



ExBook · 刷题本

高等数学（下） 刷题集

A4 标准版

“不处对象 喵喵喵”

目录

第 1 章 向量代数与空间解析几何	3
1.1 向量及其线性运算	3
1.2 数量积向量积混合积	4
1.3 曲面及其方程	5
1.4 空间曲线及其方程	6
1.5 平面及其方程	7
1.6 空间直线及其方程	8
1.7 本章综合测验	10
第 2 章 多元函数微分法及其应用	13
2.1 多元函数的基本概念	13
2.2 偏导数	14
2.3 全微分	15
2.4 多元复合函数的求导法则	16
2.5 隐函数的求导公式	17
2.6 多元函数微分学的几何应用	18
2.7 方向导数与梯度	19
2.8 多元函数的极值及其求法	20
2.9 本章综合测验	22
第 3 章 重积分及其应用	25
3.1 二重积分的概念与性质	25
3.2 二重积分的计算方法	26
3.3 三重积分	29
3.4 重积分的应用	31
3.5 本章综合测验	32
第 4 章 曲线积分与曲面积分	36
4.1 对弧长的曲线积分	36
4.2 对坐标的曲线积分	37
4.3 格林公式及其应用	38
4.4 对面积的曲面积分	40
4.5 对坐标的曲面积分	42
4.6 高斯公式通量与散度	43

4.7 斯托克斯公式环流量与旋度	44
4.8 本章综合测验	45

第 1 章 向量代数与空间解析几何

1.1 向量及其线性运算

➤ 此部分答案见原书 P1

1. 已知向量 \overrightarrow{OA} 的模为 8, 且它与 ox 轴和 oy 轴的夹角均为 $\frac{\pi}{3}$, 求 \overrightarrow{OA} 的坐标表示式。
2. 已知三点 $A(1, 0, 4)$ 、 $B(3, 2, 2)$ 、 $C(-2, -1, 0)$, D 为 AB 的中点, 求与 \overrightarrow{CD} 平行的单位向量。
3. 已知 $A(1, 2, 0)$ 、 $B(2, -1, 3)$, 求:
 - (1) 向量 \overrightarrow{AB} 在三个坐标轴上的投影;
 - (2) 向量 \overrightarrow{AB} 的模;
 - (3) 向量 \overrightarrow{AB} 的方向余弦;
 - (4) 与向量 \overrightarrow{AB} 方向一致的单位向量。
4. 设 $\vec{a} = (4, 5, -3)$, $\vec{b} = (1, 3, 6)$, 问实数 λ, μ 满足什么条件时, 可使 $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ 与 z 轴垂直?

1.2 数量积向量积混合积

1. 向量 $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ 与 $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ 的位置关系是 ()。

A. 平行 B. 垂直 C. 相交 D. 以上都不是

2. 设三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足关系式 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, 则 $\vec{a} \times \vec{b} =$ ()。

A. $\vec{c} \times \vec{b}$ B. $\vec{b} \times \vec{c}$ C. $\vec{a} \times \vec{c}$ D. $\vec{b} \times \vec{a}$

3. 已知 $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j} + 3\vec{k}$, 则 $\triangle OAB$ 的面积为 ()。

A. 19 B. $\frac{1}{2}\sqrt{19}$ C. $\sqrt{19}$ D. 29

4. 非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充分必要条件是 ()。

A. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ B. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = 0$
 C. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ D. $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c}) = 0$

5. 已知 $\vec{a} = (1, 1, -4)$, $\vec{b} = (2, 0, -2)$, 求:
 - (1) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$;
 - (2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

6. 已知 $\vec{a} = (1, 1, -4)$, $\vec{b} = (2, 0, -2)$, 求 $\text{Prj}_{\vec{a}} \vec{b}$ 。

7. 已知 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, 求 $\left| \vec{a} - \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b}) \right|$ 。

1.3 曲面及其方程

1. 方程 $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 表示的空间曲面是_____。
2. 方程 $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ 表示的空间曲面是_____。
3. 建立以点 $(1, 3, -2)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程。
4. 将 xoy 坐标面上的双曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程。

1.4 空间曲线及其方程

1. 求曲线 $C : \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ 关于 xoy 坐标面的投影柱面方程及此曲线在 xoy 坐标面的投影方程。
2. 求母线平行于 y 轴，且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$ 的投影柱面方程。

1.5 平面及其方程

1. 平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角是 ()。
A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. 2π
2. 两平面 $2x - y - z = 0$ 和 $x + y + z = 0$ 的位置是 ()。
A. 平行 B. 相交不垂直 C. 垂直 D. 共面
3. 求过点 $A(5, 4, 3)$ 且在各坐标轴上的截距相等的平面方程。
4. 求平行于 xoz 面且经过点 $(2, -5, 3)$ 的平面方程。
5. 求通过 z 轴和点 $(-3, 1, -2)$ 的平面方程。

