Problemas de Valor de Contorno para EDOs

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

1 Introdução

Definição. *Problema de Valor de Contorno (PVC) para EDO: a EDO do tipo $Ly = h$* ***(i)****, onde L é um operador diferencial definido no intervalo $[a, b]$ e $h \in C^0[a, b]$ conjuntamente com condições de contorno na forma:*

$$\textbf{(ii)} \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = \gamma_1 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = \gamma_2 \,, \end{cases}$$

onde α_i ,β_i e $\gamma_j \in R$ $(i = 1, 2, 3, 4$ e $j = 1, 2)$, formam um PVC para EDO.

Obviamente, o problema consiste em encontrar todas as funções $y \in C^2[a, b]$ que satisfaçam **(i)** e **(ii)** simultaneamente.

Exemplo 1.1. *A EDO $y'' + y = 0$, com $y(0) = y(\pi) = 0$ é um PVC para EDO no intervalo $[0, \pi]$.*

Obs:

1. Ao menos uma das constantes α_i e uma das constantes β_i devem ser diferentes de zero.
2. Chamaremos de condições de contorno homogêneas quando $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Desta forma, dizemos que um subespaço S de $C^2[a, b]$ é o conjunto solução de $Ly = h$, ou escrito em forma de operador:

   $L : S \to C^0[a, b], S \subset C^2[a, b]$.

2 Problema de Autovalor em PVC para EDO

Em muitas situações, temos que considerar a solução do seguinte problema:

$$Ly = \lambda y \quad \textbf{(iii)},$$

onde $L : S \to C^0[a, b]$ e λ é um parâmetro a se determinar. Neste caso, estamos interessados em encontrar todos os valores de λ para os quais **(iii)** não admite solução trivial em S, com condições de contorno homogêneas associadas.

Exemplo 2.1. *$y'' + \lambda y = 0$ com $y(0) = 0$ e $y(\pi) = 0$.*

3 Operadores Autoadjuntos e Problemas de Sturm-Liouville (PSL)

Relembrando que um operador linear L é autoadjunto se:

$$(Ly_1) \cdot y_2 = (Ly_1, y_2) = y_1 \cdot Ly_2 = (y_1, Ly_2)$$

Vamos examinar o caso $L = -D^2$ do exemplo 2.1:

$$(Ly_1, y_2) = -\int_0^\pi y_1'' y_2 dx = -\left[y_1' y_2\right]_0^\pi + \int_0^\pi y_1' y_2' dx$$

Lembrando que as condições de contorno para $-D^2$ são $y(0) = y(\pi) = 0$, temos: $(Ly_1, y_2) = \int_0^\pi y_1' y_2' dx$.

Já $(y_1, Ly_2) = -\int_0^\pi y_1 y_2'' dx = -\left[y_1 y_2'\right]_0^\pi + \int_0^\pi y_1' y_2' dx = \int_0^\pi y_1' y_2' dx$.

O que implica que $(-D^2 y_1, y_2) = (y_1, -D^2 y_2)$, ou seja, o operador $-D^2$ é autoadjunto pelo produto interno $(y_1, y_2) = \int_0^\pi y_1 y_2 dx$. Isso permite trazer de volta o corolário (4.1) da seção 4 da primeira parte do curso:

Corolário 4.1: Todo operador autoadjunto possui autovalores reais.

E o teorema (4.8):

Teorema 4.8: Seja λ_1 e λ_2 autovalores distintos de um operador autoadjunto, então os autovetores y_1 e y_2 associados à λ_1 e λ_2 são ortogonais.

Resta determinar sob quais condições de contorno o operador $L : S \to C^0[a, b]$, sendo $S \subset C^2[a, b]$ será autoadjunto.

Lema 3.1. *Identidade de Lagrange: se $L = D\left(p(x)D\right) + q(x)$ é um operador diferencial linear autoadjunto em $[a, b]$ e se y_1 e y_2 são duas vezes diferenciáveis em $[a, b]$, vale:*

$$y_1(Ly_2) - (Ly_1)y_2 = \left(p(y_1 y_2' - y_2 y_1')\right)' \quad \textbf{(iv)}$$

A identidade de Lagrange pode ser escrita numa forma mais interessante se integrarmos os lados esquerdo e direito de a até b:

$$(y_1, Ly_2) - (Ly_1, y_2) = \left[p(y_1 y_2' - y_2 y_1')\right]_a^b$$

Teorema 3.1. *Seja S um subespaço de $C^2[a, b]$ determinado pelo par de condições de contorno:*

