Séries de Fourier

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

1 Bases de Espaços de Dimensão Infinita

1.1 Produto Interno e Norma

Definição. *Produto Interno ou Escalar: um produto interno ou escalar num espaço vetorial V é o mapa (bilinear) definido por:*

$(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{R}$ que possui, para todos x, y e $z \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades:

(i) $(x, y) = (y, x)$;

(ii) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

(iii) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

(iv) $(x, x) > 0 \iff x \neq 0$.

Exemplo 1.1. *A integral*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

é um produto interno do espaço $C^0[a, b]$.

Consequências da definição de produto interno:

(i) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;

(ii) $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$;

(iii) $(x, 0) = 0 = (0, x)$;

(iv) Se $(x, z) = (y, z)$ para todo $z \in V$, então $x = y$.

Definição. *Norma: A norma de $x \in V$ (V é um espaço vetorial dotado de produto interno) é definido por $||x|| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$.*

Exemplo 1.2. *Para um espaço como o $\mathbb{R}^n (x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T)$ temos que $||x|| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2}$.*

Exemplo 1.3. *Para o espaço $C^0[a, b]$ do exemplo 1.1 temos*

$$||f|| = \{\int_a^b |f(x)|^2 dx\}^{\frac{1}{2}}$$

.

OBS: Nos Teoremas e resultados a serem enunciados a seguir, sempre que houver menção ao espaço V entenda que estamos nos referindo a um espaço vetorial com produto interno e norma associada a este produto interno.

Teorema 1.1. *Para quaisquer x e $y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, vale:*

(i) $||x|| \geq 0; ||x|| = 0$ *se e somente se* $x = 0$;

(ii) $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$;

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Teorema 1.2. *Desigualdade de Cauchy-Schwarz: para x e $y \in V$ vale:*

$$|(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Teorema 1.3. *Lei do Paralelogramo: para vetores $x, y \in V$ tem-se:*

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

Para um espaço vetorial V de dimensão finita ($dim(V) = n$) e com uma base ortonormal (ortogonal e normalizada) $e_1, ..., e_n$, podemos escrever para todo $x \in V$:

$$x = (x, e_1)e_1 + ... + (x, e_n)e_n \tag{1}$$

Esse conceito pode ser estendido para os casos em que $dim(V) = \infty$; nestes casos, podemos escrever o lado direito de (1) como:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)e_i \tag{2}$$

É claro que (2) só faz sentido para espaços de dimensão infinita com bases contáveis. Quando essa série converge, dizemos que ela converge na média para x, logo podemos dizer que:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)e_i$$

e dizemos que (x, e_i) são os coeficientes generalizados de Fourier de x com respeito à base ortonormal $e_1, e_2, ...$

Teorema 1.4. *Seja*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$$

uma série infinita que converge em média para x, isto é,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i,$$

então

$$a_i = (x, e_i)$$

para todo $i = 1, 2, ...$

Definição. *Polinômio Trigonométrico: definiremos como polinômio trigonométrico de grau $2n+1$ a seguinte expressão:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + ... + a_n\cos(nx) + \\ b_1 sen(x) + b_2 sen(2x) + ... + b_n sen(nx), \tag{3}$$

onde $a_0, a_1, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ são números reais e $a_n \neq 0$ e/ou $b_n \neq 0$. Seja $\mathcal{F}_n$ o conjunto de todos os polinômios de grau $\leq 2n+1$ (juntamente com o polinômio 0). O espaço $\mathcal{F}_n$ é um espaço vetorial com produto interno dado por:

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

O conjunto de funções $1, cos(x), sen(x), ..., cos(nx), sen(nx)$, é um conjunto ortogonal do espaço $\mathcal{F}_n$, uma vez que para m e n inteiros:

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)sen(nx)dx = 0 \ , \ se \ m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)cos(nx)dx = 0 \ ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(mx)cos(nx)dx = 0 \ , \ se \ m \neq n.$$

Para normalizar o conjunto de funções ortogonais de $\mathcal{F}_n$, podemos calcular:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1)dx = 2\pi$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen^2(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} cos^2(mx)dx = \pi \ se \ m > 0.$$

Então as funções $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{cos(x)}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{sen(x)}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{sen(nx)}{\sqrt{\pi}}$ são um conjunto ortonormal de $\mathcal{F}_n$.

