

Corrigé colle S16  
 MPI/MPI\* du lycée Faidherbe  
 Exercices 21, 23, 24, 25

Léane Parent

3 janvier 2026

### Exercice 21

Soit  $E$  euclidien, soient  $a, b \in E$  non nuls. Pour  $x \in E \setminus \{0\}$ , on note  $f(x) = \frac{\langle a, x \rangle \langle b, x \rangle}{\|x\|^2}$ . Déterminer les bornes inférieure et supérieure de  $f$ .

Puisque  $f(\lambda x) = f(x)$ , il suffit de considérer  $\langle a, x \rangle \langle b, x \rangle$  où  $x$  est unitaire.

On note  $a = u + v$ ,  $b = u - v$  (avec  $u = \frac{a+b}{2}$ ,  $v = \frac{a-b}{2}$ ). On a alors  $f(x) = \langle u+v, x \rangle \langle u-v, x \rangle = \langle u, x \rangle^2 - \langle v, x \rangle^2$ .

Si  $a$  et  $b$  sont liés, alors  $b = \beta a$ . En notant  $x = \lambda a + x'$ , avec  $x'$  orthogonal à  $a$ ,  $\lambda^2 \leq 1$  (pour que  $x$  soit unitaire), on obtient  $f(x) = \lambda^2 \beta \|a\|^2$ , d'où une borne supérieure (si  $\beta \geq 0$ ) de  $\beta \|a\|^2 = \|a\| \|b\|$  (atteinte en  $x = \frac{1}{\|a\|} a$ ), et une borne inférieure de 0 (pour  $x$  normal à  $a$ )

(Si  $\alpha < 0$ , on a de même une borne sup à 0 et une borne inf à  $-\|a\| \|b\|$ )

Sinon, on note  $a = u + v$ ,  $b = u - v$  (avec  $u = \frac{a+b}{2}$ ,  $v = \frac{a-b}{2}$ ), et  $u$  et  $v$  forment une famille libre.

On a alors  $f(x) = \langle u+v, x \rangle \langle u-v, x \rangle = \langle u, x \rangle^2 - \langle v, x \rangle^2$ .

Puisque  $u, v$  forment une famille libre, il existe  $w$  inversible tq  $w(u), w(v)$  forment une famille orthonormée.

On procède au changement de variable  $x \leftarrow w * (x)$  ( $w*$  est bien inversible), et on obtient  $f(x) = \langle u, w * (x) \rangle^2 - \langle v, w * (x) \rangle^2 = \langle w(u), x \rangle^2 - \langle w(v), x \rangle^2$ .

On note alors  $x = \lambda w(u) + \mu w(v) + x'$ , avec  $x'$  normal à  $w(u), w(v)$  ( $x$  est unitaire, donc  $\lambda^2 + \mu^2 + \|x'\|^2 = 1$ ).

Dès lors,  $f(x) = \lambda^2 - \mu^2$ , d'où il découle immédiatement une borne supérieure atteinte en  $w(u)$  de 1, et une borne inférieure en  $w(v)$  de -1.

### Exercice 23

Soit  $n$  un entier naturel.

- Montrer qu'il existe un unique polynôme  $A \in \mathbb{R}_n[X]$  tq, pour  $P \in R_n[X]$ ,  $P(1) = \int_{-1}^1 \frac{A(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .

L'évaluation en 1 étant une forme linéaire non nulle, pour tout produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , il existe un unique  $A$  tq  $\langle A, \cdot \rangle$  est l'évaluation en 1, car  $\mathbb{R}_n[X]$  est de dimension finie.

On note, pour  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$   $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t^2}} dt$ . Montrons que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire.

Le caractère défini positif se fait comme usuellement (continu positif d'intégrale nulle...). Le caractère symétrique découle de la commutativité du produit, et la linéarité de celle de l'intégrale.

Ainsi, d'après la remarque précédente, il existe un unique  $A$  tq, pour tout  $P$ ,  $P(1) = \int_{-1}^1 \frac{A(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .

2. Peut-on remplacer  $\mathbb{R}_n[X]$  par  $\mathbb{R}[X]$  ?

A priori non (on n'est plus en dimension finie, ça n'a aucune raison de fonctionner), mais il s'agirait de le montrer.

Le produit scalaire défini ci-dessus reste un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

On suppose qu'il existe un tel  $A$ , de degré  $n$ . On remarque que  $\text{Vect } A^\perp = (X-1)\mathbb{R}[X]$  (les polynômes s'annulant en 1).

