이산형 확률분포

1차원 이산형 확률분포

- 확률변수는 변수가 취할 수 있는 값과, 그 값이 나오는 확률에 의해 정의
- 확률변수 X가 취할 수 있는 값에 대한 집합을 x1,x2,...xk라고 했을 때
- 확률 변수 X가 xk라는 값을 취하는 확률은 pk라고 하자.

- 확률질량함수의 정의
  - P(X = xk) = pk라고 정의할 수 있다.
  - f(x) = P(X = x), 확률은 변수가 취할 수 있는 값 x을 인수로 하는 함수로 볼 수 있다.

In [2]:
```
# 소수점 & 시각화 setting

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

%precision 3
%matplotlib inline
```

1차원 이산확률분포의 정의

In [3]:
```
# 임의로 각 x마다 확률이 다른 주사위를 만든 것

x_set = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6])
```

In [4]:
```
# 각 x_set에 대한 확률 함수 f 정의

def f(x):
    if x in x_set:
        return x / 21
    else:
        return 0
```

In [5]:
```
X = [x_set, f]
X
```

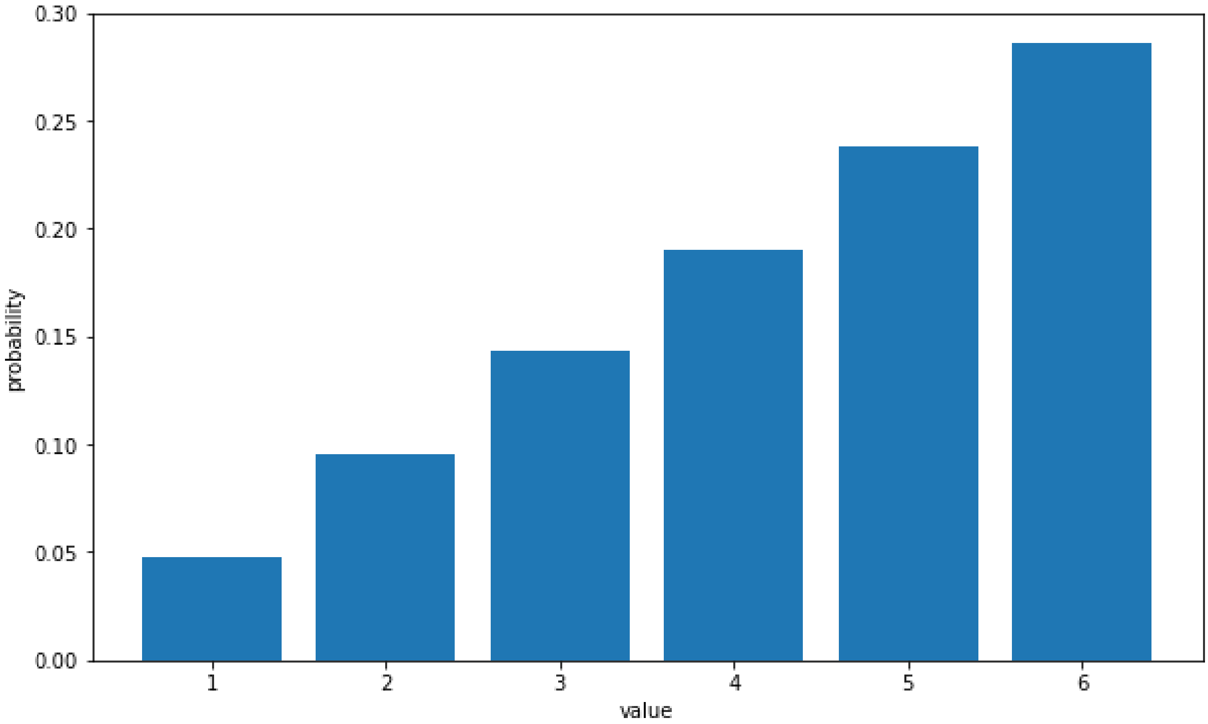
Out[5]:
```
[array([1, 2, 3, 4, 5, 6]), <function __main__.f(x)>]
```

In [6]:
```
# 각 x에 따른 확률 p_k를 구한다
prob = np.array([f(x_k) for x_k in x_set])

# x_k와 p_k의 대응을 사전식으로 표시
summary1 = dict(zip(x_set, prob))
summary1
```

