

corrigé exercice 19 (colle S7)

On se donne une matrice $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$, avec, pour tout j , $\sum_{k=1}^n m_{k,j} = 1$, et, pour tout (i, j) , $0 \leq m_{i,j} \leq 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de M , puis montrer que toutes les valeurs propres complexes de M vérifient $|\lambda| \leq 1$

Pour montrer que 1 est valeur propre, il suffit de considérer $X = {}^T(1 \ 1 \ \dots \ 1)$.

Soit $X = (x_i)$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ . On note i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max |x_i|$. (On note que $X \neq 0$ donc $x_{i_0} \neq 0$.)

On considère la i_0 -ième ligne de MX :

$$\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^n m_{i_0,j} x_j$$

Ainsi, par inégalité triangulaire:

$$|\lambda| |x_{i_0}| \leq \sum_{j=1}^n m_{i_0,j} |x_j| \leq \sum_{j=1}^n m_{i_0,j} |x_{i_0}| = |x_{i_0}|$$

Dès lors, $|\lambda| \leq 1$.

2. Montrer que, si λ est valeur propre de module 1, alors $\lambda = 1$.

On reprend les notations de la question précédente.

Ainsi, les inégalités sont alors des égalités.

On a alors, pour tout j , $m_{i_0,j} x_j = m_{i_0,j} x_{i_0}$ (positivement colinéaires d'après l'inégalité triangulaire, de module constant par passage à la borne supérieure).

Dès lors, $\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^n m_{i_0,j} x_{i_0}$, d'où $\lambda = 1$.

3. Montrer que $\ker(M - I_n) = \ker(M - I_n)^2$

L'inclusion directe est immédiate.

On prend $X \in \ker(M - I_n)^2$.

$$M^k X = (M - I_n + I_n)^k X = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (M - I_n)^j X = X + k(M - I_n)X$$

On en déduit $(M - I_n)X = \frac{M^k X - X}{k}$.

De plus, on montre aisément (j'ai un peu la flemme) que M^k est stochastique, donc borné, d'où $(M - I_n) \rightarrow 0$, donc $X \in \ker(M - I_n)$. D'où l'égalité.