1.6 空间直线及其方程

1. 求过点 $(1, 0, -2)$ 且与平面 $3x + 4y - z + 6 = 0$ 平行，与直线 $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}$ 垂直的直线方程。
2. 求过点 $(3, 2, -1)$ 且与平面 $x - 4z - 3 = 0$ 及 $2x - y - 5z - 1 = 0$ 平行的直线方程。
3. 求通过平面 $x + y - z - 2 = 0$ 与 $3x + y - z - 5 = 0$ 的交线，且过点 $(1, 8, 2)$ 的平面方程。
4. 求点 $M(1, 2, -1)$ 到直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ 的距离。

5. 求点 $M(1, 2, 3)$ 到直线 $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$ 的距离。

6. 求点 $N(-1, 2, 0)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影。

7. 确定 λ , 使直线

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$$

垂直于平面 $\pi_1 : 3x + 6y + 3z + 25 = 0$, 并求该直线在平面 $\pi_2 : x - y + z - 2 = 0$ 上的投影直线的方程。

1.7 本章综合测验

1. 若非零向量 \vec{a} 和 \vec{b} 满足 $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$, 则 ()。
 - A. 方向相同
 - B. 互相垂直
 - C. 方向相反
 - D. 平行

2. 方程 $y^2 + z^2 - 24x + 8 = 0$ 表示 ()。
 - A. 双曲柱面
 - B. 椭圆柱面
 - C. 锥面
 - D. 旋转抛物面

3. 方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ 表示的曲面是 ()。
 - A. 柱面
 - B. 球面
 - C. 锥面
 - D. 旋转抛物面

4. 平面 $x = 2z$ ()。
 - A. 平行 xOz 坐标面
 - B. 平行 y 轴
 - C. 垂直 y 轴
 - D. 通过 y 轴

5. 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 与 $x + y = 1$ 的交线在 xoy 面上的投影为 ()。
 - A. 椭圆柱面
 - B. 椭圆曲线
 - C. 两平行平面
 - D. 线段

6. 直线 $L: \frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3}$ 与平面 $\pi: 4x - 2y - 2z = 3$ 的关系是 ()。
 - A. 平行
 - B. 垂直相交
 - C. L 在 π 上
 - D. 相交但不垂直

7. 直线 $L: \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{7}$ 和平面 $3x - 2y + 7z = 8$ 的关系是 ()。
 - A. 平行
 - B. 垂直相交
 - C. L 在 π 上
 - D. 相交但不垂直

8. 设直线 $\frac{x}{0} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-3}$, 则该直线必定 ()。
 - A. 过原点且垂直于 x 轴
 - B. 过原点且平行于 x 轴
 - C. 不过原点, 但垂直于 x 轴
 - D. 不过原点, 且不平行于 x 轴

9. 向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 它在坐标轴上的投影依次是 4、-4、7, 这个向量的起点 A 的坐标为_____。

10. 将 xoz 坐标面上的曲线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转所生成的旋转曲面方程为_____。

11. 过点 $(2, -5, 3)$ 且平行于 xoz 面的平面方程为_____。
12. 过点 $(2, 4, -1)$ 且平行于 $S = (1, 3, 4)$ 的直线方程为_____。
13. 通过点 $M(1, 2, 3)$ 且与直线 $L: x = 2 + 3t, y = 2t, z = -1 + t$ 垂直的平面方程为
_____。
14. 已知 $M_1(4, \sqrt{2}, 1), M_2(3, 0, 2)$, 求向量 M_1M_2 的模、方向余弦和方向角。
15. 设向量 \vec{r} 的模是 4, 它与轴 \vec{u} 的夹角是 60° , 求 \vec{r} 在轴 \vec{u} 上的投影。
16. 求向量 $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ 与 $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j}$ 的夹角余弦。
17. 设 $\vec{a} = (x, y, z), \vec{b} = (2, 0, 5), \vec{c} = (3, 0, 0)$, 问当 x, y, z 取何值时, \vec{a} 与 \vec{b} 平行; 取何值时 \vec{a} 与 \vec{c} 平行。

18. 已知 $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(3, 3, 1)$, $M_3(3, 1, 3)$, 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 、 $\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量。

19. 化直线方程 $\begin{cases} x - y + z + 5 = 0 \\ 5x - 8y + 4z + 36 = 0 \end{cases}$ 为对称式方程和参数方程。

