6 Série de Fourier Complexa

6.1 Fórmula de Euler

Série de Taylor para $sen(x), cos(x), e^x$:

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

$$e^x(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

Faremos $e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + ...$,

Notando que:

$i^1 = i \qquad i^5 = i$

$i^2 = -1 \qquad i^6 = -1$

$i^3 = -i \qquad i^7 = -i$

$i^4 = +1 \qquad i^8 = +1.$

Logo:

$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + ...$ e rearrumando,

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + ...\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right)$$

O primeiro termo entre parêntesis é a série de Taylor para a função $\cos x$, enquanto que o outro termo entre parêntesis é a série de Taylor para a função $senx$.

$$e^{ix} = cos(x) + i\ sen(x)$$

6.2 Determinação da Série de Fourier Complexa

O conjunto $1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{2ix}, e^{-2ix}, ...$ forma uma base contável para as funções contínuas por partes em $[-\pi, \pi]$. Dessa forma, podemos escrever a série de Fourier complexa como:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\ e^{ikx}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}\right) + b_k\left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right)\right]$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(a_k - ib_k)}{2}e^{ikx}\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(a_k + ib_k)}{2}e^{-ikx}\right]$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k\ e^{ikx} \quad \text{onde:}$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{(a_k - ib_k)}{2}, & k = 1, 2, 3, ... \\ \frac{(a_{-k} + ib_{-k})}{2}, & k = -1, -2, -3, ... \end{cases}$$

Para $k > 0$, temos:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(cos(kx) - i\ sen(kx)f(x))\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

Para $k < 0$, temos:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(cos(-kx) + i\ sen(-kx)f(x))\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

Exemplo 6.1. *Obter a série de Fourier complexa para* $f(x) = sen(x)$ *em* $[-\pi, \pi]$.

Exemplo 6.2. *Série de Fourier complexa de*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a(a < \pi) \\ 0, & \text{em todo o resto} \end{cases}$$

Exemplo 6.3. $f(x) = x^2$ *no intervalo* $[-1, 1]$.

Exemplo 6.4. *Série de Fourier complexa de*

$$f(x) = \begin{cases} sen(x), & 0 < x < \pi \\ 0, \pi < x < 2\pi \end{cases} .$$

Exemplo 6.5. *Converter a série do exemplo 6.1 para a forma real.*

Exemplo 6.6. *Converter para a forma complexa a série de Fourier real da função degrau (exemplo 4.2).*