

Fonctions spéciales

Cours de master 1, 4M004
Université Pierre et Marie Curie

Nicolas Lerner
nicolas.lerner@imj-prg.fr

25 novembre 2015

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Les fonctions classiques	7
1.2	Fonctions holomorphes	13
1.3	Le logarithme complexe	17
2	La fonction Gamma	21
2.1	Définition, premières propriétés	21
2.2	La fonction Γ sur la droite réelle	23
2.3	Dessins	27
3	La méthode d'Euler-Maclaurin	29
3.1	La série harmonique	29
3.2	Polynômes de Bernoulli	32
3.3	Formule d'Euler-Maclaurin	36
4	Développements eulériens	39
4.1	Produits infinis	39
4.2	Développements eulériens pour \cotan, \sin	42
4.3	Formules de Gauss et de Weierstrass	46
5	La fonction Zeta de Riemann	55
5.1	Introduction	55
5.2	Nombres de Bernoulli et valeurs de $\zeta(2n)$	59
5.3	Estimation du reste d'Euler-Maclaurin	61
6	Le théorème des nombres premiers	65
6.1	Prolongement de la fonction ζ	65
6.2	Le théorème des nombres premiers	68
6.3	L'hypothèse de Riemann	78
7	Équation fonctionnelle de la fonction Zeta	81
7.1	La formule de Stirling	81
7.2	Développement de Stirling	84
7.3	Équation fonctionnelle de la fonction Zeta	91

8 Fonctions de Bessel	101
8.1 Introduction	101
8.2 Équation différentielle de Bessel	109
8.3 Utilisation des fonctions de Bessel	127
9 Fonctions d’Airy	135
9.1 L’équation d’Airy	135
9.2 Développements asymptotiques	143
9.3 Dessins	148
10 Oscillateur harmonique, fonctions d’Hermite	153
10.1 Polynômes d’Hermite	153
10.2 Fonctions d’Hermite	159
10.3 Oscillateur harmonique	162
11 Appendice	171
11.1 Arithmétique élémentaire	171
11.2 Sous-groupes additifs de \mathbb{R}	176
11.3 Fonctions holomorphes	176
11.4 Analyse de Fourier	194
11.5 Coordonnées polaires, cylindriques, sphériques	217
11.6 La fonction erf	227

Préface

Le mathématicien Leonhard Euler considérait qu'une fonction devait être définie par une formule "explicite". Le but de ce cours est de passer en revue une liste conséquente de fonctions définies par des formules ... explicites. C'est le cas de la fonction exponentielle, des déterminations du logarithme complexe, de la fonction Gamma d'Euler, de la fonction Zeta de Riemann et de bien d'autres exemples. Nous rappellerons des propriétés classiques des fonctions holomorphes et introduirons des méthodes d'analyse comme la méthode d'Euler-MacLaurin pour décrire en détail les propriétés de ces fonctions spéciales. Les liens de la fonction Zeta avec la théorie des nombres et la distribution des nombres premiers sont bien connus et nous démontrerons le théorème d'Hadamard & de La Vallée Poussin. Beaucoup de ces fonctions spéciales sont liées à des questions de physique mathématique et jouent un rôle important pour fournir des solutions modèles à des équations différentielles : c'est le cas notamment des fonctions d'Airy, de Bessel, d'Hermite et de Legendre. L'un des objectifs de ce cours est de fournir une liste importante d'exemples significatifs de fonctions méromorphes reliées à divers problèmes mathématiques (théorie des nombres, analyse, équations différentielles, physique mathématique). Ce cours peut également être utile aux agrégatifs.

Prérequis : Notions de base de calcul différentiel et intégral, notions sur les fonctions holomorphes (des rappels seront faits).

Thèmes abordés : Théorie élémentaire des fonctions holomorphes et méromorphes d'une variable complexe. Développements eulériens (produits infinis, fonction cotan, sin, Gamma). Méthode d'Euler-MacLaurin. Fonction Zeta de Riemann, théorème des nombres premiers. Fonctions de Bessel, fonctions d'Airy.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Les fonctions classiques

La fonction exponentielle

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$e^z = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}. \quad (1.1.1)$$

Cette série entière possède un rayon de convergence infini car si $k \geq N_0 + 1 \geq 2$,

$$k! = k(k-1) \dots (N_0 + 1)N_0! \geq N_0!(N_0 + 1)^{k-N_0},$$

ce qui implique $(k!)^{-1/k} \leq (N_0!)^{-1/k}(N_0 + 1)^{-1+\frac{N_0}{k}} \rightarrow (N_0 + 1)^{-1}$ lorsque k tend vers $+\infty$ et par conséquent $\lim_{k \rightarrow +\infty} (k!)^{-1/k} = 0$. La fonction *exponentielle* qui à $z \in \mathbb{C}$ associe e^z est donc une fonction entière (i.e. holomorphe sur \mathbb{C}). On a en outre pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \quad (1.1.2)$$

car pour $N \in \mathbb{N}$, posant $e_N(z) = \sum_{0 \leq k \leq N} \frac{z^k}{k!}$, il vient

$$\begin{aligned} e_{2N}(z_1 + z_2) &= \sum_{0 \leq k \leq 2N} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} = \sum_{0 \leq k_1 + k_2 \leq 2N} \frac{z_1^{k_1}}{k_1!} \frac{z_2^{k_2}}{k_2!} \\ &= \left(\sum_{0 \leq k_1 \leq N} \frac{z_1^{k_1}}{k_1!} \right) \left(\sum_{0 \leq k_2 \leq N} \frac{z_2^{k_2}}{k_2!} \right) + \underbrace{\sum_{\substack{k_1 + k_2 \leq 2N \\ \max(k_1, k_2) > N}} \frac{z_1^{k_1}}{k_1!} \frac{z_2^{k_2}}{k_2!}}_{r_N(z_1, z_2)}. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} |r_N(z_1, z_2)| &\leq \sum_{k_1 > N} \sum_{k_2 \geq 0} \frac{|z_1|^{k_1}}{k_1!} \frac{|z_2|^{k_2}}{k_2!} + \sum_{k_2 > N} \sum_{k_1 \geq 0} \frac{|z_1|^{k_1}}{k_1!} \frac{|z_2|^{k_2}}{k_2!} \\ &= e^{|z_2|} \sum_{k_1 > N} \frac{|z_1|^{k_1}}{k_1!} + e^{|z_1|} \sum_{k_2 > N} \frac{|z_2|^{k_2}}{k_2!}, \end{aligned}$$

et par conséquent $\lim_{N \rightarrow +\infty} r_N(z_1, z_2) = 0$. On obtient finalement

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= \lim_N e_{2N}(z_1 + z_2) = \lim_N (e_N(z_1)e_N(z_2) + r_N(z_1, z_2)) \\ &= \lim_N (e_N(z_1)e_N(z_2)) = e^{z_1}e^{z_2}, \end{aligned}$$

soit (1.1.2).

N.B. Le théorème suivant est sans doute très familier au lecteur, qui pourrait le considérer comme “évident”, ce que nous ne contestons pas. Néanmoins, nous souhaitons ici attirer l’attention sur le fait qu’une définition rigoureuse et sans circularité du nombre π et des fonctions trigonométriques usuelles requiert un certain effort, essentiellement résumé dans les démonstrations qui suivent.

Théorème 1.1.1.

(1) La fonction exponentielle, définie par (1.1.1) est une fonction entière sur \mathbb{C} , à valeurs dans \mathbb{C}^* , qui vérifie

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z.$$

(2) L’application $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it} \in \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ est un homomorphisme surjectif de groupe, et

$$\forall w \in \mathbb{C}^*, \quad \exists z \in \mathbb{C}, \quad w = e^z.$$

(3) Il existe un unique nombre positif appelé π tel que

$$e^{i\pi/2} = i, \quad \text{et} \quad e^z = 1 \iff z \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

(4) La fonction exponentielle restreinte à \mathbb{R} est une fonction convexe strictement croissante,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad e^0 = 1, \quad \text{et pour tout entier } n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x x^{-n} = +\infty.$$

Démonstration. Pour obtenir (1), on remarque que $e^z e^{-z} = e^0 = 1$ et que la dérivation pour les séries entières fournit l’équation différentielle.

(2) On remarque que $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, ce qui implique pour $t \in \mathbb{R}$ que $\overline{e^{it}} = e^{-it}$, ce qui donne $|e^{it}|^2 = \overline{e^{it}} e^{it} = e^{-it+it} = 1$; en outre pour $t, s \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{it} e^{is} = e^{i(t+s)}. \quad (1.1.3)$$

Considérons les fonctions entières définies pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (1.1.4)$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos(iz), \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin(iz). \quad (1.1.5)$$

On obtient facilement $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$ et pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (1.1.6)$$

Par conséquent pour $t \in \mathbb{R}$, il vient

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{0 \leq k \leq 2N+1} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}}_{C_{2N+1}(t)} = \cos t = \lim_{N \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{0 \leq k \leq 2N} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}}_{C_{2N}(t)}.$$

La suite $(C_{2N}(2))_{N \geq 0}$ est décroissante car

$$\begin{aligned} C_{2N}(2) - C_{2N+2}(2) &= -\frac{2^{4N+4}}{(4N+4)!} + \frac{2^{4N+2}}{(4N+2)!} \\ &= \frac{2^{4N+2}}{(4N+4)!} ((4N+3)(4N+4) - 4) \geq 0, \end{aligned}$$

et la suite $(C_{2N+1}(2))_{N \geq 0}$ est croissante car

$$\begin{aligned} C_{2N+3}(2) - C_{2N+1}(2) &= -\frac{2^{4N+6}}{(4N+6)!} + \frac{2^{4N+4}}{(4N+4)!} \\ &= \frac{2^{4N+4}}{(4N+6)!} ((4N+6)(4N+5) - 4) \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} \leq \cos 2 \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!} = -1 + \frac{16}{24} = -1/3 < 0.$$

Comme $\cos 0 = 1$, la fonction \cos doit s'annuler en au moins un point de l'intervalle $]0, 2[$. On pose

$$\pi = 2 \inf\{t \in]0, 2[, \cos t = 0\}, \quad \cos(\pi/2) = 0, \quad \cos t > 0 \text{ pour } t \in [0, \pi/2[.$$

On a $0 < \pi < 4$ et il vient¹ de $\sin 0 = 0, \sin' = \cos$ que la fonction \sin est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$, donc strictement positive sur $]0, \pi/2]$ et on obtient le tableau de variation 1.1 avec des flèches désignant une stricte monotonie².

Il vient également

$$e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i \sin(\pi/2) = i \quad \text{car } |e^{i\pi/2}| = 1,$$

1. On trouve plus précisément le développement décimal

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751 \dots$$

La commande *Mathematica* `N[Pi, k]` permet d'obtenir une approximation de π avec k chiffres significatifs.

2. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$, différentiable sur $]a, b[$, de dérivée strictement positive, le théorème des accroissements finis implique que f est strictement croissante sur $[a, b]$. Soit en effet $a \leq x < y \leq b$; il existe alors $c \in]x, y[$ tel que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0 \quad \text{et donc} \quad f(y) > f(x).$$

t	0		$\pi/2$
$\cos t$	1	\searrow	0
$\cos' = -\sin$	0	$-$	-1
$\sin t$	0	\nearrow	1
$\sin' = \cos$	1	$+$	0

TABLE 1.1 – Tableau de variation des fonctions \sin, \cos .

et

$$e^{i\pi} = e^{i\pi/2} e^{i\pi/2} = i^2 = -1, \quad \text{et pour } k \in \mathbb{Z}, \quad e^{2i\pi k} = (-1)^{2k} = 1.$$

Soit $x + iy \in \mathbb{C}$, $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Il existe $t \in [0, \pi/2]$ tel que $x = \cos t$. Comme de (1.1.3), il vient pour $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, et que $\sin t \in [0, 1]$, il vient $y = \sin t$. Par suite, si $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $z = x + iy$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, il vient de (1.1.3)

$$z/i = y - ix = e^{i\theta} \implies z = e^{i\theta} e^{i\pi/2} \implies z = e^{i(\theta+\pi/2)}.$$

Si $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $z = x + iy$, $y \leq 0$, on trouve $\tau \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{z} = e^{i\tau}$ et donc $z = e^{-i\tau}$, ce qui démontre la surjectivité de l'homomorphisme de (2).

Si $w \in \mathbb{C}^*$, montrons qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$w = |w|e^{i\theta}.$$

En effet, comme $\lim_{+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{-\infty} e^x = \lim_{+\infty} e^{-x} = 0$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $|w| = e^t$ et (1.1.2) donne $w = e^{t+i\theta}$, terminant la démonstration de (2).

La première partie de (3) est déjà démontrée et si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ vérifie $e^{x+iy} = 1$, il vient (en prenant le module) $e^x = 1$ et donc $e^{iy} = 1$. On remarque que pour $t \in \mathbb{R}$, $e^t \in \mathbb{R}$ et

$$e^t = (e^{t/2})^2, \quad e^t e^{-t} = 1,$$

ce qui implique $e^t > 0$ et de (1), $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^t$ strictement croissante. Il vient donc $x = 0$. Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ l'homomorphisme surjectif de (2) et $\ker u$ son noyau : on a

$$\ker u = \{t \in \mathbb{R}, e^{it} = 1\},$$

qui est un sous-groupe additif de \mathbb{R} (cf. le paragraphe 11.2). Ce sous-groupe est discret, sinon on pourrait trouver une suite $(t_j)_{j \geq 1}$ dans \mathbb{R}^* de limite 0 telle que $e^{it_j} = 1$ et donc vérifiant $\cos t_j = 1$, contredisant $\cos t \in]0, 1[$ pour $t \in]0, \pi/2[$. Par ailleurs ce sous-groupe n'est pas réduit à $\{0\}$ car $e^{2i\pi} = 1$. Il existe donc un unique nombre $a > 0$ tel que $\ker u = a\mathbb{Z}$, $2\pi \in a\mathbb{Z}$. Si l'on avait $a < 2\pi$, cela impliquerait que $0 < a/4 < \pi/2$

$$1 = e^{ia}, \quad e^{ia/4} \in \{\pm 1, \pm i\}.$$

Par définition de a , on ne peut avoir $e^{ia/4} = 1$ ni $e^{ia/2} = 1$, ce qui implique donc $e^{ia/4} \in \{\pm i\}$ et $\cos(a/4) = 0$, contredisant la définition de π . Il vient donc $\ker u = 2\pi\mathbb{Z}$ et $y \in 2\pi\mathbb{Z}$, démontrant (3).

(4) La convexité est une conséquence de l'égalité $d^2(e^x)/dx^2 = e^x > 0$, vue plus haut. Par ailleurs, si $n \in \mathbb{N}, x > 0$,

$$e^x x^{-n} = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{k-n}}{k!} \geq \frac{x}{(n+1)!},$$

démontrant le dernier point. □

Corollaire 1.1.2. *L'application $\nu :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie par*

$$\nu(r, \theta) = r e^{i\theta}$$

est bijective et continue. L'application réciproque ν^{-1} n'est pas continue.

Démonstration. L'application ν est continue et à valeurs dans \mathbb{C}^* grâce à la continuité de l'exponentielle et à l'identité

$$|r e^{i\theta}| = r, \quad \text{pour } r > 0, \theta \in \mathbb{R}.$$

En outre le point (2) du Théorème 1.1.1 implique que pour $w \in \mathbb{C}^*$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$w = e^a e^{ib}.$$

Soit $-k$ la partie entière de $-\frac{b}{2\pi} + \frac{1}{2}$: on a $k \in \mathbb{Z}$ et

$$-k \leq -\frac{b}{2\pi} + \frac{1}{2} < -k + 1 \implies 2\pi k \geq b - \pi > 2\pi k - 2\pi \implies 2\pi k + \pi \geq b > 2\pi k - \pi,$$

ce qui donne

$$w = e^a e^{i(b-2k\pi)}, \quad b - 2\pi k \in]-\pi, \pi],$$

et la surjectivité de ν . De plus si l'on suppose

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}, \quad (r_j, \theta_j) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi], \quad j = 1, 2,$$

il vient $r_1 = r_2$ en prenant le module de chaque membre et

$$e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = 1,$$

ce qui implique d'après le point (3) du Théorème 1.1.1 que $\theta_2 - \theta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$, et comme $|\theta_2 - \theta_1| < 2\pi$, on obtient $\theta_2 = \theta_1$ et l'injectivité.

Pour $\epsilon \in]0, \pi]$, on a

$$-e^{i\epsilon} = e^{i(\pi+\epsilon)} = e^{i(-\pi+\epsilon)}, \quad -\pi + \epsilon \in]-\pi, 0] \subset]-\pi, \pi],$$

ce qui implique

$$\nu^{-1}(-e^{i\epsilon}) = (1, -\pi + \epsilon) \quad \text{et} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \nu^{-1}(-e^{i\epsilon}) = (1, -\pi).$$

On a par ailleurs $-1 = e^{i\pi}$ et donc $\nu^{-1}(-1) = (1, \pi)$, ce qui démontre la discontinuité de ν^{-1} au point -1 . □

Corollaire 1.1.3. *Pour $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\sin z = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}, \quad (1.1.7)$$

$$\cos z = 0 \iff z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}. \quad (1.1.8)$$

Démonstration. On a $\sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz}$ et d'après le point (3) du Théorème 1.1.1, ceci équivaut à $2iz \in 2i\pi\mathbb{Z}$ i.e. à $z \in \pi\mathbb{Z}$. On a en outre, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \cos z, \quad (1.1.9)$$

car $e^{i\pi/2} = i$ (cf. Théorème 1.1.1) et donc

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+z)} - e^{-i(\frac{\pi}{2}+z)}}{2i} = \frac{ie^{iz} - \frac{1}{i}e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

L'équivalence (1.1.7)(déjà prouvée) et l'identité (1.1.9) donnent (1.1.8). □

Lemme 1.1.4. *Pour a, b, p, q nombres complexes, on a*

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a, \quad (1.1.10)$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a, \quad (1.1.11)$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad (1.1.12)$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b, \quad (1.1.13)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p - q}{2}\right) \cos\left(\frac{p + q}{2}\right), \quad (1.1.14)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p + q}{2}\right) \cos\left(\frac{p - q}{2}\right), \quad (1.1.15)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p - q}{2}\right) \sin\left(\frac{p + q}{2}\right), \quad (1.1.16)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p + q}{2}\right) \cos\left(\frac{p - q}{2}\right). \quad (1.1.17)$$

N.B. La commande *Mathematica*

`TrigExpand[Sin[a + b]]`

permet d'obtenir la formule (1.1.10) et les suivantes mutatis mutandis. La commande *Mathematica*

`TrigFactor[Sin[p] - Sin[q]]`

permet d'obtenir la formule (1.1.14) et les suivantes mutatis mutandis.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} 2i \sin(a + b) &= e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} - e^{-ia}e^{-ib} \\ &= (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) - (\cos a - i \sin a)(\cos b - i \sin b) \\ &= 2i \sin a \cos b + 2i \sin b \cos a, \end{aligned}$$

ce qui donne (1.1.10) et (1.1.11) en changeant b en $-b$. On a également

$$\begin{aligned} 2 \cos(a+b) &= e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} + e^{-ia}e^{-ib} \\ &= (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) + (\cos a - i \sin a)(\cos b - i \sin b) \\ &= 2 \cos a \cos b - 2 \sin a \sin b \end{aligned}$$

ce qui donne (1.1.12) et (1.1.13) en changeant b en $-b$.

En posant $a = (p+q)/2$, $b = (p-q)/2$, il vient

$$\sin p - \sin q = \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a,$$

soit (1.1.14) et (1.1.15) en changeant q en $-q$. On obtient également

$$\cos p - \cos q = \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b,$$

soit (1.1.16). En outre, on a

$$\cos p + \cos q = \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b,$$

soit (1.1.17). □

1.2 Fonctions holomorphes

Les définitions de base pour les fonctions holomorphes figurent dans le paragraphe 11.3 de l'appendice et le lecteur pourra également consulter les ouvrages [39], [38], [18], [40]. Nous nous attarderons dans ce paragraphe sur des points non complètement élémentaires de cette théorie.

Définition 1.2.1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . On dit qu'une suite $(f_k)_{k \geq 1}$ de fonctions à valeurs complexes définies sur Ω converge uniformément suivant les compacts de Ω vers une fonction f définie sur Ω à valeurs complexes lorsque

$$\forall K \text{ compact } \subset \Omega, \quad \sup_{x \in K} |f_k(z) - f(z)| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Théorème 1.2.2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $(f_k)_{k \geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω qui converge uniformément suivant les compacts de Ω vers une fonction f . Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (i.e. est holomorphe sur Ω) et pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(f_k^{(p)})_{k \geq 1}$ converge uniformément suivant les compacts de Ω vers $f^{(p)}$.

N.B. On peut d'emblée remarquer le contraste saisissant du comportement des fonctions holomorphes par rapport aux fonctions de classe C^∞ pour la différentiation réelle. On peut par exemple démontrer que toute fonction continue ϕ de $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes et l'on constate que seule la continuité est préservée par passage à la limite uniforme, la différentiabilité pouvant disparaître par un tel passage à la limite uniforme.

Démonstration. Comme la suite $(f_k)_{k \geq 1}$ est une suite de fonctions continues sur Ω qui converge uniformément suivant les compacts de Ω , il existe une fonction f , continue sur Ω , limite uniforme de f sur chaque compact de Ω . Soit $z_0 \in \Omega, r_0 > 0$ tels que $K_0 = \overline{D(z_0, r_0)} \subset \Omega$. En appliquant la formule de Cauchy (Corollaire 11.3.14), il vient pour $z \in D(z_0, r_0)$, pour la fonction holomorphe f_k ,

$$f_k(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f_k(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \gamma(t) = z_0 + r_0 e^{2i\pi t}, \quad t \in [0, 1],$$

ce qui implique

$$\forall z \in D(z_0, r_0), \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Par conséquent, pour $z \in D(z_0, r_0)$, on obtient

$$f(z) = \int_0^1 f(z_0 + r_0 e^{2i\pi t}) (1 - (z - z_0) r_0^{-1} e^{-2i\pi t})^{-1} dt,$$

et par suite, comme pour $\rho \in [0, 1[$,

$$\int_0^1 \sup_{t \in [0, 1]} |f(z_0 + r_0 e^{2i\pi t})| \sum_{k \geq 0} \rho^k dt < +\infty,$$

il vient

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \int_0^1 f(z_0 + r_0 e^{2i\pi t}) e^{-2i\pi k t} dt \frac{(z - z_0)^k}{r_0^k} = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k, \quad |a_k| \leq r_0^{-k} \sup_{\gamma} |f|,$$

une série entière de rayon de convergence $\geq r_0$. D'après le raisonnement de l'appendice, page 184, précédant le Corollaire 11.3.14, on obtient le résultat du Théorème 1.2.2. \square

Corollaire 1.2.3. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et soit $(u_k)_{k \geq 1}$ une suite de $\mathcal{H}(\Omega)$ telle que

$$\forall K \text{ compact } \subset \Omega, \quad \sum_{k \geq 1} \|u_k\|_{L^\infty(K)} < +\infty. \quad (1.2.1)$$

Alors pour tout $z \in \Omega$, la série $\sum_{k \geq 1} u_k(z)$ est convergente, définit une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pour tout $l \geq 0$, pour tout $z \in \Omega$, la série $\sum_{k \geq 1} u_k^{(l)}(z)$ est convergente et est égale à $f^{(l)}$ sur Ω .

Démonstration. On pose pour $z \in \Omega$, $f_n(z) = \sum_{1 \leq k \leq n} u_k(z)$. Soit K un compact de Ω . Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sup_{z \in K} |f_{n+m}(z) - f_n(z)| \leq \sum_{k > n} \sup_{z \in K} \|u_k\|_{L^\infty(K)} = \epsilon_K(n), \quad \lim_n \epsilon_K(n) = 0.$$

Par conséquent, la suite $(f_k)_{k \geq 1}$ est une suite de Cauchy uniforme de fonctions continues sur tout compact de Ω , convergeant donc uniformément sur tout compact vers une fonction continue f . Comme chaque fonction f_k est holomorphe, le Théorème 1.2.2 implique que la fonction f est holomorphe et que la suite des dérivées $(f_k^{(l)})_{k \geq 1}$ converge uniformément suivant les compacts de Ω vers $f^{(l)}$ \square

Théorème 1.2.4 (Principe des zéros isolés). *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors si f n'est pas identiquement nulle, ses zéros sont isolés, i.e.*

$$\forall z \in f^{-1}(\{0\}), \exists r > 0, \quad \dot{D}(z, r) \cap f^{-1}(\{0\}) = \emptyset.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et soit $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = 0$. Alors f est développable en série entière au voisinage de z_0 et l'on a pour un $r_0 > 0$, et pour tout $z \in D(z_0, r_0)$,

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Posons $Z(f) = \{z \in \Omega, \forall l \geq 0, f^{(l)}(z) = 0\}$. L'ensemble $Z(f)$ est un fermé de Ω comme intersection de fermés et c'est également un ouvert de Ω car si $z_0 \in Z(f)$, alors, d'après ce qui précède, f est identiquement nulle sur un voisinage de z_0 . Comme Ω est connexe, soit $Z(f) = \Omega$, soit $Z(f) = \emptyset$. Le premier cas est exclu par l'hypothèse que f n'est pas identiquement nulle et par suite si $f(z_0) = 0$, il existe au moins un entier $l \geq 1$ tel que $f^{(l)}(z_0) \neq 0$. En appelant l_0 le plus petit de ces entiers, il vient

$$f(z) = \sum_{k \geq l_0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = (z - z_0)^{l_0} g(z),$$

où la fonction g est holomorphe au voisinage de z_0 , telle que

$$0 \neq g(z_0) = \frac{f^{(l_0)}(z_0)}{l_0!}.$$

Par suite la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage de z_0 qui est un zéro isolé d'ordre l_0 de f . \square

On obtient immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 1.2.5 (Prolongement analytique). *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $f^{-1}(\{0\})$ possède un point d'accumulation, alors f est identiquement nulle sur Ω .*

Remarque 1.2.6. Ce résultat de prolongement analytique est très important et permet de mener à bien des calculs variés sur des fonctions holomorphes. Par exemple, on peut démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1,$$

ce qui implique pour $a > 0$ que $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$. On peut également considérer pour $z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$,

$$I(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zx^2} dx.$$

On remarque alors que la fonction holomorphe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, définie³ par

$$f(z) = I(z) - z^{-1/2} \pi^{1/2},$$

3. Nous admettons pour l'instant que l'on puisse définir une détermination holomorphe de la racine carrée sur Ω qui coïncide avec la racine carrée usuelle sur $]0, +\infty[$. Le paragraphe 1.3 précisera ce point.

s'annule identiquement sur $]0, +\infty[$. Comme Ω est connexe (il est convexe) et $]0, +\infty[$ possède un point d'accumulation (en fait uniquement des points d'accumulation), on peut appliquer le Corollaire 1.2.5 : la fonction f est identiquement nulle et nous avons obtenu la formule

$$\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-zx^2} dx = z^{-1/2} \pi^{1/2}.$$

Remarque 1.2.7. Bien entendu, ce résultat de prolongement n'est pas valide pour des fonctions C^∞ de la variable réelle, qui peuvent posséder des points d'accumulation de zéros sans être identiquement nulles. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et pour $x > 0$ par

$$f(x) = e^{-1/x} \sin(1/x),$$

s'annule sur $]-\infty, 0] \cup \{\frac{1}{k\pi}\}_{k \geq 1}$. Cette fonction f est C^∞ (exercice), non identiquement nulle, nulle sur un intervalle d'intérieur non vide et possède un point d'accumulation de zéros simples.

Théorème 1.2.8 (Théorème de Liouville). *Soit f une fonction entière (i.e. holomorphe sur \mathbb{C}) telle que*

$$\exists C_0 \geq 0, \exists N_0 \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq C_0(1 + |z|)^{N_0}.$$

Alors f est un polynôme de degré $\leq N_0$.

Démonstration. On utilise la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \gamma_R(t) = Re^{2i\pi t}, t \in [0, 1], R > 0, |z| < R.$$

Il vient

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi,$$

et par suite pour $|z| < R/2, k > N_0$,

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} 2\pi R \frac{\sup_{\xi \in \gamma_R} |f(\xi)|}{(R/2)^{k+1}} \leq \frac{2^{k+1} k!}{R^k} C_0 (1 + R)^{N_0} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui implique que $f^{(k)} \equiv 0$ pour $k > N_0$ et donne le résultat □

On obtient comme corollaire le théorème de d'Alembert.

Théorème 1.2.9 (Théorème de d'Alembert). *Soit P un polynôme de degré $d \geq 1$ de $\mathbb{C}[X]$. Alors P possède d racines (comptées avec leurs multiplicités).*

Démonstration. Considérons un polynôme P de degré $d \geq 1$; si P ne possédait pas de racines, la fonction f définie par

$$f(z) = 1/P(z)$$

serait une fonction entière. En outre, on aurait

$$P(z) = \sum_{0 \leq j \leq d} a_j z^j, a_d \neq 0, d \geq 1, \quad |P(z)| = |a_d| |z|^d \left| 1 + \sum_{0 \leq j \leq d-1} a_j a_d^{-1} z^{j-d} \right|,$$

qui implique $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z) a_d^{-1} z^{-d}| = 1$ et donc il existe $R_0 > 0$ tel que

$$\forall z, |z| \geq R_0, \quad |P(z)| \geq \frac{1}{2} |a_d| |z|^d \quad \text{et par suite } |f(z)| \leq \frac{2}{|a_d| |z|^d} \leq \frac{2}{|a_d| R_0^d}.$$

Comme la fonction f est continue, elle est bornée sur le compact $\bar{B}(0, R_0)$ et finalement bornée sur \mathbb{C} . Le théorème de Liouville implique alors que f est constante et donc que P est constant, ce qui donne $d \leq 0$, contredisant l'hypothèse.

Montrons maintenant le théorème de d'Alembert par récurrence sur d . Le résultat est immédiat pour $d = 1$; soit $d \geq 1$ et soit P un polynôme de degré $d + 1$. D'après ce qui précède le polynôme P possède une racine ξ et l'on a

$$P(z) = (z - \xi)Q(z), \quad Q \in \mathbb{C}[X], \deg Q = d.$$

L'hypothèse de récurrence permet d'obtenir que Q possède d racines, ce qui donne le résultat cherché pour P . \square

1.3 Le logarithme complexe

L'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est étoilé par rapport à 1 (donc connexe par arcs). On définit alors la détermination principale du logarithme pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par la formule

$$\text{Log } z = \int_{[1, z]} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^1 \frac{(z-1)dt}{(1-t) + tz}. \quad (1.3.1)$$

La fonction Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et l'on a $\text{Log } z = \ln z$ pour $z \in \mathbb{R}_+^*$. On obtient que la fonction holomorphe sur l'ouvert connexe Ω

$$\Omega \ni z \mapsto e^{\text{Log } z} - z,$$

est nulle sur \mathbb{R}_+^* qui possède un point d'accumulation (en fait uniquement des points d'accumulation) et le Corollaire 1.2.5 de continuation analytique, (1.1.2) et le (2) du Théorème 1.1.1 impliquent

$$e^{\text{Log } z} = z = e^{\text{Re Log } z} e^{i \text{Im Log } z}, \quad \begin{cases} |z| &= e^{\text{Re Log } z}, \\ \arg z &= \text{Im Log } z, \end{cases}$$

pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. D'après le Corollaire 1.1.2, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, il existe $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ tels que $z = r e^{i\theta}$. On a nécessairement $\theta \neq \pi$ (sinon on aurait $z \in \mathbb{R}_-$)

et donc on a $|\theta| < \pi$. Il vient, en utilisant l'holomorphie de $\zeta \mapsto 1/\zeta$ sur le domaine $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, étoilé par rapport à 1, et en notant qu'outre les segments $[1, re^{i\theta}]$, $[1, r]$, le domaine $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ contient⁴ l'arc de cercle $\{re^{it}\}_{t \in [0, \theta]}$ pour $\theta \geq 0$, $\{re^{it}\}_{t \in [\theta, 0]}$ pour $\theta \leq 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} z = \operatorname{Log}(re^{i\theta}) &= \int_{[1, re^{i\theta}]} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \ln r + \int_0^\theta \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = \ln r + i\theta, \quad \operatorname{Im} \operatorname{Log} z = \theta. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

On obtient aussi par continuation analytique $\operatorname{Log} e^z = z$ pour $|\operatorname{Im} z| < \pi$. On remarque que pour $|z| < 1$, on a

$$\operatorname{Log}(1+z) = z \int_0^1 \frac{dt}{1+tz} = \sum_{k \geq 0} z(-1)^k \frac{z^k}{k+1} = \sum_{l \geq 1} (-1)^{l+1} \frac{z^l}{l}. \quad (1.3.3)$$

Notons également pour $|z| = 1, z \neq -1$,

$$\operatorname{Log}(1+z) = z \int_0^1 \frac{dt}{1+tz} = z \int_0^1 \lim_N \left(\sum_{0 \leq k \leq N} (-1)^k t^k z^k \right) dt.$$

Comme avec $z = e^{i\theta}, |\theta| < \pi, t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{0 \leq k \leq N} (-1)^k t^k z^k = \frac{1 + (-1)^N (tz)^{1+N}}{1+tz} \right| &\leq \frac{2}{|1+tz|} = \frac{2}{\sqrt{1+2t \cos \theta + t^2}} \\ &\leq \frac{2\mathbf{1}\{\cos \theta \geq 0\}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{2\mathbf{1}\{-1 < \cos \theta \leq 0\}}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} \in L^1([0, 1]_t), \end{aligned}$$

de sorte que le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne

$$\operatorname{Log}(1+z) = z \lim_N \sum_{0 \leq k \leq N} (-1)^k \frac{z^k}{k+1},$$

ce qui implique que (1.3.3) est vérifié aussi pour $|z| = 1, z \neq -1$. On considère l'ouvert de \mathbb{C}

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{C}, \exp z \notin \mathbb{R}_-\} &= \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \neq \pi(2n)\} \\ &= \cup_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\{z \in \mathbb{C}, (2k-1)\pi < \operatorname{Im} z < (2k+1)\pi\}}_{\omega_k}. \end{aligned}$$

4. En effet si $|t| \leq \tau < \pi, r > 0$,

$$\operatorname{Im}(re^{it}) = 0 \implies \sin t = 0 \xRightarrow{(1.1.7)} t \in \pi\mathbb{Z} \implies t = 0 \implies re^{it} = r > 0.$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Sur l'ouvert ω_k , la fonction $z \mapsto \text{Log}(\exp z) - z$ est holomorphe avec une dérivée nulle. Par suite pour $z \in \omega_k$,

$$\begin{aligned} \text{Log}(\exp z) - z &= \text{Log}(\exp(2ik\pi)) - 2ik\pi = \ln(1) - 2ik\pi = -2ik\pi, \\ \text{i.e. } \text{Log}(\exp z) &= z - 2ik\pi. \end{aligned}$$

Nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème 1.3.1. *Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on définit $\text{Log } z$ par (1.3.1). C'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, de dérivée $1/z$, et Log coïncide avec \ln sur \mathbb{R}_+^* .*

$$\begin{aligned} \text{Pour } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad e^{\text{Log } z} &= z = re^{i\theta}, \\ r &= |z| = e^{\text{Re } \text{Log } z}, \quad \theta = \arg z = \text{Im } \text{Log } z \in (-\pi, \pi). \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

$$\text{Pour } k \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}, \quad (2k-1)\pi < \text{Im } z < (2k+1)\pi, \quad \text{Log}(e^z) = z - 2ik\pi. \quad (1.3.5)$$

$$\text{Pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, |z| \leq 1, \quad \text{Log}(1+z) = \sum_{l \geq 1} (-1)^{l+1} \frac{z^l}{l}. \quad (1.3.6)$$

Définition 1.3.2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on définit

$$z^\alpha = e^{\alpha \text{Log } z}. \quad (1.3.7)$$

Remarque 1.3.3. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- = \Omega$, alors la fonction

$$f_\alpha(z) = z^\alpha,$$

est holomorphe sur Ω et coïncide sur \mathbb{R}_+^* avec

$$\mathbb{R}_+^* \ni x \mapsto x^\alpha = r_\alpha(x) \in \mathbb{R}_+^*.$$

La fonction f_α est par conséquent l'unique prolongement holomorphe sur Ω de la fonction r_α : un autre prolongement holomorphe sur Ω coïnciderait avec f_α sur \mathbb{R}_+^* et par prolongement analytique devrait coïncider avec f_α sur Ω tout entier. Par exemple, dans le cas $\alpha = 1/2$, utilisé dans la Remarque 1.2.6, on dira que

$$\Omega \ni z \mapsto z^{1/2} = e^{\frac{\text{Log } z}{2}},$$

est la *détermination positive de la racine carrée* sur Ω , i.e. est le seul prolongement holomorphe sur Ω de $\mathbb{R}_+^* \ni x \mapsto \sqrt{x}$.

Remarque 1.3.4. Si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, alors

$$z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = z^{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad (1.3.8)$$

car $z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = e^{\alpha_1 \text{Log } z} e^{\alpha_2 \text{Log } z} = e^{\alpha_1 \text{Log } z + \alpha_2 \text{Log } z} = e^{(\alpha_1 + \alpha_2) \text{Log } z} = z^{\alpha_1 + \alpha_2}$. En revanche pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ tels que $z_1 z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a

$$\text{Log}(z_1 z_2) \equiv \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 \pmod{2i\pi},$$

car du Théorème 1.1.1(3) et du Théorème 1.3.1, il vient

$$e^{\text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2)} = e^{\text{Log}(z_1)} e^{\text{Log}(z_2)} = z_1 z_2 = e^{\text{Log}(z_1 z_2)},$$

et donc l'égalité modulo $2i\pi$ ci-dessus, qui ne peut être remplacée en général par une égalité : on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(e^{i3\pi/4}e^{i3\pi/4}) &= \operatorname{Log}(e^{i3\pi/2}) = \operatorname{Log}(-i) = -i\frac{\pi}{2}, \\ \text{mais } \operatorname{Log}(e^{i3\pi/4}) + \operatorname{Log}(e^{i3\pi/4}) &= 2\frac{3i\pi}{4} = \frac{3i\pi}{2}. \end{aligned}$$

Corollaire 1.3.5. *L'application $\nu_0 :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ définie par*

$$\nu_0(r, \theta) = re^{i\theta},$$

est un difféomorphisme.

Démonstration. L'application ν_0 est analytique et à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, grâce à l'analyticité de l'exponentielle et au fait que pour $r > 0, \theta \in]-\pi, \pi[$,

$$\operatorname{Im}(re^{i\theta}) = 0 \implies \sin \theta = 0 \implies \theta = 0 \implies re^{i\theta} = r > 0.$$

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, posons

$$\kappa(z) = (|z|, \operatorname{Im} \operatorname{Log} z)$$

et notons que $\kappa(z) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ (cf. Théorème 1.3.1) et que κ est une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Pour $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$, on a

$$\kappa(\nu_0(r, \theta)) = \kappa(re^{i\theta}) = (r, \operatorname{Im} \operatorname{Log}(re^{i\theta})) = (r, \theta),$$

car on a vu en (1.3.2) que pour $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$, on a $\operatorname{Log}(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$. De plus, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a d'après (1.3.4),

$$\nu_0(\kappa(z)) = \nu_0(|z|, \operatorname{Im} \operatorname{Log} z) = |z|e^{i\operatorname{Im} \operatorname{Log} z} = e^{\operatorname{Re} \operatorname{Log} z + i\operatorname{Im} \operatorname{Log} z} = e^{\operatorname{Log} z} = z.$$

□

Chapitre 2

La fonction Gamma

2.1 Définition, premières propriétés

Pour $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$, on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (2.1.1)$$

ce qui a un sens car $]0, +\infty[\ni t \mapsto e^{-t} t^{z-1}$ est continue, et pour $t > 0$,

$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1} \in L^1(\mathbb{R}_+), \quad \text{car } \operatorname{Re} z > 0.$$

De plus la fonction Γ est holomorphe sur l'ouvert $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$ car

- $\forall z \in \Omega_0$, la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{z-1}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}_+)$,
- $\forall t > 0$, la fonction $\Omega_0 \ni z \mapsto e^{-t} t^{z-1}$ est holomorphe sur Ω_0 ,
- Pour $\epsilon_0 > 0$, $t > 0$,

$$\sup_{\epsilon_0^{-1} \geq \operatorname{Re} z \geq \epsilon_0} |t^{z-1} e^{-t}| = \sup_{\epsilon_0^{-1} \geq \operatorname{Re} z \geq \epsilon_0} t^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-t} \leq \underbrace{e^{-t} (\mathbf{1}_{[0,1]}(t) t^{\epsilon_0^{-1}} + \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t) t^{\epsilon_0^{-1}})}_{=g(t)},$$

et $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Lemme 2.1.1. *Pour $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$, on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\Gamma(z+n+1) = \Gamma(z) \prod_{0 \leq j \leq n} (z+j). \quad (2.1.2)$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$. On a

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-t}}_{u'(t)} \underbrace{t^z}_{v(t)} dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-t}) z t^{z-1} dt,$$

et par conséquent, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, ce qui donne (2.1.2) pour $n = 0$. Supposant cette formule vraie pour $\operatorname{Re} z > 0$ et un entier $n \geq 0$, on obtient

$$\Gamma(z+n+2) = \Gamma(z+n+1)(z+n+1) = \Gamma(z)(z+n+1) \prod_{0 \leq j \leq n} (z+j),$$

ce qui donne le résultat cherché par récurrence. □

Lemme 2.1.2. *La fonction Γ possède un unique prolongement comme fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0$. D'après le lemme précédent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + n + 1)}{\prod_{0 \leq j \leq n} (z + j)}.$$

Le membre de droite de cette égalité est holomorphe sur l'ouvert

$$\Omega_{n+1} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > -n - 1\} \setminus \{0, -1, \dots, -n\}, \quad (2.1.3)$$

et par conséquent la fonction Γ possède une extension holomorphe Γ_{n+1} sur Ω_{n+1} . Soient $n, l \in \mathbb{N}$; les fonctions $\Gamma_{n+1}, \Gamma_{n+1+l}$ sont toutes deux holomorphes sur l'ouvert connexe Ω_{n+1} et coïncident avec la fonction holomorphe Γ sur l'ouvert non vide Ω_0 . Par prolongement analytique, on a $\Gamma_{n+1} = \Gamma_{n+1+l}$ sur Ω_{n+1} . On a

$$\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{n+1},$$

et l'on remarque que si $z \in \Omega_{n+1} \cap \Omega_{m+1}$ pour $n, m \in \mathbb{N}$, alors $\Gamma_{n+1}(z) = \Gamma_{m+1}(z)$. On peut donc poser pour $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$,

$$\tilde{\Gamma}(z) = \Gamma_{n+1}(z) \quad \text{si } z \in \Omega_{n+1}, n \in \mathbb{N}.$$

La fonction $\tilde{\Gamma}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$, coïncide avec la fonction holomorphe Γ sur l'ouvert non vide Ω_0 et est donc l'unique extension holomorphe de la fonction Γ à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. \square

Théorème 2.1.3. *La fonction Γ est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , dont les pôles sont simples en $-\mathbb{N}$. De plus, pour $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -k) = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Pour $z \notin (-\mathbb{N})$, on a $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$. On a également

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n + 1) = n!.$$

Démonstration. La fonction holomorphe sur l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ donnée par $\Gamma(z + 1) - z\Gamma(z)$ est nulle sur l'ouvert non vide Ω_0 et donc identiquement nulle par prolongement analytique. On a en outre $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, et donc $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1!$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, en raisonnant par récurrence,

$$\Gamma(n + 2) = (n + 1)\Gamma(n + 1) = (n + 1) \times n! = (n + 1)!.$$

N.B. Ce calcul nous donne une raison supplémentaire pour accepter la convention habituelle $0! = 1$ car il est naturel de poser $0! = \Gamma(1)$ qui vaut 1.

Nous avons vu au lemme précédent que la fonction Γ se prolongeait de manière unique en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. De plus, en utilisant la notation (2.1.3), on a vu que pour $n \in \mathbb{N}$, $z \in \Omega_{n+2}$,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+2)}{\prod_{0 \leq j \leq n+1} (z+j)} = \frac{1}{z+n+1} \frac{\Gamma(z+n+2)}{\prod_{0 \leq j \leq n} (z+j)},$$

et donc

$$\Gamma(z)(z+n+1) = \frac{\Gamma(z+n+2)}{\prod_{0 \leq j \leq n} (z+j)},$$

qui est une fonction holomorphe au voisinage de $-n-1 = -k$ et telle que

$$\frac{\Gamma((-n-1)+n+2)}{\prod_{0 \leq j \leq n} (-n-1+j)} = \frac{\Gamma(1)}{(-1)^{n+1}(n+1)!} = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Terminons la démonstration du théorème avec le calcul de $\Gamma(1/2)$. Nous avons

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\pi s^2} \pi^{-1/2} s^{-1} 2\pi s ds = \pi^{1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi s^2} ds,$$

et par ailleurs

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi s^2} ds \right)^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} r dr 2\pi = [e^{-\pi r^2}]_{+\infty}^0 = 1,$$

ce qui implique (car $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi s^2} ds > 0$), $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. □

2.2 La fonction Γ sur la droite réelle

On peut bien entendu restreindre la fonction Γ à $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ et étudier les propriétés spécifiques de cette fonction.

Proposition 2.2.1.

- (1) Sur $]0, +\infty[$ la fonction Γ est strictement positive, atteint un unique minimum en un point $x_0 \in]1, 2[$.
- (2) La fonction $\ln \Gamma$ est convexe sur $]0, +\infty[$ (convexité logarithmique de Γ sur \mathbb{R}_+^*) et donc Γ est convexe sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$, on a

$$\Gamma'(x)^2 < \Gamma(x)\Gamma''(x).$$

- (3) La fonction Γ est strictement négative et concave sur $\cup_{k \geq 0}]-2k-1, -2k[$ avec un unique maximum atteint sur chaque intervalle $] -2k-1, -2k[$. La fonction Γ est strictement positive et convexe sur $\cup_{k \geq 0}]-2k-2, -2k-1[$ avec un unique minimum atteint sur chaque intervalle $] -2k-2, -2k-1[$.
- (4) Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma((-2k)_{\pm}) = \pm\infty$ et $\Gamma((-2k-1)_{\pm}) = \mp\infty$.

