Séries de Fourier

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

1 Bases de Espaços de Dimensão Infinita

1.1 Produto Interno e Norma

Definição. *Produto Interno ou Escalar: um produto interno ou escalar num espaço vetorial V é o mapa (bilinear) definido por:*

$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ que possui, para todos x, y e $z \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades:

(i) $(x, y) = (y, x)$;

(ii) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

(iii) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

(iv) $(x, x) > 0 \iff x \neq 0$.

Exemplo 1.1. *A integral*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

é um produto interno do espaço $C^0[a, b]$.

Consequências da definição de produto interno:

(i) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;

(ii) $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$;

(iii) $(x, 0) = 0 = (0, x)$;

(iv) Se $(x, z) = (y, z)$ para todo $z \in V$, então $x = y$.

Definição. *Norma: A norma de $x \in V$ (V é um espaço vetorial dotado de produto interno) é definido por $||x|| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$.*

Exemplo 1.2. *Para um espaço como o $\mathbb{R}^n (x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T)$ temos que $||x|| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2}$.*

Exemplo 1.3. *Para o espaço $C^0[a, b]$ do exemplo 1.1 temos*

$$||f|| = \{\int_a^b |f(x)|^2 dx\}^{\frac{1}{2}}$$

.

OBS: Nos Teoremas e resultados a serem enunciados a seguir, sempre que houver menção ao espaço V entenda que estamos nos referindo a um espaço vetorial com produto interno e norma associada a este produto interno.

Teorema 1.1. *Para quaisquer x e $y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, vale:*

(i) $||x|| \geq 0$; $||x|| = 0$ *se e somente se* $x = 0$;

(ii) $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$;

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Teorema 1.2. *Desigualdade de Cauchy-Schwarz: para x e $y \in V$ vale:*

$$|(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Teorema 1.3. *Lei do Paralelogramo: para vetores $x, y \in V$ tem-se:*

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

Para um espaço vetorial V de dimensão finita ($dim(V) = n$) e com uma base ortonormal (ortogonal e normalizada) $e_1, ..., e_n$, podemos escrever para todo $x \in V$:

$$x = (x, e_1)e_1 + ... + (x, e_n)e_n \tag{1}$$

Esse conceito pode ser estendido para os casos em que $dim(V) = \infty$; nestes casos, podemos escrever o lado direito de (1) como:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)e_i \tag{2}$$

É claro que (2) só faz sentido para espaços de dimensão infinita com bases contáveis. Quando essa série converge, dizemos que ela converge na média para x, logo podemos dizer que:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)e_i$$

e dizemos que (x, e_i) são os coeficientes generalizados de Fourier de x com respeito à base ortonormal $e_1, e_2, ...$.

Teorema 1.4. *Seja*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$$

uma série infinita que converge em média para x, isto é,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i,$$

então

$$a_i = (x, e_i)$$

para todo $i = 1, 2, ...$.

Definição. *Polinômio Trigonométrico: definiremos como polinômio trigonométrico de grau $2n+1$ a seguinte expressão:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + ... + a_n\cos(nx) + \\ b_1 sen(x) + b_2 sen(2x) + ... + b_n sen(nx), \tag{3}$$

onde $a_0, a_1, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ são números reais e $a_n \neq 0$ e/ou $b_n \neq 0$. Seja $\mathcal{F}_n$ o conjunto de todos os polinômios de grau $\leq 2n+1$ (juntamente com o polinômio 0). O espaço $\mathcal{F}_n$ é um espaço vetorial com produto interno dado por:

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

O conjunto de funções $1, cos(x), sen(x), ..., cos(nx), sen(nx)$, é um conjunto ortogonal do espaço $\mathcal{F}_n$, uma vez que para m e n inteiros:

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)sen(nx)dx = 0\ ,\ se\ m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)cos(nx)dx = 0\ ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(mx)cos(nx)dx = 0\ ,\ se\ m \neq n.$$

Para normalizar o conjunto de funções ortogonais de $\mathcal{F}_n$, podemos calcular:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1)dx = 2\pi$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen^2(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} cos^2(mx)dx = \pi\ se\ m > 0.$$

Então as funções $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{cos(x)}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{sen(x)}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{sen(nx)}{\sqrt{\pi}}$ são um conjunto ortonormal de $\mathcal{F}_n$.

