

Corrigé colle S22
MPI/MPI* du lycée Faidherbe
Exercices 14, 16 et 17

Léane Parent

26 février 2026

Exercice 14

Soit q une fonction continue et intégrable de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} , et (\mathcal{E}) l'équation différentielle $y'' + qy = 0$.

- a) Montrer que si y est une solution bornée de (\mathcal{E}) , alors $y'(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

En intégrant (\mathcal{E}) entre 0 et x , on obtient la forme intégrale :

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x q(t)y(t)dt$$

Or, y est bornée, donc $q \cdot y$ est dominée par $\|y\|_\infty |q|$, qui est intégrable par hypothèse. Dès lors, $q \cdot y$ est intégrable.

Ainsi, $y'(x)$ converge au voisinage de $+\infty$. Si sa limite était non nulle, alors y divergeait (vers $\pm\infty$ en fonction du signe de cette limite) (à rédiger : la dérivée est supérieure à la moitié de la limite au voisinage de l'infini, donc la pente également, CQPC), ce qui est absurde.

On a donc $y'(x) \rightarrow 0$.

- b) Montrer que (\mathcal{E}) admet des solutions non bornées.

En réintégrant la forme obtenue ci-dessus, on obtient :

$$y(u) - y(0) = y'(0)u + \int_0^u \int_0^x q(t)y(t)dt dx$$

On fubunite :

$$\begin{aligned} y(u) - y(0) &= y'(0)u + \int_0^u \int_t^u q(t)y(t)dx dt \\ &= y'(0)u + \int_0^u (u-t)q(t)y(t)dt \end{aligned}$$

Par théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, il existe y solution de (\mathcal{E}) vérifiant $y(0) =$

$0, y'(0) = 1$. On a donc :

$$y(u) = u + \int_0^u (u-t)q(t)y(t)dt = u + u \int_0^u q(t)y(t)dt + \int_0^u tq(t)y(t)dt$$

On suppose y bornée.

D'après la question précédente, la première intégrale est en $o(1)$.

On en déduit que $\int_0^u tq(t)y(t)dt = o(u)$.

On a donc $y(u) = u + o(u) \sim u \rightarrow +\infty$: y est non bornée.

Exercice 16

$$\begin{aligned} \text{Soit } f : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ M &\mapsto (\operatorname{tr} M, \operatorname{tr} M^2, \dots, \operatorname{tr} M^n) \end{aligned}$$

a) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

La trace est linéaire, donc $d\operatorname{tr}(M)(A) = \operatorname{tr} A$.

De plus, $(M + tA)^k = M^k + t \sum_{i=0}^{k-1} M^i A M^{k-i-1} + o(t)$.

Dès lors, la différentielle de $A \mapsto A^k$ en M est $A \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} M^i A M^{k-i-1}$.

Ainsi, en notant $f_k : A \mapsto \operatorname{tr} A^k$, on a, par différentielle d'une composée :

$$df_k = \operatorname{tr} \sum_{i=0}^{k-1} M^i A M^{k-i-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \operatorname{tr} M^{k-1} A = k \operatorname{tr} M^{k-1} A$$

(par linéarité puis cyclicité de la trace)

On obtient donc :

$$df(M)(A) = (\operatorname{tr} A, 2\operatorname{tr} MA, \dots, n\operatorname{tr} M^{n-1} A)$$

b) Comparer le rang de $df(M)$ et le degré du polynôme minimal de M .

df est un n -uplet d'applications linéaires.

Dès lors, son rang est égal à la dimension de $\operatorname{Vect}(df_1(M), \dots, df_n(M))$.

Or, à un scalaire non nul près (ce qui ne change rien), les $(df_k(M))$ sont les produits scalaires par les ${}^t M^k$, par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : A, B \mapsto \operatorname{tr} {}^t AB$

Par théorème de représentation des formes linéaires, on a donc :

$$\dim \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_n) = \dim \operatorname{Vect}({}^t M^k)_{k \leq n} = \dim \operatorname{Vect}(M^k)_{k \leq n}$$

Or, par définition, le polynôme minimal de M est une combinaison linéaire de puissances de M annulant M .

Ainsi, μ_M est de degré supérieur à $\dim \text{Vect}(I_n, \dots, M^n) = \text{rg } df(M)$.

De plus, si $k \geq \deg \mu_M$, M^k se réécrit comme polynôme de degré au plus $\deg \mu_M$ en M . (si vous ne savez pas le montrer, ça se fait par récurrence)

Ainsi, $\deg \mu_M = \text{rg } df(M)$.

- c) Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est de degré n est une partie ouverte de $M_n(\mathbb{R})$.

Une matrice M est de polynôme minimal de degré n ssi (I_n, M, \dots, M^{n-1}) est libre, ie $\det(I_n, M, \dots, M^{n-1}) \neq 0$.

Image réciproque d'un ouvert par une fonction continue, bla, bla \rightarrow OK.

Exercice 17

Soient x_1, x_2, \dots, x_k des entiers naturels de somme $n \in \mathbb{N}$. Comment rendre leur produit $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ maximal sous ces conditions ?

Le produit des entiers de somme n est un ensemble fini car les entiers de somme n sont inclus dans $[0, n]^k$, donc admet bien un maximum.

Soient (x_1, \dots, x_k) de somme n . Sans perte de généralité, on les suppose triés (dans l'ordre croissant).

On suppose $x_k - x_1 > 1$. Montrons qu'il existe un k -uplet de somme n de produit plus grand que $\prod_i x_i$.

On note $x_1 = m$, $x_k = M$, et $s = M + m$. Alors $(x_2, \dots, x_{k-1}, \lfloor \frac{s}{2} \rfloor, \lceil \frac{s}{2} \rceil)$ est bien de somme n .

On vérifie (en étudiant $x \mapsto x(s-x)$) que $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor \lceil \frac{s}{2} \rceil > Mm$, d'où un strictement produit plus grand.

Dès lors, si le produit des (x_i) est maximal, $x_n - x_1 = 0$ ou 1 . On a donc, s'il existe $n-r$ termes égaux à x_1 : $n = kx_1 + r$, avec $r < k$. Il s'agit donc de la division euclidienne de n par k .

D'où une valeur maximale de $q^{n-r}(q+1)^r$, où $n = kq + r$ est la division euclidienne de n par k .