Corrigé colle S9
MPI/MPI* du lycée Faidherbe
Exercices 15, 16 et 17

Brahim El Hamdani et Léane Parent

18 novembre 2025

Exercice 15

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note Ω l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1. Mq la série $\sum u_n$ CVA ssi pour toute bijection $\sigma \in \Omega$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.
   Dans tout l'exercice, on notera $E^+ = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \geqslant 0\}$. On définit de même E^-.

Si la série converge absolument :
Soit $\sigma \in \Omega$.
$\sum |u_n|$ converge et est à termes positifs, donc $\sum |u_\sigma(n)|$ converge. Ainsi, $\sum u_{\sigma(n)}$ CVA donc CV.

Sinon, on va construire une bijection qui ne vérifie pas la propriété.
On a alors $\max\{0, u_n\} = \frac{a_n+|a_n|}{2}$, $\min\{0, u_n\} = \frac{a_n-|a_n|}{2}$, et on en déduit que les séries $\sum \max\{0, u_n\}$ et $\sum \max\{0, u_n\}$ divergent (par somme d'une série convergente et d'une matrice divergente).

On construit σ par récurrence :
On pose $\sigma(0) = 0$, et, pour $n \in \mathbb{N}$:
- Si, pour $A \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)} \geqslant A$, et que pour $p \leqslant n$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u_{\sigma(k)} < A$, $\sigma(n) = \min E^+ \backslash \sigma(\llbracket 0, n \llbracket)$
- Sinon, on pose $\sigma(n) = \min E^- \backslash \sigma(\llbracket 0, n \llbracket)$

Montrons que σ est une bijection. L'injectivité étant immédiate, il suffit de prouver la surjectivité.
Supposons n non atteint.
Si $n \in E^+$, on a, par construction, pour $n' \geqslant n$ dans E^+, n' n'est pas atteint.
Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les éléments sont négatifs, ce qui est absurde par construction de σ.
De même, si $n \in E^-$, tous les éléments supérieurs dans E^- ne sont pas atteints. Alors les termes de la série $\sum u_{\sigma n}$ sont positifs à partir d'un certain rang, donc diverge car elle n'est pas absolument convergente, donc diverge vers $+\infty$ car les termes sont positifs (à partir d'un certain rang). Cela est absurde car alors n devrait être atteint par σ.

On montre aisément que la série diverge, mais pour la suite de l'exercice, montrons que celle-ci diverge vers $+\infty$.
La série des u_n converge, donc il existe un rang n_2 à partir duquel $|u_n| \leqslant \varepsilon = 1$. Par injectivité de σ, il existe un rang n_1 à partir duquel $|u_{\sigma(n)}| \leqslant 1$.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Quitte à prendre la partie entière supérieure de A, supposons $A \in \mathbb{N}$. Par construction de σ, il existe un rang $n_0 \geqslant n_1$ tq $\sum_{k=0}^{n_0} u_{\sigma(k)} \geqslant A+1$. On montre alors :

— $\sum_{k=0}^{n_0+1} u_{\sigma(k)} \geqslant A$
— Par une récurrence, si $n > n_0$, on a soit $u_\sigma(n) \geqslant 0$, soit celui-ci est négatif, supérieur à -1, mais alors la somme partielle de rang $n-1$ est supérieure à $A+1$: dans tous les cas, la somme partielle reste supérieure à A.

On a alors, pour $n \geqslant n_0$, une somme partielle supérieure à A, et ce pour tout A : la série diverge vers $+\infty$

On a bien montré qu'une série $\sum u_n$ convergente converge absolument ssi, pour toute bijection σ, $\sum u_{\sigma(n)}$ converge.

2. Déterminer $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

On considère la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ \text{pair}}}^{2n} \frac{-1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{\substack{k=1 \\ \text{pair}}}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Par analyse asymptotique, avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1/k = \log n + \gamma + \mathrm{o}(1)$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2n + \gamma - \log n - \gamma + \mathrm{o}(1) = \log 2 + \mathrm{o}(1) \longrightarrow \log 2.$$

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$

3. Calculer la somme $(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}) - (\frac{1}{6} + \frac{1}{8}) \ldots$

Qui sait, je le ferai peut-être avant votre colle ?