Por extensão, o conjunto infinito

$$1, cos(x), sen(x), ..., cos(nx), sen(nx), ...$$

é um conjunto ortogonal em $C^0[-\pi, \pi]$, além disso, esse conjunto é LI, logo esse conjunto é uma base para $C^0[-\pi, \pi]$.

1.2 Desigualdade de Bessel e Identidade de Parseval

Teorema 1.5. *Sejam $e_1, e_2, ...$, vetores ortonormais de um espaço com produto interno e de dimensão infinita V. Seja $x \in V$, então vale a seguinte desigualdade:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)^2 \leq ||x||^2 \quad \textit{(Desigualdade de Bessel).}$$

Ainda, $e_1, e_2, ...$, formam uma base de V se e somente se:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)^2 = ||x||^2 \quad \textit{(Identidade de Parseval).}$$

A desigualdade de Bessel nos fornece uma estimativa para os coeficientes generalizados de Fourier de x em relação à base $e_1, e_2, ...$.

Corolário 1.1. *Se $e_1, e_2, ...$, for um conjunto ortonormal de um espaço V de dimensão infinita dotado de produto interno, então*

$$\lim_{i \to \infty} (x, e_i) = 0$$

para todo $x \in V$, ou seja, os coeficientes de Fourier de x tendem a zero para $i \to \infty$ para qualquer conjunto ortonormal de V.

OBS: Em muitas aplicações, prefere-se trabalhar com um conjunto ortogonal ao invés de um conjunto ortonormal. Assim sendo, a expressão em série de x fica:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x, e_i)}{||e_i||^2} e_i\ ,$$

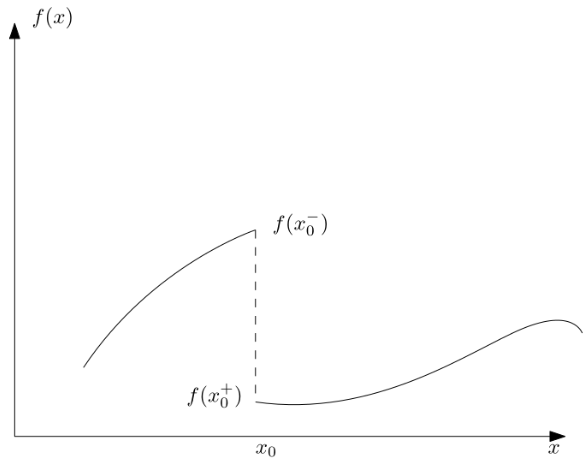
onde $\frac{(x, e_i)}{||e_i||^2}, i = 1, 2, ...$, são os coeficientes generalizados de Fourier em relação ao conjunto $e_1, e_2, ...$.

2 O Espaço de Funções Contínuas por Partes

Definição(Função contínua por partes): uma função real f é contínua por partes no intervalo $[a, b]$ se:

(i) f é definida e contínua em todos os pontos, exceto num conjunto finito de pontos de $[a, b]$;

(ii) os limites $f(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} f(x_0 + h)$ e $f(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} f(x_0 - h)$ existem em cada ponto x_0 em $[a, b]$.



Quando um ponto x é um ponto de continuidade $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$. Além disso, se houver descontinuidade, ela deve ser finita.