Out[6]:
```
{1: 0.047619047619047616,
 2: 0.09523809523809523,
 3: 0.14285714285714285,
 4: 0.19047619047619047,
 5: 0.23809523809523808,
 6: 0.2857142857142857}
```

- 확률분포(probability mass function)
  - 확률변수가 취할 수 있는 값과, 그 확률의 구체적인 대응

In [7]:
```
# 확률분포 확인하는 code

fig = plt.figure(figsize=(10, 6))     # 크기
ax = fig.add_subplot(111)             # (1,1,1)
ax.bar(x_set, prob)                   # bar로 만들기
ax.set_xlabel('value')
ax.set_ylabel('probability')

plt.show()
```



- 확률의 성질
    - 무조건 0 이상
    - 모든 확률을 더하면 1이 되어야 한다.

In [8]:
```
# 확률이 모두 0 이상인지 확인하는 함수
# 모두 0 이상일 경우 True return, 하나라도 0일 경우 False return
np.all(prob >= 0)
```

Out[8]: True

In [9]:
```
# 모든 확률의 합 = 1
np.sum(prob)
```

Out[9]: 0.9999999999999999

누적확률함수

- 확률변수 X가 x 이하가 될 때의 확률을 반환하는 함수
- F(x) = P(X <= x)

In [10]:
```
# 누적확률 함수 만드는 식

def F(x):
    return np.sum([f(x_k) for x_k in x_set if x_k <= x])
```

In [11]:
```
# x = 3일때 확률 값
summary1[3]
```
Out[11]: 0.14285714285714285

In [12]:
```
# x=3일때 누적확률함수값
# 0.04 + 0.09 + 0.14

F(3)
```
Out[12]: 0.2857142857142857

In [14]:
```
# x=1~6까지이므로 1
F(6)
```
Out[14]: 0.9999999999999999

확률변수의 변환

- 확률변수 X에 2를 곱하고 3을 더했다고 생각하자. (원래 확률변수 X : {1,2,3,4,5,6})
- Y = 2X + 3이라고 할 때, Y가 취할 수 있는 값은 {5,7,9,11,13,15}가 되고, 이 각각의 Y에 따라 확률이 정해지게 된다.
- 어차피 y는 X의 값에 따라 변하고, X의 확률은 정해져 있으므로, 그것이 그대로 Y의 확률에 연결된다고 생각하자.

In [12]:
```
# 각각의 x_k에 대해 (x_k * 2 + 3)을 한 Y 만들기
y_set = np.array([2 * x_k + 3 for x_k in x_set])

# 새로 만든 y_set과 확률을 연결한 형태
prob = np.array([f(x_k) for x_k in x_set])
dict(zip(y_set, prob))
```
Out[12]:
```
{5: 0.047619047619047616,
 7: 0.09523809523809523,
 9: 0.14285714285714285,
 11: 0.19047619047619047,
 13: 0.23809523809523808,
 15: 0.2857142857142857}
```

1차원 이산형 확률변수의 지표

평균

- 확률변수의 평균
    - 확률변수를 무제한으로 시행하여 얻어진 실현값의 평균
- 이산형 확률변수의 경우
    - 확률변수의 평균은 확률변수가 취할 수 있는 값과 그 확률의 곱의 총합
- 확률변수의 평균은 기댓값, expect value라고 부른다. (μ: 뮤)

In [13]:
```
# 이산형 확률변수에서의 평균은 각 X와 그때의 확률을 곱해서 다 더한 것이다.

np.sum([x_k * f(x_k) for x_k in x_set])
```
Out[13]: 4.333333333333333

In [14]:
```
# 확률변수의 기댓값은 확률변수를 무제한으로 시행하여 얻은 실현값의 평균
# 10^6, 100만번 돌렸다고 가정하고 평균을 구했다.
# 위처럼 확률변수와 그 때의 확률의 곱의 합과 동일하게 나온다.

sample = np.random.choice(x_set, int(1e6), p=prob)
np.mean(sample)
```

Out[14]: 4.334756

확률변수의 분산 및 공분산의 '정의'도 마찬가지로 무제한으로 시행해서 얻은 실현값의 데이터로 적용한다.