4. Quelles sont les valeurs possibles, dans $\overline{\mathbb{R}}$, de $\sum u_{\sigma(n)}$, quand σ parcourt Ω ?

On suppose $\sum u_n$ semi-convergente. On a montré plus haut que $+\infty$ était atteint. On montre de même que $-\infty$ est atteint.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On va construire σ tq $\sum u_{\sigma(n)}$ CV vers α.
Construisons maintenant, par récurrence sur n, $\sigma(n)$.
On pose $\sigma(0) = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:
— Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \leqslant \alpha$, on prend $\sigma(n) = \min E^+ \backslash \sigma(\llbracket 0, n \llbracket)$.
— Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} > \alpha$, on prend $\sigma(n) = \min E^- \backslash \sigma(\llbracket 0, n \llbracket)$.
L'injectivité de σ est immédiate. Montrons sa surjectivité.
Raisonnons par l'absurde. Si $n_0 \in \mathbb{N}$ n'est pas atteint. Supposons $n_0 \in E^+$ (le cas $n_0 \in E^-$ se démontre de même).
On déduit de la définition de σ que, pour $n \geqslant n_0$, n_0 n'est pas atteint. Dès lors, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est supérieure à α à partir d'un certain rang, donc $\sigma(n)$ parcourt tout E^-.
La série $\sum u_{\sigma(n)}$ est minorée, et est à termes négatifs, donc décroissante, à partir d'un certain rang.
On en déduit que la série des $u_\sigma(n)$ est absolument convergente (car convergente et de signe constant à partir d'un certain rang). Dès lors, la série $\displaystyle\sum_{n \in E^-} u_n$ converge absolument, donc converge, ce qui est absurde. (On s'est ramenés à la série des termes négatifs car ces deux séries ne diffèrent que d'un nombre fini de termes)
σ est bijective.

Montrons maintenant que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge vers α.
Soit $\varepsilon > 0$. La série des u_n converge, donc, à partir d'un certain rang n_1, $|u_n| \leqslant \varepsilon$. Par injectivité de σ, il existe n_0 tq, pour $n \geqslant n_0$, $u_{\sigma(n)} \leqslant \varepsilon$.
On sait qu'il existe $N \geqslant n_0$ tq $\sigma(N) \geqslant 0$, $\sigma(N+1) < 0$ (sinon, la suite resterait dans un des E^- ou E^+ à partir d'un certain rang, et on a montré plus haut que c'était absurde).
Dès lors, on a, en notant S_n la n-ième somme partielle :
$S_N \leqslant \alpha$, $S_{N+1} \geqslant \alpha$. Or, $S_{N+1} = S_N + u_{N+1} \leqslant \alpha + \varepsilon$. On en déduit $|S_{N+1} - \alpha| \leqslant \varepsilon$.
Soit $n > N$. Supposons $S_n > \alpha + \varepsilon$. Puisque $|u_{\sigma(n)}| \leqslant \varepsilon$, $S_(n-1) > \alpha$. Ainsi, $u_{\sigma(n)} < 0$.
On a alors $\alpha + \varepsilon < S_n \leqslant S_{n-1}$. En appliquand le même raisonnement au rang $n-1$, puis en itérant, on obtient de proche en proche :

$$\alpha + \varepsilon < S_n \leqslant S_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant S_N$$

D'où une contradiction. On en déduit que pour $n \geqslant N$, $S_n \leqslant \alpha + \varepsilon$. On montre de même que $S_n \geqslant \alpha - \varepsilon$. Ainsi, on a, à partir d'un certain rang, $|S_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$, d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha$$

On a montré que toute valeur de $\overline{\mathbb{R}}$ était atteinte.

