corrigé colle S7
MPI/MPI* du lycée Faidherbe
exercices 16, 17 et 19

Léane Parent

21 octobre 2025

exercice 16

Soit E un (C)-espace vectoriel de dimension n, u $\in \mathcal{L}(E)$
Montrer que u est diagonalisable ssi tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par u.

> **Sens direct** :
> Soit F un sous-espace vectoriel de E.
> On note $B_1 = (e_1,\ \dots e_p)$ une base de F.
> u est diagonalisable, donc admet une base de vecteurs propres de u.
> Ainsi, on peut compléter B_1 en $(e_1,\ \dots e_n)$, base de E à l'aide de vecteurs propres (parce qu'on connaît son cours de sup...)
> Dès lors, $\mathrm{Vect}(e_{p+1},\ \dots e_n)$ est supplémentaire de F, et engendré par des vecteurs propres donc stable par u. On a trouvé un supplémentaire de F stable par u.
>
> **Réciproquement**, supposons que tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par u.
> Pour $n \in \mathbb{N}$, on note H_n, bla, bla, vous avez l'idée
> - vous en connaissez beaucoup des matrices d'ordre 1 pas diagonalisables ? (H_1 est vraie.)
> - Soit n, bla, bla. E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc admet un vecteur propre e_1.
>   On note S un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(e_1)$ stable par u.
>   Montrons que l'endomorphisme induit sur S vérifie l'hypothèse de récurrence.
>
>   Soit F un sous-espace de S. Par hypothèse, $S \oplus \mathrm{Vect}(e_1)$ admet un supplémentaire T stable par u. Montrons que $T \cap S$ est alors supplémentaire de F dans S (**FONCTIONNE PAS**). E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc admet un vecteur propre e_1.
> T et S sont stables par u, donc $T \cap S$ également. On considère $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit.
>
>   Par hypothèse de récurrence, il existe une base B tq $\mathrm{Mat}_B \tilde{u}$ est diagonale. On a alors $\mathrm{Mat}_{(e1) \sqcup B} u$ diagonale.
>
> Ce qui clôt la récurrence.

exercice 17

Soient $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u : f \mapsto (x \mapsto f(px+q))$, avec $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.

1. Montrer que u est un automorphisme de E.

> On considère $f \mapsto \left(x \mapsto f(\frac{x-q}{p})\right)$. On montre aisément qu'il s'agit d'un inverse **à droite et à gauche** de u. (On est en dimension infinie !)

2. Montrer que les valeurs propres de u sont dans $]-1,1]$

> Soit f une valeur propre associée à λ. f est vecteur propre donc non nulle, ie il existe x_0 tq $f(x_0) \neq 0$.
> L'idée est d'itérer u sur f, puis d'évaluer en x_0.
>
> On note (x_n) telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = px_n + q$. On vérifie aisément (exo) que $x_n \to 1$ (on regarde les intervalles stables, puis la monotonie de (x_n), etc).
>
> De plus, en itérant u, puis en évaluant en x_0, on obtient, pour $n \in \mathbb{N}$, $\lambda^n f(x_0) = f(x_n)$. Or, le terme de droite converge (par continuité de f), donc le terme de gauche également. On en déduit que (λ^n) converge, d'où $\lambda \in]-1,1]$.

3. Montrer que si f est valeur propre, il existe k tq $f^{(k)} = 0$.

> On note f une valeur propre associée à λ.
> Dès lors, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(px+q) = \lambda f(x)$.
> En dérivant k fois cette égalité, on obtient :
>
> $$f^{(k)} = \frac{\lambda}{p^k} f^{(k)}(px+q)$$
>
> Ainsi, si $f^{(k)} \neq 0$, $f(k)$ est valeur propre associée à $\frac{\lambda}{p^k}$. Or, $\frac{\lambda}{p^n} \to +\infty$ (car u est un automorphisme, donc $E_0(u) = \{0\}$, donc 0 n'est pas valeur propre), donc il existe n tq $f^{(n)}$ soit valeur propre associée à $\lambda_n > 1$, ce qui est absurde d'après la question précédente.

