

§8.1 向量及其线性运算

1、已知向量 \overrightarrow{OA} 的模为 8，且它与 ox 轴和 oy 轴的夹角均为 $\frac{\pi}{3}$ ，求 \overrightarrow{OA} 的坐标表示式。

2、已知三点 $A(1,0,4)$ 、 $B(3,2,2)$ 、 $C(-2,-1,0)$ ， D 为 AB 的中点，求与 \overrightarrow{CD} 平行的单位向量。

3、已知 $A(1,2,0)$ 、 $B(2,-1,3)$ ，求：

- (1) 向量 \overrightarrow{AB} 在三个坐标轴上的投影；(2) 向量 \overrightarrow{AB} 的模；
- (3) 向量 \overrightarrow{AB} 的方向余弦；(4) 与向量 \overrightarrow{AB} 方向一致的单位向量。

4、设 $\bar{a} = (4,5,-3)$ ， $\bar{b} = (1,3,6)$ ，问实数 λ ， μ 满足什么条件时，可使 $\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$ 与 z 轴垂直？

§8.2 数量积 向量积 混合积

1、向量 $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ 与 $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ 的位置关系是 ()

- A、平行 B、垂直 C、相交 D、以上都不是

2、设三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 满足关系式 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, 则 $\vec{a} \times \vec{b} =$ ()

- A、 $\vec{c} \times \vec{b}$ B、 $\vec{b} \times \vec{c}$ C、 $\vec{a} \times \vec{c}$ D、 $\vec{b} \times \vec{a}$

3、已知 $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j} + 3\vec{k}$, 则 $\triangle OAB$ 的面积为 ()

- A、19 B、 $\frac{1}{2}\sqrt{19}$ C、 $\sqrt{19}$ D、29

4、非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充分必要条件是 ()

- A、 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ B、 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = 0$ C、 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ D、 $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c}) = 0$

5、已知 $\vec{a} = (1, 1, -4)$, $\vec{b} = (2, 0, -2)$, 求: (1) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}$; (2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

6、已知 $\vec{a} = (1, 1, -4)$, $\vec{b} = (2, 0, -2)$, 求 $\text{Prj}_{\vec{a}} \vec{b}$ 。

7、已知 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \hat{\vec{b}}) = 60^\circ$, 求 $\left| \vec{a} - \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b}) \right|$ 。

§8.3 曲面及其方程

1、方程 $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 表示的空间曲面是 _____

2、方程 $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ 表示的空间曲面是 _____

3、建立以点 $(1, 3, -2)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程。

4、将 xoy 坐标面上的双曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程。

§8.4 空间曲线及其方程

1、求曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ 关于 xoy 坐标面的投影柱面方程及此曲线在 xoy 坐标面的投影方程。

2、求母线平行于 y 轴，且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$ 的投影柱面方程。

§8.5 平面及其方程

1、平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角是 ()

- A、 π B、 $\frac{\pi}{2}$ C、 $\frac{\pi}{3}$ D、 2π

2、两平面 $2x - y - z = 0$ 和 $x + y + z = 0$ 的位置是 ()

- A、平行 B、相交不垂直 C、垂直 D、共面

3、求过点 $A(5,4,3)$ 且在各坐标轴上的截距相等的平面方程。

4、求平行于 xoz 面且经过点 $(2, -5, 3)$ 的平面方程。

5、求通过 z 轴和点 $(-3, 1, -2)$ 的平面方程。

§8.6 空间直线及其方程

1、求过点 $(1, 0, -2)$ 且与平面 $3x + 4y - z + 6 = 0$ 平行，与直线 $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}$ 垂直的直线方程。

2、求过点 $(3, 2, -1)$ 且与平面 $x - 4z - 3 = 0$ 及 $2x - y - 5z - 1 = 0$ 平行的直线方程。

3、求通过平面 $x + y - z - 2 = 0$ 与 $3x + y - z - 5 = 0$ 的交线，且过点 $(1, 8, 2)$ 的平面方程。

4、求点 $M(1, 2, -1)$ 到直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ 的距离。

5、求点 $M(1, 2, 3)$ 到直线 $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$ 的距离。