Démonstration. Pour $x > 0$, on a $\Gamma(x) > 0$ car $\Gamma(x)$ est l'intégrale sur \mathbb{R}_+ d'une fonction continue positive non identiquement nulle. On a (en utilisant la régularité holomorphe) pour $x > 0$,

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) e^{x \ln t} e^{-t} t^{-1} dt,$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\Gamma'(x)^2 = \langle \ln t, 1 \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+; t^{x-1} e^{-t} dt)}^2 \leq \| \ln t \|_{L^2(\mathbb{R}_+; t^{x-1} e^{-t} dt)}^2 \| 1 \|_{L^2(\mathbb{R}_+; t^{x-1} e^{-t} dt)}^2,$$

soit

$$\Gamma'(x)^2 \leq \underbrace{\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt}_{\Gamma''(x)} \underbrace{\int_0^{+\infty} s^{x-1} e^{-s} ds}_{\Gamma(x)}.$$

Par ailleurs l'inégalité de Cauchy-Schwarz ci-dessus est stricte, car les fonctions $t \mapsto \ln t$ et $t \mapsto 1$ sont indépendantes dans $L^2(\mathbb{R}_+; t^{x-1} e^{-t} dt)$ (la fonction logarithme n'est pas constante). On trouve par conséquent

$$\frac{d}{dx}(\ln \Gamma) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}, \quad \frac{d^2}{dx^2}(\ln \Gamma) = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2} > 0,$$

ce qui donne la convexité logarithmique de la fonction Γ . On a de plus

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1,$$

et par conséquent il existe $x_0 \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(x_0) = 0$. Comme la fonction Γ' est strictement croissante, on obtient que x_0 est le seul zéro de la fonction Γ' sur $]0, +\infty[$; comme en outre on a

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0_+} \Gamma(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty,$$

car Γ est croissante sur $[x_0, +\infty[$ et $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient le tableau de variation suivant.

x	0	x_0	$+\infty$
$\Gamma''(x)$		+	+
$\Gamma'(x)$		−	+
$\Gamma(x)$	$+\infty$	\searrow	\nearrow
		$\Gamma(x_0)$	$+\infty$

TABLE 2.1 – Tableau de variation de la fonction Γ .

Nous avons démontré (1), (2). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_n =]-1-n, -n[. \quad (2.2.1)$$

Pour $x \in J_n$, on a

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+2)}{\prod_{0 \leq j \leq n+1} (x+j)}, \quad x+n+2 \in]1, 2[, \quad \text{sign } \Gamma(x) = (-1)^{n+1}, \quad (2.2.2)$$

car $x, \dots, x+n$ sont < 0 et $x+n+1 > 0$. Calculons, pour $x \in J_n$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \ln |\Gamma|}{dx^2} &= \frac{d^2}{dx^2} (\ln \Gamma)(x+n+2) - \sum_{0 \leq j \leq n+1} \frac{d^2}{dx^2} \{\ln |x+j|\} \\ &= (\ln \Gamma)'' \underbrace{(x+n+2)}_{\in]1, 2[} + \sum_{0 \leq j \leq n+1} \frac{1}{(x+j)^2} > 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que $|\Gamma|$ est logarithmiquement convexe. On note également que, pour $x \in J_n =]-n-1, -n[$,

$$(\ln |\Gamma|)'(x) = (\ln \Gamma)'(x+n+2) - \sum_{0 \leq j \leq n-1} \frac{1}{(x+j)} - \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1},$$

et donc $\lim_{x \rightarrow (-n-1)_+} (\ln |\Gamma|)'(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-n)_-} (\ln |\Gamma|)'(x) = +\infty$; comme $(\ln |\Gamma|)''$ est strictement positif sur J_n , on trouve que $|\Gamma|$ possède un unique minimum sur J_n . De plus, comme

$$\text{sign } \Gamma(x) = (-1)^{n+1},$$

on trouve que Γ est strictement négative (resp. positive) et concave (resp. convexe) sur $] -2k-1, -2k[, k \geq 0$ (resp. $] -2k-2, -2k-1[, k \geq 0$). L'unique minimum de $|\Gamma|$ sur J_n est un maximum de Γ pour n pair, un minimum de Γ pour n impair, ce qui termine la démonstration de (3). Le point (4) est une conséquence immédiate de l'identité (2.2.2) car pour $x \in J_n$, on a $\Gamma(x+n+2) \in]\Gamma(x_0), 1[\subset]0, 1[$ et

$$\prod_{0 \leq j \leq n+1} (x+j) = (-1)^{n+1} |x+n| |x+n+1| \prod_{0 \leq j \leq n-1} |x+j|,$$

ce qui implique

$$\lim_{x \rightarrow (-1-n)_+} \prod_{0 \leq j \leq n+1} (x+j) = (-1)^{n+1} 0_+ = \lim_{x \rightarrow (-n)_-} \prod_{0 \leq j \leq n+1} (x+j)$$

et pour $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma((-2k)_+) = +\infty$, $\Gamma((-2k)_-) = -\infty$, et $\Gamma((-2k-1)_+) = -\infty$, $\Gamma((-2k-1)_-) = +\infty$, ce qui termine la démonstration. \square

Remarque 2.2.2. On peut remarquer que le minimum de $|\Gamma|$ sur J_n (donné par (2.2.1)) tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$: en effet pour $x \in J_n$ on a $x = -n-1+\theta$, $\theta \in]0, 1[$ et pour $j \in [0, n-1]$,

$$-x-j = n+1-\theta-j \geq n-j,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \inf_{x \in J_n} |\Gamma(x)| &= \inf_{x \in J_n} |x+n|^{-1} |x+n+1|^{-1} \frac{\Gamma(x+n+2)}{\prod_{0 \leq j \leq n-1} (-x-j)} \\ &\leq \inf_{\theta \in]0, 1[} \frac{(1-\theta)^{-1} \theta^{-1}}{\prod_{0 \leq j \leq n-1} (n-j)} = \frac{1}{n! \sup_{\theta \in]0, 1[} \theta(1-\theta)} = \frac{4}{n!}. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.3. Le point $x_0 \in]1, 2[$ auquel le minimum de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$ est atteint est approximé par

$$x_0 = 1,461631690\dots \quad \text{et} \quad \Gamma(x_0) = 0,8856031944\dots$$

La commande *Mathematica*

```
FindMinimum[Gamma[x], {x, 2}, WorkingPrecision ->10]
```

permet de trouver

```
{0.8856031944, {x ->1.461631690}}
```

i.e. le minimum $0,8856031944\dots$ atteint au point $1,461631690\dots$

2.3 Dessins

On peut également faire quelques dessins.

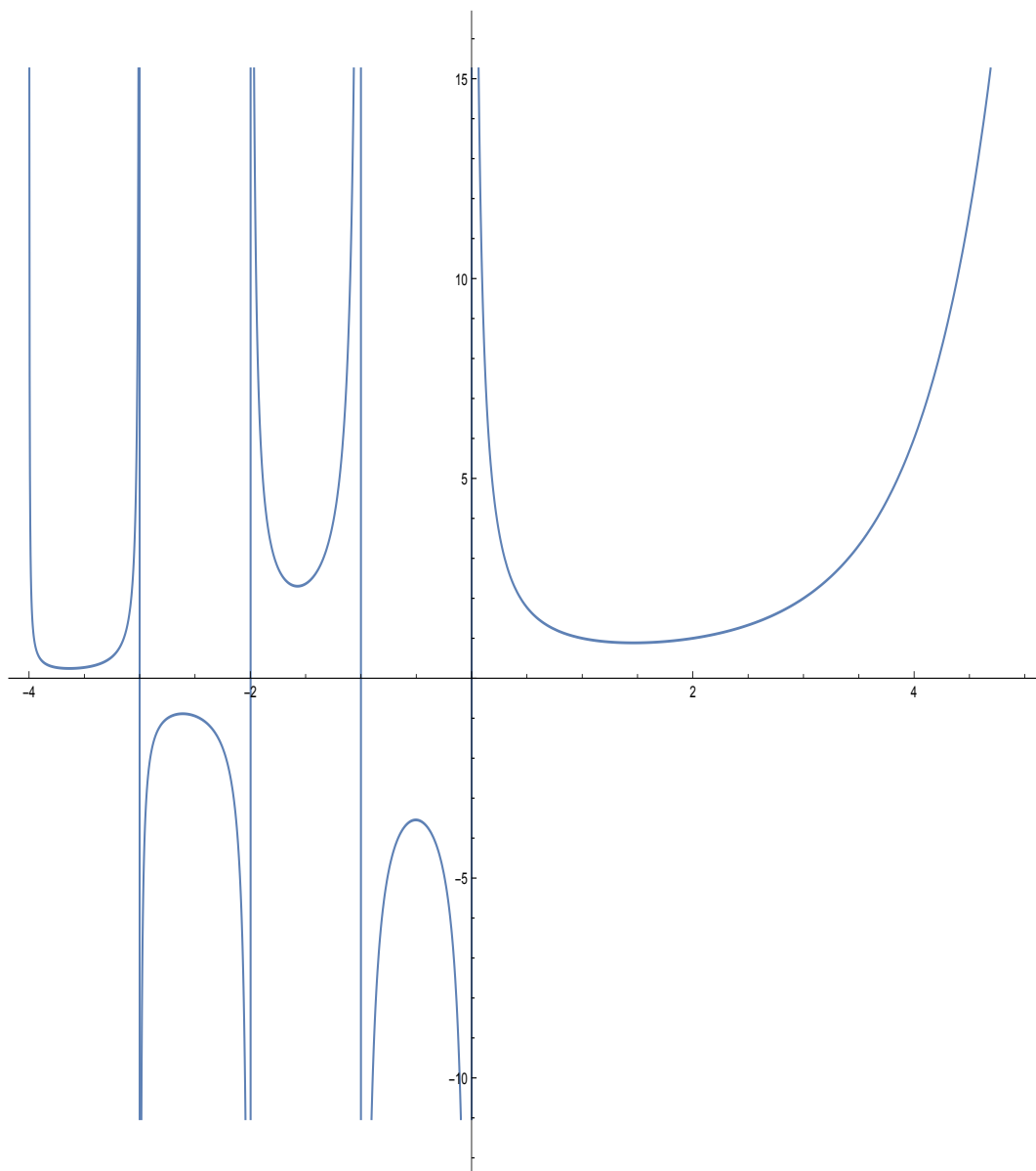
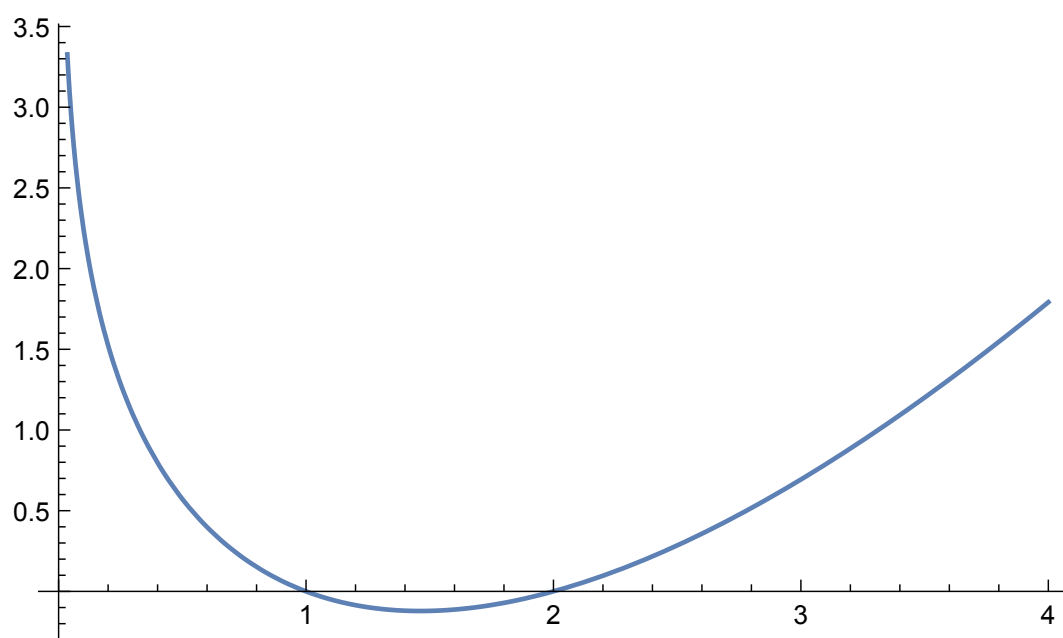


FIGURE 2.1 – LA FONCTION Γ SUR LA DROITE RÉELLE.

FIGURE 2.2 – LA FONCTION $\ln \Gamma$ SUR \mathbb{R}_+^* .

Chapitre 3

La méthode d'Euler-Maclaurin

3.1 La série harmonique

Lemme 3.1.1. *La série harmonique $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ est divergente. La suite*

$$\gamma_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} - \ln n,$$

est convergente. On définit la constante d'Euler γ par $\gamma = \lim_n \gamma_n$. On a, en utilisant la commande Mathematica

`N[EulerGamma, 50]`

$$\gamma = 0,57721566490153286060651209008240243104215933593992 \dots$$

Démonstration. La minoration évidente

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} \geq \sum_{1 \leq k \leq n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1), \quad (3.1.1)$$

implique la divergence de la série harmonique. On a en outre

$$\gamma_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x} = \sum_{1 \leq k < n} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx + \frac{1}{n} = \sum_{1 \leq k < n} \int_k^{k+1} \frac{x-k}{kx} dx + \frac{1}{n},$$

et comme pour $x \in [k, k+1], k \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{x-k}{kx} \leq \frac{1}{kx} \leq \frac{1}{k^2},$$

on trouve que la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ est convergente, ce qui implique en particulier que $\sum_{1 \leq k \leq n} k^{-1} \sim \ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$. \square

Nous souhaitons utiliser les calculs précédents pour préciser cette approximation.

On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} \\
&= \ln n + \gamma_n = \ln n + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx + \frac{1}{n} - \sum_{k \geq n} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \\
&= \ln n + \gamma + \frac{1}{n} - \sum_{k \geq n} \int_k^{k+1} \underbrace{\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right)}_{u_1(x)} \underbrace{1}_{v'_1(x)} dx \\
v_1(x) &= x - k - \frac{1}{2}, \tag{3.1.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \ln n + \gamma + \frac{1}{n} - \sum_{k \geq n} \left\{ \left[(k^{-1} - x^{-1})(x - k - \frac{1}{2}) \right]_{x=k}^{x=k+1} \right. \\
&\quad \left. - \int_k^{k+1} x^{-2} (x - k - \frac{1}{2}) dx \right\} \\
&= \ln n + \gamma + \frac{1}{n} + \sum_{k \geq n} \left\{ \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \frac{1}{2} + \int_k^{k+1} x^{-2} (x - k - \frac{1}{2}) dx \right\}.
\end{aligned}$$

Notons que la série $\sum_{k \geq n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)$ est absolument convergente¹ et en outre

$$\sum_{n \leq k \leq N} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{n+1 \leq k \leq N+1} \frac{1}{k} - \sum_{n \leq k \leq N} \frac{1}{k} = \frac{1}{N+1} - \frac{1}{n},$$

ce qui donne $\sum_{k \geq n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \frac{1}{2} = -\frac{1}{2n}$ et

$$\begin{aligned}
S_n &= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{k \geq n} \int_k^{k+1} \underbrace{x^{-2}}_{u_2(x)} \underbrace{\left(x - k - \frac{1}{2} \right)}_{v'_{2,k}(x)} dx, \\
v_{2,k}(x) &= \frac{1}{2} \left((x - k)^2 - (x - k) + \frac{1}{6} \right), \tag{3.1.3}
\end{aligned}$$

de sorte que, comme

$$\sum_{k \geq n} \left[x^{-2} v_{2,k}(x) \right]_{x=k}^{x=k+1} = -\frac{1}{12n^2},$$

on obtient

$$S_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \sum_{k \geq n} \int_k^{k+1} 2x^{-3} v_{2,k}(x) dx. \tag{3.1.4}$$

1. On a pour $k \geq 1$, $|\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}| = \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2}$.

On veut continuer les intégrations par parties. Posons pour cela

$$B_1(X) = X - \frac{1}{2}, \quad v_{1,k}(x) = B_1(x - k), \quad (3.1.5)$$

$$B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}, \quad v_{2,k}(x) = \frac{1}{2}B_2(x - k). \quad (3.1.6)$$

On cherche maintenant un polynôme B_3 tel que

$$B_3' = 3B_2, \quad \int_0^1 B_3(t)dt = 0. \quad (3.1.7)$$

Il vient

$$B_3(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{X}{2}, \quad \text{et l'on a } B_3(1) = B_3(0) = 0.$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} 2x^{-3}v_{2,k}(x)dx &= \int_k^{k+1} x^{-3} \overbrace{B_2(x-k)}^{\frac{1}{3}B_3'(x-k)} dx \\ &= \frac{1}{3} [x^{-3}B_3(x-k)]_{x=k}^{x=k+1} + \int_k^{k+1} x^{-4}B_3(x-k)dx \\ &= \int_k^{k+1} x^{-4}B_3(x-k)dx, \end{aligned}$$

et de (3.1.4), il vient

$$S_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \sum_{k \geq n} \int_k^{k+1} x^{-4} \overbrace{B_3(x-k)}^{\frac{1}{4}B_4'(x-k)} dx. \quad (3.1.8)$$

On cherche un polynôme B_4 tel que $B_4' = 4B_3$, $\int_0^1 B_4(t)dt = 0$. Il vient

$$B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 + b_4,$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + b_4 = 0, \quad b_4 + \frac{6 - 15 + 10}{30} = 0, \quad \text{i.e. } b_4 = -\frac{1}{30}.$$

On a également $B_4(1) = b_4$, et l'on obtient

$$\begin{aligned} S_n &= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \sum_{k \geq n} \frac{1}{4} [x^{-4}B_4(x-k)]_{x=k}^{x=k+1} + \int_k^{k+1} x^{-5}B_4(x-k)dx \\ &= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120} \sum_{k \geq n} \left(\frac{1}{(k+1)^4} - \frac{1}{k^4} \right) + \int_k^{k+1} x^{-5}B_4(x-k)dx \\ &= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + \sum_{k \geq n} \int_k^{k+1} x^{-5}B_4(x-k)dx, \end{aligned}$$

et par conséquent de (3.1.8), il vient

$$S_n - \left\{ \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} \right\} = \sum_{k \geq n} \int_k^{k+1} x^{-5} B_4(x-k) dx.$$

On remarque en outre que $B_4(t) = -\frac{1}{30} + t^2(1-2t+t^2) = -\frac{1}{30} + t^2(1-t)^2$, et par suite pour $t \in [0, 1]$,

$$-\frac{1}{30} \leq B_4(t) \leq -\frac{1}{30} + \frac{1}{16} \leq \frac{1}{30}.$$

On a donc

$$\left| S_n - \left\{ \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} \right\} \right| \leq \frac{1}{30} \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \frac{n^{-4}}{30 \times 4} = \frac{1}{120n^4},$$

et par conséquent

$$S_n - \left\{ \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} \right\} = \frac{\theta_n}{120n^4}, \quad \theta_n \in [-1, 1],$$

$$S_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1 + \theta_n}{120n^4},$$

qui fournit le résultat suivant.

Lemme 3.1.2. *Pour tout entier $n \geq 1$, il existe $\sigma_n \in [0, 1]$ tel que*

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\sigma_n}{60n^4}.$$

Nous allons étudier dans la suite de ce chapitre des généralisations de ce résultat.

3.2 Polynômes de Bernoulli

On pose pour $(t, x) \in (\mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}^*) \times \mathbb{C}$

$$G(t, x) = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}, \quad (3.2.1)$$

et l'on remarque que $t \mapsto t/(e^t - 1)$ est holomorphe sur $(2i\pi\mathbb{Z}^*)^c$. En particulier, pour $|t| < 2\pi$, on a (cf. Lemme 11.3.20)

$$G(t, x) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} B_k(x),$$

avec

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left(\frac{te^{tx}}{e^t - 1} \right) \right\}_{|t=0} = \left\{ \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k \left(\frac{d}{dt} \right)^k \left(\frac{t}{e^t - 1} \right) \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-k} (e^{tx}) \right\}_{|t=0} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k \left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)^k \left(\frac{t}{e^t - 1} \right) \right\}_{|t=0} x^{n-k}. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme de Bernoulli B_n et le nombre de Bernoulli b_n par les formules

$$B_n(X) = \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k \left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)^k \left(\frac{t}{e^t - 1} \right) \right\}_{t=0} X^{n-k}, \quad (3.2.3)$$

$$b_n = B_n(0) = \left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left(\frac{t}{e^t - 1} \right) \right\}_{t=0}. \quad (3.2.4)$$

On dira également que la fonction G définie en (3.2.1) est la *fonction génératrice* des polynômes de Bernoulli.

Proposition 3.2.1. *Pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme de Bernoulli est de degré n et $b_n = B_n(0) \in \mathbb{Q}$. En outre, on a $B_0 = 1$,*

$$\forall n \geq 1, B_n = X^n - \frac{n}{2} X^{n-1} + \sum_{l \geq 1} C_n^{2l} b_{2l} X^{n-2l} \quad (3.2.5)$$

$$b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{6}, \quad \forall n \geq 1, b_{2n+1} = 0, \quad (3.2.6)$$

$$\forall n \geq 1, B'_n = n B_{n-1}, \quad \int_0^1 B_n(x) dx = 0, \quad (3.2.7)$$

$$\forall n \geq 1, B_n(X+1) - B_n(X) = n X^{n-1}, \quad (3.2.8)$$

$$\forall n \geq 2, B_n(1) = B_n(0). \quad (3.2.9)$$

Démonstration. Considérons tout d'abord la fonction ϕ holomorphe sur $(2i\pi\mathbb{Z}^*)^c$ définie par

$$\phi(t) = \frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2}.$$

C'est une fonction paire car

$$\begin{aligned} \phi(-t) &= \frac{-t}{e^{-t} - 1} - 1 - \frac{t}{2} = \frac{t}{1 - e^{-t}} - 1 - \frac{t}{2} = \frac{t(e^t - 1) + t}{e^t - 1} - 1 - \frac{t}{2} \\ &= t + \frac{t}{e^t - 1} - 1 - \frac{t}{2} = \phi(t), \end{aligned}$$

et on vérifie également $\phi(0) = \phi'(0) = 0$. Par conséquent, on a pour $|t| < 2\pi$,

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{\phi^{(2k)}(0)}{(2k)!} t^{2k} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{b_{2k}}{(2k)!} t^{2k}, \quad (3.2.10)$$

et de la définition (3.2.4), il vient $b_0 = 1, b_1 = -1/2, b_{2k+1} = 0$, pour $k \geq 1$. De plus, de (3.2.3), il vient

$$B_n(X) = X^n - \frac{n}{2} X^{n-1} + \sum_{2 \leq k \leq n} C_n^k b_k X^{n-k} = X^n - \frac{n}{2} X^{n-1} + \sum_{2 \leq 2l \leq n} C_n^{2l} b_{2l} X^{n-2l},$$

ce qui démontre (3.2.5), (3.2.6) à l'exception de $b_2 = 1/6$ que nous démontrerons plus bas. De plus, de (3.2.2), il vient pour $n \geq 1$,

$$B'_n(x) = \left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left(\frac{t^2 e^{tx}}{e^t - 1} \right) \right\}_{|t=0} = n \left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-1} \left(\frac{t e^{tx}}{e^t - 1} \right) \right\}_{|t=0} = n B_{n-1}(x),$$

et également

$$\begin{aligned} B_n(x+1) - B_n(x) &= \left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left(\frac{te^{t(x+1)}}{e^t - 1} - \frac{te^{tx}}{e^t - 1} \right) \right\}_{|t=0} \\ &= \left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)^n (te^{tx}) \right\}_{|t=0} = nx^{n-1}, \end{aligned}$$

ce qui implique par conséquent,

$$\int_0^1 B_n(x) dx = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = \frac{(n+1)0^n}{n+1} = 0,$$

démontrant (3.2.7), (3.2.8) ainsi que (3.2.9). Pour $n \geq 2$, on a donc

$$0 = B_n(1) - B_n(0) = 1 - \frac{n}{2} + \sum_{l \geq 1} C_n^{2l} b_{2l} - \begin{cases} b_n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

et par conséquent pour $n = 2m$, $m \geq 1$, il vient

$$\sum_{1 \leq l \leq m-1} C_{2m}^{2l} b_{2l} + 1 - m = 0,$$

ce qui donne, pour $m \geq 2$,

$$m(2m-1)b_{2m-2} = m-1 - \sum_{1 \leq l \leq m-2} C_{2m}^{2l} b_{2l}, \quad (3.2.11)$$

une formule de récurrence qui permet de déterminer les nombres de Bernoulli (et de démontrer qu'ils sont rationnels).

En particulier, il vient

$$m=2, \quad 2 \times 3 \times b_2 = 1, \quad \text{soit } b_2 = \frac{1}{6}, \quad (3.2.12)$$

$$m=3, \quad 3 \times 5 \times b_4 = 3 - 1 - C_6^2 b_2, \quad \text{soit } b_4 = -\frac{1}{30}, \quad (3.2.13)$$

$$\begin{aligned} m=4, \quad 4 \times 7 \times b_6 &= 4 - 1 - C_8^2 b_2 - C_8^4 b_4 = 3 - \frac{28}{6} + \frac{70}{30}, \\ &\text{soit } b_6 = \frac{1}{42}, \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

ce qui achève la démonstration de la Proposition. \square

Remarque 3.2.2. On obtient directement en continuant les calculs, utilisant (3.2.11) et (3.2.5)

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1 \\
B_1 &= -\frac{1}{2} + X \\
B_2 &= \frac{1}{6} - X + X^2 \\
B_3 &= \frac{1}{2}X - \frac{3}{2}X^2 + X^3 \\
B_4 &= -\frac{1}{30} + X^2 - 2X^3 + X^4 \\
B_5 &= -\frac{1}{6}X + \frac{5}{3}X^3 - \frac{5}{2}X^4 + X^5 \\
B_6 &= \frac{1}{42} - \frac{1}{2}X^2 + \frac{5}{2}X^4 - 3X^5 + X^6 \\
B_7 &= \frac{1}{6}X - \frac{7}{6}X^3 + \frac{7}{2}X^5 - \frac{7}{2}X^6 + X^7 \\
B_8 &= -\frac{1}{30} + \frac{2}{3}X^2 - \frac{7}{3}X^4 + \frac{14}{3}X^6 - 4X^7 + X^8 \\
B_9 &= -\frac{3}{10}X + 2X^3 - \frac{21}{5}X^5 + 6X^7 - \frac{9}{2}X^8 + X^9 \\
B_{10} &= \frac{5}{66} - \frac{3}{2}X^2 + 5X^4 - 7X^6 + \frac{15}{2}X^8 - 5X^9 + X^{10}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_{12} &= -\frac{691}{2730}, & b_{14} &= \frac{7}{6}, & b_{16} &= -\frac{3617}{510}, \\
b_{18} &= \frac{43867}{798}, & b_{20} &= -\frac{174611}{330}, \dots \\
b_{50} &= \frac{495057205241079648212477525}{66}.
\end{aligned}$$

La commande `Mathematica` `Table[BernoulliB[k], {k, 0, 10}]` permet d'obtenir les 11 premiers nombres de Bernoulli.

La commande `Table[BernoulliB[n, z], n, 0, 5]` fournit les 6 premiers polynômes de Bernoulli.

La commande

`Table[BernoulliB[n, z] // TraditionalForm, {n, 0, 3}]`

fournit $1, \quad z - \frac{1}{2}, \quad z^2 - z + \frac{1}{6}, \quad z^3 - \frac{3z^2}{2} + \frac{z}{2}.$

3.3 Formule d'Euler-Maclaurin

On souhaite examiner pour un entier $n \geq 1$, une fonction f continue définie sur \mathbb{R} et $x \in \mathbb{R}$, la somme

$$f(x) + f(x+1) + \cdots + f(x+n) = S_{n,f}(x), \quad (3.3.1)$$

somme que l'on veut comparer à l'intégrale

$$\int_x^{x+n+1} f(t)dt.$$

En suivant la méthode donnée dans le paragraphe 3.1 pour la série harmonique, nous verrons que les polynômes de Bernoulli et des intégrations par parties répétées nous permettront d'obtenir des approximations très précises de $S_{n,f}$. On a en particulier

$$S_{n,f}(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} f(x+k) = \sum_{0 \leq k \leq n} \left(f(x+k) - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)dt \right) + \int_x^{x+n+1} f(t)dt,$$

et par conséquent, supposant f continûment dérivable,

$$\begin{aligned} S_{n,f}(x) &= \int_x^{x+n+1} f(t)dt + \sum_{0 \leq k \leq n} \int_{x+k}^{x+k+1} \underbrace{(f(x+k) - f(t))}_{u_k(t)} \underbrace{1}_{v'(t) = \frac{d}{dt}(B_1(t-x-k))} dt \\ &= \int_x^{x+n+1} f(t)dt + \sum_{0 \leq k \leq n} \left[(f(x+k) - f(t)) B_1(t-x-k) \right]_{t=x+k}^{t=x+k+1} \\ &\quad + \sum_{0 \leq k \leq n} \int_{x+k}^{x+k+1} f'(t) B_1(t-x-k) dt \\ &= \int_x^{x+n+1} f(t)dt + \sum_{0 \leq k \leq n} (f(x+k) - f(x+k+1)) B_1(1) \\ &\quad + \sum_{0 \leq k \leq n} \int_{x+k}^{x+k+1} f'(t) B_1(t-x-k) dt \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

soit

$$\begin{aligned} S_{n,f}(x) &= \int_x^{x+n+1} f(t)dt + \frac{f(x) - f(x+n+1)}{2} \\ &\quad + \sum_{0 \leq k \leq n} \int_{x+k}^{x+k+1} f'(t) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ B_2(t-x-k) \} dt. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

En supposant f de classe C^2 , on peut intégrer par parties à nouveau en suivant la méthode du paragraphe 3.1. Donnons un énoncé plus général.

Théorème 3.3.1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ et soit $f \in C^{2m+1}([x_0, +\infty[)$. Pour $x \geq x_0$, $n \in \mathbb{N}$, on a avec $S_{n,f}(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} f(x+k)$,

$$\begin{aligned} S_{n,f}(x) &= \int_x^{x+n+1} f(t)dt + \frac{1}{2}(f(x) - f(x+n+1)) \\ &\quad + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)!} (f^{(2l-1)}(x+n+1) - f^{(2l-1)}(x)) \\ &\quad + \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^{n+1} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) f^{(2m+1)}(x+\theta) d\theta, \end{aligned}$$

où \tilde{B}_{2m+1} est la fonction 1-périodique coïncidant avec le polynôme de Bernoulli B_{2m+1} sur l'intervalle $[0, 1[$.

N.B. On a $\tilde{B}_{2m+1}(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[k, k+1[}(\theta) B_{2m+1}(\theta - k) = B_{2m+1}(\theta - E(\theta))$, où $E(\theta)$ est la partie entière de θ , caractérisée par

$$E(\theta) \in \mathbb{Z}, \quad E(\theta) \leq \theta < E(\theta) + 1.$$

Démonstration. On effectue une récurrence sur m . La formule cherchée est vérifiée pour $m = 0$ (f de classe C^1) d'après (3.3.2) car

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} \int_{x+k}^{x+k+1} f'(t) B_1(t-x-k) dt &= \int_0^{n+1} f'(x+\theta) \sum_{0 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{[k, k+1[}(\theta) B_1(\theta - k) d\theta \\ &= \int_0^{n+1} f'(x+\theta) \tilde{B}_1(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Supposons maintenant la formule du théorème vérifiée pour un entier $m \geq 0$. Pour une fonction f de classe C^{2m+3} sur $[x_0, +\infty[$, pour $x \geq x_0$, $n \in \mathbb{N}$, on peut appliquer la formule donnée par l'hypothèse de récurrence. Examinons le dernier terme ρ_m : on a

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^{n+1} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) f^{(2m+1)}(x+\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{(2m+1)!} \sum_{0 \leq k \leq n} \int_k^{k+1} f^{(2m+1)}(x+\theta) B_{2m+1}(\theta - k) d\theta \\ &= \frac{1}{(2m+2)!} \sum_{0 \leq k \leq n} \int_k^{k+1} f^{(2m+1)}(x+\theta) \frac{d}{d\theta} \{B_{2m+2}(\theta - k)\} d\theta \\ &= \frac{1}{(2m+2)!} \left\{ \sum_{0 \leq k \leq n} [f^{(2m+1)}(x+\theta) B_{2m+2}(\theta - k)]_{\theta=k}^{\theta=k+1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{0 \leq k \leq n} \int_k^{k+1} f^{(2m+2)}(x+\theta) B_{2m+2}(\theta - k) d\theta \right\} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{b_{2m+2}}{(2m+2)!} (f^{(2m+1)}(x+k+1) - f^{(2m+1)}(x+k)) \\ &\quad - \frac{1}{(2m+2)!} \sum_{0 \leq k \leq n} \int_k^{k+1} f^{(2m+2)}(x+\theta) \frac{d}{(2m+3)d\theta} \{B_{2m+3}(\theta - k)\} d\theta, \end{aligned}$$

ce qui donne comme f est de classe C^{2m+3} ,

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{b_{2m+2}}{(2m+2)!} \left(f^{(2m+1)}(x+n+1) - f^{(2m+1)}(x) \right) \\ &\quad - \frac{1}{(2m+3)!} \sum_{0 \leq k \leq n} \int_k^{k+1} f^{(2m+2)}(x+\theta) \frac{d}{d\theta} \{ B_{2m+3}(\theta-k) \} d\theta \\ &= \frac{b_{2m+2}}{(2m+2)!} \left(f^{(2m+1)}(x+n+1) - f^{(2m+1)}(x) \right) \\ &\quad + \frac{1}{(2m+3)!} \sum_{0 \leq k \leq n} \int_k^{k+1} f^{(2m+3)}(x+\theta) B_{2m+3}(\theta-k) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{(2m+3)!} \sum_{0 \leq k \leq n} [f^{(2m+2)}(x+\theta) B_{2m+3}(\theta-k)]_{\theta=k}^{\theta=k+1}. \end{aligned}$$

On remarque que le terme écrit sur la dernière ligne est nul car pour $m \geq 0$,

$$B_{2m+3}(1) = B_{2m+3}(0) = b_{2m+3} = 0,$$

et l'on obtient par conséquent,

$$\rho_m = \frac{b_{2m+2}}{(2m+2)!} \left(f^{(2m+1)}(x+n+1) - f^{(2m+1)}(x) \right) + \rho_{m+1},$$

ce qui est la formule cherchée pour $m+1$. □

Remarque 3.3.2. On a $\tilde{B}_{2m+1}(\theta) = -\tilde{B}_{2m+1}(1-\theta)$. En effet, les deux membres sont des fonctions 1-périodiques et il suffit de vérifier cette identité sur $[0, 1[$, i.e. nous devons démontrer que

$$B_{2m+1}(X) + B_{2m+1}(1-X) = 0.$$

Cette propriété est vérifiée pour $m=0$ car $B_1 = X - \frac{1}{2}$ et donc

$$B_1(X) + B_1(1-X) = X - \frac{1}{2} + 1 - X - \frac{1}{2} = 0.$$

Si $m \geq 0$, on a

$$(B_{2m+3}(X) + B_{2m+3}(1-X))'' = (2m+3)(2m+2)(B_{2m+1}(X) + B_{2m+1}(1-X)) = 0,$$

grâce à l'hypothèse de récurrence. Ceci implique que le polynôme $B_{2m+3}(X) + B_{2m+3}(1-X)$ est de degré ≤ 1 . En outre, on a

$$(B_{2m+3}(X) + B_{2m+3}(1-X))'(0) = (2m+3)(B_{2m+2}(0) - B_{2m+2}(1)) = 0,$$

et

$$B_{2m+3}(0) + B_{2m+3}(1) = 2b_{2m+3} = 0.$$

Le polynôme $B_{2m+3}(X) + B_{2m+3}(1-X)$ est de degré ≤ 1 , de dérivée nulle en 0 (donc partout), prenant la valeur 0 en 0 : c'est donc le polynôme nul.

Chapitre 4

Développements eulériens

4.1 Produits infinis

Définition 4.1.1. Soit $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de \mathbb{C}^* . Pour $n \geq 1$, on pose $P_n = \prod_{1 \leq k \leq n} a_k$. Si la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ converge dans \mathbb{C}^* , on dit que le produit infini $\prod_{k \geq 1} a_k$ est strictement convergent et l'on pose

$$\prod_{k \geq 1} a_k = \lim_n P_n.$$

Proposition 4.1.2. Soit $(u_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que

$$\sum_{k \geq 1} |u_k| < +\infty. \quad (4.1.1)$$

Alors, il existe $k_0 \geq 1$ tel que le produit infini $\prod_{k \geq k_0} (1 + u_k)$ soit strictement convergent.

Démonstration. Comme la série de terme général u_k est convergente, on a $\lim_k u_k = 0$ et pour $k \geq k_0 \geq 1$, on a $|u_k| \leq 1/2$; la suite $(u_k)_{k \geq k_0}$ est une suite de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ et

$$a_k = 1 + u_k \in \overline{D(1, 1/2)} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

En utilisant le logarithme complexe défini dans le paragraphe 1.3, il vient pour $|z| \leq 1/2$,

$$\operatorname{Log}(1 + z) = \int_{[1, 1+z]} \frac{d\xi}{\xi} = z \int_0^1 \frac{dt}{1 + tz},$$

et comme $|1 + tz| \geq 1 - t/2 > 0$, pour $t \in [0, 1]$, il vient

$$\forall z, |z| \leq 1/2, \quad |\operatorname{Log}(1 + z)| \leq |z|[-2 \ln(1 - t/2)]_{t=0}^{t=1} = |z| \ln 4 \leq 3|z|/2. \quad (4.1.2)$$

Par conséquent, pour $k \geq k_0$,

$$|\operatorname{Log}(1 + u_k)| \leq 3|u_k|/2 \implies \sum_{k \geq k_0} |\operatorname{Log}(1 + u_k)| < +\infty.$$

La suite $(\sum_{k_0 \leq k \leq n} \text{Log}(1 + u_k))_{n \geq k_0}$ est donc convergente dans \mathbb{C} et en rappelant que pour tout $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a $e^{\text{Log} \zeta} = \zeta$ (cf. Théorème 1.3.1), il vient

$$\prod_{k_0 \leq k \leq n} (1 + u_k) = \prod_{k_0 \leq k \leq n} e^{\text{Log}(1+u_k)} = e^{\sum_{k_0 \leq k \leq n} \text{Log}(1+u_k)}$$

qui converge dans \mathbb{C}^* , ce qui donne le résultat cherché. \square

Remarque 4.1.3. Considérons la suite $a_k = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}, k \geq 1$. C'est une suite de \mathbb{C}^* et l'on a

$$\prod_{1 \leq k \leq n} a_k = \frac{2}{1} \frac{3}{2} \frac{4}{3} \cdots \frac{n}{n-1} \frac{n+1}{n} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

soit un produit infini divergent bien que $\lim_k a_k = 1$. Cela ne contredit pas la proposition précédente car $\sum_{k \geq 1} 1/k = +\infty$.

Remarque 4.1.4. Considérons la suite $b_k = \frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}, k \geq 1$. C'est une suite de \mathbb{C}^* et l'on a

$$\prod_{1 \leq k \leq n} b_k = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

soit un produit infini qui ne converge pas dans \mathbb{C}^* , bien que $\lim_k b_k = 1$. Cela ne contredit pas la proposition précédente car $\sum_{k \geq 1} 1/k = +\infty$.

Remarque 4.1.5. Le critère de convergence donné par la Proposition 4.1.2 fournit une condition suffisante d'usage aisé mais n'est pas nécessaire pour obtenir la convergence dans \mathbb{C}^* . Considérons par exemple

$$a_k = 1 + \frac{(-1)^k}{k+1}, \quad k \geq 1.$$

La condition (4.1.1) est violée, néanmoins $\forall k \geq 1, a_k \in \mathbb{R}^*$ et

$$a_{2l} = \frac{2l+2}{2l+1}, \quad a_{2l+1} = \frac{2l+1}{2l+2}, \quad \prod_{1 \leq k \leq 2n+1} a_k = a_1(a_2a_3) \cdots (a_{2n}a_{2n+1}) = a_1 = \frac{1}{2},$$

ce qui implique (car $\prod_{1 \leq k \leq 2n+2} a_k = a_{2n+2} \prod_{1 \leq k \leq 2n+1} a_k$), que

$$\lim_n \prod_{1 \leq k \leq n} a_k = \frac{1}{2}.$$

On examine maintenant une version holomorphe des produits infinis.

Proposition 4.1.6. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et soit $(v_k)_{k \geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω telle que*

$$\forall K \text{ compact } \subset \Omega, \quad \sum_{k \geq 1} \sup_{z \in K} |v_k(z)| < +\infty. \quad (4.1.3)$$

Alors, pour tout $z \in \Omega$, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{1 \leq k \leq N} (1 + v_k(z)) = P(z)$, et $P \in \mathcal{H}(\Omega)$. On pose pour $z \in \Omega$,

$$P(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + v_k(z)),$$

et l'on a

$$P(z) = 0 \iff \exists k \geq 1, \quad v_k(z) = -1.$$

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ et $r_0 > 0$ tel que $K_0 = \overline{D(z_0, r_0)} \subset \Omega$. D'après l'hypothèse (4.1.3), il existe n_0 tel que

$$\forall k \geq n_0, \quad \sup_{K_0} |v_k(z)| \leq 1/2.$$

Le Corollaire 1.2.3 et l'estimation (4.1.2) impliquent que λ_{n_0} définie sur $D(z_0, r_0)$ par

$$\lambda_{n_0}(z) = \sum_{k \geq n_0} \text{Log}(1 + v_k(z)),$$

est holomorphe sur $D(z_0, r_0)$. Considérons pour $z \in D(z_0, r_0)$, $n \geq n_0$,

$$\prod_{1 \leq k \leq n} (1 + v_k(z)) = \underbrace{\prod_{1 \leq k < n_0} (1 + v_k(z))}_{\substack{P_{n_0}(z) \\ P_{n_0} \in \mathcal{H}(\Omega)}} \prod_{n_0 \leq k \leq n} (1 + v_k(z)).$$

Il vient pour $z \in D(z_0, r_0)$,

$$\prod_{1 \leq k \leq n} (1 + v_k(z)) = P_{n_0}(z) \prod_{n_0 \leq k \leq n} e^{\text{Log}(1 + v_k(z))} = P_{n_0}(z) e^{\sum_{n_0 \leq k \leq n} \text{Log}(1 + v_k(z))},$$

et par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{1 \leq k \leq n} (1 + v_k(z)) = P_{n_0}(z) e^{\lambda_{n_0}(z)} = P(z),$$

où P est une fonction holomorphe sur $D(z_0, r_0)$. Nous avons donc obtenu que, pour $z \in \Omega$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{1 \leq k \leq n} (1 + v_k(z)) = P(z), \quad P \in \mathcal{H}(\Omega).$$

En outre, nous avons démontré que pour tout point $z_0 \in \Omega$, il existe $r_0 > 0$ tel que pour $z \in D(z_0, r_0)$,

$$P_{n_0}(z) e^{\lambda_{n_0}(z)} = P(z), \quad P_{n_0} = \prod_{1 \leq k < n_0} (1 + v_k), \lambda_{n_0} \in \mathcal{H}(D(z_0, r_0)).$$

Par suite, si $P(z_0) = 0$, alors le produit fini $\prod_{1 \leq k < n_0} (1 + v_k(z_0))$ doit s'annuler et par conséquent, il existe $k \geq 1$ tel que $v_k(z) = -1$, ce qui achève la démonstration du théorème. \square

Remarque 4.1.7. L'hypothèse (4.1.3) est importante pour assurer cette propriété "d'intégrité" du produit infini qui alors ne peut s'annuler que si l'un des facteurs s'annule. Sans cette hypothèse, la Remarque 4.1.4 nous a montré que la limite pouvait être nulle sans qu'aucun des facteurs ne soit nul.

4.2 Développements eulériens pour \cotan , \sin .

Théorème 4.2.1. *Pour $z \in (\pi\mathbb{Z})^c$,*

$$\cotan z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{k \geq 1} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}. \quad (4.2.1)$$

Démonstration. Rappelons que

$$\sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz},$$

et d'après le Théorème 1.1.1, ceci est équivalent à $2iz \in 2i\pi\mathbb{Z}$, i.e. à $z \in \pi\mathbb{Z}$. Par ailleurs, pour K compact inclus dans $(\pi\mathbb{Z})^c$, on a pour $k \geq 1$,

$$\left| \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2} \right| = \frac{2|z|}{|\pi^{-2}k^{-2}z^2 - 1|} \frac{1}{\pi^2 k^2} \leq \frac{2 \sup_{z \in K} |z|}{\delta_K} \frac{1}{\pi^2 k^2}, \quad (4.2.2)$$

avec

$$\delta_K = \inf_{z \in K, k \geq 1} |\pi^{-2}k^{-2}z^2 - 1|.$$

Notons que $\delta_K > 0$, sinon on pourrait trouver des suites $(z_j)_{j \geq 1}$ dans K et $(k_j)_{j \geq 1}$ dans \mathbb{N}^* avec $\lim_j \pi^{-2}k_j^{-2}z_j^2 = 1$; la compacité de K nous permettant d'extraire une sous-suite convergente dans K de la suite $(z_j)_{j \geq 1}$, on peut supposer celle-ci convergente de limite $z_0 \in K$, ce qui implique $\lim_j k_j^2 = \pi^{-2}z_0^2$. La convergence de cette suite d'entiers implique que la suite $(k_j^2)_{j \geq 1}$ est stationnaire à partir d'un certain rang. Nous aurions alors trouvé,

$$\pi^{-2}z_0^2 = N^2, \quad N \in \mathbb{N}^* \implies z_0 \in K \cap \pi\mathbb{Z} = \emptyset,$$

ce qui est impossible. L'estimation (4.2.2) et le Corollaire 1.2.3 impliquent que le membre de droite de (4.2.1) définit une fonction holomorphe C_0 sur $(\pi\mathbb{Z})^c$.

