Álgebra Linear

Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil

1 Definição de Espaço Vetorial

Um espaço vetorial S deve atender às seguintes propriedades:

(i) comutatividade: $u + v = v + u$;

(ii) associatividade: $(u+v)+w = u+(v+w)$ e $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;

(iii) vetor nulo: existe um vetor $0 \in S$, chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$ para todo $u \in S$;

(iv) inverso aditivo: para cada vetor $u \in S$ existe um vetor $-u \in S$, chamado o inverso aditivo, ou o simétrico de S, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(v) distributividade: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;

(vi) multiplicação pela unidade: $1 \cdot v = v$.

Todos esses axiomas devem ser satisfeitos para α e $\beta \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in S$ quaisquer.

1.1 Exemplos

1. O espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N}$.

2. O conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ com $m, n \in \mathbb{N}$ e valores reais formam um espaço vetorial.

3. Os elementos do espaço $\mathbb{R}^\infty$.

4. Seja X um conjunto não-vazio qualquer. Denota-se por $\mathbb{F}(X, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções reais $f, g : X \to \mathbb{R}$. Este conjunto $\mathbb{F}$ se torna um espaço vetorial quando definimos a soma $f+g$ de duas funções e $\alpha \cdot f$ o produto por uma função escalar: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.

2 Subespaços Vetoriais

Um subespaço vetorial do espaço vetorial S é um subconjunto $T \subset S$ que atende aos axiomas que definem S como um espaço vetorial e é por si só um espaço vetorial.

Seja S um espaço vetorial, chamaremos de subespaço vetorial de S o subconjunto T de S que atenda às seguintes propriedades:

(i) $0 \in T$;

(ii) Se $u, v \in T$ então $u + v \in T$;

(iii) Se $u \in T$ então $\alpha u \in T$.

2.1 Exemplos

1. Seja $v \in S$ um vetor não nulo. O conjunto $T = \alpha v; \alpha \in \mathbb{R}$ de todos os múltiplos de v é um subespaço de S.

2. Seja $S = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais de uma variável real ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $C^k(\mathbb{R})$ das funções k-vezes continuamente diferenciáveis é um subespaço de S.

2.2 Soma Direta

Sejam T_1 e T_2 subespaços de S. Podemos obter a partir de T_1 e T_2 um novo subespaço de S através da união entre esses dois subespaços ($T_1 \cup T_2$); que é, simplesmente, o conjunto formado por todas as somas $t_1 + t_2$, onde $t_1 \in T_1$ e $t_2 \in T_2$. Esse novo espaço será representado por $T_1 + T_2$.

Quando os subespaços $T_1, T_2 \subset S$ têm em comum apenas o elemento 0, ou seja, $T_1 \cap T_2 = 0$, escreve-se $T_1 \oplus T_2$ ao invés de $T_1 + T_2$ e diz-se que $T = T_1 \oplus T_2$ (T é a soma direta de T_1 e T_2).

Teorema 2.1. *Sejam T, T_1, T_2 subespaços de S, com $T_1 \subset T$ e $T_2 \subset T$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$T = T_1 \oplus T_2$;*

2. *todo elemento $r \in T$ se escreve de maneira única como a soma $r = t_1 + t_2$, onde $t_1 \in T_1$ e $t_2 \in T_2$.*

3 Bases

Definição. *Combinação linear: seja $u_i, (i = 1, \ldots, n)$ um conjunto de vetores de um espaço vetorial S, então diz-se que v é uma combinação linear dos vetores u_i se:*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i.$$

Seja T um subconjunto do espaço vetorial S. O subespaço de S gerado por T é, por definição, o conjunto de todas as combinações lineares $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$ de vetores $u_1, u_2, \ldots, u_n \in T$. Quando o subespaço gerado por T coincide com S, dizemos que T é um conjunto de geradores de S, neste caso para todo $v \in S$ tem-se: $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$. Ou seja, qualquer elemento de S pode ser obtido através de uma combinação linear dos vetores de T.

3.1 Exemplo

1. Os chamados vetores canônicos constituem um conjunto de geradores do espaço $\mathbb{R}^n$.

Definição. *Conjunto linearmente independente: seja S um espaço vetorial. Diz-se que um conjunto $T \subset S$ é linearmente independente (LI) quando nenhum vetor $u \in T$ é combinação linear dos outros elementos de T.*

Observação. *No caso de $T = u$, dizemos que T é LI se $u \neq 0$.*

Teorema 3.1. *Seja T um conjunto LI do espaço S. Se:*

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$$

com $u_i \in T$, então $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

3.2 Exemplos

1. Os chamados vetores canônicos são LI.
2. Os monômios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ em P^n são LI.

