Corrigé colle S9
MPI/MPI* du lycée Faidherbe
Exercices 16

Brahim El hamdani

02 novembre 2025

Exercice 16 (D'après l'exercice 4 du document "Tribu infinie non dénombrable")

Soit Ω un ensemble non-vide et $\mathscr{T}$ une tribu sur Ω. Pour $x \in \Omega$, on définit

$$\mathcal{F}_x := \{T \in \mathscr{T} : x \in T\} \quad \text{et} \quad [x] := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F.$$

1. Montrer que $x \notin [y]$ implique $y \notin [x]$. En déduire que $x \sim y$ si $x \in [y]$ est une relation d'équivalence sur Ω.

Si $x \notin [y]$, alors il existe $A \in \mathscr{T}$ tel que $x \notin A$ et $y \in A$.
Alors $\overline{A} \in \mathscr{T}$, avec $y \notin \overline{A}$ et $x \in \overline{A}$, donc $y \notin [x]$.

Définissons $x \sim y$ par $x \in [y]$. Vérifions que $\sim$ est une relation d'équivalence :

- **Réflexivité :** $x \in [x]$ car $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F$.
- **Symétrie :** Si $x \in [y]$, supposons $y \notin [x]$. Alors $x \notin [y]$ d'après l'implication prouvée, contradiction. Donc $y \in [x]$.
- **Transitivité :** Si $x \in [y]$ et $y \in [z]$, alors pour tout $F \in \mathscr{T}$ avec $z \in F$, on a $y \in F$ (car $y \in [z]$), donc $x \in F$ (car $x \in [y]$). Ainsi $x \in [z]$.

Donc $\sim$ est une relation d'équivalence.

2. Montrer que $\mathcal{P} = \{[x] : x \in \Omega\}$ est une partition de Ω.

- Chaque $[x]$ est non vide car $x \in [x]$.
- $\bigcup_{x \in \Omega} [x] = \Omega$ car $x \in [x]$.
- Si $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, soit $z \in [x] \cap [y]$. Alors $z \sim x$ et $z \sim y$, donc $x \sim y$ par symétrie et transitivité, d'où $[x] = [y]$.

  Ainsi $\mathcal{P}$ est une partition de Ω.

3. Soit $T \in \mathscr{T}$. Montrer que $T = \bigcup_{x \in T} [x]$.

- Pour tout $x \in T$, on a $T \in \mathcal{F}_x$, donc $[x] = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F \subseteq T$. Ainsi $\bigcup_{x \in T} [x] \subseteq T$.
- Inversement, si $x \in T$, alors $x \in [x]$, donc $T \subseteq \bigcup_{x \in T} [x]$.

  D'où $T = \bigcup_{x \in T} [x]$.

4. Montrer que $\mathcal{P}$ est infinie si $\mathscr{T}$ est infinie.

Supposons $\mathcal{P}$ fini, de cardinal n.
D'après l'exercice 1, la tribu engendrée par une partition finie de n ensembles non vides disjoints a pour cardinal 2^n.
Or, par (c), tout $T \in \mathscr{T}$ est réunion de classes de $\mathcal{P}$, donc $\mathscr{T} \subset \sigma(\mathcal{P})$.
Ainsi $|\mathscr{T}| \leq 2^n < \infty$.
Par contraposée, si $\mathscr{T}$ est infinie, alors $\mathcal{P}$ est infinie.

5. Soit $\mathcal{P}$ infinie. Montrer (par l'absurde) que $\mathscr{T}$ est indénombrable.
   (a) Montrer que si $\mathscr{T}$ est dénombrable, alors $[x] \in \mathscr{T}$ pour tout $x \in \Omega$. En déduire que $\mathcal{P}$ est dénombrable.

Pour tout x, $\mathcal{F}_x = \{T \in \mathscr{T} : x \in T\}$ est dénombrable.
Alors $[x] = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F$ est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathscr{T}$, donc $[x] \in \mathscr{T}$.
Ainsi $\mathcal{P} \subset \mathscr{T}$, donc $\mathcal{P}$ est dénombrable.

   (b) Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une énumération de $\mathcal{P}$. S'en servir pour construire une bijection $\phi : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \sigma(\{P_n : n \in \mathbb{N}\}) \subset \mathscr{T}$. Conclure.