Se $f(x)$ é contínua por partes em $[a, b]$, então $f(x)$ é integrável a Riemann e o valor dessa integração no intervalo $[a, b]$ independe dos valores que $f(x)$ assume nos pontos de descontinuidade. E em particular, podemos definir uma classe de equivalência: se $f(x)$ e $g(x)$ são idênticas, exceto em pontos de descontinuidade, então $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas por partes em $[a, b]$, então o produto $f(x)g(x)$ também é contínuo por partes em $[a, b]$, e $\int_a^b f(x)g(x)\ dx$ é o produto interno do espaço das funções contínuas por partes em $[a, b]$, chamaremos esse espaço de $PC[a, b]$.

3 Funções Pares e Ímpares

Definição. *Funções pares e Ímpares: uma função $f(x)$ definida num intervalo centrado na origem é par se: $f(x) = f(-x)$ para todo x. se $f(x) = -f(-x)$, então a função será classificada como ímpar.*

Exemplo 3.1. $f(x) = x^n$.

Fatos:

(i) $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{se } f(x) \text{ é par.} \\ \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, & \text{se } f(x) \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

(ii) O produto interno entre duas funções de mesma paridade será uma função par. Se as paridades são diferentes, então a função resultante é ímpar. Dessa forma $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = 0$, se $f(x)$ e $g(x)$ são funções com paridades diferentes.

Sendo assim, funções pares e ímpares são mutualmente ortogonais em $PC[-a, a]$.

Exemplo 3.2. *As funções $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$ são pares em $PC[-a, a]$ e $senx, sen2x, \ldots$ são ímpares.*

Lema 3.1. *Toda função no intervalo $[-a, a]$ pode ser escrita de forma única como a soma entre uma função par e uma função ímpar.*

Exemplo 3.3. $f(x) = e^x$

4 Determinação da Série de Fourier

4.1 Coeficientes da Série de Fourier

Considerando as funções $1, cos(x), sen(x), cos(2x), sen(2x), \ldots$ e lembrando que elas formam um conjunto ortogonal, iremos obter os coeficientes de Fourier que irão compor a expansão em série de qualquer função contínua por partes em $[-\pi, \pi]$. Sendo assim, temos:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k cos(kx) + b_k sen(kx)) \quad (4)$$

Faremos o produto interno de (4) por $cos(nx)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}(a_k\ cos(kx) + b_k\ sen(kx))\ cos(nx)\right)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_k cos^2(kx)dx \therefore$$

$$a_k(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx$$

Se seguirmos o mesmo procedimento para um produto interno de (4) por $sen(nx)$ temos:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(kx)dx$$

E a série de Fourier fica:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\ cos(kx) + b_k\ sen(kx))\ ,\ \frac{a_0}{2} \rightarrow \text{média da função}$$

Exemplo 4.1. *"Função"delta de Dirac $\delta(x)$.*

Exemplo 4.2. *Função degrau.*

Exemplo 4.3. *Função $|x|$.*

OBS: A série de Fourier para funções periódicas com periódo $2L$ é:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\ \cos(\frac{k\pi x}{L}) + b_k\ sen(\frac{k\pi x}{L})), \quad (5)$$

com

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{k\pi x}{L})dx$$

e

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen(\frac{k\pi x}{L})dx.$$

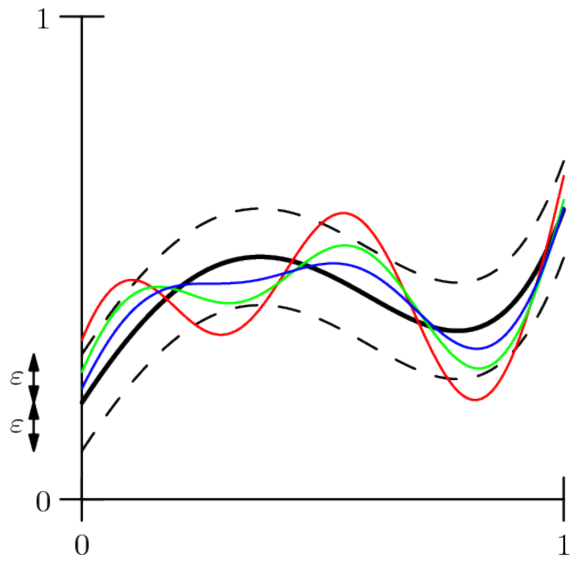
Exemplo 4.4. *Função $f(x) = x$ para $-L < x < L$.*

4.2 Convergência

O tópico de convergência é complexo o suficiente para ser tema de um curso exclusivo. Nesse subtópico apresentaremos os três tipos de convergência mais comuns na Matemática Aplicada.

