Problemas de Valor de Contorno para Equações Diferenciais Parciais

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

1 Definições Importantes

Definição. *Conjunto Aberto: conjunto cujos pontos são todos pontos interiores.*

Definição. *Domínio: chamaremos de domínio a todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ conectado e aberto.*

Definição. *Contorno: a curva no $\mathbb{R}^n$ que delimita o domínio Ω será chamada de contorno de Ω e será simbolizada por Γ.*

Definição. *Problema de valor de contorno (PVC) para equações diferenciais parciais (EDP): um PVC para EDP será composto por:*

a) *Um domínio Ω;*

b) *Um contorno Γ de Ω;*

c) *Uma EDP válida para todos os pontos $\in \Omega$ e condições de contorno em Γ.*

2 Estudo de Casos (EDPs Canônicas)

2.1 Equação da Onda Unidimensional

O problema de se encontrar a função $u(x,t)$, que descreve o deslocamento de uma corda elástica ao longo do eixo x e presa nas suas duas extremidades, pode ser modelado pela equação da onda unidimensional.

$$\nabla^2 u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

onde $a > 0$ é a velocidade de propagação da onda no meio. Para este estudo de caso, iremos considerar como π o comprimento da corda. Conhecemos também duas condições iniciais:

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

A primeira condição inicial refere-se à posição inicial da corda, enquanto que a segunda condição inicial refere-se à velocidade inicial da corda.

Para resumir, o PVC para EDP com condições iniciais deste caso é:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,, 0 < x < \pi \text{ , com } \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ e } \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Como admitimos que u é uma função de x e t ($u(x,t)$), nada mais natural imaginar que a solução desse problema pode ser escrita como o produto de duas funções:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

onde X e T são funções que dependem exclusivamente de x e t respectivamente. Nós teremos que assumir que X e $T \in C^2[0,\pi]$, sendo assim

$$\nabla^2 u = X''(x)T(t) \text{ e } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t).$$

Substituindo essas duas expressões na EDP da onda teremos:

$$X''(x)\,T(t) = \frac{1}{a^2}\,X(x)\,T''(t) \text{ ou}$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}$$

sempre que $XT \neq 0$. O lado esquerdo da última equação depende apenas da variável x, por sua vez o lado direito depende apenas de t. Isso só é possível se ambos os lados forem iguais a uma constante λ.

Dessa forma, podemos escrever:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0,$$

onde a primeira equação tem que atender a $X(0) = X(\pi) = 0$ e neste caso recairemos num PSL. Esse PSL admite como soluções $X_n(x) = sen(nx)\,,\, n = 1, 2, \dots$ associadas a autovalores $\lambda_n = -n^2$.

Quando $\lambda = -n^2$, a solução geral de $T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0$ é $T_n(t) = A_n sen(nat) + B_n \cos(nat)$, onde A_n e B_n são constantes a serem determinadas. Agora, podemos multiplicar X e T:

$$u_n(x,t) = (sen(nx))(A_n sen(nat) + B_n \cos(nat))$$

Resta aplicar as condições iniciais $u(x,0) = f(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$.

Estas condições serão aplicadas em:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} sen(nx)(A_n sen(nat) + B_n \cos(nat))$$

Para $t = 0$,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen(nx) = f(x)\ ,$$

ou seja, a condição inicial $u(x,0) = f(x)$ será satisfeita se essa série convergir na média para $f(x)$ no intervalo $[0,\pi]$. A determinação dos B_n's pode ser feita através da série de Fourier da extensão periódica ímpar de $f(x)$:

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) sen(nx)dx$$

As constantes A_n's podem ser determinadas de maneira semelhante. Primeiro, vamos derivar $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} sen(nx)(A_n sen(nat) + B_n \cos(nat))$ e aplicar $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} naA_n sen(nx) \text{ onde}$$

$$A_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\pi} g(x) sen(nx) dx \; .$$

Exemplo 2.1. *Resolver o PVC para eq. da onda:*

$$\nabla^2 u = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \; , 0 < x < 30,$$

com

$$u(0,t) = u(30,t) = 0$$

e

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10}, \; 0 \le x \ge 10 \\ \\ \frac{(30-x)}{20}, \; 10 < x \le 30 \end{cases}$$

2.2 Equação do Calor

O problema unidimensional do calor é dado pelo PVC:

$$a^2\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{em} \quad \Omega = 0 < x < L \text{ , com}$$

$u(x,0) = f(X)$ (Distribuição inicial de temperatura)

$u(0,t) = 0 \; , \; u(L,t) = 0 \; , t > 0$ (Condições de contorno).

