

Corrigé colle S9  
MPI/MPI\* du lycée Faidherbe  
Exercices 16 et 17

Brahim El Hamdani et Léane Parent

17 novembre 2025

**Exercice 16 (D'après l'exercice 4 du document "Tribu infinie non dénombrable")**

Soit  $\Omega$  un ensemble non-vide et  $\mathcal{T}$  une tribu sur  $\Omega$ . Pour  $x \in \Omega$ , on définit

$$\mathcal{F}_x := \{T \in \mathcal{T} : x \in T\} \quad \text{et} \quad [x] := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F.$$

- Montrer que  $x \notin [y]$  implique  $y \notin [x]$ . En déduire que  $x \sim y$  si  $x \in [y]$  est une relation d'équivalence sur  $\Omega$ .

Si  $x \notin [y]$ , alors il existe  $A \in \mathcal{T}$  tel que  $x \notin A$  et  $y \in A$ .

Alors  $\overline{A} \in \mathcal{T}$ , avec  $y \notin \overline{A}$  et  $x \in \overline{A}$ , donc  $y \notin [x]$ .

Définissons  $x \sim y$  par  $x \in [y]$ . Vérifions que  $\sim$  est une relation d'équivalence :

- Réflexivité** :  $x \in [x]$  car  $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F$ .
- Symétrie** : Si  $x \in [y]$ , supposons  $y \notin [x]$ . Alors  $x \notin [y]$  d'après l'implication prouvée, contradiction. Donc  $y \in [x]$ .
- Transitivité** : Si  $x \in [y]$  et  $y \in [z]$ , alors pour tout  $F \in \mathcal{T}$  avec  $z \in F$ , on a  $y \in F$  (car  $y \in [z]$ ), donc  $x \in F$  (car  $x \in [y]$ ). Ainsi  $x \in [z]$ .

Donc  $\sim$  est une relation d'équivalence.

- Montrer que  $\mathcal{P} = \{[x] : x \in \Omega\}$  est une partition de  $\Omega$ .

- Chaque  $[x]$  est non vide car  $x \in [x]$ .
- $\bigcup_{x \in \Omega} [x] = \Omega$  car  $x \in [x]$ .
- Si  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ , soit  $z \in [x] \cap [y]$ . Alors  $z \sim x$  et  $z \sim y$ , donc  $x \sim y$  par symétrie et transitivité, d'où  $[x] = [y]$ .

Ainsi  $\mathcal{P}$  est une partition de  $\Omega$ .

- Soit  $T \in \mathcal{T}$ . Montrer que  $T = \bigcup_{x \in T} [x]$ .

- Pour tout  $x \in T$ , on a  $T \in \mathcal{F}_x$ , donc  $[x] = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F \subseteq T$ . Ainsi  $\bigcup_{x \in T} [x] \subseteq T$ .
- Inversement, si  $x \in T$ , alors  $x \in [x]$ , donc  $T \subseteq \bigcup_{x \in T} [x]$ .  
D'où  $T = \bigcup_{x \in T} [x]$ .

- Montrer que  $\mathcal{P}$  est infinie si  $\mathcal{T}$  est infinie.

Supposons  $\mathcal{P}$  fini, de cardinal  $n$ .

D'après l'exercice 1, la tribu engendrée par une partition finie de  $n$  ensembles non vides disjoints a pour cardinal  $2^n$ .

Or, par (c), tout  $T \in \mathcal{T}$  est réunion de classes de  $\mathcal{P}$ , donc  $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{P})$ .

Ainsi  $|\mathcal{T}| \leq 2^n < \infty$ .

Par contraposée, si  $\mathcal{T}$  est infinie, alors  $\mathcal{P}$  est infinie.

5. Soit  $\mathcal{P}$  infinie. Montrer (par l'absurde) que  $\mathcal{T}$  est indénombrable.

- (a) Montrer que si  $\mathcal{T}$  est dénombrable, alors  $[x] \in \mathcal{T}$  pour tout  $x \in \Omega$ . En déduire que  $\mathcal{P}$  est dénombrable.

Pour tout  $x$ ,  $\mathcal{F}_x = \{T \in \mathcal{T} : x \in T\}$  est dénombrable.