Observação. *De forma evidente, se um conjunto não é LI, ele é linearmente dependente (LD).*

Definição. *Base: uma base de um espaço S é um conjunto $B \subset S$ linearmente independente que gera S. Se $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de S, logo $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, então $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são as coordenadas de v na base $\mathfrak{B}$.*

3.3 Exemplos

1. Os chamados vetores canônicos formam uma base de $\mathbb{R}^n$. Os monômios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ formam uma base de P^n.
2. O conjunto de monômios de grau arbitrário $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ formam uma base do espaço P de todos os polinômios reais.
3. O conjunto $X = \{\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}, \ldots\} \subset \mathbb{R}^\infty$, onde $\overline{e_n} = [0, ..., 0, 1, 0, \ldots]$ é LI, mas não gera $\mathbb{R}^\infty$.

Observação. *Houve um debate na Matemática sobre a existência ou não de uma base para $\mathbb{R}^\infty$. O que se sabe é: $\mathbb{R}^\infty$ possui uma base que não se consegue computar, pois existe o lema de Zorn que garante que todo espaço vetorial tem uma base.*

Teorema 3.2. *Se os vetores $v_1, \ldots, v_n$ geram o espaço S, então qualquer conjunto com mais de n vetores em S é LD.*

Corolário 3.1. *Se os vetores $v_1, \ldots, v_n$ geram o espaço S e os vetores $u_1, \ldots, u_m$ são LI, então $m \leq n$.*

Corolário 3.2. *Se o espaço vetorial S tem uma base $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ com n elementos, então qualquer base de S também possuirá n elementos.*

Definição. *Dimensão: diz-se que um espaço vetorial S tem dimensão finita quando admite uma base $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ com um número finito n de elementos. Pelo corolário 2, o número de elementos é o mesmo para todas as bases, logo denota-se a dimensão do espaço S : $n = dimS$. O espaço vetorial S formado apenas pelo elemento 0 tem dimensão 0.*

Corolário 3.3. *Se a dimensão de um espaço S é n, um conjunto com n vetores gera S se, e somente se é LI.*

Teorema 3.3. *Seja S um espaço vetorial de dimensão finita n, então:*

(i) todo conjunto X de geradores de S contém uma base;

(ii) todo conjunto LI $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset S$ está contido numa base;

(iii) todo subespaço $T \subset S$ tem dimensão finita $\leq n$;

(iv) se a dimensão do subespaço $T \subset S$ é igual a n, então $T = S$.

3.4 Exemplos

1. Os monômios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ constituem uma base de P^n (polinômios de grau $\leq n$), logo P^n tem dimensão finita igual a $n + 1$.
2. O espaço P de todos os polinômios tem dimensão infinita.
3. $\mathbb{R}^\infty$ tem dimensão infinita.
4. O espaço vetorial $M_{(m \times n)}$ das matrizes de ordem $m \times n$ tem dimensão igual a $m \cdot n$.

4 Transformações Lineares

Definição. *Transformação linear: sejam T, S espaços vetoriais. Uma transformação linear $A : T \to S$ é uma correspondência que associa a cada vetor $v \in T$ um vetor $A(v) = A \cdot v = Av \in S$ de modo que, para todos $u, v \in T$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ valham:*

(i) $A(u + v) = Au + Av$;

(ii) $A(\alpha v) = \alpha Av$.

O vetor Av é chamado de imagem de v pela transformação A.

Consequências:

(i) $A(0) = 0, A(0) = A(0 + 0) = A(0) + A(0)$;

(ii) $u, v \in S$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tem-se: $A(\alpha u + \beta v) = A(\alpha u) + A(\beta v) = \alpha Au + \beta Av$;

(iii) generalizando, sejam $v_1, \ldots, v_m \in S$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, vale: $A(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m) = \alpha_1 Av_1 + \ldots + \alpha_m Av_m$;

(iv) $A(-v) = -Av$ e $A(u - v) = Au - Av$.

A soma de duas transformações lineares $A, B : T \to S$ e o produto de uma transformação linear (TL) $A : T \to S$ por um número $\alpha \in \mathbb{R}$ são as TLs:

(i) $A + B : T \to S, (A + B)v = Av + Bv$;

(ii) $\alpha A : T \to S, (\alpha A)v = \alpha Av$.

Propriedades válidas para todo $v \in T$. O símbolo 0 denota a TL nula: $0 : T \to S, 0(v) = 0$. O que permite definir $-A : T \to S$ por $(-A)v = -Av$ e $(-A) + (A) = A + (-A) = 0$.