(je me retrouve quelque peu bloquée...)

## Exercice 24

Soit  $E$  euclidien de dimension  $n$ .

Soient  $x_1, \dots, x_k$  tq, pour  $i \neq j$ ,  $\langle x_i, x_j \rangle < 0$ . Montrer que  $k$  ne peut pas être trop grand et trouver cette limite.

(On appellera  $(x_1, \dots, x_k)$  une famille obtusangle.)

Montrons tout d'abord (par récurrence, vous savez que j'adore ça) qu'il existe une famille obtusangle à  $n+1$  éléments

- Si  $n=1$ , il existe  $x$  tq  $E = \text{Vect } x$ . Alors  $(x, -x)$  convient.
- Soit  $n \geq 1$ . Si  $\dim E = n+1$ , supposons que pour  $F$  sev de  $E$  de dimension  $n$ ,  $F$  contient une famille obtusangle à  $n+1$  éléments.

On prend  $x \neq 0$  dans  $E$ . Soit  $F = \text{Vect } x^\perp$ . On considère  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  famille obtusangle de  $F$  (qui existe par hypothèse de récurrence).

On note, pour  $\lambda > 0$   $f_\lambda(y) = y - \lambda x$ .

D'une part,  $\langle x, f_\lambda(x_i) \rangle = -\lambda < 0$ . De plus,  $\langle f_\lambda(x_i), f_\lambda(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle + \lambda^2 \|x\|^2$ .

Il existe donc  $\lambda$  assez petit pour que cette quantité soit négative pour tous  $i, j$  ( $\lambda = -\frac{1}{2} \max \langle x_i, x_j \rangle$  convient.)

$(x, x_1, \dots, x_{n+1})$  est bien obtusangle, ce qui clôt la récurrence.

Montrons maintenant que cette famille est bien la plus grande. Montrons d'abord le lemme suivant : si  $(x_i)_i$  est obtusangle, et que  $\sum_i \lambda_i x_i$  est une combinaison linéaire non triviale annulant les  $(x_i)$ , alors les  $(\lambda_i)$  sont non nuls et de même signe.

On note  $I = \{i \mid \lambda_i < 0\}$ ,  $J = \{i \mid \lambda_i \geq 0\}$

Puisque la combinaison linéaire est non triviale, il existe  $i$  tq  $\lambda_i \neq 0$ . Quitte à

prendre l'opposé de la combinaison linéaire, on peut supposer  $\lambda_i > 0$ , ie  $I \neq \emptyset$

On a alors :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = - \sum_{j \in J} \lambda_j x_j$$

En notant  $S$  la somme de droite, et en prenant le produit scalaire par  $S$ , on obtient :

$$\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle = -\|S\|^2$$

Or, tous les termes de la somme sont positifs (car les  $\lambda_i$  sont positifs, les  $\lambda_j$  négatifs, et les  $\langle x_i, x_j \rangle$  négatifs car  $I$  et  $J$  sont disjoints, donc la somme est positive. De plus, le second terme est négatif, donc tous les termes de la somme sont nuls.

Ainsi, tous les  $\lambda_j$  sont nuls (puisque  $I$  est non vide)

Ainsi, tous les  $\lambda_i$  sont positifs.

De plus, si  $\lambda_i = 0$ , on a :

$$0 = \langle 0, e_i \rangle = \left\langle \sum_j \lambda_j e_j, e_i \right\rangle = \sum_j \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle$$

Cette somme est strictement négative car tous ses termes (non nuls, qui existent bel et bien) le sont, ce qui est absurde. Ceci achève la démonstration du lemme.

On suppose que l'on a une famille obtusangle  $(x_1, \dots, x_{n+2})$  à  $n+2$  éléments.

Puisque  $E$  est de dimension  $n$ , il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$  tq  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1}(x_{n+1} - x_{n+2}) = 0$ .

Ainsi,  $\lambda_{n+1}$  et  $-\lambda_{n+1}$  sont tous deux coefficients dans une CL annulant une famille obtusangle : ils non nuls et de même signe, ce qui est absurde : une famille obtusangle à  $n+2$  éléments n'existe pas.

## Exercice 25

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie. Soient  $\varphi, \psi$  deux produits scalaires sur  $E$ .

