# Álgebra Linear

Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil

## 1 Definição de Espaço Vetorial

Um espaço vetorial $S$ deve atender às seguintes propriedades:

(i) comutatividade: $u + v = v + u$;

(ii) associatividade: $(u+v)+w = u+(v+w)$ e $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;

(iii) vetor nulo: existe um vetor $0 \in S$, chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$ para todo $u \in S$;

(iv) inverso aditivo: para cada vetor $u \in S$ existe um vetor $-u \in S$, chamado o inverso aditivo, ou o simétrico de $S$, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(v) distributividade: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;

(vi) multiplicação pela unidade: $1 \cdot v = v$.

Todos esses axiomas devem ser satisfeitos para $\alpha$ e $\beta \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in S$ quaisquer.

### 1.1 Exemplos

1. O espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N}$.
2. O conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ com $m, n \in \mathbb{N}$ e valores reais formam um espaço vetorial.
3. Os elementos do espaço $\mathbb{R}^\infty$.
4. Seja $X$ um conjunto não-vazio qualquer. Denota-se por $\mathbb{F}(X, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções reais $f, g : X \to \mathbb{R}$. Este conjunto $\mathbb{F}$ se torna um espaço vetorial quando definimos a soma $f + g$ de duas funções e $\alpha \cdot f$ o produto por uma função escalar: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.

## 2 Subespaços Vetoriais

Um subespaço vetorial do espaço vetorial $S$ é um subconjunto $T \subset S$ que atende aos axiomas que definem $S$ como um espaço vetorial e é por si só um espaço vetorial.

Seja S um espaço vetorial, chamaremos de subespaço vetorial de $S$ o subconjunto $T$ de $S$ que atenda às seguintes propriedades:

(i) $0 \in T$;

(ii) Se $u, v \in T$ então $u + v \in T$;

(iii) Se $u \in T$ então $\alpha u \in T$.

### 2.1 Exemplos

1. Seja $v \in S$ um vetor não nulo. O conjunto $T = \alpha v; \alpha \in \mathbb{R}$ de todos os múltiplos de $v$ é um subespaço de $S$.
2. Seja $S = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais de uma variável real ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $C^k(\mathbb{R})$ das funções k-vezes continuamente diferenciáveis é um subespaço de $S$.

### 2.2 Soma Direta

Sejam $T_1$ e $T_2$ subespaços de S. Podemos obter a partir de $T_1$ e $T_2$ um novo subespaço de $S$ através da união entre esses dois subespaços ($T_1 \cup T_2$); que é, simplesmente, o conjunto formado por todas as somas $t_1 + t_2$, onde $t_1 \in T_1$ e $t_2 \in T_2$. Esse novo espaço será representado por $T_1 + T_2$.

Quando os subespaços $T_1, T_2 \subset S$ têm em comum apenas o elemento $0$, ou seja, $T_1 \cap T_2 = 0$, escreve-se $T_1 \oplus T_2$ ao invés de $T_1 + T_2$ e diz-se que $T = T_1 \oplus T_2$ ($T$ é a soma direta de $T_1$ e $T_2$).

**Teorema 2.1.** *Sejam $T, T_1, T_2$ subespaços de $S$, com $T_1 \subset T$ e $T_2 \subset T$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$T = T_1 \oplus T_2$;*
2. *todo elemento $r \in T$ se escreve de maneira única como a soma $r = t_1 + t_2$, onde $t_1 \in T_1$ e $t_2 \in T_2$.*

## 3 Bases

**Definição.** *Combinação linear: seja $u_i, (i = 1, \ldots, n)$ um conjunto de vetores de um espaço vetorial $S$, então diz-se que $v$ é uma combinação linear dos vetores $u_i$ se:*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i.$$

Seja $T$ um subconjunto do espaço vetorial $S$. O subespaço de $S$ gerado por $T$ é, por definição, o conjunto de todas as combinações lineares $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$ de vetores $u_1, u_2, \ldots, u_n \in T$. Quando o subespaço gerado por $T$ coincide com $S$, dizemos que $T$ é um conjunto de geradores de $S$, neste caso para todo $v \in S$ tem-se: $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$. Ou seja, qualquer elemento de $S$ pode ser obtido através de uma combinação linear dos vetores de $T$.