Por extensão, o conjunto infinito

$$1, cos(x), sen(x), ..., cos(nx), sen(nx), ...$$

é um conjunto ortogonal em $C^0[-\pi,\pi]$, além disso, esse conjunto é LI, logo esse conjunto é uma base para $C^0[-\pi,\pi]$.

1.2 Desigualdade de Bessel e Identidade de Parseval

Teorema 1.5. *Sejam $e_1, e_2, ...$, vetores ortonormais de um espaço com produto interno e de dimensão infinita V. Seja $x \in V$, então vale a seguinte desigualdade:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)^2 \leq ||x||^2 \quad \textit{(Desigualdade de Bessel).}$$

Ainda, $e_1, e_2, ...$, formam uma base de V se e somente se:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)^2 = ||x||^2 \quad \textit{(Identidade de Parseval).}$$

A desigualdade de Bessel nos fornece uma estimativa para os coeficientes generalizados de Fourier de x em relação à base $e_1, e_2, ...$

Corolário 1.1. *Se $e_1, e_2, ...$, for um conjunto ortonormal de um espaço V de dimensão infinita dotado de produto interno, então*

$$\lim_{i\to\infty} (x, e_i) = 0$$

para todo $x \in V$, ou seja, os coeficientes de Fourier de x tendem a zero para $i \to \infty$ para qualquer conjunto ortonormal de V.

OBS: Em muitas aplicações, prefere-se trabalhar com um conjunto ortogonal ao invés de um conjunto ortonormal. Assim sendo, a expressão em série de x fica:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x, e_i)}{||e_i||^2} e_i \ ,$$

onde $\frac{(x, e_i)}{||e_i||^2}, i = 1, 2, ...,$ são os coeficientes generalizados de Fourier em relação ao conjunto $e_1, e_2, ...$

2 O Espaço de Funções Contínuas por Partes

Definição(Função contínua por partes): uma função real f é contínua por partes no intervalo $[a,b]$ se:

(i) f é definida e contínua em todos os pontos, exceto num conjunto finito de pontos de $[a,b]$;

(ii) os limites $f(x_0^+) = \lim_{h\to 0^+} f(x_0+h)$ e $f(x_0^-) = \lim_{h\to 0^-} f(x_0-h)$ existem em cada ponto x_0 em $[a,b]$.

Quando um ponto x é um ponto de continuidade $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$. Além disso, se houver descontinuidade, ela deve ser finita.

Se $f(x)$ é contínua por partes em $[a,b]$, então $f(x)$ é integrável a Riemann e o valor dessa integração no intervalo $[a,b]$ independe dos valores que $f(x)$ assume nos pontos de descontinuidade. E em particular, podemos definir uma classe de equivalência: se $f(x)$ e $g(x)$ são idênticas, exceto em pontos de descontinuidade, então $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas por partes em $[a,b]$, então o produto $f(x)g(x)$ também é contínuo por partes em $[a,b]$, e $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ é o produto interno do espaço das funções contínuas por partes em $[a,b]$, chamaremos esse espaço de $PC[a,b]$.

$$\operatorname{sen}(mx) f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx) \right) \operatorname{sen}(mx)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + \underline{b_k \operatorname{sen}(kx)} \right) \right) \operatorname{sen}(mx)\, dx$$

$$b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(kx)\, dx}_{\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\, dx$$

$$\underline{b_k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\, dx$$

Exemplo

1. "Função" Delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

Propriedades:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0) \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

$$P(a) = \int_0^L P\cdot\delta(x-a)\,dx$$

Também pode ser obtido

$$\delta = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\, e^{-(x/\varepsilon)^2} \quad , \quad \varepsilon \to 0$$

$$\delta(x) = \delta(-x) \ (\text{par}) \Rightarrow b_k = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot 1\,dx = \frac{1}{\pi}, \quad \underset{k\neq 0}{a_k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\cos(0) = \frac{1}{\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \dots\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\cos(kx)$$