In [19]:
```
# 확률변수의 기댓값을 구하는 함수를 E(x)로 정의
# E는 expect의 e를 따왔다.
# lambda는 이름이 없는 익명함수, 확률변수를 변환해주는 역할을 수행

def E(X, g=lambda x: x):
    x_set, f = X
    return np.sum([g(x_k) * f(x_k) for x_k in x_set])
```

In [20]:
```
# g 자리에 아무것도 들어가지 않는 경우에는, 그냥 기댓값을 구할 수 있게 된다.
E(X)
```

Out[20]: 4.333333333333333

변환된 확률변수, Y = 2X+3에 대해 expect value를 구해보자. 변환한 확률변수의 기댓값은 (2x+3) * f(x_k)의 총합으로 생각하면 된다. 확률변수 X의 expect value를 구하는 공식과 동일하다.

In [21]:
```
# 변환한 확률변수 Y의 기댓값을 구해보자.

E(X, g=lambda x: 2*x + 3)
```

Out[21]: 11.666666666666664

- 기댓값은 선형성을 가지고 있다. (linearity)

선형성(linearity)이란?

- 선형성은 중첩의 원리가 적용될 수 있다는 뜻이다.
- E(2X+3) = E(2X) + E(3) = 2E(X) + 3

In [22]:
```
2 * E(X) + 3
```

Out[22]: 11.666666666666666

분산

- 분산은 우리가 원래 알고 있던 것처럼 편차 제곱의 기댓값이 된다.
  - 원래 각 데이터에서 평균을 뺀것의 제곱을 했던 것처럼,
  - 편차의 제곱에 각 확률이 곱해진 형태이다.
  - 분산은 V(X)라고 나타내고, 시그마 제곱(σ^2)라고 표현한다.
  - σ는 확률변수 X의 표준편차라고 한다.

In [23]:
```
mean = E(X)
np.sum([(x_k-mean)**2 * f(x_k) for x_k in x_set])
```

Out[23]: 2.2222222222222223

In [24]:
```
# 분산 구하는 함수 V 구현

def V(X, g=lambda x: x):
    x_set, f = X
    mean = E(X, g)
    return np.sum([(g(x_k)-mean)**2 * f(x_k) for x_k in x_set])
```

In [25]:
```
V(X)
```

Out[25]: 2.2222222222222223

변환한 확률변수의 분산 구하는 방법

- V(2X+3) = 2^2 * V(X)
- 3이 무시되는 이유는?
  - 분산은 편차를 기준으로 데이터를 모으는 형태이므로, +3을 한다고 해서 값들이 양쪽으로 벌어지거나 하지 않는다.

In [26]:
```
V(X, lambda x: 2*x + 3)
```

Out[26]: 8.88888888888889

In [27]:
```
2**2 * V(X)
```

Out[27]: 8.88888888888889

2차원 이산형 확률분포

2차원 확률변수는 1차원 확률분포 2개를 동시에 다룬다(X, Y)

취할 수 있는 값이 2개가 된다. X,Y 그러므로 확률변수 X,Y 2개를 같이 적용한 확률을 구해야 한다.

확률변수 X가 xi를, Y가 yi를 취하는 확률은 P(X=xi, Y=yi) = pij라고 표현할 수 있다.

확률변수 (X,Y)의 움직임을 동시에 고려한 분포가 결합확률분포, joint probability distribution이라고 한다.

- 이 책에서는 주사위 A,B에 대해 하나의 확률 변수 X는 주사위 1개만, Y는 주사위 A의 값과 B의 값을 더한 확률변수로 문제 풀이

130p 내용

2차원 이산형 확률분포의 정의

In [28]:
```
# X, Y가 취할 수 있는 기댓값을 정의
# X는 주사위 A, B을 더한 값이므로, 2~ 12까지
# Y는 주사위 A, 하나이므로 1~6

x_set = np.arange(2, 13)  # 2~12까지
y_set = np.arange(1, 7)   # 1~6까지
```

In [29]:
```
# 결합확률함수 정의
# x-y는 무조건 1~6 사이이다.
# x,y가 각각 1,1이 나올 때가 최솟값, x, y가 12가 나올 때가 최댓값
```

```
def f_XY(x, y):
    if 1 <= y <=6 and 1 <= x - y <= 6:
        return y * (x-y) / 441
    else:
        return 0
```

In [31]:
```
XY = [x_set, y_set, f_XY]
XY
```

Out[31]:
```
[array([ 2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9, 10, 11, 12]),
 array([1, 2, 3, 4, 5, 6]),
 <function __main__.f_XY(x, y)>]
```

In [32]:
```
# matplot 라이브러리 사용

prob = np.array([[f_XY(x_i, y_j) for y_j in y_set]
                 for x_i in x_set])
prob
```

