Corrigé colle S12
MPI/MPI* du lycée Faidherbe
Exercice 20

Léane Parent

29 novembre 2025

Exercice 20

Montrer que e est irrationnel.

On suppose e rationnel, on note $e = \frac{p}{q}$, avec p, $q \in \mathbb{N}$.
Considérons la quantité $pq!$. On a :

$$\begin{aligned} q!p &= q!q\frac{p}{q} = q!qe \\ &= q!q\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} \\ &= q\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!} + q\sum_{k=q+1}^{+\infty}\frac{q!}{k!} \end{aligned}$$

Le membre de gauche est évidemment entier. Le second terme également, par somme d'entiers. Notons le second terme δ.
Montrons que $0 < \delta < 1$.
La première inégalité est évidente. De plus, on a $\delta = q\displaystyle\sum_{k=q+1}^{+\infty}\frac{q!}{k!} = q\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q!}{(q+k)!}$.
Or, pour $k > 0$, on a $\frac{q!}{(q+k)!} \leqslant \frac{1}{(q+1)^k}$, avec égalité ssi $k = 1$.
On en déduit $\delta = q\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q!}{(q+k)!} < q\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(q+1)^k} = q\frac{1}{q+1}\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} = \frac{q}{q+1}\frac{q+1}{q} = 1$.
On a bien montré $0 < \delta < 1$. Or, $\delta \in \mathbb{Z}$, par différence, ce qui est absurde.

Ainsi, $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 22 (non fini)

On suppose l'existence de $A \subset \mathbb{N}$ tq $\displaystyle\sum_{n\in A}\frac{x^n}{n!} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}$

1. Pour $I \subset A$ fini, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n\in I}\frac{x^n e^{-x}}{n!}dx$.

La somme étant finie, on peut permuter somme et intégrale.
Calculons, par récurrence sur n (eww), $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.
On a, pour $n > 0$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = -[x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = 0 + I_{n-1}$ (le crochet vaut 0 parce qu'on a supposé $n \neq 0$, il faut faire attention !) Le crochet converge, et I_{n-1} converge par HR, d'où la convergence de I_n, et l'égalité.
On en déduit immédiatement $I_n = I_0 = 1$.

Dès lors, l'intégrale de l'énoncé vaut $\displaystyle\sum_{n \in I} \frac{1}{n!}$.
On remarque que l'intégrale de la somme sur I est inférieure à e. On en déduit qu'il en est de même sur A (à justifier plus ! !)
Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n \in A} \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx$ converge.
Or, $\displaystyle\sum_{n \in A} \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ (super... On a montré que l'intégrale de $\frac{1}{x^2}$ converge...)

2. Qu'en conclut-on ?