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0$$

$$\beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0$$

Seja L um operador (diferencial e linear) $L : S \to C^0[a, b]$. Então L será autoadjunto com relação ao produto interno padrão em $C^0[a, b]$ se e somente se: $\left[p(y_1 y_2' - y_2 y_1')\right]_a^b = 0$, para todos y_1 e $y_2 \in S$. Ou seja, se e somente se,

$$p(b)[y_1(b)y_2'(b) - y_2(b)y_1'(b)] - p(a)[y_1(a)y_2'(a) - y_2(a)y_1'(a)] = 0 \,.$$

Através da última forma da identidade, podemos cair em 3 casos:

- **Caso 1**: $p(a) = p(b) = 0$. A identidade é satisfeita sem restrições e $S = C^2[a, b]$

- **Caso 2**: S será o subespaço de todas as funções $y \in C^2[a, b]$ tal que:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \text{ , com}$$

$|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ e $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. Se y_1 e $y_2 \in S$, então:

$$y_1(a)y_2'(a) - y_2(a)y_1'(a) = 0$$

$$y_1(b)y_2'(b) - y_2(b)y_1'(b) = 0 \; .$$

Em outras palavras, um ODL é autoadjunto em todo subespaço $S \subset C^2[a, b]$ descrito por um par de condições de contorno não mistas.

- **Caso 3** (condições de contorno periódicas): Seja $p(a) = p(b)$ e S o subespaço de $C^2[a, b]$ consistindo de todas as funções y que satisfaçam a:

$$y(a) = y(b)$$

$$y'(a) = y'(b) \; .$$

Ou seja, um ODL será autoadjunto em $S \subset C^2[a, b]$ se for descrito por condições de contorno periódicas.

Exemplo 3.1. *Se $L = -D^2$ e S o subespaço de $C^2[a, b]$ com condições de contorno $y(0) = y(\pi) = 0$.*

Exemplo 3.2. *Se $L = -D^2$ e S o subespaço de $C^2[a, b]$ com condições de contorno $y(0) = y(2\pi)$ e $y'(0) = y'(2\pi)$.*

Definição. *Problema de Sturm-Liouville (PSL) para EDO: PVCs que envolvem ODLs autoadjuntos que possuam autofunções ortogonais e que podem ser escritos na forma*

$$D(\; p(x)\; D)y + [q(x) - \lambda]y = 0$$

conjuntamente com condições de contorno homogêneas são chamados de PSL para EDOs.

Exemplo 3.3. *Resolver o PSL: $y'' + \lambda y = 0$ com $y(0) = 0$ e $\alpha y(L) + y'(L) = 0$, α e $L > 0$.*

4 Problemas dde Valor de Contorno e Expansões em Séries

Até o presente momento, todos os PVC's abordados eram EDO's homogêneas, porém em muitos casos recairemos em PVC's não homogêneos

$$Ly = h \; ,$$

acompanhado das devidas condições de contorno com $h \in C^0[a, b]$ e L um ODL de 2ª ordem tal que, $L : S \to C^0[a, b]$, sendo $S \subset C^2[a, b]$.

Se L é autoadjunto e possui autovalores distintos $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$ então as autofunções $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \ldots$ formam uma base para o espaço $C^0[a, b]$, além disso, sabemos que essas autofunções são mutualmente ortogonais e podemos tirar partido disso para escrever $h(x)$ como:

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

Lembrando que essa série converge na média para h e que:

$$c_n = \frac{(h, \phi_n)}{||\phi_n||^2} = \frac{\displaystyle\int_a^b h(x)\phi_n(x)dx}{\displaystyle\int_a^b [\phi_n(x)]^2 dx}.$$

Utilizaremos uma expansão semelhante para $y(x)$:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(x)$$

e substituindo as expansões de $h(x)$ e $y(x)$ em $Ly = h$, chegamos à seguinte igualdade

$$L\left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \; .$$

Tirando proveito da linearidade de L, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \; ,$$

se essas duas séries são iguais, temos que ter $\alpha_n \lambda_n = c_n$, ou:

$$\alpha_n = \frac{c_n}{\lambda_n} \; ,$$

onde c_n e λ_n são parâmetros conhecidos, logo $y(x)$ está completamente determinada

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n} \phi_n(x).$$

Obs: Essa expansão leva em conta que $\lambda_n \neq 0$ e, neste caso, a solução é única. Porém, caso tenhamos algum $\lambda_k = 0$ (k inteiro positivo qualquer), o problema não tem solução se $c_k \neq 0$ e infinitas soluções se $c_k = 0$.

Exemplo 4.1. *Resolver o PSL $-y'' = x$ com $y(0) = y(\pi) = 0$.*

5 Ortogonalidade e Função Peso

Podemos generalizar o problema de Sturm-Liouville escrevendo-o na seguinte forma:

$$D\,(p(x)\;D)\,y + [q(x) - \lambda\,r(x)]\,y = 0$$

definido no intervalo $[a, b]$, além de um par de condições de contorno que servirão para determinar o domínio do operador $L = D(p(x)D) + q(x)$. A função $r(x)$ pertence ao espaço das funções contínuas em $[a, b]$ ($C^0[a, b]$) e ela é não-negativa nesse intervalo.