Alors  $[x] = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F$  est une intersection dénombrable d'éléments de  $\mathcal{T}$ , donc  $[x] \in \mathcal{T}$ . Ainsi  $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$ , donc  $\mathcal{P}$  est dénombrable.

- (b) Soit  $(P_n)_{n \geq 0}$  une énumération de  $\mathcal{P}$ . S'en servir pour construire une bijection  $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \sigma(\{P_n : n \in \mathbb{N}\}) \subset \mathcal{T}$ . Conclure.

Puisque  $\mathcal{P}$  est dénombrable infinie, on peut indexer ses éléments par  $\mathbb{N}$  : soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}$  une bijection. On note  $P_n = f(n)$ .

Les  $P_n$  sont disjoints car  $\mathcal{P}$  est une partition.

Soit  $\sigma(\{P_n : n \in \mathbb{N}\})$  la plus petite tribu contenant tous les  $P_n$  (on l'appelle la tribu engendrée par  $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ ).

Soit  $\mathcal{A} = \{\bigcup_{k \in S} P_k : S \subset \mathbb{N}\}$ .

Montrons que  $\sigma(\{P_n\}) = \mathcal{A}$  par double inclusion :

—  $\mathcal{A} \subset \sigma(\{P_n\})$  :

Soit  $A \in \mathcal{A}$ , donc  $A = \bigcup_{k \in S} P_k$  pour un  $S \subset \mathbb{N}$ .

Comme chaque  $P_k \in \sigma(\{P_n\})$  et  $\sigma(\{P_n\})$  est stable par réunion dénombrable,  $A \in \sigma(\{P_n\})$ .

—  $\sigma(\{P_n\}) \subset \mathcal{A}$  :

Vérifions que  $\mathcal{A}$  est une tribu :

—  $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k \in \mathcal{A}$ .

— Si  $A = \bigcup_{k \in S} P_k \in \mathcal{A}$ , alors  $\overline{A} = \bigcup_{k \notin S} P_k \in \mathcal{A}$ .

— Si  $A_n = \bigcup_{k \in S_n} P_k \in \mathcal{A}$ , alors  $\bigcup_n A_n = \bigcup_{k \in \bigcup_n S_n} P_k \in \mathcal{A}$ .

Donc  $\mathcal{A}$  est une tribu contenant tous les  $P_n$ , donc  $\sigma(\{P_n\}) \subset \mathcal{A}$

Définissons  $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{T}$  par : pour tout  $S \subset \mathbb{N}$ ,

$$\phi(S) = \bigcup_{k \in S} P_k.$$

Montrons que  $\phi$  est injective.

Soient  $S, S' \subset \mathbb{N}$  avec  $S \neq S'$ . Alors il existe  $k_0$  tel que  $k_0 \in S \setminus S'$ . Puisque les  $P_k$  sont disjoints,  $P_{k_0} \subset \phi(S)$  mais  $P_{k_0} \cap \phi(S') = \emptyset$ . Donc  $\phi(S) \neq \phi(S')$ .

Ainsi il existe une injection d'un ensemble non dénombrable dans  $\mathcal{T}$  donc  $\mathcal{T}$  non dénombrable. Absurde. Donc  $\mathcal{T}$  est non dénombrable.

## Exercice 16 (version Léane)

Montrer qu'une tribu infinie est indénombrable.

J'aime pas trop la correction de Brahim, donc je fais la mienne (qui est cependant similaire).

On se donne  $T$  une tribu sur  $E$ .

$$\text{On note } A(x) = \bigcap_{x \in A \in T} A.$$

Montrons que les  $A(x)$  forment une partition de  $E$ .

Puisque  $x \in A(x)$ , il suffit de mq les  $A(x)$  sont des classes d'équivalence.

Si  $y \in A(x)$ , mq  $x \in A(y)$ . Supposons que ce ne soit pas le cas.

Alors il existe  $A \in T$  tq  $y \in A, x \notin A$ . On a  ${}^C A \in T, x \in {}^C A, y \notin {}^C A$ . Ainsi,  $y \notin A(x)$ , ce qui est absurde. On a bien  $A(x) = A(y)$ .

Montrons que, pour  $A \in T$ ,  $A \bigcup_{x \in A} A(x)$ .

L'inclusion directe et immédiate. De plus, si  $x \in A, y \in A(x)$ , on sait que  $y \in A$  pour tout  $A$  tq  $x \in A$ , d'où l'inclusion réciproque.