Supondo:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

E substituindo na EDP:

$$a^2 X''T = XT'.$$

Separando as variáveis temos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = -\lambda. \quad \textbf{(i)}$$

Os lados esquerdos nos levam ao seguinte PSL associado:

$$X'' + \lambda X = 0$$

E $X(0) = X(L) = 0$ implica que teremos a solução:

$$X_n = sen\frac{n\pi x}{L} \; , \; n = 1, 2, 3, ...,$$

com os autovalores $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \; , \; n = 1, 2, 3, ...$

O lado direito de (i) nos conduz a:

$$T' + \left(\frac{n^2 a^2 \pi^2}{L^2}\right) T = 0$$

(um PSL com 1 raiz real)

A variável $T(t)$ será proporcional a $e^{-\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t}$ e assim chegamos a

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad , \; n = 1, 2, 3, ...$$

Precisamos impor a condição inicial $u(x,0) = f(x)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) \text{ , com}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Exemplo 2.2. *Resolver o PVC para eq. do calor:*

$$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} \; , 0 < x < 50,$$

com

$$u(0,t) = u(50,t) = 0$$

e

$$u(x,0) = 20^{\circ}.$$

2.3 Equações do Calor com Condições de Contorno não Homogêneas

Vamos considerar o caso em que o PVC da eq. do calor não possui condições de contorno homogêneas:

$$a^2\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} \; , \; 0 < x < L \; , \; t > 0,$$

$$u(0,t) = T_1 \; , \; u(L,t) = T_2,$$

$$u(x,0) = f(x)$$

Para resolver esse problema em particular, lançaremos mão de um argumento físico simples: depois de um tempo longo, ou seja, quando $t \to \infty$, a barra alcançará uma temperatura estacionária $v(x)$. Devido à sua estacionariedade, $v(x)$ satisfaz a:

$$v''(x) = 0 \; , \; 0 < x < L$$

com as cond. de contorno:

$$v(0) = T_1 \; , \; v(L) = T_2.$$

Após integrar $v''(x) = 0$ duas vezes e aplicando as cond. de contorno teremos

$$v(x) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1$$

E agora, iremos expressar $u(x,t)$ como a soma de uma solução permanente com uma solução de regime transiente:

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t),$$

$$a^2\nabla^2(v+w) = \frac{\partial(v+w)}{\partial t} \Rightarrow a^2\nabla^2 w = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

E as condições de contorno ficam:

$$u(0,t) = v(0) + w(0,t) \Rightarrow w(0,t) = T_1 - T_1 = 0$$

$$u(L,t) = v(L) + w(L,t) \Rightarrow w(L,t) = T_2 - T_2 = 0$$

A condição inicial é:

$$u(x,0) = v(x) + w(x,0) = f(x) \Rightarrow w(x,0) = f(x) - v(x)$$

Após essas mudanças de variáveis, a solução do problema é:

$$u(x,t) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{, onde}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - v(x)] sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Exemplo 2.3.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < 30$$

$$u(0,t) = 20^\circ, u(30,t) = 50^\circ$$

$$u(x,0) = 60 - 2x, 0 < x < 30.$$

2.4 Equação do Calor com Extremidades da Barra Isoladas

Queremos resolver a equação do calor para os casos nos quais um material isolante térmico está aplicado nas extremidades da barra. O fluxo de calor é dado pela derivada da temperatura em relação à variável espacial x. O PVC com as condições iniciais é

$$a^2\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}\ ,\ 0 < x < L$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.$$

Mais uma vez podemos considerar $u(x,t) = X(x)T(t)$, com o PSL derivado:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = -\lambda \Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + a^2\lambda T = 0 \end{cases}$$

As condições de contorno exigem que X'(0)=0 e X'(L)=0. Esse PSL só tem soluções não triviais em dois casos:

- Caso 1 ($\lambda = 0$) $\Rightarrow X'' = 0$ e $X = c_1 x + c_2$

As condições de contorno implicam que $c_1 = 0$, porém não determinam c_2. Logo $\lambda = 0$ é um autovalor e a autofunção é $X(x) = 1$. Para $\lambda = 0$, temos $T(t)$ também constante, Podemos concluir que $u(x,t) = c_2$.