Lemme 4.2.2. *La fonction holomorphe C_0 définie sur $(\pi\mathbb{Z})^c$ par le second membre de (4.2.1) est π -périodique (notons que $(\pi\mathbb{Z})^c$ est stable par la translation $z \mapsto z + \pi$). De plus cette fonction est méromorphe sur \mathbb{C} de pôles $\pi\mathbb{Z}$ qui sont simples et $\text{Res}(C_0, \pi k) = 1$.*

Démonstration du lemme. On remarque que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $z \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{|k| \leq N} \frac{1}{z - k\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{1 \leq k \leq N} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2},$$

de sorte que, pour $z \notin \pi\mathbb{Z}$, $C_0(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{z - k\pi}$. Par suite, pour $z \notin \pi\mathbb{Z}$, on a $z + \pi \notin \pi\mathbb{Z}$ et

$$\begin{aligned} C_0(z + \pi) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{z + \pi - k\pi} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N \leq k \leq N} \frac{1}{z - (k-1)\pi} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N-1 \leq l \leq N-1} \frac{1}{z - l\pi} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{z + N\pi} + \frac{1}{z + (N+1)\pi} + \sum_{-(N-1) \leq l \leq N-1} \frac{1}{z - l\pi} \right\} \\ &= C_0(z), \end{aligned}$$

ce qui donne la périodicité cherchée. On a en outre pour $z \in (\pi\mathbb{Z})^c$,

$$zC_0(z) = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{2z^2}{z^2 - \pi^2 k^2},$$

ce qui démontre que $zC_0(z)$ est holomorphe au voisinage de 0 et vaut 1 en 0. Par périodicité, on obtient que, pour tout $l \in \mathbb{Z}$, la fonction $(z - l\pi)C_0(z)$ est holomorphe au voisinage de $l\pi$ et vaut 1 en $l\pi$. \square

Remarque 4.2.3. La fonction cotan définie sur $(\pi\mathbb{Z})^c$ est π -périodique, méromorphe sur \mathbb{C} de pôles $\pi\mathbb{Z}$ qui sont simples et $\text{Res}(C_0, \pi k) = 1$. En effet, on a

$$\cos(z + \pi) = \frac{e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)}}{2} = -\cos z, \quad \sin(z + \pi) = -\sin z,$$

et

$$z \cotanz = \cos z \frac{z}{\sin z} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \cos 0 \frac{1}{\sin'(0)} = 1,$$

ce qui implique que la fonction $z \mapsto z \cotanz$ est holomorphe au voisinage de 0 et vaut 1 en 0 et par périodicité que $\forall l \in \mathbb{Z}$, $(z - l\pi) \cotanz$ est holomorphe au voisinage de $l\pi$ et vaut 1 en $l\pi$.

Par conséquent, la fonction

$$z \mapsto f(z) = \cotanz - C_0(z), \tag{4.2.3}$$

est une fonction entière, car holomorphe sur $(\pi\mathbb{Z})^c$ et pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $(z - l\pi)f(z)$ est holomorphe au voisinage de $l\pi$ et vaut 0 en $l\pi$ de sorte que

$$(z - l\pi)(\cotanz - C_0(z)) = (z - l\pi)g_l(z), \quad g_l \text{ holomorphe au voisinage de } l\pi,$$

ce qui implique que f est holomorphe au voisinage de $l\pi$. Notons que la fonction entière f est aussi impaire et π -périodique et est donc complètement déterminée par ses valeurs dans la bande

$$B = \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \text{Re } z \leq \pi/2\}. \tag{4.2.4}$$

On remarque que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $z \in B \cap \{z \in \mathbb{C}, |\text{Im } z| \geq 1\}$,

$$\begin{aligned} |k^2\pi^2 - z^2| &= |k\pi - z||k\pi + z| \\ &= \sqrt{(k\pi - \text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2} \sqrt{(k\pi + \text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2} \\ &\geq \pi^2(k - \tfrac{1}{2})^2 + (\text{Im } z)^2, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\left| \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} \right| \leq \frac{2(\frac{\pi}{2} + |\text{Im } z|)}{\pi^2(k - \frac{1}{2})^2 + (\text{Im } z)^2}.$$

Par conséquent¹ pour $z \in B \cap \{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im} z| \geq \pi\}$,

$$\begin{aligned} |C_0(z)| &\leq \frac{1}{|z|} + (\pi + 2|\operatorname{Im} z|) \sum_{\substack{k \geq 1 \\ \pi(k-1/2) \geq |\operatorname{Im} z|}} \frac{1}{\pi^2(k - \frac{1}{2})^2} + \sum_{\substack{k \geq 1 \\ \pi(k-1/2) < |\operatorname{Im} z|}} \frac{\pi + 2|\operatorname{Im} z|}{|\operatorname{Im} z|^2} \\ &\leq 1 + \frac{\pi + 2|\operatorname{Im} z|}{\frac{|\operatorname{Im} z|}{\pi} - \frac{1}{2}} + \frac{\pi + 2|\operatorname{Im} z|}{|\operatorname{Im} z|^2} \left(\frac{|\operatorname{Im} z|}{\pi} + \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\sup_{\{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi/2, |\operatorname{Im} z| \geq \pi\}} |C_0(z)| < +\infty,$$

et par imparité et π -périodicité de C_0 ,

$$\sup_{|\operatorname{Im} z| \geq \pi} |C_0(z)| < +\infty. \quad (4.2.5)$$

De plus, si $\operatorname{Im} z \geq \pi$, on a

$$|\cotan z| = \left| i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} \right| = \frac{|1 + e^{-2\operatorname{Im} z} e^{2i\operatorname{Re} z}|}{|1 - e^{-2\operatorname{Im} z} e^{2i\operatorname{Re} z}|} \leq \frac{1 + e^{-2\operatorname{Im} z}}{1 - e^{-2\operatorname{Im} z}} \leq \frac{2}{1 - e^{-2\pi}}$$

si $\operatorname{Im} z \leq -\pi$, on a

$$|\cotan z| = \left| i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} \right| = \frac{|e^{-2\operatorname{Im} z} e^{2i\operatorname{Re} z} + 1|}{|e^{-2\operatorname{Im} z} e^{2i\operatorname{Re} z} - 1|} \leq \frac{e^{-2\operatorname{Im} z} + 1}{e^{-2\operatorname{Im} z} - 1} = \frac{e^{2\operatorname{Im} z} + 1}{1 - e^{2\operatorname{Im} z}} \leq \frac{2}{1 - e^{-2\pi}},$$

et par conséquent

$$\sup_{|\operatorname{Im} z| \geq \pi} |\cotan z| < +\infty. \quad (4.2.6)$$

Comme la fonction f donnée par (4.2.3) est entière, elle est bornée sur

$$\{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi/2, |\operatorname{Im} z| \leq \pi\},$$

et par imparité et π -périodicité,

$$\sup_{|\operatorname{Im} z| \leq \pi} |f(z)| < +\infty. \quad (4.2.7)$$

Des inégalités (4.2.5), (4.2.6) et (4.2.7), il vient que f est une fonction entière bornée, ce qui implique d'après le théorème de Liouville (cf. Théorème 1.2.8) que f est constante. Comme f est aussi impaire, elle est identiquement nulle et l'on obtient (4.2.1) dans le Théorème 4.2.1. \square

1. Pour $\lambda > 1$, on a $\sum_{k \geq \lambda} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k \geq \lambda} \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^2} \leq \int_{\lambda-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\lambda-1}$. On utilise cette majoration ci-dessus pour

$$\lambda = \frac{|\operatorname{Im} z|}{\pi} + \frac{1}{2} \geq 3/2.$$

Remarque 4.2.4. La fonction \tan est définie sur $(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})^c$, est π -périodique, impaire, méromorphe sur \mathbb{C} de pôles $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ qui sont simples et $\text{Res}(\tan, \frac{\pi}{2} + \pi k) = -1$. En effet, on a

$$\cos(z + \frac{\pi}{2}) = \frac{e^{i(z+\frac{\pi}{2})} + e^{-i(z+\frac{\pi}{2})}}{2} = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\sin z, \quad \sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z,$$

et

$$z \tan(z + \frac{\pi}{2}) = -\cos z \frac{z}{\sin z} \xrightarrow{z \rightarrow 0} -\cos 0 \frac{1}{\sin'(0)} = -1,$$

ce qui implique que la fonction $z \mapsto z \tan(z + \frac{\pi}{2})$ est holomorphe au voisinage de 0 et vaut -1 en 0 et par périodicité que $\forall l \in \mathbb{Z}$, $(z - l\pi) \tan(z + \frac{\pi}{2})$ est holomorphe au voisinage de $l\pi$ et vaut -1 en $l\pi$. En outre pour $a, b, a \pm b \in \mathbb{C} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, on a

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \quad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}, \quad (4.2.8)$$

car $\cos a, \cos b, \cos(a + b)$ sont non nuls (cf. (1.1.8)) et

$$\begin{aligned} (1 - \tan a \tan b) \tan(a + b) &= \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\cos a \cos b} \times \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b} = \tan a + \tan b. \end{aligned}$$

Remarquons que $(1 - \tan a \tan b) \neq 0$, sinon nous aurions

$$\begin{aligned} 0 = \tan a + \tan b &= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b} \implies \sin(a + b) = 0 \\ &\implies a + b = \pi k, k \in \mathbb{Z} \implies 0 = 1 - \tan a \tan b = 1 + \tan^2 a, \end{aligned}$$

ce qui est impossible car on aurait

$$\sin^2 a = -\cos^2 a, \quad \text{et donc } 1 = \sin^2 a + \cos^2 a = 0.$$

On obtient donc la première formule de (4.2.8); la seconde s'obtient en changeant b en $-b$ dans la première (et en remarquant que $(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ est symétrique par rapport à l'origine). En outre, pour $p, q \in \mathbb{C} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, on a ²

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p - q)}{\cos p \cos q}, \quad \tan p + \tan q = \frac{\sin(p + q)}{\cos p \cos q}. \quad (4.2.9)$$

En effet, on a

$$\frac{\sin(p - q)}{\cos p \cos q} = \frac{\sin p \cos q - \sin q \cos p}{\cos p \cos q} = \tan p - \tan q.$$

2. La commande *Mathematica* `TrigFactor[Tan[p] + Tan[q]]` donne

`Sec[p] Sec[q] Sin[p + q]` qui fournit (4.2.9) car la sécante `Sec[x]=1/Cos[x]`.

Théorème 4.2.5. *Pour $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right). \quad (4.2.10)$$

Démonstration. D'après la Proposition 4.1.6, le membre de droite $S(z)$ de (4.2.10) définit une fonction entière sur \mathbb{C} dont les zéros sont simples et situés en $\pi\mathbb{Z}$. Pour $k \geq 1, z \in \mathbb{C}, |z| \leq \pi/2$, on a

$$|z^2/(k^2\pi^2)| \leq 1/4$$

et par suite l'estimation (4.1.2) implique

$$\forall k \geq 1, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq \pi/2, \quad \left| \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right) \right| \leq \frac{3|z|^2}{2k^2\pi^2} \leq \frac{3}{8k^2}.$$

Le Corollaire 1.2.3 implique alors que la fonction λ définie sur

$$U = \{z \in \mathbb{C}, |z| < \pi/2\} \quad \text{par } \lambda(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right),$$

est holomorphe sur U et telle que $e^{\lambda(z)} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right)$. On a en outre d'après le Corollaire 1.2.3 et le Théorème 4.2.1

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, \pi/2[, \quad \lambda'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)^{-1} \frac{(-2x)}{\pi^2 k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (\pi^2 k^2 - x^2)^{-1} (-2x) \\ &= \cotan x - \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} (\ln(\sin x) - \ln x), \end{aligned}$$

ce qui donne l'existence d'une constante α telle que

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \quad \lambda(x) = \alpha + \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right), \quad \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right) = e^{\alpha} \frac{\sin x}{x}$$

et $S(x) = e^{\alpha} \sin x$. Comme les fonctions entières S et $z \mapsto e^{\alpha} \sin z$ coïncident sur $]0, \pi/2[$, par prolongement analytique, elles sont égales. En outre on a, avec λ holomorphe sur U ,

$$S(z) = ze^{\lambda(z)}, \lambda(0) = 0 \quad \text{et donc } S'(0) = 1,$$

ce qui implique $e^{\alpha} \sin'(0) = 1$ et donc $e^{\alpha} = 1$, ce qui achève la démonstration. \square

4.3 Formules de Gauss et de Weierstrass pour la fonction Γ

Théorème 4.3.1 (Formule de Gauss). *Soit $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. Alors on a*

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \dots (z+n)}. \quad (4.3.1)$$

Démonstration. Nous allons commencer par examiner le cas où $z \in]0, +\infty[$. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on remarque que

$$\Gamma(x) = \lim_n \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt. \quad (4.3.2)$$

En effet, tout d'abord on a pour $t_0 > 0$

$$\lim_n t_0^{x-1} \left(1 - \frac{t_0}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(t_0) = t_0^{x-1} e^{-t_0},$$

car $\ln(1 - t_0/n)^n = n \ln(1 - t_0/n) \sim_{n \rightarrow +\infty} (-t_0)$ et d'autre part, on a pour $t > 0$,

$$0 \leq t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(t) \leq g(t) = e^{-t} t^{x-1}, \quad g \in L^1(\mathbb{R}_+),$$

car

$$\forall t \in [0, n[, \quad -\ln(1 - t/n) = \sum_{k \geq 1} \frac{(t/n)^k}{k} \geq t/n.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue (cf. e.g. [24], Theorem 1.7.5) permet par conséquent d'obtenir (4.3.2). En outre, en posant $t = ns$ dans l'intégrale de (4.3.2), il vient

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = n^x \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^n ds = n^x I_n(x).$$

De plus, on a $I_0(x) = \int_0^1 s^{x-1} ds = 1/x$ et pour $n \geq 0$,

$$I_{n+1}(x) = \int_0^1 \underbrace{s^{x-1}}_{u'(s)} \underbrace{(1-s)^{n+1}}_{v(s)} ds = x^{-1} [s^x (1-s)^{n+1}]_{s=0}^{s=1} + x^{-1} (n+1) \int_0^1 s^x (1-s)^n ds,$$

ce qui donne $I_{n+1}(x) = x^{-1} (n+1) I_n(x+1)$. Nous pouvons alors démontrer par récurrence la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad I_n(x) = \frac{1}{x} \prod_{1 \leq j \leq n} \frac{j}{x+j}. \quad (4.3.3)$$

En effet, cette formule est vraie pour $n = 0$ et si on la suppose vérifiée pour un entier $n \geq 0$, il vient de ce qui précède que

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x) &= \frac{n+1}{x} \frac{1}{x+1} \prod_{1 \leq j \leq n} \frac{j}{x+1+j} = \frac{1}{x} \frac{(n+1)!}{1} \frac{1}{x+1} \prod_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{x+1+j} \\ &= \frac{1}{x} \prod_{1 \leq k \leq n+1} \frac{k}{x+k}. \end{aligned}$$

Il vient par conséquent pour $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \lim_n \frac{n^x n!}{\prod_{0 \leq j \leq n} (x+j)}.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$, un raisonnement identique et l'égalité pour $t > 0$

$$|t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(t)| = t^{\operatorname{Re} z - 1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(t),$$

permettent d'obtenir (4.3.1) pour $\operatorname{Re} z > 0$. Supposons maintenant $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ avec

$$-k_0 - 1 < \operatorname{Re} z \leq -k_0, \quad \text{pour un } k_0 \in \mathbb{N}.$$

On a alors $\operatorname{Re}(z + k_0 + 1) > 0$ et donc

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z + k_0 + 1)}{z(z+1) \dots (z+k_0)} \\ &= \lim_n \frac{n^{z+k_0+1} n!}{\prod_{0 \leq j \leq n} (z + k_0 + 1 + j) \prod_{0 \leq l \leq k_0} (z + l)} \\ &= \lim_n \frac{n^{k_0+1}}{\prod_{n+1 \leq r \leq k_0+1+n} (z+r)} \frac{n!}{\prod_{0 \leq j \leq n} (z+j)}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Comme on a

$$\begin{aligned} \alpha_n(k_0, z) &= \frac{n^{k_0+1}}{\prod_{n+1 \leq r \leq k_0+1+n} (z+r)} = \frac{n}{(z+n+1)} \frac{n}{(z+n+2)} \cdots \frac{n}{(z+n+k_0+1)} \\ &= \prod_{1 \leq j \leq k_0+1} \frac{n}{z+n+j} = \prod_{1 \leq j \leq k_0+1} \frac{1}{1 + \frac{z}{n} + \frac{j}{n}}, \end{aligned}$$

il vient $\lim_n \alpha_n(k_0, z) = 1$ et donc (4.3.4) implique le résultat cherché (4.3.2). \square

Théorème 4.3.2 (Formule de Weierstrass). *Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$, on a, γ désignant la constante d'Euler (cf. Lemme 3.1.1),*

$$\Gamma(z) = z^{-1} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, \quad (4.3.5)$$

et $\Gamma(z) \neq 0$. En outre la fonction $1/\Gamma$ est une fonction entière (i.e. holomorphe sur \mathbb{C}) et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}. \quad (4.3.6)$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que le produit infini (4.3.5) a un sens et définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. Soit K un compact de $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$: alors pour $n \geq N_K$, on a $\sup_{z \in K} |z|/n \leq 1/2$, et $\operatorname{Log}(1 + \frac{z}{n})$ a un sens. En posant pour $z \in K, n \geq N_K$,

$$u_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} = e^{\frac{z}{n} - \operatorname{Log}(1 + \frac{z}{n})},$$

on remarque que

$$\frac{z}{n} - \operatorname{Log}\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{k} \frac{z^k}{n^k},$$

et par conséquent

$$\left| \frac{z}{n} - \text{Log}\left(1 + \frac{z}{n}\right) \right| \leq \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \frac{|z|^k}{n^k} \leq \frac{|z|^2}{2n^2} \sum_{k \geq 2} \frac{2}{k} \frac{|z|^{k-2}}{n^{k-2}} \leq \frac{|z|^2}{2n^2} \frac{1}{(1 - |z|n^{-1})} \leq \frac{|z|^2}{n^2}.$$

Par suite pour $z \in K$, on a

$$u_n(z) - 1 = e^{\rho e^{i\theta} |z|^2 n^{-2}} - 1, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

et donc comme $e^\alpha - 1 = \int_0^1 e^{\sigma\alpha} d\sigma$, il vient

$$\text{avec } M_K = \sup_{z \in K} |z| \text{ et } n \geq \max(N_K, M_K),$$

$$|u_n(z) - 1| \leq \frac{|z|^2}{n^2} \int_0^1 e^{\sigma \frac{|z|^2}{n^2}} d\sigma \leq \frac{M_K^2}{n^2} e^{M_K^2 n^{-2}} \leq \frac{e M_K^2}{n^2}.$$

D'après la Proposition 4.1.6, on trouve que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n},$$

est convergent sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$, définit sur cet ouvert une fonction holomorphe qui ne s'annule pas. Le même raisonnement démontre que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

est convergent sur \mathbb{C} , définit une fonction entière dont les zéros sont les entiers ≤ -1 .

La formule de Gauss (cf. Théorème 4.3.1) montre que pour $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$, on a

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^z}{z} \frac{1}{\frac{(z+1)}{1} \cdots \frac{(z+n)}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} z^{-1} e^{z(\ln n - \sum_{1 \leq k \leq n} k^{-1})} \prod_{1 \leq k \leq n} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k},$$

et par conséquent $\Gamma(z) = z^{-1} e^{-z\gamma} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k}$, ce qui donne (4.3.5). On obtient également pour $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$,

$$\Gamma(z)^{-1} = z e^{z\gamma} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k},$$

et comme le second membre de cette égalité est une fonction entière qui coïncide avec $1/\Gamma$ sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$, on trouve le résultat cherché. \square

Corollaire 4.3.3 (Formule des compléments). *Pour $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\sin \pi z = \frac{\pi}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}. \quad (4.3.7)$$

Démonstration. L'identité $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ du Théorème 2.1.3, valide pour tout $z \in (-\mathbb{N})^c$, implique que les fonctions entières

$$z \mapsto \frac{z}{\Gamma(z+1)} \quad \text{et} \quad z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$$

coïncident. D'après la formule (4.3.6), on a pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= \frac{1}{\Gamma(z)(-z)\Gamma(-z)} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} z e^{\gamma z} \left\{ \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right\} (-z) e^{-\gamma z} \left\{ \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \right\} (-z)^{-1} \\ &= \frac{1}{\pi} \pi z \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \underbrace{=}_{\text{d'après (4.2.10)}} \frac{\sin(\pi z)}{\pi}, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat cherché (par prolongement analytique ou plus simplement car $(1/\Gamma)(0) = 0$). \square

Théorème 4.3.4 (Formule de Legendre-Gauss). *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$, on a*

$$\Gamma\left(\frac{z}{m}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{m}\right) \dots \Gamma\left(\frac{z+m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}-z} \Gamma(z). \quad (4.3.8)$$

N.B. Notons que si $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$, alors pour $j \in \{0, \dots, m-1\}$, $(z+j)/m \notin -\mathbb{N}$, sinon, il existerait $k \in \mathbb{N}$ avec

$$z+j = -km \implies z \in -\mathbb{N}.$$

Démonstration. Posons pour $m \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}^*)$,

$$f_m(z) = \prod_{1 \leq j \leq m} \Gamma\left(\frac{z+j}{m}\right). \quad (4.3.9)$$

Comme ci-dessus, la condition $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}^*)$ implique que pour $j \in \{1, \dots, m\}$, $(z+j)/m \notin -\mathbb{N}$, sinon, il existerait $k \in \mathbb{N}$ avec

$$z+j = -km \implies z \in -\mathbb{N}^*.$$

Notons que comme la fonction Γ ne s'annule jamais (cf. Théorème 4.3.2), $f_m(z) \neq 0$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}^*)$. En utilisant la formule de Gauss (Théorème 4.3.1), il vient

$$\begin{aligned} f_m(z) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{1 \leq j \leq m} \frac{n^{\frac{z+j}{m}} n!}{\prod_{0 \leq k_j \leq n} \left(\frac{z+j}{m} + k_j\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^z (n!)^m n^{\frac{m+1}{2}} m^{(n+1)m} \prod_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k_j \leq n}} (z+j+m k_j)^{-1}. \end{aligned}$$

On remarque que l'application

$$\begin{aligned} \{1, \dots, m\} \times \{0, \dots, n\} &\longrightarrow \{1, \dots, m(1+n)\} \\ (j, k) &\mapsto j + mk \end{aligned}$$

est bijective car les ensembles de départ et d'arrivée ont même nombre fini d'éléments et par ailleurs $j + mk = j' + mk'$ implique $j - j' \in m\mathbb{Z}$, ce qui donne $j = j'$ et donc $k = k'$, prouvant l'injectivité. Par conséquent, on a

$$f_m(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^z (n!)^m n^{\frac{m+1}{2}} m^{(n+1)m} \prod_{1 \leq l \leq m(1+n)} (z+l)^{-1},$$

et

$$f_m(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)^m n^{\frac{m+1}{2}} m^{(n+1)m}}{[(n+1)m]!}.$$

Il vient par conséquent, pour $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$

$$\frac{f_m(z)}{f_m(0)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[(n+1)m]! n^z}{\prod_{1 \leq l \leq m(1+n)} (z+l)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[(n+1)m]! [(n+1)m]^z}{\prod_{0 \leq l \leq m(1+n)} (z+l)} \frac{z n^z}{[(n+1)m]^z},$$

et en appliquant à nouveau la formule de Gauss, il vient

$$\frac{f_m(z)}{f_m(0)} = \Gamma(z) z m^{-z} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-z} = \Gamma(z) z m^{-z},$$

et donc

$$\prod_{1 \leq j \leq m} \Gamma\left(\frac{z+j}{m}\right) = f_m(0) \Gamma(z+1) m^{-z}. \quad (4.3.10)$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} f_m(0) &= \prod_{1 \leq j \leq m} \Gamma\left(\frac{j}{m}\right) = \prod_{1 \leq j \leq m-1} \Gamma\left(\frac{j}{m}\right) \\ &= \prod_{1 \leq m-j' \leq m-1} \Gamma\left(\frac{m-j'}{m}\right) = \prod_{1 \leq j' \leq m-1} \Gamma\left(1 - \frac{j'}{m}\right), \end{aligned}$$

ce qui implique, comme $f_m(0) > 0$,

$$f_m(0) = \prod_{1 \leq j \leq m-1} \left\{ \Gamma\left(\frac{j}{m}\right) \Gamma\left(1 - \frac{j}{m}\right) \right\}^{1/2},$$

et en utilisant la formule des compléments (4.3.7), il vient

$$f_m(0) = \prod_{1 \leq j \leq m-1} \left\{ \frac{\pi}{\sin(\pi j/m)} \right\}^{1/2} = \pi^{\frac{m-1}{2}} \left(\prod_{1 \leq j \leq m-1} \sin(\pi j/m) \right)^{-1/2}. \quad (4.3.11)$$

Lemme 4.3.5. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\prod_{1 \leq j \leq m-1} \sin(\pi \frac{j}{m}) = \frac{m}{2^{m-1}}$.

Admettons provisoirement ce lemme. On obtient de (4.3.10) et (4.3.11),

$$\prod_{1 \leq j \leq m} \Gamma\left(\frac{z+j}{m}\right) = \Gamma(z+1)m^{-z}\pi^{\frac{m-1}{2}}2^{\frac{m-1}{2}}m^{-1/2} = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}m^{-z-\frac{1}{2}}z\Gamma(z),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \prod_{0 \leq j \leq m-1} \Gamma\left(\frac{z+j}{m}\right) &= (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}m^{-z-\frac{1}{2}}z\Gamma(z)\frac{\Gamma(\frac{z}{m})}{\Gamma(\frac{z+m}{m})} \\ &= (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}m^{-z-\frac{1}{2}}z\Gamma(z)\frac{\Gamma(\frac{z}{m})}{\frac{z}{m}\Gamma(\frac{z}{m})} = \Gamma(z)m^{\frac{1}{2}-z}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}, \end{aligned}$$

qui est le résultat cherché (4.3.8). Démontrons pour terminer le Lemme 4.3.5. On a

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \prod_{1 \leq j \leq m-1} \sin\left(\pi \frac{j}{m}\right) = \prod_{1 \leq j \leq m-1} \left(\frac{e^{i\pi j/m} - e^{-i\pi j/m}}{2i}\right) \\ &= (2i)^{-m+1} \underbrace{\left(\prod_{1 \leq j \leq m-1} e^{-i\pi j/m}\right)}_{=2^{1-m}i^{1-m}e^{-\frac{i\pi}{m}\frac{m(m-1)}{2}}} \left(\prod_{1 \leq j \leq m-1} (e^{2i\pi j/m} - 1)\right), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\sigma_m = 2^{1-m}i^{1-m}(-i)^{m-1} \prod_{1 \leq j \leq m-1} (\alpha_j - 1), \quad \text{avec } \alpha_j = e^{2i\pi j/m}.$$

Comme $\{e^{2i\pi j/m}\}_{0 \leq j \leq m-1}$ sont les m racines de l'unité, on a

$$X^m - 1 = (X - 1) \prod_{1 \leq j \leq m-1} (X - \alpha_j),$$

et par suite $m = mx|_{x=1}^{m-1} = \prod_{1 \leq j \leq m-1} (1 - \alpha_j)$, ce qui donne

$$\sigma_m = 2^{1-m}(-1)^{m-1}(-1)^{m-1}m = \frac{m}{2^{m-1}},$$

soit le résultat cherché. □

Proposition 4.3.6 (Fonction Beta). *On pose pour $a, b \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$,*

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt. \quad (4.3.12)$$

On a alors

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (4.3.13)$$

Démonstration. L'intégrale est absolument convergente car

$$|t^{a-1}(1-t)^{b-1}| = t^{\operatorname{Re} a-1}(1-t)^{\operatorname{Re} b-1} \quad \text{et } \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} b > 0.$$

Pour $x > 0$, on considère

$$\int_0^x t^{a-1}(x-t)^{b-1} dt \underset{t=xs}{=} x^{a+b-1} \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1} ds = x^{a+b-1} B(a, b),$$

et l'on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\int_0^x t^{a-1}(x-t)^{b-1} dt \right) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a+b-1} B(a, b) dx = \Gamma(a+b) B(a, b).$$

En posant pour $c \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} c > 0$, $\phi_c(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-t}t^{c-1}$, et en notant que ϕ_c appartient à $L^1(\mathbb{R})$ il vient, en considérant l'intégrale double de fonctions positives,

$$\begin{aligned} & \iint \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mathbf{1}_{[0,x]}(t) e^{-x} t^{\operatorname{Re} a-1} (x-t)^{\operatorname{Re} b-1} dt dx \\ &= \iint \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) e^{-t} t^{\operatorname{Re} a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) e^{-(x-t)} (x-t)^{\operatorname{Re} b-1} dt dx \\ &= \iint \phi_{\operatorname{Re} a}(t) \phi_{\operatorname{Re} b}(x-t) dt dx = \int (\phi_{\operatorname{Re} a} * \phi_{\operatorname{Re} b})(x) dx \\ &= \|\phi_{\operatorname{Re} a}\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\phi_{\operatorname{Re} b}\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty, \end{aligned}$$

de sorte que l'on obtient, en utilisant le théorème de Fubini,

$$\Gamma(a+b) B(a, b) = \iint \phi_a(t) \phi_b(x-t) dx dt = \iint \phi_a(t) \phi_b(y) dy dt = \Gamma(a) \Gamma(b),$$

ce qui est le résultat cherché. \square

Lemme 4.3.7 (Intégrales de Wallis). *Soit $q \in \mathbb{N}$. On a*

$$W_q = \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^q d\theta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{q+1}{2})}{q \Gamma(\frac{q}{2})}, \quad \text{i.e. for } p \in \mathbb{N}, \begin{cases} W_{2p} = \frac{\pi(2p)!}{(p!)^2 2^{2p+1}}, \\ W_{2p+1} = \frac{(p!)^2 2^{2p}}{(2p+1)!}. \end{cases} \quad (4.3.14)$$

Ce lemme est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 4.3.8. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > -1$. Alors*

$$\int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^z d\theta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{z+1}{2})}{2 \Gamma(\frac{z+2}{2})}.$$

Démonstration. On a avec $t = \sin^2 \theta$,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^z d\theta &= 2 \int_0^1 t^{z/2} (2 \sin \theta \cos \theta)^{-1} dt \\ &= \int_0^1 t^{\frac{z-1}{2}} (1-t)^{-1/2} dt = B\left(\frac{z+1}{2}, 1/2\right) = \frac{\Gamma(\frac{z+1}{2}) \Gamma(1/2)}{\Gamma(\frac{z+2}{2})}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est due à la formule (4.3.13). \square

Lemme 4.3.9 (caractérisation de la fonction Γ). *Soit $G :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ telle que $G(1) = 1$, et telle que G soit logarithmiquement convexe et vérifie*

$$G(x+1) = xG(x),$$

pour tout $x > 0$. Alors on a $G = \Gamma$.

Démonstration. Pour $x > 0, n \in \mathbb{N}^*$, on a avec $g = \ln G$,

$$g(x+1) = \ln x + g(x), \quad G(n) = (n-1)!$$

et

$$g(x+n) - g(x) = \sum_{0 \leq j < n} (g(x+j+1) - g(x+j)) = \sum_{0 \leq j < n} \ln(x+j),$$

de sorte que $g(x+n) - g(x) - g(n) = \ln x + \sum_{1 \leq j \leq n-1} \ln\left(\frac{x+j}{j}\right)$ et donc

$$g(x) + \ln x - x \ln n + \sum_{1 \leq j \leq n-1} \ln\left(\frac{x+j}{j}\right) = g(x+n) - g(n) - x \ln n. \quad (4.3.15)$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k > x$: on a $n-1 < n < x+n < k+n$ et de la convexité de g , il vient pour $n \geq 2$,

$$\frac{g(n) - g(n-1)}{1} \leq \frac{g(x+n) - g(n)}{x} \leq \frac{g(n+k) - g(n)}{k} = \frac{\sum_{0 \leq r < k} \ln(n+r)}{k},$$

de sorte que $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{g(x+n) - g(n) - x \ln n}{x} \leq \frac{\sum_{0 \leq r < k} \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)}{k},$

et donc

$$\lim_n (g(x+n) - g(n) - x \ln n) / x = 0,$$

qui implique grâce à (4.3.15),

$$g(x) = -\ln x + \lim_n \left(x \ln n + \sum_{1 \leq j \leq n-1} \ln\left(\frac{j}{x+j}\right) \right) = \ln \Gamma(x),$$

où la dernière égalité est une conséquence de la formule de Gauss (4.3.1). \square

Chapitre 5

La fonction Zeta de Riemann

5.1 Introduction

Définition 5.1.1. On pose $\mathfrak{h}_1 = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1\}$. La fonction ζ de Riemann est définie pour $s \in \mathfrak{h}_1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}. \quad (5.1.1)$$

Remarquons que cette définition a un sens car pour $s \in \mathfrak{h}_1$,

$$n^{-s} = e^{-s \operatorname{Log} n}, \quad |n^{-s}| = e^{-(\operatorname{Log} n) \operatorname{Re} s} = n^{-\operatorname{Re} s}, \quad \text{et donc} \quad \sum_{n \geq 1} |n^{-s}| < +\infty.$$

Rappelons que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$. En effet si $\alpha > 1$,

$$\sum_{2 \leq n \leq N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{2 \leq n \leq N} \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^N \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{[x^{1-\alpha}]_{x=1}^{x=N}}{1-\alpha} = \frac{1 - N^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq \frac{1}{\alpha - 1}. \quad (5.1.2)$$

Si $\alpha \leq 1$, le Lemme 3.1.1 implique que

$$\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n} \sim \operatorname{Log} N, \quad (N \rightarrow +\infty) \quad \text{et donc} \quad \sum_{1 \leq n} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty.$$

Proposition 5.1.2. La fonction ζ de Riemann est holomorphe sur \mathfrak{h}_1 .

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du Corollaire 1.2.3, car, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{C} \ni s \mapsto n^{-s}$ est entière et sur tout compact K de \mathfrak{h}_1 , la fonction continue $s \mapsto \operatorname{Re} s$ atteint son minimum et donc $\operatorname{Re} s \geq \alpha_K > 1$, de sorte que

$$\sum_{n \geq 1} \sup_{s \in K} |n^{-s}| \leq \sum_{n \geq 1} n^{-\alpha_K} < +\infty.$$

□

Un nombre entier $n \geq 2$ est toujours divisible par n et par 1 : ce sont ses diviseurs triviaux. Les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 n'ont pas de diviseurs non triviaux. En revanche, les nombres 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20 possèdent des diviseurs non triviaux (2 pour les nombres pairs, 3 pour 9 et 15).

Définition 5.1.3. Soit p un entier ≥ 2 ; on dit que p est un nombre premier s'il ne possède pas de diviseurs non triviaux.

On verra la liste des 1000 premiers nombres premiers et quelques rappels d'arithmétique élémentaire dans le paragraphe 11.1 de l'appendice.

Proposition 5.1.4. Soit n un entier ≥ 2 . Il existe $r, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ entiers ≥ 1 tels que

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}, \quad 2 \leq p_1 < \dots < p_r, \quad \text{premiers.}$$

Cette décomposition est unique, i.e. si $p_1 < \dots < p_r, q_1 < \dots < q_s$ sont des nombres premiers, $\{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq r}, \{\beta_k\}_{1 \leq k \leq s}$ des entiers ≥ 1 , l'égalité

$$p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} = q_1^{\beta_1} \dots q_s^{\beta_s}$$

implique $r = s$, et $\forall j \in \{1, \dots, r\}, p_j = q_j, \alpha_j = \beta_j$.

Démonstration. Cf. le paragraphe 11.1. □

Théorème 5.1.5 (Euclide, 300 av. J.C.). L'ensemble \mathbb{P} des nombres premiers est infini.

Démonstration. Si \mathbb{P} était fini, nous aurions

$$\mathbb{P} = \{p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \\ p_6 = 13, p_7 = 17, p_8 = 19, p_9 = 23, \dots, p_{N_0}\}. \quad (5.1.3)$$

Par conséquent, d'après la Proposition 5.1.4, le nombre $1 + p_1 \dots p_{N_0}$ devrait être divisible par un nombre premier p , nécessairement $> p_{N_0}$. Ceci constitue une contradiction. □

Nous verrons qu'il y a un lien étroit entre la répartition des nombres premiers parmi les entiers d'une part et le comportement de la fonction ζ de Riemann d'autre part. Le théorème suivant, établi par Euler en 1749 fournit un lien-clé entre la fonction ζ et les nombres premiers.

Théorème 5.1.6. Soit $s \in \mathfrak{h}_1 = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1\}$; alors si $\mathbb{P} = (p_j)_{j \geq 1}$ est la suite croissante des nombres premiers ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_{500} = 3571, \dots, p_{1000} = 7919, \dots$), on a

$$\zeta(s) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \prod_{1 \leq j \leq m} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_j^s}\right)}.$$

$$\text{On notera simplement pour } s \in \mathfrak{h}_1, \quad \zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1}. \quad (5.1.4)$$

Il existe une fonction λ holomorphe sur \mathfrak{h}_1 telle que $\forall s \in \mathfrak{h}_1, \zeta(s) = e^{\lambda(s)}$. En particulier la fonction ζ de Riemann est holomorphe sur \mathfrak{h}_1 et ne s'annule pas sur \mathfrak{h}_1 . La fonction λ est définie pour $s \in \mathfrak{h}_1$ par

$$\lambda(s) = - \sum_{j \geq 1} \operatorname{Log}(1 - p_j^{-s}). \quad (5.1.5)$$

Démonstration. La formule (1.3.3) donne pour $|z| < 1$,

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{l \geq 1} (-1)^{l+1} \frac{z^l}{l},$$

et par conséquent si $|z| \leq 1/2$

$$|\operatorname{Log}(1+z)| \leq |z| \sum_{l \geq 1} \frac{|z|^{l-1}}{l} \leq |z| \sum_{l \geq 1} |z|^{l-1} = \frac{|z|}{1-|z|} \leq 2|z|. \quad (5.1.6)$$

Notons également, pour $|z| \leq 1/2$,

$$|\operatorname{Log}(1+z) - z| \leq |z|^2 \sum_{l \geq 2} \frac{|z|^{l-2}}{l} \leq \frac{|z|^2}{1-|z|} \leq 2|z|^2 \quad (5.1.7)$$

Lemme 5.1.7. *Soit $\mathbb{P} = (p_j)_{j \geq 1}$ la suite croissante des nombres premiers. Pour tout $j \geq 1$, on a $p_j \geq j + 1$.*

Démonstration du lemme. Récurrence sur j : la propriété est vraie pour $j = 1$ car $p_1 = 2$, ainsi que pour $j = 2$ car $p_2 = 3$. Notons que les nombres premiers supérieurs ou égaux à 3 sont impairs. Supposons la propriété vérifiée pour un entier $j \geq 2$. On a $p_{j+1} \geq p_j + 2$ car $p_j + 1$ est pair et il vient

$$p_{j+1} \geq p_j + 2 \geq j + 3,$$

ce qui donne le résultat du lemme. \square

Pour $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 1$ et p_j un nombre premier, on a $|p_j^{-s}| = p_j^{-\operatorname{Re} s} \leq (j+1)^{-\operatorname{Re} s}$, ce qui implique (cf. (5.1.6)),

$$|\operatorname{Log}(1 - p_j^{-s})| \leq 2p_j^{-\operatorname{Re} s} \leq 2(j+1)^{-\operatorname{Re} s}.$$

Comme la fonction $s \mapsto p_j^{-s}$ est entière, le Corollaire 1.2.3 implique que la fonction λ définie sur \mathfrak{h}_1 par

$$\lambda(s) = - \sum_{j \geq 1} \operatorname{Log}(1 - p_j^{-s}), \quad (5.1.8)$$

est holomorphe. On obtient en particulier que la fonction e^λ est holomorphe sur \mathfrak{h}_1 et

$$e^{\lambda(s)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{-\sum_{1 \leq j \leq m} \operatorname{Log}(1 - p_j^{-s})} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \prod_{1 \leq j \leq m} e^{-\operatorname{Log}(1 - p_j^{-s})},$$

et comme $e^{\operatorname{Log}(1+z)} = 1+z$ pour $|z| < 1$ (cf. Théorème 1.3.1), il vient

$$e^{\lambda(s)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \prod_{1 \leq j \leq m} (1 - p_j^{-s})^{-1}.$$

De plus, pour un réel $\sigma \geq 1$, et m entier ≥ 1 , on a

$$\prod_{1 \leq j \leq m} (1 - p_j^{-\sigma})^{-1} = \prod_{1 \leq j \leq m} \left(\sum_{k \geq 0} p_j^{-k\sigma} \right),$$

et d'après le théorème de Fubini sur les séries à termes positifs, il vient

$$\prod_{1 \leq j \leq m} (1 - p_j^{-\sigma})^{-1} = \sum_{(k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m} p_1^{-k_1 \sigma} \dots p_m^{-k_m \sigma} = \sum_{\substack{n \geq 1, \exists (k_j)_{1 \leq j \leq m} \in \mathbb{N}^m \\ n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}}} n^{-\sigma}. \quad (5.1.9)$$

On peut remarquer que si n est un entier ≥ 1 qui ne s'écrit pas sous la forme $p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ avec $(k_j)_{1 \leq j \leq m} \in \mathbb{N}^m$, alors nécessairement $n \geq p_{m+1}$ (cf. Proposition 5.1.4). On obtient par suite que

$$\zeta(\sigma) - \prod_{1 \leq j \leq m} (1 - p_j^{-\sigma})^{-1} = \sum_{n \notin \{p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}\}_{p_j \in \mathbb{P}, k_j \in \mathbb{N}}} n^{-\sigma},$$

et donc

$$0 \leq \zeta(\sigma) - \prod_{1 \leq j \leq m} (1 - p_j^{-\sigma})^{-1} \leq \sum_{n, n \geq p_{m+1}} n^{-\sigma} \leq \sum_{n \geq p_{m+1}} \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^\sigma} = \int_{p_{m+1}-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\sigma},$$

ce qui donne, comme $p_{m+1} > p_m$, pour $\sigma > 1$,

$$0 \leq \zeta(\sigma) - \prod_{1 \leq j \leq m} (1 - p_j^{-\sigma})^{-1} \leq \frac{1}{(\sigma - 1)p_m^{\sigma-1}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

On obtient donc que pour tout réel $\sigma > 1$, $\zeta(\sigma) = e^{\lambda(\sigma)}$ et comme les fonctions ζ et λ sont holomorphes sur \mathfrak{h}_1 , le principe de prolongement analytique implique que ces deux fonctions coïncident sur \mathfrak{h}_1 . Le théorème 5.1.6 est démontré. \square

Nous avons vu plus haut que \mathbb{P} était un ensemble infini (Théorème 5.1.5). Nous pouvons donner davantage de précisions avec les résultats qui suivent.

Proposition 5.1.8. *Soit $\mathbb{P} = (p_j)_{j \geq 1}$ la suite des nombres premiers. Alors la suite*

$$\sum_{1 \leq j \leq m} \frac{1}{p_j} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty, \quad \text{i.e.} \quad \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = +\infty.$$

N.B. Bien entendu, cette propriété implique le Théorème 5.1.5 et montre qu'il y a "beaucoup" de nombres premiers, en tous cas davantage que de carrés d'entiers pour lesquels on a $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

Démonstration. D'après la formule (5.1.9), valide pour $\sigma = 1$, on a

$$\prod_{1 \leq j \leq m} (1 - p_j^{-1})^{-1} = \sum_{\substack{n \geq 1, \exists (k_j)_{1 \leq j \leq m} \in \mathbb{N}^m \\ n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}}} \frac{1}{n} \geq \sum_{1 \leq n \leq p_m} \frac{1}{n} = S_{p_m},$$

car tout nombre entier $n \in [1, p_m]$ s'écrit (de manière unique) $p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ avec $k_j \in \mathbb{N}$. En utilisant la minoration (3.1.1), il vient

$$\sum_{1 \leq j \leq m} -\ln(1 - p_j^{-1}) \geq \ln S_{p_m} \geq \ln(\ln p_m).$$

Par ailleurs, la majoration (5.1.7) implique que $|\ln(1 - p_j^{-1})| \leq 1/p_j + 2/p_j^2$ et par conséquent on a

$$\sum_{1 \leq j \leq m} \frac{1}{p_j} + 2 \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{1}{p_j^2} \geq \ln S_{p_m} \geq \ln \ln p_m$$

et donc

$$\sum_{1 \leq j \leq m} \frac{1}{p_j} + 2\zeta(2) \geq \ln \ln p_m, \quad (5.1.10)$$

ce qui donne le résultat cherché car $\lim_m p_m = +\infty$. \square

5.2 Nombres de Bernoulli et valeurs de $\zeta(2n)$

Considérons pour $z \in \mathbb{C}, |z| < \pi$, $n \geq 1$ entier, l'identité

$$\frac{2z}{n^2\pi^2 - z^2} = \frac{2z}{n^2\pi^2} \frac{1}{1 - (z/n\pi)^2} = \frac{2z}{n^2\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}},$$

qui implique en utilisant (4.2.1) pour $z \in \mathbb{C}^*, |z| < \pi$,

$$\begin{aligned} -\cotanz + \frac{1}{z} &= \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{n^2\pi^2 - z^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{n^2\pi^2} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}} \right) \\ &= 2 \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{z^{2k+1}}{n^{2k+2}\pi^{2k+2}} \right) = 2 \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{l \geq 1} \frac{z^{2l-1}}{n^{2l}\pi^{2l}} \right). \end{aligned}$$

On remarque que la somme double est absolument convergente sur $|z| \leq \pi - \epsilon_0$, $\epsilon_0 > 0$, car

$$\left| \frac{z^{2l-1}}{n^{2l}\pi^{2l}} \right| \leq n^{-2l} \frac{(\pi - \epsilon_0)^{2l-1}}{\pi^{2l}} = \frac{1}{\pi n^{2l}} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\pi} \right)^{2l-1},$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ 1 \leq l \leq L}} n^{-2l} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\pi} \right)^{2l-1} &\leq \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ 1 \leq l \leq L}} n^{-2} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\pi} \right)^{2l-1} \\ &\leq \sum_{n \geq 1} n^{-2} \frac{1}{1 - (1 - \epsilon_0/\pi)} = \frac{\pi\zeta(2)}{\epsilon_0} < +\infty. \end{aligned}$$

On a donc obtenu que pour $0 < |z| < \pi$,

$$\frac{1}{z} - \cotanz = 2 \sum_{l \geq 1} \frac{z^{2l-1}}{\pi^{2l}} \zeta(2l). \quad (5.2.1)$$

Proposition 5.2.1. *Pour tout entier $k \geq 1$, on a*

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{\pi^{2k} 2^{2k-1}}{(2k)!} b_{2k}, \quad (5.2.2)$$

où les (b_{2k}) sont les nombres de Bernoulli (cf. Proposition 3.2.1). On a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad b_{2k}(-1)^{k-1} > 0, \quad (5.2.3)$$

$$\text{et } \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \dots, \quad \zeta(20) = \frac{\pi^{20} 174611}{1531329465290625}, \dots$$

Démonstration. La formule (3.2.10) implique que pour $|z| < 2\pi$,

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{b_{2k}}{(2k)!} z^{2k},$$

et comme

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{2} \frac{z(-e^z + 1 + 1 + e^z)}{e^z - 1} = -\frac{z}{2} + \frac{z}{2} \left(\frac{e^z + 1}{e^z - 1} \right),$$

il vient pour $|z| < \pi$,

$$\frac{2iz}{e^{2iz} - 1} = -iz + iz \left(\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} \right) = -iz + z \cotanz,$$

et donc

$$z \cotanz - iz = 1 - iz + \sum_{k \geq 1} \frac{b_{2k} 2^{2k} (-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Par conséquent, pour $0 < |z| < \pi$,

$$\frac{1}{z} - \cotanz = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} - \sum_{k \geq 1} \frac{b_{2k} 2^{2k} (-1)^k}{(2k)!} z^{2k-1} = \sum_{k \geq 1} \frac{b_{2k} 2^{2k} (-1)^{k+1}}{(2k)!} z^{2k-1},$$

et de (5.2.1), il vient

$$\sum_{k \geq 1} \frac{b_{2k} 2^{2k} (-1)^{k+1}}{(2k)!} z^{2k-1} = 2 \sum_{k \geq 1} \frac{z^{2k-1}}{\pi^{2k}} \zeta(2k),$$

ce qui donne le résultat cherché

$$\zeta(2k) = \frac{\pi^{2k}}{2} \frac{b_{2k} 2^{2k} (-1)^{k+1}}{(2k)!} = \frac{\pi^{2k} 2^{2k-1} b_{2k} (-1)^{k+1}}{(2k)!}.$$

En outre comme, pour $k \geq 1$, $\zeta(2k) > 0$, il vient $b_{2k}(-1)^{k+1} > 0$. En particulier, on obtient en utilisant les valeurs de b_{2k} données par la Remarque 3.2.2,

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \frac{\pi^2 2 b_2}{2!} = \frac{\pi^2}{6}, \\ \zeta(4) &= \frac{\pi^4 2^3 b_4 (-1)}{4!} = \frac{\pi^4 2^3}{30 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{\pi^4}{90}, \\ \zeta(6) &= \frac{\pi^6 2^5 b_6}{6!} = \pi^6 \frac{2^5}{42 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{\pi^6}{21 \times 5 \times 3^2} = \frac{\pi^6}{945}, \\ \zeta(8) &= \frac{\pi^8 2^7 b_8 (-1)}{8!} = \pi^8 \frac{2^7}{30 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} \\ &= \frac{\pi^8}{30 \times 7 \times 5 \times 3^2} = \frac{\pi^8}{9450}. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

□

5.3 Estimation du reste d'Euler-Maclaurin

Revenons à la formule d'Euler-Maclaurin donnée par le Théorème 3.3.1 et en particulier au reste

$$R_m(x, n) = \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^{n+1} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) f^{(2m+1)}(x+\theta) d\theta,$$

où \tilde{B}_{2m+1} est la fonction 1-périodique coïncidant avec le polynôme de Bernoulli B_{2m+1} sur l'intervalle $[0, 1[$. On a pour $k \geq 1$ entier

$$1 \leq \zeta(2k) = \frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!} \frac{|b_{2k}|}{2} \leq \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

et par conséquent, comme $\pi < 2\sqrt{3}$,

$$2 \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \leq |b_{2k}| \leq \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}} 2 \frac{\pi^2}{6} \leq 4 \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}}.$$

Comme $b_0 = 1, b_1 = -1/2, k \geq 1 \implies b_{2k+1} = 0$, on obtient

$$|b_k| \leq 4 \frac{k!}{(2\pi)^k}. \quad (5.3.1)$$

De la Proposition 3.2.1, il vient $B_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k b_k x^{n-k}$ et par conséquent pour $x \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} |B_n(x)| &\leq \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k \frac{k!}{(2\pi)^k} 4 = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{4}{(2\pi)^k} \\ &= \frac{4(n!)}{(2\pi)^n} \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(2\pi)^{n-k}}{(n-k)!} \leq 4e^{2\pi} \frac{n!}{(2\pi)^n}. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de (5.3.2) et du Théorème 3.3.1.

