corrigé colle S7

exercices 16 et 19

exercice 16

Soit E un (C)-espace vectoriel de dimension n, u $\in \mathcal{L}(E)$
Montrer que u est diagonalisable ssi tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par u.

> **Sens direct**:
> Soit F un sous-espace vectoriel de E.
> On note $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p\} = \mathrm{Sp}(u)$, où, pour $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$.
> On considère, pour $k \leqslant p$, $F_k = F \cap E_{\lambda_k}(u)$. On note S_k un supplémentaire de F_k dans $E_{\lambda_k}(u)$.
> u est diagonalisable, donc $E = \bigoplus_{k=1}^{p}$. On a alors $E = \bigoplus_{k=1}^{p}(F_k \oplus S_k) = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k \oplus \bigoplus_{k=1}^{p} S_k = F \oplus \bigoplus_{k=1}^{p} S_k$
> Or, pour tout k, S_k est stable par u (car inclus dans un sous-espace propre), donc $\bigoplus_{k=1}^{p} S_k$ est stable par u.
> On a trouvé un supplémentaire de F stable par u.
>
> **Réciproquement**, supposons que tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par u.
> Pour $n \in \mathbb{N}$, on note H_n, bla, bla, vous avez l'idée
>
> - vous en connaissez beaucoup des matrices d'ordre 1 pas diagonalisables? (H_1 est vraie.)
>
> - Soit n, bla, bla. E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc admet un vecteur propre e_1.
>   On note S un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(e_1)$ stable par u.
>   Soit F un sous-espace de S. Par hypothèse, il admet un supplémentaire T (dans E) stable par u. $T \cap S$ est alors supplémentaire de F dans S. E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc admet un vecteur propre e_1.
>   On note S un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(e_1)$ stable par u.
> T et S sont stables par u, donc $T \cap S$ également. On considère $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit.
>   Par hypothèse de récurrence, il existe une base B tq $\mathrm{Mat}_B u$ est diagonale. On a alors $\mathrm{Mat}_{(e1)\sqcup B} u$ diagonale.
>
> Ce qui clôt la récurrence.

exercice 19

On se donne une matrice $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$, avec, pour tout j, $\sum_{k=1}^{n} m_{i,j} = 1$, et, pour tout (i,j), $0 \leqslant m_{i,j} \leqslant 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de M, puis montrer que toutes les valeurs propres complexes de M vérifient $|\lambda| \leqslant 1$

> Pour montrer que 1 est valeur propre, il suffit de considérer $X = {}^T(1\ 1\ \dots\ 1)$.
>
> Soit $X = (x_i)$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ. On note i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max |x_i|$. (On note que $X \neq 0$ donc $x_{i_0} \neq 0$.)
>
> On considère la i_0-ième ligne de MX:
>
> $$\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j} x_j$$
>
> Ainsi, par inégalité triangulaire:
>
> $$|\lambda|\,|x_{i_0}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j}\,|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j}\,|x_{i_0}| = |x_{i_0}|$$
>
> Dès lors, $\lambda \leqslant 1$.

2. Montrer que, si λ est valeur propre de module 1, alors $\lambda = 1$.

> On reprend les notations de la question précédente.
> Ainsi, les inégalités sont alors des égalités.
> On a alors, pour tout j, $m_{i_0,j} x_j = m_{i_0,j} x_{i_0}$ (positivement colinéaires d'après l'inégalité triangulaire, de module constant par passage à la borne supérieure).
> Dès lors, $\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j} x_{i_0}$, d'où $\lambda = 1$.

3. Montrer que $\ker(M - I_n) = \ker(M - I_n)^2$

> L'inclusion directe est immédiate.
> On prend $X \in \ker(M - I_n)^2$.
>
> $$M^k X = (M - I_n + I_n)^k X = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (M - I_n)^j X = X + k(M - I_n)X$$
>
> On en déduit $(M - I_n)X = \frac{M^k X - X}{k}$.
> De plus, on montre aisément (j'ai un peu la flemme) que M^k est stochastique, donc borné, d'où $(M - I_n) \to 0$, donc $X \in \ker(M - I_n)$. D'où l'égalité.