Out[32]:
```
array([[0.002, 0.   , 0.   , 0.   , 0.   , 0.   ],
       [0.005, 0.005, 0.   , 0.   , 0.   , 0.   ],
       [0.007, 0.009, 0.007, 0.   , 0.   , 0.   ],
       [0.009, 0.014, 0.014, 0.009, 0.   , 0.   ],
       [0.011, 0.018, 0.02 , 0.018, 0.011, 0.   ],
       [0.014, 0.023, 0.027, 0.027, 0.023, 0.014],
       [0.   , 0.027, 0.034, 0.036, 0.034, 0.027],
       [0.   , 0.   , 0.041, 0.045, 0.045, 0.041],
       [0.   , 0.   , 0.   , 0.054, 0.057, 0.054],
       [0.   , 0.   , 0.   , 0.   , 0.068, 0.068],
       [0.   , 0.   , 0.   , 0.   , 0.   , 0.082]])
```

In [37]:
```
prob.shape[1] + 0.5
```

Out[37]: 6.500

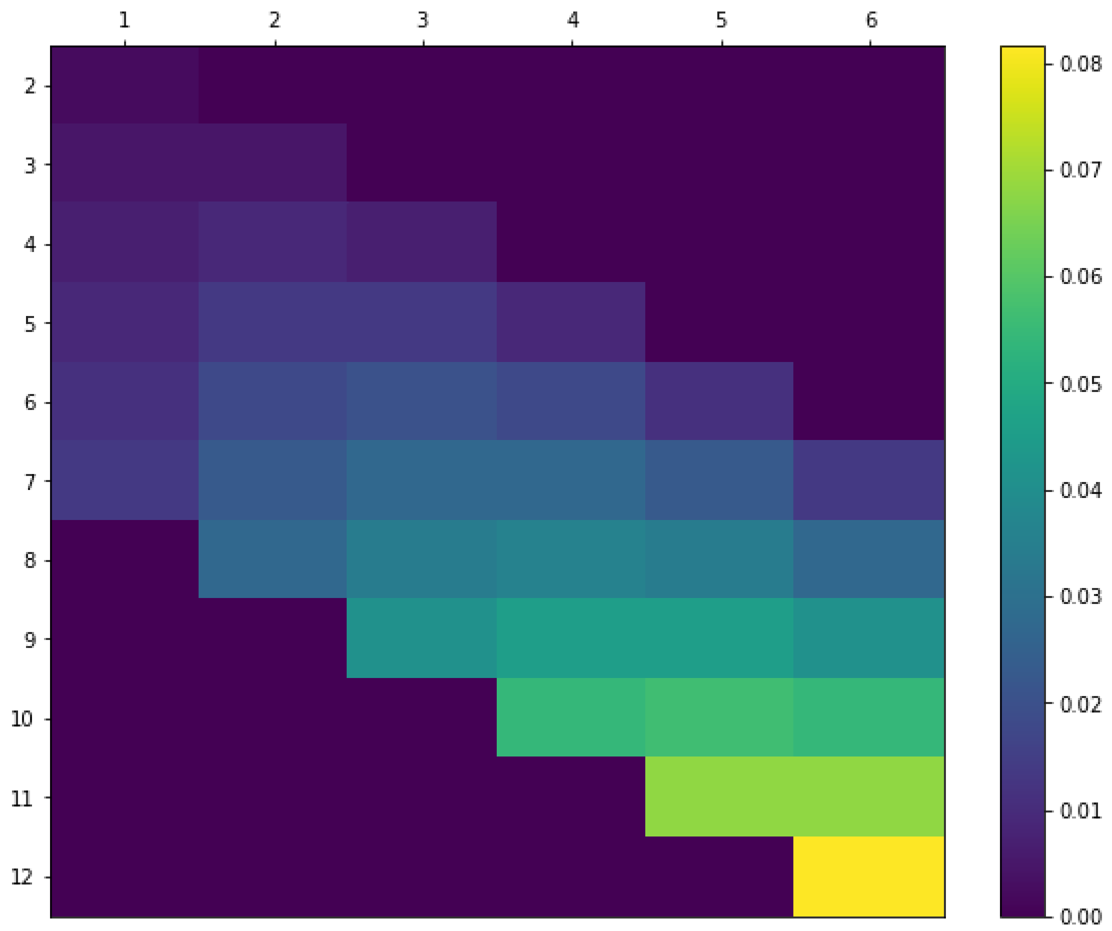
In [41]:
```
np.arange(prob.shape[1])
```