### 3.1 Exemplo

1. Os chamados vetores canônicos constituem um conjunto de geradores do espaço $\mathbb{R}^n$.

**Definição.** *Conjunto linearmente independente: seja $S$ um espaço vetorial. Diz-se que um conjunto $T \subset S$ é linearmente independente (LI) quando nenhum vetor $u \in T$ é combinação linear dos outros elementos de $T$.*

**Observação.** *No caso de $T = u$, dizemos que $T$ é LI se $u \neq 0$.*

**Teorema 3.1.** *Seja $T$ um conjunto LI do espaço $S$. Se:*

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$$

*com $u_i \in T$, então $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.*

### 3.2 Exemplos

1. Os chamados vetores canônicos são LI.
2. Os monômios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ em $P^n$ são LI.

**Observação.** *De forma evidente, se um conjunto não é LI, ele é linearmente dependente (LD).*

**Definição.** *Base: uma base de um espaço $S$ é um conjunto $B \subset S$ linearmente independente que gera $S$. Se $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de $S$, logo $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, então $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são as coordenadas de $v$ na base $\mathfrak{B}$.*

### 3.3 Exemplos

1. Os chamados vetores canônicos formam uma base de $\mathbb{R}^n$. Os monômios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ formam uma base de $P^n$.
2. O conjunto de monômios de grau arbitrário $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ formam uma base do espaço $P$ de todos os polinômios reais.
3. O conjunto $X = \{\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}, \ldots\} \subset \mathbb{R}^\infty$, onde $\overline{e_n} = [0, ..., 0, 1, 0, \ldots]$ é LI, mas não gera $\mathbb{R}^\infty$.

**Observação.** *Houve um debate na Matemática sobre a existência ou não de uma base para $\mathbb{R}^\infty$. O que se sabe é: $\mathbb{R}^\infty$ possui uma base que não se consegue computar, pois existe o lema de Zorn que garante que todo espaço vetorial tem uma base.*

**Teorema 3.2.** *Se os vetores $v_1, \ldots, v_n$ geram o espaço $S$, então qualquer conjunto com mais de $n$ vetores em $S$ é LD.*

**Corolário 3.1.** *Se os vetores $v_1, \ldots, v_n$ geram o espaço $S$ e os vetores $u_1, \ldots, u_m$ são LI, então $m \leq n$.*

**Corolário 3.2.** *Se o espaço vetorial $S$ tem uma base $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ com $n$ elementos, então qualquer base de $S$ também possuirá $n$ elementos.*

**Definição.** *Dimensão: diz-se que um espaço vetorial $S$ tem dimensão finita quando admite uma base $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ com um número finito $n$ de elementos. Pelo corolário 2, o número de elementos é o mesmo para todas as bases, logo denota-se a dimensão do espaço $S : n = dimS$. O espaço vetorial $S$ formado apenas pelo elemento $0$ tem dimensão 0.*

**Corolário 3.3.** *Se a dimensão de um espaço $S$ é $n$, um conjunto com $n$ vetores gera $S$ se, e somente se é LI.*

**Teorema 3.3.** *Seja $S$ um espaço vetorial de dimensão finita $n$, então:*

*(i) todo conjunto $X$ de geradores de $S$ contém uma base;*

*(ii) todo conjunto LI $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset S$ está contido numa base;*

*(iii) todo subespaço $T \subset S$ tem dimensão finita $\leq n$;*

*(iv) se a dimensão do subespaço $T \subset S$ é igual a $n$, então $T = S$.*

### 3.4 Exemplos

1. Os monômios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ constituem uma base de $P^n$ (polinômios de grau $\leq n$), logo $P^n$ tem dimensão finita igual a $n + 1$.
2. O espaço $P$ de todos os polinômios tem dimensão infinita.
3. $\mathbb{R}^\infty$ tem dimensão infinita.
4. O espaço vetorial $M_{(m \times n)}$ das matrizes de ordem $m \times n$ tem dimensão igual a $m \cdot n$.