Seja $\mathfrak{L}(T, S)$ o conjunto das TLs de T em S. As definições anteriores caracterizam $\mathfrak{L}(T, S)$ num espaço vetorial. Quando

$T = S$, escreve-se apenas $\mathfrak{L}(S)$. AS TLs de um espaço vetorial nele mesmo ganham o sinônimo de operadores lineares em S. As TLs $\phi : S \to \mathbb{R}$ com valores numéricos são chamadas de funcionais lineares. Chama-se de S^* o espaço vetorial formado por todas os funcionais lineares $\Phi : S \to \mathbb{R}$, S^* é também chamado de espaço dual de S.

Teorema 4.1. *Sejam T e S espaços vetoriais e $\mathfrak{B}$ uma base de T. Para cada vetor $u \in \mathfrak{B}$, façamos corresponder (de forma arbitrária) um vetor $u' \in S$. Então existe uma única transformação linear $A : T \to S$ tal que $Au = u'$ para cada $u \in B$.*

Consequência: se quisermos definir uma TL $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ basta escolher, para cada $j = 1, \ldots, n$, um vetor $v_j = [a_{ij}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}] \in \mathbb{R}^m$ de tal modo que $v_j = Ae_j$, ou seja, v_j é a imagem do j-ésimo vetor da base canônica e_j pela TL A. E, uma vez feito isso, podemos obter a imagem de qualquer $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
Au &= A(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j A e_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_{1j}x_j, a_{2j}x_j, \ldots, a_{mj}x_j) \\
&= (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j) \\
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n
\end{aligned}$$

Reescrevendo em forma matricial:

$$y = Au$$

4.1 Exemplos

1. A rotação em um ângulo θ em torno da origem no plano.
2. A projeção ortogonal sobre uma reta que consiste em projetar qualquer vetor $u = [x, y]$ sobre a reta $y = \alpha x$.
3. Exemplo de funcional: produto interno entre funções.

4.2 Exercícios

1. Dado um conjunto de vetores, como verificar se eles formam um conjunto LI?
2. Mudança de base.

4.3 Formas Bilineares

Definição. *Sejam T, S dois espaços vetoriais. Dizemos que uma função $b : T \times S \to \mathbb{R}$, denotada por $b(u, v)$ para $u \in T$ e $v \in S$ é uma forma bilinear se ela for linear em cada argumento. A forma bilinear atende às seguintes propriedades:*

(i) $b(u + u', v) = b(u, v) + b(u', v)$;

(ii) $b(u, v + v') = b(u, v) + b(u, v')$;

(iii) $b(\alpha u, v) = \alpha b(u, v)$;

(iv) $b(u, \alpha v) = \alpha b(u, v)$.

Onde $u, u' \in T$, $v, v' \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Essas definições de soma e produto fazem do conjunto $\mathfrak{L}(T \times S)$ formado por todas as formas bilineares $b : T \times S \to \mathbb{R}$ um espaço vetorial por si só. O produto escalar ou produto interno $u \cdot v = (u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots u_nv_n$, para $u, v \in \mathbb{R}^n$ é uma forma bilinear $(u, v) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Seja $L^2(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \int_\Omega f^2 \, dx < \infty\}$. No caso de funções f, g de quadrado integrável no domínio Ω, isto é, $f, g \in L^2(\Omega)$, o produto interno entre f, g é:

$$(f, g) = \int_\Omega fg \, dx$$

4.4 Produto de Transformações Lineares

Definição. *Produto de transformações lineares: sejam as TLs $A : T \to S$, $B : S \to E$, onde o domínio de B é o contra-domínio de A. O produto $BA : T \to E$ que mapeia cada $u \in T$ em E, $(BA)u = B(Au)$.*

Deve-se observar que BA é por si só uma TL, BA representa a TL composta $B \circ A$ das TLs B e A. Para $C : E \to F$ e $A, B : T \to E$, valem:

(i) associatividade: $(CB)A = C(BA)$;

(ii) distributividade à esquerda: $(B + C)A = BA + CA$;

(iii) distributividade à direita: $C(A + B) = CA + CB$.

4.5 Exemplo

1. Uma rotação R do exemplo 4.1 seguida da projeção ortogonal sobre uma reta (do exemplo 4.2).

4.6 Núcleo e Imagem de Uma Transformação Linear

Definição. *Núcleo de uma TL: sejam T e S espaços vetoriais e $A : T \to S$ uma TL. Chamamos de núcleo de A, denotado por $\mathbf{N}(A)$ o conjunto definido por:*

$$\mathbf{N}(A) = \{v : v \in T, A(v) = 0\}$$

Definição. *Imagem de uma TL: sejam T, S e A definidos anteriormente. Chamamos de imagem de A, denotada por $\mathbf{Im}(A)$, o conjunto definido por:*

$$\mathbf{Im}(A) = \{u : Av = u, v \in T, u \in S\}$$

A imagem de A é um subespaço vetorial de S. Quando $\mathbf{Im}(A) = S$, diz-se que a TL A é sobrejetiva.

