数学课程的总目标

通过义务教育阶段的数学学习，学生逐步：

1. **会用数学的眼光观察现实世界；**

2. **会用数学的思维思考现实世界；**

3. **会用数学的语言表达现实世界。**

（简称“三会”）。

数学考试丢分的四大原因

1. **知识点不透彻；**

2. **题型不熟练；**

3. **计算不准确；**

4. **计算速度慢。**

（简称“四因”）。

学好数学的五个步骤

1. 发现个案（发现有趣的个案）；

2. 类似案例（寻找类似的案例）；

3. 总结规律（找到一般的规律：从特殊到一般）；

4. 定义证明（给出定义或证明）。

5. 实际应用（应用到实践中去：从一般到特殊）。

（简称“五步骤”）。

第一步到第三步：大胆假设；第四步：小心求证；第五步：放心应用。

1.1 有理数的引入

定义

**正整数、0 和负整数统称为整数 (integer)，正分数和负分数统称为分数 (fraction).
整数和分数统称为有理数 (rational number).**

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ 0\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}
\qquad
\text{小数}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限小数}\begin{cases}\text{无限循环小数}\\ \text{无限不循环小数}\end{cases}\end{cases}$$

0 既不是正数，也不是负数，是正数与负数的分界点。
有限小数和无限循环小数是分数，无限不循环小数不是分数。
思考：无限不循环小数是什么数?

小数如何转化为分数

有限小数如何转化为分数:

$$0.245 = \frac{245}{1000} = \frac{49}{200}$$

无限循环小数如何转化为分数?【华东师范大学七年级上册（2024）P73】

$$1000 \times 0.\dot{2}4\dot{5} = 245.\dot{2}4\dot{5} = 245 + 0.\dot{2}4\dot{5}$$

$$999 \times 0.\dot{2}4\dot{5} = 245$$

$$0.\dot{2}4\dot{5} = \frac{245}{999}$$

数集与有理数集

数集的表示方法【数学 A 版必修第一册 1.1 集合的概念】:
集合 A 是小于 10 的自然数组成的集合，表示方法如下:

1. 列举法：$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
2. 描述法：$A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \le x < 10\}$

有理数集的表示方法：$Q = \{x \in \mathbb{R} | x = \dfrac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$

数学中常见数集及其记法:

1. 全体非负整数组成的集合称为非负整数集（或自然数集），记作 $\mathbb{N}$.
2. 全体正整数组成的集合称为正整数集，记作 $\mathbb{N}^*$ 或 $\mathbb{N}_+$.
3. 全体整数组成的集合称为整数集，记作 $\mathbb{Z}$.
4. 全体有理数组成的集合称为有理数集，记作 $\mathbb{Q}$.
5. 全体实数组成的集合称为实数集，记作 $\mathbb{R}$.

思考有理数集的表示方法

为什么可以用下面的方法表示有理数集?