5. Pourquoi, en ce qui concerne les probabilités, l'ordre de sommation n'a pas d'importance ?

On a des éléments positifs, et la somme sur une partie finie est majorée par 1, d'où la sommabilité. Ainsi, l'ordre de sommation n'a pas d'importance

6. En déduire que, si E est dénombrable, muni de la tribu $\mathcal{P}(E)$, toute probabilité est entièrement déterminée par sa valeur sur les singletons.

On a alors, pour $A \subset E$, $p(A) = \displaystyle\sum_{x \in A} p(\{x\})$.

Exercice 16 (D'après l'exercice 4 du document "Tribu infinie non dénombrable")

Soit Ω un ensemble non-vide et $\mathscr{T}$ une tribu sur Ω. Pour $x \in \Omega$, on définit

$$\mathcal{F}_x := \{T \in \mathscr{T} : x \in T\} \quad \text{et} \quad [x] := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F.$$

1. Montrer que $x \notin [y]$ implique $y \notin [x]$. En déduire que $x \sim y$ si $x \in [y]$ est une relation d'équivalence sur Ω.

Si $x \notin [y]$, alors il existe $A \in \mathscr{T}$ tel que $x \notin A$ et $y \in A$.
Alors $\overline{A} \in \mathscr{T}$, avec $y \notin \overline{A}$ et $x \in \overline{A}$, donc $y \notin [x]$.

Définissons $x \sim y$ par $x \in [y]$. Vérifions que $\sim$ est une relation d'équivalence :

— **Réflexivité :** $x \in [x]$ car $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F$.
— **Symétrie :** Si $x \in [y]$, supposons $y \notin [x]$. Alors $x \notin [y]$ d'après l'implication prouvée, contradiction. Donc $y \in [x]$.
— **Transitivité :** Si $x \in [y]$ et $y \in [z]$, alors pour tout $F \in \mathscr{T}$ avec $z \in F$, on a $y \in F$ (car $y \in [z]$), donc $x \in F$ (car $x \in [y]$). Ainsi $x \in [z]$.

Donc $\sim$ est une relation d'équivalence.

2. Montrer que $\mathcal{P} = \{[x] : x \in \Omega\}$ est une partition de Ω.

— Chaque $[x]$ est non vide car $x \in [x]$.
— $\bigcup_{x \in \Omega} [x] = \Omega$ car $x \in [x]$.
— Si $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, soit $z \in [x] \cap [y]$. Alors $z \sim x$ et $z \sim y$, donc $x \sim y$ par symétrie et transitivité, d'où $[x] = [y]$.

Ainsi $\mathcal{P}$ est une partition de Ω.

3. Soit $T \in \mathscr{T}$. Montrer que $T = \bigcup_{x \in T} [x]$.

— Pour tout $x \in T$, on a $T \in \mathcal{F}_x$, donc $[x] = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F \subseteq T$. Ainsi $\bigcup_{x \in T}[x] \subseteq T$.
— Inversement, si $x \in T$, alors $x \in [x]$, donc $T \subseteq \bigcup_{x \in T}[x]$.
D'où $T = \bigcup_{x \in T}[x]$.

4. Montrer que $\mathcal{P}$ est infinie si $\mathscr{T}$ est infinie.

Supposons $\mathcal{P}$ fini, de cardinal n.
D'après l'exercice 1, la tribu engendrée par une partition finie de n ensembles non vides disjoints a pour cardinal 2^n.
Or, par (c), tout $T \in \mathscr{T}$ est réunion de classes de $\mathcal{P}$, donc $\mathscr{T} \subset \sigma(\mathcal{P})$.
Ainsi $|\mathscr{T}| \leq 2^n < \infty$.
Par contraposée, si $\mathscr{T}$ est infinie, alors $\mathcal{P}$ est infinie.

5. Soit $\mathcal{P}$ infinie. Montrer (par l'absurde) que $\mathscr{T}$ est indénombrable.
   (a) Montrer que si $\mathscr{T}$ est dénombrable, alors $[x] \in \mathscr{T}$ pour tout $x \in \Omega$. En déduire que $\mathcal{P}$ est dénombrable.

