

Corrigé colle S20  
MPI/MPI\* du lycée Faidherbe  
Exercice 18

Léane Parent

6 février 2026

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $K$  une partie compacte non vide de  $E$ .

- a) Soit  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fermés non vides inclus dans  $K$ . Montrer que  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} L_n \neq \emptyset$ .

On choisit, pour tout  $n$ ,  $x_n \in L_n$ . On a ainsi construit  $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ .

Or,  $K$  étant compact,  $(x_n)$  admet une suite extraite convergente. Soit  $\varphi$  une extractrice tq  $(x_{\varphi(n)})$  CV vers un certain vecteur  $x$ .

Mq  $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} L_n \neq \emptyset$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors, pour tout  $k \geq n$ ,  $x_k \in L_k \subset L_n$ . De plus,  $\varphi(k) \geq k \geq n$  d'où  $x_{\varphi(k)} \in L_n$ . Dès lors  $(x_{\varphi(k)})_{k \geq n}$  est une suite d'éléments du fermé  $L_n$ , qui converge vers  $x$ , d'où  $x \in L_n$  (par caractérisation séquentielle des fermés).

On a bien  $x \in L_n$  pour tout  $n$ , d'où  $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} L_n \neq \emptyset$  : cet ensemble n'est pas vide.

- b) Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de fonctions continues de  $K$  dans  $\mathbb{R}$  qui converge simplement vers  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer que la convergence est uniforme.

Quitte à considérer  $(f_n - g)$ , où  $(f_n)$  CVS vers  $g$ , on suppose  $(f_n)$  CVS vers la fonction nulle. On remarque que les  $(f_n)$  sont positives (car l'inégalité large passe à la limite)

Supposons que  $(f_n)$  ne converge pas uniformément. Ainsi, pour  $\varepsilon > 0$ , il existe une extractrice  $\varphi$ , une suite  $x_n$  tq, pour tout  $n$ ,  $f_{\varphi(n)}(x_n) > \varepsilon$ . De plus,  $(f_n)$  est décroissante d'où, pour tout  $n$ ,  $k \geq n$ ,  $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(k)}) > \varepsilon$ . (De fait,  $n \leq k \leq \varphi(k)$ .)

Or, les  $(x_k)$  sont dans  $K$ , qui est compact, donc il existe  $x$  valeur d'adhérence de cette suite. Quitte à extraire, on suppose  $x_k \rightarrow x$ .

Or, les  $(f_n)$  sont continues par hypothèse, d'où :  $f_n(x_{\varphi(k)}) \rightarrow k \rightarrow +\infty f_n(x)$ , et cette valeur est alors supérieure ou égale à  $\varepsilon$  (car l'inégalité large passe à la limite). Dès lors,  $f_n(x) \not\rightarrow 0$ , ce qui est absurde.

On a ainsi  $(f_n)$  CVU vers  $g$ .

(Le truc marrant, c'est que ça fonctionne avec les suites décroissantes de fonctions et avec les suites de fonctions décroissantes, on appelle ça les théorèmes de Dini.)

## Exercice 19

On munit  $\mathbb{C}[X]$  de  $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \max |a_k|$  (la norme infinie sur  $\mathbb{C}[X]$ ). Soit  $d$  un entier naturel.

a) Existe-t-il  $K_1 \in \mathbb{R}_+$  tq  $\forall P, Q \in \mathbb{C}_d[X], \|P \cdot Q\| \leq K_1 \|P\| \|Q\|$  ?

Soit  $P(X) = \alpha_0 + \dots + \alpha_d X^d$ ,  $Q(X) = \beta_0 + \dots + \beta_d X^d$ .

On a alors le coefficient devant  $X^k$  dans  $P \cdot Q$  égal à  $\sum_{i+j=k} (\alpha_i \beta_j) = \sum_{j=k-d}^k (\alpha_{k-j} \beta_j)$  (par produit de Cauchy). On a de plus :

$$\left| \sum_{j=k-d}^k (\alpha_{k-j} \beta_j) \right| \leq \sum_{j=k-d}^k |\alpha_{k-j} \beta_j| \leq \sum_{j=k-d}^k \|P\| \|Q\| = (d+1) \|P\| \|Q\|$$

$K_1 = d+1$  convient.

b) Existe-t-il  $K_2 \in \mathbb{R}_+$  tq  $\forall P, Q \in \mathbb{C}[X], \|P \cdot Q\| \leq K_2 \|P\| \|Q\|$  ?

On note  $P(X) = 1 + X + \dots + X^n$ .

On a alors  $\|P\| = 1$ . Cependant, le coefficient devant  $X^n$  de  $P \cdot P$  est  $n+1$ . Ainsi, on a un polynôme tq  $\|P \cdot P\| \geq n+1$ , d'où, si un tel  $K_2$  existait,  $K_2 > n+1$  pour tout  $n$ , ce qui est absurde. Un tel  $K_2$  n'existe pas.

c) Existe-t-il  $K_3 \in \mathbb{R}_+$  tq  $\forall P, Q \in \mathbb{C}_d[X], \|P\| \|Q\| \leq K_3 \|P \cdot Q\|$  ?

d) Existe-t-il  $K_4 \in \mathbb{R}_+$  tq  $\forall P, Q \in \mathbb{C}[X], \|P\| \|Q\| \leq K_4 \|P \cdot Q\|$  ?