Corrigé colle S9
MPI/MPI* du lycée Faidherbe

Exercices 16

Brahim El hamdani

02 novembre 2025

Exercice 16 (D'après l'exercice 4 du document "Tribu infinie non dénombrable")

Soit Ω un ensemble non-vide et $\mathscr{T}$ une tribu sur Ω. Pour $x \in \Omega$, on définit

$$\mathcal{F}_x := \{T \in \mathscr{T} : x \in T\} \quad \text{et} \quad [x] := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F.$$

1. Montrer que $x \notin [y]$ implique $y \notin [x]$. En déduire que $x \sim y$ si $x \in [y]$ est une relation d'équivalence sur Ω.

> Si $x \notin [y]$, alors il existe $A \in \mathscr{T}$ tel que $x \notin A$ et $y \in A$.
> Alors $\overline{A} \in \mathscr{T}$, avec $y \notin \overline{A}$ et $x \in \overline{A}$, donc $y \notin [x]$.
>
> Définissons $x \sim y$ par $x \in [y]$. Vérifions que $\sim$ est une relation d'équivalence :
> — **Réflexivité :** $x \in [x]$ car $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F$.
> — **Symétrie :** Si $x \in [y]$, supposons $y \notin [x]$. Alors $x \notin [y]$ d'après l'implication prouvée, contradiction. Donc $y \in [x]$.
> — **Transitivité :** Si $x \in [y]$ et $y \in [z]$, alors pour tout $F \in \mathscr{T}$ avec $z \in F$, on a $y \in F$ (car $y \in [z]$), donc $x \in F$ (car $x \in [y]$). Ainsi $x \in [z]$.
> Donc $\sim$ est une relation d'équivalence.

2. Montrer que $\mathcal{P} = \{[x] : x \in \Omega\}$ est une partition de Ω.

> — Chaque $[x]$ est non vide car $x \in [x]$.
> — $\bigcup_{x \in \Omega} [x] = \Omega$ car $x \in [x]$.
> — Si $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, soit $z \in [x] \cap [y]$. Alors $z \sim x$ et $z \sim y$, donc $x \sim y$ par symétrie et transitivité, d'où $[x] = [y]$.
>
> Ainsi $\mathcal{P}$ est une partition de Ω.

3. Soit $T \in \mathscr{T}$. Montrer que $T = \bigcup_{x \in T} [x]$.

> — Pour tout $x \in T$, on a $T \in \mathcal{F}_x$, donc $[x] = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F \subseteq T$. Ainsi $\bigcup_{x \in T} [x] \subseteq T$.
> — Inversement, si $x \in T$, alors $x \in [x]$, donc $T \subseteq \bigcup_{x \in T} [x]$.
>
> D'où $T = \bigcup_{x \in T} [x]$.

4. Montrer que $\mathcal{P}$ est infinie si $\mathscr{T}$ est infinie.

> Supposons $\mathcal{P}$ fini, de cardinal n.
> D'après l'exercice 1, la tribu engendrée par une partition finie de n ensembles non vides disjoints a pour cardinal 2^n.
> Or, par (c), tout $T \in \mathscr{T}$ est réunion de classes de $\mathcal{P}$, donc $\mathscr{T} \subset \sigma(\mathcal{P})$.
> Ainsi $|\mathscr{T}| \leq 2^n < \infty$.
> Par contraposée, si $\mathscr{T}$ est infinie, alors $\mathcal{P}$ est infinie.

5. Soit $\mathcal{P}$ infinie. Montrer (par l'absurde) que $\mathscr{T}$ est indénombrable.
   (a) Montrer que si $\mathscr{T}$ est dénombrable, alors $[x] \in \mathscr{T}$ pour tout $x \in \Omega$. En déduire que $\mathcal{P}$ est dénombrable.

   > Pour tout x, $\mathcal{F}_x = \{T \in \mathscr{T} : x \in T\}$ est dénombrable.
   > Alors $[x] = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F$ est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathscr{T}$, donc $[x] \in \mathscr{T}$.
   > Ainsi $\mathcal{P} \subset \mathscr{T}$, donc $\mathcal{P}$ est dénombrable.

   (b) Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une énumération de $\mathcal{P}$. S'en servir pour construire une bijection $\phi : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \sigma(\{P_n : n \in \mathbb{N}\}) \subset \mathscr{T}$. Conclure.

   > Puisque $\mathcal{P}$ est dénombrable infinie, on peut indexer ses éléments par $\mathbb{N}$: soit $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ une bijection. On note $P_n = f(n)$.
   > Les P_n sont disjoints car $\mathcal{P}$ est une partition.
   >
   > Soit $\sigma(\{P_n : n \in \mathbb{N}\})$ la plus petite tribu contenant tous les P_n (on l'appelle la tribu engendrée par $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$).
   >
   > Soit $\mathcal{A} = \left\{\bigcup_{k\in S} P_k : S \subset \mathbb{N}\right\}$.
   > Montrons que $\sigma(\{P_n\}) = \mathcal{A}$ par double inclusion :
   > — $\mathcal{A} \subset \sigma(\{P_n\})$:
   > Soit $A \in \mathcal{A}$, donc $A = \bigcup_{k\in S} P_k$ pour un $S \subset \mathbb{N}$.
   > Comme chaque $P_k \in \sigma(\{P_n\})$ et $\sigma(\{P_n\})$ est stable par réunion dénombrable, $A \in \sigma(\{P_n\})$.
   > — $\sigma(\{P_n\}) \subset \mathcal{A}$:
   > Vérifions que $\mathcal{A}$ est une tribu :
   > — $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k \in \mathcal{A}$.
   > — Si $A = \bigcup_{k\in S} P_k \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} = \bigcup_{k\notin S} P_k \in \mathcal{A}$.
   > — Si $A_n = \bigcup_{k\in S_n} P_k \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup_n A_n = \bigcup_{k\in\bigcup_n S_n} P_k \in \mathcal{A}$.
   > Donc $\mathcal{A}$ est une tribu contenant tous les P_n, donc $\sigma(\{P_n\}) \subset \mathcal{A}$
   >
   > Définissons $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{T}$ par : pour tout $S \subset \mathbb{N}$,
   > $$\phi(S) = \bigcup_{k\in S} P_k.$$
   > Montrons que ϕ est injective.
   > Soient $S, S' \subset \mathbb{N}$ avec $S \neq S'$. Alors il existe k_0 tel que $k_0 \in S \setminus S'$. Puisque les P_k sont disjoints, $P_{k_0} \subset \phi(S)$ mais $P_{k_0} \cap \phi(S') = \emptyset$.Donc $\phi(S) \neq \phi(S')$.
   >
   > Ainsi il existe une injection d'un ensemble non dénombrable dans $\mathscr{T}$ donc

$\mathscr{T}$ non dénombrable. Absurde. Donc $\mathscr{T}$ est non dénombrable.