

Corrigé colle S17
MPI/MPI* du lycée Faidherbe
Exercices

Léane Parent

13 janvier 2026

Exercice 13

Pour $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $\phi(f) : x \mapsto \int_0^1 \inf(x, t)f(t)dt$.

a) Prouver que $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}))$.

Par théorème de continuité (sinon on peut utiliser le théorème fondamental de l'analyse avec la question (b)), $\phi(f) \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

De plus, la linéarité de ϕ découle de celle de l'intégrale : ϕ est bien un endo.

b) En utilisant la relation de Chasles, déterminer une autre manière d'écrire $\phi(f)$

On a évidemment :

$$\begin{aligned}\inf(x, t) &= x && \text{si } x < t \\ &= t && \text{sinon}\end{aligned}$$

Ainsi, en cassant l'intégrale en x , on obtient :

$$\phi(f)(x) = \int_0^1 \inf(t, x)f(t)dt = \int_0^x tf(t)dt + x \int_x^1 f(t)dt$$

c) Déterminer $\ker \phi$ et $\text{Im } \phi$.

On sait par théorème fondamental de l'analyse que les deux termes de $\phi(f)$ sont dérivables.

$$\text{On a donc } \phi(f)'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t)dt - xf(x) = \int_x^1 f(t)dt.$$

Dès lors, si $f \in \ker \phi$, en particulier $\phi(f)' = 0$, ie, pour tout x , $\int_x^1 f(t)dt = 0$.

On en déduit immédiatement (en redérivant) que $f = 0$: On a $\ker \phi = \{0\}$

On sait déjà que $\text{Im } \phi \subset \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.