$$Q=\{x\in\mathbb{R}|x=\frac{q}{p},p,q\in\mathbb{Z},p\neq 0\}$$

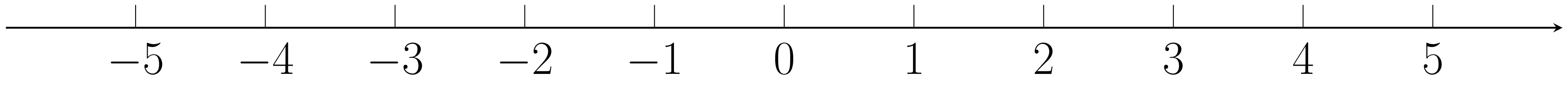
定义

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

数轴的四要素：

1. 原点
2. 正方向
3. 单位长度
4. 直线（强调三要素的只包括前三条）

数轴示例：

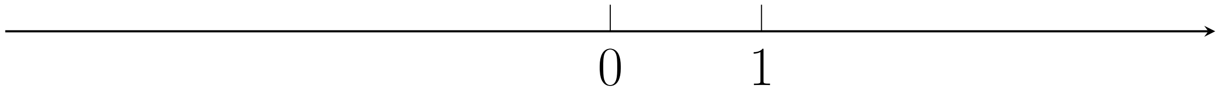


最简数轴

定义

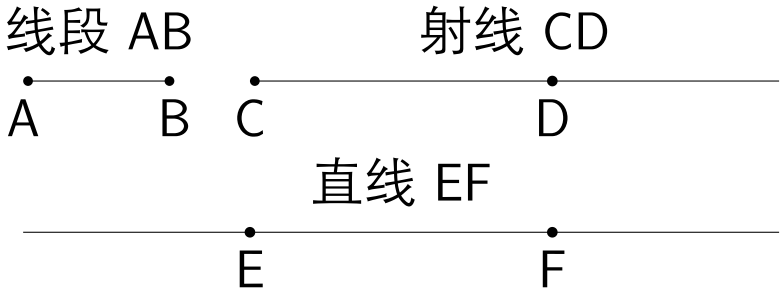
规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).

以下图形是不是一个数轴?

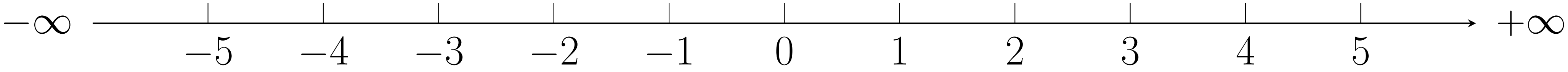


类比思维

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴 (number axis).



【北京师范大学四年级上册（2013）P16】
线段：线段有两个端点，线段有一定的长度。
射线：射线有一个端点，射线可以向一个方向无限延伸。
直线：直线没有端点，直线可以向两个方向无限延伸。



实数集 $\mathbb{R}$ 可以用区间表示为 $(-\infty,+\infty)$，∞ 读作“无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”，“$+\infty$”读作“正无穷大”.【必修 A 版一册 P64】

