Corrigé colle S22
MPI/MPI* du lycée Faidherbe
Exercices 14, 15, 16 et 17

Léane Parent

26 février 2026

Exercice 14

Soit q une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, et $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $y'' + qy = 0$.

a) Montrer que si y est une solution bornée de $(\mathcal{E})$, alors $y'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

> En intégrant $(\mathcal{E})$ entre 0 et x, on obtient la forme intégrale :
>
> $$y'(x) - y'(0) = \int_0^x q(t)y(t)dt$$
>
> Or, y est bornée, donc $q \cdot y$ est dominée par $\|y\|_\infty |q|$, qui est intégrable par hypothèse. Dès lors, $q \cdot y$ est intégrable.
>
> Ainsi, $y'(x)$ converge au voisinage de $+\infty$. Si sa limite était non nulle, alors y divergerait (vers $\pm\infty$ en fonction du signe de cette limite) (à rédiger : la dérivée est supérieure à la moitié de la limite au voisinage de l'infini, donc la pente également, CQPC), ce qui est absurde.
>
> On a donc $y'(x) \to 0$.

b) Montrer que $(\mathcal{E})$ admet des solutions non bornées.

> En réintégrant la forme obtenue ci-dessus, on obtient :
>
> $$y(u) - y(0) = y'(0)u + \int_0^u \int_0^x q(t)y(t)dt\,dx$$
>
> On fubunite :
>
> $$\begin{aligned} y(u) - y(0) &= y'(0)u + \int_0^u \int_t^u q(t)y(t)dx\,dt \\ &= y'(0)u + \int_0^u (u-t)q(t)y(t)dt \end{aligned}$$
>
> Par théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, il existe y solution de $(\mathcal{E})$ vérifiant $y(0) =$

$0, y'(0) = 1$. On a donc :

$$y(u) = u + \int_0^u (u-t)q(t)y(t)dt = u + u\int_0^u q(t)y(t)dt + \int_0^u tq(t)y(t)dt$$

On suppose y bornée.

D'après la question précédente, la première intégrale est en $o(1)$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^u tq(t)y(t)dt = o(u)$.

On a donc $y(u) = u + o(u) \sim u \to +\infty$: y est non bornée.

Exercice 15

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

a) On suppose A diagonalisable. Montrer que e^A est diagonalisable.

On utilise la même matrice de passage **en repassant par les sommes partielles** (on factorise pas comme ça des séries de matrices, non mais oh)

b) On suppose qu'il existe D diagonalisable et N nilpotente commutant tels que $A = D + N$. Montrer alors que si e^A est diagonalisable, alors e^N l'est également. En déduire que $N = 0$.

On suppose (quitte à conjuguer par les bonnes matrices de passage) que D est diagonale, (donc $\exp D$ également), et N triangulaire stricte.

D et N commutent, donc $\exp A = \exp D \exp N$. Or, $\exp D$ est inversible (car diagonale à coeff diagonaux non nuls, puisqu'il s'agit des e^λ), donc $\exp N = \exp A \exp(-D)$, qui est diagonalisable car $\exp A$ et $\exp(-D)$ sont codiagonalisables (puisqu'elles commutent, et faites gaffe, je vous surveille : passez en sommes partielles pour le montrer)

Or, on a $\exp N = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}N^k$ (car $N^k = 0$ pour $k \geqslant n$), de la forme $I_n + K$ où K est nilpotente (car somme de nilpotentes qui commutent, ou tout simplement car triangulaire stricte).

$\exp N$ est diagonalisable unipotente (ie diag+nilp), donc égale à l'identité.

Or, en écrivant $N \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & * \\ & & \ddots & 1 & \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & \ddots \end{pmatrix}$, on obtient une surdiagonale non nulle pour $\exp N$, d'où l'absence de 1 sur la surdiagonale : N est nulle

c) Prouver l'existence de D et N.

En notant m_λ la multiplicité de λ comme valeur propre de A, $C_\lambda = \ker(A-\lambda)^n$ le sous-espace caractéristique associé à λ, on a :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} C_\lambda$$

(par lemme des noyaux et théorème de Cayley-Hamilton)

De plus, les C_λ sont stables par A (car une matrice polynomiale en A commute avec A), donc on peut décomposer A sur chaque C_λ.

On peut donc décomposer A comme suit :

$$A \sim \operatorname{Diag}\left(A_\lambda\right)_{\lambda \in \operatorname{Sp} A}$$

Où $A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix}$, de degré m_λ.

Or, $A_\lambda = \lambda I_{m_\lambda} + N_\lambda$, avec N_λ nilpotente.

On a donc $A \sim \operatorname{Diag}(\lambda I_{m_\lambda}) + \operatorname{Diag}(N_\lambda)$.

En notant $D \sim \operatorname{Diag}(\lambda I_{m_\lambda})$, $N \sim \operatorname{Diag}(N_\lambda)$ pour les mêmes matrices de passage, on a bien D diagonalisable, N nilpotente, tq $A = D + N$.

