

Corrigé colle S9  
MPI/MPI\* du lycée Faidherbe  
Exercices 15, 16 et 17

Brahim El Hamdani et Léane Parent

18 novembre 2025

### Exercice 15

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On note  $\Omega$  l'ensemble des bijections de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ .

1. Mq la série  $\sum u_n$  CVA ssi pour toute bijection  $\sigma \in \Omega$ , la série  $\sum u_{\sigma(n)}$  est convergente.

Dans tout l'exercice, on notera  $E^+ = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \geq 0\}$ . On définit de même  $E^-$ .

Si la série converge absolument :

Soit  $\sigma \in \Omega$ .

$\sum |u_n|$  converge et est à termes positifs, donc  $\sum |u_{\sigma(n)}|$  converge. Ainsi,  $\sum u_{\sigma(n)}$  CVA donc CV.

Sinon, on va construire une bijection qui ne vérifie pas la propriété.

On a alors  $\max\{0, u_n\} = \frac{a_n + |a_n|}{2}$ ,  $\min\{0, u_n\} = \frac{a_n - |a_n|}{2}$ , et on en déduit que les séries  $\sum \max\{0, u_n\}$  et  $\sum \min\{0, u_n\}$  divergent (par somme d'une série convergente et d'une matrice divergente).

On construit  $\sigma$  par récurrence :

On pose  $\sigma(0) = 0$ , et, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

- Si, pour  $A \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)} \geq A$ , et que pour  $p \leq n$ ,  $\sum_{k=0}^{p-1} u_{\sigma(k)} < A$ ,  $\sigma(n) = \min E^+ \setminus \sigma(\llbracket 0, n \rrbracket)$
- Sinon, on pose  $\sigma(n) = \min E^- \setminus \sigma(\llbracket 0, n \rrbracket)$

Montrons que  $\sigma$  est une bijection. L'injectivité étant immédiate, il suffit de prouver la surjectivité.

Supposons  $n$  non atteint.

Si  $n \in E^+$ , on a, par construction, pour  $n' \geq n$  dans  $E^+$ ,  $n'$  n'est pas atteint.

Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les éléments sont négatifs, ce qui est absurde par construction de  $\sigma$ .

De même, si  $n \in E^-$ , tous les éléments supérieurs dans  $E^-$  ne sont pas atteints. Alors les termes de la série  $\sum u_{\sigma n}$  sont positifs à partir d'un certain rang, donc diverge car elle n'est pas absolument convergente, donc diverge vers  $+\infty$  car les termes sont positifs (à partir d'un certain rang). Cela est absurde car alors  $n$  devrait être atteint par  $\sigma$ .

On montre aisément que la série diverge, mais pour la suite de l'exercice, montrons que celle-ci diverge vers  $+\infty$ .

La série des  $u_n$  converge, donc il existe un rang  $n_2$  à partir duquel  $|u_n| \leq \varepsilon = 1$ . Par injectivité de  $\sigma$ , il existe un rang  $n_1$  à partir duquel  $|u_{\sigma(n)}| \leq 1$ .

Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Quitte à prendre la partie entière supérieure de  $A$ , supposons  $A \in \mathbb{N}$ . Par construction de  $\sigma$ , il existe un rang  $n_0 \geq n_1$  tq  $\sum_{k=0}^{n_0} u_{\sigma(k)} \geq A + 1$ . On montre alors :

- $\sum_{k=0}^{n_0+1} u_{\sigma(k)} \geq A$
- Par une récurrence, si  $n > n_0$ , on a soit  $u_{\sigma(n)} \geq 0$ , soit celui-ci est négatif, supérieur à -1, mais alors la somme partielle de rang  $n - 1$  est supérieure à  $A + 1$  : dans tous les cas, la somme partielle reste supérieure à  $A$ .

On a alors, pour  $n \geq n_0$ , une somme partielle supérieure à  $A$ , et ce pour tout  $A$  : la série diverge vers  $+\infty$

On a bien montré qu'une série  $\sum u_n$  convergente converge absolument ssi, pour toute bijection  $\sigma$ ,  $\sum u_{\sigma(n)}$  converge.

2. Déterminer  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

On considère la somme partielle  $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ \text{pair}}}^{2n} \frac{-1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ \text{pair}}}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Par analyse asymptotique, avec  $\sum_{k=1}^n 1/k = \log n + \gamma + o(1)$ , on obtient :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2n + \gamma - \log n - \gamma + o(1) = \log 2 + o(1).$$

De plus,  $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^{2n+1} = \log 2 + o(1)$ .