2- Função Degrau

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases} \longrightarrow f(-x) = -f(x)$$

Função ímpar

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(kx)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi}$$

$$b_k = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(k\pi) - 1}{k}\right], \quad \text{p/ } k=2, \quad \text{p/ } k=3$$

p/ $k=1$ $\quad b_1 = \frac{4}{\pi}$

$b_2 = 0 \quad b_3 = \frac{4}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \dots$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{1} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + \dots\right)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2k-1)}{2k-1}$$

---

3 - função $|x|$

A integral da função degrau é a função $|x|$.

$$\int \text{Degrau}\, dx = \int \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}(x) + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + \dots\right) dx$$

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots\right)$$

4_ Exemplo $f(x) = x, \quad -L < x < L$

Função ímpar

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \quad , \text{ fazendo } \quad y = \frac{k\pi x}{L}, \quad dy = \frac{k\pi}{L} dx$$

$$b_k = \frac{2}{L}\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2 \int_0^L y \operatorname{sen}(y)\, dy = \frac{2L}{k^2\pi^2}\left(-k\pi \cos(k\pi)\right) = \frac{2L}{k\pi}(-1)^{k+1}$$

$$f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

Norma de V : $(x, x)^{1/2} = \|x\|$

No $\mathbb{R}^2$

$\text{dist}(x_2, x_1) = \|x_2 - x_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1, x_2 - x_1)}$

$x_2 - x_1 = x_d$ $\qquad \|x_2 - x_1\| = \|x_1 - x_2\|$

$x_1 - x_2 = -x_d$

$$\|f - g\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

f e $g \in PC[-\pi, \pi]$

No caso de sequências numéricas:

x_n é uma sequência

x_n converge p/ x, se para ε podemos determinar N, tal que

$|x_n - x| < \varepsilon$ para q.q. $n > N$

apenas uma quantidade finita de termos x_n está fora deste intervalo

Exemplo:

$3, 2, \frac{5}{3}$

$x_n = 1 + \frac{2}{n}$

$|x_n - x| = \left|1 + \frac{2}{n} - 1\right| = \left|\frac{2}{n}\right| = \frac{2}{n} < \varepsilon \therefore \frac{n}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$ ou $n > \frac{2}{\varepsilon}$

por exemplo: $\varepsilon = \frac{1}{1000}$. $n > \frac{2}{\frac{1}{1000}}$ $\therefore$ $n > 2000$

$$\frac{\operatorname{sen}(nT+3)}{\sqrt{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Exemplo:

em $[-\pi, \pi]$

$$\begin{cases} -1, & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{p/ } x = 0 \end{cases}$$

3 Funções Pares e Ímpares

Definição. *Funções pares e Ímpares: uma função $f(x)$ definida num intervalo centrado na origem é par se: $f(x) = f(-x)$ para todo x. se $f(x) = -f(-x)$, então a função será classificada como ímpar.*

Exemplo 3.1. $f(x) = x^n$.

Fatos:

(i) $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{se } f(x) \text{ é par.} \\ \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, & \text{se } f(x) \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

(ii) O produto interno entre duas funções de mesma paridade será uma função par. Se as paridades são diferentes, então a função resultante é ímpar. Dessa forma $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = 0$, se $f(x)$ e $g(x)$ são funções com paridades diferentes.

Sendo assim, funções pares e ímpares são mutualmente ortogonais em $PC[-a, a]$.