Théorème 5.3.1. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$ et soit $f \in C^{2m+1}([x_0, +\infty[)$. Pour $x \geq x_0, n \in \mathbb{N}$, on a avec $S_{n,f}(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} f(x+k)$,*

$$\begin{aligned} S_{n,f}(x) &= \int_x^{x+n+1} f(t) dt + \frac{1}{2} (f(x) - f(x+n+1)) \\ &\quad + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)!} \left(f^{(2l-1)}(x+n+1) - f^{(2l-1)}(x) \right) \\ &\quad + R_m(x, n), \end{aligned}$$

$$\text{avec } |R_m(x, n)| \leq \frac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^{2m+1}} \int_x^{x+n+1} |f^{(2m+1)}(t)| dt.$$

En outre on a le résultat suivant.

Théorème 5.3.2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f \in C^\infty([x_0, +\infty[)$ telle qu'il existe $r_0 \geq 0$ tel que $\forall r \geq r_0$, $f^{(2r+1)} \in L^1([x_0, +\infty[)$. Alors, pour $x \geq x_0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \geq r_0$, on a avec $S_{n,f}(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} f(x+k)$,

$$\begin{aligned} S_{n,f}(x) &= \int_x^{x+n+1} f(t)dt + \frac{1}{2}(f(x) - f(x+n+1)) \\ &\quad + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)!} \left(f^{(2l-1)}(x+n+1) - f^{(2l-1)}(x) \right) \\ &\quad + R_m(x, n), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} R_m(x, n) &= \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) f^{(2m+1)}(x+\theta) d\theta \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{(2m+1)!} \int_{n+1}^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) f^{(2m+1)}(x+\theta) d\theta}_{\tilde{R}_m(x, n)}, \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

où \tilde{B}_{2m+1} est la fonction 1-périodique coïncidant avec le polynôme de Bernoulli B_{2m+1} sur l'intervalle $[0, 1[$. On a

$$|\tilde{R}_m(x, n)| \leq \frac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^{2m+1}} \int_{x+n+1}^{+\infty} |f^{(2m+1)}(t)| dt. \quad (5.3.4)$$

Démonstration. Du Théorème 3.3.1, il vient pour tout $m \in \mathbb{N}$, $x \geq x_0$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_{n,f}(x) &= \int_x^{x+n+1} f(t)dt + \frac{1}{2}(f(x) - f(x+n+1)) \\ &\quad + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)!} \left(f^{(2l-1)}(x+n+1) - f^{(2l-1)}(x) \right) \\ &\quad + R_m(x, n), \end{aligned}$$

avec

$$R_m(x, n) = \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^{n+1} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) f^{(2m+1)}(x+\theta) d\theta,$$

où \tilde{B}_{2m+1} est la fonction 1-périodique coïncidant avec le polynôme de Bernoulli B_{2m+1} sur l'intervalle $[0, 1[$. Si $m \geq r_0$, la fonction $f^{(2m+1)}$ appartient à $L^1([x_0, +\infty))$ et par conséquent

$$\begin{aligned} R_m(x, n) &= \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) f^{(2m+1)}(x+\theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{(2m+1)!} \int_{n+1}^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) f^{(2m+1)}(x+\theta) d\theta. \end{aligned}$$

De la majoration (5.3.2), il vient alors

$$|\tilde{R}_m(x, n)| \leq \frac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^{2m+1}} \int_{x+n+1}^{+\infty} |f^{(2m+1)}(t)| dt,$$

ce qui est le résultat cherché. \square

Ce qui précède permet de retrouver et de préciser le résultat du Lemme 3.1.2 sur la série harmonique. En effet la fonction $[1, +\infty) \ni x \mapsto f(x) = 1/x$ est C^∞ et

$$f^{(2m+1)}(x) = -x^{-(2m+2)}(2m+1)! \implies f^{(2m+1)} \in L^1([1, +\infty)) \text{ pour } m \geq 0.$$

On a pour $n \geq 2, x = 1$,

$$S_{n-2,f}(x) = f(x) + f(x+1) + \cdots + f(x+n-2) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1},$$

et en appliquant le Théorème 5.3.2, il vient

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} &= \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)!} (2l-1)! \left[1 - \frac{1}{n^{2l}}\right] \\ &\quad - \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (2m+1)! (1+\theta)^{-(2m+2)} d\theta \\ &\quad + \frac{1}{(2m+1)!} \int_{n-1}^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (2m+1)! (1+\theta)^{-(2m+2)} d\theta, \end{aligned}$$

soit pour $n \geq 2, m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq l \leq n-1} \frac{1}{l} &= \ln n - \frac{1}{2n} - \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{2l} \frac{1}{n^{2l}} \\ &\quad + \frac{1}{(2m+1)!} \int_{n-1}^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (2m+1)! (1+\theta)^{-(2m+2)} d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2} + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)!} (2l-1)! \\ &\quad - \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (2m+1)! (1+\theta)^{-(2m+2)} d\theta. \end{aligned}$$

En posant

$$\tilde{\gamma}_m = \frac{1}{2} + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{2l} - \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (2m+1)! (1+\theta)^{-(2m+2)} d\theta,$$

on remarque que cette quantité ne dépend que de m et que

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq l \leq n-1} \frac{1}{l} - \ln n &= -\frac{1}{2n} - \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{2l} \frac{1}{n^{2l}} \\ &\quad + \int_{n-1}^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (1+\theta)^{-(2m+2)} d\theta \\ &\quad + \tilde{\gamma}_m. \end{aligned}$$

En prenant la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans l'expression ci-dessus, on obtient en utilisant le Lemme 3.1.1 que $\gamma = \tilde{\gamma}_m$, ce qui implique

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq l \leq n-1} \frac{1}{l} &= \ln n + \gamma - \frac{1}{2n} - \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{2l} \frac{1}{n^{2l}} \\ &\quad + \frac{1}{(2m+1)!} \int_{n-1}^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (2m+1)! (1+\theta)^{-(2m+2)} d\theta \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq l \leq n} \frac{1}{l} &= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{2l} \frac{1}{n^{2l}} \\ &\quad + \int_{n-1}^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (1+\theta)^{-(2m+2)} d\theta. \end{aligned}$$

On a également d'après (5.3.4)

$$\begin{aligned} \left| \int_{n-1}^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (1+\theta)^{-(2m+2)} d\theta \right| &\leq 4e^{2\pi} \frac{(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+1}} \int_{n-1}^{+\infty} (1+\theta)^{-(2m+2)} d\theta \\ &= \frac{4e^{2\pi}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \frac{1}{n^{2m+1}}, \end{aligned}$$

donnant en particulier le résultat suivant.

Lemme 5.3.3. *Pour $n \geq 2, m \geq 1$ entiers, on a*

$$\left| \sum_{1 \leq l \leq n} \frac{1}{l} - \left\{ \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{2l} \frac{1}{n^{2l}} \right\} \right| \leq \frac{4e^{2\pi}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \frac{1}{n^{2m+1}},$$

où γ est la constante d'Euler, définie dans le Lemme 3.1.1.

Remarque 5.3.4. Pour $m = 2$, comme $b_2 = 1/6, b_4 = -1/30$, le lemme précédent fournit pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{1 \leq l \leq n} \frac{1}{l} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + \frac{4e^{2\pi}4!}{(2\pi)^5} \frac{\theta_n}{n^5}, \quad |\theta_n| \leq 1,$$

une formule plus précise que celle du Lemme 3.1.2, que le lemme précédent permet d'améliorer encore pour obtenir une estimation avec un terme d'erreur majoré par $c_m n^{-2m-1}$ pour m arbitrairement grand.

Chapitre 6

Le théorème des nombres premiers

6.1 Prolongement de la fonction ζ

Nous verrons dans ce paragraphe que la fonction ζ définie par (5.1.1) comme fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathfrak{h}_1 = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1\}$ se prolonge en fait en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} avec un pôle unique, simple, de résidu 1 en $s = 1$.

Pour $s \in \mathfrak{h}_1, n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x) = x^{-s}$, et

$$\sum_{1 \leq k \leq n+1} \frac{1}{k^s} = \sum_{0 \leq k \leq n} f(1+k). \quad (6.1.1)$$

La fonction f est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et l'on peut appliquer le Théorème 3.3.1 à f avec $x_0 = 1$. Remarquons que pour $l \geq 1, x > 0$,

$$f^{(2l-1)}(x) = -x^{-s-2l+1} \prod_{0 \leq j \leq 2l-2} (s+j). \quad (6.1.2)$$

En effet, la formule est vérifiée pour $l = 1$ car $f'(x) = -sx^{-s-1}$ et en la supposant vraie pour un entier $l \geq 1$, il vient

$$\begin{aligned} f^{(2l+1)}(x) &= (-1)(-s-2l+1)(-s-2l)x^{-s-2l-1} \prod_{0 \leq j \leq 2l-2} (s+j) \\ &= (-1)(s+2l-1)(s+2l)x^{-s-2l-1} \prod_{0 \leq j \leq 2l-2} (s+j) \\ &= -x^{-s-2l-1} \prod_{0 \leq j \leq 2l} (s+j). \end{aligned}$$

On obtient que pour $x \geq 1, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} f(1+k) &= \int_1^{n+2} t^{-s} dt + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{(n+2)^s} \right) \\ &\quad - \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)!} \left\{ \prod_{0 \leq j \leq 2l-2} (s+j) \right\} ((n+2)^{-s-2l+1} - 1) \\ &\quad - \frac{1}{(2m+1)!} \int_1^{n+2} \tilde{B}_{2m+1}(t-1) t^{-s-2m-1} dt \prod_{0 \leq j \leq 2m} (s+j). \end{aligned}$$

En prenant la limite des deux membres lorsque $n \rightarrow +\infty$, il vient pour $s \in \mathbf{h}_1$,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)!} \prod_{0 \leq j \leq 2l-2} (s+j) - \frac{1}{(2m+1)!} \int_1^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(t) t^{-s-2m-1} dt \prod_{0 \leq j \leq 2m} (s+j).$$

Remarquons que, pour $m \in \mathbb{N}$, la fonction G_m , a priori définie sur \mathbf{h}_1 par

$$G_m(s) = \int_1^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(t) t^{-s-2m-1} dt,$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{h}_{-2m} = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > -2m\}$. En effet,

(1) la fonction $[1, +\infty[\ni t \mapsto \tilde{B}_{2m+1}(t) t^{-s-2m-1}$ appartient à $L^1([1, +\infty[)$ si

$$-\operatorname{Re} s - 2m - 1 < -1, \text{ i.e. si } \operatorname{Re} s > -2m,$$

(2) la fonction $\mathbf{h}_{-2m} \ni s \mapsto \tilde{B}_{2m+1}(t) t^{-s-2m-1}$ est holomorphe pour tout $t \geq 1$,

(3) pour $t \geq 1, \operatorname{Re} s \geq -2m + \alpha_0, \alpha_0 > 0$, avec $\beta = \sup_{t \in [0,1]} |B_{2m+1}(t)|$,

$$\begin{aligned} |\tilde{B}_{2m+1}(t) t^{-s-2m-1}| &\leq \beta e^{-(\operatorname{Re} s + 2m + 1) \ln t} \\ &\leq \beta e^{-(\alpha_0 + 1) \ln t} = \beta t^{-(\alpha_0 + 1)} \in L^1([1, +\infty[). \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $\mathbf{h}_1 \ni s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur \mathbf{h}_{-2m} pour tout $m \in \mathbb{N}$; ce prolongement est unique à cause du principe de prolongement analytique (cf. le Corollaire 1.2.5) et il vient que la fonction $s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ est une fonction entière.

Théorème 6.1.1. Soit $m \in \mathbb{N}^*, s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1$. On a

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)!} \prod_{0 \leq j \leq 2l-2} (s+j) - \frac{1}{(2m+1)!} \int_1^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(t) t^{-s-2m-1} dt \prod_{0 \leq j \leq 2m} (s+j). \quad (6.1.3)$$

La fonction $s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ est une fonction entière. L'expression ci-dessus donne la valeur de cette fonction pour $\operatorname{Re} s + 2m > 0$. On a

$$\zeta(0) = -1/2, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \zeta(-2m) = 0, \quad \zeta(1-2m) = -\frac{b_{2m}}{2m}. \quad (6.1.4)$$

Remarque 6.1.2. Les zéros de la fonction ζ en $-2\mathbb{N}^*$ sont appelés *zéros triviaux* de la fonction ζ .

N.B. On a en particulier $\zeta(-1) = -1/12, \zeta(-3) = 1/120$. Notons que pour $m = 0$, il vient

$$\text{pour } \operatorname{Re} s > 0, \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s \int_1^{+\infty} \left(t - E(t) - \frac{1}{2}\right) t^{-s-1} dt. \quad (6.1.5)$$

Démonstration. Il reste à démontrer (6.1.4). De la formule (déjà démontrée) (6.1.3), il vient pour $m = 1$ (fonctions holomorphes sur $\operatorname{Re} s > -2$),

$$\zeta(0) = -1 + \frac{1}{2} = -1/2.$$

De plus, pour $m + 1 \geq 2$ (fonctions holomorphes sur $\operatorname{Re} s > -2m - 2$), on trouve

$$\begin{aligned} \zeta(-2m) &= -\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2} + \sum_{1 \leq l \leq m+1} \frac{b_{2l}}{(2l)!} \prod_{0 \leq j \leq 2l-2} (j-2m) \\ &\quad - \frac{1}{(2m+3)!} \int_1^{+\infty} \tilde{B}_{2m+3}(t) t^{-3} dt \prod_{0 \leq j \leq 2m+2} (j-2m) \\ &= -\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2} + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)!} \prod_{0 \leq j \leq 2l-2} (j-2m). \end{aligned}$$

On remarque que pour $1 \leq l \leq m$,

$$\begin{aligned} \prod_{0 \leq j \leq 2l-2} (j-2m) &= (-1)^{2l-1} \prod_{0 \leq j \leq 2l-2} (2m-j) = (-1)^{2l-1} (2m)(2m-1) \dots (2m-2l+2) \\ &= -\frac{1}{2m+1} \frac{(2m+1)!}{(2m-2l+1)!} = -\frac{1}{2m+1} C_{2m+1}^{2l} (2l)!, \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \zeta(-2m) &= -\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2} - \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{2m+1} C_{2m+1}^{2l} \\ &= -\frac{1}{2m+1} \left(1 + \sum_{1 \leq l \leq m} b_{2l} C_{2m+1}^{2l} - \frac{2m+1}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

Or d'après (3.2.5), on a

$$B_{2m+1}(1) = 1 - \frac{2m+1}{2} + \sum_{1 \leq l \leq m} C_{2m+1}^{2l} b_{2l}$$

et donc (pour $m \in \mathbb{N}^*$), $\zeta(-2m) = -\frac{B_{2m+1}(1)}{2m+1}$. De plus, si $m \in \mathbb{N}^*$, de (3.2.9), (3.2.6), il vient

$$B_{2m+1}(1) = B_{2m+1}(0) = b_{2m+1} = 0 \implies \zeta(-2m) = 0.$$

Calculons $\zeta(1-2m)$ pour $m \in \mathbb{N}^*$: on peut utiliser (6.1.3) pour m . Il vient

$$\begin{aligned} \zeta(1-2m) &= -\frac{1}{2m} + \frac{1}{2} + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)!} \prod_{0 \leq j \leq 2l-2} (j+1-2m) \\ &\quad - \frac{1}{(2m+1)!} \int_1^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(t) t^{-2} dt \prod_{0 \leq j \leq 2m} (j+1-2m) \\ &= -\frac{1}{2m} + \frac{1}{2} - \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)!} \prod_{0 \leq j \leq 2l-2} (2m-j-1), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\zeta(1-2m) &= -\frac{1}{2m} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)!} \frac{(2m)!}{(2m-2l)!} \\ &= -\frac{1}{2m} \left(1 + \sum_{1 \leq l \leq m} b_{2l} C_{2m}^{2l} - m \right).\end{aligned}$$

Or il vient de (3.2.5), (3.2.9), pour $m \geq 1$,

$$B_{2m}(1) = 1 - m + \sum_{l \geq 1} C_{2m}^{2l} b_{2l}, \quad B_{2m}(1) = B_{2m}(0) = b_{2m},$$

et par conséquent on obtient le résultat cherché $\zeta(1-2m) = -\frac{b_{2m}}{2m}$. \square

6.2 Le théorème des nombres premiers

On a vu dans le Théorème 5.1.6 que ζ ne s'annulait pas sur le demi-plan ouvert $\operatorname{Re} s > 1$, un résultat découlant facilement de l'expression de ζ comme produit infini. Le théorème suivant est beaucoup plus subtil et affirme que la fonction ζ ne s'annule pas sur le demi-plan fermé $\operatorname{Re} s \geq 1$.

Théorème 6.2.1. *Soit $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s \geq 1$, $s \neq 1$. Alors $\zeta(s) \neq 0$.*

Démonstration. Rappelons (cf. Théorème 5.1.6) que la fonction λ , définie pour $s \in \mathfrak{h}_1 = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1\}$ par

$$\lambda(s) = - \sum_{j \geq 1} \operatorname{Log}(1 - p_j^{-s}), \quad (6.2.1)$$

est holomorphe sur \mathfrak{h}_1 ($\mathbb{P} = (p_j)_{j \geq 1}$ est la suite des nombres premiers, $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$). Soit $s \in \mathfrak{h}_1$, $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$, $\operatorname{Im} s = \tau$. On a

$$\lambda(\sigma + i\tau) = - \sum_{j \geq 1} \operatorname{Log}(1 - p_j^{-\sigma - i\tau}) = \sum_{j \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k p_j^{(\sigma + i\tau)k}},$$

et donc

$$\operatorname{Re}(\lambda(\sigma + i\tau)) = \sum_{j \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k p_j^{\sigma k}} \cos(k\tau \ln p_j). \quad (6.2.2)$$

On peut remarquer que pour $\phi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}3 + 4 \cos \phi + \cos(2\phi) &= 3 + 4 \cos \phi + 2 \cos^2 \phi - 1 = 2 \cos^2 \phi + 4 \cos \phi + 2 \\ &= 2(\cos \phi + 1)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

et par conséquent

$$0 \leq \sum_{j \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k p_j^{\sigma k}} \left(3 + 4 \cos(k\tau \ln p_j) + \cos(2k\tau \ln p_j) \right),$$

i.e.

$$0 \leq 3\lambda(\sigma) + 4\operatorname{Re}(\lambda(\sigma + i\tau)) + \operatorname{Re}(\lambda(\sigma + 2i\tau)).$$

Comme $\sigma > 1$, on a $\zeta(s) = e^{\lambda(s)}$ et donc $|\zeta(s)| = e^{\operatorname{Re}\lambda(s)}$. Il vient par conséquent pour $\operatorname{Re} s > 1$,

$$|\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + i\tau)|^4 |\zeta(\sigma + 2i\tau)| \geq 1. \quad (6.2.3)$$

Comme nous avons déjà démontré que ζ ne s'annulait pas sur $\operatorname{Re} s > 1$, il nous suffit d'examiner $\zeta(1 + i\tau)$ pour $\tau \in \mathbb{R}^*$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\tau_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $\zeta(1 + i\tau_0) = 0$; comme la fonction ζ est holomorphe au voisinage de $1 + i\tau_0$, il existe $C_0 \geq 0, \epsilon_0 > 0$ tels que

$$|\zeta(1 + \epsilon + i\tau_0)| \leq C_0 \epsilon, \quad \text{pour } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Examinons alors l'inégalité (6.2.3) pour $\sigma = 1 + \epsilon, 0 < \epsilon < \epsilon_0, \tau = \tau_0$: on a

$$\begin{aligned} 1 &\leq |\zeta(1 + \epsilon)|^3 |\zeta(1 + \epsilon + i\tau_0)|^4 |\zeta(1 + \epsilon + 2i\tau_0)| \\ &\leq \left| \zeta(1 + \epsilon) - \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \right|^3 C_0^4 \epsilon^4 |\zeta(1 + \epsilon + 2i\tau_0)| \\ &= \frac{1}{\epsilon^3} \left| 1 + \epsilon \left(\zeta(1 + \epsilon) - \frac{1}{\epsilon} \right) \right|^3 C_0^4 \epsilon^4 |\zeta(1 + \epsilon + 2i\tau_0)|. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Or on a vu dans le Théorème 6.1.1 que la fonction $s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ est entière, ce qui implique $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \left(\zeta(1 + \epsilon) - \frac{1}{\epsilon} \right) = 0$ et par conséquent il vient de (6.2.4),

$$1 \leq \underbrace{\left| 1 + \epsilon \left(\zeta(1 + \epsilon) - \frac{1}{\epsilon} \right) \right|^3}_{\xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0+]{\rightarrow 1}} C_0^4 \epsilon \underbrace{|\zeta(1 + \epsilon + 2i\tau_0)|}_{\xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0+]{\rightarrow \zeta(1+2i\tau_0)}},$$

de sorte que le membre de droite tend vers 0 lorsque $\epsilon \rightarrow 0_+$, ce qui est incompatible avec la minoration par 1 dans le membre de gauche. Par suite la fonction ζ ne peut s'annuler en $1 + i\tau, \tau \in \mathbb{R}^*$ et le théorème est démontré. \square

Lemme 6.2.2. On pose pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\Theta(x) = \sum_{1 \leq j, p_j \leq x} \ln p_j, \quad \text{noté } \sum_{p \leq x} \ln p. \quad (6.2.5)$$

Il existe $C \geq 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \Theta(x) \leq Cx$.

Démonstration. On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$2^{2n} = (1 + 1)^{2n} = \sum_{0 \leq k \leq 2n} C_{2n}^k \geq C_{2n}^n.$$

Comme $(1 + X)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k X^k$, tous les C_n^k sont des entiers naturels. En particulier, on a $(2n)! = C_{2n}^n (n!)^2$ et si p est un nombre premier $\in]n, 2n]$, on a

$$p | (2n)! \quad \text{ce qui implique } p | C_{2n}^n,$$

car p ne divise pas $(n!)^2$, sinon il diviserait l'un des facteurs de $(n!)^2$ qui sont tous $\leq n$. Par suite

$$\left(\prod_{n < p \leq 2n} p\right) | C_{2n}^m \quad \text{ce qui implique} \quad 2^{2n} \geq C_{2n}^m \geq \left(\prod_{n < p \leq 2n} p\right) = e^{\Theta(2n) - \Theta(n)},$$

et

$$\Theta(2n) - \Theta(n) \leq 2n \ln 2.$$

Par suite, si $2 \leq 2n \leq x < 2n + 2$, on a

$$\Theta(x) - \Theta(x/2) = \sum_{\frac{x}{2} < p \leq x} \ln p = \sum_{n < p \leq 2n} \ln p + \sum_{2n < p \leq x} \ln p - \sum_{n < p \leq \frac{x}{2}: \emptyset} \ln p,$$

ce qui donne

$$\Theta(x) - \Theta(x/2) \leq 2n \ln 2 + (x - 2n) \ln x \leq x \ln 2 + 2 \ln x = x \left(\ln 2 + \frac{2 \ln x}{x} \right),$$

qui implique

$$\forall x \geq 2, \quad \Theta(x) - \Theta(x/2) \leq C_0 x, \quad C_0 = \ln 2 + \sup_{x \geq 2} \frac{2 \ln x}{x} < +\infty, \quad (6.2.6)$$

car $[2, +\infty[\ni x \mapsto (\ln x)/x$ est continue et tend vers 0 en $+\infty$. Par suite pour $m \in \mathbb{N}^*$, $2^m \leq x < 2^{m+1}$ on a $2 \leq x 2^{1-m} \leq 4$ et

$$\begin{aligned} \Theta\left(\frac{x}{2^{m-1}}\right) - \Theta\left(\frac{x}{2^m}\right) &\leq C_0 \frac{x}{2^{m-1}} \\ \Theta\left(\frac{x}{2^{m-2}}\right) - \Theta\left(\frac{x}{2^{m-1}}\right) &\leq C_0 \frac{x}{2^{m-2}} \\ &\dots\dots\dots \\ \Theta\left(\frac{x}{2}\right) - \Theta\left(\frac{x}{2^2}\right) &\leq C_0 \frac{x}{2} \\ \Theta\left(\frac{x}{1}\right) - \Theta\left(\frac{x}{2}\right) &\leq C_0 \frac{x}{1}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\Theta(x) - \Theta\left(\frac{x}{2^m}\right) \leq C_0 x \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}\right) \leq 2C_0 x,$$

et $\Theta(x) \leq \Theta(2) + 2C_0 x = \ln 2 + 2C_0 x$, ce qui donne le résultat du lemme. \square

Lemme 6.2.3. On pose pour $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\Phi(s) = \sum_{j \geq 1} \frac{\ln p_j}{p_j^s} \quad \text{noté} \quad \sum_p \frac{\ln p}{p^s}. \quad (6.2.7)$$

La fonction Φ est holomorphe sur $\operatorname{Re} s > 1$ et la fonction $s \mapsto \Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ est holomorphe au voisinage de $\{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s \geq 1\}$.

Démonstration. Pour $\sigma > 0$, la fonction $[e^{1/\sigma}, +\infty[\ni x \mapsto \rho_\sigma(x) = x^\sigma / (\ln x)$ est croissante car

$$\rho'_\sigma(x) = \sigma x^{\sigma-1} (\ln x)^{-1} - x^{\sigma-1} (\ln x)^{-2} = x^{\sigma-1} (\ln x)^{-2} (\sigma \ln x - 1) \geq 0.$$

Il vient pour $\operatorname{Re} s > 1, j+1 \geq e^{1/\operatorname{Re} s}$, comme d'après le Lemme 5.1.7, $p_j \geq j+1$,

$$\frac{p_j^{\operatorname{Re} s}}{\ln p_j} \geq \frac{(j+1)^{\operatorname{Re} s}}{\ln(j+1)},$$

et donc

$$\left| \frac{\ln p_j}{p_j^s} \right| = \frac{\ln p_j}{p_j^{\operatorname{Re} s}} \leq \frac{\ln(j+1)}{(j+1)^{\operatorname{Re} s}},$$

qui est le terme général d'une série convergente, impliquant que Φ est holomorphe sur $\operatorname{Re} s > 1$. Pour $\operatorname{Re} s > 1$, on a grâce à (5.1.5)

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\lambda'(s) = \sum_p \frac{(-1)}{1-p^{-s}} \frac{d}{ds} (e^{-s \ln p}) = \sum_p \frac{\ln p}{p^s - 1},$$

et donc, comme $\frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^s(p^s-1)} = \frac{1+p^s-1}{p^s(p^s-1)} = \frac{1}{p^s-1}$, il vient

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \underbrace{\sum_p \frac{\ln p}{p^s}}_{\Phi(s)} + \underbrace{\sum_p \frac{\ln p}{p^s(p^s-1)}}_{\text{holomorphe sur } \operatorname{Re} s > 1/2}. \quad (6.2.8)$$

Nous avons vu par ailleurs (cf. Théorème 6.1.1) que

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \omega(s), \quad \omega \text{ fonction entière.}$$

Il vient par conséquent, pour $s \neq 1$,

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + \omega'(s),$$

et donc sur l'ouvert $\{s \neq 1, \zeta(s) \neq 0\}$,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{(s-1)^{-2} - \omega'(s)}{(s-1)^{-1} + \omega(s)} = \frac{1}{s-1} \frac{1 - (s-1)^2 \omega'(s)}{1 + (s-1) \omega(s)},$$

et comme la fonction ζ ne s'annule pas au voisinage de 1, on obtient donc que la fonction $-\zeta'/\zeta$ est méromorphe au voisinage de 1, avec un pôle simple de résidu 1 en $s = 1$. Or d'après le Théorème 6.2.1, $\zeta(s) \neq 0$ sur $\operatorname{Re} s \geq 1$, ce qui implique que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1},$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de $\{\operatorname{Re} s \geq 1\}$. Il vient de (6.2.8) que

$$\underbrace{-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}}_{\text{holomorphe au voisinage de } \operatorname{Re} s \geq 1} = \underbrace{\sum_p \frac{\ln p}{p^s}}_{\Phi(s)} - \frac{1}{s-1} + \underbrace{\sum_p \frac{\ln p}{p^s(p^s-1)}}_{\text{holomorphe sur } \operatorname{Re} s > 1/2},$$

et par suite la fonction $\Phi(s) - (s-1)^{-1}$ est holomorphe au voisinage de $\operatorname{Re} s \geq 1$, ce qui achève la démonstration du lemme. \square

Théorème 6.2.4 (Théorème taubérien de D.J. Newman). *Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable bornée. On pose pour $\operatorname{Re} z > 0$,*

$$g(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt.$$

La fonction g est holomorphe sur $\mathfrak{h}_0 = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$. Si la fonction g se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de $\bar{\mathfrak{h}}_0$, alors

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t) dt = g(0).$$

Démonstration. L'holomorphie de g sur \mathfrak{h}_0 découle immédiatement de la majoration

$$\sup_{\operatorname{Re} z \geq \alpha > 0} |e^{-zt} f(t)| \leq e^{-\alpha t} \sup_{t \geq 0} |f(t)|.$$

Pour $T > 0$, on pose pour $z \in \mathbb{C}$,

$$g_T(z) = \int_0^T f(t) e^{-zt} dt.$$

La fonction g_T est entière. Comme g est holomorphe au voisinage de $\bar{\mathfrak{h}}_0$, pour $R > 0$ fixé, il existe $\delta_R > 0$ tel que la fonction g soit holomorphe sur un voisinage de

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R, \operatorname{Re} z \geq -\delta_R\}.$$

Comme g_T est entière, la formule de Cauchy donne

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} (g(z) - g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}. \quad (6.2.9)$$

En posant $C_+ = \partial\Delta \cap \{z, \operatorname{Re} z > 0\}$, il vient pour $z \in C_+$,

$$|g(z) - g_T(z)| = \left| \int_T^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt \right| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \int_T^{+\infty} e^{-t \operatorname{Re} z} dt = \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} e^{-T \operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z}.$$

De plus, on a

$$\text{pour } |z| = R > 0, \quad \left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| = \frac{e^{T \operatorname{Re} z} 2 |\operatorname{Re} z|}{R^2}, \quad (6.2.10)$$

car, avec $z = Re^{i\theta}$,

$$R^{-2}z^{-1}(R^2 + z^2) = R^{-2}R^{-1}e^{-i\theta}(R^2 + R^2e^{2i\theta}) = R^{-1}(e^{-i\theta} + e^{i\theta}) = \frac{2R \cos \theta}{R^2}. \quad (6.2.11)$$

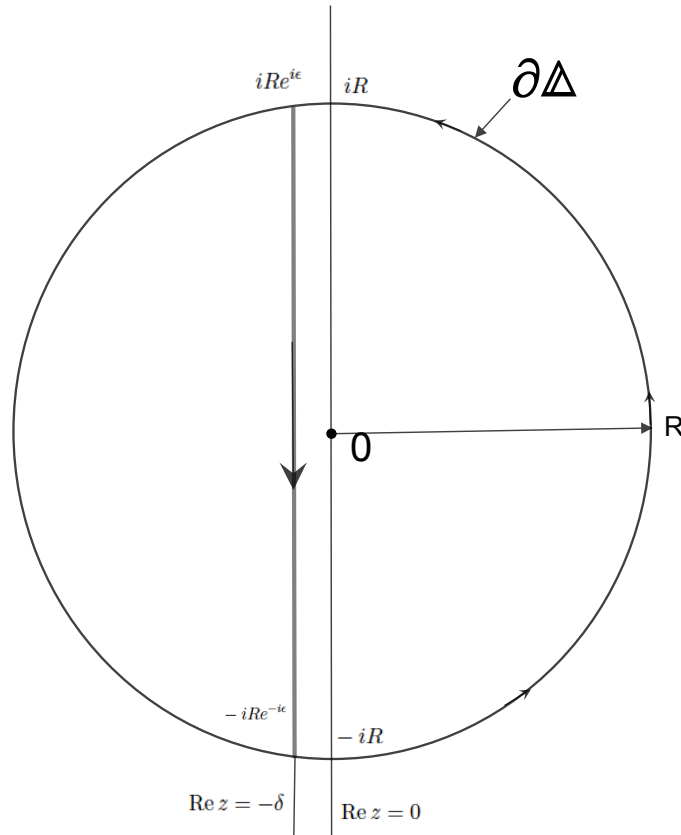


FIGURE 6.1 – LE CONTOUR UTILISÉ, $\epsilon = \arcsin(\delta/R)$.

Par conséquent, on a en utilisant (6.2.11) pour $|\theta| \leq \pi/2$,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C_+} (g(z) - g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \right| \\ & \leq \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}}{2\pi} \sup_{z \in C_+} \frac{e^{-T \operatorname{Re} z}}{R^2} \frac{e^{T \operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z} \frac{2 \operatorname{Re} z}{R^2} \pi R = \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}}{R}. \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Examinons maintenant

$$C_-(R, \delta_R) = \partial\Delta \cap \{z, \operatorname{Re} z \leq 0\}. \quad (6.2.13)$$

Comme g_T est entière, on a

$$J_{T,R} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_-} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C'_-} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z},$$

où C'_- est le demi-cercle $\{Re^{i\theta}\}_{\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2}$, ce qui implique, en utilisant (6.2.10) pour $\operatorname{Re} z < 0$,

$$\begin{aligned} |J_{T,R}| &\leq \frac{1}{2\pi} \pi R \sup_{|z|=R, \operatorname{Re} z < 0} \left\{ \left| \int_0^T f(t) e^{-zt} dt \right| e^{T \operatorname{Re} z} \frac{2|\operatorname{Re} z|}{R^2} \right\} \\ &\leq \frac{1}{R} \sup_{|z|=R, \operatorname{Re} z < 0} \left\{ \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \int_0^T e^{-t \operatorname{Re} z} dt e^{T \operatorname{Re} z} |\operatorname{Re} z| \right\}, \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} |J_{T,R}| &\leq \frac{1}{R} \sup_{|z|=R, \operatorname{Re} z < 0} \left\{ \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \frac{e^{-T \operatorname{Re} z} - 1}{(-\operatorname{Re} z)} e^{T \operatorname{Re} z} |\operatorname{Re} z| \right\} \\ &\leq \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}}{R} \sup_{\operatorname{Re} z < 0} \{(1 - e^{T \operatorname{Re} z})\} = \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}}{R}. \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Il nous reste à examiner

$$I_{T,R} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_-} g(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}. \quad (6.2.15)$$

On a, avec $[0, 1] \ni \tau \mapsto \gamma(\tau) \in C_-$ une paramétrisation C^1 par morceaux de C_-

$$|I_{T,R}| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{C_-} \underbrace{\left| g(z) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right|}_{\text{ne dépend que de } R, \delta_R} \int_0^1 e^{T \operatorname{Re} \gamma(\tau)} \underbrace{|\dot{\gamma}(\tau)|}_{\text{borné, ne dépend que de } R, \delta_R} d\tau,$$

comme $\operatorname{Re} \gamma(\tau) < 0$ sur $]0, 1[$, on trouve pour $R > 0$ fixé,

$$\limsup_{T \rightarrow +\infty} |I_{T,R}| = 0. \quad (6.2.16)$$

On a donc de (6.2.9), (6.2.12), (6.2.14), (6.2.16), pour tout $R > 0$,

$$\limsup_{T \rightarrow +\infty} |g(0) - g_T(0)| \leq \frac{2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}}{R} + \limsup_{T \rightarrow +\infty} |I_{T,R}| = \frac{2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}}{R},$$

et par suite

$$\limsup_{T \rightarrow +\infty} |g(0) - g_T(0)| \leq \inf_{R > 0} \frac{2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}}{R} = 0,$$

ce qui implique $\lim_{T \rightarrow +\infty} g_T(0) = g(0)$, qui est le résultat cherché. \square

Lemme 6.2.5. Avec Θ définie par (6.2.5), l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\Theta(x) - x}{x^2} dx \quad \text{converge,}$$

i.e. la limite pour $A \rightarrow +\infty$ de $\int_1^A \frac{\Theta(x) - x}{x^2} dx$ existe.

Démonstration. Pour $\operatorname{Re} s > 1$, on considère l'intégrale absolument convergente (cf. Lemme 6.2.2),

$$\begin{aligned} s \int_1^{+\infty} \frac{\Theta(x)}{x^{s+1}} dx &= s \int_1^{+\infty} x^{-s-1} \left(\sum_{p \leq x} \ln p \right) dx \\ &= s \int_1^{+\infty} x^{-s-1} \left(\sum_{j \geq 1} H(x - p_j) \ln p_j \right) dx, \end{aligned}$$

et comme $p_j \geq j$ (Lemme 5.1.7), on a

$$p_j \leq x \implies j \leq x \implies \sum_{j \geq 1} H(x - p_j) \ln p_j \leq \sum_{j \geq 1} H(x - j) \ln x \leq x \ln x.$$

On a aussi $\int_1^{+\infty} x^{-2-\epsilon} x \ln x dx < +\infty$ pour $\epsilon > 0$, et il vient

$$s \int_1^{+\infty} \frac{\Theta(x)}{x^{s+1}} dx = \sum_{j \geq 1} \ln p_j \int_{p_j}^{+\infty} s x^{-s-1} dx = \sum_{j \geq 1} p_j^{-s} \ln p_j = \Phi(s),$$

où Φ est définie en (6.2.7). Par conséquent, pour $\operatorname{Re} s > 1$, on a

$$\Phi(s) = s \int_0^{+\infty} \Theta(e^t) e^{-st} dt. \quad (6.2.17)$$

On remarque que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(t) = \Theta(e^t) e^{-t} - 1, \quad (6.2.18)$$

est mesurable bornée (cf. Lemme 6.2.2) et que la fonction $g : \{\operatorname{Re} z > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} \Theta(e^t) e^{-t(z+1)} dt - \frac{1}{z} = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}, \quad (6.2.19)$$

se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ (cf. Lemme 6.2.3). On peut donc appliquer le Théorème 6.2.4 qui nous donne l'existence de la limite

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T (\Theta(e^t) e^{-t} - 1) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^{e^T} \frac{\Theta(x) - x}{x} \frac{dx}{x},$$

soit le résultat cherché. \square

Lemme 6.2.6. Avec la fonction Θ donnée par (6.2.5), on a $\Theta(x) \sim x$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Démonstration. Supposons que $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \Theta(x)/x > 1$, i.e. qu'il existe $\lambda > 1$ et une suite $(x_k)_{k \geq 1}$ de réels tendant vers $+\infty$ tels que $\Theta(x_k) \geq \lambda x_k$. Comme la fonction Θ est croissante, il vient

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{\lambda x_k} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt &\geq \int_{x_k}^{\lambda x_k} \frac{\lambda x_k - t}{t^2} dt = \int_1^\lambda \frac{\lambda x_k - x_k u}{x_k^2 u^2} x_k du \\ &= \int_1^\lambda \frac{\lambda - u}{u^2} du > 0. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Or, le Lemme 6.2.5 implique que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^{x_k} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^{\lambda x_k} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt,$$

et par suite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{x_k}^{\lambda x_k} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt = 0,$$

ce qui contredit (6.2.20).

De manière analogue, si l'on suppose $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \Theta(x)/x \in]0, 1[$, i.e. qu'il existe $0 < \lambda < 1$ et une suite $(x_k)_{k \geq 1}$ de réels tendant vers $+\infty$ tels que $\Theta(x_k) \leq \lambda x_k$, comme la fonction Θ est croissante, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\lambda x_k}^{x_k} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt &\leq \int_{\lambda x_k}^{x_k} \frac{\lambda x_k - t}{t^2} dt = \int_{\lambda}^1 \frac{\lambda x_k - x_k u}{x_k^2 u^2} x_k du \\ &= \int_{\lambda}^1 \frac{\lambda - u}{u^2} du < 0. \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

Or, le Lemme 6.2.5 implique que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^{x_k} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^{\lambda x_k} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt,$$

et par suite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\lambda x_k}^{x_k} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt = 0,$$

ce qui contredit (6.2.21). En outre si l'on avait $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \Theta(x)/x \leq 0$, on aurait $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \Theta(x)/x = 0$, car Θ est à valeurs positives, et pour $\epsilon > 0$ fixé, on pourrait trouver une suite $(x_k)_{k \geq 1}$ de réels tendant vers $+\infty$ tels que $\Theta(x_k) \leq \epsilon x_k$. Comme la fonction Θ est croissante, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon x_k}^{x_k} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt &\leq \int_{\epsilon x_k}^{x_k} \frac{\epsilon x_k - t}{t^2} dt = \int_{\epsilon}^1 \frac{\epsilon x_k - x_k u}{x_k^2 u^2} x_k du \\ &= \int_{\epsilon}^1 \frac{\epsilon - u}{u^2} du < 0. \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

Or, le Lemme 6.2.5 implique que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^{x_k} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^{\epsilon x_k} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt,$$

et par suite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\epsilon x_k}^{x_k} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt = 0,$$

ce qui contredit (6.2.22). Nous avons donc démontré que

$$1 \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \Theta(x)/x \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \Theta(x)/x \leq 1,$$

ce qui donne le résultat cherché. \square

Théorème 6.2.7 (Théorème des nombres premiers¹). *On définit pour $x \in \mathbb{R}_+$,*

$$\pi(x) = \text{Card}\{j \in \mathbb{N}^*, p_j \leq x\} = \text{Card}\{p \in \mathbb{P}, p \leq x\}. \quad (6.2.23)$$

On a

$$\pi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}. \quad (6.2.24)$$

Démonstration. On a en effet pour $x > 1$,

$$\Theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p \leq \sum_{p \leq x} \ln x = \pi(x) \ln x,$$

et d'autre part pour $1 > \epsilon > 0$,

$$\Theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p \geq \sum_{x^{1-\epsilon} < p \leq x} \ln p \geq \sum_{x^{1-\epsilon} < p \leq x} \ln(x^{1-\epsilon}) = (1-\epsilon)(\ln x)(\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})),$$

de sorte que $\Theta(x) \geq (1-\epsilon)(\ln x)(\pi(x) - Cx^{1-\epsilon})$ et donc

$$(1-\epsilon)\pi(x) - C(1-\epsilon)x^{1-\epsilon} \leq \frac{\Theta(x)}{\ln x} \leq \pi(x),$$

ce qui implique

$$\frac{\Theta(x)}{\ln x} \leq \pi(x) \leq Cx^{1-\epsilon} + \frac{1}{1-\epsilon} \frac{\Theta(x)}{\ln x},$$

et donc

$$\frac{\Theta(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \ln x}{x} \leq Cx^{-\epsilon} \ln x + \frac{1}{1-\epsilon} \frac{\Theta(x)}{x},$$

et par conséquent le Lemme 6.2.6 implique pour tout $\epsilon \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} 1 = \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Theta(x)}{x} &\leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} \\ &\leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} \leq \frac{1}{1-\epsilon} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Theta(x)}{x} = \frac{1}{1-\epsilon}, \end{aligned}$$

et le résultat. □

N.B. Une bonne partie de notre argumentaire dans cette section repose sur l'article [44] de D. Zagier, exposant l'article de D.J. Newman [30] qui contient en particulier le Théorème taubérien 6.2.4.

1. Ce théorème a été démontré en 1896 indépendamment et concomitamment par Jacques HADAMARD (1865-1963) et Charles-Jean DE LA VALLÉE-POUSSIN (1866-1962).

