Corrigé colle S16
MPI/MPI* du lycée Faidherbe
Exercices 23, 24

Léane Parent

31 décembre 2025

Exercice 23

Soit n un entier naturel.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tq, pour $P \in R_n[X]$, $P(1) = \int_{-1}^{1} \frac{A(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

> L'évaluation en 1 étant une forme linéaire non nulle, pour tout produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, il existe un unique A tq $\langle A, \cdot \rangle$ est l'évaluation en 1, car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie.
> On note, pour P, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{(1+t^2)}}$. Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire.
> Le caractère défini positif se fait comme usuellement (continu positif d'intégrale nulle...).
> Le caractère symétrique découle de la commutativité du produit, et la linéarité de celle de l'intégrale.
> Ainsi, d'après la remarque précédente, il existe un unique A tq, pour tout P, $P(1) = \int_{-1}^{1} \frac{A(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}$.

2. Peut-on remplacer $R_n[X]$ par $R[X]$?

> A priori non (on n'est plus en dimension finie, ça n'a aucune raison de fonctionner), mais il s'agirait de le montrer.
> Le produit scalaire défini ci-dessus reste un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
> On suppose qu'il existe un tel A, de degré n. On remarque que Vect $A^{\perp} = (X-1)\mathbb{R}[X]$ (les polynômes s'annulant en 1).
> (je me retrouve quelque peu bloquée...)

Exercice 24

Soit E euclidien de dimension n.
Soient $x_1, \ldots x_k$ tq, pour $i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle < 0$. Montrer que k ne peut pas être trop grand et trouver cette limite.
(On appellera $(x_1, \ldots x_k)$ une famille obstusangle.)

Montrons tout d'abord (par récurrence, vous savez que j'adore ça) qu'il existe une famille obtusangle à $n+1$ éléments

- Si $n = 1$, il existe x tq $E = \text{Vect } x$. Alors $(x, -x)$ convient.
- Soit $n \geqslant 1$. Si $\dim E = n+1$, supposons que pour F sev de E de dimension n, F contient une famille obtusangle à $n+1$ éléments.
  On prend $x \neq 0$ dans E. Soit $F = \text{Vect } x^{\perp}$. On considère $(x_1, \dots x_{n+1})$ famille obtusangle de F (qui existe par hypothèse de récurrence).
  On note, pour $\lambda > 0$ $f_\lambda(y) = y - \lambda x$.
  D'une part, $\langle x, f_\lambda(x_i)\rangle = -\lambda < 0$. De plus, $\langle f_\lambda(x_i), f_\lambda(x_j) = \langle x_i, x_j\rangle + \lambda^2 \|x\|^2$. Il existe donc λ assez petit pour que cette quantité soit négative pour tous i, j ($\lambda = -\frac{1}{2}\max\langle x_i, x_j\rangle$ convient.)
  $(x, x_1, \dots, x_{n+1})$ est bien obtusangle, ce qui clôt la récurrence.

Montrons maintenant que cette famille est bien la plus grande. Montrons d'abord le lemme suivant : si $(x_i)_i$ est obtusangle, et que $\displaystyle\sum_i \lambda_i x_i$ est une combinaison linéaire non triviale annulant les (x_i), alors les (λ_i) sont non nuls et de même signe.

On note $I = \{i \mid \lambda_i < 0\}$, $J = \{i \mid \lambda_i \geqslant 0\}$
Puisque la combinaison linéaire est non triviale, il existe i tq $lambda_i \neq 0$. Quitte à prendre l'opposé de la combinaison linéaire, on peut supposer $\lambda_i > 0$, ie $I \neq \emptyset$
On a alors :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = -\sum_{j \in J} \lambda_j x_j$$

En notant S la somme de droite, et en prenant le produit scalaire par S, on obtient :

$$\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \langle x_i, x_j\rangle = -\|S\|^2$$

Or, tous les termes de la somme sont positifs (car les λ_i sont positifs, les λ_j négatifs, et les $\langle x_i, x_j\rangle$ négatifs car I et J sont disjoints, donc la somme est positive. De plus, le second terme est négatif, donc tous les termes de la somme sont nuls.
Ainsi, tous les λ_j sont nuls (puisque I est non vide)
Ainsi, tous les λ_i sont positifs.
De plus, si $\lambda_i = 0$, on a :

$$0 = \langle 0, e_i\rangle = \langle \sum_j \lambda_j e_j, e_i\rangle = \sum_j \lambda_j \langle e_i, e_j\rangle$$

Cette somme est strictement négative car tous ses termes (non nuls, qui existent bel et bien) le sont, ce qui est absurde. Ceci achève la démonstration du lemme.

On suppose que l'on a une famille obtusangle $(x_1, \dots x_{n+2})$ à $n+2$ éléments.
Puisque E est de dimension n, il existe $\lambda_1, \dots \lambda_{n+1}$ tq $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1}(x_{n+1} - x_{n+2}) = 0$.
Ainsi, λ_{n+1} et $-\lambda_{n+1}$ sont tous deux coefficients dans une CL annulant une famille obtusangle : ils non nuls et de même signe, ce qui est absurde : une famille obtusangle à $n+2$ éléments n'existe pas.