Exemplo 3.2. *As funções $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$ são pares em $PC[-a, a]$ e $senx, sen2x, \ldots$ são ímpares.*

Lema 3.1. *Toda função no intervalo $[-a, a]$ pode ser escrita de forma única como a soma entre uma função par e uma função ímpar.*

Exemplo 3.3. $f(x) = e^x$

4 Determinação da Série de Fourier

4.1 Coeficientes da Série de Fourier

Considerando as funções $1, cos(x), sen(x), cos(2x), sen(2x), \ldots$ e lembrando que elas formam um conjunto ortogonal, iremos obter os coeficientes de Fourier que irão compor a expansão em série de qualquer função contínua por partes em $[-\pi, \pi]$. Sendo assim, temos:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k cos(kx) + b_k sen(kx)) \tag{4}$$

Faremos o produto interno de (4) por $cos(nx)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}(a_k\ cos(kx) + b_k\ sen(kx))\ cos(nx)\right)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_k cos^2(kx)dx \therefore$$

$$a_k(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx$$

Se seguirmos o mesmo procedimento para um produto interno de (4) por $sen(nx)$ temos:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(kx)dx$$

E a série de Fourier fica:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\ cos(kx) + b_k\ sen(kx))\ ,\ \frac{a_0}{2} \rightarrow \text{média da função}$$

Exemplo 4.1. *"Função"delta de Dirac $\delta(x)$.*

Exemplo 4.2. *Função degrau.*

Exemplo 4.3. *Função $|x|$.*

OBS: A série de Fourier para funções periódicas com período $2L$ é:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\ \cos(\frac{k\pi x}{L}) + b_k\ sen(\frac{k\pi x}{L})), \tag{5}$$

com

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{k\pi x}{L})dx$$

e

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen(\frac{k\pi x}{L})dx.$$

Exemplo 4.4. *Função $f(x) = x$ para $-L < x < L$.*

4.2 Convergência

O tópico de convergência é complexo o suficiente para ser tema de um curso exclusivo. Nesse subtópico apresentaremos os três tipos de convergência mais comuns na Matemática Aplicada.

4.2.1 Convergência Ponto a Ponto

Uma sequência de funções $u_n(x)$ converge ponto a ponto para $u(x)$ se para todo $x \in [a, b]$ e para todo $\epsilon > 0$, existir $N = N(x, \epsilon)$ tal que $|u_n(x) - u(x)| < \epsilon$ sempre será atendido se $n > N$. Graficamente, temos a seguinte representação da convergência ponto a ponto:

4.2.2 Convergência Uniforme

Uma sequência de funções $u_n(x)$ converge uniformemente para $u(x)$ se para todo $x \in [a,b]$ e para todo $\epsilon > 0$, existir $N = N(\epsilon)$ tal que $|u_n(x) - u(x)| < \epsilon$ sempre será atendido se $n > N$. Graficamente, temos a seguinte representação da convergência uniforme:

4.2.3 Convergência na Média Quadrática

Para as séries de Fourier, a convergência mais importante é a convergência na média quadrática. Se para todo $\epsilon > 0$ existir $N = N(\epsilon)$ tal que:

$$\{\int_a^b |u_n(x) - u(x)|^2 dx\}^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

Graficamente, a convergência em média quadrática pode ser observada na seguinte aproximação por série de Fourier:

Nos pontos de descontinuidade observamos uma amplitude dos modos de Fourier que é maior que as amplitudes dos pontos de continuidade, esse fenômeno é conhecido pelo nome de Fenômeno de Gibbs. Além disso, notamos quem nas descontinuidades há uma convergência para o valor médio do salto. O teorema a seguir tratará desse resultado.