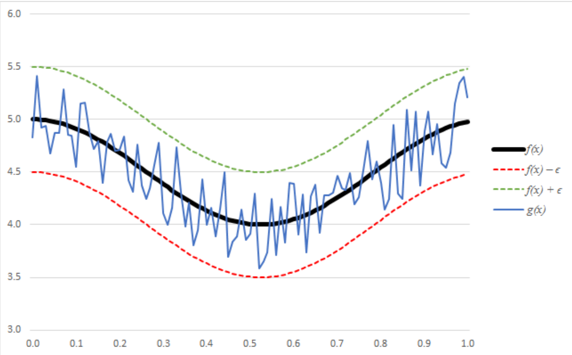
4.2.1 Convergência Ponto a Ponto

Uma sequência de funções $u_n(x)$ converge ponto a ponto para $u(x)$ se para todo $x \in [a, b]$ e para todo $\epsilon > 0$, existir $N = N(x, \epsilon)$ tal que $|u_n(x) - u(x)| < \epsilon$ sempre será atendido se $n > N$. Graficamente, temos a seguinte representação da convergência ponto a ponto:



4.2.2 Convergência Uniforme

Uma sequência de funções $u_n(x)$ converge uniformemente para $u(x)$ se para todo $x \in [a,b]$ e para todo $\epsilon > 0$, existir $N = N(\epsilon)$ tal que $|u_n(x) - u(x)| < \epsilon$ sempre será atendido se $n > N$. Graficamente, temos a seguinte representação da convergência uniforme:

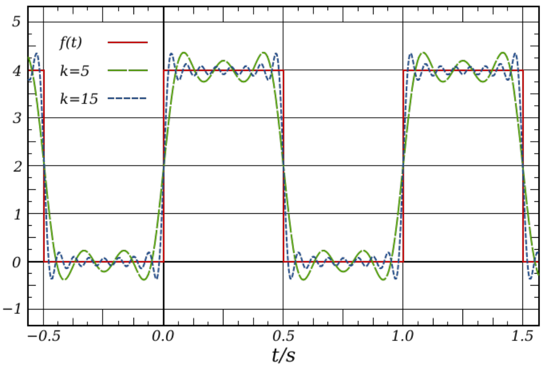


4.2.3 Convergência na Média Quadrática

Para as séries de Fourier, a convergência mais importante é a convergência na média quadrática. Se para todo $\epsilon > 0$ existir $N = N(\epsilon)$ tal que:

$$\{\int_a^b |u_n(x) - u(x)|^2 dx\}^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

Graficamente, a convergência em média quadrática pode ser observada na seguinte aproximação por série de Fourier:



Nos pontos de descontinuidade observamos uma amplitude dos modos de Fourier que é maior que as amplitudes dos pontos de continuidade, esse fenômeno é conhecido pelo nome de Fenômeno de Gibbs. Além disso, notamos quem nas descontinuidades há uma convergência para o valor médio do salto. O teorema a seguir tratará desse resultado.

