Corrigé colle S17
MPI/MPI* du lycée Faidherbe
Exercice 17

Léane Parent

17 janvier 2026

Exercice 16

Note : l'examinateur, par pure mesquinerie, note $f(t) = \int h(t,x)dx$. On prendra garde à ne pas confondre paramètre et variable d'intégration.

a) Déterminer I l'ensemble des réels t tq $x \mapsto e^{-xt}\frac{\sin x}{x}$ est intégrable

> On pose $h(t,x) = e^{-xt}\frac{\sin x}{x}$.
> On supposera (pour la cohérence avec les questions suivantes) qu'il est question d'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.
>
> h est évidemment continue.
> De plus, on a, d'une part, $h(t,x) \sim_{x\to 0} 1$: $x \mapsto h(t,x)$ est bien intégrable au voisinage de 0.
> D'autre part, $h(t,x) = O_{x\to+\infty}(\frac{e^{-xt}}{x})$, d'où $x \mapsto h(t,x)$ intégrable au voisinage de $+\infty$ si $x > 0$.
>
> Si $x \leqslant 0$, on a :
>
> $$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin x}{x}dx &\geqslant \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx \qquad \text{dans } \overline{\mathbb{R}_+} \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin x dx\end{aligned}$$
>
> Et cette série est divergente. On a bien vérifié que $x \mapsto h(t,x)$ n'est pas intégrable.
>
> Ainsi, cette fonction n'est intégrable que pour $t \in \mathbb{R}_+^*$

b) Pour $t \in I$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin x}{x}dx$.

Vous n'êtes pas sans savoir qu'une fonction, c'est une primitive de sa dérivée (si, si). Dérivons donc.

On a $\partial_1 h(t,x) = -e^{-xt}\frac{sinx}{x}$.
On pose $\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ e^{-xt} & \text{sinon} \end{cases}$
On vérifie que ϕ est intégrable et domine $\partial_1 h(t,x)$.
Dès lors, par théorème $\mathcal{C}^1$ pour les intégrales à paramètre, f est $\mathcal{C}^1$, et on a $f(t) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin x dx$
Calculons cette intégrale. On a $sinx = \text{Im } e^{ix}$.
On a donc par $\mathbb{R}$-linéarité de la partie imaginaire :

$$f'(t) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin x dx = -\text{Im}\int_0^{+\infty} e^{-xt}e^{it}dx = \text{Im }\frac{1}{i-t}[e^{x(i-t)}]_{+\infty}^{0} = \text{Im }\frac{1}{i-t}$$

Or, $\frac{1}{i-t} = \frac{-i-t}{1+t^2}$, d'où par passage à la partie imaginaire, $f'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$.
On en déduit $f(t) = -\text{Arctan } t + k$, avec k une constante réelle.
Or, par théorème de convergence dominée (j'en rédige déjà un en-dessous, faudrait pas que je me fatigue), on montre que $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, d'où $k = \frac{\pi}{2}$.
On a ainsi $f(t) = -\text{Arctan } t + \frac{\pi}{2}$.

c) En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

On applique le théorème de convergence dominée :
$x \mapsto h(t,x)$ est dominée (vérifiez-le !) par $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{\sin x}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}$.
Cette fonction est bien intégrable car en $O(\frac{1}{x^2})$, et $h(x,t)$ est bien continue, d'où :
$f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. Or, $f(t) \to \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$