6、求点 $N(-1, 2, 0)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影。

7、确定 λ ，使直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$ 垂直于平面 $\pi_1: 3x + 6y + 3z + 25 = 0$ ，并求该直线在平面 $\pi_2: x - y + z - 2 = 0$ 上的投影直线的方程。

本章综合测验

一、选择题

- 1、若非零向量 \vec{a} 和 \vec{b} 满足 $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$, 则 ()
A、 \vec{a} 和 \vec{b} 方向相同 B、 \vec{a} 和 \vec{b} 互相垂直 C、 \vec{a} 和 \vec{b} 方向相反 D、 \vec{a} 和 \vec{b} 平行
- 2、方程 $y^2 + z^2 - 24x + 8 = 0$ 表示 ()
A、双曲柱面 B、椭圆柱面 C、锥面 D、旋转抛物面
- 3、方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ 表示的曲面是 ()
A、柱面 B、球面 C、锥面 D、旋转抛物面
- 4、平面 $x = 2z$ ()
A、平行 xOz 坐标面 B、平行 y 轴 C、垂直 y 轴 D、通过 y 轴
- 5、曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 与 $x + y = 1$ 的交线在 xoy 面上的投影为 ()
A、椭圆柱面 B、椭圆曲线 C、两平行平面 D、线段
- 6、直线 L: $\frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3}$ 与平面 $\pi: 4x - 2y - 2z = 3$ 的关系是 ()
A、平行 B、垂直相交 C、L 在 π 上 D、相交但不垂直
- 7、直线 L: $\frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{7}$ 和平面 $3x - 2y + 7z = 8$ 的关系是 ()
A、平行 B、垂直相交 C、L 在 π 上 D、相交但不垂直
- 8、设直线 $\frac{x}{0} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-3}$, 则该直线必定 ()
A、过原点且垂直于 x 轴 B、过原点且平行于 x 轴
C、不过原点, 但垂直于 x 轴 D、不过原点, 且不平行于 x 轴

二、填空题

- 9、向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 它在坐标轴上的投影依次是 4、-4、7, 这个向量的起点 A 的坐标为 _____
- 10、将 xoz 坐标面上的曲线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转所生成的旋转曲面方程为 _____
- 11、过点 $(2, -5, 3)$ 且平行于 xoz 面的平面方程为 _____
- 12、过点 $(2, 4, -1)$ 且平行于 $\vec{S} = (1, 3, 4)$ 的直线方程为 _____
- 13、通过点 $M(1, 2, 3)$ 且与直线 $L: x = 2 + 3t, y = 2t, z = -1 + t$ 垂直的平面方程为 _____

三、计算题

14、已知 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$, $M_2(3, 0, 2)$, 求向量 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 的模、方向余弦和方向角。

15、设向量 \vec{r} 的模是 4, 它与轴 u 的夹角是 60° , 求 \vec{r} 在轴 u 上的投影。

16、求向量 $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ 与 $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j}$ 的夹角余弦。.

17、设 $\vec{a} = (x, y, z)$, $\vec{b} = (2, 0, 5)$, $\vec{c} = (3, 0, 0)$, 问当 x, y, z 取何值时, \vec{a} 与 \vec{b} 平行; 取何值时 \vec{a} 与 \vec{c} 平行。

18、已知 $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(3, 3, 1)$, $M_3(3, 1, 3)$, 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 、 $\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量。

19、化直线方程 $\begin{cases} x - y + z + 5 = 0 \\ 5x - 8y + 4z + 36 = 0 \end{cases}$ 为对称式方程和参数方程。

20、求直线 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ 在平面 $\Pi: x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 L_0 的方程。

21、试证直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{-2}$ 在平面 $x + y + z + 1 = 0$ 上。