20. 求直线 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ 在平面 $\Pi: x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 L_0 的方程。

21. 试证直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{-2}$ 在平面 $x + y + z + 1 = 0$ 上。

第 2 章 多元函数微分法及其应用

2.1 多元函数的基本概念

1. 函数 $z = \ln(-x - y)$ 的定义域是 ()。

A. $\{(x, y) \mid x < 0, y < 0\}$

B. $\{(x, y) \mid x + y \leq 0\}$

C. $\{(x, y) \mid x + y < 0\}$

D. 在 xoy 平面上处处无定义

2. 计算 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$ 。

3. 计算 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin y$ 。

4. 试证 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 + xy)}{x + \sin y}$ 的极限不存在。

2.2 偏导数

1. 设 $z = x + (y - 2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$, 那么 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = (\quad)$ 。
- A. 0 B. 1 C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$
2. 设 $z = (1+x)^{x+y}$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,1)} = (\quad)$ 。
- A. $1 + \ln 2$ B. $4(1 + \ln 2)$ C. 4 D. 8
3. 函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 (\quad)。
- A. 连续且可导 B. 不连续且不可导
 C. 连续但不可导 D. 可导但不连续
4. 证明: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处不连续, 但一阶偏导数存在。
5. 设 $u = (x^2 + yz^3)^3$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ 。
6. 设 $z = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

2.3 全微分

1. 函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处结论正确的是（ ）。
A. 连续但不可微 B. 可微
C. 可导但不可微 D. 既不连续又不可导
2. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处偏导数存在、连续、可微分三者的关系是（ ）。
A. 可微必连续 B. 偏导数存在必可微
C. 连续必可微 D. 偏导数存在必连续
3. 设 $z = e^{\frac{y}{x}} + \sin(xy)$, 计算 dz 。
4. 设 $z = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 计算 dz 。
5. 设 $z = x^y + y^x$, 求 dz 。

2.4 多元复合函数的求导法则

1. 设 $z = f(\sin x, e^{x+2y})$, 其中 f 具有一阶连续偏导数, 求 dz 。
2. 设 $z = f(2x - y) + g(x, xy)$, 其中 $f(t)$ 二阶可导, $g(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 。
3. 设 $z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

2.5 隐函数的求导公式

1. 设方程 $e^z = xyz$ 确定函数 $z = z(x, y)$, 利用两种方法计算 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 。
2. 设 $z = z(x, y)$ 由 $G(xyz, x+y+z) = 0$ 所确定, 其中 G 具有连续的一阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 。
3. 设 x, y, z, u, v 满足方程 $\begin{cases} x^2u + yz = v, \\ \sin x + 2zv = u, \end{cases}$, 取 x, y, z 为自变量, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 。

2.6 多元函数微分学的几何应用

1. 曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的法平面方程是 ()。
A. $2x + 3y - z = 6$ B. $x + 2y + 3z = 6$
C. $x + y - z = 2$ D. $x - 2y + 3z = 3$
2. 若曲线 $x = \cos t, y = 2 \sin t, z = t^2$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 点处的一个切向量与 oz 轴正方向成钝角，则此向量与 yz 平面夹角的正弦值为 ()。
A. $\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}$ B. $-\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}$ C. $\frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}$ D. $-\frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}$
3. 求曲线 $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 4, \end{cases}$ 在点 $(2, 1, 1)$ 处的法平面方程。
4. 求曲面 $x^3 + 3xy^2 + z^3 + 2x^2z + yz^2 - 35z - 59 = 0$ 在点 $(2, -1, -3)$ 处的切平面方程。
5. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上平行于平面 $x - y + 2z = 0$ 的切平面方程。

2.7 方向导数与梯度

- 求函数 $u = xyz$ 在点 $(5, 1, 2)$ 处沿从点 $(5, 1, 2)$ 到点 $(9, 4, 14)$ 方向的方向导数。
 - 函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 沿曲线 $x = 2t, y = t^3, z = \frac{6}{\pi} \sin(\pi t)$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切线方向的方向导数是_____ (切线方向沿 t 增加的方向)。
 - 函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1, 2, -2)$ 处的梯度为_____。
 - 求函数 $u = xyz - 2yz - 3$ 在点 $(1, 3, 1)$ 处的最大方向导数_____。

