Corrigé colle S13
MPI/MPI* du lycée Faidherbe
Exercices 23, 26

Léane Parent

21 décembre 2025

Exercice 23

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t+\ldots t^n} dt$.

> On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = \frac{1}{1+t+\ldots t^n}$, qui est continue, donc intégrable.
> Sur $[0,1[$, $f_n(t) = \frac{1-t}{1-t^{n+1}}$, sur $[0,1[$.
>
> Pour tout n, pour tout $t \in [0,1[$, $|f_n(t)| \leqslant 1$, et $t \mapsto 1$ est continue, donc intégrable, sur $[0,1[$.
>
> De plus, (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto 1-t$, sur $[0,1]$.
> D'après le théorème de convergence dominée :
>
> $$\int_0^1 \frac{1}{1+t+\ldots t^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2}$$

Exercice 26

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx$.

Dans tout l'exercice, on notera $f_n : x \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}$

1. Calculer un équivalent de u_n quand $\alpha = 0$.

> On a alors, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^x$. Ainsi, à partir d'un certain rang, $f_n \geqslant \exp -1$, d'où $u_n \geqslant \int_0^n (e^x - 1)dx$.
> Or, $\int (\exp -1)$ diverge vers $+\infty$, d'où $u_n \to +\infty$.

2. Si $\alpha \in]1, +\infty[$, déterminer la limite de (u_n).

On considère, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-\alpha t} dt$. On sait que $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$ (car la suite est croissante, et converge vers e^{-t}).
Dès lors $0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{t(1-\alpha)}$, donc f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

De plus, $u_n = \int_0^{+\infty} f_n + \mathrm{o}(1)$ (en effet, u_n est l'intégrale partielle de f_n).
(Note : il est plus propre de passer par l'intégrale de $f_n \mathbb{1}_{[0,n]}$)
f_n est intégrable, dominée par $\varphi : t \mapsto e^{t(1-\alpha)}$ qui est intégrable, et CVS vers φ, d'où :

$$\int_0^{+\infty} f_n \to \int_0^{+\infty} e^{t(1-\alpha)} dt = \frac{1}{1-\alpha}$$

D'où $u_n \to \frac{1}{1-\alpha}$.

3. Si $\alpha = 1$, déterminer la limite de (u_n), puis un équivalent de u_n

On a de même que précédemment :

$$(e^t - 1)e^{-t} \leqslant f_n(t) \leqslant 1$$

On en déduit immédiatement que $u_n \sim n \to +\infty$.

4. En déduire le comportement de (u_n) pour $\alpha \in]0, 1[$.

On a alors $u_n \geqslant \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-x} dt \to +\infty$.
Ainsi, par théorème de minoration, $u_n \to +\infty$.