Pour tout x, $\mathcal{F}_x = \{T \in \mathscr{T} : x \in T\}$ est dénombrable.
Alors $[x] = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F$ est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathscr{T}$, donc $[x] \in \mathscr{T}$.
Ainsi $\mathcal{P} \subset \mathscr{T}$, donc $\mathcal{P}$ est dénombrable.

   (b) Soit $(P_n)_{n \geq 0}$ une énumération de $\mathcal{P}$. S'en servir pour construire une bijection $\phi : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \sigma(\{P_n : n \in \mathbb{N}\}) \subset \mathscr{T}$. Conclure.

Puisque $\mathcal{P}$ est dénombrable infinie, on peut indexer ses éléments par $\mathbb{N}$: soit $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ une bijection. On note $P_n = f(n)$.
Les P_n sont disjoints car $\mathcal{P}$ est une partition.

Soit $\sigma(\{P_n : n \in \mathbb{N}\})$ la plus petite tribu contenant tous les P_n (on l'appelle la tribu engendrée par $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$).

Soit $\mathcal{A} = \left\{\bigcup_{k \in S} P_k : S \subset \mathbb{N}\right\}$.
Montrons que $\sigma(\{P_n\}) = \mathcal{A}$ par double inclusion :
— $\mathcal{A} \subset \sigma(\{P_n\})$:
Soit $A \in \mathcal{A}$, donc $A = \bigcup_{k \in S} P_k$ pour un $S \subset \mathbb{N}$.
Comme chaque $P_k \in \sigma(\{P_n\})$ et $\sigma(\{P_n\})$ est stable par réunion dénombrable, $A \in \sigma(\{P_n\})$.
— $\sigma(\{P_n\}) \subset \mathcal{A}$:
Vérifions que $\mathcal{A}$ est une tribu :
  — $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k \in \mathcal{A}$.
  — Si $A = \bigcup_{k \in S} P_k \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} = \bigcup_{k \notin S} P_k \in \mathcal{A}$.
  — Si $A_n = \bigcup_{k \in S_n} P_k \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup_n A_n = \bigcup_{k \in \bigcup_n S_n} P_k \in \mathcal{A}$.
Donc $\mathcal{A}$ est une tribu contenant tous les P_n, donc $\sigma(\{P_n\}) \subset \mathcal{A}$

Définissons $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{T}$ par : pour tout $S \subset \mathbb{N}$,

$$\phi(S) = \bigcup_{k \in S} P_k.$$

Montrons que ϕ est injective.

Soient $S, S' \subset \mathbb{N}$ avec $S \neq S'$. Alors il existe k_0 tel que $k_0 \in S \setminus S'$. Puisque les P_k sont disjoints, $P_{k_0} \subset \phi(S)$ mais $P_{k_0} \cap \phi(S') = \emptyset$.Donc $\phi(S) \neq \phi(S')$.

Ainsi il existe une injection d'un ensemble non dénombrable dans $\mathscr{T}$ donc $\mathscr{T}$ non dénombrable. Absurde. Donc $\mathscr{T}$ est non dénombrable.

Exercice 16 (version Léane)

Montrer qu'une tribu infinie est indénombrable.

J'aime pas trop la correction de Brahim, donc je fais la mienne (qui est cependant similaire).

On se donne T une tribu sur E.

On note $A(x) = \bigcap\limits_{x \in A \in T} A$.

Montrons que les $A(x)$ forment une partition de E.
Puisque $x \in A(x)$, il suffit de mq les $A(x)$ sont des classes d'équivalence.
Si $y \in A(x)$, mq $x \in A(y)$. Supposons que ce ne soit pas le cas.
Alors il existe $A \in T$ tq $y \in A, x \notin A$. On a ${}^C A \in T$, $x \in {}^C A$, $y \notin {}^C A$. Ainsi, $y \notin A(x)$, ce qui est absurde. On a bien $A(x) = A(y)$.

Montrons que, pour $A \in T$, $A \bigcup\limits_{x \in A} A(x)$.
L'inclusion directe et immédiate. De plus, si $x \in A$, $y \in A(x)$, on sait que $y \in A$ pour tout A tq $x \in A$, d'où l'inclusion réciproque.