在数学中，我们可以用一对有序实数来确定平面上点的位置。

为此，在平面上画两条原点重合、互相垂直且具有相同单位长度的数轴，这就建立了平面直角坐标系 (rectangle coordinate system)。

通常把其中水平的数轴叫做 x 轴或横轴，取向右为正方向；铅直的数轴叫做 y 轴或纵轴，取向上为正方向；两条数轴的交点 O 叫做坐标原点。

为了纪念法国数学家笛卡儿，通常称为笛卡儿直角坐标系。

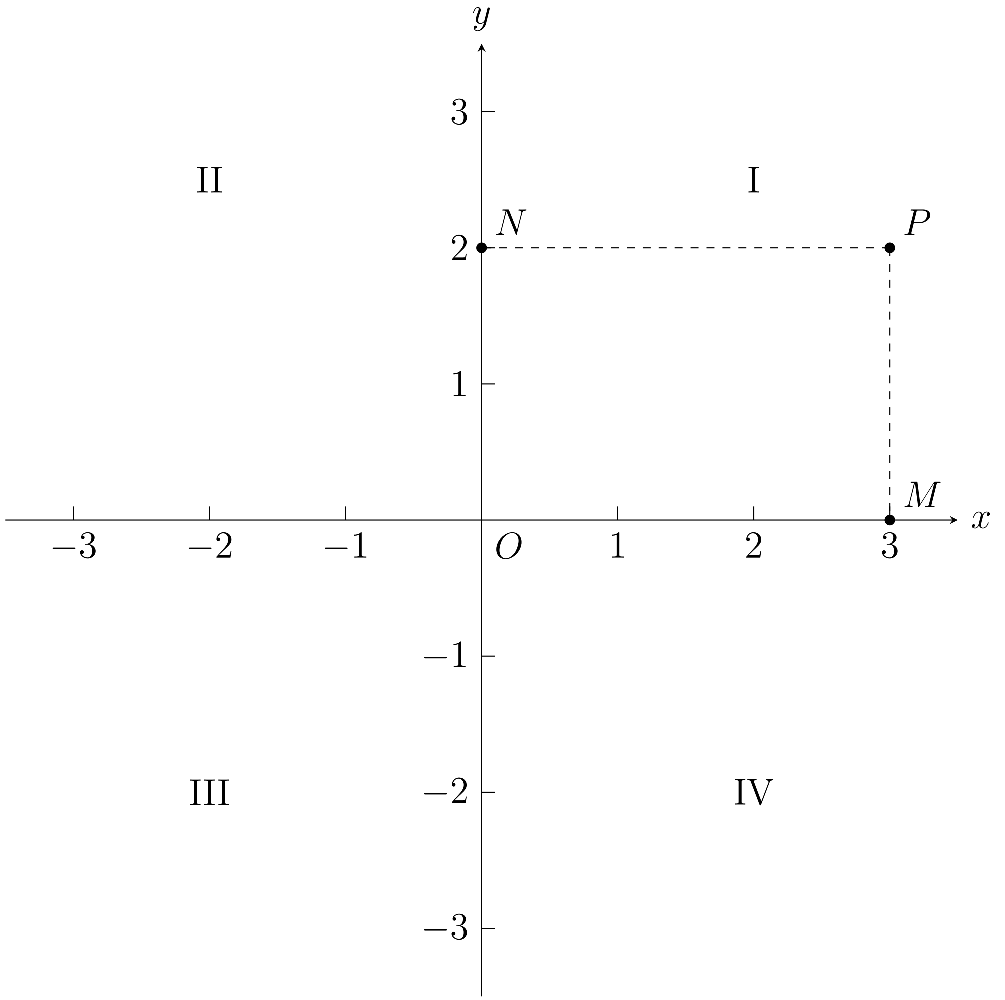


图: 17.2.2

平面直角坐标系

在平面直角坐标系中，任意一点都可以用一对有序实数来表示。例如，图 17.2.2 中的点 P，从点 P 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足分别为点 M 和点 N。

这时，点 M 在 x 轴上对应的数为 3，称为点 P 的横坐标 (abscissa)。点 N 在 y 轴上对应的数为 2，称为点 P 的纵坐标 (ordinate)。

依次写出点 P 的横坐标和纵坐标，得到一对有序实数 (3, 2)，称为点 P 的坐标。这时点 P 可记作 $P(3, 2)$。

在平面直角坐标系中，两条坐标轴把平面分成如图 17.2.2 所示的 I、II、III、IV 四个区域，分别称为第一、二、三、四象限。坐标轴上的点不属于任何一个象限。