## 4 Transformações Lineares

**Definição.** *Transformação linear: sejam $T, S$ espaços vetoriais. Uma transformação linear $A : T \to S$ é uma correspondência que associa a cada vetor $v \in T$ um vetor $A(v) = A \cdot v = Av \in S$ de modo que, para todos $u, v \in T$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ valham:*

*(i) $A(u + v) = Au + Av$;*

*(ii) $A(\alpha v) = \alpha Av$.*

*O vetor $Av$ é chamado de imagem de $v$ pela transformação $A$.*

Consequências:

(i) $A(0) = 0, A(0) = A(0 + 0) = A(0) + A(0)$;

(ii) $u, v \in S$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tem-se: $A(\alpha u + \beta v) = A(\alpha u) + A(\beta v) = \alpha Au + \beta Av$;

(iii) generalizando, sejam $v_1, \ldots, v_m \in S$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, vale: $A(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m) = \alpha_1 Av_1 + \ldots + \alpha_m Av_m$;

(iv) $A(-v) = -Av$ e $A(u - v) = Au - Av$.

A soma de duas transformações lineares $A, B : T \to S$ e o produto de uma transformação linear (TL) $A : T \to S$ por um número $\alpha \in \mathbb{R}$ são as TLs:

(i) $A + B : T \to S, (A + B)v = Av + Bv$;

(ii) $\alpha A : T \to S, (\alpha A)v = \alpha Av$.

Propriedades válidas para todo $v \in T$. O símbolo $0$ denota a TL nula: $0 : T \to S, 0(v) = 0$. O que permite definir $-A : T \to S$ por $(-A)v = -Av$ e $(-A) + (A) = A + (-A) = 0$.

Seja $\mathfrak{L}(T, S)$ o conjunto das TLs de $T$ em $S$. As definições anteriores caracterizam $\mathfrak{L}(T, S)$ num espaço vetorial. Quando

$T = S$, escreve-se apenas $\mathfrak{L}(S)$. AS TLs de um espaço vetorial nele mesmo ganham o sinônimo de operadores lineares em $S$. As TLs $\phi : S \to \mathbb{R}$ com valores numéricos são chamadas de funcionais lineares. Chama-se de $S^*$ o espaço vetorial formado por todas os funcionais lineares $\Phi : S \to \mathbb{R}$, $S^*$ é também chamado de espaço dual de $S$.

**Teorema 4.1.** *Sejam $T$ e $S$ espaços vetoriais e $\mathfrak{B}$ uma base de $T$. Para cada vetor $u \in \mathfrak{B}$, façamos corresponder (de forma arbitrária) um vetor $u' \in S$. Então existe uma única transformação linear $A : T \to S$ tal que $Au = u'$ para cada $u \in B$.*

Consequência: se quisermos definir uma TL $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ basta escolher, para cada $j = 1, \ldots, n$, um vetor $v_j = [a_{ij}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}] \in \mathbb{R}^m$ de tal modo que $v_j = Ae_j$, ou seja, $v_j$ é a imagem do $j$-ésimo vetor da base canônica $e_j$ pela TL $A$. E, uma vez feito isso, podemos obter a imagem de qualquer $u \in \mathbb{R}^n$:

$$
\begin{aligned}
Au &= A(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j A e_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_{1j}x_j, a_{2j}x_j, \ldots, a_{mj}x_j) \\
&= (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j) \\
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

Reescrevendo em forma matricial:

$$y = Au$$

## 4.1 Exemplos

1. A rotação em um ângulo $\theta$ em torno da origem no plano.
2. A projeção ortogonal sobre uma reta que consiste em projetar qualquer vetor $u = [x, y]$ sobre a reta $y = \alpha x$.
3. Exemplo de funcional: produto interno entre funções.