On a  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$

3. Calculer la somme  $(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}) - (\frac{1}{6} + \frac{1}{8}) \dots$

Qui sait, je le ferai peut-être avant votre colle ?

4. Quelles sont les valeurs possibles, dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , de  $\sum u_{\sigma(n)}$ , quand  $\sigma$  parcourt  $\Omega$  ?

On suppose  $\sum u_n$  semi-convergente. On a montré plus haut que  $+\infty$  était atteint. On montre de même que  $-\infty$  est atteint.

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On va construire  $\sigma$  tq  $\sum u_{\sigma(n)}$  CV vers  $\alpha$ .

Construisons maintenant, par récurrence sur  $n$ ,  $\sigma(n)$ .

On pose  $\sigma(0) = 0$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

- Si  $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \alpha$ , on prend  $\sigma(n) = \min E^+ \setminus \sigma(\llbracket 0, n \rrbracket)$ .
- Si  $\sum_{k=0}^{n-1} u_k > \alpha$ , on prend  $\sigma(n) = \min E^- \setminus \sigma(\llbracket 0, n \rrbracket)$ .

L'injectivité de  $\sigma$  est immédiate. Montrons sa surjectivité.

Raisonnons par l'absurde. Si  $n_0 \in \mathbb{N}$  n'est pas atteint. Supposons  $n_0 \in E^+$  (le cas  $n_0 \in E^-$  se démontre de même).

On déduit de la définition de  $\sigma$  que, pour  $n \geq n_0$ ,  $n_0$  n'est pas atteint. Dès lors, la série  $\sum u_{\sigma(n)}$  est supérieure à  $\alpha$  à partir d'un certain rang, donc  $\sigma(n)$  parcourt tout  $E^-$ .

La série  $\sum u_{\sigma(n)}$  est minorée, et est à termes négatifs, donc décroissante, à partir d'un certain rang.

On en déduit que la série des  $u_{\sigma(n)}$  est absolument convergente (car convergente et de signe constant à partir d'un certain rang). Dès lors, la série  $\sum_{n \in E^-} u_n$  converge absolument, donc converge, ce qui est absurde. (On s'est ramenés à la série des termes négatifs car ces deux séries ne diffèrent que d'un nombre fini de termes)  
 $\sigma$  est bijective.

Montrons maintenant que  $\sum u_{\sigma(n)}$  converge vers  $\alpha$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . La série des  $u_n$  converge, donc, à partir d'un certain rang  $n_1$ ,  $|u_n| \leq \varepsilon$ . Par injectivité de  $\sigma$ , il existe  $n_0$  tq, pour  $n \geq n_0$ ,  $u_{\sigma(n)} \leq \varepsilon$ .

On sait qu'il existe  $N \geq n_0$  tq  $\sigma(N) \geq 0$ ,  $\sigma(N+1) < 0$  (sinon, la suite resterait dans un des  $E^-$  ou  $E^+$  à partir d'un certain rang, et on a montré plus haut que c'était absurde).

Dès lors, on a, en notant  $S_n$  la  $n$ -ième somme partielle :

$S_N \leq \alpha$ ,  $S_{N+1} \geq \alpha$ . Or,  $S_{N+1} = S_N + u_{N+1} \leq \alpha + \varepsilon$ . On en déduit  $|S_{N+1} - \alpha| \leq \varepsilon$ .

Soit  $n > N$ . Supposons  $S_n > \alpha + \varepsilon$ . Puisque  $|u_{\sigma(n)}| \leq \varepsilon$ ,  $S_{(n-1)} > \alpha$ . Ainsi,  $u_{\sigma(n)} < 0$ .

On a alors  $\alpha + \varepsilon < S_n \leq S_{n-1}$ . En appliquant le même raisonnement au rang  $n-1$ , puis en itérant, on obtient de proche en proche :

$$\alpha + \varepsilon < S_n \leq S_{n-1} \leq \dots \leq S_N$$

D'où une contradiction. On en déduit que pour  $n \geq N$ ,  $S_n \leq \alpha + \varepsilon$ . On montre de même que  $S_n \geq \alpha - \varepsilon$ . Ainsi, on a, à partir d'un certain rang,  $|S_n - \alpha| \leq \varepsilon$ , d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha$$

On a montré que toute valeur de  $\overline{\mathbb{R}}$  était atteinte.