2.8 多元函数的极值及其求法

1. 函数 $f(x, y) = 2x^2 + ax + xy^2 + 2y$ 在点 $(1, -1)$ 处取得极值，则常数 $a = ()$ 。
A. 5 B. -5 C. 0 D. 无法确定
2. 求函数 $z = x^2 - 3xy + 3y^2 - 2x + 3y + 4$ 的极值。
3. 利用拉格朗日乘数法，求函数 $u = x - 2y + 3z$ 在条件 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 下的极大值或极小值。
4. 求函数 $z = xy$ 在闭区域 $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$ 上的最大值。
5. 在曲面 $\Sigma : 2x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 1 = 0$ 上求一点，使其到原点的距离最小。

6. 在 xoy 平面上求一点，使它到 $x = 0, y = 0$ 及 $x + 2y - 16 = 0$ 三平面的距离的平方和为最小。
7. 求内接于半径为 8 的球且有最大体积的长方体。

2.9 本章综合测验

一、选择题

1. 函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处结论正确的是 ()。
- A. 一阶偏导数存在 B. 连续
 C. 可微 D. 二重极限存在
2. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微分是它在该点偏导数存在的 ()。
- A. 必要而非充分条件 B. 充分而非必要条件
 C. 充分必要条件 D. 既非充分又非必要条件
3. 设 $z = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,1)} =$ ()。
- A. $-\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. 1
4. 曲面 $xyz = 8$ 上平行于平面 $x + y + z + 3 = 0$ 的切平面方程是 ()。
- A. $x + y + z = 3$ B. $x + y + z = 1$ C. $x + y + z = 6$ D. $x + y + z = 0$
5. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 且 $f_x(0, 0) = 3, f_y(0, 0) = -1$, 则 ()。
- A. $dz|_{(0,0)} = 3dx - dy$
 B. 曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个法向量为 $(3, -1, 1)$
 C. 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个切向量为 $(1, 0, 3)$
 D. 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个切向量为 $(3, 0, 1)$
6. 曲线 $x = 2t, y = t^3, z = \frac{6}{\pi} \sin(\pi t)$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的法平面方程为 ()。
- A. $2x + y - 7 = 0$ B. $2x + 3y - 6z - 7 = 0$
 C. $2x - 3y + 6z - 7 = 0$ D. $2x + y + z + 7 = 0$
7. 曲面 $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 20$ 在点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xoy 面的夹角的余弦为 ()。
- A. $\frac{3}{\sqrt{34}}$ B. $-\frac{3}{\sqrt{34}}$ C. $-\sqrt{34}$ D. $\sqrt{34}$

8. 设函数 $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (\quad)$ 。
- A. 0 B. -1 C. 1 D. 2

二、填空题

1. 设 $u = \frac{\cos x^2}{y} + (xy)^{\frac{y}{x}}$, 则 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 设 $z = \ln(x^2 + y^2 + 1) + e^{xy}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ 则 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 函数 $u = xyz - 2yz - 3$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的梯度为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处沿从点 $(1, 2)$ 到点 $(2, 2 + \sqrt{3})$ 方向的方向导数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、计算题

1. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $xe^z - 3yz = 5$ 所确定, 求 dz 。

2. 已知方程 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ 确定了函数 $z = f(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 。

3. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z = \varphi(x - y, y - z)$ 所确定，其中 $\varphi(u, v)$ 有一阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 。
4. 求表面积为 9 而体积为最大的长方体的体积。
5. 利用拉格朗日乘数法，求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件 $x + 2y + 2z = 18, x > 0, y > 0, z > 0$ 下的最小值。

第3章 重积分及其应用

3.1 二重积分的概念与性质

1. 判断：二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 的几何意义是以 $z = f(x, y)$ 为曲顶、以 D 为底的曲顶柱体的体积（ ）。
A. $0 < I < \frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2} < I < 1$
C. $1 < I < 2$ D. $2 < I < 3$
2. 由二重积分的几何意义，求 $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} d\sigma$ ，其中 D 为 xoy 平面上的区域 $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ 。
3. 估计积分 $I = \iint_{|x|+|y|\leq 10} \frac{1}{100 + \cos^2 x + \sin^2 y} dx dy$ 的值，正确的是（ ）。
A. $\frac{1}{2} \leq I \leq 1.04$ B. $1.04 \leq I \leq 1.96$
C. $1.96 \leq I \leq 2$ D. $2 \leq I \leq 2.14$
4. 设 D 由 $x = 0, y = 0, x + y = \frac{1}{2}, x + y = 1$ 围成，确定以下积分大小的顺序：
$$I_1 = \iint_D [\ln(x+y)]^7 dx dy, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^7 dx dy, \quad I_3 = \iint_D [\sin(x+y)]^7 dx dy$$
5. 设 $f(x, y)$ 是有界闭区域 $D : x^2 + y^2 \leq a^2$ 上的连续函数，计算 $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \iint_D f(x, y) dx dy$ 。

