§9.1 多元函数的基本概念

1、函数 $z=\ln(-x-y)$ 的定义域是（　　　）

A、$\{(x,y)\mid x<0,y<0\}$　　　B、$\{(x,y)\mid x+y\le 0\}$

C、$\{(x,y)\mid x+y<0\}$　　　D、在 xoy 平面上处处无定义

2、计算 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

3、计算 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin y$

4、试证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln\left(1+xy\right)}{x+\sin y}$ 的极限不存在

§9.2 偏导数

1、设 $z = x + (y-2)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，那么 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} =$（　　　）

A、0　　　B、1　　　C、$\dfrac{\pi}{2}$　　　D、$\dfrac{\pi}{4}$

2、设 $z = (1+x)^{x+y}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1.1)} =$（　　　）

A、$1+\ln 2$　　B、$4(1+\ln 2)$　　C、4　　D、8

3、函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在点(0,0)处（　　　）

A、连续且可导　　B、不连续且不可导　　C、连续但不可导　　D、可导但不连续

4、证明：$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，但一阶偏导数存在。

5、设 $u = \left(x^2 + yz^3\right)^3$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$

6、设 $z = \arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

§9.3 全微分

1、函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处结论正确的是(　　　)

A、连续但不可微　　B、可微　　C、可导但不可微　　D、既不连续又不可导

2、函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在，连续，可微分三者的关系(　　　)

A、可微必连续　　B、偏导数存在必可微　　C、连续必可微　　D、偏导数存在必连续

3、设 $z=e^{\frac{y}{x}}+\sin(xy)$，计算 dz

4、设 $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，计算 dz

5、设 $z=x^y+y^x$，求 dz

§9.4 多元复合函数的求导法则

1、设 $z=f\left(\sin x, e^{x+2y}\right)$，其中 f 具有一阶连续偏导数，求 dz

2、设 $z=f\left(2x-y\right)+g\left(x,xy\right)$，其中 $f\left(t\right)$ 二阶可导，$g\left(u,v\right)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$

3、设 $z=f\left(\sin x,\cos y,e^{x+y}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

§9.5 隐函数的求导公式

1、设方程 $e^z = xyz$ 确定函数 $z = z(x, y)$，利用两种方法计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$

2、设 $z = z(x, y)$ 由 $G(xyz, x + y + z) = 0$ 所确定，其中 G 具有连续的一阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$

3、设 x, y, z, u, v 满足方程 $\begin{cases} x^2 u + yz = v \\ \sin x + 2zv = u \end{cases}$，取 x, y, z 为自变量，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

§9.6 多元函数微分学的几何应用

1、曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$,在点 $(1,1,1)$ 处的法平面方程是（　　　）

A、$2x+3y-z=6$　　B、$x+2y+3z=6$　　C、$x+y-z=2$　　D、$x-2y+3z=3$

2、若曲线 $x=\cos t, y=2\sin t, z=t^2$ 在对应于 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 点处的一个切向量与 oz 轴正方向成钝角，则此向量与 yz 平面夹角的正弦值为（　　　）

A、$\dfrac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}$　　B、$-\dfrac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}$　　C、$\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}$　　D、$-\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}$

3．求曲线 Γ：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x^2+y^2-z^2=4 \end{cases}$ 在点 $(2,1,1)$ 处的法平面方程.

4、求曲面 $x^3+3xy^2+z^3+2x^2z+yz^2-35z-59=0$ 在点 $(2,-1,-3)$ 处的切平面方程

5、求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程

§9.7 方向导数与梯度

1、求函数$u = xyz$在$(5,1,2)$处沿从点$(5,1,2)$到点$(9,4,14)$方向的方向导数

2、函数$u = x^2 + y^2 + z^2$沿曲线$x = 2t, y = t^3, z = \frac{6}{\pi}\sin \pi t$在$(2,1,0)$点处的切线方向的方向导数是____________ （切线方向沿t增加的方向）

3、函数$u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$在点$M(1,2,-2)$处的梯度$gradu\Big|_M =$____________

4、求函数 $u = xyz - 2yz - 3$ 在点$(1,3,1)$处的最大方向导数____________

§9.8 多元函数的极值及其求法

1、函数 $f(x,y) = 2x^2 + ax + xy^2 + 2y$在点$(1,-1)$处取得极值，则常数$a = ($　　　　$)$

A、$a = 5$　　　B、$a = -5$　　　C、$a = 0$　　　D、无法确定

2、求函数$z = x^2 - 3xy + 3y^2 - 2x + 3y + 4$的极值

3、利用拉格朗日乘数法，求函数$u = x - 2y + 3z$在条件$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$下的极大值或极小值。

4、求函数 $z = xy$ 在闭区域 $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$ 上的最大值

5、在曲面 S：$2x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 1 = 0$ 上求一点，使其到原点的距离最小

6、在 xoy 平面上求一点，使它到 $x = 0, y = 0$ 及 $x + 2y - 16 = 0$ 三平面的距离的平方和为最小.

7、求内接于半径为8的球且有最大体积的长方体

本章综合测验

一、选择题

1、函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处结论正确的是（　　）

A、一阶偏导数存在　　B、连续　　C、可微　　D、二重极限存在

2、函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微分是它在该点偏导数存在的（　　）

A、必要而非充分条件　　B、充分而非必要条件
C、充分必要条件　　D、既非充分又非必要条件

3、设 $z=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，那么 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=($　　$)$

A、$-\dfrac{1}{4}$　　B、$\dfrac{1}{4}$　　C、$-\dfrac{1}{2}$　　D、1

4、曲面 $xyz=8$ 上平行于平面 $x+y+z+3=0$ 的切平面方程是（　　）

A、$x+y+z=3$　　B、$x+y+z=1$　　C、$x+y+z=6$　　D、$x+y+z=0$

5、设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f_x(0,0)=3,\ f_y(0,0)=-1$，则（　　）

A、$dz|_{(0,0)}=3dx-dy$

B、曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个法向量为 $(3,-1,1)$

C、曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(1,0,3)$

D、曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(3,0,1)$

6、曲线 $x=2t,y=t^3,z=\dfrac{6}{\pi}\sin\pi t$ 在 $(2,1,0)$ 点处的法平面方程为（　　）

A、$2x+y-7=0$　　B、$2x+3y-6z-7=0$

C、$2x-3y+6z-7=0$　　D、$2x+y+z+7=0$

7、曲面 $3x^2+2y^2+z^2=20$ 在点 $(-1,-2,3)$ 处的切平面与 xoy 面的夹角的余弦为（　　）

A、$\dfrac{3}{\sqrt{34}}$　　B、$-\dfrac{3}{\sqrt{34}}$　　C、$-\sqrt{34}$　　D、$\sqrt{34}$

8、设函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=($　　　$)$

A、0　　　B、-1　　　C、1　　　D、2

二、填空题

9、设 $u=\dfrac{\cos x^2}{y}+(xy)^{\frac{y}{x}}$，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,1)}=$______________

10、设 $z=\ln(x^2+y^2+1)+e^{xy}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$____________

11、设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$　则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=$ ___________

12、函数 $u=xyz-2yz-3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的梯度 $gradu=$______________

13、函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $(1,2)$ 到点 $\left(2,2+\sqrt{3}\right)$ 方向的方向导数为_________

三、计算题

14、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^z-3yz=5$ 所确定，求 dz

15、已知方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ 确定了函数 $z=f(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

16、设函数$z=z(x,y)$由方程$z=\varphi\left(x-y,y-z\right)$所确定，其中$\varphi(u,v)$有一阶连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

17、求表面积为 9 而体积为最大的长方体的体积.

18、利用拉格朗日乘数法，求函数$u=x^2+y^2+z^2$在条件$x+2y+2z=18,x>0,y>0,z>0$下的最小值