5. Pourquoi, en ce qui concerne les probabilités, l'ordre de sommation n'a pas d'importance ?

On a des éléments positifs, et la somme sur une partie finie est majorée par 1, d'où la sommabilité. Ainsi, l'ordre de sommation n'a pas d'importance

6. En déduire que, si  $E$  est dénombrable, muni de la tribu  $\mathcal{P}(E)$ , toute probabilité est entièrement déterminée par sa valeur sur les singletons.

On a alors, pour  $A \subset E$ ,  $p(A) = \sum_{x \in A} p(\{x\})$ .

### Exercice 16 (D'après l'exercice 4 du document "Tribu infinie non dénombrable")

Soit  $\Omega$  un ensemble non-vide et  $\mathcal{T}$  une tribu sur  $\Omega$ . Pour  $x \in \Omega$ , on définit

$$\mathcal{F}_x := \{T \in \mathcal{T} : x \in T\} \quad \text{et} \quad [x] := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F.$$

1. Montrer que  $x \notin [y]$  implique  $y \notin [x]$ . En déduire que  $x \sim y$  si  $x \in [y]$  est une relation d'équivalence sur  $\Omega$ .

Si  $x \notin [y]$ , alors il existe  $A \in \mathcal{T}$  tel que  $x \notin A$  et  $y \in A$ .  
Alors  $\bar{A} \in \mathcal{T}$ , avec  $y \notin \bar{A}$  et  $x \in \bar{A}$ , donc  $y \notin [x]$ .

Définissons  $x \sim y$  par  $x \in [y]$ . Vérifions que  $\sim$  est une relation d'équivalence :

- **Réflexivité** :  $x \in [x]$  car  $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F$ .
- **Symétrie** : Si  $x \in [y]$ , supposons  $y \notin [x]$ . Alors  $x \notin [y]$  d'après l'implication prouvée, contradiction. Donc  $y \in [x]$ .
- **Transitivité** : Si  $x \in [y]$  et  $y \in [z]$ , alors pour tout  $F \in \mathcal{T}$  avec  $z \in F$ , on a  $y \in F$  (car  $y \in [z]$ ), donc  $x \in F$  (car  $x \in [y]$ ). Ainsi  $x \in [z]$ .

Donc  $\sim$  est une relation d'équivalence.

2. Montrer que  $\mathcal{P} = \{[x] : x \in \Omega\}$  est une partition de  $\Omega$ .

- Chaque  $[x]$  est non vide car  $x \in [x]$ .
- $\bigcup_{x \in \Omega} [x] = \Omega$  car  $x \in [x]$ .
- Si  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ , soit  $z \in [x] \cap [y]$ . Alors  $z \sim x$  et  $z \sim y$ , donc  $x \sim y$  par symétrie et transitivité, d'où  $[x] = [y]$ .  
Ainsi  $\mathcal{P}$  est une partition de  $\Omega$ .

3. Soit  $T \in \mathcal{T}$ . Montrer que  $T = \bigcup_{x \in T} [x]$ .

- Pour tout  $x \in T$ , on a  $T \in \mathcal{F}_x$ , donc  $[x] = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F \subseteq T$ . Ainsi  $\bigcup_{x \in T} [x] \subseteq T$ .
- Inversement, si  $x \in T$ , alors  $x \in [x]$ , donc  $T \subseteq \bigcup_{x \in T} [x]$ .  
D'où  $T = \bigcup_{x \in T} [x]$ .

4. Montrer que  $\mathcal{P}$  est infinie si  $\mathcal{T}$  est infinie.

Supposons  $\mathcal{P}$  fini, de cardinal  $n$ .

D'après l'exercice 1, la tribu engendrée par une partition finie de  $n$  ensembles non vides disjoints a pour cardinal  $2^n$ .

Or, par (c), tout  $T \in \mathcal{T}$  est réunion de classes de  $\mathcal{P}$ , donc  $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{P})$ .

Ainsi  $|\mathcal{T}| \leq 2^n < \infty$ .

Par contraposée, si  $\mathcal{T}$  est infinie, alors  $\mathcal{P}$  est infinie.

5. Soit  $\mathcal{P}$  infinie. Montrer (par l'absurde) que  $\mathcal{T}$  est indénombrable.

- (a) Montrer que si  $\mathcal{T}$  est dénombrable, alors  $[x] \in \mathcal{T}$  pour tout  $x \in \Omega$ . En déduire que  $\mathcal{P}$  est dénombrable.