Teorema 4.1. *Teorema de Fourier: a série de Fourier de uma função contínua por partes e suficientemente suave converge ponto a ponto em toda a reta $\mathbb{R}$. Se $F(x)$ representar a extensão periódica de $f(x)$, então no ponto x_0 em que $F(x)$ é contínua, a série converge para $F(x_0)$; se x_0 for um ponto de descontinuidade, a série converge para:*

$$\frac{F(x_0^+) + F(x_0^-)}{2}.$$

Exemplo 4.5. *Extensão periódica da função degrau.*

5 Séries de Fourier de Senos e Cossenos

A depender da paridade da função, a série de Fourier de uma função pode ser representada apenas como uma série de senos ou cossenos. Relembrando:

Se a função $f(x)$ é par:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 2\int_0^L f(x)\, cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\ ,\ \text{ e}$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 0\,,\ \text{então}\ \ f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\, cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right))$$

Se a função $f(x)$ é ímpar:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 0$$

e

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 2\int_0^L f(x)\, sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\ ,$$

logo

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k\, sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right)).$$

Esses resultados implicam em:

- $1, cos(x), cos(2x), cos(3x), ...$ formam uma base para as funções contínuas por partes pares em $[-\pi, \pi]$;
- $sen(x), sen(2x), sen(3x), ...$ formam uma base para as funções contínuas por partes ímpares em $[-\pi, \pi]$.

Em muitas situações, deseja-se obter uma expansão em série de Fourier de uma função definida apenas no intervalo $[0, \pi]$. Isso pode ser feito se utilizarmos o conceito de extensão periódica par ou ímpar, $E_f(x)$ e $O_f(x)$, respectivamente:

$$E_f(x)dx = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le \pi \\ f(-x), & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

$$O_f(x)dx = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le \pi \\ -f(-x), & -\pi \le x < 0. \end{cases}$$

Exemplo: determinar a série em cossenos da função $f(x) = x^2$ em

a) $[0, \pi]$

$$E_f = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \pi \\ x^2, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx)\,dx = \underline{(-1)^k} \frac{4}{k^2}, \quad k \neq 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$E_f(x) = \frac{\pi^3}{3} - 4\left(\cos(x) - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \dots\right)$$

b)

$$O_f = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \pi \\ -x^2, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(kx)\,dx = -\frac{2\pi\cos(k\pi)}{k} + \frac{4}{k^3\pi}\left(\cos(k\pi)-1\right)$$

$k=1$, $b_1 = 2\pi - \frac{8}{\pi}$, p/ k impar $b_k = \frac{2\pi}{k} - \frac{8}{k^3\pi}$

$k=2$, $b_2 = -\frac{2\pi}{2}$ p/ k par $b_k = -\frac{2\pi}{k}$

$$O_f(x) = 2\pi\left(\operatorname{sen}(x) - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} + \dots\right) - \frac{8}{\pi}\left(\operatorname{sen}(x) + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3^3} + \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5^3} + \dots\right)$$

$$O_f = 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^{k+1}\frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}\right) - \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}((2k-1)x)}{(2k-1)^3}\right)$$

6 Série de Fourier Complexa

6.1 Fórmula de Euler

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \boxed{sen(\theta)} = 0$$

$sen(\theta) \approx \theta$

P/ $\theta \ll 1$

Série de Taylor para $sen(x), cos(x), e^x$:

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

$$e^x(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

Faremos $e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + ...$,

Notando que:

$i^1 = i \qquad i^5 = i$

$i^2 = -1 \qquad i^6 = -1$

$i^3 = -i \qquad i^7 = -i$

$i^4 = +1 \qquad i^8 = +1.$

Logo:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + ...$$ e rearrumando,

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + ...\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right)$$

O primeiro termo entre parêntesis é a série de Taylor para a função $\cos x$, enquanto que o outro termo entre parêntesis é a série de Taylor para a função $senx$.

$$e^{ix} = cos(x) + i\ sen(x)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k\, sen(kx)$$

6.2 Determinação da Série de Fourier Complexa

O conjunto $1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{2ix}, e^{-2ix}, ...$ forma uma base contável para as funções contínuas por partes em $[-\pi, \pi]$. Dessa forma, podemos escrever a série de Fourier complexa como:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikx}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}\right) + b_k\left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right)\right]$$

$$\frac{b_k e^{ikx}}{2i} \cdot \frac{i}{i}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(a_k - ib_k)}{2} e^{ikx}\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(a_k + ib_k)}{2} e^{-ikx}\right]$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k\, e^{ikx} \quad \text{onde:}$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{(a_k - ib_k)}{2}, & k = 1, 2, 3, ... \\ \frac{(a_{-k} + ib_{-k})}{2}, & k = -1, -2, -3, ... \end{cases}$$