Out[41]: array([0, 1, 2, 3, 4, 5])

In [38]:
```
prob.shape[0] + 0.5
```

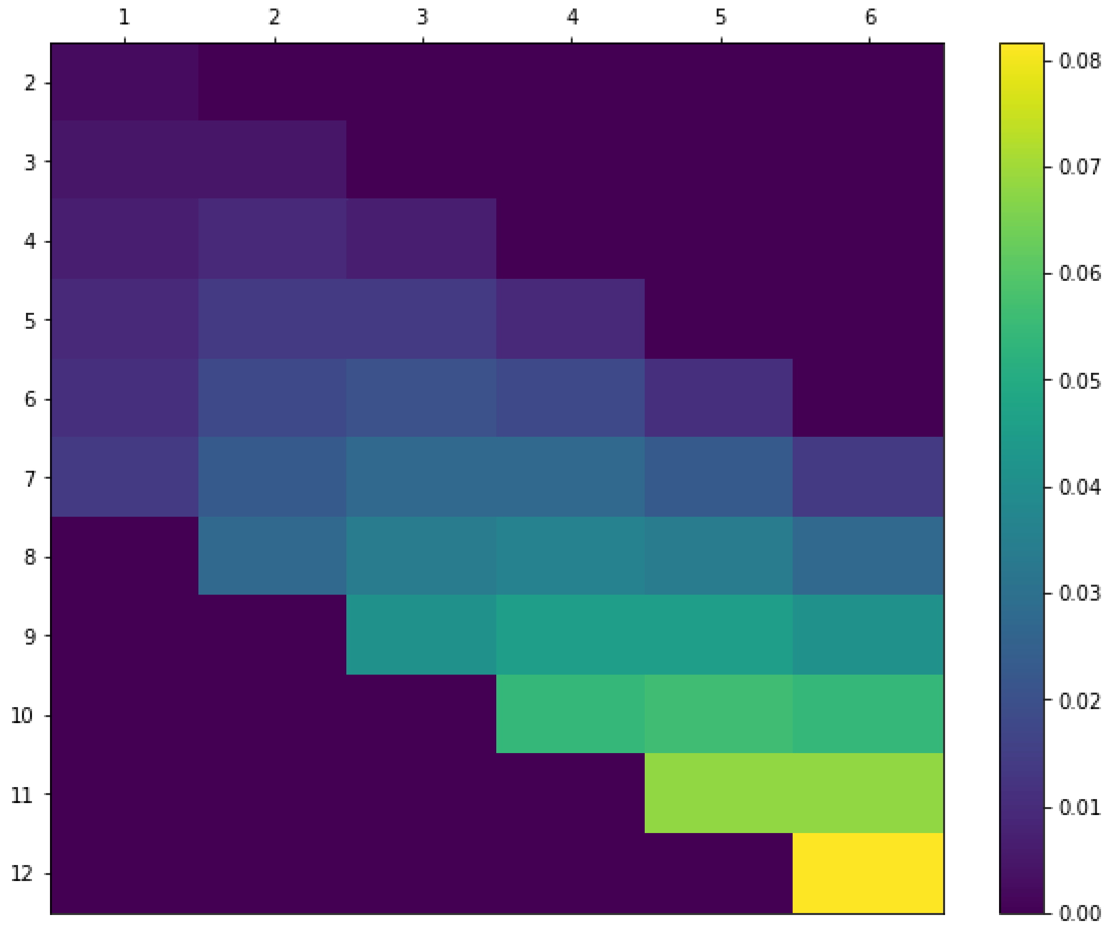
Out[38]: 11.500

In [43]:
```
fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
ax = fig.add_subplot(111)

c = ax.pcolor(prob)  # 히트맵, 이렇게 색깔로 표시되게 만드는 pcolor

ax.set_xticks(np.arange(prob.shape[1]) + 0.5, minor=False)
ax.set_yticks(np.arange(prob.shape[0]) + 0.5, minor=False)
ax.set_xticklabels(np.arange(1, 7), minor=False)
ax.set_yticklabels(np.arange(2, 13), minor=False)

# y축을 내림차순의 숫자가 되게 하여, 위 아래를 역전시킨다
ax.invert_yaxis()

# x축의 눈금을 그래프 위쪽에 표시
ax.xaxis.tick_top()

fig.colorbar(c, ax=ax)  # 옆에 바로 색깔에 따른 값 표시

plt.show()
```