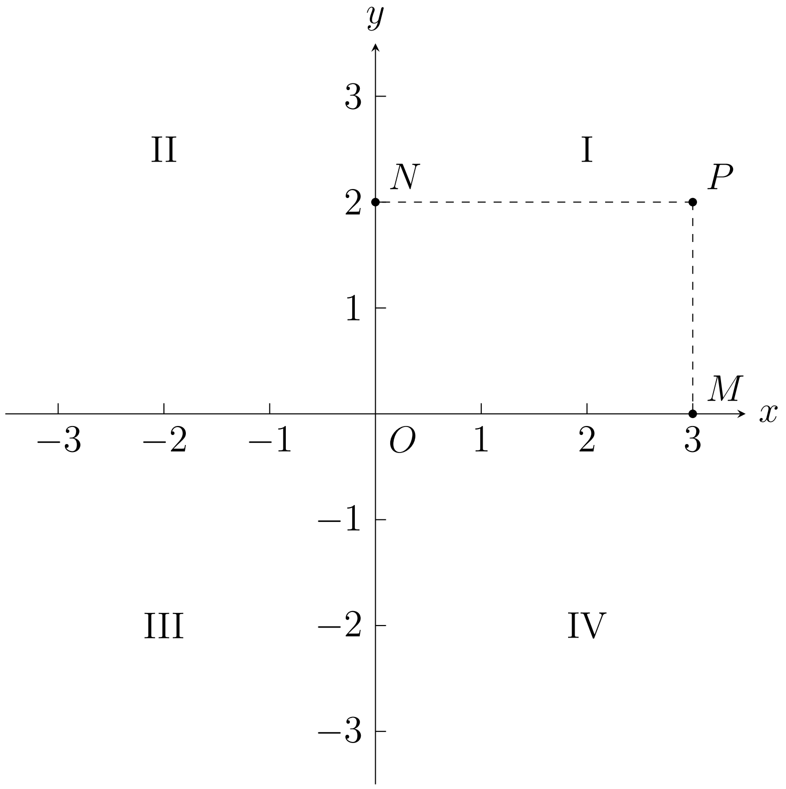


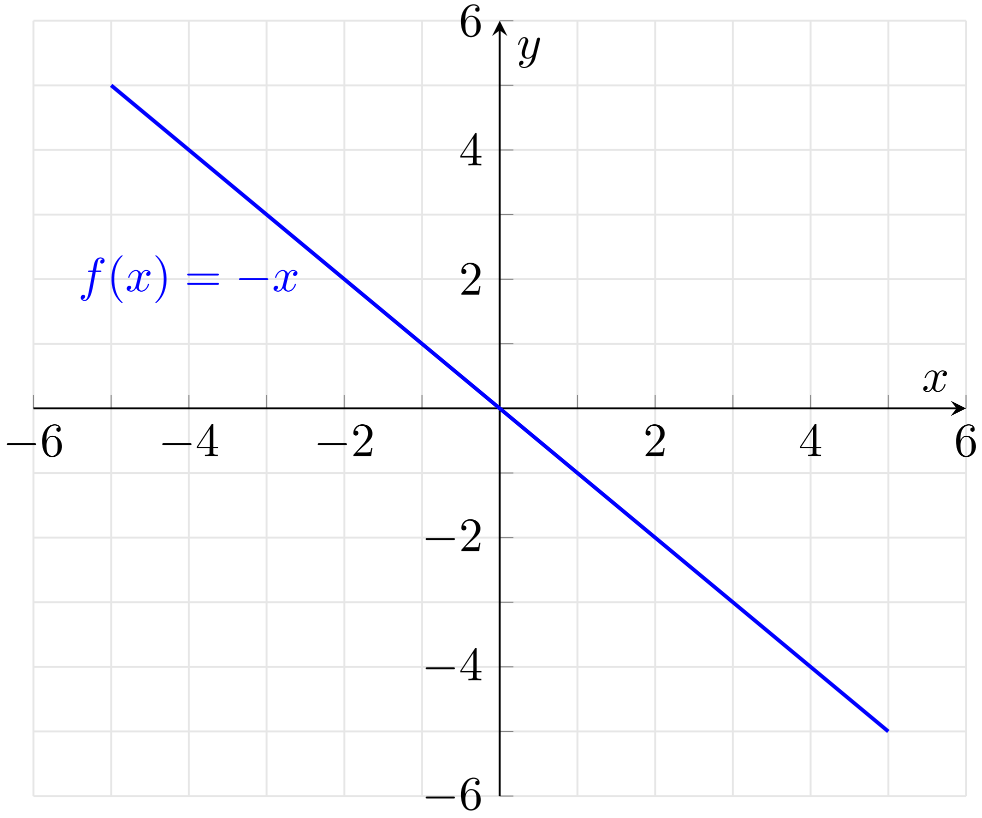
图: 17.2.2

1.3 相反数

定义

只有正负号不同的两个数称互为相反数 (opposite number)。
我们规定：0 的相反数是 0 .

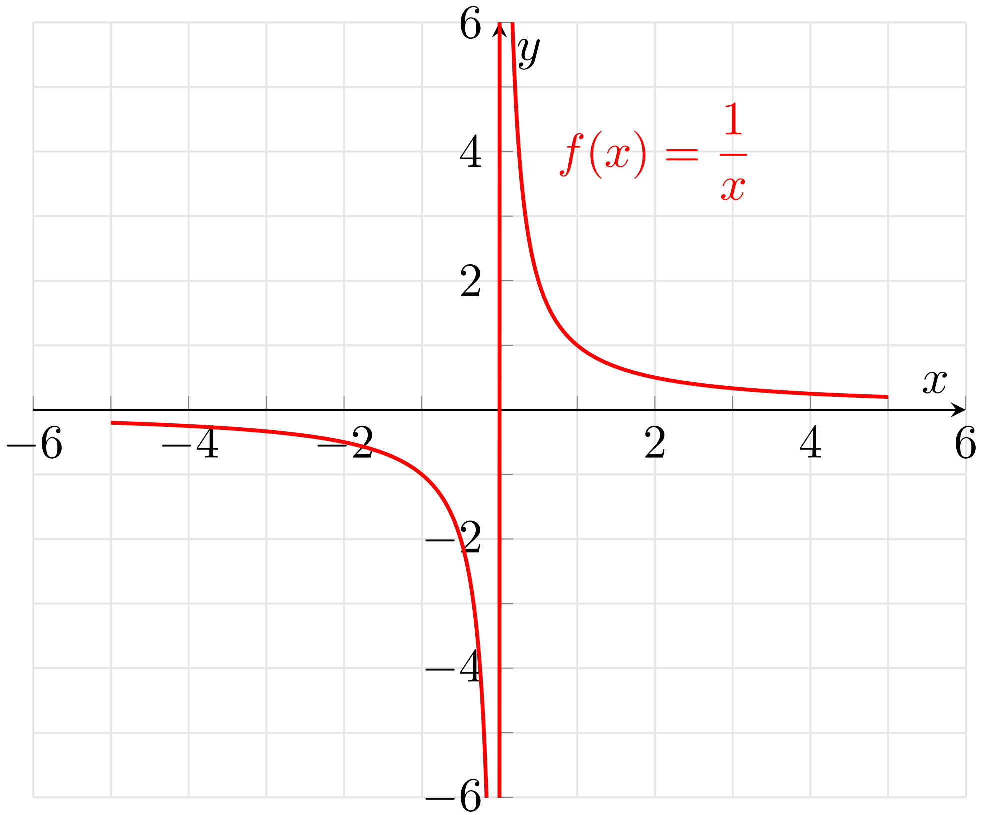
数学表达式: $a+b=0$
函数定义: $f(x)=-x$
定义域: $x\in\mathbb{R}$
值域: $y\in\mathbb{R}$
对称性: 关于原点中心对称