6.3 L'hypothèse de Riemann

Nous avons vu plus haut que la fonction ζ de Riemann, donnée sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > 1$ par la formule (5.1.1) se prolonge (cf. Théorème 6.1.1) en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} dont l'unique pôle est simple et situé en $s = 1$ (de résidu 1). Nous avons vu également en (6.1.4) que la fonction ζ s'annule aux entiers pairs strictement négatifs $-2\mathbb{N}^*$; on qualifie ces zéros de *zéros triviaux* de la fonction Zeta. Par ailleurs, nous avons démontré (Théorème 6.2.1) que la fonction ζ ne possède pas de zéros sur le *demi-plan fermé* $\operatorname{Re} s \geq 1$, un point décisif pour le théorème des nombres premiers (Théorème 6.2.7). On verra plus bas (Théorème 7.3.10) qu'hormis aux zéros triviaux, la fonction ζ ne s'annule pas sur le demi-plan fermé $\operatorname{Re} s \leq 0$. On sait donc que les zéros non triviaux de la fonction ζ sont situés dans la bande ouverte

$$\{s \in \mathbb{C}, 0 < \operatorname{Re} s < 1\}. \quad (6.3.1)$$

L'hypothèse de Riemann, une conjecture formulée par Bernhard RIEMANN en 1859 affirme que

les zéros non triviaux de la fonction ζ

$$\text{sont situés sur la droite critique} \quad \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s = \tfrac{1}{2}\}. \quad (6.3.2)$$

L'hypothèse de Riemann est l'une des conjectures les plus importantes des mathématiques et reste un problème ouvert (en juin 2015). On définit le “logarithme intégral” par la formule

$$\operatorname{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}. \quad (6.3.3)$$

Le théorème de Hadamard et de la Vallée-Poussin prouve que $\pi(x) \sim \operatorname{Li}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ($\pi(x)$ est défini en (6.2.23)) tandis que l'on peut montrer que l'hypothèse de Riemann équivaut à l'estimation

$$\pi(x) = \operatorname{Li}(x) + O(x^{1/2} \ln x), \quad (6.3.4)$$

un résultat bien plus précis que (6.2.24), et dont on peut démontrer l'optimalité. On peut mesurer la distance (le gouffre) qui sépare le théorème de Hadamard–de la Vallée-Poussin de l'hypothèse de Riemann en reformulant (6.2.24) comme

$$\pi(x) = \operatorname{Li}(x) + O(xe^{-a\sqrt{\ln x}}) = \operatorname{Li}(x) + O(x^{1-\frac{a}{\sqrt{\ln x}}}),$$

pour une constante $a > 0$. (6.3.5)

Des calculs numériques ont montré, qu'en rangeant les zéros de la fonction ζ par ordre croissant de la partie imaginaire, les 10^{13} premiers zéros (de partie imaginaire positive) sont effectivement situés sur la droite critique.

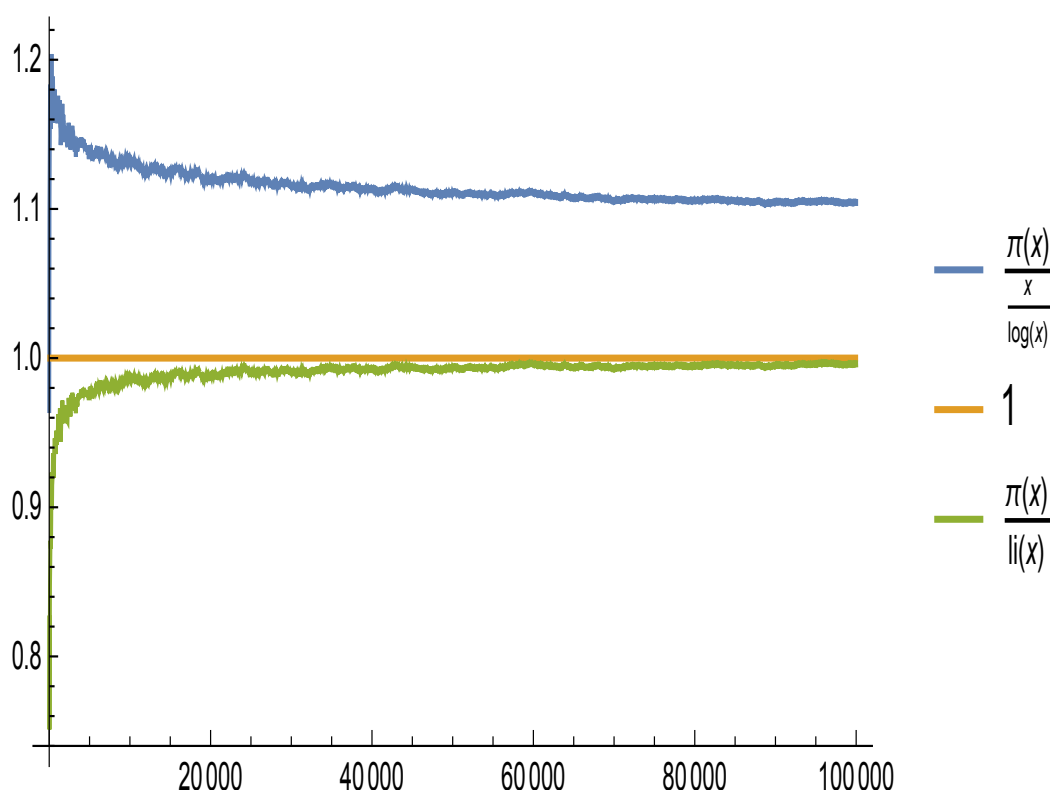


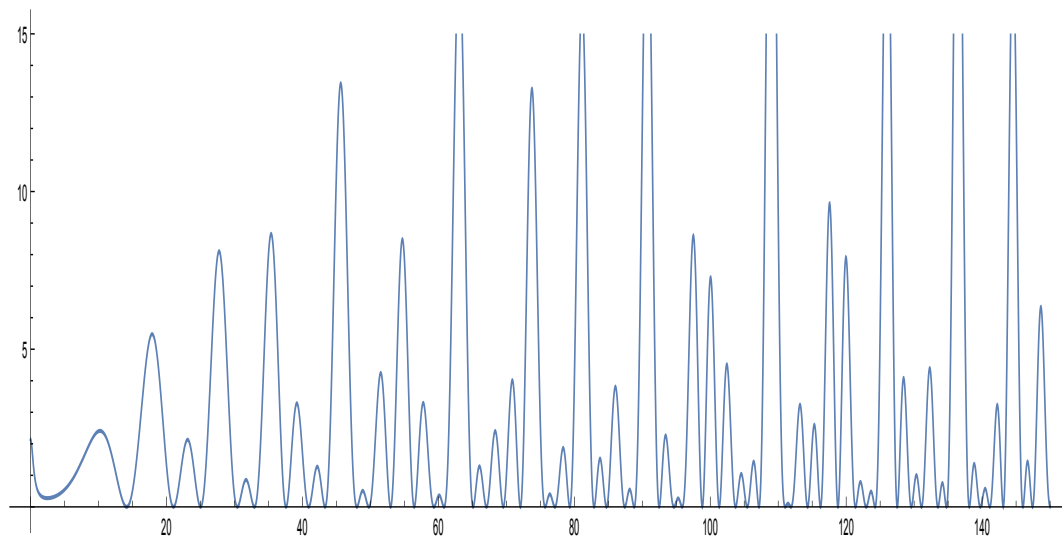
FIGURE 6.2 – COMPARAISON NUMÉRIQUE DES FONCTIONS $\frac{\pi(x)}{\text{Li}(x)}$, 1 , $\frac{\pi(x)}{(x/\ln x)}$.

La figure 6.2 semble indiquer que $\text{Li}(x) \geq \pi(x)$ ce qui n'est pas correct en général : J. Littlewood a montré en 1914 que le signe de $\pi(x) - \text{Li}(x)$ change une infinité de fois pour $x \rightarrow +\infty$. Ce résultat montre que des calculs numériques explicites, même pour des valeurs qui peuvent sembler assez “grandes”, peuvent ne pas atteindre des phénomènes démontrés théoriquement. Il est vrai (cf. [37], Theorem 1) que

$$\forall x \geq 17, \quad \pi(x) \geq \frac{x}{\ln x}.$$

En revanche, bien que $\pi(x) < \text{Li}(x)$ pour $x \leq 10^{10}$, le signe de $\pi(x) - \text{Li}(x)$ change une infinité de fois pour $x \rightarrow +\infty$.

Il faut ajouter que la conjecture de Riemann joue un rôle très particulier en mathématiques, à la croisée des chemins menant de l'analyse et la théorie des nombres à la géométrie algébrique et que l'une des raisons les plus fortes de croire en la validité de l'hypothèse de Riemann est le fait qu'un énoncé analogue à cette conjecture est vérifié pour les fonctions Zeta attachées aux courbes sur les corps finis. Le lecteur pourra consulter le livre d'H.M. Edwards [10] ainsi que la description d'E. Bombieri dans [4].

FIGURE 6.3 – LE CARRÉ DU MODULE DE LA FONCTION ζ SUR LA DROITE CRITIQUE.

Les premiers zéros de la fonction ζ de partie imaginaire positive sont $\frac{1}{2} + it$ avec $t =$

14, 135 ...

21, 022 ...

25, 011 ...

30, 425 ...

32, 935 ...

37, 586 ...

40, 919 ...

43, 327 ...

48, 005 ...

49, 774 ...

.....

Chapitre 7

Formules de Stirling, équation fonctionnelle de la fonction Zeta

7.1 La formule de Stirling

Théorème 7.1.1 (Formule de Stirling). *On a*

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}. \quad (7.1.1)$$

Démonstration. Pour $x > 0$, on considère

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt, \quad (t = sx) \\ &= x^x \int_0^{+\infty} e^{-sx} s^x x ds, \quad (s = u+1) \\ &= x^{x+1} e^{-x} \int_{-1}^{+\infty} e^{-ux} e^{x \ln(1+u)} du, \end{aligned}$$

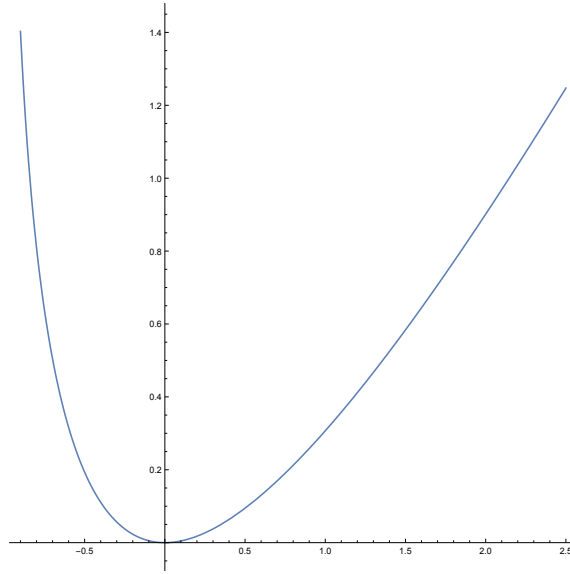
et l'on a, pour $x > 0, y > 0$,

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x x I(x^{1/2}), \quad I(y) = \int_{-1}^{+\infty} e^{-y^2(u - \ln(1+u))} du. \quad (7.1.2)$$

Posons pour $u > -1$, $\phi(u) = u - \ln(1+u)$. On a

$$\phi'(u) = 1 - (1+u)^{-1} = \frac{u}{1+u}, \quad \phi''(u) = (1+u)^{-2},$$

u	-1		0		$+\infty$
$\phi''(u)$	$+\infty$	$+$	1	$+$	0
$\phi'(u)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1
$\phi(u)$	$+\infty$	\searrow	0	\nearrow	$+\infty$

TABLE 7.1 – Tableau de variation de la fonction ϕ .FIGURE 7.1 – LA FONCTION ϕ .

La fonction ϕ est strictement convexe sur $] -1, +\infty[$, possède un unique minimum (qui est strict) 0 en 0. Soit $\alpha_0 \in]0, 1[$. Pour $-1 < u \leq -\alpha_0$, on a $\phi(u) \geq \phi(-\alpha_0) > 0$,

$$0 \leq \int_{-1}^{-\alpha_0} e^{-y^2 \phi(u)} du \leq \int_{-1}^{-\alpha_0} e^{-y^2 \phi(-\alpha_0)} du = (1 - \alpha_0) e^{-y^2 \phi(-\alpha_0)}. \quad (7.1.3)$$

Si $u \geq \alpha_0$, on a $\phi(u) \geq \phi(\alpha_0) > 0$ et donc pour $\omega \in]\alpha_0, u[$

$$\phi(u) - \phi(\alpha_0) = (u - \alpha_0) \phi'(\omega) \geq (u - \alpha_0) \phi'(\alpha_0) = \frac{(u - \alpha_0) \alpha_0}{1 + \alpha_0},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\alpha_0}^{+\infty} e^{-y^2 \phi(u)} du = e^{-y^2 \phi(\alpha_0)} \int_{\alpha_0}^{+\infty} e^{-y^2 (\phi(u) - \phi(\alpha_0))} du \\ &\leq e^{-y^2 \phi(\alpha_0)} \int_{\alpha_0}^{+\infty} e^{-y^2 \frac{(u - \alpha_0) \alpha_0}{1 + \alpha_0}} du = e^{-y^2 \phi(\alpha_0)} \int_0^{+\infty} e^{-y^2 \frac{v \alpha_0}{1 + \alpha_0}} dv \\ &= e^{-y^2 \phi(\alpha_0)} \frac{1 + \alpha_0}{\alpha_0 y^2}. \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Posons

$$J(y) = \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} e^{-y^2 \phi(u)} du = \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} e^{-y^2(u - \ln(1+u))} du. \quad (7.1.5)$$

On remarque que pour $|u| \leq \alpha_0 < 1$

$$\phi(u) = u - \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{u^k}{k} = \sum_{k \geq 2} (-1)^k \frac{u^k}{k} = \frac{u^2}{2} (1 + \epsilon(u)),$$

avec $\epsilon \in C^\infty([-1, +\infty[), \epsilon(0) = 0$. Il vient

$$J(y) = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} e^{-y^2 \frac{u^2}{2} (1 + \epsilon(u))} du = \int_{-y\alpha_0}^{y\alpha_0} e^{-\frac{v^2}{2} (1 + \epsilon(v/y))} dv \frac{1}{y}.$$

On peut choisir $\alpha_0 \in]0, 1[$ tel que $|u| \leq \alpha_0 \implies \epsilon(u) \geq -1/2$, et il vient

$$|v| \leq y\alpha_0 \implies 1 + \epsilon(v/y) \geq 1/2, \quad 0 \leq e^{-\frac{v^2}{2} (1 + \epsilon(v/y))} \leq e^{-\frac{v^2}{4}},$$

et en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on trouve

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} yJ(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2/2} dv = \sqrt{2\pi}.$$

De (7.1.2), (7.1.3), (7.1.4), (7.1.5), il vient avec $\beta > 0$, pour $y \rightarrow +\infty$,

$$I(y) = O(e^{-\beta y^2}) + \frac{\sqrt{2\pi}}{y} (1 + \sigma(y)), \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \sigma(y) = 0,$$

ce qui implique pour $x > 0$,

$$\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x x \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{x}} = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}, \quad (7.1.6)$$

ce qui est le résultat cherché, car pour $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$ (cf. Théorème 2.1.3). \square

Remarque 7.1.2. On peut noter que, dans le calcul précédent, on obtient avec $\nu > 0, \alpha_0 \in]0, 1[$,

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} \left\{ \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} e^{-x(u - \ln(1+u))} du \frac{x^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} + O(e^{-\nu x}) \right\}. \quad (7.1.7)$$

Le terme entre accolades ci-dessus tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ et l'on pourrait chercher à obtenir un *développement asymptotique* plus précis avec des puissances négatives de x . On note à ce propos que la contribution essentielle dans l'intégrale I de (7.1.2) est localisée au voisinage de l'unique point critique de ϕ , les autres contributions étant exponentiellement petites. Nous verrons dans la suite qu'en utilisant la méthode d'Euler-Maclaurin, on peut effectivement obtenir un développement asymptotique à un ordre arbitraire, mais la formule ci-dessus suffit pour une analyse plus précise. Comme $u - \ln(1+u) \sim u^2/2$ au voisinage de 0, on pose

$$u - \ln(1+u) = \frac{u^2}{2} \kappa(u)^2, \quad \kappa(0) = 1, \quad w = u\kappa(u), \quad u = \theta(w).$$

On effectue le changement de variable $u = \theta(w)$ et l'on obtient

$$\begin{aligned} \frac{x^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} e^{-x(u-\ln(1+u))} du &= \frac{x^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha_0 \kappa(-\alpha_0)}^{\alpha_0 \kappa(\alpha_0)} e^{-xw^2/2} \theta'(w) dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha_0 \kappa(-\alpha_0) x^{1/2}}^{+\alpha_0 \kappa(\alpha_0) x^{1/2}} e^{-v^2/2} \theta'(vx^{-1/2}) dv. \end{aligned}$$

Il suffit alors de faire un développement de Taylor de θ' . On remarque que

$$\begin{aligned} w &= u \left(\sum_{l \geq 0} (-1)^l \frac{2u^l}{l+2} \right)^{1/2}, \quad u = \theta(w(u)), \\ \theta'(w)w' &= 1, \quad \theta''(w)w'^2 + \theta'(w)w'' = 0, \\ \theta'''(w)w'^3 + 3\theta''(w)w'w'' + \theta'(w)w''' &= 0, \end{aligned}$$

et l'on obtient facilement (nous verrons plus bas dans la Remarque 7.2.3 une démonstration détaillée d'une formule plus précise et ne donnons pas ici tous les éléments du calcul),

$$\theta'(0) = 1, \quad \theta''(0) = \frac{2}{3}, \quad \theta'''(0) = \frac{1}{6},$$

et finalement

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} \left(1 + \frac{1}{12x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right). \quad (7.1.8)$$

7.2 Développement de Stirling

Reprenons pour $x > 0, n \in \mathbb{N}, f(x) = \text{Log } x$, la formule d'Euler-Maclaurin donnée par le Théorème 3.3.1. En remarquant¹ que pour $k \geq 1, x > 0$,

$$\text{Log}^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! x^{-k}, \quad (7.2.1)$$

il vient

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} \text{Log}(x+k) &= \int_x^{x+n+1} \text{Log } t \, dt + \frac{1}{2} \text{Log}\left(\frac{x}{x+n+1}\right) \\ &\quad + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)!} (2l-2)! \left((x+n+1)^{-2l+1} - x^{-2l+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^{n+1} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (2m)! (x+\theta)^{-2m-1} d\theta, \end{aligned}$$

1. La formule (7.2.1) est vérifiée pour $k = 1$; valide pour un entier $k \geq 1$, elle implique $\text{Log}^{(k+1)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! (-k) x^{-k-1} = (-1)^k k! x^{-k-1}$, soit la formule pour $k+1$.

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq k \leq n} \text{Log}(x+k) &= (x+n+\frac{1}{2}) \text{Log}(x+n+1) \\
&\quad - (x+n+1) - (x-\frac{1}{2}) \text{Log } x + x \\
&\quad + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)(2l-1)} \left((x+n+1)^{-2l+1} - x^{-2l+1} \right) \\
&\quad + \frac{1}{(2m+1)} \int_0^{n+1} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (x+\theta)^{-2m-1} d\theta. \quad (7.2.2)
\end{aligned}$$

Or la formule de Gauss (4.3.1) implique que pour $x > 0$,

$$\text{Log}(\Gamma(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ x \text{Log } n + \sum_{0 \leq k \leq n-1} \text{Log}(k+1) - \sum_{0 \leq k \leq n} \text{Log}(x+k) \right\},$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\text{Log}(\Gamma(x)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ x \text{Log } n + \sum_{0 \leq k \leq n-1} \text{Log}(k+1) \right. \\
&\quad - (x+n+\frac{1}{2}) \text{Log}(x+n+1) + (x+n+1) + (x-\frac{1}{2}) \text{Log } x - x \\
&\quad - \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)(2l-1)} \left((x+n+1)^{-2l+1} - x^{-2l+1} \right) \\
&\quad \left. - \frac{1}{(2m+1)} \int_0^{n+1} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (x+\theta)^{-2m-1} d\theta \right\}.
\end{aligned}$$

En outre, en appliquant la formule d'Euler-Maclaurin (7.2.2) ($x_0 = 1, n-1 \geq 0$), il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq k \leq n-1} \text{Log}(1+k) &= (n+\frac{1}{2}) \text{Log}(n+1) - n \\
&\quad + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)(2l-1)} \left((n+1)^{-2l+1} - 1 \right) \\
&\quad + \frac{1}{(2m+1)} \int_0^n \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (1+\theta)^{-2m-1} d\theta,
\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
 \text{Log}(\Gamma(x)) = & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ x \text{Log } n + \left(n + \frac{1}{2}\right) \text{Log}(n+1) - n \right. \\
 & + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)(2l-1)} \left((n+1)^{-2l+1} - 1 - (x+n+1)^{-2l+1} + x^{-2l+1} \right) \\
 & + \frac{1}{(2m+1)} \left(\int_0^n \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (1+\theta)^{-2m-1} d\theta \right. \\
 & \quad \left. - \int_0^{n+1} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (x+\theta)^{-2m-1} d\theta \right) \\
 & \left. - \left(x + n + \frac{1}{2}\right) \text{Log}(x+n+1) + (x+n+1) + \left(x - \frac{1}{2}\right) \text{Log } x - x \right\}.
 \end{aligned}$$

Examinons la somme $U_n(x)$ de la première et de la dernière ligne ci-dessus : on a

$$\begin{aligned}
 U_n(x) = & x \text{Log } n + \left(n + \frac{1}{2}\right) \text{Log}(n+1) - n - \left(x + n + \frac{1}{2}\right) \text{Log}(x+n+1) \\
 & + (x+n+1) + \left(x - \frac{1}{2}\right) \text{Log } x - x \\
 = & \underbrace{x \text{Log}\left(\frac{n}{x+n+1}\right)}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ n \rightarrow +\infty}} + \underbrace{\left(n + \frac{1}{2}\right) \text{Log}\left(\frac{n+1}{x+n+1}\right) + 1}_{= -(n+\frac{1}{2}) \text{Log}\left(1+\frac{x}{n+1}\right)} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \text{Log } x, \\
 & \quad \quad \quad \downarrow \quad n \rightarrow +\infty \\
 & \quad \quad \quad -x
 \end{aligned}$$

de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \text{Log } x + 1 - x = x \text{Log } x - x - \frac{1}{2} \text{Log } x + 1,$$

et par conséquent pour $m \geq 1, x > 0$,

$$\begin{aligned}
 \text{Log}(\Gamma(x)) = & x \text{Log } x - x - \frac{1}{2} \text{Log } x \\
 & + 1 + \frac{1}{(2m+1)} \int_0^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (1+\theta)^{-2m-1} d\theta - \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)(2l-1)} \\
 & + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)(2l-1)} x^{-2l+1} \\
 & - \frac{1}{(2m+1)} \int_0^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (x+\theta)^{-2m-1} d\theta.
 \end{aligned}$$

La seconde ligne de l'expression ci-dessus est une constante V_m ne dépendant que de m . En choisissant $x = N + 1$, $N \in \mathbb{N}$, il vient

$$\text{Log}(N!) = (N+1) \text{Log}(N+1) - N - 1 - \frac{1}{2} \text{Log}(N+1) + V_m + \epsilon_m(N),$$

avec $\lim_{N \rightarrow +\infty} \epsilon_m(N) = 0$. Par suite on obtient que

$$\begin{aligned} N! &= (N+1)^{N+1} e^{-N-1} (N+1)^{-1/2} e^{V_m} e^{\epsilon_m(N)} \\ &= \left(\frac{N}{e}\right)^N \left(\frac{N+1}{e} \frac{e}{N}\right)^N \frac{N+1}{e\sqrt{N+1}} e^{V_m} e^{\epsilon_m(N)} \\ &= \left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \frac{1}{e} \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2\pi N}} e^{V_m} e^{\epsilon_m(N)}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$N! \left\{ \left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N} \right\}^{-1} = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \frac{1}{e} \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2\pi N}} e^{V_m} e^{\epsilon_m(N)},$$

ce qui donne en prenant la limite de chaque membre lorsque $N \rightarrow +\infty$ et en utilisant (7.1.1),

$$1 = e^{V_m} (2\pi)^{-1/2}, \quad \text{et donc} \quad V_m = \frac{1}{2} \text{Log}(2\pi).$$

Nous avons donc démontré pour $x > 0, m \geq 1$ entier,

$$\begin{aligned} \text{Log}(\Gamma(x)) &= x \text{Log } x - x - \frac{1}{2} \text{Log } x + \frac{1}{2} \text{Log}(2\pi) + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)(2l-1)} x^{-2l+1} \\ &\quad - \frac{1}{(2m+1)} \int_0^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (x+\theta)^{-2m-1} d\theta. \quad (7.2.3) \end{aligned}$$

On remarque que le membre de droite est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$: le logarithme complexe est défini en (1.3.1) et pour $\theta \geq 0, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a $z + \theta \neq 0$ (sinon $\text{Im } z = 0, \text{Re } z \leq 0$, ce qui est exclu). Donc pour $z \in K$ compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a

$$\inf_{\theta \geq 0, z \in K} |z + \theta| (1 + \theta)^{-1} = \beta_K > 0,$$

car si $z \in K$ et $\theta \geq 1 + 2 \sup_{z \in K} |z| = 1 + 2M_K$, on a

$$|z + \theta| \geq \theta - |z| \geq \frac{\theta}{2} \geq \frac{1}{4}(\theta + 1) \quad \text{car } \theta \geq 1, \text{ et donc } \inf_{\theta \geq 2M+1, z \in K} |z + \theta| (1 + \theta)^{-1} \geq \frac{1}{4},$$

et en outre

$$\inf_{0 \leq \theta \leq 1+2M, z \in K} |z + \theta| (1 + \theta)^{-1} > 0.$$

On définit alors la fonction λ_Γ , holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (rappelons que $m \geq 1$),

$$\begin{aligned} \lambda_\Gamma(z) &= z \text{Log } z - z - \frac{1}{2} \text{Log } z + \frac{1}{2} \text{Log}(2\pi) + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)(2l-1)} z^{-2l+1} \\ &\quad - \frac{1}{(2m+1)} \int_0^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (z+\theta)^{-2m-1} d\theta. \quad (7.2.4) \end{aligned}$$

Nous avons démontré en (7.2.3) que pour $x > 0$,

$$e^{\lambda_\Gamma(x)} = \Gamma(x),$$

et par prolongement analytique (la fonction Γ est méromorphe sur \mathbb{C} avec des pôles en $-\mathbb{N}$, cf. Théorème 2.1.3) on obtient $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad e^{\lambda_\Gamma(z)} = \Gamma(z)$.

Théorème 7.2.1.

(1) Pour tout entier $m \geq 1$, la fonction λ_Γ définie en (7.2.4) est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et l'on a

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad e^{\lambda_\Gamma(z)} = \Gamma(z). \quad (7.2.5)$$

(2) On a pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$\begin{aligned} \lambda_\Gamma(z) = z \operatorname{Log} z - z - \frac{1}{2} \operatorname{Log} z + \frac{1}{2} \operatorname{Log}(2\pi) \\ + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)(2l-1)} z^{-2l+1} + R_m(z). \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Soit $\alpha_0 \in]0, \pi/2]$. En utilisant (1.3.4), on a pour $|\arg z| \leq \pi - \alpha_0$,

$$|R_m(z)| \leq C_{m, \alpha_0} |z|^{-2m}. \quad (7.2.7)$$

(3) On a pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \operatorname{Log} z - \frac{1}{2z} - \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{2l z^{2l}} + R'_m(z). \quad (7.2.8)$$

Soit $\alpha_0 \in]0, \pi/2]$. Pour $|\arg z| \leq \pi - \alpha_0$, on a

$$|R'_m(z)| \leq C'_{m, \alpha_0} |z|^{-2m-1}. \quad (7.2.9)$$

Démonstration. L'assertion (1) est déjà démontrée. On a également

$$R_m(z) = -\frac{1}{(2m+1)} \int_0^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(\theta) (z + \theta)^{-2m-1} d\theta,$$

et de l'estimation (5.3.2), il vient pour $z = |z|e^{i\psi}$, $|\psi| \leq \pi - \alpha_0$

$$\begin{aligned} |R_m(z)| &\leq 4e^{2\pi} \frac{(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+1}} \int_0^{+\infty} |z + t| |z|^{-2m-1} dt |z| \\ &= \frac{4e^{2\pi} (2m+1)!}{(2\pi)^{2m+1} |z|^{2m}} \int_0^{+\infty} |e^{i\psi} + t|^{-2m-1} dt. \end{aligned}$$

On remarque que pour $t \geq 0$, $|\psi| \leq \pi - \alpha_0 < \pi$,

$$\begin{aligned} |t + e^{i\psi}|^2 &= (t + \cos \psi)^2 + \sin^2 \psi = t^2 + 1 + 2t \cos \psi \\ &\geq t^2 + 1 + 2t \cos(\pi - \alpha_0) = (t-1)^2 + 2t(1 - \cos \alpha_0) \\ &\geq (1 - \cos \alpha_0)((t-1)^2 + 2t) = (1 - \cos \alpha_0)(t^2 + 1), \end{aligned}$$

ce qui implique pour $\arg z \leq \pi - \alpha_0 < \pi$,

$$|R_m(z)| \leq \frac{4e^{2\pi} (2m+1)!}{(2\pi)^{2m+1} |z|^{2m} (1 - \cos \alpha_0)^{m+\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} (t^2 + 1)^{-m-\frac{1}{2}} dt,$$

et donne le résultat (2). En dérivant les fonctions holomorphes de l'égalité (déjà démontrée) (7.2.5), il vient pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$\Gamma(z)\lambda'_\Gamma(z) = \lambda'_\Gamma(z)e^{\lambda_\Gamma(z)} = \Gamma'(z),$$

et comme la fonction $1/\Gamma$ est entière (cf. Théorème 4.3.2), il vient pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lambda'_\Gamma(z) = \text{Log } z - \frac{1}{2z} - \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)z^{2l}} + R'_m(z).$$

La majoration (7.2.9) se démontre de manière tout à fait analogue à la majoration (7.2.7). \square

Remarque 7.2.2. Le lecteur aura sans doute remarqué que les fonctions λ_Γ dépendent a priori du choix de l'entier $m \geq 1$ et devraient donc être notées $\lambda_{\Gamma,m}$. Remarquons toutefois que si m_1, m_2 sont des entiers ≥ 1 on a

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad \lambda_{\Gamma,m_1}(z) = \lambda_{\Gamma,m_2}(z). \quad (7.2.10)$$

En effet, il vient de (7.2.5)

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad \exp(\lambda_{\Gamma,m_1}(z) - \lambda_{\Gamma,m_2}(z)) = 1,$$

et par conséquent du point (3) du Théorème 1.1.1, on trouve que la fonction holomorphe (sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$) $\nu = \lambda_{\Gamma,m_1} - \lambda_{\Gamma,m_2}$ est à valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$. Comme en outre, il vient de (7.2.6) que pour $x > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\lambda_{\Gamma,m_1}(x) - \lambda_{\Gamma,m_2}(x)) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \nu(x).$$

Ceci implique que $\nu(x)$ est constante égale à 0 pour x réel positif assez grand. Par suite le fermé de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ défini par

$$F = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \nu(z) = 0\} = \nu^{-1}(\{0\})$$

est non vide et également ouvert car ν est continue à valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$ et $\{0\}$ est ouvert dans $2i\pi\mathbb{Z}$. La connexité de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ assure que $F = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et par suite que (7.2.10) est vérifié.

Remarque 7.2.3. En appliquant (1), (2) dans le théorème précédent pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, il vient, avec $z^{z_1} = e^{z_1 \text{Log } z}$,

$$\Gamma(z) = z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \sqrt{2\pi} \exp\left(\sum_{1 \leq l \leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)(2l-1)} z^{-2l+1} + R_m(z)\right),$$

et pour $m = 3$, $\text{Re } z > 0$, comme $b_2 = 1/6$, $b_4 = -1/30$, $b_6 = 1/42$ (cf. (3.2.12))

$$\Gamma(z) = z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} + R_3(z)\right),$$

$$R_3(z) = O(|z|^{-6}), \quad (7.2.11)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\Gamma(z) = z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\sqrt{2\pi}\Big\{ & 1 + \left(\frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + O(|z|^{-5})\right) \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + O(|z|^{-5})\right)^2 \\ & + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + O(|z|^{-5})\right)^3 \\ & + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + O(|z|^{-5})\right)^4 \\ & + O(|z|^{-5})\Big\}\end{aligned}$$

et donc $\Gamma(z) = z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\sqrt{2\pi}\omega(z)$, avec

$$\begin{aligned}\omega(z) &= 1 + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + O(|z|^{-5}) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12^2z^2} - 2\frac{1}{12 \times 360z^4}\right) \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{12^3z^3}\right) + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{12^4z^4}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} + \left(\frac{1}{6 \times 12^3} - \frac{1}{360}\right)\frac{1}{z^3} + \left(\frac{1}{24 \times 12^4} - \frac{1}{360 \times 12}\right)\frac{1}{z^4},\end{aligned}$$

ce qui donne pour $\operatorname{Re} z > 0$,

$$\Gamma(z) = z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\sqrt{2\pi}\left\{1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + O(|z|^{-5})\right\}, \quad (7.2.12)$$

et pour $n \in \mathbb{N}$, $n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$,

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left\{1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + O(n^{-5})\right\}, \quad (7.2.13)$$

une formule précisant les formules de Stirling (7.1.1) et (7.1.8).

La commande *Mathematica*

```
Series[n!, {n, Infinity, 10}] e^{-n}/(Sqrt[2 Pi n] n^{(n)}) // FullSimplify
```

fournit

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left\{ 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} \right. \\ + \frac{163879}{209018880 n^5} + \frac{5246819}{75246796800 n^6} \\ - \frac{534703531}{902961561600 n^7} - \frac{4483131259}{86684309913600 n^8} \\ + \frac{432261921612371}{514904800886784000 n^9} \\ \left. + \frac{6232523202521089}{86504006548979712000 n^{10}} + O(n^{-11}) \right\}.$$

7.3 Équation fonctionnelle de la fonction Zeta

7.3.1 Préliminaires

Considérons pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\tilde{\zeta}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} (e^t - 1)^{-1} dt. \quad (7.3.1)$$

Notons que cette expression a un sens car $1/\Gamma$ est entière et pour

$$M_0 \geq \operatorname{Re} s \geq 1 + \epsilon_0, \epsilon_0 > 0,$$

on a pour $t \geq 0$,

$$|t^{s-1} (e^t - 1)^{-1}| = t^{\operatorname{Re} s - 2} e^{-t/2} \frac{te^{-t/2}}{1 - e^{-t}} \leq C t^{\operatorname{Re} s - 2} e^{-t/2} \\ \leq C \mathbf{1}_{[0,1]}(t) t^{\epsilon_0 - 1} + C \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t) t^{M_0 - 2} e^{-t/2} \in L^1(\mathbb{R}_+),$$

ce qui permet de démontrer que $\tilde{\zeta}$ est holomorphe sur $\operatorname{Re} s > 1$. On a également

$$\int_0^{+\infty} t^{s-1} (e^t - 1)^{-1} dt = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} \frac{1}{1 - e^{-t}} dt = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-kt} dt,$$

et l'on remarque que pour $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \int_0^{+\infty} t^{\operatorname{Re} s - 1} e^{-(k+1)t} dt &= \sum_{k \geq 0} \int_0^{+\infty} t^{\operatorname{Re} s - 1} e^{-t} dt (k+1)^{-1-\operatorname{Re} s + 1} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma(\operatorname{Re} s)}{(k+1)^{\operatorname{Re} s}} < +\infty, \end{aligned}$$

ce qui implique que $\tilde{\zeta}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma(s)}{(k+1)^s} = \zeta(s)$, démontrant le résultat suivant.

Proposition 7.3.1. *Pour $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 1$, on a*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} (e^t - 1)^{-1} dt. \quad (7.3.2)$$

7.3.2 Fonction Theta de Jacobi

Définition 7.3.2. Pour $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$, on pose

$$\theta_J(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 z}. \quad (7.3.3)$$

Remarque 7.3.3. La fonction θ_J , dite fonction Theta de Jacobi, est holomorphe sur le demi-plan $\{\operatorname{Re} z > 0\}$. En effet, chaque fonction $z \mapsto e^{-\pi n^2 z}$ est entière et pour $\operatorname{Re} z \geq \epsilon_0 > 0$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{\operatorname{Re} z \geq \epsilon_0} |e^{-\pi n^2 z}| &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 \epsilon_0} \leq 1 + 2 \sum_{n \geq 1} \int_{n-1}^n e^{-\pi \epsilon_0 t^2} dt \\ &= 1 + 2 \int_0^{+\infty} e^{-\pi \epsilon_0 t^2} dt = 1 + \epsilon_0^{-1/2} < +\infty. \end{aligned}$$

Lemme 7.3.4. *Pour $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$, on a*

$$|\theta_J(z) - 1| \leq (\operatorname{Re} z)^{-1/2}, \quad (7.3.4)$$

$$|\theta_J(z) - 1| \leq 4e^{-\pi \operatorname{Re} z}, \text{ si } \operatorname{Re} z \geq (\ln 2)/\pi. \quad (7.3.5)$$

N.B. Nous utiliserons (7.3.4) pour $\operatorname{Re} z \rightarrow 0_+$, et (7.3.5) pour $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$.

Démonstration. La première majoration s'obtient en utilisant la Remarque 7.3.3 et

$$|\theta_J(z) - 1| \leq 2 \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 \operatorname{Re} z} \leq 2 \int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2 \operatorname{Re} z} dt = (\operatorname{Re} z)^{-1/2}.$$

En outre, on a

$$|\theta_J(z) - 1| \leq 2 \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 \operatorname{Re} z} \leq 2 \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n \operatorname{Re} z} = \frac{2e^{-\pi \operatorname{Re} z}}{1 - e^{-\pi \operatorname{Re} z}},$$

et si $\operatorname{Re} z \geq (\ln 2)/\pi$, on a $e^{\pi \operatorname{Re} z} \geq 2$ et donc $|\theta_J(z) - 1| \leq 4e^{-\pi \operatorname{Re} z}$. \square

Théorème 7.3.5 (Propriété modulaire de la fonction θ_J). *Pour $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0$, on a*

$$\theta_J(z^{-1}) = z^{1/2} \theta_J(z) \quad (7.3.6)$$

N.B. Remarquons que si $\operatorname{Re} z > 0$, alors $\operatorname{Re}(z^{-1}) = \operatorname{Re}(z/|z|^2) > 0$.

Démonstration. Considérons la fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donnée par

$$\phi(t) = e^{-\pi z t^2}.$$

Comme $\operatorname{Re} z > 0$, la fonction ϕ est dans la classe de Schwartz et en outre

$$\hat{\phi}(\tau) = z^{-1/2} e^{-\pi z^{-1} \tau^2}.$$

La formule de Poisson fournit alors

$$\theta_J(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi z n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(m) = z^{-1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi z^{-1} m^2} = z^{-1/2} \theta_J(z^{-1}),$$

ce qui donne le résultat. \square

7.3.3 Fonction ξ

Considérons la fonction entière (cf. Théorème 6.1.1) $s \mapsto (s-1)\zeta(s)$: celle-ci s'annule sur $-2\mathbb{N}^*$. La fonction $s \mapsto \Gamma(1 + \frac{s}{2})$ est une fonction méromorphe dont les pôles sont simples, situés en $1 + \frac{s}{2} \in -\mathbb{N}$, i.e. pour $s \in -2(\mathbb{N}+1) = -2\mathbb{N}^*$. Par conséquent la fonction

$$s \mapsto (s-1)\zeta(s)\Gamma(1 + \frac{s}{2}) \quad \text{est entière.}$$

Définition 7.3.6. La fonction ξ est la fonction entière définie par

$$\xi(s) = \zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2} \frac{1}{2} s(s-1). \quad (7.3.7)$$

N.B. Notons que

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2} \frac{1}{2} s(s-1) = (s-1)\zeta(s) \frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \\ &= \underbrace{(s-1)\zeta(s)\Gamma(1 + \frac{s}{2})}_{\text{entière}} \underbrace{\pi^{-s/2}}_{\text{entière}}. \end{aligned}$$

Proposition 7.3.7. *Pour $s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1$, on a*

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} (\theta_J(x) - 1) \frac{dx}{2}. \quad (7.3.8)$$

N.B. Remarquons tout d'abord que l'intégrale de l'énoncé a un sens car la fonction θ_J est continue sur $]0, +\infty[$ et que (7.3.4) implique pour $x > 0$

$$|x^{\frac{s}{2}-1} (\theta_J(x) - 1)| \leq x^{\frac{\operatorname{Re} s}{2}-1-\frac{1}{2}}, \quad \text{intégrable près de 0 car } \operatorname{Re} s > 1.$$

Par ailleurs, (7.3.5) implique pour $x \geq (\ln 2)/\pi$,

$$|x^{\frac{s}{2}-1} (\theta_J(x) - 1)| \leq x^{\frac{\operatorname{Re} s}{2}-1} 4e^{-\pi x}, \quad \text{intégrable sur } [1, +\infty[.$$

Démonstration de la proposition. Pour $\operatorname{Re} s > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}n^{-s} &= \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-x}\pi^{-s/2}n^{-s}dx \\ &= \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2 y}dy \pi n^2\pi^{-s/2}n^{-s}(\pi n^2)^{\frac{s}{2}-1} \\ &= \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2 y}dy,\end{aligned}$$

et par suite

$$\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2 y}dy.$$

On peut remarquer que (pour $\operatorname{Re} s > 1$),

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |y^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2 y}|dy &= \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} y^{\frac{\operatorname{Re} s}{2}-1}e^{-\pi n^2 y}dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} y^{\frac{\operatorname{Re} s}{2}-1}|\theta_J(y) - 1|dy < +\infty,\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 y} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1} (\theta_J(y) - 1) dy,$$

et par conséquent pour $\operatorname{Re} s > 1$, on a

$$\xi(s) = \Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s) \frac{s(s-1)}{2} = \frac{s(s-1)}{2} \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1} (\theta_J(y) - 1) \frac{dy}{2},$$

soit le résultat cherché. \square

Théorème 7.3.8 (Equation fonctionnelle de la fonction ξ). *Pour $s \in \mathbb{C}$, on a*

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{2} (\theta_J(x) - 1) (x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}) \frac{dx}{x}, \quad (7.3.9)$$

$$\xi(1-s) = \xi(s). \quad (7.3.10)$$

N.B. L'intégrale de l'énoncé a un sens car la fonction θ_J est continue sur $[1, +\infty[$, et que pour $x \geq 1$, (7.3.5) implique,

$$|\theta_J(x) - 1| (x^{\frac{\operatorname{Re} s}{2}-1} + x^{\frac{1-\operatorname{Re} s}{2}-1}) \leq 4e^{-\pi x} (x^{\frac{\operatorname{Re} s}{2}-1} + x^{-\frac{1+\operatorname{Re} s}{2}}) \in L^1([1, +\infty[).$$

Démonstration. Pour $\operatorname{Re} s > 1$, la Proposition 7.3.7 implique que

$$\begin{aligned}\xi(s) &= \frac{s(s-1)}{2} \left\{ \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ \epsilon > 0}} \int_{\epsilon}^1 x^{\frac{s}{2}-1} (\theta_J(x) - 1) \frac{dx}{2} + \int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} (\theta_J(x) - 1) \frac{dx}{2} \right\} \\ &= \frac{s(s-1)}{2} \left\{ \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ \epsilon > 0}} \int_1^{1/\epsilon} y^{-\frac{s}{2}+1} (\theta_J(1/y) - 1) \frac{dy}{2y^2} + \int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} (\theta_J(x) - 1) \frac{dx}{2} \right\}.\end{aligned}$$

En utilisant la propriété modulaire de la fonction θ_J énoncée au Théorème 7.3.5, il vient pour $y \geq 1$,

$$\begin{aligned} |y^{-\frac{s}{2}-1}||\theta_J(1/y) - 1| &= y^{-\frac{\operatorname{Re} s}{2}-1}|y^{1/2}\theta_J(y) - 1| = y^{-\frac{\operatorname{Re} s}{2}-\frac{1}{2}}|\theta_J(y) - y^{-1/2}| \\ &\leq y^{-\frac{\operatorname{Re} s}{2}-\frac{1}{2}}|\theta_J(y) - 1| + y^{-\frac{\operatorname{Re} s}{2}-\frac{1}{2}}|1 - y^{-1/2}| = w_s(y), \end{aligned}$$

et lorsque $\operatorname{Re} s > 1$, la fonction w_s appartient à $L^1([1, +\infty[)$ (cf. (7.3.5) pour le premier terme et pour tout s ; le second terme est majoré par $y^{-\sigma-1}$ avec $\sigma > 0$ si $\operatorname{Re} s > 1$). On obtient par conséquent pour $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{s(s-1)}{2} \left\{ \int_1^{+\infty} y^{-\frac{s}{2}-1} (\theta_J(1/y) - 1) \frac{dy}{2} + \int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} (\theta_J(x) - 1) \frac{dx}{2} \right\} \\ &= \frac{s(s-1)}{2} \left\{ \int_1^{+\infty} y^{-\frac{s}{2}-1} (y^{1/2}\theta_J(y) - 1) \frac{dy}{2} + \int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} (\theta_J(x) - 1) \frac{dx}{2} \right\} \\ &= \frac{s(s-1)}{2} \left\{ \int_1^{+\infty} y^{-\frac{s}{2}-1} (y^{1/2}\theta_J(y) - y^{1/2}) \frac{dy}{2} + \int_1^{+\infty} y^{-\frac{s}{2}-1} (y^{1/2} - 1) \frac{dy}{2} \right. \\ &\quad \left. + \int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} (\theta_J(x) - 1) \frac{dx}{2} \right\} \\ &= \frac{s(s-1)}{2} \left\{ \int_1^{+\infty} y^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}} (\theta_J(y) - 1) \frac{dy}{2y} + \int_1^{+\infty} y^{-\frac{s}{2}-1} (y^{1/2} - 1) \frac{dy}{2} \right. \\ &\quad \left. + \int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}} (\theta_J(x) - 1) \frac{dx}{2x} \right\}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{s(s-1)}{2} \left\{ \int_1^{+\infty} x^{\frac{1-s}{2}} (\theta_J(x) - 1) \frac{dx}{2x} + \int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}} (\theta_J(x) - 1) \frac{dx}{2x} \right\} \\ &\quad + \frac{s(s-1)}{2} \int_1^{+\infty} y^{-\frac{s}{2}-1} (y^{1/2} - 1) \frac{dy}{2}. \end{aligned}$$

On calcule explicitement (toujours pour $\operatorname{Re} s > 1$),

$$\int_1^{+\infty} y^{-\frac{s}{2}-1} (y^{1/2} - 1) dy = \frac{1}{\frac{s-1}{2}} - \frac{1}{\frac{s}{2}} = \frac{2}{s(s-1)},$$

ce qui implique

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{2} \left\{ \int_1^{+\infty} x^{\frac{1-s}{2}} (\theta_J(x) - 1) \frac{dx}{2x} + \int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}} (\theta_J(x) - 1) \frac{dx}{2x} \right\},$$

soit (7.3.9) pour $\operatorname{Re} s > 1$. On a vu que le second membre de (7.3.9) avait un sens pour tout $s \in \mathbb{C}$ et l'on voit facilement qu'il s'agit d'une fonction entière de s : pour tout $x \geq 1$, les fonctions

$$s \mapsto x^{\frac{1-s}{2}} (\theta_J(x) - 1) x^{-1} + x^{\frac{s}{2}} (\theta_J(x) - 1) x^{-1},$$

sont des fonctions entières de s et si $|s| \leq R_0$, on a pour $x \geq 1$ (cf. (7.3.5)),

$$\begin{aligned} |x^{\frac{1-s}{2}}(\theta_J(x) - 1)x^{-1} + x^{\frac{s}{2}}(\theta_J(x) - 1)x^{-1}| &\leq (x^{-(\frac{1+\operatorname{Re} s}{2})} + x^{\frac{\operatorname{Re} s}{2}-1})4e^{-\pi x} \\ &\leq 4e^{-\pi x}x^{-1/2}2x^{R_0/2} \in L^1([1, +\infty[). \end{aligned}$$

Les fonctions entières ξ et le second membre de (7.3.9) coïncident sur $\operatorname{Re} s > 1$ et par prolongement analytique sur \mathbb{C} tout entier, ce qui donne (7.3.9) pour tout $s \in \mathbb{C}$. L'équation fonctionnelle (7.3.10) est une conséquence immédiate de (7.3.9). \square

Corollaire 7.3.9 (Équation fonctionnelle pour la fonction ζ). *Pour $s \in \mathbb{C}$, on a*

$$\zeta(s) = \zeta(1-s)(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s) 2\sin(\frac{\pi s}{2}), \quad s \neq 1, \quad (7.3.11)$$

$$\zeta(s) = \zeta(1-s)\pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}, \quad s \neq 1, \quad (7.3.12)$$

$$\zeta(1-s) = \zeta(s)\Gamma(s)\frac{2}{(2\pi)^s}\cos(\frac{\pi s}{2}), \quad s \neq 0. \quad (7.3.13)$$

N.B. Les deux membres de (7.3.11) sont holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ car le produit $\zeta(1-s)\Gamma(1-s)\sin(\frac{\pi s}{2})$ est holomorphe sur \mathbb{N}^c et que

$$\zeta(1-s)\Gamma(1-s)\sin(\frac{\pi s}{2}) = \underbrace{s\zeta(1-s)}_{\text{entière}} \underbrace{\Gamma(1-s)}_{\substack{\text{pôle simple} \\ \text{en } l \in \mathbb{N}^*}} \underbrace{\frac{\sin(\frac{\pi s}{2})}{s}}_{\substack{\text{entière,} \\ \text{zéro en } s = 2k, k \in \mathbb{N}^*}}.$$

Par suite si l est pair, la fonction est holomorphe au voisinage de l et si $l = 2k+1, k \geq 1$, la fonction $s\zeta(1-s)|_{s=2k+1} = (1+2k)\zeta(-2k) = 0$, effaçant la singularité de $\Gamma(1-s)$ en $s = 2k+1$. En revanche, la fonction conserve un pôle simple en $s = 1$.

