ExBook · 刷题本

高等数学（下）

刷题集

A4 标准版

“不处对象 喵喵喵”

GoatPretty

最后更新时间：2026 年 2 月 10 日

目录

第 1 章 向量代数与空间解析几何

1.1 向量及其线性运算

➢ 此部分答案见原书 P1

1. 已知向量 $\overrightarrow{OA}$ 的模为 8，且它与 ox 轴和 oy 轴的夹角均为 $\dfrac{\pi}{3}$，求 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标表示式。

2. 已知三点 $A(1,0,4)$、$B(3,2,2)$、$C(-2,-1,0)$，D 为 AB 的中点，求与 $\overrightarrow{CD}$ 平行的单位向量。

3. 已知 $A(1,2,0)$、$B(2,-1,3)$，求：

   (1) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在三个坐标轴上的投影；

   (2) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模；

   (3) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦；

   (4) 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 方向一致的单位向量。

4. 设 $\vec{a}=(4,5,-3)$，$\vec{b}=(1,3,6)$，问实数 λ,μ 满足什么条件时，可使 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 与 z 轴垂直?

1.2 数量积向量积混合积

1. 向量 $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ 与 $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}$ 的位置关系是（　　）。

A. 平行　　B. 垂直　　C. 相交　　D. 以上都不是

2. 设三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足关系式 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，则 $\vec{a}\times\vec{b}=$（　　）。

A. $\vec{c}\times\vec{b}$　　B. $\vec{b}\times\vec{c}$　　C. $\vec{a}\times\vec{c}$　　D. $\vec{b}\times\vec{a}$

3. 已知 $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+3\vec{k}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{j}+3\vec{k}$，则 $\triangle OAB$ 的面积为（　　）。

A. 19　　B. $\dfrac{1}{2}\sqrt{19}$　　C. $\sqrt{19}$　　D. 29

4. 非零向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面的充分必要条件是（　　）。

A. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0$　　B. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=0$

C. $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0$　　D. $\vec{a}\times\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=0$

5. 已知 $\vec{a}=(1,1,-4)$，$\vec{b}=(2,0,-2)$，求：

(1) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}$;

(2) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$。

6. 已知 $\vec{a}=(1,1,-4)$，$\vec{b}=(2,0,-2)$，求 $\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$。

7. 已知 $|\vec{a}|=1$，$\left|\vec{b}\right|=2$，$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60^\circ$，求 $\left|\vec{a}-\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right|$。

1.3 曲面及其方程

1. 方程 $-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 表示的空间曲面是______。

2. 方程 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$ 表示的空间曲面是______。

3. 建立以点 $(1,3,-2)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程。

4. 将 xoy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程。

1.4 空间曲线及其方程

1. 求曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$ 关于 xoy 坐标面的投影柱面方程及此曲线在 xoy 坐标面的投影方程。

2. 求母线平行于 y 轴，且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+y^2-z^2=0 \end{cases}$ 的投影柱面方程。

1.5 平面及其方程

1. 平面 $x-y+2z-6=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角是（　　）。

A. π　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. 2π

2. 两平面 $2x-y-z=0$ 和 $x+y+z=0$ 的位置是（　　）。

A. 平行　　B. 相交不垂直　　C. 垂直　　D. 共面

3. 求过点 $A(5,4,3)$ 且在各坐标轴上的截距相等的平面方程。

4. 求平行于 xoz 面且经过点 $(2,-5,3)$ 的平面方程。

5. 求通过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$ 的平面方程。

1.6 空间直线及其方程

1. 求过点 $(1,0,-2)$ 且与平面 $3x+4y-z+6=0$ 平行，与直线 $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z}{1}$ 垂直的直线方程。

2. 求过点 $(3,2,-1)$ 且与平面 $x-4z-3=0$ 及 $2x-y-5z-1=0$ 平行的直线方程。

3. 求通过平面 $x+y-z-2=0$ 与 $3x+y-z-5=0$ 的交线，且过点 $(1,8,2)$ 的平面方程。

4. 求点 $M\,(1,2,-1)$ 到直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ 的距离。

5. 求点 $M\left(1,2,3\right)$ 到直线 $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+z=3 \end{cases}$ 的距离。

6. 求点 $N\left(-1,2,0\right)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影。

7. 确定 λ，使直线

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$$

垂直于平面 $\pi_1:3x+6y+3z+25=0$，并求该直线在平面 $\pi_2:x-y+z-2=0$ 上的投影直线的方程。

1.7 本章综合测验

1. 若非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$，则（　）。

A. 方向相同　　B. 互相垂直　　C. 方向相反　　D. 平行

2. 方程 $y^2+z^2-24x+8=0$ 表示（　）。

A. 双曲柱面　　B. 椭圆柱面　　C. 锥面　　D. 旋转抛物面

3. 方程 $x^2+y^2+z^2=49$ 表示的曲面是（　）。

A. 柱面　　B. 球面　　C. 锥面　　D. 旋转抛物面

4. 平面 $x=2z$（　）。

A. 平行 xOz 坐标面　　B. 平行 y 轴

C. 垂直 y 轴　　D. 通过 y 轴

5. 曲面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与 $x+y=1$ 的交线在 xoy 面上的投影为（　）。

A. 椭圆柱面　　B. 椭圆曲线　　C. 两平行平面　　D. 线段

6. 直线 $L: \dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y+4}{-7} = \dfrac{z}{3}$ 与平面 $\pi: 4x-2y-2z=3$ 的关系是（　）。

A. 平行　　B. 垂直相交

C. L 在 π 上　　D. 相交但不垂直

7. 直线 $L: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{7}$ 和平面 $3x-2y+7z=8$ 的关系是（　）。

A. 平行　　B. 垂直相交

C. L 在 π 上　　D. 相交但不垂直

8. 设直线 $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{-3}$，则该直线必定（　）。

A. 过原点且垂直于 x 轴　　B. 过原点且平行于 x 轴

C. 不过原点，但垂直于 x 轴　　D. 不过原点，且不平行于 x 轴

9. 向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在坐标轴上的投影依次是 4、-4、7，这个向量的起点 A 的坐标为______。

10. 将 xoz 坐标面上的曲线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转所生成的旋转曲面方程为______。

11. 过点 $(2,-5,3)$ 且平行于 xoz 面的平面方程为______。

12. 过点 $(2,4,-1)$ 且平行于 $S=(1,3,4)$ 的直线方程为______。

13. 通过点 $M\left(1,2,3\right)$ 且与直线 $L: x=2+3t$，$y=2t$，$z=-1+t$ 垂直的平面方程为______。

14. 已知 $M_1\left(4,\sqrt{2},1\right)$，$M_2\left(3,0,2\right)$，求向量 M_1M_2 的模、方向余弦和方向角。

15. 设向量 $\vec{r}$ 的模是 4，它与轴 $\vec{u}$ 的夹角是 60°，求 $\vec{r}$ 在轴 $\vec{u}$ 上的投影。

16. 求向量 $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ 与 $\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}$ 的夹角余弦。

17. 设 $\vec{a}=(x,y,z)$，$\vec{b}=(2,0,5)$，$\vec{c}=(3,0,0)$，问当 x,y,z 取何值时，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行；取何值时 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 平行。

18. 已知 $M_1(1,-1,2)$，$M_2(3,3,1)$，$M_3(3,1,3)$，求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量。

19. 化直线方程 $\begin{cases} x-y+z+5=0 \\ 5x-8y+4z+36=0 \end{cases}$ 为对称式方程和参数方程。

20. 求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ 在平面 $\Pi:x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程。

21. 试证直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{-2}$ 在平面 $x+y+z+1=0$ 上。

第 2 章　多元函数微分法及其应用

2.1 多元函数的基本概念

1. 函数 $z=\ln(-x-y)$ 的定义域是（　　）。

A. $\{(x,y)\mid x<0,\ y<0\}$

B. $\{(x,y)\mid x+y\le 0\}$

C. $\{(x,y)\mid x+y<0\}$

D. 在 xoy 平面上处处无定义

2. 计算 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$。

3. 计算 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin y$。

4. 试证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+\sin y}$ 的极限不存在。

2.2 偏导数

1. 设 $z = x + (y-2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，那么 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)} =$（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}$

2. 设 $z = (1+x)^{x+y}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)} =$（　　）。

A. $1+\ln 2$　　B. $4(1+\ln 2)$　　C. 4　　D. 8

3. 函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）。

A. 连续且可导　　B. 不连续且不可导

C. 连续但不可导　　D. 可导但不连续

4. 证明：$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，但一阶偏导数存在。

5. 设 $u = (x^2+yz^3)^3$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$。

6. 设 $z = \arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

2.3 全微分

1. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处结论正确的是（　　）。

A. 连续但不可微　　B. 可微

C. 可导但不可微　　D. 既不连续又不可导

2. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在、连续、可微分三者的关系是（　　）。

A. 可微必连续　　B. 偏导数存在必可微

C. 连续必可微　　D. 偏导数存在必连续

3. 设 $z=e^{\frac{y}{x}}+\sin(xy)$，计算 $\mathrm{d}z$。

4. 设 $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，计算 $\mathrm{d}z$。

5. 设 $z=x^y+y^x$，求 $\mathrm{d}z$。

2.4 多元复合函数的求导法则

1. 设 $z = f(\sin x, e^{x+2y})$，其中 f 具有一阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$。

2. 设 $z = f(2x - y) + g(x, xy)$，其中 $f(t)$ 二阶可导，$g(u, v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

3. 设 $z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

2.5 隐函数的求导公式

1. 设方程 $e^z = xyz$ 确定函数 $z = z(x, y)$，利用两种方法计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$。

2. 设 $z = z(x, y)$ 由 $G(xyz, x + y + z) = 0$ 所确定，其中 G 具有连续的一阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$。

3. 设 x, y, z, u, v 满足方程 $\begin{cases} x^2 u + yz = v, \\ \sin x + 2zv = u, \end{cases}$，取 x, y, z 为自变量，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$。

2.6 多元函数微分学的几何应用

1. 曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的法平面方程是（　　）。

A. $2x+3y-z=6$　　B. $x+2y+3z=6$

C. $x+y-z=2$　　D. $x-2y+3z=3$

2. 若曲线 $x=\cos t, y=2\sin t, z=t^2$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 点处的一个切向量与 oz 轴正方向成钝角，则此向量与 yz 平面夹角的正弦值为（　　）。

A. $\dfrac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}$　　B. $-\dfrac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}$　　C. $\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}$　　D. $-\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}$

3. 求曲线 $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x^2+y^2-z^2=4, \end{cases}$ 在点 $(2,1,1)$ 处的法平面方程。

4. 求曲面 $x^3+3xy^2+z^3+2x^2z+yz^2-35z-59=0$ 在点 $(2,-1,-3)$ 处的切平面方程。

5. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程。

2.7 方向导数与梯度

1. 求函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 处沿从点 $(5,1,2)$ 到点 $(9,4,14)$ 方向的方向导数。

2. 函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 沿曲线 $x=2t, y=t^3, z=\frac{6}{\pi}\sin(\pi t)$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切线方向的方向导数是______（切线方向沿 t 增加的方向）。

3. 函数 $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度为______。

4. 求函数 $u=xyz-2yz-3$ 在点 $(1,3,1)$ 处的最大方向导数______。

2.8 多元函数的极值及其求法

1. 函数 $f(x, y) = 2x^2 + ax + xy^2 + 2y$ 在点 $(1, -1)$ 处取得极值，则常数 $a =$ (　　)。

   A. 5　　B. -5　　C. 0　　D. 无法确定

2. 求函数 $z = x^2 - 3xy + 3y^2 - 2x + 3y + 4$ 的极值。

3. 利用拉格朗日乘数法，求函数 $u = x - 2y + 3z$ 在条件 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 下的极大值或极小值。

4. 求函数 $z = xy$ 在闭区域 $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$ 上的最大值。

5. 在曲面 $\Sigma : 2x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 1 = 0$ 上求一点，使其到原点的距离最小。

6. 在 xoy 平面上求一点，使它到 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三平面的距离的平方和为最小。

7. 求内接于半径为 8 的球且有最大体积的长方体。

2.9 本章综合测验

一、选择题

1. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处结论正确的是（　）。

A. 一阶偏导数存在　　B. 连续

C. 可微　　D. 二重极限存在

2. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微分是它在该点偏导数存在的（　）。

A. 必要而非充分条件　　B. 充分而非必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分又非必要条件

3. 设 $z=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=$（　）。

A. $-\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. 1

4. 曲面 $xyz=8$ 上平行于平面 $x+y+z+3=0$ 的切平面方程是（　）。

A. $x+y+z=3$　　B. $x+y+z=1$　　C. $x+y+z=6$　　D. $x+y+z=0$

5. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=-1$，则（　）。

A. $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

B. 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个法向量为 $(3,-1,1)$

C. 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(1,0,3)$

D. 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(3,0,1)$

6. 曲线 $x=2t, y=t^3, z=\dfrac{6}{\pi}\sin(\pi t)$ 在点 $(2,1,0)$ 处的法平面方程为（　）。

A. $2x+y-7=0$　　B. $2x+3y-6z-7=0$

C. $2x-3y+6z-7=0$　　D. $2x+y+z+7=0$

7. 曲面 $3x^2+2y^2+z^2=20$ 在点 $(-1,-2,3)$ 处的切平面与 xoy 面的夹角的余弦为（　）。

A. $\dfrac{3}{\sqrt{34}}$　　B. $-\dfrac{3}{\sqrt{34}}$　　C. $-\sqrt{34}$　　D. $\sqrt{34}$

8. 设函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$（　）。

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. 2

二、填空题

1. 设 $u=\dfrac{\cos x^2}{y}+(xy)^{\frac{y}{x}}$，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,1)}=$______。

2. 设 $z=\ln\left(x^2+y^2+1\right)+e^{xy}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$______。

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=$______。

4. 函数 $u=xyz-2yz-3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的梯度为______。

5. 函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $(1,2)$ 到点 $(2,2+\sqrt{3})$ 方向的方向导数为______。

三、计算题

1. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^z-3yz=5$ 所确定，求 $\mathrm{d}z$。

2. 已知方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ 确定了函数 $z=f(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=\varphi(x-y,y-z)$ 所确定，其中 $\varphi(u,v)$ 有一阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

4. 求表面积为 9 而体积为最大的长方体的体积。

5. 利用拉格朗日乘数法，求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $x+2y+2z=18$，$x>0,y>0,z>0$ 下的最小值。

第 3 章　重积分

3.1 二重积分的概念与性质

1. 判断：二重积分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的几何意义是以 $z=f(x,y)$ 为曲顶、以 D 为底的曲顶柱体的体积（　）。

2. 由二重积分的几何意义，求 $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为 xoy 平面上的区域 $x^2+y^2\le a^2$，$x\ge 0$，$y\ge 0$。

3. 估计积分 $I=\iint_{|x|+|y|\le 10} \dfrac{1}{100+\cos^2 x+\sin^2 y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值，正确的是（　）。

   A. $\dfrac{1}{2}\le I\le 1.04$　　B. $1.04\le I\le 1.96$

   C. $1.96\le I\le 2$　　D. $2\le I\le 2.14$

4. 设 D 由 $x=0, y=0, x+y=\dfrac{1}{2}, x+y=1$ 围成，确定以下积分大小的顺序：

$$I_1=\iint_D [\ln(x+y)]^7\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad I_2=\iint_D (x+y)^7\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad I_3=\iint_D [\sin(x+y)]^7\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

5. 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 $D: x^2+y^2\le a^2$ 上的连续函数，计算 $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{1}{\pi a^2}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

3.2 二重积分的计算方法

1. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，$a>0$，则 $\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y=$（　）。

A. $\int_0^a \mathrm{d}y \int_y^a f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a f(x,y)\,\mathrm{d}x$

C. $\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^a \mathrm{d}y \int_a^y f(x,y)\,\mathrm{d}x$

2. 二次积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 换序正确的结果是（　）。

A. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

C. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x^2}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　D. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{1-x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$

3. 设域 $D: x^2+y^2\le 4$，f 为域 D 上的连续函数，则 $\iint_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　）。

A. $2\pi\int_0^2 \rho f(\rho)\,\mathrm{d}\rho$　　B. $4\pi\int_0^2 \rho f(\rho)\,\mathrm{d}\rho$

C. $2\pi\int_0^2 f(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho$　　D. $4\pi\int_0^r \rho f(\rho)\,\mathrm{d}\rho$

4. 若区域 $D:(x-1)^2+y^2\le 1$，则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为极坐标累次积分为（　）。

A. $\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} F(\rho,\theta)\,\mathrm{d}\rho$　　B. $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} F(\rho,\theta)\,\mathrm{d}\rho$

C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} F(\rho,\theta)\,\mathrm{d}\rho$　　D. $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} F(\rho,\theta)\,\mathrm{d}\rho$

5. 设 D 由 $x=y$，$y^2=4x$ 所围成，将 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为先 y 后 x 的二次积分为______。

6. 设 D 由 $x=y$，$y=2$ 及 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 所围成，将 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为先 x 后 y 的二次积分为______。

7. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，交换二次积分的次序：$\int_{-1}^0 \mathrm{d}y \int_2^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x=$______。

8. 计算 $I = \iint_{x^2+y^2\le 4} (1+\sqrt[3]{xy})\,\mathrm{d}\sigma$。

9. 计算 $\iint_D \dfrac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x, xy=1, y=2$ 围成的区域。

10. 交换积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-y}^{1+y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x$。

11. 将 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为极坐标下的二次积分，其中 $D:\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le 1. \end{cases}$

12. 计算 $\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: x^2+y^2\le Ry$。

13. 计算 $\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$。

14. 计算 $\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$。

15. 计算 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$。

16. 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint_D f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 D 是由 $y=0, y=x^2, x=1$ 所围成的区域，求 $f(x,y)$。

3.3 三重积分

1. 对于 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 围成的区域：

   (1) 化为直角坐标系、柱面坐标系及球面坐标系下的三次积分；

   (2) 若 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；

   选用一种积分次序计算此积分。

2. 用“先二后一”法与柱坐标计算 $I=\iiint_{\Omega} \mathrm{e}^{|z|}\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\le 1$。

3. 计算 $\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 为 xoy 平面上曲线 $y=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域。

4. 在球坐标下计算 $I=\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围。

5. 设 $f(u)$ 是可微函数，$F(t)=\iiint_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，求 $F'(t)$。

3.4 重积分的应用

1. 求由 $z \le 6 - x^2 - y^2$, $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \le 1$ 所围成的立体的体积。

2. 求由曲线 $\begin{cases} x^2 - 2z = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面围成的几何体介于平面 $z=2$, $z=8$ 之间部分的体积。

3. 设有一物体，占有空间 $\Omega: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$，密度为 $\mu(x,y,z) = x+y+z$，求该物体的质量。

4. 已知均匀薄片 D（面密度为常数 ρ）由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成，求：

   (1) 薄片的形心坐标；

   (2) 薄片对于直线 $y=-1$ 的转动惯量。

3.5 本章综合测验

一、选择题

1. 比较 $I_1=\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$ 的大小，其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2=1$，则（　）。

   A. $I_1=I_2$　　B. $I_1>I_2$　　C. $I_1<I_2$　　D. 无法比较

2. 设 $D:x^2+y^2\le a^2$，则 $\iint_D |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　）。

   A. $\dfrac{a^4}{3}$　　B. $\dfrac{a^4}{2}$　　C. a^4　　D.

3. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，交换二次积分 $\int_1^e \mathrm{d}x\int_0^{\ln x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的积分次序得（　）。

   A. $\int_1^e \mathrm{d}y\int_0^{\ln x} f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　B. $\int_{e^y}^e \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$

   C. $\int_0^{\ln x} \mathrm{d}y\int_1^e f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{e^y}^e f(x,y)\,\mathrm{d}x$

4. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，交换二次积分 $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{2-x}^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的积分次序得（　）。

   A. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{2-y}^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x$

   B. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{2-y}^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_1^4 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x$

   C. $\int_0^4 \mathrm{d}y\int_{2-y}^{5y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

   D. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_2^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_1^4 \mathrm{d}y\int_2^{5y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

5. 设 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=1$ 围成的立体，则 $\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 等于（　）。

   A. $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \mathrm{d}z$　　B. $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 \mathrm{d}\rho\int_\rho^1 \rho\,\mathrm{d}z$

   C. $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 \mathrm{d}\rho\int_0^1 \rho\,\mathrm{d}z$　　D. $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 \mathrm{d}\rho\int_0^\rho \rho\,\mathrm{d}z$

6. 设 $I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$，$\Omega: x^2+y^2+z^2=1$ 球面内部，则（　）。

A. I 等于 Ω 的体积

B. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^4\sin\theta\,\mathrm{d}r$

C. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r$

D. $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r$

7. 球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 与柱体 $x^2+y^2\le 2ax$ 的公共部分体积 $V=$（　）。

A. $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$

B. $8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$

C. $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$

D. $8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$

8. 由 $x^2+y^2+z^2\le 2z$，$z\le x^2+y^2$ 所确定的立体体积是（　）。

A. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}z$

B. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho}\rho\,\mathrm{d}\rho\int_1^{1-\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}z$

C. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{\rho^2}\mathrm{d}z$

D. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{1-\rho^2}\mathrm{d}z$

二、填空题

1. D 由 $x=y, y=2$ 及 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 所围成，将 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为先 y 后 x 的二次积分为______。

2. 积分 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$ 的值等于______。

3. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $F'(2)=$______。

4. $\Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, -1\le z\le 1$，则 $\iiint_{\Omega} z\ln(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v=$______。

5. 设 Ω 为单位球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$，计算 $\iiint_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}v=$______。

三、计算题

1. 计算 $I=\iint_D \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $x=2, y=x, xy=1$ 所围成。

2. 计算 $I=\iint_D |xy|\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D: x^2+y^2\le a^2$。

3. 计算 $I=\iiint_\Omega \mathrm{d}v$，其中 Ω 由 $0\le z\le x^2+y^2$，$0\le x\le a$，$0\le y\le b$ 所确定。

4. 计算 $I=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}, z=1$ 所围区域。

5. 计算 $I=\iint_D (x^2-2\sin x+3y+4)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D: x^2+y^2\le R^2$。

6. 计算 $I=\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$，$x^2+y^2+z^2=4$ 所围成的闭域。

7. 交换积分次序 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$（设 $f(x,y)$ 为连续函数）。

8. 求由曲面 $z=2x^2+y^2$ 与 $z=6-x^2-2y^2$ 所围立体的体积。

第 4 章　曲线积分与曲面积分

4.1 对弧长的曲线积分

1. 设 L 为 $y=x^3$ 与 $y=x$ 所围成区域的整个边界曲线，$f(x,y)$ 是连续函数，则 $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=$ (　　)。

A. $\int_0^1 f(x,x^3)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x,x)\,\mathrm{d}x$

B. $\int_0^1 f(x,x^3)\,\mathrm{d}x+\sqrt{2}\int_0^1 f(x,x)\,\mathrm{d}x$

C. $\int_{-1}^1 f(x,x^3)\sqrt{1+9x^4}\,\mathrm{d}x+\int_1^{-1} f(x,x)\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$

D. $\int_{-1}^1 \left[f(x,x^3)\sqrt{1+9x^4}+\sqrt{2}f(x,x)\right]\mathrm{d}x$

2. 设 L 为直线 $2x+3y-6=0$ 在第一象限的部分，则 $\int_L \ln(8+4x+6y)\ \mathrm{d}s=$______。

3. 设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，计算 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s$。

4. 计算 $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中 L 分别为 $x=\sqrt{a^2-y^2}$，$y=x$ 及 $y=0$ 围成的闭曲线。

5. 设有物质曲线 L，极坐标下其方程为 $\rho=e^{2\theta}$，L 上任一点处的线密度 $\mu=\theta$，求从 $\theta=0$ 到 $\theta=2\pi$ 的曲线段的质量。

4.2 对坐标的曲线积分

1. (1) 若 L 为抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧，则

$$\int_L (x+y)\,\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y=\underline{\qquad\qquad};$$

(2) 若 L 为从点 $(1,1)$ 到点 $(2,4)$ 的直线段，则 $\displaystyle\int_L (x+y)\,\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y=\underline{\qquad\qquad}$;

(3) 若 L 为先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,4)$，再沿直线从点 $(1,4)$ 到点 $(2,4)$ 的折线，则

$$\int_L (x+y)\,\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y=\underline{\qquad\qquad}.$$

2. 设 L 为自 $t=0$ 到 $t=\pi$ 的曲线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$，则 $\displaystyle\int_L y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z=$ (　　)。

A. $a^2\pi$　　B. $2a^2\pi$　　C. $-a^2\pi$　　D. $\dfrac{a^2}{2}\pi$

4.3 格林公式及其应用

1. 设 L 为单位圆周上自点 $A(1,0)$ 到点 $B(0,1)$ 在第一象限的一段弧，则 $\int_L x\ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x+y\ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}y=$______。

2. 设 L 是三顶点分别为 $(0,0)$、$(3,0)$、$(3,2)$ 的三角形正向边界，则 $\oint_L(2x-y+4)\,\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\,\mathrm{d}y=$______。

3. 设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$（$a>0$）负向一周，则曲线积分 $\oint_L(x^3-x^2y)\,\mathrm{d}x+(xy^2-y^3)\,\mathrm{d}y=$（　　）。

   A. $-\dfrac{\pi a^4}{2}$　　B. $-\pi a^4$　　C. πa^4　　D. $\dfrac{\pi a^3}{3}$

4. 计算 $\oint_L\dfrac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，其中 L 为以点 $A(1,0),B(0,1),C(-1,0),D(0,-1)$ 为顶点的正方形 $ABCD$。

5. 计算 $\int_L(x^2-y)\,\mathrm{d}x-\left(x+\sin^2 y\right)\,\mathrm{d}y$，$L$ 是圆周 $x^2+y^2=2x$ 上由点 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的一段弧。

6. 计算 $\oint_L \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$，其中 L 是圆周 $(x-1)^2+y^2=4$，方向为逆时针方向。

7. 求 a, b，使得曲线积分 $\int_L (axy^2 - y^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y - bxy^2)\,\mathrm{d}y$ 在整个 xoy 面内与积分路径无关，并计算 $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (axy^2 - y^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y - bxy^2)\,\mathrm{d}y$ 的值。

4.4 对面积的曲面积分

1. 设 Σ 为曲面 $z=2-(x^2+y^2)$ 在 xoy 平面上方部分，则 $\iint_\Sigma \mathrm{d}S=$（　）。

A. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho}\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$

B. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2}\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$

C. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2}(2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$

D. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$

2. 设 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，$z\geq 0$，Σ_1 是 Σ 在第一卦限中的部分，则（　）。

A. $\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}S$

B. $\iint_\Sigma y\,\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}S$

C. $\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}S$

D. $\iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}xyz\,\mathrm{d}S$

3. 设 Σ 是曲面 $z=\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)$ 中介于 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分曲面，求 $\displaystyle\iint_\Sigma \frac{z}{\sqrt{9+4x^2+4y^2}}\,\mathrm{d}S$。

4. 计算 $\iint_\Sigma z^2\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 是 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在第一卦限的部分。

5. 计算 $\displaystyle\oiint_{x^2+y^2+z^2=1}(ax^2+by^2+cz^2)\,\mathrm{d}S$。

6. 计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=1$，$z=2$ 截得部分。

4.5 对坐标的曲面积分

1. Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，求 $\iint_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$______。

2. Σ 是平面 $x+y+z=1$ 被坐标平面所截得的三角形的上侧，则 $\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$______。

3. 计算 $\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 是下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的下侧。

4. 计算
$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 为平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧。

4.6 高斯公式通量与散度

1. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的内侧，则 $\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$（　）。

A. $-\frac{4}{3}\pi a^3$　　B. 0　　C. $\frac{4}{3}\pi a^3$　　D. $-4\pi a^3$

2. 设 Σ 为由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧，则积分 $\iint_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$（　）。

A.　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

3. 计算

$$\oiint_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

其中 Σ 是平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=2$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧。

4. 计算

$$\iint_{\Sigma} xz^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x^2y-z^3)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (2xy+y^2z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的外侧。

5. 计算

$$\iint_{\Sigma} (x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

$\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 外侧，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为外法线方向余弦。

4.7 斯托克斯公式环流量与旋度

1. 若 Γ 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 从 z 轴正向看去取顺时针方向，则曲线积分 $I=\oint_{\Gamma}(z-y)\,\mathrm{d}x+(x-z)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z=$（　）。

   A. 2π　　B. 0　　C. -2π　　D. $-\pi$

2. 设 $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$，则 $\operatorname{rot}\vec{a}=$（　）。

   A. $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$　　B. $-\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)$　　C. $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$　　D. $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

3. 用斯托克斯公式计算

$$\oint_{L} y\,\mathrm{d}x+3z\,\mathrm{d}y+2x\,\mathrm{d}z,$$

   其中 L 为圆周 $x^2+y^2+z^2=4$，$x+y+z=0$，从 y 轴正向看去该圆周为逆时针方向。

4.8 本章综合测验

一、选择题

1. 设 C 是从 $A(1,1)$ 到 $B(2,3)$ 的直线，则 $\int_C (x+3y)\,\mathrm{d}x+(y+3x)\,\mathrm{d}y=$（　）。

A. $\int_1^2 [(x+2x-1)+(2x-1+3x)]\,\mathrm{d}x$

B. $\int_1^2 [(x+2x+1)+(2x-1+3x)]\,\mathrm{d}x$

C. $\int_1^2 (x+3)\,\mathrm{d}x+\int_1^3 (y-6)\,\mathrm{d}y$

D. $\int_1^2 (x+3)\,\mathrm{d}x+\int_1^3 (y+6)\,\mathrm{d}y$

2. 设 L 为 $x^2+y^2=1$ 正向一周，则 $\oint_L e^{y^2}\,\mathrm{d}x=$（　）。

A. πa^2　　B. 0　　C. $\dfrac{\pi a^4}{2}$　　D. $\dfrac{\pi a^4}{4}$

3. 设 L 为光滑的简单闭曲线，并取顺时针方向，则 L 所围区域 D 的面积可表达为（　）。

A. $\oint_L y\,\mathrm{d}x$　　B. $\oint_L x\,\mathrm{d}y$

C. $\oint_L x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x$　　D. $\oint_L x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y$

4. 设 C 表示椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其方向为顺时针方向，则曲线积分 $\oint_L (x^2+y)\,\mathrm{d}x=$（　）。

A. πab　　B. $\pi a^2 b$　　C. $a+b^2$　　D. $-\pi ab$

5. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，则 $\oint_L x^2\,\mathrm{d}s=$（　）。

A. π　　B. 0　　C. $-\pi$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

6. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半球面下侧，则 $\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　）。

A. $-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r$　　B. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$

C. $-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$　　D. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r$

二、填空题

1. $L: 2x+y=2$ 在第一象限部分，则 $\int_L (6-2x-y)\,\mathrm{d}s =$______。

2. 设 L 是抛物线 $x=y^2$ 上由点 $A(4,2)$ 到点 $B(4,-2)$ 的一段弧，则 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y =$______。

3. Σ 为柱面 $x^2+y^2=R^2$ 介于 $z=0, z=H$ 之间的部分，则 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S =$______。

4. Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，求 $\iint_\Sigma y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z =$______。

5. Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 第一卦限，求 $\iint_\Sigma y^2\,\mathrm{d}S =$______。

三、计算题

1. 计算 $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中 L 为 $x^2+y^2=ay$ 的整个圆周。

2. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)z\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$。

3. 计算 $\int_L (-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$，$L$ 是沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 从点 $A(2,0)$ 到 $O(0,0)$ 的有向弧段。

4. 计算

$$\oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的内侧。

5. 计算

$$\iint_{\Sigma}(x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

$\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 外侧，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为外法线方向余弦。

6. 求常数 k，使曲线积分 $\displaystyle\int_L (3x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + kxy\,\mathrm{d}y$ 在整个 xoy 面内与积分路径无关，并计算 $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(2,2)}(3x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + kxy\,\mathrm{d}y$ 的值。

第 5 章　无穷级数

5.1 常数项无穷级数的概念和性质

1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则（　　）。

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 必收敛　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 必收敛

C. 数列 $\{S_n\}$ 有界　　D. 以上都不正确

2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$ 必（　　）。

A. 收敛于 $2S$　　B. 收敛于 $2S + u_1$

C. 收敛于 $2S - u_1$　　D. 发散

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right)$（　　）。

A. 发散　　B. 收敛于 0

C. 收敛于 $\frac{1}{b_1}$　　D. 敛散性不确定

4. 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5}}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6^n} + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$。

5.2 常数项级数的审敛法

1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$（　　）。

   A. 一定绝对收敛　　B. 可能收敛也可能发散

   C. 一定发散　　D. 一定条件收敛

2. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛的（　　）。

   A. 充分条件　　B. 必要条件

   C. 充要条件　　D. 以上都不正确

3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$（　　）。

   A. 一定条件收敛　　B. 一定绝对收敛

   C. 一定发散　　D. 可能收敛也可能发散

4. 判断下列级数的敛散性：

   (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{2^n}$；

   (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n+1}{n}$；

   (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$；

   (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$。

5. 判断下列级数是否收敛，若收敛指出为绝对收敛还是条件收敛：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^2+\sin\frac{n\pi}{4}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(1+n)}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{x}{n}\quad(x>0)$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{k+n}{n^2}\quad(k>0)$。

5.3 幂级数

1. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域为______。

2. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域为______。

3. 若幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，当 $0 < \rho < +\infty$ 时收敛半径 $R =$______。

4. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 在 $x = 4$ 处发散，则其在 $x = 0$ 处（　　）。

   A. 绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 发散　　D. 无法判断

5. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$ 的收敛域为（　　）。

   A. $(1, +\infty)$　　B. $(-\infty, 1)$

   C. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$　　D. $(1, 3)$

6. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x > 0$ 处发散，而在 $x = 0$ 处收敛，则常数 $a =$（　　）。

   A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

7. 利用幂级数性质，求下列幂级数的收敛域与和函数：

   (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}$；

   (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$；

   (3) 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的和函数，并进一步计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n}$ 的和。

5.4 函数展开成幂级数

1. 将 $f(x) = \sin^2 x$ 展开成 x 的幂级数。

2. 分别求出 $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-4)}$ 在 $x_0 = 0$, $x_0 = 2$ 的某邻域内的泰勒级数。

3. 将 $f(x) = \arctan \dfrac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数。

4. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n!}$ 的和。

5.5 傅里叶级数

1. 三角函数的正交性是指在三角函数系中（　　）。

   A. 任意一个函数在 $[-\pi,\pi]$ 上积分值为 0

   B. 任意两个不同函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上积分值为 0

   C. 任意一个函数的平方在 $[-\pi,\pi]$ 上积分值为 0

   D. 任意两个不同函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上积分值为 0，任意一个函数的平方在 $[-\pi,\pi]$ 上积分值为 0

2. 设周期函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，在区间 $(0,2\pi]$ 上有 $f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 处收敛于（　　）。

   A. 0　　B. π^2　　C. $2\pi^2$　　D. $4\pi^2$

3. 将函数 $f(x)=e^x$（$x\in(0,\pi)$）展开成正弦级数。

5.6 一般周期函数的傅里叶级数

1. 由函数 $y = x^2$ 在 $[-1, 1]$ 的傅里叶级数 $\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$ 可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = ($　　$)$。

A. $-\frac{\pi^2}{12}$　　B. $-\frac{\pi^2}{6}$　　C. $\frac{\pi^2}{6}$　　D. $\frac{\pi^2}{12}$

2. 将函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x \le 0, \\ 1, & 0 < x < 2 \end{cases}$ 展开成傅里叶级数。

5.7 本章综合测验

一、选择题

1. 指出下列命题正确的是（　　）。

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$

2. 设级数 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ 与 (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$，其敛散性判定结果是（　　）。

A. (1)(2) 都收敛　　B. (1) 发散，(2) 收敛

C. (1)(2) 都发散　　D. (1) 收敛，(2) 发散

3. 已知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 在 $x = -2$ 处发散，则其在 $x = 5$ 处（　　）。

A. 一定发散　　B. 一定条件收敛

C. 一定绝对收敛　　D. 无法判断

4. 若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则下列级数中必收敛的是（　　）。

A. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$　　B. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$

C. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})$　　D. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

5. 设周期函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，在区间 $[-\pi, \pi]$ 上有 $f(x) = 2x^2$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = -\pi$ 处收敛于（　　）。

A. 0　　B. π^2　　C. $2\pi^2$　　D. $4\pi^2$

6. 已知函数 $f(x) = x^2$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的傅里叶级数 $\displaystyle\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos nx$，则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$（　　）。

A. $-\dfrac{\pi^2}{3}$　　B. $-\dfrac{\pi^2}{6}$　　C. $\dfrac{\pi^2}{3}$　　D. $\dfrac{\pi^2}{6}$

二、填空题

1. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项和 $S_n = \dfrac{3n}{n+1}$，则通项 $u_n =$______。

2. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n4^{n+1}x^n$ 的收敛区间是______。

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2^n}{n} + \dfrac{3^n}{n^2}\right) x^n$ 的收敛域是______。

4. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ 的和 $s =$______。

5. 如果幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛，在 $x=3$ 处发散，则该级数的收敛半径 $R =$______。

三、计算题

1. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cos^2 \frac{n\pi}{3}}{5^n}$ 的敛散性。

2. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1}\left(1-\cos\dfrac{3\pi}{n}\right)$ 的敛散性。

3. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{3^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性。

4. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[n\left(\frac{2}{3}\right)^n+3^n\sin\frac{\pi}{4^n}\right]$ 的敛散性。

5. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 的敛散性，并判断为条件收敛或绝对收敛。

6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(n+1)}$ 的和。

7. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

8. 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 $\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的幂级数。