Corrigé colle S15
MPI/MPI* du lycée Faidherbe

Exercices 26, 27

Léane Parent

21 décembre 2025

Exercice 26

Soit $N \geqslant 1$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ iid de loi μ sur $[\![1, N]\!]$ tq $\mu(1) > 0$.
On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$ (avec $S_0 = 0$), et $E = \{S_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(n \in E) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k)\mathbb{P}(n-k \in E)$

> $(n \in E) = \biguplus_{k=1}^{N} (X_1 = k) \cap (n-k \in E')$, où $E' = \{S'_i \mid i \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}\}$, et $S'_i = \sum_{k=2}^{i} X_k$.
> Or, $S'_i \sim S_{i-1}$, d'où $E' \sim E$.
> On a donc $\mathbb{P}(n \in E) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k)\mathbb{P}(n-k \in E') = \sum_{k=1}^{N} \mu(k)\mathbb{P}\left(n-ke \in E\right)$

2. Soient $F(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(n \in E)z^n$, $G(z) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k)z^k$. Montrer que $F = \frac{1}{1-G}$.

> On prend z dans le rayon de convergence de F
>
> $$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(n \in E)z^n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} z^n \sum_{k=1}^{N} \mu(k)\mathbb{P}(n-k \in E) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{n-k=i} \mu(k)\mathbb{P}(i \in E)z^n \quad \text{(tout est sommable dans le rayon de convergence)} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{N} z^i z^k \mu(k)\mathbb{P}(i \in E) \quad \text{(les termes pour } k > N \text{ étant nuls)} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} z^i \mathbb{P}(i \in E) \sum_{k=1}^{N} \mu(k)z^k = \sum_{i\in\mathbb{N}} z^i \mathbb{P}(i \in E)G(z) \\ &= G(z)(1+F(z)) \qquad\qquad \text{(car } pr(0 \in E) = 1 : S_0 = 0) \end{aligned}$$

On a donc $F(z) = G(z)(1 + F(z))$, d'où le résultat.

3. Montrer que F admet un pôle simple en 1, et que les autres pôles sont de module strictement plus grand que 1.

F admet un pôle en z ssi $G(z) = 1$. Or, $G(1) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k) = 1$: 1 est pôle de F (je ne sais pas montrer qu'il est simple).

De plus, en notant $Y = \min E$, on sait que $\mathbb{P}(n \in E) \leqslant \mathbb{P}(Y \leqslant n) \leqslant \mathbb{P}(Y = n)$. Dès lors, F est de rayon supérieur à celui de la fonction génératrice de Y, qui est au moins 1. (il est d'ailleurs égal à 1 d'après la première partie de cette question.)

On sait donc que si z est pôle de F, $|z| \geqslant 1$. Supposons z pôle de F de module 1.
Alors $\left|\sum_{k=1}^{N} \mu(k) z^k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |\mu(k) z^k| = \sum_{k=1}^{N} \mu(k) = 1$, et il y a égalité entre le premier et le dernier terme donc égalité à chaque inégalité. Ainsi, les z^k sont positivement colinéaires donc $z \in \mathbb{R}_+$: on a bien $z = 1$.

Exercice 27

On tire $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ aléatoirement. On note X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de cycles de σ.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = n)$.

On se place dans un cadre d'équiprobabilité.
Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ contient n cycles, alors $\sigma = \mathrm{Id}$ (car tout point est point fixe : en effet, tout point appartient à un cycle de longueur 1).
Dès lors, $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n!}$.

De plus, si σ comporte exactement 1 cycle, alors il s'agit d'un n-cycle.
Or, un n-cycle dans $\mathfrak{S}_n$ est entièrement déterminé par :
— $\sigma(1)$: $n - 1$ choix, car 1 n'est pas point fixe
— $\sigma^2(1)$: $n - 2$ choix, car $\sigma(1)$ n'est pas point fixe, et ne peut être envoyé sur 1 sous réserve de former un cycle de longueur 2
— ...
— $\sigma^n(1) = 1$ pour former un n-cycle : 1 choix
Ainsi, il existe $(n - 1)!$ n-cycles dans $\mathfrak{S}_n$, d'où $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

2. Déterminer la fonction génératrice de X_n.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$, on considère $\sigma' = (\sigma(n + 1)\ n + 1)\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (l'idée c'est qu'il s'agit de σ "corrigée" pour que $n + 1$ soit point fixe.)
Dès lors, le nombre de cycle de σ est, si on note k le nombre de cycles de σ' :
— $k + 1$ si $n + 1$ est point fixe (avec probabilité $\frac{1}{n+1}$, j'ai la flemme de le montrer (ça découle des $n + 1$ possibilités pour $\sigma(n + 1)$), indépendante de σ')
— k sinon

> Montrons maintenant que σ' suit une loi uniforme dans $\mathfrak{S}_n$. (flemme $\to$ plus tard)
> on a alors $X_{n+1} \sim X_n + Y_n$, avec $X_n \perp\!\!\!\perp Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{n})$.
> Dès lors, en notant G_n la fonction génératrice de X_n, on a $G_{n+1}(t) = \frac{n-1+t}{n} G_n(t)$. On arrive alors à une définition de G_n comme produit (il y a sûrement plus beau).

3. Déterminer son espérance et sa variance

> On a, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{n+1}$, d'où, par une récurrence immédiate ($X_1 = 1$), $\mathbb{E}(X_n) = H_n$, où H_n est la somme partielle de la série harmonique. (On remarque que $\mathbb{E}(X_n) \sim \log n$.)
>
> De plus, on sait que $X_n \perp\!\!\!\perp Y_n$ d'où $\mathbb{V}(X_{n+1}) = \mathbb{V}(X_n) + \mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{V}(X_n) + \frac{n-1}{n^2}$.
> On en déduit que $\mathbb{V}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k^2}$ (on vérifie que cette formule est bien vraie en $n = 1$)
> Ainsi, $\mathbb{V}(X_n) = \frac{n(n+1)}{2} - S_n$, avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. (On remarque que $\mathbb{V}(X_n) \sim \frac{n^2}{2}$.)