倒数的定义及函数图象

定义

乘积为 1 的两个数互为倒数。
注意：0 没有倒数。



数学表达式: $a \cdot b = 1$

函数定义: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

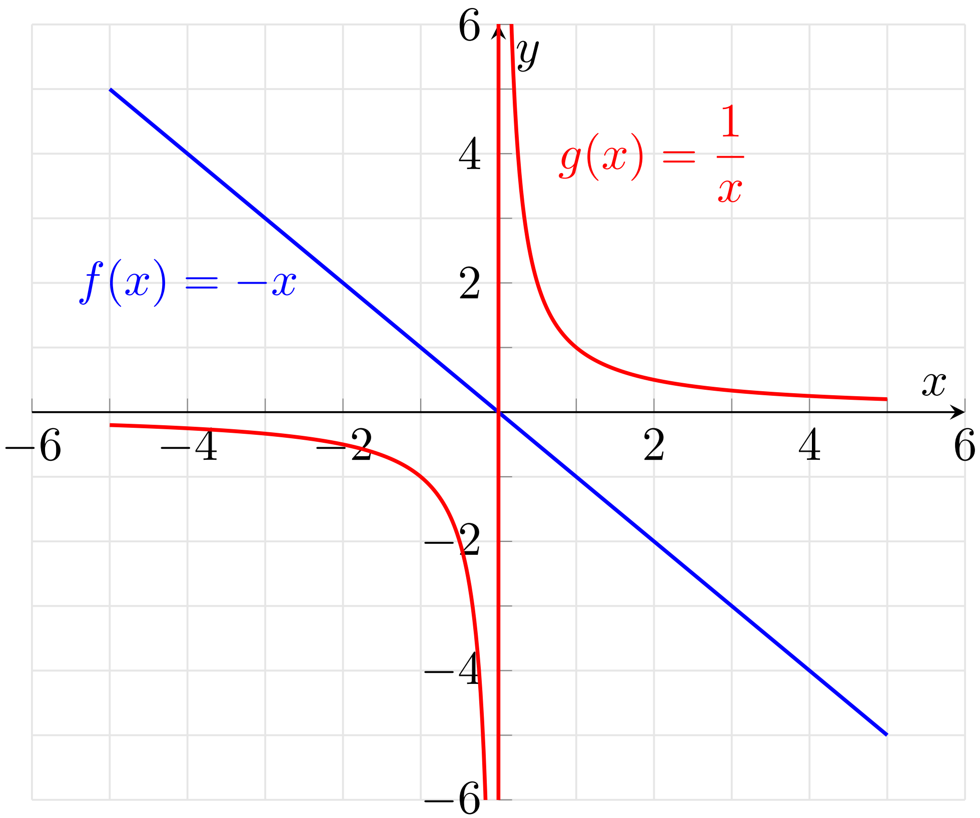
定义域: $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

值域: $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

对称性: 关于原点中心对称

相反数与倒数的比较

相反数的表达式: $a + b = 0$
倒数的表达式: $a \cdot b = 1$
对称性: 相反数与倒数均关于原点中心对称



定义：我们把在数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做数 a 的绝对值，记作 $|a|$.