3.2 二重积分的计算方法

1. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, $a > 0$, 则 $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = (\quad)$ 。
- A. $\int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx$ B. $\int_0^a dy \int_0^a f(x, y) dx$
 C. $\int_0^a dy \int_0^y f(x, y) dx$ D. $\int_0^a dy \int_a^y f(x, y) dx$
2. 二次积分 $I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx$ 换序正确的结果是 ()。
- A. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} f(x, y) dy$ B. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} f(x, y) dy$
 C. $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x, y) dy$ D. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x}}^1 f(x, y) dy$
3. 设域 $D : x^2 + y^2 \leq 4$, f 为域 D 上的连续函数, 则 $\iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) dxdy = (\quad)$ 。
- A. $2\pi \int_0^2 \rho f(\rho) d\rho$ B. $4\pi \int_0^2 \rho f(\rho) d\rho$
 C. $2\pi \int_0^2 f(\rho^2) d\rho$ D. $4\pi \int_0^r \rho f(\rho) d\rho$
4. 若区域 $D : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1$, 则 $\iint_D f(x, y) dxdy$ 化为极坐标累次积分为 ()。
- A. $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\cos\theta} F(\rho, \theta) d\rho$ B. $\int_{-\pi}^\pi d\theta \int_0^{2\cos\theta} F(\rho, \theta) d\rho$
 C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} F(\rho, \theta) d\rho$ D. $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} F(\rho, \theta) d\rho$
5. 设 D 由 $x = y$, $y^2 = 4x$ 所围成, 将 $\iint_D f(x, y) dxdy$ 化为先 y 后 x 的二次积分为_____。
6. 设 D 由 $x = y$, $y = 2$ 及 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 所围成, 将 $\iint_D f(x, y) dxdy$ 化为先 x 后 y 的二次积分为_____。
7. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 交换二次积分的次序: $\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx = _____$ 。

8. 计算 $I = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (1 + \sqrt[3]{xy}) \, d\sigma$ 。

9. 计算 $\iint_D \frac{x^2}{y^2} \, dx \, dy$, 其中 D 是由 $y = x, xy = 1, y = 2$ 围成的区域。

10. 交换积分次序 $\int_0^1 dy \int_{1-y}^{1+y^2} f(x, y) \, dx$ 。

11. 将 $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ 化为极坐标下的二次积分, 其中 $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$

12. 计算 $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$, 其中 $D : x^2 + y^2 \leq Ry$ 。

13. 计算 $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 。

14. 计算 $\int_0^\pi dx \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy$ 。

15. 计算 $\int_0^1 f(x) dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ 。

16. 设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(u, v) dudv$, 其中 D 是由 $y = 0, y = x^2, x = 1$ 所围成的区域, 求 $f(x, y)$ 。

3.3 三重积分

1. 对于 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$, 其中 Ω 是 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 与 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 围成的区域:
 - (1) 化为直角坐标系、柱面坐标系及球面坐标系下的三次积分;
 - (2) 若 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
选用一种积分次序计算此积分。
2. 用“先二后一”法与柱坐标计算 $I = \iiint_{\Omega} e^{|z|} dv$, 其中 Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 。
3. 计算 $\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 为 xoy 平面上曲线 $y = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x = 5$ 所围成的闭区域。
4. 在球坐标下计算 $I = \iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围。

5. 设 $f(u)$ 是可微函数, $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, 求 $F'(t)$ 。

3.4 重积分的应用

1. 求由 $z \leq 6 - x^2 - y^2$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$ 所围成的立体的体积。

2. 求由曲线 $\begin{cases} x^2 - 2z = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面围成的几何体介于平面 $z = 2$, $z = 8$ 之间

部分的体积。

3. 设有一物体，占有空间 $\Omega : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, 密度为 $\mu(x, y, z) = x + y + z$ ，求该物体的质量。

4. 已知均匀薄片 D (面密度为常数 ρ) 由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = 1$ 所围成，求：