In [45]:

```
fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
ax = fig.add_subplot(111)

c = ax.pcolor(prob)  # 히트맵, 이렇게 색깔로 표시되게 만드는 pcolor

ax.set_xticks(np.arange(prob.shape[1]) + 0.5, minor=False)
ax.set_yticks(np.arange(prob.shape[0]) + 0.5, minor=False)
ax.set_xticklabels(np.arange(1, 7), minor=False)
ax.set_yticklabels(np.arange(2, 13), minor=False)

# y축을 내림차순의 숫자가 되게 하여, 위 아래를 역전시킨다
ax.invert_yaxis()

# x축의 눈금을 그래프 위쪽에 표시
ax.xaxis.tick_top()

fig.colorbar(c, ax=ax)  # 옆에 바로 색깔에 따른 값 표시

plt.show()
```



In [28]:
```
# 모든 확률이 0 이상인지 check

np.all(prob >= 0)
```

Out[28]: True

In [29]:
```
# 모든 확률의 합 = 1

np.sum(prob)
```

Out[29]: 1.0

- 주변확률분포
  - 확률변수 (X,Y)는 결합확률분포에 의해 동시에 정의
  - but, 2개의 확률변수 말고, 하나의 확률변수 X에 대한 분포를 알고 싶을 때에는,
  - 각각의 x 일 때 Y가 취할 수 있는 모든 값을 대입하고 더하면 된다.

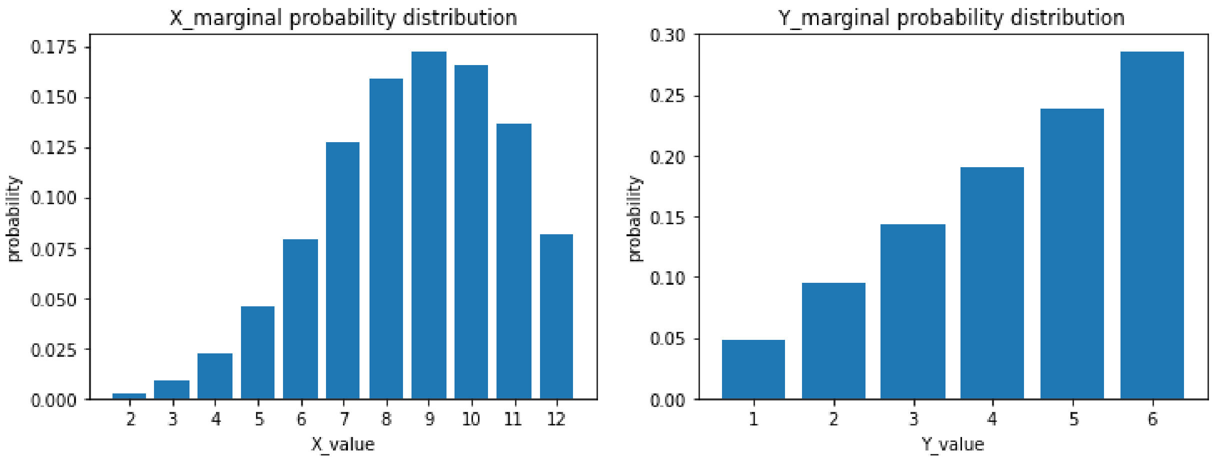
In [55]:
```
# Y가 취할 수 있는 값 모두를 대입하고 모두 더한 것이 확률변수 X에 대한 확률함수

def f_X(x):
    return np.sum([f_XY(x, y_k) for y_k in y_set])
```

In [56]:
```
# 확률변수 Y에 대한 확률함수는 X가 취할 수 있는 값 모두를 대입하고 더한 것
def f_Y(y):
    return np.sum([f_XY(x_k, y) for x_k in x_set])
```