De plus, ces deux matrices commutent sur chaque sous-espace caractéristique, donc commutent. On a bien montré l'existence de ces deux matrices.

d) Prouver l'unicité

On vérifie que la matrice D trouvée précédemment égale, sur chaque espace caractéristique, $(A - \lambda I_{m_\lambda})^{m_\lambda} + \lambda I_{m_\lambda}$, donc polynomiale en A.

Dès lors, si D' et N' conviennent, on a $D - D' = N' - N$.

Le second terme est nilpotent, le premier diagonalisable,car D, D' sont codiagonalisables. En effet, elles sont toutes deux diagonalisables, et commutent car D est polynomiale en A (sur chaque sous-espace caractéristique). Ainsi $D - D' = 0$, donc $D = D'$, d'où l'unicité.

Exercice 16

Soit $f : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^n \\ M & \mapsto & (\operatorname{tr} M, \operatorname{tr} M^2, \dots \operatorname{tr} M^n) \end{array}$

a) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

La trace est linéaire, donc $d\operatorname{tr}(M)(A) = \operatorname{tr} A$.

De plus, $(M + tA)^k = M^k + t \sum_{i=0}^{k-1} M^i A M^{k-i-1} + o(t)$.

Dès lors, la différentielle de $A \mapsto A^k$ en M est $A \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} M^i A M^{k-i-1}$.

Ainsi, en notant $f_k : A \mapsto \operatorname{tr} A^k$, on a, par différentielle d'une composée :

$$df_k = \operatorname{tr} \sum_{i=0}^{k-1} M^i A M^{k-i-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \operatorname{tr} M^{k-1} A = k \operatorname{tr} M^{k-1} A$$

(par linéarité puis cyclicité de la trace)

On obtient donc :

$$df(M)(A) = (\operatorname{tr} A, 2 \operatorname{tr} MA, \dots\ n \operatorname{tr} M^{n-1} A)$$

b) Comparer le rang de $df(M)$ et le degré du polynôme minimal de M.

df est un n-uplet d'applications linéaires.

Dès lors, son rang est égal à la dimension de $\operatorname{Vect}(df_1(M), \dots\ df_n(M))$.

Or, à un scalaire non nul près (ce qui ne change rien), les $(df_k(M))$ sont les produits scalaires par les ${}^tM^k$, par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : A, B \mapsto \operatorname{tr} {}^tAB$

Par théorème de représentation des formes linéaires, on a donc :

$$\dim \operatorname{Vect}(f_1, \dots\ f_n) = \dim \operatorname{Vect}({}^tM^k)_{k \leqslant n} = \dim \operatorname{Vect}(M^k)_{k \leqslant n}$$

Or, par définition, le polynôme minimal de M est une combinaison linéaire de puissances de M annulant M.

Ainsi, μ_M est de degré supérieur à $\dim \operatorname{Vect}(I_n, \dots\ M^n) = \operatorname{rg} df(M)$.

De plus, si $k \geqslant \deg \mu_M$, M^k se réécrit comme polynôme de degré au plus $\deg \mu_M$ en M. (si vous ne savez pas le montrer, ça se fait par récurrence)

Ainsi, $\deg \mu_M = \operatorname{rg} df(M)$.

c) Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est de degré n est une partie ouverte de $M_n(\mathbb{R})$.

Une matrice M est de polynôme minimal de degré n ssi $(I_n, M, \dots\ M^{n-1})$ est libre, ie $\det(I_n, M, \dots\ M^{n-1}) \neq 0$.

Image réciproque d'un ouvert par une fonction continue, bla, bla $\rightarrow$ OK.

Exercice 17

Soient $x_1, x_2, \dots\ x_k$ des entiers naturels de somme $n \in \mathbb{N}$. Comment rendre leur produit $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_k$ maximal sous ces conditions ?

Le produit des entiers de somme n est un ensemble fini car les entiers de somme n sont inclus dans $[0, n]^k$, donc admet bien un maximum.

Soient $(x_1, \dots\ x_k)$ de somme n. Sans perte de généralité, on les suppose triés (dans l'ordre croissant).

On suppose $x_k - x_1 > 1$. Montrons qu'il existe un k-uplet de somme n de produit plus grand que $\prod_i x_i$.

On note $x_1 = m$, $x_k = M$, et $s = M + m$. Alors $(x_2, \dots x_{k-1}, \lfloor \frac{s}{2} \rfloor, \lceil \frac{s}{2} \rceil)$ est bien de somme n.

On vérifie (en étudiant $x \mapsto x(s-x)$) que $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor \lceil \frac{s}{2} \rceil > Mm$, d'où un strictement produit plus grand.

Dès lors, si le produit des (x_i) est maximal, $x_n - x_1 = 0$ ou 1. On a donc, s'il existe $n-r$ termes égaux à x_1 : $n = kx_1 + r$, avec $r < k$. Il s'agit donc de la division euclidienne de n par k.

D'où une valeur maximale de $q^{n-r}(q+1)^r$, où $n = kq + r$ est la division euclidienne de n par k.