- Caso 2 ($\lambda > 0$):

Consideraremos $\lambda = \mu^2$, então a equação na variável espacial fica

$$X'' + \mu^2 X = 0,$$

que admite como solução

$$X = c_1 sen\mu x + c_2\cos\mu x.$$

A condição $X'(0) = 0$ nos fornece $c_1 = 0$. A condição $X'(L) = 0$ implica em:

$$\mu_n = \frac{n\pi}{L}\ ,\ n = 1, 2, ...,$$

com autofunção

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

e

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

As soluções na variável temporal são proporcionais a $e^{-\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t}$.

Combinando os casos 1 e 2 temos:

$$u_0(x,t) = 1$$

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n = 1, 2, 3, ...$$

A condição inicial deve atender a

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2}u_0(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t)$$

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Como $u(x,0) = f(x)$:

$$u(x,0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

com

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Exemplo 2.4.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < 25$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u(0,t) = \frac{\partial}{\partial x}u(25,t) = 0$$

$$u(x,0) = x, 0 < x < 25.$$

2.5 Equação de Laplace em Regiões Retangulares

A equação de Laplace definida num domínio retangular pode ser escrita na forma:

$$\nabla^2 u = 0, 0 < x < b, 0 < y < h, \Omega =]0, b[\times]0, h[.$$

Podemos ter as seguintes condições de contorno:

$$u(0, y) = u(b, y) = u(x, h)) = 0, u(x, 0) = f(x).$$

Vamos admitir que a solução desse PVC pode ser escrita como o produto de 2 variáveis:

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Dessa forma:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY'',$$

logo:

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda.$$

Mais uma vez temos um par de EDOs:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad \textbf{(i)}$$

$$Y'' - \lambda Y = 0. \quad \textbf{(ii)}$$

A eq. **(i)** com as condições de contorno $X(0) = X(b) = 0$ formam um PSL e suas autofunções são:

$$X_n = A_n sen(\frac{n\pi x}{b}), n = 1, 2, 3, ...,$$

com os autovalores:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}.$$

Para esses valores de λ, a eq. **(ii)** se torna:

$$Y'' - \frac{n^2\pi^2}{b^2} Y = 0.$$

O PSL (com a condição de contorno $Y(h) = 0$) tem como solução

$$Y_n = B_n senh(\frac{n\pi y}{b}) + C_n cosh(\frac{n\pi y}{b}), n = 1, 2, 3, ...$$

Impondo a condição de contorno:

$$B_n senh(\frac{n\pi y}{b}) + C_n cosh(\frac{n\pi y}{b}) = 0, n = 1, 2, 3, ...$$

Essa condição, para ser atendida precisa, ter

$$B_n = -cosh(\frac{n\pi h}{b}), C_n = senh(\frac{n\pi h}{b}), n = 1, 2, 3, ...$$

Podemos obter

$$Y_n = senh(\frac{n\pi}{b}(h - y)), n = 1, 2, 3, ...,$$

se utilizarmos a identidade

$$senh(\alpha - \beta) = senh(\alpha)cosh(\beta) - cosh(\alpha)senh(\beta).$$

Juntando $X(x)$ e $Y(y)$ temos

$$u_n(x, y) = A_n sen(\frac{n\pi x}{b}) senh(\frac{n\pi}{b}(h - y)), n = 1, 2, 3, ...,$$

restando impor a última condição de contorno ($u(x, 0) = f(x)$):

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen(\frac{n\pi x}{b}) senh(\frac{n\pi}{b}(h - y)),$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen(\frac{n\pi x}{b}) senh(\frac{n\pi}{b}(h)) = f(x).$$

Essa última expressão nos indica que podemos determinar os termos A_n através da série de Fourier da extensão ímpar de $f(x)$:

$$A_n senh(\frac{n\pi h}{b}) = \frac{2}{b}\int_0^b f(x) sen(\frac{n\pi x}{b}) dx.$$

Por fim, a solução da eq. de Laplace é

$$u(x, y) = \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^b f(x) sen(\frac{n\pi x}{b}) dx}{senh(\frac{n\pi h}{b})} sen(\frac{n\pi x}{b}) senh(\frac{n\pi}{b}(h - y)).$$