Corrigé colle S15
MPI/MPI* du lycée Faidherbe
Exercices 26, 27

Léane Parent

21 décembre 2025

Exercice 27

On tire $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ aléatoirement. On note X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de cycles de σ.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = n)$.

> On se place dans le cadre d'une loi uniforme.
> Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ contient n cycles, alors $\sigma = \mathrm{Id}$ (car tout point est point fixe : en effet, tout point appartient à un cycle de longueur 1).
> Dès lors, $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n!}$.
>
> De plus, si σ comporte exactement 1 cycle, alors il s'agit d'un n-cycle.
> Or, un n-cycle dans $\mathfrak{S}_n$ est entièrement déterminé par :
> — $\sigma(1)$: $n-1$ choix, car 1 n'est pas point fixe
> — $\sigma^2(1)$: $n-2$ choix, car $\sigma(1)$ n'est pas point fixe, et ne peut être envoyé sur 1 sous réserve de former un cycle de longueur 2
> — …
> — $\sigma^n(1) = 1$ pour former un n-cycle : 1 choix
> Ainsi, il existe $(n-1)!$ n-cycles dans $\mathfrak{S}_n$, d'où $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

2. Déterminer la fonction génératrice de X_n.

> Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$, on considère $\sigma' = (\sigma(n+1)\ n+1)\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (l'idée c'est qu'il s'agit de σ "corrigée" pour que $n+1$ soit point fixe.)
> Dès lors, le nombre de cycle de σ est, si on note k le nombre de cycles de σ' :
> — $k+1$ si $n+1$ est point fixe (avec probabilité $\frac{1}{n+1}$, j'ai la flemme de le montrer (ça découle des $n+1$ possibilités pour $\sigma(n+1)$), indépendante de σ')
> — k sinon
>
> Montrons maintenant que σ' suit une loi uniforme dans $\mathfrak{S}_n$. (flemme → plus tard)
> on a alors $X_{n+1} \sim X_n + Y_n$, avec $X_n \perp\!\!\!\perp Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{n})$.
> Dès lors, en notant G_n la fonction génératrice de X_n, on a $G_{n+1}(t) = \frac{n-1+t}{n} G_n(t)$. On arrive alors à une définition de G_n comme produit (il y a sûrement plus beau).

3. Déterminer son espérance et sa variance

On a, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{n+1}$, d'où, par une récurrence immédiate ($X_1 = 1$), $\mathbb{E}(X_n) = H_n$, où H_n est la somme partielle de la série harmonique. (On remarque que $\mathbb{E}(X_n) \sim \log n$.)

De plus, on sait que $X_n \perp\!\!\!\perp Y_n$ d'où $\mathbb{V}(X_{n+1}) = \mathbb{V}(X_n) + \mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{V}(X_n) + \frac{n-1}{n^2}$.
On en déduit que $\mathbb{V}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k^2}$ (on vérifie que cette formule est bien vraie en $n = 1$)
Ainsi, $\mathbb{V}(X_n) = \frac{n(n+1)}{2} - S_n$, avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. (On remarque que $\mathbb{V}(X_n) \sim \frac{n^2}{2}$.)