## 4.2 Exercícios

1. Dado um conjunto de vetores, como verificar se eles formam um conjunto LI?
2. Mudança de base.

## 4.3 Formas Bilineares

**Definição.** *Sejam $T, S$ dois espaços vetoriais. Dizemos que uma função $b : T \times S \to \mathbb{R}$, denotada por $b(u, v)$ para $u \in T$ e $v \in S$ é uma forma bilinear se ela for linear em cada argumento. A forma bilinear atende às seguintes propriedades:*

*(i)* $b(u + u', v) = b(u, v) + b(u', v)$;

*(ii)* $b(u, v + v') = b(u, v) + b(u, v')$;

*(iii)* $b(\alpha u, v) = \alpha b(u, v)$;

*(iv)* $b(u, \alpha v) = \alpha b(u, v)$.

*Onde $u, u' \in T$, $v, v' \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Essas definições de soma e produto fazem do conjunto $\mathfrak{L}(T \times S)$ formado por todas as formas bilineares $b : T \times S \to \mathbb{R}$ um espaço vetorial por si só. O produto escalar ou produto interno $u \cdot v = (u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots u_nv_n$, para $u, v \in \mathbb{R}^n$ é uma forma bilinear $(u, v) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

Seja $L^2(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \int_\Omega f^2 \, dx < \infty\}$. No caso de funções $f, g$ de quadrado integrável no domínio $\Omega$, isto é, $f, g \in L^2(\Omega)$, o produto interno entre $f, g$ é:

$$(f, g) = \int_\Omega fg \, dx$$

## 4.4 Produto de Transformações Lineares

**Definição.** *Produto de transformações lineares: sejam as TLs $A : T \to S$, $B : S \to E$, onde o domínio de $B$ é o contra-domínio de $A$. O produto $BA : T \to E$ que mapeia cada $u \in T$ em $E$, $(BA)u = B(Au)$.*

Deve-se observar que $BA$ é por si só uma TL, $BA$ representa a TL composta $B \circ A$ das TLs $B$ e $A$. Para $C : E \to F$ e $A, B : T \to E$ , valem:

(i) associatividade: $(CB)A = C(BA)$;

(ii) distributividade à esquerda: $(B + C)A = BA + CA$;

(iii) distributividade à direita: $C(A + B) = CA + CB$.

## 4.5 Exemplo

1. Uma rotação $R$ do exemplo 4.1 seguida da projeção ortogonal sobre uma reta (do exemplo 4.2).

## 4.6 Núcleo e Imagem de Uma Transformação Linear

**Definição.** *Núcleo de uma TL: sejam $T$ e $S$ espaços vetoriais e $A : T \to S$ uma TL. Chamamos de núcleo de $A$, denotado por $\mathbf{N}(A)$ o conjunto definido por:*

$$\mathbf{N}(A) = \{v : v \in T, A(v) = 0\}$$

**Definição.** *Imagem de uma TL: sejam T, S e A definidos anteriormente. Chamamos de imagem de $A$, denotada por $\mathbf{Im}(A)$, o conjunto definido por:*

$$\mathbf{Im}(A) = \{u : Av = u, v \in T, u \in S\}$$

A imagem de $A$ é um subespaço vetorial de $S$. Quando $\mathbf{Im}(A) = S$, diz-se que a TL $A$ é sobrejetiva.

**Definição.** *Inversa à direita de uma TL: seja uma TL $A : T \to S$ com $T$ e $S$ espaços vetoriais de dimensão finita. Diz-se que $A$ tem uma inversa à direita $B$ se $AB = I_S$ ($I_S$ é a TL identidade de $S$), ou seja, $AB(u) = u$ para todo $u \in S$.*

**Teorema 4.2.** *Seja $A : T \to S$ uma TL entre espaços de dimensão finita, $A$ possui uma inversa à direita se e somente se $A$ é sobrejetiva.*

Uma TL $A : T \rightarrow S$ é chamada de injetiva quando para $u, u' \in T$ quaisquer, tem-se $Au \neq Au'$ em $S$, se $u \neq u'$.