Teorema 4.1. *Teorema de Fourier: a série de Fourier de uma função contínua por partes e suficientemente suave converge ponto a ponto em toda a reta $\mathbb{R}$. Se $F(x)$ representar a extensão periódica de $f(x)$, então no ponto x_0 em que $F(x)$ é contínua, a série converge para $F(x_0)$; se x_0 for um ponto de descontinuidade, a série converge para:*

$$\frac{F(x_0^+) + F(x_0^-)}{2}.$$

Exemplo 4.5. *Extensão periódica da função degrau.*

5 Séries de Fourier de Senos e Cossenos

A depender da paridade da função, a série de Fourier de uma função pode ser representada apenas como uma série de senos ou cossenos. Relembrando:

Se a função $f(x)$ é par:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\, cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\ , \quad \text{e}$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 0\, , \text{ então } \ f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\, cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right))$$

Se a função $f(x)$ é ímpar:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 0$$

e

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\, sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\ ,$$

logo

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k\, sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right)).$$

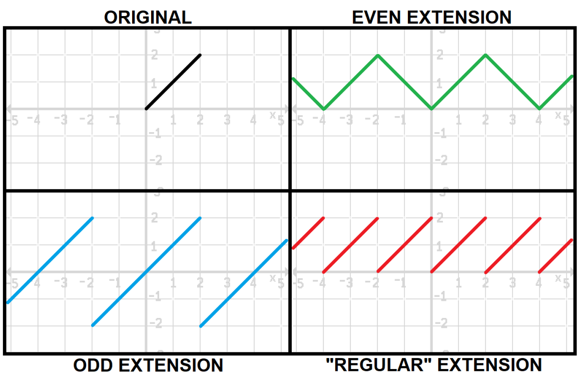
Esses resultados implicam em:

- $1, cos(x), cos(2x), cos(3x), ...$ formam uma base para as funções contínuas por partes pares em $[-\pi, \pi]$;
- $sen(x), sen(2x), sen(3x), ...$ formam uma base para as funções contínuas por partes ímpares em $[-\pi, \pi]$.

Em muitas situações, deseja-se obter uma expansão em série de Fourier de uma função definida apenas no intervalo $[0, \pi]$. Isso pode ser feito se utilizarmos o conceito de extensão periódica par ou ímpar, $E_f(x)$ e $O_f(x)$, respectivamente:

$$E_f(x)dx = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le \pi \\ f(-x), & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

$$O_f(x)dx = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le \pi \\ -f(-x), & -\pi \le x < 0. \end{cases}$$



Exemplo 5.1. *Determinar a série de Fourier em cossenos e senos de $f(x) = x^2$ em $[0, \pi]$.*

6 Série de Fourier Complexa

6.1 Fórmula de Euler

Série de Taylor para $sen(x), cos(x), e^x$:

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

$$e^x(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

Faremos $e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + ...$,

Notando que:

$i^1 = i \quad i^5 = i$

$i^2 = -1 \quad i^6 = -1$

$i^3 = -i \quad i^7 = -i$

$i^4 = +1 \quad i^8 = +1.$

Logo:

$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + ...$ e rearrumando,

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + ...\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right)$$

O primeiro termo entre parêntesis é a série de Taylor para a função $\cos x$, enquanto que o outro termo entre parêntesis é a série de Taylor para a função $senx$.

$$e^{ix} = cos(x) + i\ sen(x)$$

6.2 Determinação da Série de Fourier Complexa

O conjunto $1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{2ix}, e^{-2ix}, ...$ forma uma base contável para as funções contínuas por partes em $[-\pi, \pi]$. Dessa forma, podemos escrever a série de Fourier complexa como:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikx}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}\right) + b_k\left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right)\right]$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(a_k - ib_k)}{2} e^{ikx}\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(a_k + ib_k)}{2} e^{-ikx}\right]$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k\, e^{ikx}$$ onde:

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{(a_k - ib_k)}{2}, & k = 1, 2, 3, ... \\ \frac{(a_{-k} + ib_{-k})}{2}, & k = -1, -2, -3, ... \end{cases}$$

Para $k > 0$, temos:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(cos(kx) - i\ sen(kx)\right) f(x)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

Para $k < 0$, temos:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(cos(-kx) + i\ sen(-kx)\right) f(x)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

Exemplo 6.1. *Obter a série de Fourier complexa para* $f(x) = sen(x)$ *em* $[-\pi, \pi]$.

