

Corrigé colle S17
 MPI/MPI* du lycée Faidherbe
 Exercice 15 et 16

Léane Parent

19 janvier 2026

Exercice 15

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin \sqrt{t} dt$.

a) Mq f est de classe \mathcal{C}^1

On applique le théorème \mathcal{C}^1 (quelle surprise!), pour arriver à :

$$f'(t) = - \int_0^{+\infty} te^{-xt} \sin \sqrt{t}$$

b) Donner la limite de f en $+\infty$.

On applique le théorème de convergence dominée (quelle surprise!), pour arriver à :

$$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

c) Mq f est solution d'une EDL homogène du premier ordre.

Par le changement de variable $u = \sqrt{t}$ ($u^2 = t$, $dt = 2u du$, et la racine carrée est bien \mathcal{C}^1 bijective), on obtient :

$$f(x) = 2 \int_0^{+\infty} ue^{-xu^2} \sin u du \quad \text{ainsi que} \quad f'(x) = -2 \int_0^{+\infty} u^3 e^{-xu^2} \sin u du$$

On a envie de faire apparaître du u^3 dans f : IPPons donc.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2[ue^{-xu^2} \cos u]_0^{+\infty} && + 2 \int_0^{+\infty} (1 - 2xu^3)e^{-xu^2} \cos u du \\ &= 0 && + 2 \int_0^{+\infty} (1 - 2xu^3)e^{-xu^2} \cos u du \\ &= [(1 - 2xu^3)e^{-xu^2} \sin u]_0^{+\infty} && + \int_0^{+\infty} (-4xu + 4x^2u^3)e^{-xu^2} \sin u du \\ &= 0 && + 4xf(x) - 4x^2f'(x) \end{aligned}$$

d) Exprimez f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 16

Note : l'examinateur, par pure mesquinerie, note $f(t) = \int h(t, x) dx$. On prendra garde à ne pas confondre paramètre et variable d'intégration.

- a) Déterminer I l'ensemble des réels t tq $x \mapsto e^{-xt} \frac{\sin x}{x}$ est intégrable

On pose $h(t, x) = e^{-xt} \frac{\sin x}{x}$.

On supposera (pour la cohérence avec les questions suivantes) qu'il est question d'intégrabilité sur \mathbb{R}_+^* .

h est évidemment continue.

De plus, on a, d'une part, $h(t, x) \sim_{x \rightarrow 0} 1$: $x \mapsto h(t, x)$ est bien intégrable au voisinage de 0.

D'autre part, $h(t, x) = O_{x \rightarrow +\infty}(\frac{e^{-xt}}{x})$, d'où $x \mapsto h(t, x)$ intégrable au voisinage de $+\infty$ si $x > 0$.

Si $x \leq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin x}{x} dx &\geq \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\ &\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{dans } \overline{\mathbb{R}_+} \\ &\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin x dx \end{aligned}$$

Et cette série est divergente. On a bien vérifié que $x \mapsto h(t, x)$ n'est pas intégrable.

Ainsi, cette fonction n'est intégrable que pour $t \in \mathbb{R}_+^*$

- b) Pour $t \in I$, calculer $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin x}{x} dx$.

Vous n'êtes pas sans savoir qu'une fonction, c'est une primitive de sa dérivée (si, si). Dérivons donc.

On a $\partial_1 h(t, x) = -e^{-xt} \frac{\sin x}{x}$.

On pose $\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ e^{-xt} & \text{sinon} \end{cases}$

On vérifie que ϕ est intégrable et domine $\partial_1 h(t, x)$.

Dès lors, par théorème \mathcal{C}^1 pour les intégrales à paramètre, f est \mathcal{C}^1 , et on a $f(t) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin x dx$

Calculons cette intégrale. On a $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$.

On a donc par \mathbb{R} -linéarité de la partie imaginaire :

$$f'(t) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin x dx = - \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{it} dx = \operatorname{Im} \frac{1}{i-t} [e^{x(i-t)}]_{+\infty}^0 = \operatorname{Im} \frac{1}{i-t}$$

Or, $\frac{1}{i-t} = \frac{i-t}{1+t^2}$, d'où par passage à la partie imaginaire, $f'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$.

On en déduit $f(t) = -\operatorname{Arctan} t + k$, avec k une constante réelle.

Or, par théorème de convergence dominée (j'en rédige déjà un en-dessous, faudrait pas que je me fatigue), on montre que $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, d'où $k = \frac{\pi}{2}$.

On a ainsi $f(t) = -\operatorname{Arctan} t + \frac{\pi}{2}$.

c) En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

On applique le théorème de convergence dominée :

$$x \mapsto h(t, x) \text{ est dominée (vérifiez-le!) par } x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{\sin x}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cette fonction est bien intégrable car en $O(\frac{1}{x^2})$, et $h(x, t)$ est bien continue, d'où :

$$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \text{ Or, } f(t) \rightarrow \frac{\pi}{2}, \text{ d'où :}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$