- Montrer l'existence d'un endomorphisme auto-adjoint positif  $a$  pour ces deux produits scalaires tel que :  $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \psi(a(x), y)$

On fixe  $x$  de  $E$ .  $y \mapsto \varphi(x, y)$  étant une forme linéaire, par théorème de représentation des formes linéaires (pour  $\psi$ ) il existe un unique  $a(x)$  tq, pour tout  $y \in E$ ,  $\varphi(x, y) = \psi(a(x), y)$ . On a donc une application  $a$  vérifiant cette égalité. Montrons qu'il s'agit d'un endomorphisme autoadjoint positif.

La linéarité de  $a$  découle immédiatement de la bilinéarité de  $\varphi$ .

De plus,  $\psi(x, a(y)) = \psi(a(y), x) = \varphi(y, x) = \varphi(x, y) = \psi(a(x), y)$  :  $a$  est bien autoadjoint pour  $\psi$ .

On a également  $\varphi(a(x), y) = \psi(a^2(x), y) = \psi(x, a^2(y)) = \varphi(x, y)$ .

Enfin,  $\psi(a(x), x) = \varphi(x, x) \geqslant 0$  :  $a$  est positif pour  $\psi$  (il est d'ailleurs défini positif). On a de même que précédemment  $\varphi(a(x), x) = \psi(a^2(x), x) = \psi(a(x), a(x)) \geqslant 0$ .

$a$  est bien un endomorphisme autoadjoint (défini) positif pour les  $\varphi$  et  $\psi$ .

2. En utilisant  $a$ , donner une CNS pour qu'un élément de  $O(E, \varphi)$  soit dans  $O(E, \psi)$ .

Soit  $u \in O(E, \varphi)$ .

**condition nécessaire :** On suppose  $u \in O(E, \psi)$ . On a :

$$\begin{aligned}\varphi(u(x), u(y)) &= \varphi(x, y) \\ \psi(au(x), u(y)) &= \psi(a(x), y) \\ \psi(u^{-1}au(x), y) &= \psi(a(x), y)\end{aligned}$$

D'où par bilinéarité  $\psi(u^{-1}au(x) - a(x), y) = 0$ , et pour  $y = u^{-1}au(x) - a(x)$ , on obtient par définition positivité  $u^{-1}au(x) = a(x)$ , et ce pour tout  $x$ , ie  $u$  commute avec  $a$ .

**condition suffisante :** On suppose  $u$  commutant avec  $a$ .

Tout d'abord, on sait que  $a$  est inversible, en considérant  $a'$  défini tel que pour tout  $(x, y)$ ,  $\psi(x, y) = \varphi(a'(x), y)$  : il existe bien par symétrie des rôles, et on vérifie aisément que  $a' = a^{-1}$ .

Pour  $x, y \in E$ ,  $\psi(u(x), y) = \varphi(a^{-1}u(x), y) = \varphi(ua^{-1}(x), y) = \varphi(a^{-1}(x), u^{-1}(y)) = \psi(x, u^{-1}(y))$  :  $u$  est bien orthogonal pour  $\psi$ .

Ainsi,  $u$  est orthogonal pour  $\psi$  ssi  $a$  et  $u$  commutent.

3. Soit  $P$  l'ensemble des produits scalaires sur  $E$ . Déterminer  $\bigcap_{\varphi \in P} O(E, \varphi)$ .

On fixe  $\phi \in P$ . On montre aisément (c'est la même démonstration que la question (1) mais dans l'autre sens) que pour tout  $a$  autoadjoint positif (pour  $\varphi$ ),  $x, y \mapsto \varphi(a(x), y)$  est un produit scalaire.

Dès lors, si  $u$  est dans l'intersection, il commute avec tous les endomorphismes autoadjoints positifs pour  $\varphi$  (question (2)). Or ceux-ci engendent  $\mathcal{L}(E)$ , donc  $u$  commute avec tous les endomorphismes de  $E$  :  $u$  est une homothétie. On note  $u = \lambda \text{Id}$ .

De plus,  $u$  est orthogonal, d'où  $\varphi(x, x) = \varphi(u(x), u(x)) = \lambda^2 \varphi(x, x)$

Ainsi (puisque cette égalité est vraie pour tout  $x$ , en particulier pour  $x$  non nul),  $\lambda^2 = \pm 1$ , d'où  $u = \pm \text{Id}$ .

La réciproque étant immédiate, on a donc :  $\bigcap_{\varphi \in P} O(E, \varphi) = \{\pm \text{Id}\}$