Para $k > 0$, temos:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (cos(kx) - i\ sen(kx))f(x))\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

Para $k < 0$, temos:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (cos(-kx) + i\ sen(-kx))f(x))\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

Exemplo 6.1. *Obter a série de Fourier complexa para* $f(x) = sen(x)$ *em* $[-\pi, \pi]$.

Exemplo 6.2. *Série de Fourier complexa de*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a(a < \pi) \\ 0, & \textit{em todo o resto} \end{cases}$$

Exemplo 6.3. $f(x) = x^2$ *no intervalo* $[-1, 1]$.

Exemplo 6.4. *Série de Fourier complexa de*

$$f(x) = \begin{cases} sen(x), & 0 < x < \pi \\ 0, \pi < x < 2\pi \end{cases} .$$

Exemplo 6.5. *Converter a série do exemplo 6.2 para a forma real.* **Exemplo 6.6.** *Converter para a forma complexa a série de Fourier real da função degrau (exemplo 4.2).*

7 A Identidade de Parseval (Uma nova visão)

O Teorema 1.5 (seção 1.2) estabelece a identidade de Parseval: $\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)^2 = ||x||^2$. Para uma função periódica de período $2L$ e sejam $c_k (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, os coeficientes complexos da função $f(x)$, então:

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Prova:

Assumindo $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{k\pi ix}{L}}$ e $c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-k\pi ix}{L}}dx$,

temos $f^2(x) = f(x)f(x)$, logo $f^2(x) = f(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{k\pi i x}{L}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k f(x) e^{\frac{k\pi i x}{L}}$.

Integrando os 2 lados:

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k f(x) e^{\frac{k\pi i x}{L}} dx = \frac{1}{2L}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-L}^{L} f(x) e^{\frac{k\pi i x}{L}} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bar{c_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

A versão real da mesma Identidade é:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

Exemplo 7.1. *Utilizar a identidade de Parseval para a série de Fourier real de $f(x) = |x|$ em $[-\pi, \pi]$.*

Exemplo 7.2. *Aplicar a identidade de Parseval na série de Fourier de $f(x) = 1 + x$ em $[-\pi, \pi]$.*

8 Transformada de Fourier

Vimos que a série de Fourier permite que possamos representar funções periódicas como uma soma de cossenos e senos. Para funções nâo-periódicas a extensão desse conceito é a transformada de Fourier. A transformada de uma função $f(t)$ é dada por:

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathbf{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{6}$$

A transformada de Fourier inversa é:

$$f(t) = \mathbf{F}^{-1}(\mathcal{F}(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega)e^{i\omega t}dt \tag{7}$$

A transformada de Fourier tem diversas propriedades, as principais são:

(i) Linearidade - Se $f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$, então:

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t))e^{-i\omega t}dt = \alpha\mathcal{F}_1(\omega) + \beta\mathcal{F}_2(\omega)$$

(ii) Escala de tempo - Se $f(t) = g(\frac{t}{a})$, então:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{G}(\omega).$$

(iii) Deslocamento no tempo - Para $f(t) = g(t - a)$, então:

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{G}(\omega)e^{-i\omega a}.$$

(iv) Transformada da derivada - Se $f(t) = \frac{d}{dt}g(t)$, a transformada fica:

$$\mathcal{F}(\omega) = (i\omega)^n\mathcal{G}(\omega).$$

(v) Convolução - A transformada inversa do produto de duas funções $F(\omega)\ \mathcal{G}(\omega)$ não é o produto de suas inversas. Em vez disso, temos uma operação binária chamada de convolução:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