**Teorema 4.3.** *Para que uma TL $A : T \rightarrow S$ seja injetiva, é necessário e suficiente que seu $\mathbf{N}(A)$ contenha apenas o vetor nulo, em outras palavras, $dim(\mathbf{N}(A)) = 0$.*

**Definição.** *Inversa à esquerda de uma TL: seja uma TL $A : T \rightarrow S$ com $T$ e $S$ espaços vetoriais de dimensão finita. Diz-se que $A$ tem uma inversa à esquerda $B$ se $BA = I_T$ ($I_T$ é a TL identidade de $T$), ou seja, $BA(u) = u$ para todo $u \in T$.*

**Teorema 4.4.** *Seja $A : T \rightarrow S$ uma TL entre espaços de dimensão finita, $A$ possui uma inversa à esquerda se e somente se $A$ é injetiva.*

**Definição.** *Transformação linear invertível: uma TL $A : T \rightarrow S$ com $T$ e $S$ é chamada de invertível se existir $B : S \rightarrow T$ linear tal que $BA = I_T$ e $AB = I_S$, ou seja, $B$ é ao mesmo tempo inversa à esquerda e à direita de $A$. Diz-se que $B$ é a inversa de $A$ e $(A)^{-1} = B$.*

**Teorema 4.5.** *Uma TL $A : T \rightarrow S$ tem inversa se e somente se ela é injetiva e sobrejetiva. Neste caso, diz-se que $A$ é bijetiva ou $A : T \rightarrow S$ é um isomorfismo e que $T$ e $S$ são isomorfos.*

Um isomorfismo $A : T \rightarrow S$ transforma uma base de $T$ em uma base de $S$.

**Teorema 4.6.** *Sejam $T$ e $S$ espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda TL $A : T \rightarrow S$, vale:*

$$dim(T) = dim(\mathbf{N}(A)) + dim(\mathbf{Im}(A))$$

## 4.7 Problema de Autovalor

**Definição.** *Transformação linear adjunta: chamaremos de TL adjunta de $A$ a TL $A^* : S \rightarrow T$ tal que, para $A : T \rightarrow S$, $u \in T$ e $v \in S$ quaisquer vale:*

$$(Au, v) = (u, A^* v)$$

*Diz-se que a TL $A : T \rightarrow S$ é autoadjunta se $A = A^*$.*

**Definição.** *Problema de autovalor padrão: seja $A : S \rightarrow S$ uma TL. Um vetor $x \neq 0$ é chamado de autovetor de $A$ se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que:*

$$Ax = \lambda x$$

*O número $\lambda$, por sua vez, é chamado de autovalor de $A$. Para cada autovalor, tem-se um autovetor associado.*

**Teorema 4.7.** *Para autovalores distintos do mesmo operador (TL), há autovetores associados que são LI.*

**Teorema 4.8.** *Sejam $\lambda_i$ e $\lambda_j$ autovalores distintos de um operador autoadjunto $A : S \rightarrow S$, então os autovetores associados $x_i$ e $x_j$ são ortogonais ($(x_i, xj) = 0$).*

**Teorema 4.9.** *Para todo operador autoadjunto $A : S \rightarrow S$ num espaço de dimensão finita com produto interno, existe uma base ortonormal $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset S$ formada pelos autovetores de $A$.*

**Corolário 4.1.** *Toda matriz simétrica possui autovalores reais.*

**Definição.** *Multiplicidade: seja o operador $A : S \rightarrow S$ um operador de dimensão finita. Chama-se multiplicidade algébrica (abreviadamente $ma(\lambda_i)$) do autovalor $\lambda_i$ a potência do termo $(\lambda - \lambda_i)$ que ocorre no polinômio característico. A multiplicidade geométrica de um autovalor $\lambda_i$ é a quantidade de autovetores LI associados ao autovalor.*

**Teorema 4.10.** *Seja $A : S \rightarrow S$ um operador linear entre espaços de dimensão finita $n$. Se possuir autovalores não distintos, pode-se afirmar que:*

$$mg(\lambda_i) = n - posto(A - \lambda_i I)$$

*Onde $mg(\lambda_i)$ é a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_i$.*