De plus, les deux membres de (7.3.12) sont holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ car la fonction

$$s \mapsto \underbrace{s\zeta(1-s)}_{\text{entière}} \Gamma(\frac{1-s}{2}) \underbrace{\frac{1}{s} \left(\Gamma(\frac{s}{2})\right)^{-1}}_{\substack{\text{entière} \\ \text{nulle en } 0 \\ \text{entière}}},$$

est holomorphe sur $(2\mathbb{N}+1)^c$ et que pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\zeta(1-1-2k) = 0$, effaçant le pôle simple de $\Gamma((1-s)/2)$ en $s = 2k+1$. En revanche, la fonction conserve un pôle simple en $s = 1$.

Les deux membres de (7.3.13) sont holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ car la fonction

$$s \mapsto \underbrace{(s-1)\zeta(s)}_{\text{entière}} \Gamma(s) \underbrace{\frac{1}{s-1}\cos(\frac{\pi s}{2})}_{\text{entière}}$$

est holomorphe sur $(-\mathbb{N})^c$ et que pour $k \in -\mathbb{N}^*$, impair, $k = -2l-1, l \geq 0$, on a

$$\cos(\frac{\pi}{2}(2l+1)) = \cos(l\pi + \frac{\pi}{2}) = 0.$$

En outre pour $k \in -\mathbb{N}^*$, pair, $k = -2l, l \geq 1$, $\zeta(-2l) = 0$, effaçant la singularité de $\Gamma(s)$ en $-\mathbb{N}^*$, En revanche, la fonction conserve un pôle simple en $s = 0$.

Démonstration du corollaire. De (7.3.10), il vient pour $s \in \mathbb{C}$,

$$\zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\frac{1}{2}s(s-1) = \xi(s) = \xi(1-s) = \zeta(1-s)\Gamma((1-s)/2)\pi^{-(1-s)/2}\frac{1}{2}s(s-1),$$

et par suite pour $s \in \mathbb{Z}^c$, on obtient

$$\zeta(s) = \zeta(1-s) \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \pi^{s-\frac{1}{2}},$$

et (7.3.12) par prolongement analytique car les deux membres de l'égalité précédente sont holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. De plus la formule de Legendre-Gauss (cf. (4.3.8)) pour $m = 2$ donne pour $z \in (-\mathbb{N})^c$,

$$\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{z+1}{2}) = (2\pi)^{1/2}2^{\frac{1}{2}-z}\Gamma(z), \quad (7.3.14)$$

et par suite pour $s \in \mathbb{Z}^c$,

$$\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(\frac{2-s}{2}) = (2\pi)^{1/2}2^{-\frac{1}{2}+s}\Gamma(1-s),$$

ce qui implique

$$\frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \pi^{s-\frac{1}{2}} = \frac{(2\pi)^{1/2}2^{-\frac{1}{2}+s}\Gamma(1-s)}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})} \pi^{s-\frac{1}{2}} = (2\pi)^s \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})},$$

et en utilisant la formule des compléments (4.3.7), il vient

$$\frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \pi^{s-\frac{1}{2}} = (2\pi)^s \frac{\Gamma(1-s) \sin(\pi s/2)}{\pi} = (2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) 2 \sin(\pi s/2).$$

Par suite la formule (7.3.12) (déjà démontrée) implique pour $s \in \mathbb{Z}^c$,

$$\zeta(s) = \zeta(1-s) (2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) 2 \sin(\pi s/2),$$

et (7.3.11) par prolongement analytique.

En outre en utilisant (7.3.12) pour $1-s$ (pour $s \neq 0$), il vient

$$\zeta(1-s) = \zeta(s) \pi^{-s+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1-s}{2})},$$

et réutilisant (7.3.14) avec $z = s$, on obtient pour $s \in \mathbb{Z}^c$,

$$\begin{aligned} \zeta(1-s) &= \zeta(s) \pi^{-s+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2})}{\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2})} \\ &= \zeta(s) \pi^{-s+\frac{1}{2}} \frac{(2\pi)^{1/2}2^{\frac{1}{2}-s}\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2})} \\ &= \zeta(s) \pi^{-s+1} 2^{1-s} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2})} \\ &= \zeta(s) \pi^{-s+1} 2^{1-s} \Gamma(s) \frac{1}{\Gamma(\frac{s+1}{2})\Gamma(1-\frac{1+s}{2})} \\ &\quad (\text{formule des compléments}) = \zeta(s) \pi^{-s+1} 2^{1-s} \Gamma(s) \pi^{-1} \sin(\pi \frac{1+s}{2}) \\ &= \zeta(s) \pi^{-s} 2^{1-s} \Gamma(s) \cos(\frac{\pi s}{2}), \end{aligned}$$

ce qui donne la formule (7.3.13) par prolongement analytique. \square

Théorème 7.3.10. *La fonction ξ (cf. définition 7.3.6) est une fonction entière réelle sur l'axe réel et sur la droite critique $\{\operatorname{Re} s = 1/2\}$. Elle vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \xi(1-s) = \xi(s). \quad (7.3.15)$$

De plus, on a

$$\{s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \zeta(s) = 0\} = \{s \in \mathbb{C}, \xi(s) = 0\} \cup (-2\mathbb{N}^*), \quad (7.3.16)$$

$$\{s \in \mathbb{C}, \xi(s) = 0\} \subset \{s \in \mathbb{C}, 0 < \operatorname{Re} s < 1\}. \quad (7.3.17)$$

De plus l'ensemble $\{s \in \mathbb{C}, \xi(s) = 0\}$ est invariant par les symétries orthogonales par rapport à l'axe réel et à la droite critique,

Démonstration. La définition 7.3.6 implique que ξ est réelle sur l'axe réel et l'on a donc pour $s \in \mathbb{C}$,

$$\overline{\xi(\bar{s})} = \xi(s), \quad \overline{\xi(1-\bar{s})} = \xi(1-s) = \xi(s). \quad (7.3.18)$$

Par conséquent, pour $t \in \mathbb{R}$, il vient de la seconde identité ci-dessus,

$$\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \overline{\xi\left(1 - \left(\frac{1}{2} - it\right)\right)} = \overline{\xi\left(\frac{1}{2} + it\right)},$$

ce qui démontre que ξ est réelle sur la droite critique.

Si $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\zeta(s) = 0$ et $s \notin (-2\mathbb{N}^*)$, alors $s \neq 0$ car $\zeta(0) = -1/2$ (cf. Théorème 6.1.1) et comme

$$\xi(z) = \underbrace{(z-1)\zeta(z)\pi^{-z/2}}_{\text{entière}} \underbrace{\frac{z}{2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}_{\substack{\text{holomorphe} \\ \text{sur } (-2\mathbb{N}^*)^c}},$$

on obtient $\xi(s) = 0$. Réciproquement si $s \in \mathbb{C}$ est tel que $\xi(s) = 0$, $s \notin (-2\mathbb{N}^*)$, comme

$$\xi(z) = \underbrace{(z-1)\zeta(z)\pi^{-z/2}}_{\text{entière}} \Gamma\left(1 + \frac{z}{2}\right),$$

on a $\xi(1) = \xi(0) = -\zeta(0) = 1/2$ et donc $s \notin \{0, 1\}$. En outre

$$z \mapsto \Gamma\left(1 + \frac{z}{2}\right) \text{ est holomorphe sur } (-2\mathbb{N}^*)^c \text{ donc au voisinage de } s,$$

et comme la fonction Γ ne s'annule pas, il vient $\zeta(s) = 0$ et (7.3.16).

Si $\xi(s) = 0$, alors $\xi(1-s) = 0$ et (7.3.16) implique $\zeta(s) = \zeta(1-s) = 0$. Le théorème des nombres premiers 6.2.1 implique

$$\operatorname{Re} s < 1, \quad \operatorname{Re}(1-s) < 1 \quad \text{ce qui implique } 0 < \operatorname{Re} s < 1 \text{ et (7.3.17).}$$

Le dernier point est une conséquence immédiate de (7.3.18) car la symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel est la transformation $z \mapsto \bar{z}$ et la symétrie orthogonale par rapport à la droite critique est la transformation $z \mapsto 1 - \bar{z}$. \square

Remarque 7.3.11. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\xi(-2k) = \xi(1+2k) = \zeta(1+2k)2k\pi^{-k-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{3}{2}+k) > 0,$$

de sorte que les ensembles du second membre de (7.3.16) sont disjoints (ce qui est aussi une conséquence de (7.3.17)). En outre, on a

$$\xi(2k) = \zeta(2k)(2k-1)\pi^{-k}\Gamma(1+k) = (-1)^{k+1}\frac{\pi^{2k}2^{2k-1}}{(2k)!}b_{2k}(2k-1)\pi^{-k}k!,$$

soit, comme $\xi(0) = 1/2, b_0 = 1$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \xi(2k) = (-1)^{k+1}\pi^k 2^{2k-1} \frac{k!b_{2k}}{(2k)!}(2k-1). \quad (7.3.19)$$

Remarque 7.3.12. Notons que le Théorème 7.3.10 permet de donner une formulation équivalente de l'hypothèse de Riemann (6.3.2) :

les zéros de la fonction ξ sont situés sur la droite critique

$$\{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}. \quad (7.3.20)$$

Chapitre 8

Fonctions de Bessel

8.1 Introduction

8.1.1 Définitions

Définition 8.1.1. Soient $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$. On pose

$$J_n(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k+n}}{2^{2k+n} k! (n+k)!}. \quad (8.1.1)$$

La fonction J_n est entière de même parité que n : c'est la fonction de Bessel de première espèce et d'indice n .

N.B. Notons que cette définition est cohérente et définit une fonction entière de même parité que n car pour $k, n \in \mathbb{N}$, $\frac{n!}{2^{2k+n} k! (n+k)!} \leq \frac{1}{k!}$, ce qui implique que

$$J_n(z) = \underbrace{\frac{z^n}{2^n} \frac{1}{n!} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k n! z^{2k}}{2^{2k} k! (n+k)!}}_{\text{fonction entière de } z^2, h_n(z^2)} = \frac{(z/2)^n}{\Gamma(n+1)} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \prod_{1 \leq j \leq k} (n+j)}, \quad (8.1.2)$$

et par suite, toujours pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n(-z) = (-1)^n \frac{z^n}{2^n} j_n(z^2) = (-1)^n J_n(z)$.

On peut également remarquer que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k+n}}{2^{2k+n} k! \Gamma(n+k+1)}. \quad (8.1.3)$$

Comme la fonction $1/\Gamma$ est entière et s'annule sur $-\mathbb{N}$ (cf. Théorème 4.3.2), on peut utiliser cette formule pour définir J_n pour n entier ≤ -1 : pour $n = -m, m \geq 1$, la somme en k dans (8.1.3) porte sur le complémentaire dans \mathbb{N}

$$k \in \mathbb{N}, k - m + 1 \in -\mathbb{N} \quad \text{i.e. } k \leq m - 1.$$

On peut alors examiner, pour $k \geq m \geq 1$, i.e. $k = l + m, l \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(-1)^{l+m} z^{2l+m}}{2^{2l+m} k! \Gamma(l+1)} = \frac{(-1)^{l+m} z^{2l+m}}{2^{2l+m} (l+m)! l!}.$$

Définition 8.1.2. Soient $n \in \mathbb{Z}_-^*$, $z \in \mathbb{C}$. On pose

$$J_n(z) = \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^{l-n} z^{2l-n}}{2^{2l-n} (l-n)! l!}. \quad (8.1.4)$$

La fonction J_n est entière de même parité que n : c'est la fonction de Bessel de première espèce et d'indice n .

N.B. Notons que cette définition est cohérente et définit une fonction entière de même parité que n car pour $l, -n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{(-n)!}{2^{2l-n} l! (l-n)!} \leq \frac{1}{l!}$, ce qui implique que pour $n \in \mathbb{Z}_-^*$,

$$J_n(z) = \frac{z^{-n}}{2^{-n}} \frac{1}{(-n)!} \underbrace{\sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^{l-n} (-n)! z^{2l}}{2^{2l} l! (l-n)!}}_{\text{fonction entière de } z^2, (-1)^n h_{-n}(z^2)}. \quad (8.1.5)$$

8.1.2 Fonction génératrice

Proposition 8.1.3. Pour $(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ on pose

$$g(z, t) = e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})}. \quad (8.1.6)$$

La fonction g est holomorphe sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et possède le développement en série de Laurent

$$g(z, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n J_n(z). \quad (8.1.7)$$

On dira que g est une fonction génératrice des fonctions de Bessel.

Démonstration. On a, avec convergence uniforme et absolue sur tout compact de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} g(z, t) &= \sum_{k \geq 0, l \geq 0} \frac{(zt/2)^k}{k!} \frac{(-z/2t)^l}{l!} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n \sum_{\substack{k-l=n \\ k, l \in \mathbb{N}}} \frac{(-1)^l (z/2)^{k+l}}{k! l!} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n \sum_{l \in \mathbb{N}, l+n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^l (z/2)^{2l+n}}{(l+n)! l!} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} t^n J_n(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_-^*} t^n \sum_{l \geq -n} \frac{(-1)^l (z/2)^{2l+n}}{(l+n)! l!} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} t^n J_n(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_-^*} t^n \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k-n} (z/2)^{2k-n}}{k! (k-n)!} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n J_n(z), \end{aligned}$$

et le résultat. □

Remarque 8.1.4. Remarquons que pour $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$,

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \quad (8.1.8)$$

En effet si $n \in \mathbb{N}$, les formules (8.1.5), (8.1.2) impliquent pour $z \in \mathbb{C}^*$ (et donc pour $z \in \mathbb{C}$ par prolongement analytique),

$$J_{-n}(z) = \frac{z^n}{2^n n!} (-1)^n h_n(z^2) = \frac{z^n}{2^n n!} (-1)^n \frac{2^n n!}{z^n} J_n(z) = (-1)^n J_n(z).$$

De manière a priori arbitraire, on aurait d'ailleurs pu définir J_{-n} pour $n \in \mathbb{N}$ par la relation (8.1.8), mais il nous a semblé préférable d'utiliser une extension naturelle de la définition (8.1.1). Pour $n \in \mathbb{Z}$, les fonctions J_n sont des fonctions entières, ce qui n'est plus le cas des généralisations de (8.1.1) à des indices non entiers.

8.1.3 Fonctions de Bessel d'indice non entier

Définition 8.1.5. Soient $\nu \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On pose

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^\nu} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)}. \quad (8.1.9)$$

La fonction J_ν est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$: c'est la fonction de Bessel de première espèce et d'indice ν . Pour $\nu \in \mathbb{Z}$, elle coïncide avec (8.1.1), (8.1.4). Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, la fonction $\mathbb{C} \ni \nu \mapsto J_\nu(z)$ est holomorphe.

N.B. Remarquons que comme la fonction $1/\Gamma$ est entière (cf. Théorème 4.3.2), chaque terme de la série est bien défini pour tout $\nu \in \mathbb{C}$ et est une fonction holomorphe de z . Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ on a posé $z^\nu = e^{\nu \operatorname{Log} z}$ où le logarithme complexe est défini par (1.3.1). Par ailleurs, on remarque¹ que pour $k \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$,

$$\Gamma(1 + \nu + k) = \Gamma(\nu + 1) \prod_{1 \leq j \leq k} (\nu + j). \quad (8.1.10)$$

Par suite si K est un compact de $\{\nu \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \nu > -1\}$, on a $\inf_K (\operatorname{Re} \nu + 1) = \epsilon_0 > 0$, et $\forall \nu \in K, \forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\Gamma(1 + \nu + k)| &\geq |\Gamma(\nu + 1)| \prod_{1 \leq j \leq k} (\operatorname{Re} \nu + j) \geq |\Gamma(\nu + 1)| (\operatorname{Re} \nu + 1)^k \\ &\geq |\Gamma(\nu + 1)| \epsilon_0^k, \end{aligned} \quad (8.1.11)$$

et pour L compact de \mathbb{C} , on a

$$\sup_{\substack{\nu \in K \\ z \in L}} \frac{|z|^{2k}}{2^{2k} k! |\Gamma(1 + \nu + k)|} \leq \frac{(\sup_{z \in L} |z|)^{2k}}{2^{2k} k! \epsilon_0^k \inf_{\nu \in K} |\Gamma(1 + \nu)|},$$

1. (8.1.10) est vérifié pour $k = 0, 1$ car pour $\nu + 1 \notin \mathbb{Z}_-$, $\Gamma(\nu + 2) = (\nu + 1)\Gamma(\nu + 1)$ et en supposant que c'est vérifié pour $k \geq 1$, il vient, comme $\nu + 1 + k \notin \mathbb{Z}_-, \nu \notin \mathbb{Z}_-$,

$$\Gamma(1 + \nu + k + 1) = \Gamma(1 + \nu + k)(\nu + k + 1) = \Gamma(\nu + 1) \prod_{1 \leq j \leq k+1} (\nu + j).$$

qui est le terme général d'une série convergente. Par suite, pour

$$\nu \in \{\nu \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \nu > -1\},$$

la fonction $z \mapsto \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)}$ est entière et pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction

$$\{\nu \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \nu > -1\} \ni \nu \mapsto \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)} \text{ est holomorphe.}$$

Considérons maintenant $\nu = -\mu$, avec $\operatorname{Re} \mu > 0$. Pour $k \in \mathbb{N}, k \geq \operatorname{Re} \mu$, on a

$$k + \nu + 1 = k - \mu + 1 \notin (-\mathbb{N}) \text{ car } \operatorname{Re}(k - \mu + 1) \geq 1.$$

En outre la formule (7.2.12) implique

$$\Gamma(k - \mu + 1) \sim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{k - \mu}{e} \right)^{k - \mu} \sqrt{2\pi(k - \mu)},$$

où l'on a choisi la détermination principale du logarithme de $k - \mu$, ce qui est possible si $k > \operatorname{Re} \mu$. Par conséquent, si K est un compact de $\{\nu \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \nu < 0\}$ on a

$$\sup_{\nu \in K} |\operatorname{Im} \nu| \leq M_K < +\infty,$$

et si L est un compact de \mathbb{C} , on a, pour $k \geq \sup_{\nu \in K} (-\operatorname{Re} \nu)$

$$\sup_{\substack{\nu \in K \\ z \in L}} \left| \frac{z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)} \right| \leq \frac{\sup_{z \in K} |z|^{2k}}{2^{2k} k! \inf_{\substack{\operatorname{Re} s \geq 1 \\ |\operatorname{Im} s| \leq M_K}} |\Gamma(s)|}.$$

Notons que $1/\Gamma$ est une fonction entière et que, grâce à (7.2.12)

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \left(\sup_{|\operatorname{Im} s| \leq M} |1/\Gamma(s)| \right) = 0,$$

car pour $|\operatorname{Im} s| \leq M$,

$$\begin{aligned} |\Gamma(s)| &\sim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi} |s|^{-1/2} \exp\{(\operatorname{Re} s)(\operatorname{Re}(\operatorname{Log}(s/e))) - (\operatorname{Im} s)(\arg(s/e))\} \\ &\geq \sqrt{2\pi} |s|^{-1/2} \exp\{(\operatorname{Re} s) \ln(|s|/e)\} e^{-\pi M} \\ &\geq (|s|/e)^{\operatorname{Re} s - \frac{1}{2}} e^{-\pi M}. \end{aligned}$$

Par suite, pour $\nu \in \{\nu \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \nu < 0\}$, la fonction

$$z \mapsto \sum_{0 \leq k < -\operatorname{Re} \nu} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)} + \sum_{k \geq -\operatorname{Re} \nu} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)}$$

est entière et pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction

$$\{\nu \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \nu < 0\} \ni \nu \mapsto \sum_{0 \leq k < -\operatorname{Re} \nu} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)} + \sum_{k \geq -\operatorname{Re} \nu} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)}$$

est holomorphe. Par prolongement analytique, nous avons démontré que pour $\nu \in \mathbb{C}$, la fonction $z \mapsto \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)}$ est entière et pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction

$$\mathbb{C} \ni \nu \mapsto \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)} \text{ est entière.}$$

Proposition 8.1.6. Soit $\nu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \nu > -N - 1$, $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $\xi \in \mathbb{C}$, on pose

$$h_{\nu,N}(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\nu + N + 1)} \left\{ \sum_{0 \leq k < N} \frac{(-1)^k \xi^k \prod_{k < j \leq N} (\nu + j)}{2^{2k} k!} + \frac{(-1)^N \xi^N}{2^{2N} N!} + \sum_{N < k} \frac{(-1)^k \xi^k}{2^{2k} k! \prod_{N < j \leq k} (\nu + j)} \right\}. \quad (8.1.12)$$

La fonction $h_{\nu,N}$ est entière. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, la fonction de Bessel J_ν d'indice ν de première espèce vérifie

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^\nu} h_{\nu,N}(z^2) = \frac{z^\nu}{2^\nu} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)}. \quad (8.1.13)$$

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, l'application $\mathbb{C} \ni \nu \mapsto J_\nu(z)$ est entière.

N.B. On peut remarquer que J_ν est le produit d'une fonction entière de z^2 par z^ν . On a choisi la détermination principale du logarithme (1.3.1) pour définir z^ν sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par $e^{\nu \operatorname{Log} z}$. Bien entendu, on pourrait choisir d'exclure une autre demi-droite issue de l'origine, par exemple $i\mathbb{R}_-$: dans ce dernier cas, on prend

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-, \quad \log z = \operatorname{Log}(-iz) + i\frac{\pi}{2},$$

et on a alors $-iz = e^{\operatorname{Log}(-iz)} = e^{\log z} i^{-1}$ et par suite

$$z = e^{\log z}, \quad \operatorname{Im} \log z = \operatorname{Im}(\operatorname{Log}(-iz)) + \frac{\pi}{2} \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} [.$$

On considérera alors la fonction J_ν donnée par (8.1.13) où $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$ avec

$$z^\nu = e^{\nu \log z},$$

comme une autre *détermination* de la fonction de Bessel.

Démonstration. Supposons tout d'abord $\nu \notin \mathbb{Z}_-$. On a donc, utilisant (8.1.10),

$$\frac{1}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)} = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \frac{1}{2^{2k} k! \prod_{1 \leq j \leq k} (\nu + j)},$$

et comme pour $j \in \mathbb{N}^*$, on a $|\nu + j| \geq |\nu - \mathbb{Z}_-^*| = d_\nu > 0$, il vient pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{1}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)} \right| \leq \frac{1}{|\Gamma(\nu + 1)| k! d_\nu^k}, \quad (8.1.14)$$

et

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^\nu} \sum_{k \geq 0} \underbrace{\frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \prod_{1 \leq j \leq k} (\nu + j)}}_{h_\nu(z^2)} \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)}, \quad (8.1.15)$$

où h_ν est une fonction entière. Notons que la formule précédente coïncide avec $J_\nu(z)$ pour $\nu \in \mathbb{Z}$ (cf. (8.1.1), (8.1.4)). Dans ce dernier cas, la fonction J_ν est une fonction entière. Notons également que la majoration (8.1.14) assure que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, la fonction $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-^* \ni \nu \mapsto J_\nu(z)$ est holomorphe.

Pour $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-^*$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $1 \leq N \in \mathbb{N}$, il vient de (8.1.9), (8.1.10),

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \prod_{1 \leq j \leq k} (\nu+j)}. \quad (8.1.16)$$

et l'on a

$$\begin{aligned} J_\nu(z) \prod_{1 \leq j \leq N} (\nu+j) &= \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left\{ \sum_{0 \leq k < N} \frac{(-1)^k z^{2k} \prod_{k < j \leq N} (\nu+j)}{2^{2k} k!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^N z^{2N}}{2^{2N} N!} + \sum_{N < k} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \prod_{N < j \leq k} (\nu+j)} \right\}, \end{aligned}$$

ce qui donne, en réutilisant (8.1.10),

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+N+1)} \left\{ \sum_{0 \leq k < N} \frac{(-1)^k z^{2k} \prod_{k < j \leq N} (\nu+j)}{2^{2k} k!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^N z^{2N}}{2^{2N} N!} + \sum_{N < k} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \prod_{N < j \leq k} (\nu+j)} \right\}. \quad (8.1.17) \end{aligned}$$

On remarque que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $1 \leq N \in \mathbb{N}$, le membre de droite de (8.1.17) est holomorphe comme fonction de ν pour

$$\operatorname{Re} \nu > -N - 1.$$

En effet, la fonction $\nu \mapsto \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+N+1)}$ est entière (pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$) : la somme des N premiers termes dans l'accolade de (8.1.17) est un polynôme (de z, ν) et pour K compact de \mathbb{C} , L compact de $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \nu > -N - 1\}$ (de sorte que $\operatorname{Re} \nu \geq -N - 1 + \epsilon_0, \epsilon_0 > 0$),

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{z \in K \\ \nu \in L}} \frac{|z|^{2k}}{2^{2k} k! \prod_{N < j \leq k} |\nu+j|} &\leq \frac{(\sup_{z \in K} |z|)^{2k}}{2^{2k} k! \prod_{N < j \leq k} |j - N - 1 + \operatorname{Re} \nu + N + 1|} \\ &\leq \frac{(\sup_{z \in K} |z|)^{2k}}{2^{2k} k! \epsilon_0^{k-N}}, \end{aligned}$$

terme général d'une série convergente. En particulier, pour $N = 1$,

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+2)} \left\{ \nu + 1 - \frac{z^2}{2^2} + \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \prod_{2 \leq j \leq k} (\nu+j)} \right\}. \quad (8.1.18)$$

Par ailleurs, on a vu que $J_{-1}(z) = -J_1(z)$. Examinons la formule (8.1.18) pour $\nu = -1$: en notant $\tilde{J}_{-1}(z)$ le membre de droite de (8.1.18) pour $\nu = -1$, il vient

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{-1}(z) &= \frac{z^{-1}}{\Gamma(1)} \left\{ -\frac{z^2}{2} + \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k-1} k! (k-1)!} \right\} \\ &= -\frac{z}{2} + \sum_{l \geq 1} \frac{(-1)^{l+1} z^{2l+1}}{2^{2l+1} (l+1)! l!} = -\sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l z^{2l+1}}{2^{2l+1} (l+1)! l!},\end{aligned}\quad (8.1.19)$$

tandis que

$$J_1(z) = \frac{(z/2)}{1} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \prod_{1 \leq j \leq k} (1+j)} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2^{2k+1} k! (k+1)!},$$

ce qui démontre $J_{-1}(z) = -J_1(z) = \tilde{J}_{-1}(z)$. De même pour $\nu = -N \in \mathbb{Z}_-^*$, en notant $\tilde{J}_{-N}(z)$ le membre de droite de (8.1.18) pour $\nu = -N$, la formule (8.1.17) donne

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{-N}(z) &= \sum_{0 \leq k < N} \frac{\overbrace{(-1)^k z^{2k-N} \prod_{k < j \leq N} (j-N)}^{=0}}{2^{2k-N} k!} + \frac{(-1)^N z^N}{2^N N!} + \sum_{N < k} \frac{(-1)^k z^{2k-N}}{2^{2k-N} k! (k-N)!} \\ &= \sum_{N \leq k} \frac{(-1)^k z^{2k-N}}{2^{2k-N} k! (k-N)!} = \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^{l+N} z^{2l+N}}{2^{2l+N} (l+N)! l!}.\end{aligned}$$

On a par ailleurs

$$(-1)^N J_N(z) = \frac{(z/2)^N}{N!} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k+N} z^{2k}}{2^{2k} k! \prod_{1 \leq j \leq k} (N+j)} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k+N} z^{2k+N}}{2^{2k+N} k! (N+k)!},$$

et donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\tilde{J}_{-N}(z) = (-1)^N J_N(z) = J_{-N}(z)$. □

8.1.4 Relations de récurrence

Proposition 8.1.7. *Soient $\nu \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On a*

$$J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z) - J_{\nu-1}(z). \quad (8.1.20)$$

Démonstration. Calculons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \left\{ (z/2)^\nu J_\nu(z) \right\} &= \frac{d}{dz} \left\{ \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+2\nu}}{k! \Gamma(1+\nu+k)} \right\} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+2\nu-1} (k+\nu)}{k! (\nu+k) \Gamma(\nu+k)} \\ &= \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\nu-1}}{k! \Gamma(\nu+k)} = \left(\frac{z}{2} \right)^\nu J_{\nu-1}(z).\end{aligned}$$

De manière analogue, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \{ (z/2)^{-\nu} J_\nu(z) \} &= \frac{d}{dz} \left\{ \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k! \Gamma(1 + \nu + k)} \right\} \\ &= \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^{l+1} (z/2)^{2l+1} (l+1)}{(l+1)! \Gamma(2 + \nu + l)} = \left(\frac{z}{2} \right)^{-\nu} \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^{l+1} (z/2)^{2l+1+\nu}}{l! \Gamma(2 + \nu + l)} \\ &= - \left(\frac{z}{2} \right)^{-\nu} J_{\nu+1}(z), \end{aligned}$$

et il vient par conséquent

$$\begin{aligned} (\nu/2)(z/2)^{\nu-1} J_\nu(z) + (z/2)^\nu J'_\nu(z) &= (z/2)^\nu J_{\nu-1}(z), \\ (-\nu/2)(z/2)^{-\nu-1} J_\nu(z) + (z/2)^{-\nu} J'_\nu(z) &= -(z/2)^{-\nu} J_{\nu+1}(z), \\ (-\nu/2)(z/2)^{\nu-1} J_\nu(z) + (z/2)^\nu J'_\nu(z) &= -(z/2)^\nu J_{\nu+1}(z). \end{aligned}$$

La différence entre la première et la troisième ligne ci-dessus donne

$$2(\nu/2)(z/2)^{\nu-1} J_\nu(z) = (z/2)^\nu J_{\nu-1}(z) + (z/2)^\nu J_{\nu+1}(z),$$

soit le résultat cherché $\frac{2\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)$. \square

8.1.5 Formule de Schlömlich

Proposition 8.1.8. Soit $\nu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \nu > -1/2$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On a

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-itz} dt. \quad (8.1.21)$$

Démonstration. Les deux membres de cette égalité sont des fonctions holomorphes de z sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On a en outre

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-itz} dt &= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2\nu-1} \cos(z \cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2\nu} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k} (\cos \theta)^{2k}}{(2k)!} d\theta \\ &= 2 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2\nu} (\cos \theta)^{2k} d\theta, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est une conséquence de

$$\sup_{\operatorname{Re} \nu \geq \epsilon_0 - \frac{1}{2}} \sum_{k \geq 0} \frac{\rho^{2k}}{(2k)!} \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2\operatorname{Re} \nu} d\theta = M(\rho, \epsilon_0) < +\infty, \text{ pour } \rho \in \mathbb{R}_+, \epsilon_0 > 0.$$

On remarque qu'en utilisant (4.3.13), il vient

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2\nu} (\cos \theta)^{2k} d\theta &= \int_0^1 s^{2\nu} (1-s^2)^{k-\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{2} \int_0^1 \sigma^{\nu-\frac{1}{2}} (1-\sigma)^{k-\frac{1}{2}} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} B\left(\nu + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2}) \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu + k + 1)}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-itz} dt = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(2k)!} 2^{2k} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu + k + 1)}.$$

On note alors que

$$\frac{2^{2k}\Gamma(k + \frac{1}{2})}{(2k)!\sqrt{\pi}} = \frac{1}{k!}, \quad (8.1.22)$$

car cette propriété est vérifiée pour $k = 0$ et si on la suppose valide pour un $k \geq 0$, il vient

$$\frac{2^{2k+2}\Gamma(k + \frac{3}{2})}{(2k+2)!\sqrt{\pi}} = \frac{2^{2k}\Gamma(k + \frac{1}{2})}{(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{4(k + \frac{1}{2})}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{1}{(k+1)k!} = \frac{1}{(k+1)!}, \text{ qed.}$$

On obtient finalement le résultat cherché

$$\frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-itz} dt = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu + k + 1)} = J_\nu(z).$$

□

Proposition 8.1.9. Pour $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \theta} e^{-in\theta} d\theta, \quad (8.1.23)$$

et le développement en série de Fourier,

$$e^{iz \sin \theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) e^{in\theta}. \quad (8.1.24)$$

Démonstration. En utilisant la Proposition 8.1.3 pour $t = e^{i\theta}$, il vient

$$e^{iz \sin \theta} = e^{\frac{z}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) e^{in\theta},$$

et la fonction (analytique) 2π -périodique $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto e^{iz \sin \theta}$, dépendant du paramètre complexe z , a pour coefficients de Fourier la suite $(J_n(z))_{n \in \mathbb{Z}}$, ce qui donne également (8.1.23). □

8.2 Équation différentielle de Bessel

8.2.1 Equation indicelle, équation caractéristique

On considère l'équation différentielle dans le champ complexe, dite *Equation de Bessel d'indice ν* ,

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - \nu^2)w(z) = 0, \quad (8.2.1)$$

où ν est un paramètre complexe. On remarque que le point 0 est un point singulier de cette équation : le coefficient de w'' s'annule en 0. Néanmoins le point singulier

0 est un point régulier car le coefficient de $w^{(j)}$ est égal à $z^j \times$ fonction holomorphe. En posant pour $\xi \in \mathbb{C}^*$, $\omega(\xi) = w(1/\xi)$, il vient $w(z) = \omega(1/z)$,

$$z^2(\omega''(1/z)z^{-4} + 2z^{-3}\omega'(1/z)) - z\omega'(1/z)z^{-2} + (z^2 - \nu^2)\omega(1/z) = 0,$$

soit $\xi^2\omega''(\xi) + \xi\omega'(\xi) + (\xi^{-2} - \nu^2)\omega(\xi) = 0$, et donc

$$\xi^4\omega''(\xi) + \xi^3\omega'(\xi) + (1 - \nu^2\xi^2)\omega(\xi) = 0,$$

de sorte que la singularité à l'infini en z est irrégulière. Examinons pour l'instant l'équation indicielle de (8.2.1).

Définition 8.2.1. On considère l'équation différentielle ordinaire dans le champ complexe,

$$z^2w''(z) + f_1(z)zw'(z) + f_0(z)w(z) = 0, \quad f_j \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), j = 0, 1. \quad (8.2.2)$$

L'équation indicielle associée est

$$z^2w''(z) + f_1(0)zw'(z) + f_0(0)w(z) = 0. \quad (8.2.3)$$

Remarque 8.2.2. La fonction $z \mapsto z^\lambda$ (définie sur \mathbb{C} privé d'une demi-droite issue de l'origine), est solution de l'équation indicielle si et seulement si l'équation caractéristique

$$\lambda(\lambda - 1) + f_1(0)\lambda + f_0(0) = 0, \quad (8.2.4)$$

est vérifiée. En effet, on a pour $w_\lambda(z) = z^\lambda = e^{\lambda \text{Log } z}$,

$$w'(z) = \lambda z^{-1}z^\lambda = \lambda e^{-\text{Log } z + \lambda \text{Log } z} = \lambda e^{(\lambda-1)\text{Log } z} = \lambda z^{\lambda-1},$$

et de même $w''_\lambda(z) = \lambda(\lambda - 1)z^{\lambda-2}$, ce qui donne (cf. (1.3.8))

$$\begin{aligned} z^2w''_\lambda(z) + f_1(0)zw'_\lambda(z) + f_0(0)w_\lambda(z) &= z^2\lambda(\lambda - 1)z^{\lambda-2} + f_1(0)z\lambda z^{\lambda-1} + f_0(0)z^\lambda \\ &= z^\lambda(\lambda(\lambda - 1) + f_1(0)\lambda + f_0(0)). \end{aligned}$$

Il est par conséquent très facile de trouver des solutions de l'équation indicielle, puisqu'il suffit de résoudre une équation du second degré. Nous verrons dans la suite que pour trouver des solutions de (8.2.2), nous chercherons w sous la forme

$$w(z) = z^\lambda \phi(z), \quad \phi \text{ holomorphe, } \lambda \text{ solution de (8.2.4).}$$

Par exemple pour l'équation différentielle de Bessel (8.2.1), l'équation caractéristique est

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - \nu^2 = \lambda^2 - \nu^2 = 0, \quad \text{solutions } \{\nu, -\nu\}.$$

Proposition 8.2.3. Soit $\nu \in \mathbb{C}$. L'espace des solutions de l'équation différentielle

$$x^2w''(x) + xw'(x) - \nu^2w(x) = 0, \quad (8.2.5)$$

sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est de dimension 2.

- (1) Si $\nu \neq 0$, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \ni x \mapsto x^{-\nu}, x^\nu$ forment une base de l'espace des solutions.
- (2) Si $\nu = 0$, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \ni x \mapsto 1, \text{Log } x$ forment une base de l'espace des solutions.

Démonstration. L'équation (8.2.5) est une équation différentielle ordinaire linéaire homogène non singulière d'ordre 2 et l'ensemble de ses solutions est donc un espace vectoriel de dimension 2. Si $\nu \neq 0$, les solutions (évidentes, cf. Remarque 8.2.2), $x^{\pm\nu}$ sont indépendantes car

$$W_\nu(x) = \begin{vmatrix} x^\nu & x^{-\nu} \\ \nu x^{\nu-1} & -\nu x^{\nu-1} \end{vmatrix} = -2\nu x^{-1} \neq 0.$$

De plus, si $\nu = 0$, la fonction constante égale à 1 est solution ainsi que $\text{Log } x$ car,

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2}(\text{Log } x) + x \frac{d}{dx}(\text{Log } x) = x^2(-x^{-2}) + x x^{-1} = 0,$$

$$\text{et } W_0(x) = \begin{vmatrix} 1 & \text{Log } x \\ 0 & x^{-1} \end{vmatrix} = x^{-1} \neq 0. \quad \square$$

Remarque 8.2.4. Considérons l'équation différentielle homogène du second ordre

$$a_2(z)u''(z) + a_1(z)u'(z) + a_0(z)u(z) = 0, \quad (8.2.6)$$

$a_j \in \mathcal{H}(U)$, $j = 0, 1, 2$, U ouvert étoilé de \mathbb{C} , $a_2(z) \neq 0$ sur U . Soient u_1, u_2 deux solutions holomorphes sur U de (8.2.6). Le wronskien de u_1, u_2 est défini par

$$W_{u_1, u_2}(z) = \begin{vmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{vmatrix} \quad (8.2.7)$$

et l'on a

$$\begin{aligned} W'_{u_1, u_2}(z) &= \begin{vmatrix} u_1'(z) & u_2'(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1''(z) & u_2''(z) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ b_1 u_1' + b_0 u_1 & b_1 u_2' + b_0 u_2 \end{vmatrix}, \quad b_j = -a_j/a_2, \end{aligned}$$

de sorte que

$$W'_{u_1, u_2} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ b_1 u_1' & b_1 u_2' \end{vmatrix} = b_1 W_{u_1, u_2} = -a_1 a_2^{-1} W_{u_1, u_2}.$$

Par suite si $\tau \in \mathcal{H}(U)$ est telle que $\tau' = a_1 a_2^{-1}$, il vient pour $z_0 \in U$,

$$W_{u_1, u_2}(z) = W_{u_1, u_2}(z_0) e^{-(\tau(z) - \tau(z_0))}, \quad (8.2.8)$$

et par conséquent $W_{u_1, u_2}(z) \neq 0$ en tout point de U est équivalent à $W_{u_1, u_2}(z_0) \neq 0$ en un point $z_0 \in U$. Deux solutions (holomorphes) u_1, u_2 , de (8.2.6) sont indépendantes si pour $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$, l'égalité $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$ comme fonction sur U , implique $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Cette condition d'indépendance est équivalente à l'existence d'un point $z_0 \in U$ tel que $W_{u_1, u_2}(z_0) \neq 0$. En effet si cette dernière condition est vérifiée et si $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$ comme fonction sur U , il vient

$$\forall z \in U, \quad \alpha_1 u_1(z) + \alpha_2 u_2(z) = 0 = \alpha_1 u_1'(z) + \alpha_2 u_2'(z),$$

et donc

$$\begin{pmatrix} u_1(z_0) & u_2(z_0) \\ u'_1(z_0) & u'_2(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Réciproquement, si des solutions holomorphes u_1, u_2 de (8.2.6) sont indépendantes, alors pour tout point $z \in U$, on a $W_{u_1, u_2}(z) \neq 0$. Sinon, on pourrait trouver un $z_0 \in U$ tel que $W_{u_1, u_2}(z_0) = 0$ et l'on pourrait trouver $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ tel que

$$\begin{pmatrix} u_1(z_0) & u_2(z_0) \\ u'_1(z_0) & u'_2(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite, $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ serait une solution de (8.2.6) telle que $v(z_0) = v'(z_0) = 0$, ce qui impliquerait (en utilisant l'équation) $v''(z_0) = 0$ et par récurrence $v^{(k)}(z_0) = 0$ pour tout entier naturel k pour la fonction holomorphe v , ce qui donne $v = 0$ identiquement sur U , contredisant l'hypothèse d'indépendance. Le dernier argument peut être modifié en utilisant un théorème d'unicité pour les solutions de (8.2.6) : si v est une solution telle que $v(z_0) = v'(z_0) = 0$, alors $v = 0$ identiquement sur U .

8.2.2 Equation de Bessel d'indice non entier

Théorème 8.2.5. *Soit $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Une base de solutions de l'équation différentielle*

$$x^2 w''(x) + x w'(x) + (x^2 - \nu^2) w(x) = 0, \quad (8.2.9)$$

sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est $\{J_\nu, J_{-\nu}\}$ (donnés par la définition 8.1.5).