On considère  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de représentants de classes d'équivalence distinctes.

$$\text{Soit } \varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(I) & \rightarrow T \\ J & \mapsto \bigcup_{j \in J} A(x_j). \end{cases}$$

Puisque les  $A(x_j)$  sont disjoints, cette application est injective.

De plus, on a montré plus haut que tout élément de  $T$  se décomposait en union de  $A(x)$ , donc de  $A(x_i)$ , d'où la surjectivité

On suppose  $T$  infinie.

Alors, par bijectivité de  $\varphi$ ,  $\mathcal{P}(I)$  est infini donc  $I$  l'est également.

On en déduit que  $\mathcal{P}(I)$  est indénombrable (l'ensemble des parties d'un ensemble infini est indénombrable), d'où l'indénombrabilité de  $T$ .

*Note : on a prouvé que si  $T$  était finie, alors elle est de cardinal  $2^n$  avec  $n$  entier*

## Exercice 17

On note  $S_n^k$  le nombre de surjections de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $\llbracket 0, k \rrbracket$

- Préciser les valeurs de  $S_n^1$  et  $S_n^n$ .

Respectivement 1 et  $n!$ , je vous laisse le faire vous mêmes.

- Montrer que  $S_n^2 = 2n - 2$

$S_n^2 = \{1, 2\}^{\llbracket 1, n \rrbracket} \setminus \{i \mapsto 1, i \mapsto 2\}$ , d'où le résultat.

- Montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}, k \leq n$ ,  $\sum_{j=1}^n \binom{j}{k} S_n^j = k^n$

D'une part, il existe  $k^n$  applications de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, k \rrbracket$  ( $k$  choix pour chaque antécédent).

De plus, une application est entièrement déterminée par :

- son image, de taille  $j$  ( $\binom{k}{j}$  possibilités)
- la surjection sur son image ( $S_n^j$  possibilités)

Par principe additif, on obtient en sommant sur  $j$  :  $\sum_{j=1}^n \binom{k}{j} S_n^j = k^n$ .

4. Montrer que  $S_n^j = j(S_{n-1}^j + S_{n-1}^{j-1})$

Soit  $\sigma \in S_n^j$ .

On considère l'ensemble des antécédents  $I$  et l'image  $k$  de  $n$ .

On note  $\sigma' : x \mapsto \begin{cases} k & \text{si } x \in I \\ \sigma(x) & \text{sinon} \end{cases}$

Alors  $\sigma$  est entièrement déterminé par la donnée de  $\sigma'$  et de l'ensemble  $I$

On vérifie aisément que  $\sigma'$  est surjective dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

- Si  $k \notin I$ , alors  $\sigma'$  parcourt  $S_{n-1}^j$ .
- Sinon, il parcourt l'ensemble des éléments de  $S_{n-1}^j$  laissant invariant  $k$ .

## FONCTIONNE PAS EN L'ÉTAT

5. mdrr je code pas en python moi

6. En déduire que  $\sum_{j=1}^n (-1)^{n-k} k^n \binom{k}{n} = n!$

Se déduit de la question suivante, pour  $j = n$  (en effet, pour deux ensembles finis de même cardinal, une surjection est une bijection, d'où le résultat).

7. Montrer que  $\sum_{j=1}^n (-1)^{n-k} k^n \binom{k}{n} = n!$

On considère l'application  $P(X) \mapsto P(X+1)$ . Elle est évidemment linéaire, et sa matrice dans la base canonique est  $M = \left( \binom{i-1}{j-1} \right)_{i,j \leq n}$  (je vous laisse le vérifier, se déduit immédiatement du binôme de Newton).

Ainsi, l'inverse de cette matrice est la matrice associée à  $P(X) \mapsto P(X-1)$ , ie  $M^{-1} = \left( (-1)^{i+j} \binom{i-1}{j-1} \right)_{i,j \leq n}$  (se trouve de même).

Or, d'après la question 2.,  $M \cdot {}^T(S_n^1 \dots S_n^n) = {}^T(1^n \dots n^n)$ , d'où, en composant par  $M^{-1}$  à gauche :  $M^{-1} \cdot {}^T(1^n \dots n^n) = {}^T(S_n^1 \dots S_n^n)$ , d'où la formule de l'énoncé.