Os valores λ que conferem à forma mais geral do PSL soluções não triviais são ainda chamados de autovalores e as soluções não triviais são ainda chamadas de autofunções.

Vamos analisar dois autovalores distintos (λ_1 e λ_2) e suas autofunções associadas (y_1 e y_2). Neste caso, valem as relações:

$$Ly_1 = \lambda_1\,r(x)\,y_1(x)$$

$$Ly_2 = \lambda_2\,r(x)\,y_2(x)$$

A identidade de Lagrange implica em:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\,r(x)\,y_1(x)\,y_2(x) = y_2(x)\,[Ly_1(x)] - y_1(x)\,[Ly_2(x)]$$

$$= D[p(x)\,[y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)]]$$

Integrando essa última expressão de a até b:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b r(x)y_1(x)y_2(x)dx = p(x)\,[y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)]_a^b$$

No caso de termos o lado direito nulo, chegamos a:

$$\int_a^b r(x)y_1(x)y_2(x)dx = 0$$

O que implica que as autofunções y_1 e y_2 são ortogonais com respeito à função $r(x)$ em $C^0[a, b]$. Chamaremos $r(x)$ de função peso e definimos o produto interno:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)r(x)dx \quad \textbf{(i)}$$

Teorema 5.1. *Seja L um ODL autoadjunto no intervalo $[a, b]$ e $r(x)$ uma função peso $[a, b]$ e S o subespaço de $C^2[a, b]$ que é o domínio de L, então:*

$$p(x)\,[y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)]_a^b = 0$$

para qualquer par de funções y_1 e y_2 em S. Então qualquer conjunto de autofunções associadas a distintos autovalores do PSL:

$$Ly = \lambda r(x)y$$

é ortogonal em $C^0[a, b]$ com relação ao produto interno definido em (i).

Exemplo 5.1. *Solucione o PSL $y'' + 4y' + (4 - 9\lambda)y = 0$, com $y(0) = y(a) = 0$.*

Exemplo 5.2. *Determinar a autofunção normalizada de $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$.*

Exemplo 5.3. *Resolver o PSL: $y'' + \lambda y = 0$, com $y(0) = 0$ e $y'(1) + y(1) = 0$.*

Para PSL's com funções peso não homogêneas, podemos proceder como o caso de PSL's não homogêneas sem a função peso:

$$Ly = D(p(x))Dy + q(x)y = \mu r(x)y + f(x), \textbf{(ii)}$$

com as condições de contorno associadas e definido em $[a, b]$. Seja λ o autovalor de L:

$$Ly = \lambda r(x)y.$$

Vamos supor que se a solução de $y(x)$ da eq. (ii) seja escrita como

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\phi_n(x), \text{ com } b_n = \int_a^b r(x)y(x)\phi_n(x)dx \quad \textbf{(iii)}$$

$$Ly(x) = \mu r(x)y(x) + f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\lambda_n r(x)\phi_n(x) \quad \textbf{(iv)}$$

Se $\dfrac{f(x)}{r(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)$ e usando $\dfrac{f(x)}{r(x)}$ no lugar de y em (iii):

$$c_n = \int_a^b r(x)\frac{f(x)}{r(x)}\phi_n(x)dx = \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx \quad n = 1, 2, ...$$

Juntando tudo em (iv):

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\lambda_n r(x)\phi_n(x) = \mu r(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n\phi_n(x) + r(x)\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x) \text{ , temos}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(\lambda_n - \mu)b_n - c_n]\,\phi_n(x) = 0 \text{ , o que implica que}$$

$$(\lambda_n - \mu)b_n - c_n = 0 \Rightarrow b_n = \frac{c_n}{\lambda_n - \mu} \text{ , e a solução é:}$$

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu}\phi_n(x)$$

Temos que nos preocupar agora com a convergência dessa série que expande $y(x)$. O teorema a seguir aborda o tema.

Teorema 5.2. *O PSL não homogêneo generalizado tem solução única para toda função $f(x)$ contínua se μ for diferente dos autovalores λ_n do problema homogêneo associado. A série convergirá para todo $x \in [a, b]$. Se μ for igual a um autovalor λ_k (k inteiro positivo qualquer), então o PSL não homogêneo com função peso não tem solução, a não ser que $\int_a^b f(x)\phi_k dx = 0$, ou seja, $f(x)$ e $\phi_k(x)$ são ortogonais e, neste caso, a solução é única e contém um múltiplo arbitrário de $\phi_k(x)$.*

Exemplo 5.4. *Determine a solução de $y'' + 2y = -x$ com $y(0) = 0$ e $y(1) + y'(1) = 0$.*