(1) 薄片的形心坐标；

(2) 薄片对于直线 $y = -1$ 的转动惯量。

3.5 本章综合测验

一、选择题

1. 比较 $I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$ 的大小, 其中 $D : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, 则 ()。
- A. $I_1 = I_2$ B. $I_1 > I_2$ C. $I_1 < I_2$ D. 无法比较
2. 设 $D : x^2 + y^2 \leq a^2$, 则 $\iint_D |xy| dx dy =$ ()。
- A. $\frac{a^4}{3}$ B. $\frac{a^4}{2}$ C. a^4 D.
3. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 交换二次积分 $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$ 的积分次序得 ()。
- A. $\int_1^e dy \int_0^{\ln x} f(x, y) dx$ B. $\int_{e^y}^e dy \int_0^1 f(x, y) dx$
 C. $\int_0^{\ln x} dy \int_1^e f(x, y) dx$ D. $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$
4. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 交换二次积分 $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{x^2} f(x, y) dy$ 的积分次序得 ()。
- A. $\int_0^1 dy \int_{2-y}^2 f(x, y) dx$
 B. $\int_0^1 dy \int_{2-y}^2 f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx$
 C. $\int_0^4 dy \int_{2-y}^{5y} f(x, y) dx$
 D. $\int_0^1 dy \int_2^{2-y} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_2^{5y} f(x, y) dx$
5. 设 Ω 是由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $z = 1$ 围成的立体, 则 $\iiint_{\Omega} dxdydz$ 等于 ()。
- A. $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz$ B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{\rho}^1 \rho dz$
 C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^1 \rho dz$ D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^{\rho} \rho dz$

6. 设 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 球面内部, 则 ()。

- A. I 等于 Ω 的体积 B. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^4 \sin \theta dr$
 C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 r^4 \sin \varphi dr$ D. $\int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^4 \sin \varphi dr$

7. 球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ 与柱体 $x^2 + y^2 \leq 2ax$ 的公共部分体积 $V =$ ()。

- A. $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} d\rho$ B. $8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho$
 C. $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho$ D. $8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho$

8. 由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$, $z \leq x^2 + y^2$ 所确定的立体体积是 ()。

- A. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{1-\rho^2}} dz$ B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\rho \rho d\rho \int_1^{1-\sqrt{1-\rho^2}} dz$
 C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{\rho^2} dz$ D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{1-\rho^2} dz$

二、填空题

1. D 由 $x = y$, $y = 2$ 及 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 所围成, 将 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 化为先 y 后 x 的二次积分
为_____。

2. 积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$ 的值等于_____。

3. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2) =$ _____。

4. $\Omega : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$, 则 $\iiint_{\Omega} z \ln(x^2 + y^2 + z^2) dv =$ _____。

5. 设 Ω 为单位球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, 计算 $\iiint_{\Omega} x^2 dv =$ _____。

三、计算题

1. 计算 $I = \iint_D \frac{x}{y^2} dx dy$, 其中 D 由 $x = 2, y = x, xy = 1$ 所围成。

2. 计算 $I = \iint_D |xy| d\sigma$, 其中 $D : x^2 + y^2 \leq a^2$ 。

3. 计算 $I = \iiint_{\Omega} dv$, 其中 Ω 由 $0 \leq z \leq x^2 + y^2, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ 所确定。

4. 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1$ 所围区域。

5. 计算 $I = \iint_D (x^2 - 2 \sin x + 3y + 4) d\sigma$, 其中 $D : x^2 + y^2 \leq R^2$ 。

6. 计算 $I = \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$, 其中 Ω 是由 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 所围成的闭域。
7. 交换积分次序 $I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$ (设 $f(x, y)$ 为连续函数)。
8. 求由曲面 $z = 2x^2 + y^2$ 与 $z = 6 - x^2 - 2y^2$ 所围立体的体积。

第4章 曲线积分与曲面积分

4.1 对弧长的曲线积分

1. 设 L 为 $y = x^3$ 与 $y = x$ 所围成区域的整个边界曲线, $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\oint_L f(x, y) \, ds = (\quad)$ 。
- A. $\int_0^1 f(x, x^3) \, dx + \int_0^1 f(x, x) \, dx$
B. $\int_0^1 f(x, x^3) \, dx + \sqrt{2} \int_0^1 f(x, x) \, dx$
C. $\int_{-1}^1 f(x, x^3) \sqrt{1+9x^4} \, dx + \int_1^{-1} f(x, x) \sqrt{2} \, dx$
D. $\int_{-1}^1 [f(x, x^3) \sqrt{1+9x^4} + \sqrt{2} f(x, x)] \, dx$
2. 设 L 为直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 在第一象限的部分, 则 $\int_L \ln(8 + 4x + 6y) \, ds = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长记为 a , 计算 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) \, ds$ 。
4. 计算 $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, 其中 L 分别为 $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, $y = x$ 及 $y = 0$ 围成的闭曲线。
5. 设有物质曲线 L , 极坐标下其方程为 $\rho = e^{2\theta}$, L 上任一点处的线密度 $\mu = \theta$, 求从 $\theta = 0$ 到 $\theta = 2\pi$ 的曲线段的质量。