Exemplo 6.2. *Série de Fourier complexa de*

$$f(x) = \begin{cases} 1,\ 0 < x < a (a < \pi) \\ 0,\ \text{em todo o resto} \end{cases}$$

Exemplo 6.3. $f(x) = x^2$ *no intervalo* $[-1, 1]$.

Exemplo 6.4. *Série de Fourier complexa de*

$$f(x) = \begin{cases} sen(x),\ 0 < x < \pi \\ 0, \pi < x < 2\pi \end{cases} .$$

Exemplo 6.5. *Converter a série do exemplo 6.2 para a forma real.*

Exemplo 6.6. *Converter para a forma complexa a série de Fourier real da função degrau (exemplo 4.2).*

7 A Identidade de Parseval (Uma nova visão)

O Teorema 1.5 (seção 1.2) estabelece a identidade de Parseval: $\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)^2 = ||x||^2$. Para uma função periódica de período $2L$ e sejam $c_k (k = 0, \pm1, \pm2, ...)$, os coeficientes complexos da função $f(x)$, então:

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Prova:

Assumindo $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{k\pi i x}{L}}$ e $c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-k\pi i x}{L}}dx$, temos $f^2(x) = f(x)f(x)$, logo $f^2(x) = f(x)\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{k\pi i x}{L}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k f(x) e^{\frac{k\pi i x}{L}}$.

Integrando os 2 lados:

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k f(x) e^{\frac{k\pi i x}{L}} dx = \frac{1}{2L}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-L}^{L} f(x) e^{\frac{k\pi i x}{L}} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bar{c_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

A versão real da mesma Identidade é:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

Exemplo 7.1. *Utilizar a identidade de Parseval para a série de Fourier real de $f(x) = |x|$ em $[-\pi, \pi]$.*

Exemplo 7.2. *Aplicar a identidade de Parseval na série de Fourier de $f(x) = 1 + x$ em $[-\pi, \pi]$.*

8 Transformada de Fourier

Vimos que a série de Fourier permite que possamos representar funções periódicas como uma soma de cossenos e senos. Para funções nâo-periódicas a extensão desse conceito é a transformada de Fourier. A transformada de uma função $f(t)$ é dada por:

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathbf{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{6}$$

A transformada de Fourier inversa é:

$$f(t) = \mathbf{F}^{-1}(\mathcal{F}(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega)e^{i\omega t}dt \tag{7}$$

A transformada de Fourier tem diversas propriedades, as principais são:

(i) Linearidade - Se $f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$, então:

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t))e^{-i\omega t}dt = \alpha\mathcal{F}_1(\omega) + \beta\mathcal{F}_2(\omega)$$

(ii) Escala de tempo - Se $f(t) = g(\alpha t)$, então:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{G}(\frac{\omega}{\alpha}).$$

(iii) Deslocamento no tempo - Para $f(t) = g(t - a)$, então:

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{G}(\omega)e^{-i\omega a}.$$

(iv) Transformada da derivada - Se $f(t) = \frac{d^n}{dt^n}g(t)$, a transformada fica:

$$\mathcal{F}(\omega) = (i\omega)^n\mathcal{G}(\omega).$$

(v) Convolução - A transformada inversa do produto de duas funções $F(\omega)$ $\mathcal{G}(\omega)$ não é o produto de suas inversas. Em vez disso, temos uma operação binária chamada de convolução:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

A transformada de Fourier da convolução é igual ao produto das das transformadas:

$$\mathbf{F}(f(t) * g(t)) = \mathbf{F}(f(t))\mathbf{F}(g(t)) = \mathcal{F}(\omega)\mathcal{G}(\omega).$$

Exemplo 8.1. *Vamos analisar a equação do movimento harmônico forçado com amortecimento:*

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\zeta\frac{d}{dt}x(t) + \omega_o^2 x(t) = f(t).$$