Puisque $\mathcal{P}$ est dénombrable infinie, on peut indexer ses éléments par $\mathbb{N}$: soit $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ une bijection. On note $P_n = f(n)$.
Les P_n sont disjoints car $\mathcal{P}$ est une partition.

Soit $\sigma(\{P_n : n \in \mathbb{N}\})$ la plus petite tribu contenant tous les P_n (on l'appelle la tribu engendrée par $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$).

Soit $\mathcal{A} = \left\{\bigcup_{k\in S} P_k : S \subset \mathbb{N}\right\}$.
Montrons que $\sigma(\{P_n\}) = \mathcal{A}$ par double inclusion :
— $\mathcal{A} \subset \sigma(\{P_n\})$:
  Soit $A \in \mathcal{A}$, donc $A = \bigcup_{k\in S} P_k$ pour un $S \subset \mathbb{N}$.
  Comme chaque $P_k \in \sigma(\{P_n\})$ et $\sigma(\{P_n\})$ est stable par réunion dénombrable, $A \in \sigma(\{P_n\})$.
— $\sigma(\{P_n\}) \subset \mathcal{A}$:
  Vérifions que $\mathcal{A}$ est une tribu :
  — $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k \in \mathcal{A}$.
  — Si $A = \bigcup_{k\in S} P_k \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} = \bigcup_{k\notin S} P_k \in \mathcal{A}$.
  — Si $A_n = \bigcup_{k\in S_n} P_k \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup_n A_n = \bigcup_{k\in\bigcup_n S_n} P_k \in \mathcal{A}$.
  Donc $\mathcal{A}$ est une tribu contenant tous les P_n, donc $\sigma(\{P_n\}) \subset \mathcal{A}$

Définissons $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{T}$ par : pour tout $S \subset \mathbb{N}$,

$$\phi(S) = \bigcup_{k\in S} P_k.$$

Montrons que ϕ est injective.
Soient $S, S' \subset \mathbb{N}$ avec $S \neq S'$. Alors il existe k_0 tel que $k_0 \in S \setminus S'$. Puisque les P_k sont disjoints, $P_{k_0} \subset \phi(S)$ mais $P_{k_0} \cap \phi(S') = \emptyset$.Donc $\phi(S) \neq \phi(S')$.

Ainsi il existe une injection d'un ensemble non dénombrable dans $\mathscr{T}$ donc $\mathscr{T}$ non dénombrable. Absurde. Donc $\mathscr{T}$ est non dénombrable.

Exercice 16 (version Léane)

Montrer qu'une tribu infinie est indénombrable.

J'aime pas trop la correction de Brahim, donc je fais la mienne (qui est cependant similaire).

On se donne T une tribu sur E.

> On note $A(x) = \bigcap_{x \in A \in T} A$.
>
> Montrons que les $A(x)$ forment une partition de E.
> Puisque $x \in A(x)$, il suffit de mq les $A(x)$ sont des classes d'équivalence.
> Si $y \in A(x)$, mq $x \in A(y)$. Supposons que ce ne soit pas le cas.
> Alors il existe $A \in T$ tq $y \in A, x \notin A$. On a ${}^C A \in T$, $x \in {}^C A$, $y \notin {}^C A$. Ainsi, $y \notin A(x)$, ce qui est absurde. On a bien $A(x) = A(y)$.
>
> Montrons que, pour $A \in T$, $A \bigcup_{x \in A} A(x)$.
> L'inclusion directe et immédiate. De plus, si $x \in A$, $y \in A(x)$, on sait que $y \in A$ pour tout A tq $x \in A$, d'où l'inclusion réciproque.
>
> On considère $(x_i)_{i \in I}$ une famille de représentants de classes d'équivalence distinctes.
> Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(I) & \to T \\ J & \mapsto \bigcup_{j \in J} A(x_j) \end{cases}$.
>
> Puisque les $A(x_j)$ sont disjoints, cette application est injective.
> De plus, on a montré plus haut que tout élément de T se décomposait en union de $A(x)$, donc de $A(x_i)$, d'où la surjectivité
>
> On suppose T infinie.
> Alors, par bijectivité de φ, $\mathcal{P}(I)$ est infini donc I l'est également.
> On en déduit que $\mathcal{P}(I)$ est indénombrable, d'où l'indénombrabilité de T.
>
> *Note : on a prouvé que si T était finie, alors elle est de cardinal 2^n avec n entier*