

Corrigé colle S12

MPI/MPI* du lycée Faidherbe

Exercices 20 et 22

Léane Parent

29 novembre 2025

Exercice 20

Montrer que e est irrationnel.

On suppose e rationnel, on note $e = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}$. Considérons la quantité $pq!$. On a :

$$\begin{aligned} q!p &= q!q\frac{p}{q} = q!qe \\ &= q!q \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\ &= q \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} + q \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{k!} \end{aligned}$$

Le membre de gauche est évidemment entier. Le second terme également, par somme d'entiers. Notons le second terme δ .

Montrons que $0 < \delta < 1$.

La première inégalité est évidente. De plus, on a $\delta = q \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{k!} = q \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q!}{(q+k)!}$.

Or, pour $k > 0$, on a $\frac{q!}{(q+k)!} \leq \frac{1}{(q+1)^k}$, avec égalité ssi $k = 1$.

On en déduit $\delta = q \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q!}{(q+k)!} < q \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(q+1)^k} = q \frac{1}{q+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{q}{q+1} \frac{q+1}{q} = 1$.

On a bien montré $0 < \delta < 1$. Or, $\delta \in \mathbb{Z}$, par différence, ce qui est absurde.

Ainsi, $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 22 (non fini)

On suppose l'existence de $A \subset \mathbb{N}$ tq $\sum_{n \in A} \frac{x^n}{n!} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}$

- Pour $I \subset A$ fini, calculer $\int_0^{+\infty} \sum_{n \in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx$.

La somme étant finie, on peut permute somme et intégrale.

Calculons, par récurrence sur n (eww), $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

On a, pour $n > 0$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = -[x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = 0 + nI_{n-1}$

(le crochet vaut 0 parce qu'on a supposé $n \neq 0$, il faut faire attention !) Le crochet converge, et I_{n-1} converge par HR, d'où la convergence de I_n , et l'égalité.

On en déduit immédiatement $I_n = n!$.

Dès lors, l'intégrale de l'énoncé vaut $\sum_{n \in I} 1 = |I|$.

Or, on a $\sum_{n \in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!} \leq \sum_{n \in A} \frac{x^n e^{-x}}{n!}$. De plus, $x \mapsto \sum_{n \in A} \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ est continue sur $[0, +\infty[$, positive, et équivalente en $+\infty$ à $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. Dès lors, $x \mapsto \sum_{n \in A} \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ est intégrable, et on en déduit que l'intégrale de l'énoncé est bornée.

Dès lors, les parties finies de A sont de cardinal bornés, donc A est fini.

2. Qu'en conclut-on ?

On a alors $\sum_{n \in A} \frac{x^{n+2}}{n!} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$, ie un polynôme équivalent à la fonction exponentielle, ce qui est absurde. Un tel A n'existe pas.