1. 一个正数的绝对值是它本身;
2. 0 的绝对值是 0;
3. 一个负数的绝对值是它的相反数.

数学表达式: $|x|$

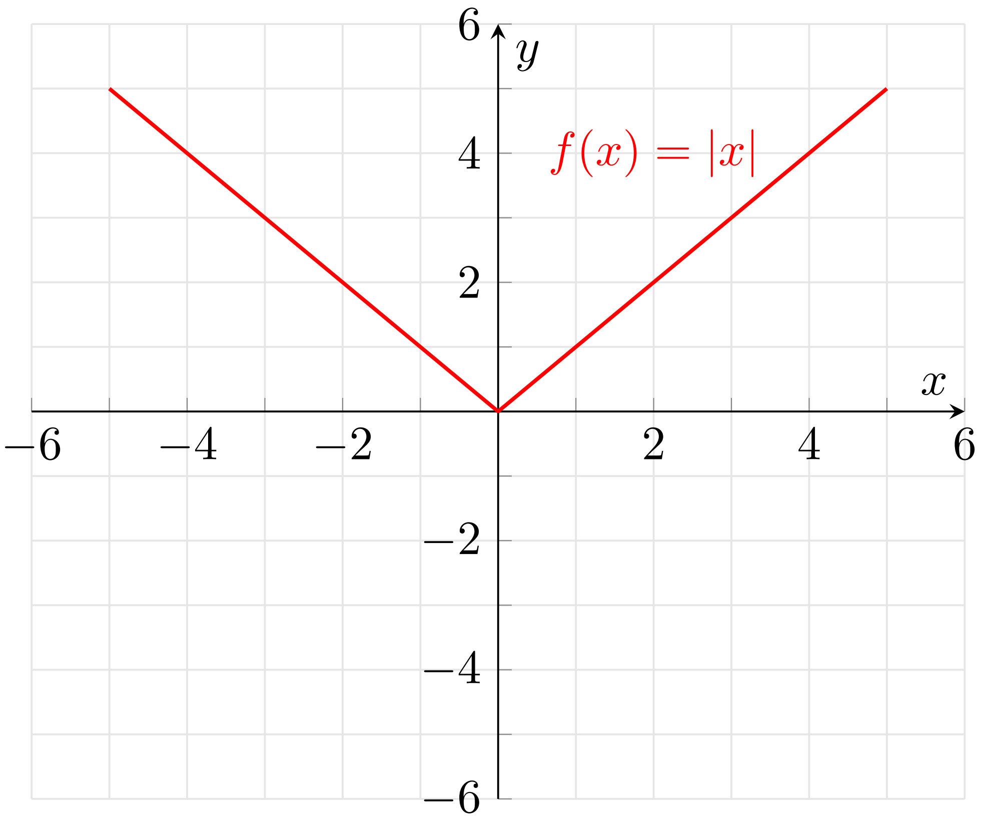
函数定义:

$$f(x)=\begin{cases} x, x>0 \\ 0, x=0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$