Démonstration. La fonction J_ν est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, donnée par

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^\nu} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)},$$

avec une série absolument et uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Pour

$$\mathcal{L}_\nu = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + x^2 - \nu^2, \quad P_\nu(X) = X^2 - \nu^2, \quad (8.2.10)$$

on a

$$2^\nu (\mathcal{L}_\nu J_\nu)(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \mathcal{L}_\nu \{x^{2k+\nu}\}}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(x^{2k+\nu} P_\nu(2k + \nu) + x^{2k+\nu+2})}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)},$$

et donc, comme $P_\nu(\nu) = 0$,

$$2^\nu (\mathcal{L}_\nu J_\nu)(x) = \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left(\frac{x^{2k+\nu} (4k^2 + 4k\nu)}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)} - \frac{x^{2k+\nu}}{2^{2k-2} (k-1)! \Gamma(\nu + k)} \right).$$

On calcule maintenant pour $k \geq 1$,

$$\frac{(4k^2 + 4k\nu)}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)} - \frac{1}{2^{2k-2} (k-1)! \Gamma(\nu + k)} = \frac{4}{\Gamma(\nu + k) (k-1)! 2^{2k}} \left(\frac{k + \nu}{\nu + k} - 1 \right) = 0,$$

et l'on trouve $\mathcal{L}_\nu J_\nu = 0$. Comme $\mathcal{L}_\nu = \mathcal{L}_{-\nu}$, (et $-\nu \in \mathbb{Z}$ équivaut à $\nu \in \mathbb{Z}$), il vient

$$\mathcal{L}_\nu J_{-\nu} = \mathcal{L}_{-\nu} J_{-\nu} = 0.$$

On remarque également que $J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^\nu} j_\nu(z^2)$ où j_ν est une fonction entière. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} W_\nu(x) &= \begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_{-\nu}(x) \\ J'_\nu(x) & J'_{-\nu}(x) \end{vmatrix} \\ &= 2^{-\nu+\nu} \begin{vmatrix} x^\nu j_\nu(x^2) & x^{-\nu} j_{-\nu}(x^2) \\ \nu x^{\nu-1} j_\nu(x^2) + x^\nu 2x j'_\nu(x^2) & -\nu x^{-\nu-1} j_{-\nu}(x^2) + x^{-\nu} 2x j'_{-\nu}(x^2) \end{vmatrix} \\ &= x^\nu x^{-\nu} \begin{vmatrix} j_\nu(x^2) & j_{-\nu}(x^2) \\ \nu x^{-1} j_\nu(x^2) + 2x j'_\nu(x^2) & -\nu x^{-1} j_{-\nu}(x^2) + 2x j'_{-\nu}(x^2) \end{vmatrix} \\ &= x^{-1} \begin{vmatrix} j_\nu(x^2) & j_{-\nu}(x^2) \\ \nu j_\nu(x^2) + 2x^2 j'_\nu(x^2) & -\nu j_{-\nu}(x^2) + 2x^2 j'_{-\nu}(x^2) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

Comme $j_\nu(0) = 1/\Gamma(1+\nu) \neq 0$, $j_{-\nu}(0) = 1/\Gamma(1-\nu) \neq 0$ (car $\nu \notin \mathbb{Z}^*$), il vient

$$xW_\nu(x) = \begin{vmatrix} 1/\Gamma(1+\nu) & 1/\Gamma(1-\nu) \\ \nu/\Gamma(1+\nu) & -\nu/\Gamma(1-\nu) \end{vmatrix} + x r_\nu(x), \quad r_\nu \text{ entière},$$

et donc, en utilisant la formule des compléments (4.3.7),

$$\begin{aligned} xW_\nu(x) &= -\frac{2\nu}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)} + x r_\nu(x) = -\frac{2}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} + x r_\nu(x) \\ &= -\frac{2 \sin \pi \nu}{\pi} + x r_\nu(x). \end{aligned}$$

Comme $\nu \notin \mathbb{Z}$, on a $\sin \pi \nu \neq 0$, et

$$W_\nu(x) \sim -\frac{2 \sin \pi \nu}{\pi x}, \quad \text{pour } x \rightarrow 0_+.$$

En particulier W_ν ne s'annule pas sur un intervalle $]0, x_0]$ avec $x_0 > 0$. Comme le déterminant wronskien W_ν satisfait l'équation différentielle

$$W'_\nu(x) = -x^{-1}W_\nu(x), \quad x > 0,$$

il vient pour $x > 0$, $W_\nu(x) = W_\nu(x_0)x_0x^{-1} \neq 0$, prouvant que les solutions $J_\nu, J_{-\nu}$ de (8.2.9) sont indépendantes dans le cas $\nu \notin \mathbb{Z}$ et impliquant également que

$$W_\nu(x) = -\frac{2 \sin \pi \nu}{\pi x}. \quad (8.2.12)$$

L'équation (8.2.9) est une équation différentielle ordinaire linéaire homogène non singulière (sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$) d'ordre 2 et l'ensemble de ses solutions est donc un espace vectoriel de dimension 2, dont nous avons déterminé une base. \square

N.B. Bien évidemment, si $\nu \in \mathbb{Z}$, la discussion ci-dessus doit être modifiée. En premier lieu, pour $\nu = n \in \mathbb{Z}$, les solutions $J_{\pm n}$ de (8.2.9) ne sont pas indépendantes, car (8.1.8) s'écrit $J_{-n} + (-1)^{n+1}J_n = 0$.

8.2.3 Fonctions de Bessel de deuxième espèce

Nous avons introduit dans la Définition 8.1.5 les fonctions de Bessel de première espèce $J_\nu(z)$ définies pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et dépendant holomorphiquement de $\nu \in \mathbb{C}$. En outre pour $n \in \mathbb{Z}$, les fonctions J_n sont entières. On remarque également que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, la fonction $\nu \mapsto (\cos \pi \nu) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)$ est entière et pour $\nu = n \in \mathbb{Z}$ vaut

$$(-1)^n J_n(z) - J_{-n}(z) = 0 \quad (\text{cf. (8.1.8)}).$$

Comme l'ensemble des zéros de la fonction entière $\nu \mapsto \sin \pi \nu$ est \mathbb{Z} et qu'il s'agit de zéros simples (car $\sin z = 0 \implies \sin' z = \cos z = \pm 1 \neq 0$), pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, la fonction

$$\mathbb{C} \ni \nu \mapsto \frac{(\cos \pi \nu) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu},$$

est entière de ν (et holomorphe de $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$).

Définition 8.2.6. Soient $\nu \in \mathbb{C}$. On pose pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$Y_\nu(z) = \frac{(\cos \pi \nu) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu} \quad (8.2.13)$$

La fonction Y_ν est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$: c'est la fonction de Bessel de seconde espèce et d'indice ν . Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, la fonction $\mathbb{C} \ni \nu \mapsto Y_\nu(z)$ est entière.

N.B. La fonction Y_ν est parfois appelée *fonction de Neumann*.

Lemme 8.2.7. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial J}{\partial \nu}(n, z) + (-1)^n \frac{\partial J}{\partial \nu}(-n, z) \right). \quad (8.2.14)$$

Démonstration. La première égalité est due au fait que Y_ν est une fonction continue de ν . Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $n \in \mathbb{Z}$, $\nu = n + \mu$, $0 < |\mu| < 1$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{(\cos \pi \nu) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu} \\ &= \frac{(-1)^n (\cos \pi \mu) (J_{n+\mu}(z) - J_n(z)) + (\cos \pi \mu) (-1)^n J_n(z) - J_{-\mu-n}(z)}{(-1)^n \sin \pi \mu} \\ &= \frac{(\cos \pi \mu) (J_{n+\mu}(z) - J_n(z))}{\sin \pi \mu} + \frac{(\cos \pi \mu) J_{-n}(z) - J_{-\mu-n}(z)}{(-1)^n \sin \pi \mu} \\ &= \frac{(\cos \pi \mu) (J_{n+\mu}(z) - J_n(z))}{\sin \pi \mu} + (-1)^n \frac{J_{-\mu-n}(z) - (\cos \pi \mu) J_{-n}(z)}{\sin(-\pi \mu)}, \end{aligned}$$

et il vient

$$\lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n} + (-1)^n \frac{1}{\pi} \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \Big|_{\nu=-n},$$

ce qui est le résultat cherché. \square

Lemme 8.2.8. Soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction Y_n est solution de (8.2.1) pour $\nu = n$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Démonstration. D'après la démonstration du Théorème 8.2.5, on a

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \forall \nu \in \mathbb{C} \quad z^2 J_\nu''(z) + z J_\nu'(z) + (z^2 - \nu^2) J_\nu(z) = 0,$$

et par conséquent, en dérivant cette identité par rapport à ν ,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \forall \nu \in \mathbb{C}, \quad z^2 \frac{\partial^3(J_\nu(z))}{\partial \nu \partial z^2} + z \frac{\partial^2(J_\nu(z))}{\partial \nu \partial z} + (z^2 - \nu^2) \frac{\partial(J_\nu(z))}{\partial \nu} = 2\nu J_\nu,$$

et en particulier $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$\begin{aligned} z^2 \frac{\partial^3(J_\nu(z))}{\partial \nu \partial z^2} \Big|_{\nu=n} + z \frac{\partial^2(J_\nu(z))}{\partial \nu \partial z} \Big|_{\nu=n} + (z^2 - n^2) \frac{\partial(J_\nu(z))}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n} &= 2n J_n, \\ z^2 \frac{\partial^3(J_\nu(z))}{\partial \nu \partial z^2} \Big|_{\nu=-n} + z \frac{\partial^2(J_\nu(z))}{\partial \nu \partial z} \Big|_{\nu=-n} + (z^2 - n^2) \frac{\partial(J_\nu(z))}{\partial \nu} \Big|_{\nu=-n} &= -2n J_{-n}. \end{aligned}$$

Par suite, la fonction de z ,

$$\tilde{Y}_n(z) = \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(z) \Big|_{\nu=n} + (-1)^n \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(z) \Big|_{\nu=-n},$$

vérifie, avec \mathcal{L}_n donné par (8.2.10),

$$\mathcal{L}_n(\tilde{Y}_n)(z) = 2n J_n(z) + (-1)^{n+1} 2n J_{-n}(z) = 0,$$

où la dernière égalité est due à (8.1.8). Ceci donne le résultat du lemme. \square

Lemme 8.2.9. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Les fonctions $\{J_n, Y_n\}$ forment une base des solutions de (8.2.1) pour $\nu = n$.*

Démonstration. Calculons pour $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\omega_\nu(z) = \begin{vmatrix} J_\nu & Y_\nu \\ J'_\nu & Y'_\nu \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin \pi \nu} \begin{vmatrix} J_\nu & \cos \pi \nu J_\nu - J_{-\nu} \\ J'_\nu & \cos \pi \nu J'_\nu - J'_{-\nu} \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sin \pi \nu} \begin{vmatrix} J_\nu & J_{-\nu} \\ J'_\nu & J'_{-\nu} \end{vmatrix},$$

et il vient, avec W_ν défini en (8.2.11), de la propriété (8.2.12),

$$\omega_\nu(z) = \frac{-1}{\sin \pi \nu} W_\nu(z) = \frac{2}{\pi z},$$

pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, prouvant l'indépendance des solutions J_n, Y_n , impliquant également que

$$\omega_n(z) = \frac{2}{\pi z}, \tag{8.2.15}$$

et terminant la preuve du lemme. \square

Lemme 8.2.10. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z)$.*

Démonstration. Du Lemme 8.2.7, il vient pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$\begin{aligned} Y_{-n}(z) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial J}{\partial \nu}(-n, z) + (-1)^n \frac{\partial J}{\partial \nu}(n, z) \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \left(\frac{\partial J}{\partial \nu}(n, z) + (-1)^n \frac{\partial J}{\partial \nu}(-n, z) \right) = (-1)^n Y_n(z). \end{aligned}$$

\square

Nous avons démontré le résultat suivant.

Théorème 8.2.11. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Une base de solutions de l'équation différentielle*

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - n^2)w(z) = 0, \quad (8.2.16)$$

sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est constitué des fonctions $\{J_n, Y_n\}$ (données par la définition 8.1.5 et (8.2.14)).

Proposition 8.2.12. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On a pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, avec $\psi = \Gamma'/\Gamma$,*

$$\begin{aligned} Y_n(z) = & \frac{2}{\pi} J_n(z) \operatorname{Log}\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{0 \leq k < n} \frac{(n-k-1)!(z/2)^{2k-n}}{k!} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!} \{\psi(n+k+1) + \psi(k+1)\}. \end{aligned} \quad (8.2.17)$$

Démonstration. De la Définition 8.1.5, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \nu}(\nu, z) &= J_\nu(z) \operatorname{Log}(z/2) - \frac{z^\nu}{2^\nu} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k} \Gamma'(1+\nu+k)}{k! \Gamma(1+\nu+k)^2}, \\ \frac{\partial J}{\partial \nu}(-\nu, z) &= J_{-\nu}(z) \operatorname{Log}(z/2) - \frac{z^{-\nu}}{2^{-\nu}} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k} \Gamma'(1-\nu+k)}{k! \Gamma(1-\nu+k)^2} \\ &= J_{-\nu}(z) \operatorname{Log}(z/2) - \frac{z^{-\nu}}{2^{-\nu}} \sum_{0 \leq k < n} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k} \Gamma'(1-\nu+k)}{k! \Gamma(1-\nu+k)^2} \\ &\quad - \frac{z^{-\nu}}{2^{-\nu}} \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k} \Gamma'(1-\nu+k)}{k! \Gamma(1-\nu+k)^2}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\frac{\partial J}{\partial \nu}(n, z) = J_n(z) \operatorname{Log}(z/2) - \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+n} \psi(1+n+k)}{k!(n+k)!}, \quad (8.2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \nu}(-n, z) &= (-1)^n J_n(z) \operatorname{Log}(z/2) - \sum_{0 \leq k < n} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k-n} \Gamma'(1-n+k)}{k! \Gamma(1-n+k)^2} \\ &\quad - \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k-n} \Gamma'(1-n+k)}{k! \Gamma(1-n+k)^2}. \end{aligned} \quad (8.2.19)$$

Lemme 8.2.13. *La fonction Γ'/Γ^2 est entière et pour $l \in \mathbb{N}$, on a*

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma^2}(-l) = (-1)^{l+1} l!. \quad (8.2.20)$$

Démonstration du Lemme 8.2.13. La fonction $1/\Gamma$ est entière, donc de dérivée entière. Comme le résidu de la fonction Γ en $-l$ est $(-1)^l/l!$ (cf. Théorème 2.1.3), il vient

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^l g_l(z)}{l!(z+l)}, \quad g_l \text{ holomorphe au voisinage de } -l, \quad g_l(0) = 1,$$

et par conséquent,

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)^2} = (-1)^l l! \left(\frac{g'_l(z)(z+l) - g_l(z)}{(z+l)^2} \right) \frac{(z+l)^2}{g_l(z)^2},$$

impliquant le résultat cherché $\Gamma'(-l)/\Gamma(-l)^2 = (-1)^{l+1}l!$. \square

Revenons à la démonstration de la Proposition 8.2.12. En utilisant le Lemme 8.2.7 et les formules (8.2.18), (8.2.19), il vient

$$\begin{aligned} Y_n(z) = & \frac{2}{\pi} \left(J_n(z) \operatorname{Log}(z/2) \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+n} \psi(1+n+k)}{k!(n+k)!} \\ & - \frac{(-1)^n}{\pi} \sum_{0 \leq k < n} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k-n} (-1)^{n-k} (n-k-1)!}{k!} \\ & - \frac{(-1)^n}{\pi} \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^{l+n} (z/2)^{2l+n} \Gamma'(1+l)}{(l+n)! \Gamma(1+l)^2}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} Y_n(z) = & \frac{2}{\pi} \left(J_n(z) \operatorname{Log}(z/2) \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+n} \psi(1+n+k)}{k!(n+k)!} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{0 \leq k < n} \frac{(-1)^{k+n} (z/2)^{2k-n} (-1)^{n-k} (n-k-1)!}{k!} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k+2n} (z/2)^{2k+n} \psi(1+k)}{(k+n)! k!}, \end{aligned}$$

ce qui implique le résultat cherché,

$$\begin{aligned} Y_n(z) = & \frac{2}{\pi} \left(J_n(z) \operatorname{Log}(z/2) \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+n} \{ \psi(1+n+k) + \psi(1+k) \}}{k!(n+k)!} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{0 \leq k < n} \frac{(z/2)^{2k-n} (n-k-1)!}{k!}. \end{aligned}$$

\square

8.2.4 Fonctions de Hankel

Définition 8.2.14. Soit $\nu \in \mathbb{C}$. On définit les fonctions de Hankel $H_\nu^{[j]}$, $j = 1, 2$ par

$$\begin{cases} H_\nu^{[1]} = J_\nu + iY_\nu, \\ H_\nu^{[2]} = J_\nu - iY_\nu, \end{cases} \quad (8.2.21)$$

où les fonctions J_ν, Y_ν sont données par les définitions 8.1.5, 8.2.6 et (8.2.14).

Remarque 8.2.15. Les fonctions de Hankel sont holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, les applications $\mathbb{C} \ni \nu \mapsto H_\nu^{[j]}(z)$ sont entières. D'après les théorèmes 8.2.5, 8.2.11, $\{H_\nu^{[1]}, H_\nu^{[2]}\}$ forme une base des solutions de l'équation différentielle de Bessel d'indice ν (8.2.1).

Lemme 8.2.16. Soit $\nu \in \mathbb{C}$. Avec $H_\nu^{[j]}, j = 1, 2$ données par la Définition 8.2.14, on a

$$H_{-\nu}^{[1]} = e^{i\pi\nu} H_\nu^{[1]}, \quad H_{-\nu}^{[2]} = e^{-i\pi\nu} H_\nu^{[2]}. \quad (8.2.22)$$

Démonstration. On a pour $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$H_{-\nu}^{[1]} = J_{-\nu} - i \frac{((\cos \pi\nu)J_{-\nu} - J_\nu)}{\sin \pi\nu} = \frac{iJ_\nu - ie^{i\pi\nu}J_{-\nu}}{\sin \pi\nu},$$

et

$$e^{i\pi\nu} H_\nu^{[1]} = -e^{i\pi\nu} \frac{(iJ_{-\nu} - ie^{-i\pi\nu}J_\nu)}{\sin \pi\nu} = \frac{iJ_\nu - ie^{i\pi\nu}J_{-\nu}}{\sin \pi\nu}.$$

De même, on a, pour $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$H_{-\nu}^{[2]} = J_{-\nu} + i \frac{((\cos \pi\nu)J_{-\nu} - J_\nu)}{\sin \pi\nu} = \frac{-iJ_\nu + ie^{-i\pi\nu}J_{-\nu}}{\sin \pi\nu},$$

et

$$e^{-i\pi\nu} H_\nu^{[2]} = -e^{-i\pi\nu} \frac{(-iJ_{-\nu} + ie^{i\pi\nu}J_\nu)}{\sin \pi\nu} = \frac{-iJ_\nu + ie^{-i\pi\nu}J_{-\nu}}{\sin \pi\nu},$$

ce qui démontre (8.2.22) pour $\nu \notin \mathbb{Z}$. Comme les applications $\mathbb{C} \ni \nu \mapsto H_\nu^{[j]}(z)$ sont entières pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on obtient également le résultat pour $\nu \in \mathbb{Z}$. \square

8.2.5 Quelques dessins et identités

La commande *Mathematica* `BesselJ[n, x]` permet de tracer les courbes représentatives de J_n sur l'axe réel².

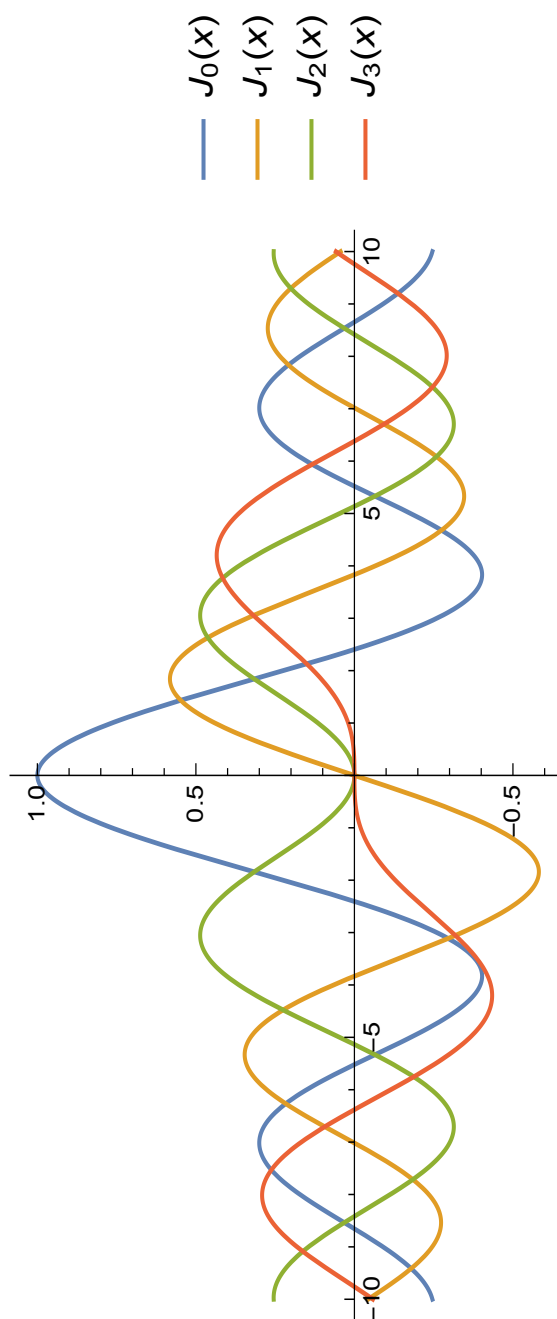


FIGURE 8.1 – FONCTIONS J_0, J_1, J_2, J_3 .

2. Dans les dessins de ce chapitre, l'axe des x est vertical, l'axe des y horizontal.

On a

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin z, \quad (8.2.23)$$

$$J_{3/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right), \quad (8.2.24)$$

$$J_{5/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left(\frac{3 \sin z}{z^2} - \frac{3 \cos z}{z} - \sin z\right), \quad (8.2.25)$$

formules démontrées en (8.2.31), (8.2.33), (8.2.35).

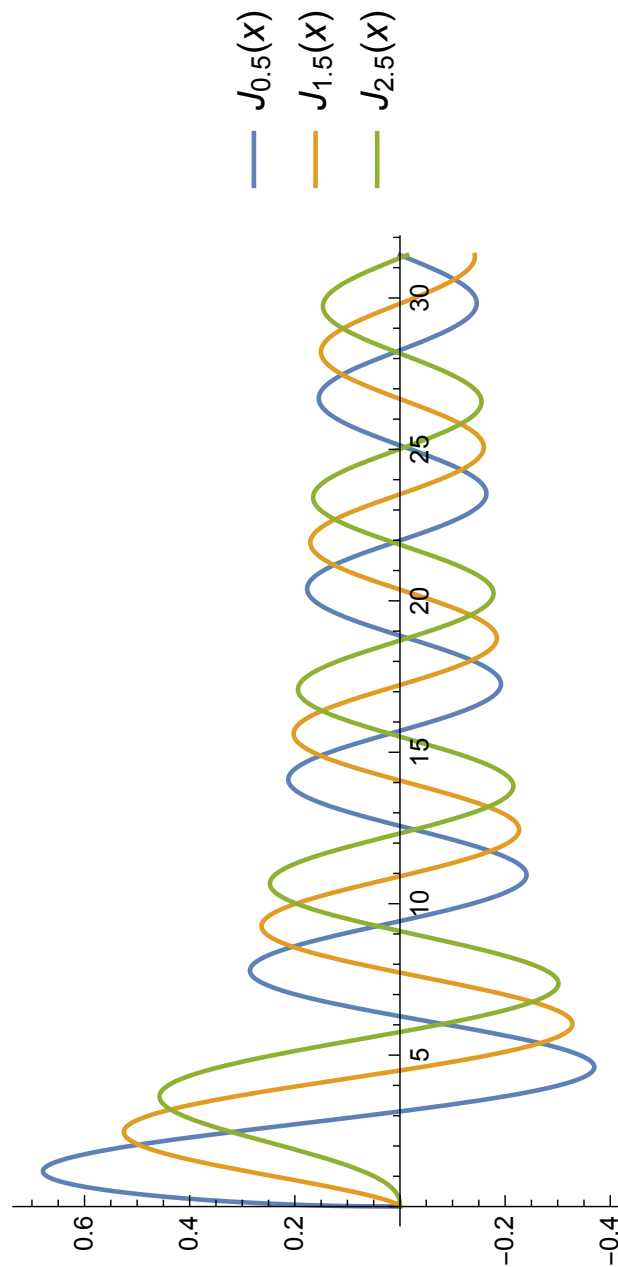


FIGURE 8.2 – FONCTIONS $J_{1/2}, J_{3/2}, J_{5/2}$.

La commande *Mathematica*, `BesselY[n, x]` permet de tracer les courbes représentatives de Y_n sur l'axe réel.

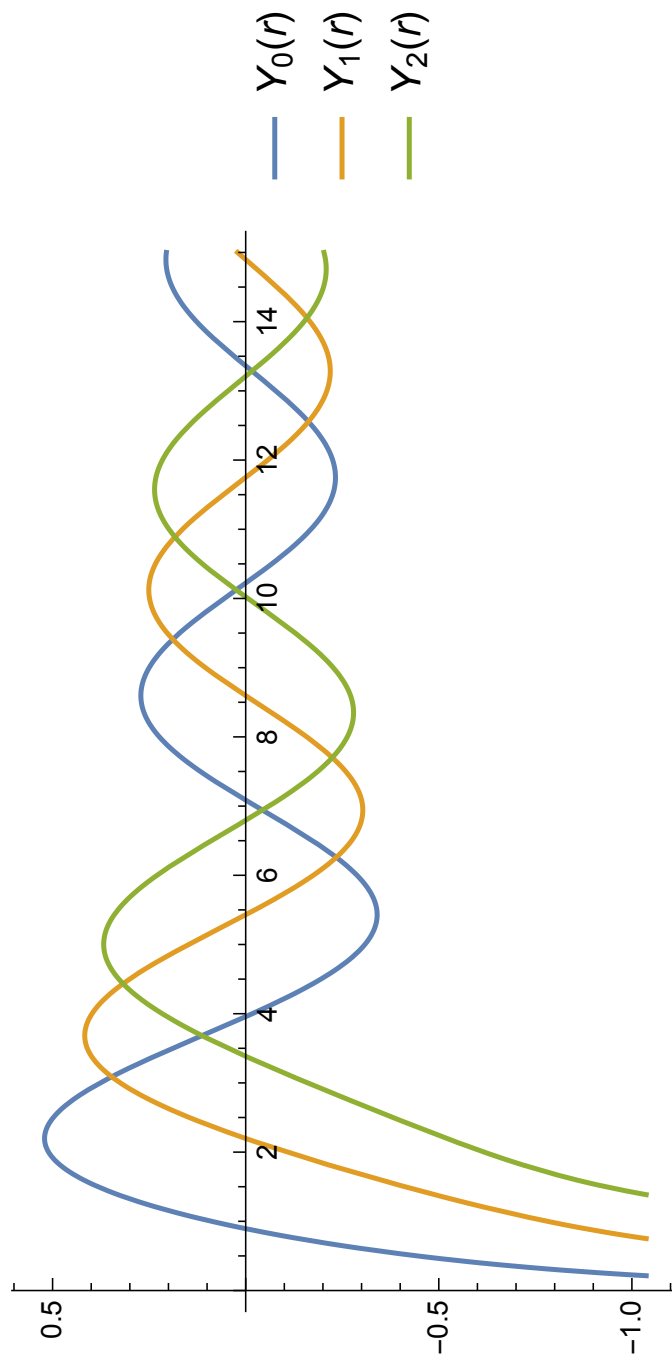


FIGURE 8.3 – FONCTIONS Y_0, Y_1, Y_2 .

8.2.6 Remarques sur l'équation différentielle de Bessel

Il se peut que le lecteur trouve notre exposition quelque peu dogmatique et se demande comment on arrive à l'expression de J_ν à partir de l'équation différentielle de Bessel (8.2.1). Comme nous avons complètement résolu cette équation pour toutes les valeurs du paramètre ν , nous pouvons nous livrer à un calcul a priori formel qui nous permette de déterminer la fonction J_ν .

Une première partie de notre calcul à trait à la singularité régulière de (8.2.1). En posant $w(z) = \omega(\text{Log } z)$, on remarque que

$$z \frac{dw}{dz} = z \omega'(\text{Log } z) z^{-1} = \omega'(\text{Log } z),$$

que l'on peut écrire symboliquement comme

$$t = \text{Log } z, \quad z \frac{d}{dz} = \frac{d}{dt},$$

de sorte que

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} = \left(z \frac{d}{dz} \right)^2 w = \omega''(\text{Log } z).$$

L'équation de Bessel s'écrit alors $\omega''(t) + (e^{2t} - \nu^2)\omega(t) = 0$ et l'on comprend mieux pourquoi l'équation indicelle est si simple à résoudre : c'est une équation différentielle à coefficients constants qui s'écrit

$$\omega''(t) - \nu^2 \omega(t) = 0, \quad \text{pour } \nu \neq 0, \text{ une base de solutions est } e^{\pm \nu t}, \text{ i.e. } z^{\pm \nu}, \quad (8.2.26)$$

et lorsque $\nu = 0$, une base de solutions est $1, t$, i.e. $1, \text{Log } z$. L'équation caractéristique est simplement l'équation caractéristique de (8.2.26). L'équation de Bessel est donc

$$\omega''(t) + (e^{2t} - \nu^2)\omega(t) = 0. \quad (8.2.27)$$

Le calcul précédent peut être pratiqué pour toute équation différentielle où 0 est un point singulier régulier via ce changement de variable singulier $t = \text{Log } z$: l'équation

$$\left(z \frac{d}{dz} \right)^2 w + f_1(z) \left(z \frac{d}{dz} \right) w + f_0(z) w = 0, \quad (8.2.28)$$

avec f_j holomorphes au voisinage de 0, devient

$$\omega''(t) + f_1(e^t)\omega'(t) + f_0(e^t)\omega(t) = 0,$$

une équation sans point singulier à distance finie.

Revenons à l'équation de Bessel qui s'écrit (8.2.26) et exposons sur cet exemple la *méthode de Frobenius* : il est naturel de chercher une solution sous la forme

$$e^{\nu t} \sum_{l \geq 0} a_l e^{lt} = z^\nu \sum_{l \geq 0} a_l z^l,$$

en espérant identifier des coefficients a_l tels que le rayon de convergence de la série ci-dessus soit strictement positif. En supposant a priori que c'est le cas, on obtient les identités

$$0 = \sum_{l \geq 0} a_l ((l + \nu)^2 - \nu^2) e^{t(l+\nu)} + \sum_{l \geq 0} a_l e^{t(l+2+\nu)}$$

$$a_0 \text{ paramètre, } a_1(1 + 2\nu) = 0, \quad l \geq 2 : a_l l(l + 2\nu) = -a_{l-2}. \quad (8.2.29)$$

Supposons que $\nu \notin -\mathbb{N}^*/2$. Alors on obtient pour $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = a_0 \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \prod_{1 \leq j \leq k} (\nu + j)}.$$

En effet, la facteur de a_l dans (8.2.29) est toujours non nul et la formule pour a_{2k} est vérifiée pour $k = 1$ car $a_2 = -a_0/(4(1 + \nu))$, et en supposant qu'elle est vérifiée pour un $k \geq 1$, il vient de (8.2.29)

$$a_{2k+2} = -\frac{1}{4(k+1)(k+1+\nu)} a_0 \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \prod_{1 \leq j \leq k} (\nu + j)}$$

$$= a_0 \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+2} (k+1)! \prod_{1 \leq j \leq k+1} (\nu + j)}, \text{ qed.}$$

On trouve donc une solution, a priori formelle, de (8.2.1) sous la forme

$$a_0 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k+\nu}}{2^{2k} k! \prod_{1 \leq j \leq k} (\nu + j)},$$

et en choisissant $a_0 = 2^{-\nu}(1/\Gamma(\nu + 1))$, il vient la solution

$$\frac{z^\nu}{2^\nu} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(1 + \nu + k)} = J_\nu(z) \quad (\text{cf. (8.1.9)}).$$

Nous avons démontré dans le Théorème 8.2.5 que $\{J_\nu, J_{-\nu}\}$ forme une base de solutions de l'équation de Bessel pour ν non entier et pour $\nu \in \mathbb{Z}$, nous savons également que J_ν est solution et le Théorème 8.2.11 nous a permis de trouver une base de solutions sous la forme $\{J_\nu, Y_\nu\}$; de manière plus générale, pour toutes les valeurs de ν , les fonctions de Hankel (cf. Définition 8.2.14), $\{H_\nu^{[1]}, H_\nu^{[2]}\}$ fournissent une base de solutions de l'équation de Bessel. On peut vérifier directement en utilisant les majorations déjà utilisées dans le paragraphe 8.1 que $J_\nu(z)$ est le produit de z^ν par une fonction entière de z et que le rayon de convergence des séries de la discussion ci-dessus est infini. On peut remarquer également que

$$J_{1/2}(z) = \frac{z^{1/2}}{2^{1/2}} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(\frac{3}{2} + k)}.$$

Comme on vérifie facilement par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$\Gamma(\frac{3}{2} + k) = \sqrt{\pi} \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1} k!}, \quad (8.2.30)$$

il vient

$$J_{1/2}(z) = \frac{z^{1/2}}{2^{1/2}} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k 2 z^{2k}}{\sqrt{\pi} (2k+1)!} = z^{-1/2} 2^{1/2} \pi^{-1/2} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

soit

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \sin z = \left(\frac{2z}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\sin z}{z}. \quad (8.2.31)$$

De manière analogue, on a

$$J_{3/2}(z) = \frac{z^{3/2}}{2^{3/2}} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(\frac{5}{2} + k)},$$

$$\Gamma(\frac{5}{2} + k) \underset{\text{cf. (8.2.30)}}{=} \sqrt{\pi} \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1} k!} (2k+3) \frac{1}{2} = \sqrt{\pi} \frac{(2k+3)!}{2^{2k+3} (k+1)!}, \quad (8.2.32)$$

et il vient

$$\begin{aligned} J_{3/2}(z) &= \frac{z^{-3/2} 2^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k+3} (k+1)}{(2k+3)!} \\ &= \frac{z^{-3/2} 2^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{l \geq 1} \frac{(-1)^{l-1} z^{2l+1} l}{(2l+1)!} \\ &= \frac{z^{-3/2} 2^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{d}{2dz} \left(\sum_{l \geq 1} \frac{(-1)^{l-1} z^{2l+2}}{(2l+1)!} \right) + \sum_{l \geq 1} \frac{(-1)^l z^{2l+1}}{(2l+1)!} \right\} \\ &= \frac{z^{-3/2} 2^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{d}{2dz} (z(z - \sin z)) + \sin z - z \right\} \\ &= \frac{z^{-3/2} 2^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ -\frac{z}{2} + \frac{\sin z}{2} + \frac{z}{2} (1 - \cos z) \right\}, \end{aligned}$$

soit

$$J_{3/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\sin z}{z} - \cos z \right\} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} z^{3/2} \left(\frac{\sin z - z \cos z}{z^3} \right). \quad (8.2.33)$$

Notons que la fonction $(\sin z - z \cos z)/z^3$ est entière car

$$\sin z - z \cos z = z - \frac{z^3}{6} - z(1 - \frac{z^2}{2}) + O(z^4) = z^3/3 + O(z^4),$$

et que le facteur de $z^{3/2}$ dans (8.2.33) est une fonction entière ϕ telle que

$$\phi(0) = \frac{1}{2^{3/2} \Gamma(5/2)},$$

car

$$\frac{1}{2^{3/2} \Gamma(5/2)} = \frac{1}{2^{3/2} (3/2)(1/2) \sqrt{\pi}} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{3}.$$

De manière similaire on a

$$J_{5/2}(z) = \frac{z^{5/2}}{2^{5/2}} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(\frac{7}{2} + k)},$$

$$\Gamma(\frac{7}{2} + k) = \sqrt{\pi} \frac{(2k+5)!}{2^{2k+5} (k+2)!}, \quad (8.2.34)$$

et donc

$$\begin{aligned} J_{5/2}(z) &= \frac{z^{-5/2}}{2^{5/2} \sqrt{\pi}} \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l z^{2l+1}}{(2l+1)!} l(l-1) \\ &= \frac{z^{-5/2} 2^{5/2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{4} \frac{d^2}{dz^2} (z^2 \sin z) - \frac{7}{4} \frac{d}{dz} (z \sin z) + 2 \sin z \right\} \\ &= \frac{z^{-5/2} 2^{5/2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{4} + 2 \right) \sin z + \left(1 - \frac{7}{4} \right) z \cos z - \frac{1}{4} z^2 \sin z \right\}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$J_{5/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \left\{ \frac{3 \sin z}{z^2} - \frac{3 \cos z}{z} - \sin z \right\}. \quad (8.2.35)$$

On vérifie également dans ce cas que

$$J_{5/2}(z) = \frac{z^{5/2}}{2^{5/2} \Gamma(7/2)} \psi(z),$$

où ψ est une fonction entière telle que $\psi(0) = 1$ car

$$2^{1/2} \pi^{-1/2} \left\{ \frac{3 \sin z - 3z \cos z - z^2 \sin z}{z^5} \right\}_{|z=0} = 2^{1/2} \pi^{-1/2} \frac{1}{15} = 2^{-5/2} \frac{1}{\frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}.$$

Il est intéressant de reprendre la méthode de discussion commencée en (8.2.29) dans le cas $\nu = -1/2$. Calculons explicitement $J_{-1/2}$ pour commencer : on vérifie facilement par récurrence

$$\Gamma(\frac{1}{2} + k) = \sqrt{\pi} \frac{(2k)!}{2^{2k} k!}, \quad (8.2.36)$$

ce qui donne

$$J_{-1/2}(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^{-1/2} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\sqrt{\pi} (2k)!} = \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \cos z. \quad (8.2.37)$$

Les conditions (8.2.29) pour $\nu = -1/2$ donnent

$$a_0, a_1 \text{ paramètres, et pour } l \geq 2 : a_l l(l-1) = -a_{l-2},$$

qui impliquent

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0, \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1,$$

et fournissent (toutes) les solutions,

$$z^{-1/2}(a_0 \cos z + a_1 \sin z) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} (a_0 J_{-1/2}(z) + a_1 J_{1/2}(z)).$$

Le calcul est analogue pour $\nu = -3/2$ et $\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$: les conditions (8.2.29) donnent les solutions $J_{\pm\nu}$ qui forment une base des solutions.

Examinons les conditions (8.2.29) pour $\nu = -1$: on obtient

$$a_0 \text{ paramètre, } a_1 = 0, \text{ et pour } l \geq 2, a_l l(l-2) = -a_{l-2},$$

ce qui implique $a_1 = a_0 = 0$ et la nullité de tous les a_l ; cette méthode fonctionne pour $\nu = 1$ et fournit la fonction de Bessel J_1 , mais ne donne que la solution triviale 0 pour $\nu = -1$. Nous sommes donc réduits à utiliser la méthode du paragraphe 8.2.3 : on a pour tout $\nu \in \mathbb{C}$ et pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$z^2 J''_\nu(z) + z J'_\nu(z) + (z^2 - \nu^2) J_\nu(z) = 0,$$

avec une dépendance holomorphe de $J_\nu(z)$ par rapport à ν . On peut donc dériver l'identité ci-dessus par rapport à ν , ce qui donne

$$\begin{aligned} z^2 \partial_z^2 \partial_\nu J(\nu) + z \partial_z \partial_\nu J(\nu) + (z^2 - \nu^2) \partial_\nu J(\nu) - 2\nu J(\nu) &= 0, \\ z^2 \partial_z^2 \partial_\nu J_{-\nu} + z \partial_z \partial_\nu J_{-\nu} + (z^2 - \nu^2) \partial_\nu J_{-\nu} - 2\nu J_{-\nu} &= 0, \\ -z^2 \partial_z^2 (\partial_\nu J)(-\nu) - z \partial_z (\partial_\nu J)(-\nu) - (z^2 - \nu^2) (\partial_\nu J)(-\nu) - 2\nu J(-\nu) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui implique, avec \mathcal{L}_ν donné en (8.2.10),

$$\mathcal{L}_\nu \left\{ (\partial_\nu J)(\nu) + e^{i\pi\nu} (\partial_\nu J)(-\nu) \right\} = 2\nu (J(\nu) - e^{i\pi\nu} J(-\nu)). \quad (8.2.38)$$

Avec Y_ν défini par (8.2.13), on a

$$\begin{cases} H_\nu^{[1]} = J_\nu + iY_\nu = \frac{1}{\sin \pi\nu} (ie^{-i\pi\nu} J_\nu - iJ_{-\nu}) = \frac{ie^{-i\pi\nu}}{\sin \pi\nu} (J_\nu - e^{i\pi\nu} J_{-\nu}), \\ H_\nu^{[2]} = J_\nu - iY_\nu = \frac{1}{\sin \pi\nu} (-ie^{i\pi\nu} J_\nu + iJ_{-\nu}) = \frac{-ie^{i\pi\nu}}{\sin \pi\nu} (J_\nu - e^{-i\pi\nu} J_{-\nu}). \end{cases} \quad (8.2.39)$$

Comme les zéros de la fonction entière $\nu \mapsto \sin \pi\nu$ sont simples et situés en \mathbb{Z} , et que pour $\nu \in \mathbb{Z}$ (cf. (8.1.8)), $J_{-\nu} = (-1)^\nu J_\nu$, les identités ci-dessus corroborent que les fonctions de Hankel sont entières de ν et que pour $\nu = n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} H_n^{[1]} = \frac{i(-1)^n}{\pi} \left((\partial_\nu J)(n) - i\pi(-1)^n J_{-n} + (-1)^n (\partial_\nu J)(-n) \right), \\ H_n^{[2]} = \frac{-i(-1)^n}{\pi} \left((\partial_\nu J)(n) + i\pi(-1)^n J_{-n} + (-1)^n (\partial_\nu J)(-n) \right). \end{cases} \quad (8.2.40)$$

Comme $\mathcal{L}_n J_{\pm n} = 0$, il vient de (8.2.38),

$$(\mathcal{L}_n)(H_n^{[j]}) = 0.$$

L'indépendance de ces deux solutions est démontrée dans le Théorème 8.2.11.

8.3 Utilisation des fonctions de Bessel

Nous avons vu précédemment plusieurs raisons de s'intéresser aux fonctions de Bessel : solutions d'une équation différentielle ordinaire à points singuliers réguliers, fonctions données par une fonction génératrice, développement de Fourier de la fonction 2π -périodique $e^{iz \sin \theta}$. Sans aucun doute, ces raisons étaient plus que suffisantes pour introduire ces fonctions et étudier leurs propriétés.

Néanmoins, le rôle des fonctions de Bessel est surtout primordial dans l'analyse des équations aux dérivées partielles classiques, équation de Laplace, équation des ondes, équation de Helmholtz et bien d'autres. Nous examinons dans ce paragraphe quelques calculs en dimension 2 et 3 qui montrent l'importance des fonctions de Bessel.

8.3.1 Equation de Helmholtz en dimension 2

Rappelons l'expression des coordonnées polaires dans $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$. On a pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus R_-$, avec $R_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0, y = 0\}$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arg(x + iy) = \operatorname{Im} \operatorname{Log}(x + iy) \end{cases} \quad (8.3.1)$$

de sorte que $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$. Le laplacien³ en coordonnées polaires est donné par

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

de sorte que

$$r^2 \Delta_{\mathbb{R}^2} = (r \partial_r)^2 + \partial_\theta^2 \quad (8.3.2)$$

Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique, i.e. telle que $\Delta u = 0$. On peut démontrer que u est une fonction de classe C^∞ (et même analytique). Considérons le développement en série de Fourier de

$$v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n(r) e^{in\theta}, \quad v_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

On obtient la suite d'équations ($n \in \mathbb{Z}$),

$$(r \partial_r)^2 v_n - n^2 v_n = 0, \quad (8.3.3)$$

et donc $v_n(e^t) = \alpha_n e^{nt} + \beta_n e^{-nt}$. Pour éliminer la singularité en $r = 0$, on pose

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sum_{n \geq 0} a_n r^n e^{in\theta} + \sum_{n \geq 0} b_n r^n e^{-in\theta}. \quad (8.3.4)$$

On peut vérifier a posteriori que si les rayons de convergence des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ sont strictement positifs, la fonction

$$u(x, y) = \sum_{n \geq 0} a_n (x + iy)^n + \sum_{n \geq 0} b_n (x - iy)^n,$$

3. On a $\Delta_{\mathbb{R}^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

est harmonique sur un voisinage de l'origine. Notons que l'équation (8.3.3) est à point singulier régulier, mais est plus simple que l'équation de Bessel. Considérons maintenant l'équation des ondes en dimension 2,

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{\mathbb{R}^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad c > 0 \text{ est la vitesse de propagation.}$$

Cherchons des solutions particulières de cette équation homogène qui s'écrivent $e^{ickt}u(x, y)$, où k est un paramètre réel. Il vient l'équation de Helmholtz,

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (8.3.5)$$

et posant comme précédemment

$$v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n(r) e^{in\theta}, \quad v_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

on trouve la suite d'équations ($n \in \mathbb{Z}$),

$$(r\partial_r)^2 v_n + r^2 k^2 v_n - n^2 v_n = 0, \quad (8.3.6)$$

et posant $v_n(r) = w_n(kr)$, $\rho = kr$, il vient

$$\rho^2 k^{-2} w_n''(\rho) k^2 + \rho k^{-1} w_n'(\rho) k + \rho^2 w_n(\rho) - n^2 w_n(\rho) = 0,$$

soit l'équation de Bessel d'indice n ,

$$\rho^2 w_n''(\rho) + \rho w_n'(\rho) + \rho^2 w_n(\rho) - n^2 w_n(\rho) = 0. \quad (8.3.7)$$

Par suite, on trouve en particulier les solutions

$$u(t, x, y) = e^{ickt} (a_n J_n(kr) + b_n Y_n(kr)) e^{in\theta},$$

de l'équation des ondes en dimension deux d'espace.

8.3.2 Fonctions de Bessel sphériques

Rappelons tout d'abord que les coordonnées sphériques sur $\mathbb{R}_{(x,y,z)}^3 \setminus R_-$, avec

$$R_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \leq 0, y = 0\},$$

sont définies par

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta, \\ y = r \sin \phi \sin \theta, \\ z = r \cos \phi, \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & r > 0, \\ \theta = \arg(x + iy), & \theta \in]-\pi, \pi[, \\ \phi = \arg(z + i\sqrt{x^2 + y^2}), & \phi \in]0, \pi[. \end{cases} \quad (8.3.8)$$

Le laplacien en dimension 3,

$$\Delta_{\mathbb{R}^3} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (8.3.9)$$

s'exprime comme

$$r^2 \Delta_{\mathbb{R}^3} = (r \partial_r)^2 + r \partial_r + \overbrace{\partial_\phi^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} \partial_\theta^2 + \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \partial_\phi}^{\Delta_{\mathbb{S}^2}}. \quad (8.3.10)$$

On peut aussi retenir l'expression équivalente

$$\Delta_{\mathbb{R}^3} = \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \underbrace{\left(\partial_\phi^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} \partial_\theta^2 + \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \partial_\phi \right)}_{\Delta_{\mathbb{S}^2}}. \quad (8.3.11)$$

Remarquons qu'un polynôme harmonique $H_n(x, y, z)$ homogène de degré $n \in \mathbb{N}$ vérifie

$$0 = r^2 \Delta H_n = n^2 + n + \Delta_{\mathbb{S}^2} H_n, \quad -\Delta_{\mathbb{S}^2} H_n = n(n+1) H_n.$$

Une fonction $u(x, y, z) = H_n(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}) \psi_n(r)$ est harmonique si

$$0 = H_n\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) \left((r \partial_r)^2 \psi_n + r \partial_r \psi_n \right) - n(n+1) \psi_n H_n\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right),$$

et donc si

$$(r \partial_r)^2 \psi_n + r \partial_r \psi_n - n(n+1) \psi_n = 0.$$

L'équation caractéristique de cette équation est

$$\lambda^2 + \lambda - n^2 - n = (\lambda - n)(\lambda + n + 1)$$

et l'on trouve les solutions

$$H_n(x, y, z) r^{-n} r^n = H_n(x, y, z), \quad H_n(x, y, z) r^{-n} r^{-n-1} = H_n(x, y, z) r^{-2n-1}.$$

Comme en dimension 2, on peut s'intéresser à l'équation des ondes en dimension trois d'espace et à l'équation de Helmholtz associée :

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{\mathbb{R}^3}, \quad t \in \mathbb{R},$$

on cherche des solutions particulières de cette équation homogène qui s'écrivent $e^{ickt} u(x, y, z)$, où k est un paramètre réel. Il vient l'équation de Helmholtz,

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (8.3.12)$$

et donc, cherchant une solution du type $H_n(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}) \psi_n(r)$, on trouve que ψ_n doit satisfaire

$$(r \partial_r)^2 \psi_n + r \partial_r \psi_n - n(n+1) \psi_n + r^2 k^2 \psi_n = 0. \quad (8.3.13)$$

Posant $\psi_n(r) = \rho^{-1/2} w_n(rk)$, $\rho = kr$, il vient

$$\begin{aligned} \rho^2 k^{-2} (\rho^{-1/2} w_n''(\rho) k^2 + 2(-1/2) \rho^{-3/2} w_n'(\rho) k^2 + (3/4) \rho^{-5/2} k^2 w_n(\rho)) \\ + 2 \rho k^{-1} (\rho^{-1/2} w_n'(\rho) k + (-1/2) \rho^{-3/2} k w_n(\rho)) \\ + \rho^2 \rho^{-1/2} w_n(\rho) - n(n+1) \rho^{-1/2} w_n(\rho) = 0, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \rho^2(w_n''(\rho) - \rho^{-1}w_n'(\rho) + (3/4)\rho^{-2}w_n(\rho)) \\ + 2\rho(w_n'(\rho) + (-1/2)\rho^{-1}w_n(\rho)) \\ + \rho^2w_n(\rho) - n(n+1)w_n(\rho) = 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \rho^2w_n''(\rho) - \rho w_n'(\rho) + (3/4)w_n(\rho) \\ + 2w_n'(\rho)\rho - w_n(\rho) \\ + \rho^2w_n(\rho) - n(n+1)w_n(\rho) = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\rho^2w_n''(\rho) + \rho w_n'(\rho) + \rho^2w_n(\rho) - (n^2 + n + \frac{1}{4})w_n(\rho) = 0,$$

soit l'équation de Bessel d'indice $n + \frac{1}{2}$

$$\rho^2w_n''(\rho) + \rho w_n'(\rho) + \rho^2w_n(\rho) - (n + \frac{1}{2})^2w_n(\rho) = 0. \quad (8.3.14)$$

Nous obtenons par conséquent que

$$a_n k^{-1/2} r^{-1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + b_n k^{-1/2} r^{-1/2} Y_{n+\frac{1}{2}}(kr),$$

sont des solutions de l'équation (8.3.13) en dimension 3 et, pour H_n polynôme harmonique homogène de degré n dans \mathbb{R}^3 , la fonction

$$H_n(x, y, z) r^{-n} \left(a_n \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{(kr)^{1/2}} + b_n \frac{Y_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{(kr)^{1/2}} \right) \quad (8.3.15)$$

est une solution de l'équation de Helmholtz (8.3.12) tandis que

$$f_n(t, x, y, z) = e^{ickt} H_n(x, y, z) r^{-n} \left(a_n \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{(kr)^{1/2}} + b_n \frac{Y_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{(kr)^{1/2}} \right), \quad (8.3.16)$$

vérifie $\square f_n = 0$, ce qui constitue une raison supplémentaire de s'intéresser aux fonctions de Bessel d'indices demi-entiers.