Pour tout  $x$ ,  $\mathcal{F}_x = \{T \in \mathcal{T} : x \in T\}$  est dénombrable.

Alors  $[x] = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F$  est une intersection dénombrable d'éléments de  $\mathcal{T}$ , donc  $[x] \in \mathcal{T}$ . Ainsi  $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$ , donc  $\mathcal{P}$  est dénombrable.

- (b) Soit  $(P_n)_{n \geq 0}$  une énumération de  $\mathcal{P}$ . S'en servir pour construire une bijection  $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \sigma(\{P_n : n \in \mathbb{N}\}) \subset \mathcal{T}$ . Conclure.

Puisque  $\mathcal{P}$  est dénombrable infinie, on peut indexer ses éléments par  $\mathbb{N}$  : soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}$  une bijection. On note  $P_n = f(n)$ .

Les  $P_n$  sont disjoints car  $\mathcal{P}$  est une partition.

Soit  $\sigma(\{P_n : n \in \mathbb{N}\})$  la plus petite tribu contenant tous les  $P_n$  (on l'appelle la tribu engendrée par  $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ ).

Soit  $\mathcal{A} = \{\bigcup_{k \in S} P_k : S \subset \mathbb{N}\}$ .

Montrons que  $\sigma(\{P_n\}) = \mathcal{A}$  par double inclusion :

—  $\mathcal{A} \subset \sigma(\{P_n\})$  :

Soit  $A \in \mathcal{A}$ , donc  $A = \bigcup_{k \in S} P_k$  pour un  $S \subset \mathbb{N}$ .

Comme chaque  $P_k \in \sigma(\{P_n\})$  et  $\sigma(\{P_n\})$  est stable par réunion dénombrable,  $A \in \sigma(\{P_n\})$ .

—  $\sigma(\{P_n\}) \subset \mathcal{A}$  :

Vérifions que  $\mathcal{A}$  est une tribu :

—  $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k \in \mathcal{A}$ .

— Si  $A = \bigcup_{k \in S} P_k \in \mathcal{A}$ , alors  $\overline{A} = \bigcup_{k \notin S} P_k \in \mathcal{A}$ .

— Si  $A_n = \bigcup_{k \in S_n} P_k \in \mathcal{A}$ , alors  $\bigcup_n A_n = \bigcup_{k \in \bigcup_n S_n} P_k \in \mathcal{A}$ .

Donc  $\mathcal{A}$  est une tribu contenant tous les  $P_n$ , donc  $\sigma(\{P_n\}) \subset \mathcal{A}$

Définissons  $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{T}$  par : pour tout  $S \subset \mathbb{N}$ ,

$$\phi(S) = \bigcup_{k \in S} P_k.$$

Montrons que  $\phi$  est injective.

Soient  $S, S' \subset \mathbb{N}$  avec  $S \neq S'$ . Alors il existe  $k_0$  tel que  $k_0 \in S \setminus S'$ . Puisque les  $P_k$  sont disjoints,  $P_{k_0} \subset \phi(S)$  mais  $P_{k_0} \cap \phi(S') = \emptyset$ . Donc  $\phi(S) \neq \phi(S')$ .

Ainsi il existe une injection d'un ensemble non dénombrable dans  $\mathcal{T}$  donc  $\mathcal{T}$  non dénombrable. Absurde. Donc  $\mathcal{T}$  est non dénombrable.

## Exercice 16 (version Léane)

Montrer qu'une tribu infinie est indénombrable.

J'aime pas trop la correction de Brahim, donc je fais la mienne (qui est cependant similaire).

On se donne  $T$  une tribu sur  $E$ .

On note  $A(x) = \bigcap_{x \in A \in T} A$ .

Montrons que les  $A(x)$  forment une partition de  $E$ .

Puisque  $x \in A(x)$ , il suffit de mq les  $A(x)$  sont des classes d'équivalence.

Si  $y \in A(x)$ , mq  $x \in A(y)$ . Supposons que ce ne soit pas le cas.

Alors il existe  $A \in T$  tq  $y \in A, x \notin A$ . On a  ${}^C A \in T, x \in {}^C A, y \notin {}^C A$ . Ainsi,  $y \notin A(x)$ , ce qui est absurde. On a bien  $A(x) = A(y)$ .

Montrons que, pour  $A \in T$ ,  $A \bigcup_{x \in A} A(x)$ .

L'inclusion directe et immédiate. De plus, si  $x \in A, y \in A(x)$ , on sait que  $y \in A$  pour tout  $A$  tq  $x \in A$ , d'où l'inclusion réciproque.