4. Trouver les valeurs et vecteurs propres de u.

> D'après la question précédente, tout vecteur propre est polynomial (pour ceux qui tiennent vraiment à le montrer (on me l'a demandé), on primitive k fois 0).
> En identifiant polynôme et fonction polynomiale, on se restreint à $\mathbb{R}_n[X]$.
> Soit P un vecteur propre de degré k associé à λ. En s'intéressant au coefficient dominant, il en découle que $\lambda = p^k$.
> On a $n+1$ valeurs propres en dimension $n+1$, les sous-espaces propres sont donc tous de dimension 1.
>
> Sortons maintenant des vecteurs propres de notre chapeau.
> Soit $k \in \mathbb{N}$. En composant $(X-1)^k$ à gauche par $pX+q$, on obtient $(pX-p)^k = p^k(X-1)^k$, ie $(X-1)^k$ est vecteur propre associ à p^k.
> On en déduit que $E_{n^p}(u) = \mathrm{Vect}(X-1)^p$.
> On a trouvé les sous-espaces propres de degré inférieur à n pour tout n, donc

ceux dans $\mathbb{R}[X]$, donc, d'après la question précédente, dans E.

Pour ceux parmi vous qui se demandent comment j'ai trouvé $(X-1)^k$, sachez que moi aussi.
Globalement, je cherchais un polynôme pas trop compliqué, et je me suis dit que si a était racine, alors $px-q$ également, donc j'ai pris une racine qui en créerait pas beaucoup d'autres.

exercice 19

On se donne une matrice $M=(m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$, avec, pour tout j, $\sum_{k=1}^n m_{i,j}=1$, et, pour tout (i,j), $0 \leqslant m_{i,j} \leqslant 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de M, puis montrer que toutes les valeurs propres complexes de M vérifient $|\lambda| \leqslant 1$

   Pour montrer que 1 est valeur propre, il suffit de considérer $X = {}^T(1\ 1\ \dots\ 1)$.

   Soit $X=(x_i)$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ. On note i_0 tel que $|x_{i_0}|=\max|x_i|$. (On note que $X \neq 0$ donc $x_{i_0} \neq 0$.)

   On considère la i_0-ième ligne de MX :

   $$\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^n m_{i_0,j} x_j$$

   Ainsi, par inégalité triangulaire :

   $$|\lambda|\,|x_{i_0}| \leqslant \sum_{j=1}^n m_{i_0,j}\,|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^n m_{i_0,j}\,|x_{i_0}| = |x_{i_0}|$$

   Dès lors, $\lambda \leqslant 1$.

2. Montrer que, si λ est valeur propre de module 1, alors $\lambda=1$.

   On reprend les notations de la question précédente.
   Ainsi, les inégalités sont alors des égalités.
   On a alors, pour tout j, $m_{i_0,j}x_j = m_{i_0,j}x_{i_0}$ (positivement colinéaires d'après l'inégalité triangulaire, de module constant par passage à la borne supérieure).
   Dès lors, $\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^n m_{i_0,j}x_{i_0}$, d'où $\lambda=1$.

3. Montrer que $\ker(M-I_n) = \ker(M-I_n)^2$

   L'inclusion directe est immédiate.
   On prend $X \in \ker(M-I_n)^2$.

$$M^kX = (M - I_n + I_n)^kX = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (M - I_n)^jX = X + k(M - I_n)X$$

On en déduit $(M - I_n)X = \frac{M^kX - X}{k}$.
De plus, on montre aisément (j'ai un peu la flemme) que M^k est stochastique, donc borné, d'où $(M - I_n) \to 0$, donc $X \in \ker(M - I_n)$. D'où l'égalité.