

Corrigé colle S13  
 MPI/MPI\* du lycée Faidherbe  
 Exercices 23, 26

Léane Parent

21 décembre 2025

### Exercice 23

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t+\dots+t^n} dt.$

On considère, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(t) = \frac{1}{1+t+\dots+t^n}$ , qui est continue, donc intégrable.  
 Sur  $[0, 1[$ ,  $f_n(t) = \frac{1-t}{1-t^{n+1}}$ , sur  $[0, 1[$ .

Pour tout  $n$ , pour tout  $t \in [0, 1[, |f_n(t)| \leq 1$ , et  $t \mapsto 1$  est continue, donc intégrable, sur  $[0, 1[$ .

De plus,  $(f_n)$  converge simplement vers  $f : t \mapsto 1 - t$ , sur  $[0, 1]$ .  
 D'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t+\dots+t^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}$$

### Exercice 26

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx.$

Dans tout l'exercice, on notera  $f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}$

1. Calculer un équivalent de  $u_n$  quand  $\alpha = 0$ .

On a alors, pour  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$ . Ainsi, à partir d'un certain rang,  $f_n \geq \exp -1$ , d'où  $u_n \geq \int_0^n (e^x - 1) dx$ .  
 Or,  $\int (\exp - 1)$  diverge vers  $+\infty$ , d'où  $u_n \rightarrow +\infty$ .

2. Si  $\alpha \in ]1, +\infty[$ , déterminer la limite de  $(u_n)$ .

On considère, pour  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-\alpha t} dt$ . On sait que  $\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$  (car la suite est croissante, et converge vers  $e^{-t}$ ).  
 Dès lors  $0 \leq f_n(t) \leq e^{t(1-\alpha)}$ , donc  $f_n$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

De plus,  $u_n = \int_0^{+\infty} f_n + o(1)$  (en effet,  $u_n$  est l'intégrale partielle de  $f_n$ ).

(Note : il est plus propre de passer par l'intégrale de  $f_n \mathbf{1}_{[0,n]}$ )

$f_n$  est intégrable, dominée par  $\varphi : t \mapsto e^{t(1-\alpha)}$  qui est intégrable, et CVS vers  $\varphi$ , d'où :

$$\int_0^{+\infty} f_n \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{t(1-\alpha)} dt = \frac{1}{1-\alpha}$$

D'où  $u_n \rightarrow \frac{1}{1-\alpha}$ .

3. Si  $\alpha = 1$ , déterminer la limite de  $(u_n)$ , puis un équivalent de  $u_n$

On a de même que précédemment :

$$(e^t - 1)e^{-t} \leq f_n(t) \leq 1$$

On en déduit immédiatement que  $u_n \sim n \rightarrow +\infty$ .

4. En déduire le comportement de  $(u_n)$  pour  $\alpha \in ]0, 1[$ .

On a alors  $u_n \geq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-x} dt \rightarrow +\infty$ .

Ainsi, par théorème de minoration,  $u_n \rightarrow +\infty$ .