4.2 对坐标的曲线积分

1. (1) 若 L 为抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(1, 1)$ 到点 $(2, 4)$ 的一段弧，则

$$\int_L (x + y) dx + (y - x) dy = \underline{\hspace{2cm}};$$

- (2) 若 L 为从点 $(1, 1)$ 到点 $(2, 4)$ 的直线段，则 $\int_L (x + y) dx + (y - x) dy = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

- (3) 若 L 为先沿直线从点 $(1, 1)$ 到点 $(1, 4)$ ，再沿直线从点 $(1, 4)$ 到点 $(2, 4)$ 的折线，则

$$\int_L (x + y) dx + (y - x) dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 设 L 为自 $t = 0$ 到 $t = \pi$ 的曲线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ ，则 $\int_L y dx - x dy + x dz = (\quad)$ 。
- A. $a^2\pi$ B. $2a^2\pi$ C. $-a^2\pi$ D. $\frac{a^2}{2}\pi$

4.3 格林公式及其应用

1. 设 L 为单位圆周上自点 $A(1, 0)$ 到点 $B(0, 1)$ 在第一象限的一段弧，则 $\int_L x \ln(1 + x^2 + y^2) dx + y \ln(1 + x^2 + y^2) dy = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 设 L 是三顶点分别为 $(0, 0)$ 、 $(3, 0)$ 、 $(3, 2)$ 的三角形正向边界，则 $\oint_L (2x - y + 4) dx + (5y + 3x - 6) dy = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 设 L 是圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) 负向一周，则曲线积分 $\oint_L (x^3 - x^2 y) dx + (xy^2 - y^3) dy = (\quad)$ 。
A. $-\frac{\pi a^4}{2}$ B. $-\pi a^4$ C. πa^4 D. $\frac{\pi a^3}{3}$
4. 计算 $\oint_L \frac{-y dx + x dy}{|x| + |y|}$ ，其中 L 为以点 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$ 为顶点的正方形 $ABCD$ 。
5. 计算 $\int_L (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy$ ， L 是圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 上由点 $O(0, 0)$ 到 $A(1, 1)$ 的一段弧。

6. 计算 $\oint_L \frac{y \, dx - x \, dy}{2(x^2 + y^2)}$, 其中 L 是圆周 $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, 方向为逆时针方向。

7. 求 a, b , 使得曲线积分 $\int_L (axy^2 - y^3) \, dx + (6x^2y - bxy^2) \, dy$ 在整个 xoy 面内与积分路径无关, 并计算 $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (axy^2 - y^3) \, dx + (6x^2y - bxy^2) \, dy$ 的值。

4.4 对面积的曲面积分

1. 设 Σ 为曲面 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 在 xoy 平面上方部分，则 $\iint_{\Sigma} dS = (\quad)$ 。
- A. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\rho \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho$
 B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho$
 C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho$
 D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho$
2. 设 Σ 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$, Σ_1 是 Σ 在第一卦限中的部分，则 ()。
- A. $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$
 B. $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$
 C. $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$
 D. $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$
3. 设 Σ 是曲面 $z = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$ 中介于 $z = 0$ 及 $z = 2$ 之间的部分曲面，求 $\iint_{\Sigma} \frac{z}{\sqrt{9+4x^2+4y^2}} dS$ 。
4. 计算 $\iint_{\Sigma} z^2 dS$, 其中 Σ 是 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 在第一卦限的部分。

5. 计算 $\iint_{x^2+y^2+z^2=1} (ax^2 + by^2 + cz^2) dS$ 。

6. 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dS$, 其中 $\Sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被 $z = 1, z = 2$ 截得部分。

4.5 对坐标的曲面积分

1. Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧, 求 $\iint_{\Sigma} x^2 \, dy \, dz = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. Σ 是平面 $x + y + z = 1$ 被坐标平面所截得的三角形的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, Σ 是下半球面 $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的下侧。
4. 计算 $\iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] \, dy \, dz + [2f(x, y, z) + y] \, dz \, dx + [f(x, y, z) + z] \, dx \, dy$, 其中 $f(x, y, z)$ 为连续函数, Σ 为平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分的上侧。

4.6 高斯公式通量与散度

1. 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的内侧，则 $\iint_{\Sigma} z \, dx \, dy = (\quad)$ 。

A. $-\frac{4}{3}\pi a^3$	B. 0	C. $\frac{4}{3}\pi a^3$	D. $-4\pi a^3$
--------------------------	------	-------------------------	----------------

2. 设 Σ 为由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围立体的表面外侧，则积分 $\iint_{\Sigma} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy = (\quad)$ 。

