Corrigé colle S20
MPI/MPI* du lycée Faidherbe
Exercice 18

Léane Parent

8 février 2026

Soit E un espace vectoriel normé et K une partie compacte non vide de E.

a) Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés non vides inclus dans K. Montrer que $\bigcap_{n=0}^{+\infty} L_n \neq \emptyset$.

On choisit, pour tout n, $x_n \in L_n$. On a ainsi construit $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$.

Or, K étant compact, (x_n) admet une suite extraite convergente. Soit φ une extractrice tq $(x_{\varphi(n)})$ CV vers un certain vecteur x.

Mq $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} L_n \neq \emptyset$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $k \geqslant n$, $x_k \in L_k \subset L_n$. De plus, $\varphi(k) \geqslant k \geqslant n$ d'où $x_{\varphi(k)} \in L_n$. Dès lors $(x_{\varphi(k)})_{k\geqslant n}$ est une suite d'éléments du fermé L_n, qui converge vers x, d'où $x \in L_n$ (par caractérisation séquentielle des fermés).

On a bien $x \in L_n$ pour tout n, d'où $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} L_n \neq \emptyset$: cet ensemble n'est pas vide.

b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers $g : K \to \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

Quitte à considérer $(f_n - f)$, où (f_n) CVS vers f, on suppose (f_n) CVS vers la fonction nulle. On remarque que les (f_n) sont positives (car l'inégalité large passe à la limite)

Supposons que (f_n) ne converge pas uniformément. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe une extractrice φ, une suite x_n tq, pour tout n, $f_{\varphi(n)}(x_n) > \varepsilon$. De plus, (f_n) est décroissante d'où, pour tout n, $k \geqslant n$, $f_{\varphi(n)}(x_\varphi(k)) > \varepsilon$. (De fait, $n \leqslant k \leqslant \varphi(k)$.)

Or, les (x_k) sont dans K, qui est compact, donc il existe x valeur d'adhérance de cette suite. Quitte à extraire, on suppose $x_k \to x$.

Or, les (f_n) sont continues par hypothèse, d'où : $f_n(x_{\varphi(k)}) \to k \to +\infty f_n(x)$, et cette valeur est alors supérieure ou égale à ε (car l'inégalité large passe à la limite). Dès lors, $f_n(x) \not\to 0$, ce qui est absurde.

On a ainsi (f_n) CVU vers f.

(Le truc marrant, c'est que ça fonctionne avec les suites décroissantes de fonctions et avec les suites de fonctions décroissantes, on appelle ça les théorèmes de Dini.)

Exercice 19

On munit $\mathbb{C}[X]$ de $\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\| = \max |a_k|$ (la norme infinie sur $\mathbb{C}[X]$). Soit d un entier naturel.

a) Existe-t-il $K_1 \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall P, Q \in \mathbb{C}_d[X], \|P \cdot Q\| \leqslant K_1 \|P\| \|Q\|$?

Soit $P(X) = \alpha_0 + \dots \alpha_d X^d$, $Q(X) = \beta_0 + \dots \beta_d X^d$.

On a alors le coefficient devant X^k dans $P \cdot Q$ égal à $\sum_{i+j=k} (\alpha_i \beta_j) = \sum_{j=k-d}^{k} (\alpha_{k-j} \beta_j)$ (par produit de Cauchy). On a de plus :

$$\left| \sum_{j=k-d}^{k} (\alpha_{k-j} \beta_j) \right| \leqslant \sum_{j=k-d}^{k} |\alpha_{k-j} \beta_j| \leqslant \sum_{j=k-d}^{k} \|P\| \|Q\| = (d+1) \|P\| \|Q\|$$

$K_1 = d + 1$ convient.

b) Existe-t-il $K_2 \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall P, Q \in \mathbb{C}[X], \|P \cdot Q\| \leqslant K_2 \|P\| \|Q\|$?

On note $P(X) = 1 + X + \dots X^n$.

On a alors $\|P\| = 1$. Cependant, le coefficient devant X^n de $P \cdot P$ est n. Ainsi, on a un polynôme tq $\|P \cdot P\| \geqslant n \|P\| \|P\|$, d'où, si un tel K_2 existait, $K_2 > n$ pour tout n, ce qui est absurde. Un tel K_2 n'existe pas.

c) Existe-t-il $K_3 \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall P, Q \in \mathbb{C}_d[X], \|P\| \|Q\| \leqslant K_3 \|P \cdot Q\|$?

Le cas où l'un des deux polynômes est de norme nulle est immédiat (de fait, ce polynôme serait nul, ce qui permet de conclure).

Dès lors, on considère $\tilde{P} = \frac{1}{\|P\|} P$, $\tilde{Q} = \frac{1}{\|Q\|} Q \in S(0, 1)$

La sphère unité est compacte (elle est évidemment bornée, et par continuité de $\| \cdot \|$ est fermée, le tout en dimension finie), d'où, par théorème des bornes atteintes, $P, Q \mapsto PQ$ est minorée en norme par un certain m (cette application étant bilinéaire, elle est continue).

On a donc $\|\tilde{P}\tilde{Q}\| \geqslant m$, d'où, en multipliant par $\|P\| \|Q\|$:

$$\|P \cdot Q\| \geqslant m \|P\| \|Q\|$$

$K_3 = \frac{1}{m}$ convient.

d) Existe-t-il $K_4 \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall P, Q \in \mathbb{C}[X], \|P\| \|Q\| \leqslant K_4 \|P \cdot Q\|$?