

Corrigé colle S20

MPI/MPI* du lycée Faidherbe

Exercices 18 et 19

Léane Parent

14 février 2026

Soit E un espace vectoriel normé et K une partie compacte non vide de E .

- a) Soit $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés non vides inclus dans K . Montrer que $\bigcap_{n=0}^{+\infty} L_n \neq \emptyset$.

On choisit, pour tout n , $x_n \in L_n$. On a ainsi construit $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$.

Or, K étant compact, (x_n) admet une suite extraite convergente. Soit φ une extractrice tq $(x_{\varphi(n)})$ CV vers un certain vecteur x .

$$\text{Mq } x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} L_n \neq \emptyset.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $k \geq n$, $x_k \in L_k \subset L_n$. De plus, $\varphi(k) \geq k \geq n$ d'où $x_{\varphi(k)} \in L_n$. Dès lors $(x_{\varphi(k)})_{k \geq n}$ est une suite d'éléments du fermé L_n , qui converge vers x , d'où $x \in L_n$ (par caractérisation séquentielle des fermés).

On a bien $x \in L_n$ pour tout n , d'où $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} L_n \neq \emptyset$: cet ensemble n'est pas vide.

- b) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions continues de K dans \mathbb{R} qui converge simplement vers $g : K \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

Quitte à considérer $(f_n - f)$, où (f_n) CVS vers f , on suppose (f_n) CVS vers la fonction nulle. On remarque que les (f_n) sont positives (car l'inégalité large passe à la limite)

Supposons que (f_n) ne converge pas uniformément. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe une extractrice φ , une suite x_n tq, pour tout n , $f_{\varphi(n)}(x_n) > \varepsilon$. De plus, (f_n) est décroissante d'où, pour tout n , $k \geq n$, $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(k)}) > \varepsilon$. (De fait, $n \leq k \leq \varphi(k)$.)

Or, les (x_k) sont dans K , qui est compact, donc il existe x valeur d'adhérence de cette suite. Quitte à extraire, on suppose $x_k \rightarrow x$.

Or, les (f_n) sont continues par hypothèse, d'où : $f_n(x_{\varphi(k)}) \rightarrow k \rightarrow +\infty f_n(x)$, et cette valeur est alors supérieure ou égale à ε (car l'inégalité large passe à la limite). Dès lors, $f_n(x) \not\rightarrow 0$, ce qui est absurde.

On a ainsi (f_n) CVU vers f .

(Le truc marrant, c'est que ça fonctionne avec les suites décroissantes de fonctions et avec les suites de fonctions décroissantes, on appelle ça les théorèmes de Dini.)

Exercice 19

On munit $\mathbb{C}[X]$ de $\left\| \sum_{k=0}^n a_k X^k \right\| = \max |a_k|$ (la norme infinie sur $\mathbb{C}[X]$). Soit d un entier naturel.

a) Existe-t-il $K_1 \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall P, Q \in \mathbb{C}_d[X], \|P \cdot Q\| \leq K_1 \|P\| \|Q\|$?

Soit $P(X) = \alpha_0 + \dots + \alpha_d X^d$, $Q(X) = \beta_0 + \dots + \beta_d X^d$.

On a alors le coefficient devant X^k dans $P \cdot Q$ égal à $\sum_{i+j=k} (\alpha_i \beta_j) = \sum_{j=k-d}^k (\alpha_{k-j} \beta_j)$

(par produit de Cauchy). On a de plus :

$$\left| \sum_{j=k-d}^k (\alpha_{k-j} \beta_j) \right| \leq \sum_{j=k-d}^k |\alpha_{k-j} \beta_j| \leq \sum_{j=k-d}^k \|P\| \|Q\| = (d+1) \|P\| \|Q\|$$

$K_1 = d+1$ convient.

b) Existe-t-il $K_2 \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall P, Q \in \mathbb{C}[X], \|P \cdot Q\| \leq K_2 \|P\| \|Q\|$?

On note $P(X) = 1 + X + \dots + X^n$.

On a alors $\|P\| = 1$. Cependant, le coefficient devant X^n de $P \cdot P$ est n . Ainsi, on a un polynôme tq $\|P \cdot P\| \geq n \|P\| \|P\|$, d'où, si un tel K_2 existait, $K_2 > n$ pour tout n , ce qui est absurde. Un tel K_2 n'existe pas.

c) Existe-t-il $K_3 \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall P, Q \in \mathbb{C}_d[X], \|P\| \|Q\| \leq K_3 \|P \cdot Q\|$?

Le cas où l'un des deux polynômes est de norme nulle est immédiat (de fait, ce polynôme serait nul, ce qui permet de conclure).

Dès lors, on considère $\tilde{P} = \frac{1}{\|P\|} P$, $\tilde{Q} = \frac{1}{\|Q\|} Q \in S(0, 1)$

La sphère unité est compacte (elle est évidemment bornée, et par continuité de $\|\cdot\|$ est fermée, le tout en dimension finie), d'où, par théorème des bornes atteintes, $P, Q \mapsto PQ$ est minorée en norme par un certain m (cette application étant bilinéaire, elle est continue).

On a donc $\|\tilde{P} \tilde{Q}\| \geq m$, d'où, en multipliant par $\|P\| \|Q\|$:

$$\|P \cdot Q\| \geq m \|P\| \|Q\|$$

$K_3 = \frac{1}{m}$ convient. ($m \neq 0$ car ce mimimum est atteint, et que $PQ = 0$ ssi $P = 0$ ou $Q = 0$, ce qui est absurde)

d) Existe-t-il $K_4 \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall P, Q \in \mathbb{C}[X], \|P\| \|Q\| \leq K_4 \|P \cdot Q\|$?

On considère $P(X) = (X+1)^n$, $Q(X) = (X-1)^n$. On vérifie que $\|P\| = \|Q\| = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, et que $P(X)Q(X) = (X^2 - 1)^n$ est de même norme. On aboutit de même que précédemment à une absurdité (car $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \rightarrow +\infty$).