On considère  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de représentants de classes d'équivalence distinctes.

$$\text{Soit } \varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(I) & \rightarrow T \\ J & \mapsto \bigcup_{j \in J} A(x_j). \end{cases}$$

Puisque les  $A(x_j)$  sont disjoints, cette application est injective.

De plus, on a montré plus haut que tout élément de  $T$  se décomposait en union de  $A(x)$ , donc de  $A(x_i)$ , d'où la surjectivité

On suppose  $T$  infinie.

Alors, par bijectivité de  $\varphi$ ,  $\mathcal{P}(I)$  est infini donc  $I$  l'est également.

On en déduit que  $\mathcal{P}(I)$  est indénombrable (l'ensemble des parties d'un ensemble infini est indénombrable), d'où l'indénombrabilité de  $T$ .

*Note : on a prouvé que si  $T$  était finie, alors elle est de cardinal  $2^n$  avec  $n$  entier*

## Exercice 17

On note  $S_n^k$  le nombre de surjections de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $\llbracket 0, k \rrbracket$

1. Préciser les valeurs de  $S_n^1$  et  $S_n^n$ .

Respectivement 1 et  $n!$ , je vous laisse le faire vous mêmes.

2. Montrer que  $S_n^2 = 2n - 2$

$S_n^2 = \{1, 2\}^{[1,n]} \setminus \{i \mapsto 1, i \mapsto 2\}$ , d'où le résultat.

3. Montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ ,  $\sum_{j=1}^n \binom{j}{k} S_n^j = k^n$

D'une part, il existe  $k^n$  applications de  $[1, n]$  dans  $[1, k]$  ( $k$  choix pour chaque antécédent).

De plus, une application est entièrement déterminée par :

- son image, de taille  $j$  ( $\binom{k}{j}$  possibilités)
- la surjection sur son image ( $S_n^j$  possibilités)

Par principe additif, on obtient en sommant sur  $j$  :  $\sum_{j=1}^n \binom{k}{j} S_n^j = k^n$ .

4. Montrer que  $S_n^j = j(S_{n-1}^j + S_{n-1}^{j-1})$

Soit  $\sigma \in S_n^j$ .

On considère  $k$  l'image de  $n$ . On note  $\sigma'$  la restriction de  $\sigma$  à  $[1, n]$

Alors  $\sigma$  est entièrement déterminé par le couple  $(\sigma', k)$

- Si  $\sigma'$  est surjective, alors  $\sigma'$  alors elle décrit l'ensemble des surjections de  $[1, n]$  dans  $[1, j]$ , au nombre de  $S_{n-1}^j$  éléments.
  - Sinon, elle parcourt les surjections de  $[1, n]$  dans  $[1, j] \setminus \{k\}$ , ie d'un ensemble de  $n - 1$  éléments dans un ensemble de  $j - 1$  éléments, au nombre de  $S_{n-1}^{j-1}$ .
- Il en découle par principe additif, puis multiplicatif, que  $S_n^j = j(S_{n-1}^j + S_{n-1}^{j-1})$
- si

5. mdrr je code pas en python moi

6. En déduire que  $\sum_{j=1}^n (-1)^{n-k} k^n \binom{k}{n} = n!$

Se déduit de la question suivante, pour  $j = n$  (en effet, pour deux ensembles finis de même cardinal, une surjection est une bijection, d'où le résultat).

7. Montrer que  $\sum_{j=1}^n (-1)^{n-k} k^n \binom{k}{n} = n!$

On considère l'application  $P(X) \mapsto P(X + 1)$ . Elle est évidemment linéaire, et sa matrice dans la base canonique est  $M = \left( \binom{i-1}{j-1} \right)_{i,j \leq n}$  (je vous laisse le vérifier, se déduit immédiatement du binôme de Newton).

Ainsi, l'inverse de cette matrice est la matrice associée à  $P(X) \mapsto P(X - 1)$ , ie  $M^{-1} = \left( (-1)^{i+j} \binom{i-1}{j-1} \right)_{i,j \leq n}$  (se trouve de même).

Or, d'après la question 2.,  $M \cdot {}^T(S_n^1 \dots S_n^n) = {}^T(1^n \dots n^n)$ , d'où, en composant par  $M^{-1}$  à gauche :  $M^{-1} \cdot {}^T(1^n \dots n^n) = {}^T(S_n^1 \dots S_n^n)$ , d'où la formule de l'énoncé.