Best-of

Léane Parent

13 janvier 2026

Ce document est dédié aux bêtises que j'ai écrit dans mes corrections (et publié !) (ce qui perd un peu de l'intérêt d'une correction, vous me direz...)
L'auteure décline toute responsabilité en cas d'utilisation de ces propositions dans une copie.

Premier théorème de goban

> Si $M \in T^+(\mathbb{R})$, alors la dimension du noyau de M égale le nombre de 0 sur sa diagonale.

Démonstration. On procède par récurrence sur le nombre de 0 sur la diagonale.

- Si les coefficients diagonaux sont non nuls, on sait que la matrice est inversible, d'où le résultat
- supposons la propriété vraie pour k zéros sur la diagonale. On considère alors une matrice M à $k+1$ zéros sur sa diagonale. Quitte à prendre une matrice semblable (ce qui ne change pas la dimension du noyau), on suppose que $M_{1,1} = 0$. On écrit alors $M = \begin{pmatrix} 0 & v \\ (0) & M' \end{pmatrix}$, avec M' de noyau de dimension k, par hypothèse de récurrence.

  Pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, on écrit $X = {}^T(x\ X')$.
  On a $X \in \ker M$ ssi $vX = 0$ et $M'X = 0$, ie $X' \in \ker M'$.
  On va lâchement ignorer la première condition.
  On obtient donc $\ker M = \operatorname{Vect}\left({}^T(1\ 0\ \ldots\ 0), {}^T(0\ X')\right)_{X' \in \ker M'}$, d'où le résultat

D'après le principe de récurrence, la proposition est bien vraie pour tout k. □

Corollaire 1 : Une matrice nilpotente est nulle.
(*Note* : ce résultat étant connu, on pouvait directement utiliser celui-ci pour démontrer le théorème, en notant, à similitude près, $M = \begin{pmatrix} N & * \\ (0) & M' \end{pmatrix}$, avec N nilpotente et M inversible.)
Corollaire 2 : Le noyau d'une matrice itérée égale le noyau de la matrice elle-même.
(*Élément de preuve* : S'obtient en trigonalisant dans $M_n(\mathbb{C})$)
(utilisé dans l'exercice 19 de la semaine 7)

Second théorème de goban

Pour E, F_1, F_2 trois sous-espaces vectoriels du même espace, on a :

$$E \cap (F_1 + F_2) = (F_1 \cap E) + (F_2 \cap E)$$

Autrement dit, l'intersection passe à la somme.

Démonstration. L'inclusion directe est immédiate, et je ne vous ferai pas l'affront de vous en faire la démonstration.

On suppose $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in F_1 \cap E$, $x_2 \in F_2 \cap E$. Alors $x_1 + x_2 \in F_1 + F_2$ par définition de la somme, et $x_1 + x_2 \in E$ par stabilité pour $+$, d'où l'inclusion réciproque. $\square$

Corollaire 1 : Ce résultat reste vrai pour une somme directe.
Corollaire 2 : Ce résultat reste vrai pour une somme de k sev.
(Très utile pour décomposer un sous-espace F de E (par exemple en sous-espaces propres de F, etc.), si on a une décomposition de E tout entier (utilisé dans l'exercice 16 de la semaine 7.))

Troisième théorème de goban

Pour E euclidien, $S^+(E)$ engendre $L(E)$

Démonstration. La démonstration se fera matriciellement, pour plus de commodité.
D'une part, on a $\operatorname{Vect} S_n^+(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R})$. De plus, on sait que $\dim \operatorname{Vect} S_n(\mathbb{R})$ est de l'ordre de n^2, qui est bien la dimension de $M_n(\mathbb{R})$. On a une inclusion évidente, d'où l'égalité. $\square$

Démonstration. Deux pour le prix d'une !
On sait que les matrices diagonalisables sont denses dans $M_n(\mathbb{R})$, et les matrices symétriques sont diagonalisables (théorème spectral) : on en déduit que $S_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$. Or, $S_n(\mathbb{R})$ est un sev de dimension finie, donc est fermé : on en déduit que $S_n(\mathbb{R}) = \overline{S_n}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$, d'où le résultat. $\square$

Corollaire Toute matrice réelle est symétrique. En particulier, toute matrice réelle est diagonalisable (par théorème spectral).

Utilisé dans l'exercice 25 de la semaine 16 : si un endo commute avec tous les autoadjoints positifs, alors c'est une homothétie (ce qui est vrai, mais pas pour cette raison)