^{i}[f\left(x\right)+\lambda\int_{0}^{x}[K\left(x,t,h(t)\right)-Mh(t)]\mathrm{d}t] \tag{1.11}$$

故我们可以构造迭代列$\{v_n\}$，$\{w_n\}$满足

$$v_n=f\left(x\right)+\lambda\int_{0}^{x}[K\left(x,t,v_{n-1}\right)+M(v_n-v_{n-1})]\mathrm{d}t, n=1,2,3,\cdots \tag{1.12}$$

即 $v_n=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(M\lambda\right)^{i}[f\left(x\right)+\lambda\int_{0}^{x}[K\left(x,t,v_{n-1}\right)-Mv_{n-1})]\mathrm{d}t],, n=1,2,3,\cdots$

$$w_n=f\left(x\right)+\lambda\int_{0}^{x}[K\left(x,t,w_{n-1}\right)+M(w_n-w_{n-1})]\mathrm{d}t, n=1,2,3,\cdots \tag{1.13}$$

即 $w_n=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(M\lambda\right)^{i}[f\left(x\right)+\lambda\int_{0}^{x}[K\left(x,t,w_{n-1}\right)-Mw_{n-1})]\mathrm{d}t],, n=1,2,3,\cdots$

（2）、下证

$$v_0\left(x\right)\le v_1\left(x\right)\le w_0\left(x\right),\forall x\in J \tag{1.14}$$

任给$\varepsilon,\eta>0$，令

$$v_\varepsilon\left(x\right)=v_1\left(x\right)+\varepsilon \qquad v_\eta\left(x\right)=v_1\left(x\right)-\varepsilon$$

下面我们需要证明

$$v_0\left(x\right)<v_\varepsilon\left(x\right),\forall x\in J \tag{1.15}$$

反证法，若(1.15)不成立，则由$v_\varepsilon\left(0\right)>v_1\left(0\right)=v_0\left(0\right)$，可知必存在$x_1\in\left(0,T\right]$，使得$v_\varepsilon\left(x_1\right)=v_1\left(x_1\right)$，并且对任给$x\in\left[0,x_1\right]$，有$v_\varepsilon\left(x\right)>v_1\left(x\right)$，并且由(1.3)与(1.12)可知

$$v_\varepsilon\left(x_1\right)-v_1\left(x_1\right)\ge\lambda\int_{0}^{x_1}M(v_\varepsilon-v_1)\mathrm{d}t+\varepsilon>0$$

但这与$v_\varepsilon\left(x_1\right)=v_1\left(x_1\right)$矛盾，故(1.15)成立，令$\varepsilon\to0$，即可得$v_0\left(x\right)\le v_1\left(x\right),\forall x\in J$。

同理可证

$$v_\eta\left(x\right)<w_0\left(x\right),\forall x\in J \tag{1.16}$$

故可令$\eta\to0$，即可得$v_1\left(x\right)\le w_0\left(x\right),\forall x\in J$。

因此，(1.14)式即得证，同理可证

$$v_0\left(x\right)\le v_1\left(x\right)\le\cdots\le v_n\left(x\right)\le\cdots\le w_0\left(x\right),\forall x\in J \tag{1.17}$$

对于$\{w_n\}$操作(1.17)所用方法即可得

$$v_0(x) \le \cdots \le w_n(x) \le \cdots \le w_1(x) \le w_0(x), \forall x \in J \tag{1.18}$$

（3）、下证

$$v_n(x) \le w_n(x), \forall x \in J \tag{1.19}$$

由于

$$\begin{aligned} w_n(x) - v_n(x) &= \lambda \int_0^x [K(x,t,w_{n-1}) + M(w_n - w_{n-1})] - [K(x,t,v_{n-1}) + M(v_n - v_{n-1})] \mathrm{d}t \\ &\ge \lambda \int_0^x M(w_{n-1} - v_{n-1}) \mathrm{d}t + \lambda \int_0^x [M(w_n - w_{n-1}) - M(v_n - v_{n-1})] \mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^x M(w_n - v_n) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

故可以由数学归纳法以及证明(1.14)的方法可以证明$v_n(x) \le w_n(x), \forall x \in J$

（4）、由于迭代列$\{v_n\}$，$\{w_n\}$单调有界，故必收敛，其收敛解分别记为v^*，w^*。同时又由 Arzela-Ascoli 定理可知此收敛为一致收敛，且由于$\{v_n\}$单调增加，$\{w_n\}$单调减少，因而v^*，w^*必为积分方程(1.1)在$D = \{u \in C(J,\mathbb{R}) | v_0 \le u \le w_0\}$上的最小解和最大解。

引理 3 考察积分方程

$$u(x) - \lambda \int_0^x K(x,t,u(t)) \mathrm{d}t = f(x)$$

其中$\lambda > 0$为常数，若满足$f(x)$在$0 \le x \le T$连续且$K(x,t,u)$在$0 \le t \le x \le T$，$-\infty < u < +\infty$上连续有界，则上述积分方程在$0 \le x \le T$上至少有一个连续解。

证明 利用 Schauder 不动点定理可以容易证明，证明详见参考文献[3]

