Corrigé colle S17
MPI/MPI* du lycée Faidherbe
Exercice 15 et 16

Léane Parent

26 janvier 2026

Exercice 15

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin\sqrt{t}\, dt$.

a) Mq f est de classe $\mathcal{C}^1$

> On applique le théorème $\mathcal{C}^1$ (quelle surprise !), pour arriver à :
>
> $$f'(t) = -\int_0^{+\infty} te^{-xt} \sin\sqrt{t}\, dt$$

b) Donner la limite de f en $+\infty$.

> On applique le théorème de convergence dominée (quelle surprise !), pour arriver à :
>
> $$f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

c) Mq f est solution d'une EDL homogène du premier ordre.

> Par le changement de variable $u = \sqrt{t}$ ($u^2 = t, dt = 2u\, du$, et la racine carrée est bien $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert, bijective), on obtient :
>
> $$f(x) = 2\int_0^{+\infty} ue^{-xu^2} \sin u\, du \qquad \text{ainsi que} \qquad f'(x) = -2\int_0^{+\infty} u^3 e^{-xu^2} \sin u\, du$$
>
> On a envie de faire apparaître du u^3 dans f : IPPons donc.
>
> $$\begin{aligned} f(x) &= -2[ue^{-xu^2} \cos u]_0^{+\infty} && -2\int_0^{+\infty} (1 - 2xu^2)e^{-xu^2} \cos u\, du \\ &= 0 && -2\int_0^{+\infty} (1 - 2xu^2)e^{-xu^2} \cos u\, du \\ &= -[(1 - 2xu^3)e^{-xu^2} \sin u]_0^{+\infty} && -2\int_0^{+\infty} (-4xu - 2xu + 4x^2u^3)e^{-xu^2} \sin u\, du \\ &= 0 && +12xf(x) - 8x^2 f'(x) \end{aligned}$$

(On a à chaque fois intégré le cosinus ou le sinus et dérivé le reste.) D'où $f'(x) + \frac{12x-1}{8x^2} f(x) = 0$

d) Exprimez f à l'aide des fonctions usuelles.

On en déduit donc $f(x) = ke^{-A(x)}$ (avec $k \in \mathbb{R}$), avec A une primitive de $x \mapsto \frac{12x-1}{8x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.
On sait que $\frac{12x-1}{8x^2} = \frac{3}{2x} - \frac{1}{8x^2}$. On reconnaît la dérivée de $\frac{3}{2} \log |x| + \frac{1}{8x}$. On a donc :

$$f(x) = ke^{\frac{3}{2} \log |x| + \frac{1}{8x}} = k\frac{e^{-\frac{1}{8x}}}{x\sqrt{x}}$$

Il s'agit donc de déterminer k.
On a donc $f(x) \sim \frac{k}{x\sqrt{x}}$ au voisinage de $+\infty$.
De plus, par le changement de variable $u = xt$ (qu'il faut rédiger), on obtient :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u} \sin \sqrt{\frac{u}{x}}\, du \sim \frac{1}{x\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u} \sqrt{u}\, du$$

Or, on reconnaît après changement de variable $v^2 = u$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} \sqrt{u}\, du = 2 \int_0^{+\infty} v^2 e^{-v^2}\, dv = -[te^{-t^2}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(après IPP, en dérivant t et intégrant te^{-t^2} et en utilisant la valeur de l'intégrale de Gauss) On a enfin :

$$\begin{aligned} f(x) = k\frac{e^{-\frac{1}{8x}}}{x\sqrt{x}} &\sim \frac{k}{x\sqrt{x}} \\ &\sim \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

D'où l'on identifie $k = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, soit :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{8x}}}{2x\sqrt{x}}$$

Exercice 16

Note : l'examinateur, par pure mesquinerie, note $f(t) = \int h(t, x) dx$. On prendra garde à ne pas confondre paramètre et variable d'intégration.

a) Déterminer I l'ensemble des réels t tq $x \mapsto e^{-xt} \frac{\sin x}{x}$ est intégrable

On pose $h(t, x) = e^{-xt} \frac{\sin x}{x}$.
On supposera (pour la cohérence avec les questions suivantes) qu'il est question d'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.

h est évidemment continue pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
De plus, on a, d'une part, $h(t,x) \sim_{x\to 0} 1$: $x \mapsto h(t,x)$ est bien intégrable au voisinage de 0.
D'autre part, $h(t,x) = O_{x\to+\infty}(\frac{e^{-xt}}{x})$, d'où $x \mapsto h(t,x)$ intégrable au voisinage de $+\infty$ si $x > 0$.

Si $x \leqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left| e^{-xt} \frac{\sin x}{x} \right| dx &\geqslant \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \qquad \text{dans } \overline{\mathbb{R}_+} \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx\end{aligned}$$

Et cette série est divergente. On a bien vérifié que $x \mapsto h(t,x)$ n'est pas intégrable.

Ainsi, cette fonction n'est intégrable que pour $t \in \mathbb{R}_+^*$

b) Pour $t \in I$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin x}{x} dx$.

Vous n'êtes pas sans savoir qu'une fonction, c'est une primitive de sa dérivée (si, si). Dérivons donc.

On a $\partial_1 h(t,x) = -e^{-xt}\frac{sinx}{x}$.
On pose $\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ e^{-xt} & \text{sinon} \end{cases}$
On vérifie que ϕ est intégrable et domine $\partial_1 h(t,x)$.
Dès lors, par théorème $\mathcal{C}^1$ pour les intégrales à paramètre, f est $\mathcal{C}^1$, et on a $f(t) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin x dx$
Calculons cette intégrale. On a $sinx = \text{Im } e^{ix}$.
On a donc par $\mathbb{R}$-linéarité de la partie imaginaire :

$$f'(t) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin x dx = -\text{Im} \int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{it} dx = \text{Im } \frac{1}{i-t} [e^{x(i-t)}]_{+\infty}^0 = \text{Im } \frac{1}{i-t}$$

Or, $\frac{1}{i-t} = \frac{-i-t}{1+t^2}$, d'où par passage à la partie imaginaire, $f'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$.
On en déduit $f(t) = -\text{Arctan } t + k$, avec k une constante réelle.
Or, par théorème de convergence dominée (j'en rédige déjà un en-dessous, faudrait pas que je me fatigue), on montre que $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, d'où $k = \frac{\pi}{2}$.
On a ainsi $f(t) = -\text{Arctan } t + \frac{\pi}{2}$.

c) En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

On applique le théorème de convergence dominée :

$x \mapsto h(t,x)$ est dominée (vérifiez-le !) par $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{\sin x}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}$.

Cette fonction est bien intégrable car en $O(\frac{1}{x^2})$, et $h(x,t)$ est bien continue, d'où :

$f(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Or, $f(t) \to \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$