On considère $(x_i)_{i \in I}$ une famille de représentants de classes d'équivalence distinctes.

Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(I) & \to T \\ J & \mapsto \bigcup\limits_{j \in J} A(x_j) \end{cases}$.

Puisque les $A(x_j)$ sont disjoints, cette application est injective.
De plus, on a montré plus haut que tout élément de T se décomposait en union de $A(x)$, donc de $A(x_i)$, d'où la surjectivité

On suppose T infinie.
Alors, par bijectivité de φ, $\mathcal{P}(I)$ est infini donc I l'est également.
On en déduit que $\mathcal{P}(I)$ est indénombrable (l'ensemble des parties d'un ensemble infini est indénombrable), d'où l'indénombrabilité de T.

Note : on a prouvé que si T était finie, alors elle est de cardinal 2^n avec n entier

Exercice 17

On note S_n^k le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![0, k]\!]$

1. Préciser les valeurs de S_n^1 et S_n^n.

Respectivement 1 et $n!$, je vous laisse le faire vous mêmes.

2. Montrer que $S_n^2 = 2n - 2$

$S_n^2 = \{1,2\}^{[\![1,n]\!]} \backslash \{i \mapsto 1, i \mapsto 2\}$, d'où le résultat.

3. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \binom{j}{k} S_n^j = k^n$

D'une part, il existe k^n applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$ (k choix pour chaque antécédent).

De plus, une application est entièrement déterminée par :
— son image, de taille j ($\binom{k}{j}$ possibilités)
— la surjection sur son image (S_n^j possibilités)
Par principe additif, on obtient en sommant sur j : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \binom{k}{j} S_n^j = k^n$.

4. Montrer que $S_n^j = j(S_{n-1}^j + S_{n-1}^{j-1})$

Soit $\sigma \in S_n^j$.
On considère k l'image de n. On note σ' la restriction de σ à $[\![1,n[\![$
Alors σ est entièrement déterminé par le couple (σ', k)

— Si σ' est surjective, alors σ' alors elle décrit l'ensemble des surjections de $[\![1,n[\![$ dans $[\![1, \mathrm{j}]\!]$, au nombre de S_{n-1}^j éléments.
— Sinon, elle parcourt les surjections de $[\![1,n[\![$ dans $[\![1,j]\!] \backslash \{k\}$, *ie* d'un ensemble de $n-1$ éléments dans un ensemble de $j-1$ éléments, au nombre de S_{n-1}^{j-1}.
Il en découle par principe additif, puis multiplicatif, que $S_n^j = j(S_{n-1}^j + S_{n-1}^{j-1})$
— si

5. mdrr je code pas en python moi
6. En déduire que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-k} k^n \binom{k}{n} = n!$

Se déduit de la question suivante, pour $j = n$ (en effet, pour deux ensembles finis de même cardinal, une surjection est une bijection, d'où le résultat).

7. Montrer que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-k} k^n \binom{k}{n} = n!$

On considère l'application $P(X) \mapsto P(X+1)$. Elle est évidemment linéaire, et sa matrice dans la base canonique est $M = \left(\binom{i-1}{j-1}\right)_{i,\ j \leqslant n}$ (je vous laisse le vérifier, se déduit immédiatement du binôme de Newton).
Ainsi, l'inverse de cette matrice est la matrice associée à $P(X) \mapsto P(X-1)$, ie $M^{-1} = \left((-1)^{i+j}\binom{i-1}{j-1}\right)_{i,\ j \leqslant n}$ (se trouve de même).
Or, d'après la question 2., $M \cdot {}^T(S_n^1 \ \ldots \ S_n^n) = {}^T(1^n \ \ldots \ n^n)$, d'où, en composant par M^{-1} à gauche : $M^{-1} \cdot {}^T(1^n \ \ldots \ n^n) = {}^T(S_n^1 \ \ldots \ S_n^n)$, d'où la formule de l'énoncé.