定理 3 设$w(x), v(x) \in C[J,\mathbb{R}]$分别为方程(1.1)的上解和下解，且满足

$$v(x) \le w(x), \forall x \in J$$

若对于$K: J \times J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$连续，且关于第三变元单调递增，即

$$K(x,t,u_1) - K(x,t,u_2) \ge 0, \forall x,t \in J, u_1 \ge u_2 \tag{1.20}$$

则积分方程(1.1)在$D = \{u \in C(J,\mathbb{R}) | v \le u \le w\}$中至少有一个解。

证明 对任给$x \in J, u \in \mathbb{R}$，定义

$$g(x,u) = \max\{v(x), \min\{u, w(x)\}\} \tag{1.21}$$

则显然 $g(x,u)$ 在 $J\times\mathbb{R}$ 上连续，且有

$$v(x)\le g(x,u)\le w(x),\forall x\in J,u\in\mathbb{R} \tag{1.22}$$

$$K(x,t,g(x,t))=K(x,t,u(t)),\forall u(t)\in D,\forall x,t\in J \tag{1.23}$$

因而我们可以得到以下积分方程：

$$u(x)-\lambda\int_0^x K(x,t,g(x,t))\mathrm{d}t=f(x),x\in J \tag{1.24}$$

由引理 3 可知 $K(x,t,g(x,t))$ 满足积分方程解的存在性要求，故方程(1.24)有定义在 J 上的解。记该解为 $u_0(x)$ ，下证

$$v(x)\le u_o(x)\le w(x) \tag{1.25}$$

任给 $\varepsilon>0$，令

$$w_\varepsilon(x)=w(x)+\varepsilon,\qquad v_\varepsilon(x)=v(x)-\varepsilon$$

下面我们需要证明

$$w_\varepsilon(x)>u_0(x),\forall x\in J \tag{1.26}$$

反证法，若(1.26)不成立，则由 $w_\varepsilon(0)>w(0)=u_0(0)$，可知必存在 $x_1\in(0,T]$，使得 $w_\varepsilon(x_1)=u_0(x_1)$，并且对任给 $x\in[0,x_1]$，有 $u_0(x)<w_\varepsilon(x)$，且 K 关于第三变元单调递增，因此

$$w_\varepsilon(x_1)-u_0(x_1)>\lambda\int_0^{x_1}[K(x,t,w(t))-K(x,t,g(x,u))]\mathrm{d}t+\varepsilon>0$$

但这与 $w_\varepsilon(x_1)=u_0(x_1)$ 矛盾，故(1.26)成立，在(1.26)中令 $\varepsilon\to0$，即可得 $w(x)\ge u_0(x),\forall x\in J$ 。

同理可以证明

$$v_\varepsilon(x)<u_0(x),\forall x\in J \tag{1.27}$$

同样在(1.27)中令 $\varepsilon\to0$，即可得 $v(x)\le u_0(x),\forall x\in J$ ，故综合以上可以得到 $v(x)\le u_o(x)\le w(x)$。

又由于在 $D=\{u\in C(J,\mathbb{R})\,|\,v\le u\le w\}$ 上，$K(x,t,g(x,t))=K(x,t,u(t))$，故 $u_0(x)$ 即为方程(1.1)的解。

注：仔细比较将发现，定理 2 的条件比定理 3 要略强，因而其结论也要略强。定理 3 得出必定至少有一解，而定理 2 给出了的是一个在上下解范围中的最大解与最小解，并给出其具体构造，这将在积分方程计算机机械求解中有重要意义。

引理 4　积分方程(1.1)在其定义域内都存在唯一解，若其满足以下三个条件：（1）

$$\|\int_0^x \|K\|\left(x\|,t,u\left(t\right)\right)dt \;\le\; u \tag{1.28}$$

（2）对任意的$u_1\left(x\right),u_2\left(x\right)$，有

$$|K\left(x,t,u_1\right)\text{-}K\left(x,t,u_2\right)|\le N(x,t)\,|u_1\text{-}u_2| \tag{1.29}$$

（3）条件二中的$N(x,t)$满足

$$\int_0^T\int_0^T N^2(x,t)dxdt<+\infty \tag{1.30}$$

证明　该定理证明复杂，详见参考文献[2]

定理 4　设$K(x,t,u):J\times J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$连续，存在常数$L>0$使得$K$满足条件

$$0\le K\left(x,t,u_1\right)\text{-}K\left(x,t,u_2\right)\le L(u_1\text{-}u_2),\forall x,t\in J,u_1\ge u_2$$

又设积分方程(1.1)存在上解与下解，则积分方程(1.1)定义在J上的解存在且唯一。

证明　设$w\left(x\right),v\left(x\right)\in C\left[J,\mathbb{R}\right]$分别为方程(1.1)的上解与下解，则由定理 1 知必有

$$v\left(x\right)\le w\left(x\right),\forall x\in J$$

根据定理 3 ，积分方程(1.1)必有解，由由推论 1 可知积分方程(1.1)的解必定唯一。

注：此条件虽然比一般的 Lipschtiz 要强，但是从引理 4 中我们可以发现定理 4 不需要验证(1.28)关于函数范数的判断，故定理 4 的意义在于在不需要验证(1.28)的情况下，结合上下解方法给出积分方程((1.1)解的存在唯一性的结论。

参考文献

[1] 郭大钧 孙经先 刘兆理 非线性常微分方程泛函方法[M],山东科学技术出版社, 2005。
[2] 路见可 钟寿国编著 积分方程论，武汉大学出版社, 2008。
[3] 范进军编著 常微分方程续论, 山东大学出版社, 2009.07。
[4] 郑维行 王声望编著 实变函数与泛函分析概要(第四版),高等教育出版社，2010 年。
[5] 王高雄 周之铭 朱思铭等 常微分方程（第三版）,高等教育出版社，2007 年。