Definição. *Inversa à direita de uma TL: seja uma TL $A : T \to S$ com T e S espaços vetoriais de dimensão finita. Diz-se que A tem uma inversa à direita B se $AB = I_T$ (I_T é a TL identidade de T), ou seja, $AB(u) = u$ para todo $u \in T$.*

Teorema 4.2. *Seja $A : T \to S$ uma TL entre espaços de dimensão finita, A possui uma inversa à direita se e somente se A é sobrejetiva.*

Uma TL $A : T \to S$ é chamada de injetiva quando para $u, u' \in T$ quaisquer, tem-se $Au \neq Au'$ em S, se $u \neq u'$.

Teorema 4.3. *Para que uma TL $A : T \to S$ seja injetiva, é necessário e suficiente que seu $\mathbf{N}(A)$ contenha apenas o vetor nulo, em outras palavras, $dim(\mathbf{N}(A)) = 0$.*

Definição. *Inversa à esquerda de uma TL: seja uma TL $A : T \to S$ com T e S espaços vetoriais de dimensão finita. Diz-se que A tem uma inversa à esquerda B se $BA = I_S$ (I_S é a TL identidade de S), ou seja, $BA(u) = u$ para todo $u \in T$.*

Teorema 4.4. *Seja $A : T \to S$ uma TL entre espaços de dimensão finita, A possui uma inversa à esquerda se e somente se A é injetiva.*

Definição. *Transformação linear invertível: uma TL $A : T \to S$ com T e S é chamada de invertível se existir $B : S \to T$ linear tal que $BA = I_T$ e $AB = I_S$, ou seja, B é ao mesmo tempo inversa à esquerda e à direita de A. Diz-se que B é a inversa de A e $(A)^{-1} = B$.*

Teorema 4.5. *Uma TL $A : T \to S$ tem inversa se e somente se ela é injetiva e sobrejetiva. Neste caso, diz-se que A é bijetiva ou $A : T \to S$ é um isomorfismo e que T e S são isomorfos.*

Um isomorfismo $A : T \to S$ transforma uma base de T em uma base de S.

Teorema 4.6. *Sejam T e S espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda TL $A : T \to S$, vale:*

$$dim(T) = dim(\mathbf{N}(A)) + dim(\mathbf{Im}(A))$$

4.7 Problema de Autovalor

Definição. *Transformação linear adjunta: chamaremos de TL adjunta de A a TL $A^* : S \to T$ tal que, para $A : T \to S$, $u \in T$ e $v \in S$ quaisquer vale:*

$$(Au, v) = (u, A^*v)$$

Diz-se que a TL $A : T \to S$ é autoadjunta se $A = A^*$.

Definição. *Problema de autovalor padrão: seja $A : S \to S$ uma TL. Um vetor $x \neq 0$ é chamado de autovetor de A se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que:*

$$Ax = \lambda x$$

O número λ, por sua vez, é chamado de autovalor de A. Para cada autovalor, tem-se um autovetor associado.

Teorema 4.7. *Para autovalores distintos do mesmo operador (TL), há autovetores associados que são LI.*

Teorema 4.8. *Sejam λ_i e λ_j autovalores distintos de um operador autoadjunto $A : S \to S$, então os autovetores associados x_i e x_j são ortogonais ($(x_i, xj) = 0$).*

Teorema 4.9. *Para todo operador autoadjunto $A : S \to S$ num espaço de dimensão finita com produto interno, existe uma base ortonormal $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset S$ formada pelos autovetores de A.*

Corolário 4.1. *Toda matriz simétrica possui autovalores reais.*

Definição. *Multiplicidade: seja o operador $A : S \to S$ um operador de dimensão finita. Chama-se multiplicidade algébrica (abreviadamente $ma(\lambda_i)$) do autovalor λ_i a potência do termo $(\lambda - \lambda_i)$ que ocorre no polinômio característico. A multiplicidade geométrica de um autovalor λ_i é a quantidade de autovetores LI associados ao autovalor.*

Teorema 4.10. *Seja $A : S \to S$ um operador linear entre espaços de dimensão finita n. Se possuir autovalores não distintos, pode-se afirmar que:*

$$mg(\lambda_i) = n - posto(A - \lambda_i I)$$

Onde $mg(\lambda_i)$ é a multiplicidade geométrica do autovalor λ_i.