定义域: $x \in \mathbb{R}$

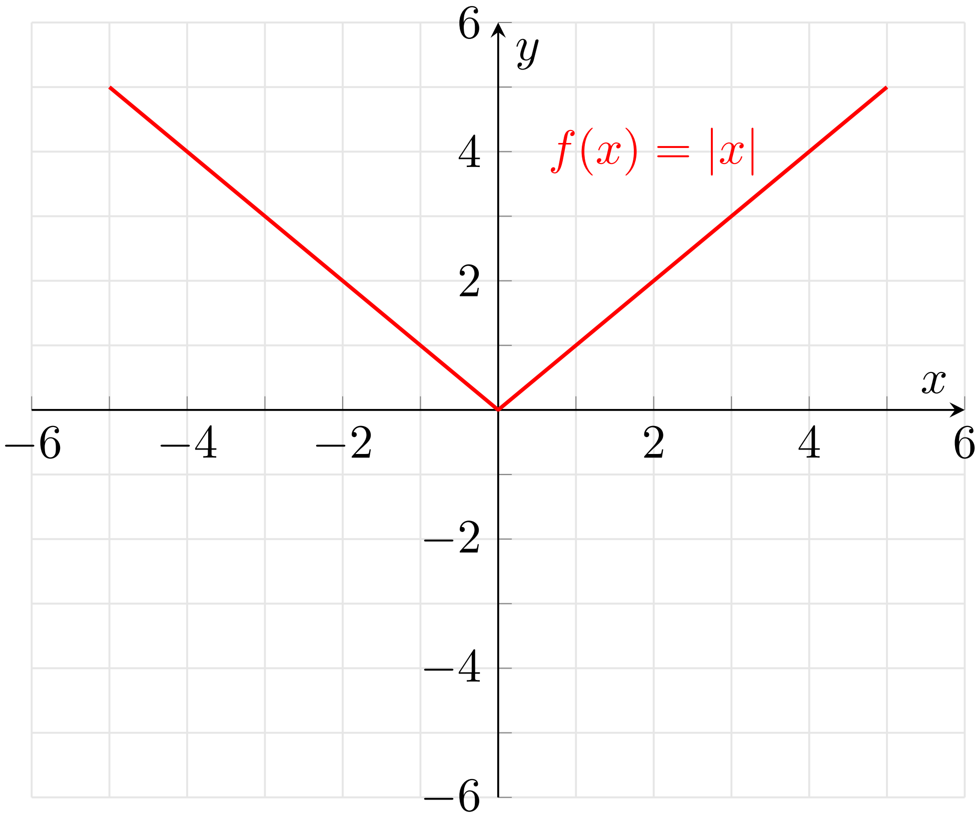
值域: $y \in \mathbb{R}, y \geq 0$

对称性: 关于 y 轴对称

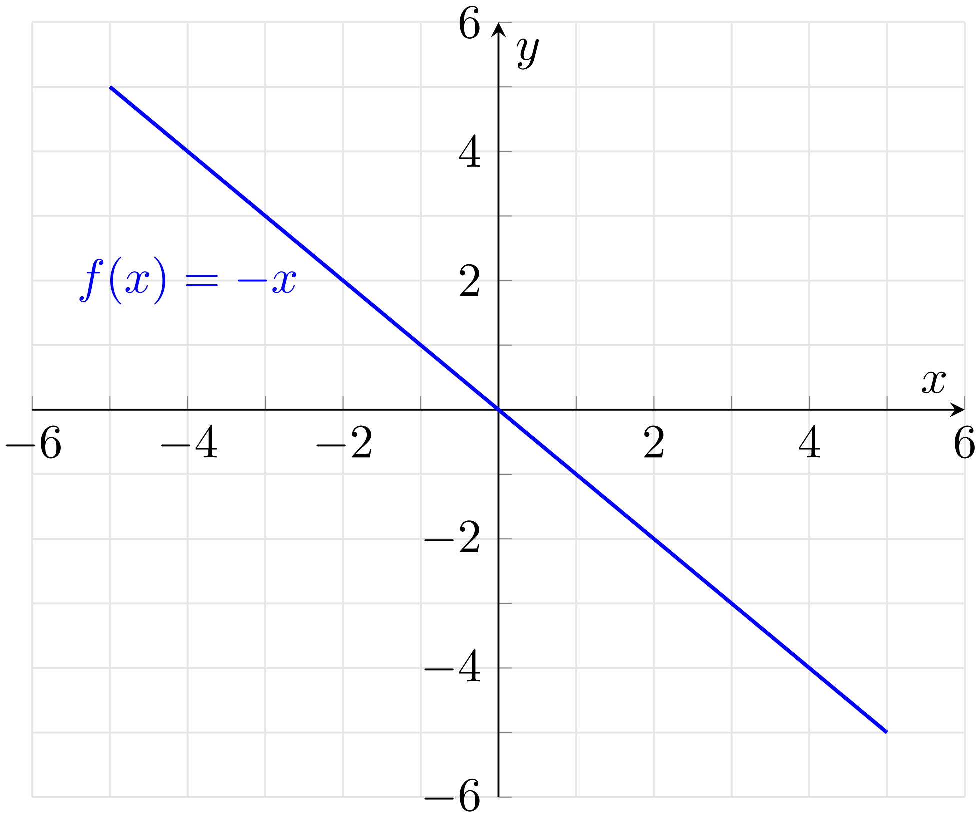


绝对值与相反数的比较

绝对值的函数图象



相反数的函数图象



有理数大小比较法则

1. 数轴上右边的数比左边的数大
2. 正数 $>$ 0
3. 负数 $<$ 0
4. 正数 $>$ 负数
5. 两个负数比较，绝对值大的反而小！

数轴比较法

例

把下列各数表示在数轴上，并用"$<$" 连接:

-2, 0, 3, -3.5, 1.5

数轴比较法

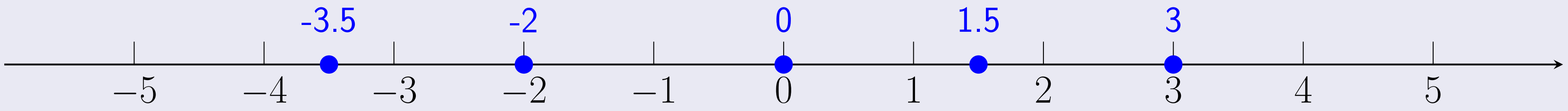
例

把下列各数表示在数轴上，并用"$<$" 连接：

$-2,\ 0,\ 3,\ -3.5,\ 1.5$

解：

1. 画数轴并标出所有数



2. 从左到右（从小到大）排列

3. 结果：$-3.5 < -2 < 0 < 1.5 < 3$

两负数的绝对值比较法

两个负数比较，绝对值大的反而小!

例

(1) -3 与 -5 哪个大? (2) -1.3 与 -3 哪个大?

两负数的绝对值比较法

两个负数比较，绝对值大的反而小！

例

(1) -3 与 -5 哪个大? (2) -1.3 与 -3 哪个大?

解:

(1)

$|-3| = 3, \quad |-5| = 5,$

$\because 3 < 5,$

$\therefore -3 > -5$

(2)

$|-1.3| = 1.3, \quad |-3| = 3,$

$\because 1.3 < 4,$

$\therefore -1.3 > -3$

1.6 有理数的加法法则

1. 同号两数相加, 取与加数相同的正负号, 并把绝对值相加;
   当$a, b > 0$时,
   $(+a) + (+b) = +(a + b) = a + b$
   $(-a) + (-b) = -(a + b)$

2. 绝对值不相等的异号两数相加, 取绝对值较大的加数的正负号, 并用较大的绝对值减去较小的绝对值;
   当$a > b > 0$时,
   $(-a) + (+b) = -(a - b)$
   $(+a) + (-b) = +(a - b) = a - b$

3. 互为相反数的两个数相加得 0;
   $a + (-a) = 0$

有理数加法的运算律

1. 加法交换律：两个数相加，交换加数的位置，和不变.

$$a + b = b + a$$

2. 加法结合律: 三个数相加, 先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

括号前的符号与数字前的符号存在下列关系，则:

1. 同号去括号取正号

$$+(+a) = +a = a$$

$$-(-a) = +a = a$$

2. 异号去括号取负号

有理数的减法法则:

1. 减去一个数, 等于加上这个数的相反数.

$$a - b = a + (-b)$$

$$a - (-b) = a + (+b) = a + b$$

算式 (- 8) - (- 10) + (- 6) - (+ 4) 是有理数的加减混合运算，可以按照运算顺序，从左到右逐步计算；也可以应用有理数的减法法则，把它改写成 (- 8) + (+ 10) + (- 6) + (- 4)，统一为只有加法运算的和式.

在一个和式里，通常把各个加数的括号和它们前面的加号省略不写. 如上式可写成省略加号的和的形式:

$$-8 + 10 - 6 - 4.$$

这个式子仍可看作和式，读作“负 8、正 10、负 6、负 4 的和”. 从运算意义看，上式也可读作“负 8 加 10 减 6 减 4”.

加法运算律在加减混合运算中的应用

因为有理数的加减法可以统一成加法，所以在进行有理数的加减混合运算时，可以适当应用加法运算律，简化计算.

例 2　计算:

(1) - 24 + 3.2 - 16 - 3.5 + 0.3;

(2) $0-21\frac{2}{3}+\left(+3\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{1}{4}\right)$.

解:

(1) - 24 + 3.2 - 16 - 3.5 + 0.3 = -24 - 16 -3.5 + 3.2 + 0.3

= -(24+16) - 3.5 + (3.2 + 0.3) = -40 - 3.5 + 3.5 = -40.

(2) $0-21\frac{2}{3}+\left(3\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{1}{4}\right)=-21\frac{2}{3}+\left(3\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)$

$=-21\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)+\left(3\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)=-21+3=-18$