

Corrigé colle S15  
 MPI/MPI\* du lycée Faidherbe  
 Exercices 26, 27

Léane Parent

2 janvier 2026

### Exercice 26

Soit  $N \geq 1$ . Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  iid de loi  $\mu$  sur  $\llbracket 1, N \rrbracket$  tq  $\mu(1) > 0$ .

On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$  (avec  $S_0 = 0$ ), et  $E = \{S_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ .

- Montrer que pour  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{P}(n \in E) = \sum_{k=1}^N \mu(k) \mathbb{P}(n - k \in E)$

$$(n \in E) = \bigcup_{k=1}^N (X_1 = k) \cap (n - k \in E'), \text{ où } E' = \{S'_i \mid i \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\}, \text{ et } S'_i = \sum_{k=2}^i X_k.$$

Or,  $S'_i \sim S_{i-1}$ , d'où  $E' \sim E$ .

$$\text{On a donc } \mathbb{P}(n \in E) = \sum_{k=1}^N \mu(k) \mathbb{P}(n - k \in E') = \sum_{k=1}^N \mu(k) \mathbb{P}(n - k \in E)$$

*Note* : on peut plus simplement (mais j'ai la flemme de rédiger une deuxième fois) stratifier selon la valeur du dernier élément, et non du premier, ce qui permet d'éviter de justifier les équivalences

- Soient  $F(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(n \in E) z^n$ ,  $G(z) = \sum_{k=1}^N \mu(k) z^k$ . Montrer que  $F = \frac{1}{1-G}$ .

On prend  $z$  dans le rayon de convergence de  $F$

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(n \in E) z^n = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} z^n \sum_{k=1}^N \mu(k) \mathbb{P}(n-k \in E) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{n-k=i} \mu(k) \mathbb{P}(i \in E) z^n \quad (\text{tout est sommable dans le rayon de convergence}) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^N z^i z^k \mu(k) \mathbb{P}(i \in E) \quad (\text{les termes pour } k > N \text{ étant nuls}) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} z^i \mathbb{P}(i \in E) \sum_{k=1}^N \mu(k) z^k = \sum_{i \in \mathbb{N}} z^i \mathbb{P}(i \in E) G(z) \\
&= G(z)(1 + F(z)) \quad (\text{car } \mathbb{P}(0 \in E) = 1 : S_0 = 0)
\end{aligned}$$

On a donc  $F(z) = G(z)(1 + F(z))$ , d'où le résultat.

3. Montrer que  $F$  admet un pôle simple en 1, et que les autres pôles sont de module strictement plus grand que 1.

$F$  admet un pôle en  $z$  ssi  $G(z) = 1$ . Or,  $G(1) = \sum_{k=1}^N \mu(k) = 1 : 1$  est pôle de  $F$ .

De plus,  $G'(1) = \sum_{k=2}^N \mu(k)$ , qui est différent de 0 si  $\mu(1) \neq 1 : 1$  est alors racine simple de  $1 - G$ , donc pôle simple de  $F$ . Si  $\mu(1) = 1$ ,  $S_n = n$  presque sûrement, d'où  $F(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} z^n = \frac{1}{1-z}$  sur  $] -1, 1[$ , donc 1 est pôle simple.

De plus, si  $z$  est pôle de  $F$  de module 1, alors  $\left| \sum_{k=1}^N \mu(k) z^k \right| \leq \sum_{k=1}^N |\mu(k) z^k| \leq \sum_{k=1}^N \mu(k) = 1$ , et il y a égalité entre le premier et le dernier terme donc égalité à chaque inégalité. Ainsi, les  $z^k$  sont positivement colinéaires donc  $z \in \mathbb{R}_+$  : on a bien  $z = 1$ .

## Exercice 27

On tire  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  aléatoirement. On note  $X_n$  la variable aléatoire qui donne le nombre de cycles de  $\sigma$ .

1. Calculer  $\mathbb{P}(X_n = 1)$ ,  $\mathbb{P}(X_n = n)$ .

On se place dans un cadre d'équiprobabilité.

Si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  contient  $n$  cycles, alors  $\sigma = \text{Id}$  (car tout point est point fixe : en effet, tout point appartient à un cycle de longueur 1).

Dès lors,  $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n!}$ .

De plus, si  $\sigma$  comporte exactement 1 cycle, alors il s'agit d'un  $n$ -cycle.

Or, un  $n$ -cycle dans  $\mathfrak{S}_n$  est entièrement déterminé par :

- $\sigma(1)$  :  $n-1$  choix, car 1 n'est pas point fixe
- $\sigma^2(1)$  :  $n-2$  choix, car  $\sigma(1)$  n'est pas point fixe, et ne peut être envoyé sur 1 sous

réserve de former un cycle de longueur 2

- ...
- $\sigma^n(1) = 1$  pour former un  $n$ -cycle : 1 choix

Ainsi, il existe  $(n - 1)!$   $n$ -cycles dans  $\mathfrak{S}_n$ , d'où  $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ .

## 2. Déterminer la fonction génératrice de $X_n$ .

Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ , on considère  $\sigma' = (\sigma(n+1) \ n+1)\sigma \in \mathfrak{S}_n$  (l'idée c'est qu'il s'agit de  $\sigma$  "corrigée" pour que  $n+1$  soit point fixe.)

Dès lors, le nombre de cycle de  $\sigma$  est, si on note  $k$  le nombre de cycles de  $\sigma'$  :

- $k + 1$  si  $n+1$  est point fixe (avec probabilité  $\frac{1}{n+1}$ , j'ai la flemme de le montrer (ça découle des  $n+1$  possibilités pour  $\sigma(n+1)$ ), indépendante de  $\sigma'$ )
- $k$  sinon

Montrons maintenant que  $\sigma'$  suit une loi uniforme dans  $\mathfrak{S}_n$ . (flemme → plus tard)  
on a alors  $X_{n+1} \sim X_n + Y_n$ , avec  $X_n \perp\!\!\!\perp Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Dès lors, en notant  $G_n$  la fonction génératrice de  $X_n$ , on a  $G_{n+1}(t) = \frac{n-1+t}{n}G_n(t)$ . On arrive alors à une définition de  $G_n$  comme produit (il y a sûrement plus beau).

## 3. Déterminer son espérance et sa variance

On a, par linéarité de l'espérance,  $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{n+1}$ , d'où, par une récurrence immédiate ( $X_1 = 1$ ),  $\mathbb{E}(X_n) = H_n$ , où  $H_n$  est la somme partielle de la série harmonique.  
(On remarque que  $\mathbb{E}(X_n) \sim \log n$ .)

De plus, on sait que  $X_n \perp\!\!\!\perp Y_n$  d'où  $\mathbb{V}(X_{n+1}) = \mathbb{V}(X_n) + \mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{V}(X_n) + \frac{n-1}{n^2}$ .

On en déduit que  $\mathbb{V}(X_n) = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k^2}$  (on vérifie que cette formule est bien vraie en  $n = 1$ )

Ainsi,  $\mathbb{V}(X_n) = \frac{n(n+1)}{2} - S_n$ , avec  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ . (On remarque que  $\mathbb{V}(X_n) \sim \frac{n^2}{2}$ .)