Corrigé colle S17
MPI/MPI* du lycée Faidherbe
Exercices

Léane Parent

11 janvier 2026

Exercice 13

Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on pose $\phi(f) : x \mapsto \int_0^1 \inf(x,t)f(t)dt$.

a) Prouver que $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}))$.

> Par théorème de continuité (sinon on peut utiliser le théorème fondamental de l'analyse avec la question (b)), $\phi(f) \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
> De plus, la linéarité de ϕ découle de celle de l'intégrale : ϕ est bien un endo.

b) En utilisant la relation de Chasles, déterminer une autre manière d'écrire $\phi(f)$

> On a évidemment :
>
> $$\begin{aligned} \inf(x,t) &= x && \text{si } x < t \\ &= t && \text{sinon} \end{aligned}$$
>
> Ainsi, en cassant l'intégrale en x, on obtient :
>
> $$\phi(f)(x) = \int_0^1 \inf(t,x)f(t)dt = \int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 f(t)dt$$

c) Déterminer $\ker\phi$ et $\operatorname{Im}\phi$.

> On sait par théorème fondamental de l'analyse que les deux termes de $\phi(f)$ sont dérivables.
> On a donc $\phi(f)'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t)dt - xf(x) = \int_x^1 f(t)dt$.
> Dès lors, si $f \in \ker\phi$, en particulier $\phi(f)' = 0$, ie, pour tout x, $\int_x^1 f(t)dt = 0$.
> On en déduit immédiatement (en redérivant) que $f = 0$: On a $\ker\phi = \{0\}$
>
> On sait déjà que $\operatorname{Im}\phi \subset \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.