A.	B. $\frac{\pi}{2}$	C. π	D. 2π
----	--------------------	----------	-----------

3. 计算

$$\iint_{\Sigma} xz \, dx \, dy + xy \, dy \, dz + yz \, dz \, dx,$$

其中 Σ 是平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 2$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧。

4. 计算

$$\iint_{\Sigma} xz^2 \, dy \, dz + (x^2y - z^3) \, dz \, dx + (2xy + y^2z) \, dx \, dy,$$

其中 Σ 是上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的外侧。

5. 计算

$$\iint_{\Sigma} (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) \, dS,$$

$\Sigma : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 外侧， $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为外法线方向余弦。

4.7 斯托克斯公式环流量与旋度

1. 若 Γ 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x - y + z = 2, \end{cases}$ 从 z 轴正向看去取顺时针方向，则曲线积分

$$I = \oint_{\Gamma} (z - y) dx + (x - z) dy + (x - y) dz = (\quad).$$

- A. 2π B. 0 C. -2π D. $-\pi$

2. 设 $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, 则 $\text{rot } \vec{a} = (\quad)$.

- A. $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ B. $-(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ C. $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ D. $\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

3. 用斯托克斯公式计算

$$\oint_L y dx + 3z dy + 2x dz,$$

其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x + y + z = 0$, 从 y 轴正向看去该圆周为逆时针方向。

4.8 本章综合测验

一、选择题

1. 设 C 是从 $A(1, 1)$ 到 $B(2, 3)$ 的直线，则 $\int_C (x + 3y) dx + (y + 3x) dy = (\quad)$ 。
- A. $\int_1^2 [(x + 2x - 1) + (2x - 1 + 3x)] dx$
 B. $\int_1^2 [(x + 2x + 1) + (2x - 1 + 3x)] dx$
 C. $\int_1^2 (x + 3) dx + \int_1^3 (y - 6) dy$
 D. $\int_1^2 (x + 3) dx + \int_1^3 (y + 6) dy$
2. 设 L 为 $x^2 + y^2 = 1$ 正向一周，则 $\oint_L e^{y^2} dx = (\quad)$ 。
- A. πa^2 B. 0 C. $\frac{\pi a^4}{2}$ D. $\frac{\pi a^4}{4}$
3. 设 L 为光滑的简单闭曲线，并取顺时针方向，则 L 所围区域 D 的面积可表达为 ()。
- A. $\oint_L y dx$ B. $\oint_L x dy$
 C. $\oint_L x dy + y dx$ D. $\oint_L x dx + y dy$
4. 设 C 表示椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其方向为顺时针方向，则曲线积分 $\oint_C (x^2 + y) dx = (\quad)$ 。
- A. πab B. $\pi a^2 b$ C. $a + b^2$ D. $-\pi ab$
5. 设 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 1$ ，则 $\oint_L x^2 ds = (\quad)$ 。
- A. π B. 0 C. $-\pi$ D. $\frac{\pi}{2}$
6. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的下半球面下侧，则 $\iint_{\Sigma} z dx dy = (\quad)$ 。
- A. $-\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} dr$ B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr$
 C. $-\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr$ D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} dr$

二、填空题

1. $L : 2x + y = 2$ 在第一象限部分, 则 $\int_L (6 - 2x - y) \, ds = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 设 L 是抛物线 $x = y^2$ 上由点 $A(4, 2)$ 到点 $B(4, -2)$ 的一段弧, 则 $\int_L 2xy \, dx + x^2 \, dy = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 介于 $z = 0, z = H$ 之间的部分, 则 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \, dS = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧, 求 $\iint_{\Sigma} y^2 \, dxdz = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 第一卦限, 求 $\iint_{\Sigma} y^2 \, dS = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、计算题

1. 计算 $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, 其中 L 为 $x^2 + y^2 = ay$ 的整个圆周。
2. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2)z \, dS$, 其中 Σ 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$)。
3. 计算 $\int_L (-y \, dx + x \, dy)$, L 是沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 从点 $A(2, 0)$ 到 $O(0, 0)$ 的有向弧段。

4. 计算

$$\iint_{\Sigma} \frac{x}{r^3} dy dz + \frac{y}{r^3} dz dx + \frac{z}{r^3} dx dy,$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的内侧。

5. 计算

$$\iint_{\Sigma} (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) dS,$$

$\Sigma : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 外侧, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为外法线方向余弦。

6. 求常数 k , 使曲线积分 $\int_L (3x^2 + y^2) dx + kxy dy$ 在整个 xoy 面内与积分路径无关, 并计算

$$\int_{(0,1)}^{(2,2)} (3x^2 + y^2) dx + kxy dy$$
 的值。