In [57]:
```
X = [x_set, f_X]
Y = [y_set, f_Y]
```

In [63]:
```
# matplotlib로 구현, 각 확률변수 X, Y에 대한 확률분포!
```

```
prob_x = np.array([f_X(x_k) for x_k in x_set])
prob_y = np.array([f_Y(y_k) for y_k in y_set])

fig = plt.figure(figsize=(12, 4))
ax1 = fig.add_subplot(121)     #(1,2,1)
ax2 = fig.add_subplot(122)     #(1,2,2)

ax1.bar(x_set, prob_x)
ax1.set_title('X_marginal probability distribution')
ax1.set_xlabel('X_value')
ax1.set_ylabel('probability')
ax1.set_xticks(x_set)  # x_set 다 표시되게 설정

ax2.bar(y_set, prob_y)
ax2.set_title('Y_marginal probability distribution')
ax2.set_xlabel('Y_value')
ax2.set_ylabel('probability')
ax2.set_xticks(y_set)

plt.show()
```



In [59]:
```
prob_x
```

Out[59]:
```
array([0.002, 0.009, 0.023, 0.045, 0.079, 0.127, 0.159, 0.172, 0.166,
       0.136, 0.082])
```

In [60]:
```
prob_y
```

Out[60]:
```
array([0.048, 0.095, 0.143, 0.19 , 0.238, 0.286])
```

2차원 이산형 확률분포의 지표

2차원 이산형 확률변수에 관해서는 공분산, 상관계수라는 지표를 정의할 수 있다. 앞의 3장처럼 변수 2개에 대해 분산을 구하는 것과 동일.

X의 기댓값, expect value는 각각의 x일 때의 확률을 곱해서 모두 더한 값이다.

In [46]:
```
# X의 기댓값 구하기

np.sum([x_i * f_XY(x_i, y_j) for x_i in x_set for y_j in y_set])
```

Out[46]:
```
8.666666666666666
```

In [65]:
```
# y의 기댓값 구하기
np.sum([y_j * f_XY(x_i, y_j) for x_i in x_set for y_j in y_set])
```

Out[65]:
```
4.333333333333333
```

In [66]:
```
def E(XY, g):
    x_set, y_set, f_XY = XY
    return np.sum([g(x_i, y_j) * f_XY(x_i, y_j)
                   for x_i in x_set for y_j in y_set])
```

In [48]:
```
# X의 기댓값 구하기
# x,y 중에 x만을 넣는다.
mean_X = E(XY, lambda x, y: x)
mean_X
```

Out[48]: 8.666666666666666

In [38]:
```
# Y의 기댓값 구하기
# x,y 중에 y만을 넣는다.
mean_Y = E(XY, lambda x, y: y)
mean_Y
```

Out[38]: 4.333333333333333

- 기댓값에는 선형성이 존재!

In [39]:
```
a, b = 2, 3
```

In [40]:
```
# 2x+3y로 놓고 풀기
E(XY, lambda x, y: a*x + b*y)
```

Out[40]: 30.333333333333332

E(2X+3Y) = 2E(X) + 3E(Y)

In [41]:
```
a * mean_X + b * mean_Y
```

Out[41]: 30.333333333333332

- 분산 구하기!

In [ ]:

In [42]:
```
np.sum([(x_i-mean_X)**2 * f_XY(x_i, y_j)
       for x_i in x_set for y_j in y_set])
```

Out[42]: 4.444444444444444

In [43]:
```
def V(XY, g):
    x_set, y_set, f_XY = XY
    mean = E(XY, g)
    return np.sum([(g(x_i, y_j)-mean)**2 * f_XY(x_i, y_j)
                   for x_i in x_set for y_j in y_set])
```

In [44]:
```
var_X = V(XY, g=lambda x, y: x)
var_X
```

Out[44]: 4.444444444444444

In [45]:
```
var_Y = V(XY, g=lambda x, y: y)
var_Y
```

Out[45]: 2.2222222222222223

In [46]:
```
def Cov(XY):
    x_set, y_set, f_XY = XY
    mean_X = E(XY, lambda x, y: x)
    mean_Y = E(XY, lambda x, y: y)
    return np.sum([(x_i-mean_X) * (y_j-mean_Y) * f_XY(x_i, y_j)
                   for x_i in x_set for y_j in y_set])
```

In [47]:
```
cov_xy = Cov(XY)
cov_xy
```

Out[47]: 2.222222222222222

In [48]:
```
V(XY, lambda x, y: a*x + b*y)
```

Out[48]: 64.44444444444444

In [49]:
```
a**2 * var_X + b**2 * var_Y + 2*a*b * cov_xy
```

Out[49]: 64.44444444444443

In [50]:
```
cov_xy / np.sqrt(var_X * var_Y)
```

Out[50]: 0.7071067811865474

In [ ]: