Corrigé colle S13
MPI/MPI* du lycée Faidherbe
Exercices 23, 26

Léane Parent

7 décembre 2025

Exercice 23

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+\dots t^n}dt.$

On considère, pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n(t)=\frac{1}{1+t+\dots t^n}$, qui est continue, donc intégrable.
Sur $[0,1[$, $f_n(t)=\frac{1-t}{1-t^{n+1}}$, sur $[0,1[$.

Pour tout n, pour tout $t\in[0,1[$, $|f_n(t)|\leqslant 1$, et $t\mapsto 1$ est continue, donc intégrable, sur $[0,1[$.

De plus, (f_n) converge simplement vers $f: t\mapsto 1-t$, sur $[0,1]$.
D'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t+\dots t^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 (1-t)dt=\frac{1}{2}$$

Exercice 26

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{R}_+$, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}dx.$
Dans tout l'exercice, on notera $f_n: x\mapsto\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}$

1. Calculer un équivalent de u_n quand $\alpha=0$.

On a alors, pour $x\in\mathbb{R}_+$, $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$. Ainsi, à partir d'un certain rang, $f_n\geqslant \exp -1$, d'où $u_n\geqslant\displaystyle\int_0^n(e^x-1)dx$.
Or, $\int(\exp -1)$ diverge vers $+\infty$, d'où $u_n\to+\infty$.

2. Si $\alpha\in]1,+\infty[$, déterminer la limite de (u_n).

On considère, pour $x\in\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-\alpha t}dt$. On sait que $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\leqslant e^{-t}$ (car la suite est croissante, et converge vers e^{-t}).
Dès lors $0\leqslant f_n(t)\leqslant e^{t(1-\alpha)}$, donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

De plus, $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n + \mathrm{o}(1)$ (en effet, u_n est l'intégrale partielle de f_n).
f_n est intégrable, dominée par $\varphi : t \mapsto e^{t(1-\alpha)}$ qui est intégrable, et CVS vers φ, d'où :

$$\int_0^{+\infty} f_n \to \int_0^{+\infty} e^{t(1-\alpha)} dt = \frac{1}{1-\alpha}$$

D'où $u_n \to \frac{1}{1-\alpha}$.

3. Si $\alpha = 1$, déterminer la limite de (u_n), puis un équivalent de u_n

On a de même que précédemment :

$$(e^t - 1)e^{-t} \leqslant f_n(t) \leqslant 1$$

On en déduit immédiatement que $u_n \sim n \to +\infty$.

4. En déduire le comportement de (u_n) pour $\alpha \in]0,1[$.

On a alors $u_n \geqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n dt \to +\infty$.
Ainsi, par théorème de minoration, $u_n \to +\infty$.