A transformada de Fourier da convolução é igual ao produto das das transformadas:

$$\mathbf{F}(f(t) * g(t)) = \mathbf{F}(f(t))\mathbf{F}(g(t)) = \mathcal{F}(\omega)\mathcal{G}(\omega).$$

Exemplo 8.1. *Vamos analisar a equação do movimento harmônico forçado com amortecimento:*

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\zeta\omega_0\frac{d}{dt}x(t) + \omega_o^2 x(t) = f(t).$$

.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$e^{(ix)} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \dots$$

Notemos que:

$i^1 = i$	$i^5 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$
$i^4 = +1$	$i^8 = +1$

$$|e^{ix}| = \sqrt{(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2} = \sqrt{e^{(xi)} \cdot e^{(-ix)}}$$

$$= 1$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}i + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}i - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!}i + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$e^{ix} = \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots\right)}_{\cos(x)} + i\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)}_{\operatorname{sen}(x)}$$

$e^{ix} = \cos(x) + i\operatorname{sen}(x)$ → Relação de Euler

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$$

$$+\quad e^{-ix} = \cos(x) - i\,\mathrm{sen}(x)$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$$

$$-\quad e^{-ix} = -\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\,\mathrm{sen}(x)$$

$$\mathrm{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

1) S. F. Complexa de $\operatorname{sen}(x)$ em $[-\pi, \pi]$.

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \qquad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

$$= \cos(k\pi) + i\,\cancel{\operatorname{sen}(k\pi)}^{\,0}$$

$$= \cos(k\pi) - i\,\cancel{\operatorname{sen}(k\pi)}^{\,0}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\, e^{-ikx}\, dx = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}}{k^2 - 1}\right]}_{\text{será } 0 \text{ para todo } k,\ \text{exceto quando } \underline{k = \pm 1}}$$

p/ $\underline{k = 1}$

$$c_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{i\pi(1+\varepsilon)} - e^{-i\pi(1+\varepsilon)}}{(1+\varepsilon)^2 - 1}\right), \text{ Aplicando L'Hospital}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-i\pi e^{i\pi\varepsilon} - i\pi e^{-i\pi\varepsilon}}{2 + 2\varepsilon}\right) = \frac{1}{2\cancel{\pi}}\left(\frac{-\cancel{2}i\cancel{\pi}}{\cancel{2}}\right) = -\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{i} = \frac{1}{2i}$$

$$c_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{i\pi(1+\varepsilon)} - e^{-i\pi(1+\varepsilon)}}{(1+\varepsilon)^2 - 1} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-e^{i\pi\varepsilon} + e^{-i\pi\varepsilon}}{(1+\varepsilon)^2 - 1} \right)$$

$$\cong \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-\cancel{1} - i\pi\varepsilon + \cancel{1} - i\pi\varepsilon}{\cancel{1} + 2\varepsilon \cancel{-1}} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(- \frac{\cancel{2}i\cancel{\pi}\cancel{\varepsilon}}{\cancel{2}\cancel{\varepsilon}} \right) = -\frac{i}{2}$$

$$c_{-1} = -\frac{1}{2i} =$$

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) = c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} = \frac{e^{ix}}{2i} - \frac{e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & \text{p/ todo resto} \end{cases}$, $f(x)$ em $[-\pi, \pi]$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^a e^{-ikx}\, dx = \frac{i}{2k\pi} \left[e^{-ikx} \right]_0^a = \frac{i}{2k\pi} \left[e^{-ika} - 1 \right] \rightarrow \text{válido } k \neq 0$$

p/ $k=0$

$$c_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{i}{2\pi\varepsilon}\left[e^{-i\varepsilon a} - 1\right]$$, resolvendo por L'Hospital

$$c_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{i(-ia)e^{-i\varepsilon a}}{2\pi} = \frac{a}{2\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{a}_{k=0} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{i}{k}\left(e^{-ika} - 1\right)e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{k}\left(e^{-ika} - 1\right)e^{ikx}\right)$$