Définition 8.3.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction de Bessel sphérique de première espèce j_n et la fonction de Bessel sphérique de deuxième espèce y_n sont définies sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par

$$j_n(z) = \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(z), \quad (8.3.17)$$

$$y_n(z) = \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} Y_{n+\frac{1}{2}}(z). \quad (8.3.18)$$

Proposition 8.3.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction j_n est entière et pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$j_n(z) = (-1)^n z^n \left(\frac{d}{z dz} \right)^n \left\{ \frac{\sin z}{z} \right\} = 2^n z^n \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k} (n+k)!}{k! (2n+2k+1)!}.$$

Démonstration. La formule (8.1.9) et la définition précédente impliquent pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$j_n(z) = \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} \frac{z^{n+\frac{1}{2}}}{2^{n+\frac{1}{2}}} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(1+n+\frac{1}{2}+k)}.$$

On a en outre⁴ pour $m \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(m + \frac{1}{2}) = \frac{(2m)!}{2^{2m} m!} \sqrt{\pi}, \quad (8.3.19)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} j_n(z) &= \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} \frac{z^{n+\frac{1}{2}}}{2^{n+\frac{1}{2}}} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k} 2^{2n+2k+2} (n+k+1)!}{2^{2k} k! (2n+2k+2)! \sqrt{\pi}} \\ &= \frac{z^n}{2^{n+1}} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k} 2^{2n+2k+2} (n+k)!}{2^{2k+1} k! (2n+2k+1)!} \\ &= 2^n z^n \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k} (n+k)!}{k! (2n+2k+1)!}, \end{aligned}$$

ce qui implique en particulier que j_n est une fonction entière car

$$\frac{(n+k)!}{k! (2n+2k+1)!} = \frac{n! C_{n+k}^k}{k! (2n+2k+1)!} \leq \frac{2^{n+k} n!}{k! (2n+2k+1)!} \leq \frac{2^{k+n}}{k!}.$$

Par ailleurs, on a avec $\zeta = z^2/2$,

$$\operatorname{sinc} z = \frac{\sin z}{z} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{2^k \zeta^k}{(2k+1)!},$$

et donc pour $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\zeta} \right)^n \{\operatorname{sinc} z\} &= \sum_{k \geq n} (-1)^k \frac{2^k k! \zeta^{k-n}}{(k-n)! (2k+1)!} = \sum_{l \geq 0} (-1)^{l+n} \frac{2^{l+n} (l+n)! \zeta^l}{l! (2l+2n+1)!} \\ &= (-1)^n 2^n \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(k+n)! z^{2k}}{k! (2k+2n+1)!} = (-1)^n 2^n z^{-n} j_n(z), \end{aligned}$$

ce qui implique le résultat cherché $j_n(z) = z^n (-1)^n \left(\frac{d}{d\zeta} \right)^n \{\operatorname{sinc} z\}$. \square

4. La formule (8.3.19) est vérifiée pour $m = 0$ (cf. Théorème 2.1.3), et si elle est valide pour un entier $m \geq 0$, on obtient

$$\Gamma(m + \frac{3}{2}) = (m + \frac{1}{2}) \frac{(2m)!}{2^{2m} m!} \sqrt{\pi} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m+1} m!} \sqrt{\pi} = \frac{(2m+2)!}{2^{2m+1} m! (2m+2)} \sqrt{\pi} = \frac{(2m+2)!}{2^{2m+2} (m+1)!} \sqrt{\pi}.$$

La commande *Mathematica* `SphericalBesselJ[n, r]` permet de tracer les courbes représentatives des fonctions de Bessel sphériques, dont voici quelques exemples.

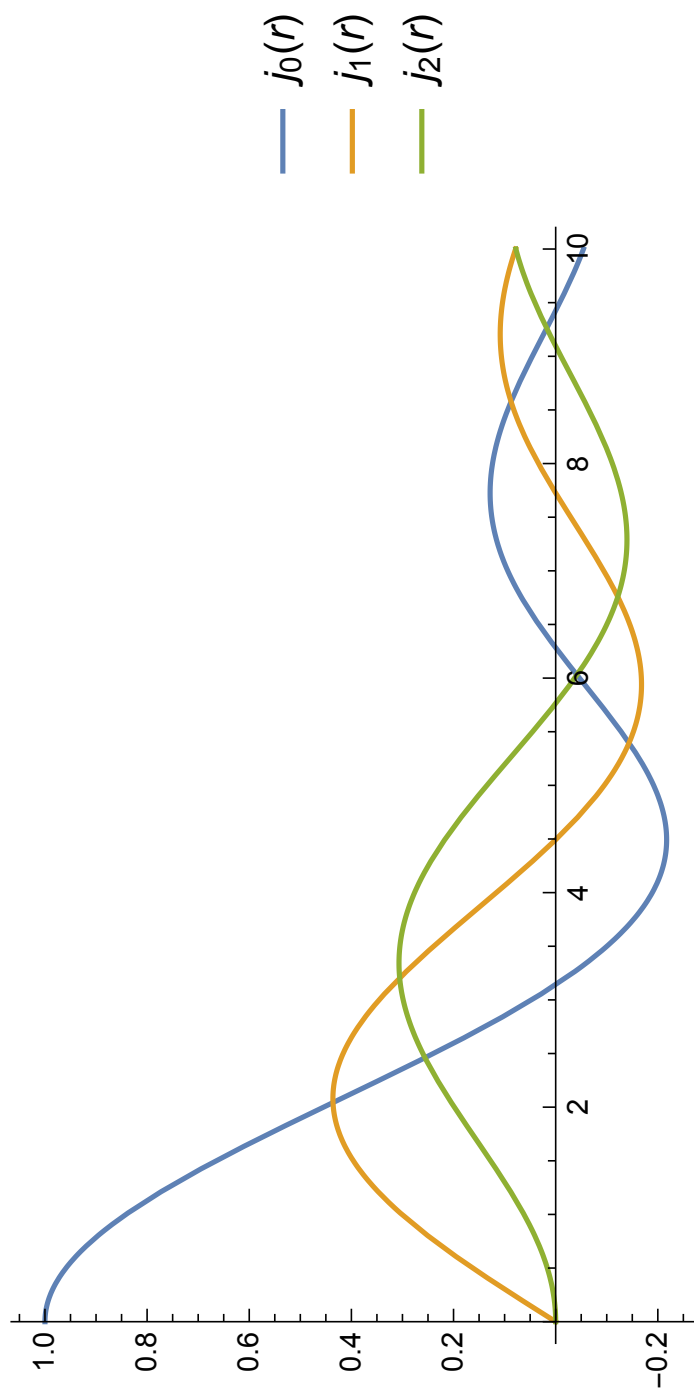


FIGURE 8.4 – FONCTIONS DE BESSEL SPHÉRIQUES.

8.3.3 Fonctions de Bessel sphériques en dimension supérieure

En dimension $d \geq 3$, on peut se poser les mêmes questions que dans les paragraphes précédents et remarquer que

$$r^2 \Delta_{\mathbb{R}^d} = (r \partial_r)^2 + (d-2)(r \partial_r) + \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}. \quad (8.3.20)$$

Si H_n est un polynôme harmonique homogène de degré n , on a donc

$$0 = n^2 H_n + n(d-2)H_n + \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} H_n, \quad -\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} H_n = n(n+d-2)H_n.$$

En posant

$$\tilde{H}_n(x) = H_n(x/\|x\|) = r^{-n} H_n(x),$$

on calcule

$$r^2 \Delta_{\mathbb{R}^d} \{\psi_n(r) \tilde{H}_n(x)\} = \tilde{H}_n \times \left((r \partial_r)^2 \psi_n + (d-2)(r \partial_r) \psi_n - n(n+d-2) \psi_n \right).$$

Par suite, une solution de l'équation de Helmholtz $(\Delta + k^2)(\tilde{H}_n \psi_n) = 0$, doit vérifier

$$(r \partial_r)^2 \psi_n + (d-2)(r \partial_r) \psi_n + (k^2 r^2 - n(n+d-2)) \psi_n = 0. \quad (8.3.21)$$

Cette équation différentielle est une équation à points singuliers réguliers, proche de l'équation de Bessel. Nous identifions ci-après quelle est l'équation de Bessel reliée à (8.3.21). Nous supposons dans la suite que $k = 1$ et l'on cherche ψ_n sous la forme

$$\psi_n(r) = r^{-\alpha} w_n(r), \quad \alpha \text{ à choisir.}$$

Avec $r = e^t$, il vient

$$\begin{aligned} & e^{\alpha t} (\partial_t^2 + (d-2)\partial_t + e^{2t} - n(n+d-2)) e^{-\alpha t} \\ &= (\partial_t - \alpha)^2 + (d-2)(\partial_t - \alpha) + e^{2t} - n(n+d-2) \\ &= \partial_t^2 + (d-2-2\alpha)\partial_t + e^{2t} - n(n+d-2) + \alpha^2 - \alpha(d-2). \end{aligned}$$

On remarque que $d-2-2\alpha = 0$ pour

$$\alpha = \frac{d}{2} - 1, \quad \text{et} \quad n(n+d-2) - \alpha^2 + \alpha(d-2) = (n+\alpha)(n-\alpha+d-2) = (n+\frac{d}{2}-1)^2.$$

On trouve l'équation

$$\partial_t^2 + e^{2t} - (n+\frac{d}{2}-1)^2, \quad \text{i.e.} \quad r^2 \partial_r^2 + r \partial_r + r^2 - (n+\frac{d}{2}-1)^2,$$

soit l'équation de Bessel d'indice $n + \frac{d}{2} - 1$. Il vient que

$$H_n(x/r) r^{1-\frac{d}{2}} \left(a_n J_{n+\frac{d}{2}-1}(r) + a_n Y_{n+\frac{d}{2}-1}(r) \right)$$

sont solutions de l'équation de Helmholtz (avec $k = 1$).

Chapitre 9

Fonctions d'Airy

9.1 L'équation d'Airy

9.1.1 Préliminaires

L'équation différentielle d'Airy est

$$y'' - xy = 0. \quad (9.1.1)$$

C'est une équation linéaire du second ordre, la plus simple de ce type qui ne soit pas à coefficients constants. En utilisant la transformation de Fourier, on remarque, au moins formellement, que si $u(\xi) = \widehat{y}(\xi)$, il vient

$$0 = \widehat{y'' - xy} = (-4\pi^2) \widehat{D_x^2 y} - \widehat{xy} = -4\pi^2 \xi^2 u(\xi) + (D_\xi u)(\xi), \quad \text{avec } D_x = \frac{\partial}{2i\pi \partial x},$$

et donc

$$u'(\xi) = -(2i\pi)^3 \xi^2 u(\xi), \quad u(\xi) = ce^{-\frac{\xi^3(2i\pi)^3}{3}}, \quad y(x) = c \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x \xi} e^{-\frac{(2i\pi)^3 \xi^3}{3}} d\xi.$$

On examine l'intégrale divergente

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{i\xi^3/3} d\xi,$$

à laquelle on peut donner un sens comme transformation de Fourier inverse de la distribution tempérée $e^{i\xi^3/3}$ et l'on pose pour $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\eta} e^{ix\zeta} e^{i\zeta^3/3} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix(\xi+i\eta)} e^{i(\xi+i\eta)^3/3} d\xi \\ &= e^{-x\eta + \frac{\eta^3}{3}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta\xi^2} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3} - \xi\eta^2)} d\xi. \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

L'intégrale est absolument convergente car pour $(x, \xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\text{Re}(ix(\xi + i\eta) + i(\xi + i\eta)^3/3) = -x\eta - \xi^2\eta + \eta^3/3, \quad (9.1.3)$$

et ne dépend pas de $\eta > 0$ car

$$\frac{d}{d\eta} \int_{\mathbb{R}} e^{ix(\xi+i\eta)} e^{i(\xi+i\eta)^3/3} d\xi = i \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi} \left\{ e^{ix(\xi+i\eta)} e^{i(\xi+i\eta)^3/3} \right\} d\xi = 0,$$

car pour tout $(x, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$\mathbb{R} \ni \xi \mapsto e^{ix(\xi+i\eta)} e^{i(\xi+i\eta)^3/3} = e^{-\eta\xi^2} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3} - \xi\eta^2)} e^{-x\eta + \frac{\eta^3}{3}},$$

appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi)$; en effet, pour $\eta > 0$, la fonction $\xi \mapsto e^{-\eta\xi^2}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi)$ de sorte que, pour un polynôme réel en ξ , $P_{x,\eta}(\xi)$,

$$\xi \mapsto e^{-\eta\xi^2} e^{iP_{x,\eta}(\xi)} = \phi(\xi) \quad \text{appartient à la classe de Schwartz } \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi),$$

car la formule de Leibniz implique que

$$\xi^l \phi^{(k)}(\xi) = e^{-\eta\xi^2} e^{iP_{x,\eta}(\xi)} Q_{k,l,x,\eta}(\xi), \quad Q_{k,l,x,\eta} \text{ polynôme},$$

de sorte que

$$\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2, \quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\xi^l \phi^{(k)}(\xi)| < +\infty.$$

Théorème 9.1.1. *La fonction d'Airy (9.1.2) est une fonction entière de x et est une solution de l'équation d'Airy (9.1.1). Si ω est une racine cubique de l'unité, les fonctions $x \mapsto \text{Ai}(\omega x)$ sont aussi solutions de (9.1.1). La fonction d'Airy est réelle sur l'axe réel.*

Démonstration. On a pour $\eta > 0$ arbitraire,

$$\text{Ai}(x) = e^{-x\eta + \frac{\eta^3}{3}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta\xi^2} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3} - \xi\eta^2)} d\xi.$$

La fonction $\mathbb{C} \ni x \mapsto e^{-\eta\xi^2} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3} - \xi\eta^2)}$ est entière et si $|\text{Im } x| \leq M$, il vient pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$|e^{-\eta\xi^2} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3} - \xi\eta^2)}| = e^{-\eta\xi^2} e^{-\xi \text{Im } x} \leq e^{-\eta\xi^2 + M|\xi|} \in L^1(\mathbb{R}_\xi),$$

ce qui démontre que la fonction d'Airy est une fonction entière de x . De plus, on a

$$\begin{aligned} \text{Ai}''(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\eta} e^{ix\zeta} e^{i\zeta^3/3} i^2 \zeta^2 d\zeta = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\eta} e^{ix\zeta} \frac{1}{i} \partial_\zeta (e^{i\zeta^3/3}) d\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}+i\eta} ix e^{ix\zeta} e^{i\zeta^3/3} d\zeta = x \text{Ai}(x). \end{aligned}$$

Si ω est une racine cubique de l'unité, alors $x \mapsto \text{Ai}(\omega x)$ est aussi une solution de l'équation d'Airy car $\text{Ai}''(\omega x)\omega^2 - x\text{Ai}(\omega x) = \omega^2(\text{Ai}''(\omega x) - \omega x\text{Ai}(\omega x)) = 0$. En outre pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \overline{\text{Ai}(x)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\xi-i\eta)} e^{-i(\xi-i\eta)^3/3} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix(-\xi+i\eta)} e^{i(-\xi+i\eta)^3/3} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix(\xi+i\eta)} e^{i(\xi+i\eta)^3/3} d\xi = \text{Ai}(x), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat cherché. \square

Remarque 9.1.2. Soit Ω un ouvert connexe du plan complexe, stable par conjugaison complexe, tel que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ est réelle sur $\Omega \cap \mathbb{R}$, alors

$$\forall z \in \Omega, \quad f(\bar{z}) = \overline{f(z)}.$$

En effet la fonction ϕ , définie par

$$\phi(z) = f(z) - \overline{f(\bar{z})},$$

est holomorphe sur Ω , nulle sur $\Omega \cap \mathbb{R}$, qui contient un intervalle ouvert non vide : ceci implique que ϕ est identiquement nulle sur Ω . En particulier si f est une fonction entière, réelle sur l'axe réel, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. Ceci s'applique notamment à la fonction d'Airy (9.1.2).

9.1.2 Bases de solutions de l'équation d'Airy

Lemme 9.1.3. Avec Ai définie par (9.1.2), on a

$$\text{Ai}(0) = \frac{3^{-1/6}\Gamma(1/3)}{2\pi}, \quad \text{Ai}'(0) = -\frac{3^{1/6}\Gamma(2/3)}{2\pi}. \quad (9.1.4)$$

Démonstration. On a $\text{Ai}(0) \in \mathbb{R}$ et donc

$$2\pi \text{Ai}(0) = \text{Re} \int_0^{+\infty} e^{i(\xi+i)^3/3} d\xi + \text{Re} \int_{-\infty}^0 e^{i(\xi+i)^3/3} d\xi,$$

et comme

$$\text{Re} \int_{-\infty}^0 e^{i(\xi+i)^3/3} d\xi = \text{Re} \int_0^{+\infty} e^{i(-\xi+i)^3/3} d\xi = \text{Re} \int_0^{+\infty} e^{-i(-\xi-i)^3/3} d\xi,$$

il vient

$$\pi \text{Ai}(0) = \text{Re} \int_0^{+\infty} e^{i(\xi+i)^3/3} d\xi = \text{Re} \int_{i+\mathbb{R}_+} e^{i\zeta^3/3} d\zeta.$$

On note également que pour $R > 0$,

$$\begin{aligned} I_1(R) &= \int_{[i+R, i+Re^{i\pi/6}]} e^{i\zeta^3/3} d\zeta = \int_0^{\pi/6} e^{i(i+Re^{i\theta})^3/3} iRe^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/6} e^{i(-i-3Re^{i\theta}+3iR^2e^{2i\theta}+R^3e^{i3\theta})/3} iRe^{i\theta} d\theta, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} |I_1(R)| &\leq R \int_0^{\pi/6} e^{\frac{1}{3}+R\sin\theta-R^2\cos(2\theta)-\frac{1}{3}R^3\sin(3\theta)} d\theta \leq Re^{1/3}e^{-R^2/2} \int_0^{\pi/6} e^{R\sin\theta} d\theta \\ &\leq Re^{1/3}e^{-R^2/2}e^{R/2}\frac{\pi}{6}, \end{aligned}$$

et $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_1(R) = 0$, ce qui implique

$$\text{Ai}(0) = \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \text{Re} \int_{[i, i+Re^{i\pi/6}]} e^{i\zeta^3/3} d\zeta.$$

On remarque que

$$\text{Re} \int_{[0, i]} e^{i\zeta^3/3} d\zeta = \text{Re} \int_0^1 e^{i^3 t^3/3} i dt = 0.$$

En outre, avec $I_2(R) = \int_{[Re^{i\pi/6}, i+Re^{i\pi/6}]} e^{i\zeta^3/3} d\zeta = \int_0^1 e^{\frac{i}{3}(Re^{i\pi/6}+it)^3} i dt$, on obtient

$$I_2(R) = \int_0^1 e^{\frac{i}{3}(R^3 i + 3R^2 e^{i\pi/3} it - 3Re^{i\pi/6} t^2 - it^3)} i dt, \quad |I_2(R)| \leq e^{-R^3/3 + R \sin(\pi/6) + \frac{1}{3}},$$

ce qui donne $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_2(R) = 0$. On obtient par conséquent

$$\text{Ai}(0) = \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \text{Re} \int_{[0, Re^{i\pi/6}]} e^{i\zeta^3/3} d\zeta. \quad (9.1.5)$$

On a

$$I_3(R) = \int_{[0, Re^{i\pi/6}]} e^{i\zeta^3/3} d\zeta = \int_0^R e^{\frac{i}{3}(t^3 i)} dt e^{i\pi/6} = e^{i\pi/6} \int_0^R e^{-t^3/3} dt,$$

et

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_3(R) = e^{i\pi/6} \int_0^{+\infty} e^{-s} 3^{1/3} \frac{1}{3} s^{-2/3} ds = e^{i\pi/6} 3^{-2/3} \Gamma(1/3),$$

ce qui donne

$$\text{Ai}(0) = \frac{1}{\pi} 3^{-2/3} \Gamma(1/3) \sqrt{3}/2 = \frac{\Gamma(1/3)}{2\pi} 3^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} = \frac{\Gamma(1/3)}{2\pi} 3^{-\frac{1}{6}}, \quad \text{qed.}$$

Comme la fonction d'Airy est réelle sur l'axe réel, on a également $\text{Ai}'(0) \in \mathbb{R}$ et donc

$$2\pi \text{Ai}'(0) = \text{Re} \int_0^{+\infty} i(\xi + i) e^{i(\xi+i)^3/3} d\xi + \text{Re} \int_{-\infty}^0 i(\xi + i) e^{i(\xi+i)^3/3} d\xi,$$

et comme

$$\begin{aligned} \text{Re} \int_{-\infty}^0 i(\xi + i) e^{i(\xi+i)^3/3} d\xi &= \text{Re} \int_0^{+\infty} i(-\xi + i) e^{i(-\xi+i)^3/3} d\xi \\ &= \text{Re} \int_0^{+\infty} (-i)(-\xi - i) e^{-i(-\xi-i)^3/3} d\xi, \end{aligned}$$

il vient

$$\pi \text{Ai}'(0) = \text{Re} \int_0^{+\infty} i(\xi + i) e^{i(\xi+i)^3/3} d\xi = \text{Re} \int_{i+\mathbb{R}_+} i\zeta e^{i\zeta^3/3} d\zeta.$$

On note également que pour $R > 0$,

$$\begin{aligned} I_4(R) &= \int_{[i+R, i+Re^{i\pi/6}]} i\zeta e^{i\zeta^3/3} d\zeta = \int_0^{\pi/6} e^{i(i+Re^{i\theta})^3/3} i(i+Re^{i\theta}) i Re^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/6} e^{i(-i-3Re^{i\theta}+3iR^2e^{2i\theta}+R^3e^{i3\theta})/3} i(i+Re^{i\theta}) i Re^{i\theta} d\theta, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
 |I_4(R)| &\leq R(R+1) \int_0^{\pi/6} e^{\frac{1}{3}+R\sin\theta-R^2\cos(2\theta)-\frac{1}{3}R^3\sin(3\theta)} d\theta \\
 &\leq R(R+1)e^{1/3}e^{-R^2/2} \int_0^{\pi/6} e^{R\sin\theta} d\theta \\
 &\leq R(R+1)e^{1/3}e^{-R^2/2}e^{R/2}\frac{\pi}{6},
 \end{aligned}$$

et $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_4(R) = 0$, ce qui implique

$$\mathbf{Ai}'(0) = \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \int_{[i, i+Re^{i\pi/6}]} i\zeta e^{i\zeta^3/3} d\zeta.$$

On remarque que

$$\operatorname{Re} \int_{[0, i]} i\zeta e^{i\zeta^3/3} d\zeta = \operatorname{Re} \int_0^1 iite^{i^3t^3/3} idt = 0.$$

En outre, avec

$$I_5(R) = \int_{[Re^{i\pi/6}, i+Re^{i\pi/6}]} i\zeta e^{i\zeta^3/3} d\zeta = \int_0^1 i(Re^{i\pi/6} + it)e^{\frac{i}{3}(Re^{i\pi/6} + it)^3} idt,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
 I_5(R) &= \int_0^1 e^{\frac{i}{3}(R^3i+3R^2e^{i\pi/3}it-3Re^{i\pi/6}t^2-it^3)} i(Re^{i\pi/6} + it) idt, \\
 |I_5(R)| &\leq (R+1)e^{-R^3/3+R\sin(\pi/6)+\frac{1}{3}},
 \end{aligned}$$

ce qui donne $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_5(R) = 0$. On obtient par conséquent

$$\mathbf{Ai}'(0) = \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \int_{[0, Re^{i\pi/6}]} i\zeta e^{i\zeta^3/3} d\zeta. \quad (9.1.6)$$

On a

$$I_6(R) = \int_{[0, Re^{i\pi/6}]} i\zeta e^{i\zeta^3/3} d\zeta = \int_0^R ite^{i\pi/6} e^{\frac{i}{3}(t^3i)} dt e^{i\pi/6} = ie^{i\pi/3} \int_0^R te^{-t^3/3} dt,$$

et

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_6(R) = ie^{i\pi/3} \int_0^{+\infty} e^{-s} 3^{1/3} \frac{1}{3} s^{-2/3} 3^{1/3} s^{1/3} ds = ie^{i\pi/3} 3^{-1/3} \Gamma(2/3),$$

ce qui donne

$$\mathbf{Ai}'(0) = -\frac{1}{\pi} 3^{-1/3} \Gamma(2/3) \sqrt{3}/2 = -\frac{\Gamma(2/3)}{2\pi} 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = -\frac{\Gamma(2/3)}{2\pi} 3^{\frac{1}{6}}, \text{ qed.}$$

□

Proposition 9.1.4. *La fonction d'Airy (9.1.2) vérifie pour tout $x \in \mathbb{C}$,*

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\xi^3/3} e^{-x\xi/2} \cos\left(\frac{x\xi\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) d\xi. \quad (9.1.7)$$

Démonstration. Notons que le membre de droite de l'égalité ci-dessus (notée $\tilde{\text{Ai}}$ plus bas) est une fonction entière de x car d'une part,

$$\mathbb{C} \ni x \mapsto e^{-\xi^3/3} e^{-x\xi/2} \cos\left(\frac{x\xi\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{est une fonction entière,}$$

et d'autre part si $|x| \leq M$, pour $\xi \geq 0$,

$$|e^{-\xi^3/3} e^{-x\xi/2} \cos\left(\frac{x\xi\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right)| \leq e^{-\xi^3/3} e^{M\xi/2} e^{M\xi\sqrt{3}/2} \in L^1(\mathbb{R}_\xi^+).$$

Considérons les fonctions entières a définies pour $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ par

$$a(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-\xi^3/3} e^{ixy\xi} d\xi. \quad (9.1.8)$$

On a

$$\partial_x^2 a(x, y) = y^2 \int_0^{+\infty} \underbrace{(-\xi^2) e^{-\xi^3/3}}_{=\partial_\xi(e^{-\xi^3/3})} e^{ixy\xi} d\xi = y^2 \left(-1 - ixy \int_0^{+\infty} e^{-\xi^3/3} e^{ixy\xi} d\xi \right),$$

et par conséquent,

$$\partial_x^2 a(x, y) + ixy^3 a(x, y) = -y^2,$$

de sorte que, pour $y_1^3 = i = y_2^3$,

$$(\partial_x^2 - x) \{y_1 a(x, y_1) - y_2 a(x, y_2)\} = -y_1^3 + y_2^3.$$

On obtient donc avec $y_1 = e^{i\pi/6}$, $y_2 = -e^{-i\pi/6}$,

$$(\partial_x^2 - x) \{e^{i\pi/6} a(x, e^{i\pi/6}) + e^{-i\pi/6} a(x, -e^{-i\pi/6})\} = 0. \quad (9.1.9)$$

Notons alors que

$$\begin{aligned} & e^{i\pi/6} a(x, e^{i\pi/6}) + e^{-i\pi/6} a(x, -e^{-i\pi/6}) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi^3/3} (e^{ixe^{i\pi/6}\xi+i\pi/6} + e^{-ixe^{-i\pi/6}\xi-i\pi/6}) d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi^3/3} (e^{ix(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})\xi+i\pi/6} + e^{-ix(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})\xi-i\pi/6}) d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi^3/3-x\xi/2} (e^{ix\frac{\sqrt{3}}{2}\xi+i\pi/6} + e^{-ix\frac{\sqrt{3}}{2}\xi-i\pi/6}) d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi^3/3-x\xi/2} 2 \cos\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}\xi + \pi/6\right) d\xi, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\tilde{\text{Ai}}(x) = \frac{1}{2\pi} \left(e^{i\pi/6} a(x, e^{i\pi/6}) + e^{-i\pi/6} a(x, -e^{-i\pi/6}) \right),$$

où a est donnée par (9.1.8). Nous avons également démontré que $\tilde{\text{Ai}}$ est une solution de l'équation d'Airy (9.1.1). En outre, nous pouvons calculer directement

$$\begin{aligned} \tilde{\text{Ai}}(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\xi^3/3} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) d\xi = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-s} 3^{1/3} \frac{1}{3} s^{-2/3} ds = 3^{-1/6} \frac{1}{2\pi} \Gamma(1/3) \\ &= \text{Ai}(0) \quad (\text{cf. Lemme 9.1.3}). \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\text{Ai}}'(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\xi^3/3} \left(-\frac{\xi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \frac{\xi\sqrt{3}}{2} \right) d\xi \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-s} 3^{1/3} \frac{1}{3} s^{-2/3} 3^{1/3} s^{1/3} ds \\ &= -3^{1/6} \frac{1}{2\pi} \Gamma(2/3) = \text{Ai}'(0) \quad (\text{cf. Lemme 9.1.3}). \end{aligned}$$

Comme $\tilde{\text{Ai}} - \text{Ai}$ est une solution de l'équation d'Airy qui s'annule à l'ordre deux en 0 on trouve que $\tilde{\text{Ai}} = \text{Ai}$. \square

Théorème 9.1.5. Avec $j = e^{2i\pi/3}$, $\{\text{Ai}(x), \text{Ai}(jx)\}$ forme une base de l'espace des solutions de l'équation d'Airy. C'est le cas également de $\{\text{Ai}(jx), \text{Ai}(j^2x)\}$ et de $\{\text{Ai}(x), \text{Ai}(j^2x)\}$. En outre pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$\text{Ai}(x) + j\text{Ai}(jx) + j^2\text{Ai}(j^2x) = 0. \quad (9.1.10)$$

Démonstration. D'après le Théorème 9.1.1, pour ω racine cubique de l'unité, $\text{Ai}(\omega x)$ est solution de l'équation d'Airy. Posons pour $\omega_k^3 = 1, k = 1, 2, \omega_1 \neq \omega_2$,

$$W(x) = \begin{vmatrix} \text{Ai}(\omega_1 x) & \text{Ai}(\omega_2 x) \\ \omega_1 \text{Ai}'(\omega_1 x) & \omega_2 \text{Ai}'(\omega_2 x) \end{vmatrix}.$$

On a, en utilisant la formule des compléments (cf. Corollaire 4.3.3),

$$W(0) = \begin{vmatrix} \text{Ai}(0) & \text{Ai}(0) \\ \omega_1 \text{Ai}'(0) & \omega_2 \text{Ai}'(0) \end{vmatrix} = \text{Ai}(0) \text{Ai}'(0) (\omega_2 - \omega_1) = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi\sqrt{3}},$$

et donc

$$W(x) = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi\sqrt{3}},$$

ce qui donne le premier résultat. La relation (9.1.10) se déduit du fait que le membre de gauche est une solution a de l'équation d'Airy telle que¹

$$a(0) = \text{Ai}(0)(1 + j + j^2) = 0, \quad a'(0) = \text{Ai}'(0)(1 + j^2 + j^4) = \text{Ai}'(0)(1 + j^2 + j) = 0.$$

\square

1. On a $(1 + j + j^2)(1 - j) = 1 - j^3 = 0$, ce qui implique $1 + j + j^2 = 0$. De manière générale si α est une racine N ième de l'unité différente de 1, $N \geq 2$, on a

$$(1 - \alpha) \sum_{0 \leq k \leq N-1} \alpha^k = 1 - \alpha^N = 0 \implies \sum_{0 \leq k \leq N-1} \alpha^k = 0.$$

Définition 9.1.6. Pour $x \in \mathbb{C}$, on définit

$$\mathbf{Bi}(x) = e^{i\pi/6} \mathbf{Ai}(jx) + e^{-i\pi/6} \mathbf{Ai}(j^2x), \quad (9.1.11)$$

où \mathbf{Ai} est la fonction entière définie en (9.1.2) (et $j = e^{2i\pi/3}$). La fonction \mathbf{Bi} est appelée fonction d'Airy de deuxième espèce.

Proposition 9.1.7. La fonction \mathbf{Bi} est une fonction entière solution de l'équation d'Airy (9.1.1). L'ensemble $\{\mathbf{Ai}, \mathbf{Bi}\}$ forme une base de l'espace des solutions de cette équation. On a en outre

$$\mathbf{Bi}(0) = \frac{1}{3^{1/6}\Gamma(2/3)}, \quad \mathbf{Bi}'(0) = \frac{3^{1/6}}{\Gamma(1/3)}, \quad (9.1.12)$$

et la fonction \mathbf{Bi} est réelle sur l'axe réel.

Démonstration. La première assertion est une conséquence immédiate du Théorème 9.1.5 et de (9.1.11); en outre (9.1.10) implique

$$\mathbf{Ai}(x) = -j\mathbf{Ai}(jx) - j^2\mathbf{Ai}(j^2x),$$

et comme $\{\mathbf{Ai}(j\cdot), \mathbf{Ai}(j^2\cdot)\}$ forme une base de solutions de l'équation d'Airy, il suffit de calculer

$$\begin{vmatrix} e^{i\pi/6} & -j \\ e^{-i\pi/6} & -j^2 \end{vmatrix} = -je^{-i\pi/6} \begin{vmatrix} e^{i\pi/3} & 1 \\ 1 & j \end{vmatrix} = 2je^{-i\pi/6} \neq 0.$$

Les formules (9.1.12) sont issues du Lemme 9.1.3 et de la formule des compléments (cf. Corollaire 4.3.3) :

$$\begin{aligned} \mathbf{Bi}(0) &= \mathbf{Ai}(0)2\cos(\pi/6) = \frac{3^{-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}\Gamma(1/3)\Gamma(2/3)}{2\pi\Gamma(2/3)} = \frac{3^{1/3}}{2\Gamma(2/3)} \frac{1}{\sin(\pi/3)} \\ &= \frac{3^{1/3-1/2}}{\Gamma(2/3)} = \frac{1}{3^{1/6}\Gamma(2/3)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Bi}'(0) &= \mathbf{Ai}'(0)(je^{i\pi/6} + j^2e^{-i\pi/6}) = -\frac{3^{1/6}\Gamma(2/3)}{2\pi} 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \frac{3^{1/6}\Gamma(2/3)}{2\pi} 3^{1/2} = \frac{3^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}\Gamma(1/3)\Gamma(2/3)}{2\pi\Gamma(1/3)} = \frac{3^{2/3}}{2\Gamma(1/3)} \frac{1}{\sin(\pi/3)} \\ &= \frac{3^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}}{\Gamma(1/3)} = \frac{3^{1/6}}{\Gamma(1/3)}. \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a, comme $\bar{j} = j^2$, $\overline{\mathbf{Bi}(x)} = e^{-i\pi/6} \mathbf{Ai}(j^2x) + e^{i\pi/6} \mathbf{Ai}(jx) = \mathbf{Bi}(x)$. \square

9.2 Développements asymptotiques

9.2.1 Développement en série entière

La formule (9.1.7) définit une fonction entière, ce qui est le cas également de

$$a(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\xi^3/3} e^{-x\xi/2} e^{i(\frac{x\xi\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\xi^3/3} e^{ix\xi e^{i\pi/6}} d\xi e^{i\frac{\pi}{6}}. \quad (9.2.1)$$

Il vient par conséquent

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} \int_0^{+\infty} e^{-\xi^3/3} \xi^k (ie^{i\pi/6})^k d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} \int_0^{+\infty} e^{-\xi^3/3} \xi^k d\xi e^{\frac{i\pi}{6}(4k+1)} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} \int_0^{+\infty} e^{-s} (3s)^{k/3} 3^{1/3} \frac{1}{3} s^{-2/3} ds e^{\frac{i\pi}{6}(4k+1)} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} \Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right) 3^{\frac{k-2}{3}} e^{\frac{i\pi}{6}(4k+1)}. \end{aligned}$$

Proposition 9.2.1. *La fonction d'Airy Ai définie par (9.1.1) est une fonction entière dont le développement en série entière est*

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi 3^{2/3}} \sum_{k \geq 0} \frac{(3^{1/3}x)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right) \sin\left(2(k+1)\frac{\pi}{3}\right). \quad (9.2.2)$$

Démonstration. La formule (9.1.7) implique que pour $x \in \mathbb{R}$, $\text{Ai}(x) = \text{Re } a(x)$, où a est donnée par (9.2.1). Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \text{Ai}^{(k)}(0) &= \frac{1}{\pi 3^{2/3}} \Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right) 3^{\frac{k}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6}(4k+1)\right) \\ &= \frac{1}{\pi 3^{2/3}} \Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right) 3^{\frac{k}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{6}(4k+1) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi 3^{2/3}} \Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right) 3^{\frac{k}{3}} \sin\left(2(k+1)\frac{\pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

□

Remarque 9.2.2. Les indices $k \geq 0$ dans (9.2.2) tels que

$$2(k+1) \in 3\mathbb{N}, \quad \text{i.e. } k+1 \in 3\mathbb{N}, \text{ soit } k \equiv 2 \pmod{3},$$

sont tels que $\sin\left(2(k+1)\frac{\pi}{3}\right) = 0$ et par conséquent la somme (9.2.2) ne fait intervenir que des indices confus à 0 et 1 modulo 3.

9.2.2 Développements asymptotiques

En posant $\phi = (\xi + i\eta)^3/3 + x(\xi + i\eta)$, il vient $\partial\phi/\partial\xi = (\xi + i\eta)^2 + x$. Si $x = \eta^2$, on obtient $(\partial\phi/\partial\xi)(\xi = 0) = 0$. La formule de Taylor donne pour $x = \eta^2$,

$$\underbrace{(\xi + i\eta)^3/3 + x(\xi + i\eta)}_{\phi(\xi)} = \underbrace{i^3\eta^3/3 + xi\eta}_{\phi(0)} + \frac{\xi^2}{2} \underbrace{2i\eta}_{\phi''(0)} + \frac{\xi^3}{3} = \frac{2i}{3}x^{3/2} + ix^{1/2}\xi^2 + \xi^3/3,$$

et pour $x > 0$ la formule (9.1.2) implique (car on peut choisir $\eta > 0$ arbitraire)

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2x^{3/2}}{3}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^{1/2}\xi^2} e^{i\xi^3/3} d\xi.$$

Lemme 9.2.3. *Pour $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a*

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2x^{3/2}}{3}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^{1/2}\xi^2} e^{i\xi^3/3} d\xi. \quad (9.2.4)$$

Démonstration. Le membre de droite de l'égalité ci-dessus est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$: en effet pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'application

$$x \mapsto e^{-x^{1/2}\xi^2} e^{i\xi^3/3} \quad \text{est holomorphe sur } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-,$$

et pour $|\arg x| \leq \pi - \epsilon_0$, $\epsilon_0 > 0$, $|x| \geq \epsilon_1 > 0$, on a

$$\text{Re}(x^{1/2}) = \text{Re}(e^{\frac{\text{Log } x}{2}}) = |x|^{1/2} \text{Re}(e^{\frac{i \text{Im } \text{Log } x}{2}}) = |x|^{1/2} \cos\left(\frac{\arg x}{2}\right),$$

et

$$|e^{-x^{1/2}\xi^2} e^{i\xi^3/3}| = e^{-\xi^2|x|^{1/2} \cos(\frac{\arg x}{2})} \leq e^{-\xi^2|x|^{1/2} \cos(\epsilon_0/2)} \leq e^{-\xi^2\epsilon_1^{1/2} \cos(\epsilon_0/2)} \in L^1(\mathbb{R}).$$

De plus, on a vu que le membre de droite de (9.2.4) et Ai coïncidaient sur $x > 0$, ce qui implique le résultat par prolongement analytique. \square

Théorème 9.2.4. *Pour $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a*

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2x^{3/2}}{3}} x^{-1/4} \left\{ \sum_{0 \leq l \leq M} \frac{(-1)^l}{3^{2l}(2l)!} \Gamma(3l + \frac{1}{2}) x^{-\frac{3l}{2}} + r_M(x) \right\}, \quad (9.2.5)$$

$$|r_M(x)| \leq \frac{\Gamma(3(M+1) + \frac{1}{2})}{3^{2(M+1)}(2(M+1))!} |x|^{-\frac{3(M+1)}{2}} \left(\cos\left(\frac{\arg x}{2}\right) \right)^{-3(M+1) - \frac{1}{2}}. \quad (9.2.6)$$

Démonstration. Du Lemme 9.2.3, il vient pour $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2x^{3/2}}{3}} \left(\sum_{0 \leq k \leq N} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^{1/2}\xi^2} \frac{(i\xi^3)^k}{3^k k!} d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} e^{-x^{1/2}\xi^2} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^N}{N!} e^{\theta i\xi^3/3} (i\xi^3/3)^{N+1} d\theta d\xi \right). \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

Les termes pour k impair s'annulent (par imparité de la fonction intégrée) et on a en outre pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^{1/2}\xi^2} \frac{(i\xi^3)^{2l}}{3^{2l}(2l)!} d\xi &= \frac{(-1)^l}{3^{2l}(2l)!} 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} (x^{-1/4} t^{1/2})^{6l} \frac{1}{2} t^{-1/2} dt x^{-1/4} \\ &= \frac{(-1)^l}{3^{2l}(2l)!} x^{-\frac{6l+1}{4}} \Gamma(3l + \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

et par prolongement analytique la même formule pour $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Examinons le module du reste dans la parenthèse de (9.2.7), pour $N = 2M + 1$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-x^{1/2}\xi^2} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^N}{N!} e^{\theta i \xi^3/3} (i\xi^3/3)^{N+1} d\theta d\xi \right| \\ \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^{1/2} \cos((\arg x)/2) \xi^2} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^N}{N!} (|\xi|^3/3)^{N+1} d\theta d\xi \\ = \int_{\mathbb{R}} e^{-\operatorname{Re}(x^{1/2}) \xi^2} \frac{(\xi^3)^{2M+2}}{3^{2M+2}(2M+2)!} d\xi \\ = \frac{\Gamma(3M+3+\frac{1}{2})}{3^{2M+2}(2M+2)!} (\operatorname{Re} x^{1/2})^{-\frac{6M+7}{2}}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2x^{3/2}}{3}} x^{-1/4} r_M(x) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2x^{3/2}}{3}} x^{-1/4} \right| |r_M(x)| \\ &\leq \left| \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2x^{3/2}}{3}} \right| \frac{\Gamma(3M+3+\frac{1}{2})}{3^{2M+2}(2M+2)!} (\operatorname{Re} x^{1/2})^{-\frac{6M+7}{2}}, \end{aligned}$$

et donc

$$|r_M(x)| \leq \frac{\Gamma(3M+3+\frac{1}{2})}{3^{2M+2}(2M+2)!} (\operatorname{Re} x^{1/2})^{-\frac{6M+7}{2}} |x|^{1/4}. \quad (9.2.8)$$

Comme

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} x^{1/2})^{-\frac{6M+7}{2}} |x|^{1/4} &= |x|^{-\frac{6M+7}{4}} \left(\cos\left(\frac{\arg x}{2}\right) \right)^{-\frac{6M+7}{2}} |x|^{1/4} \\ &= |x|^{-\frac{3M+3}{2}} \left(\cos\left(\frac{\arg x}{2}\right) \right)^{-3M-3-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

(9.2.8) donne le résultat. □

Remarque 9.2.5 (Phénomène de Stokes). Pour $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a

$$-x^{3/2} = -|x|^{3/2} e^{i\frac{3\arg x}{2}}, \quad \operatorname{Re}(-x^{3/2}) = -|x|^{3/2} \cos\left(\frac{3\arg x}{2}\right)$$

Par suite, si

$$\left| \frac{3\arg x}{2} \right| < \frac{\pi}{2}, \quad i.e. \quad |\arg x| < \pi/3,$$

la fonction d'Airy décroît exponentiellement lorsque $|x| \rightarrow +\infty$. On a pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow +\infty \\ |\arg x| \leq (\pi - \epsilon)/3}} \text{Ai}(x) e^{\frac{2}{3}|x|^{3/2} \cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} = 0. \quad (9.2.9)$$

En revanche, si $\frac{\pi}{3} < |\arg x| < \pi$, la fonction d'Airy croît exponentiellement lorsque $|x| \rightarrow +\infty$. Le développement du Théorème précédent implique que pour x sur une demi-droite fixée d'argument $\in]\pi/3, \pi[$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \text{Ai}(x) 2\pi e^{\frac{2}{3}x^{3/2}} x^{1/4} &= 1, \\ \text{i.e. } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \text{Ai}(x) 2\pi e^{\frac{2}{3}|x|^{3/2} \cos(3\theta/2)} x^{1/4} &= 1, \quad \theta = \arg x. \end{aligned}$$

Si pour $\epsilon > 0$, $\theta \in]\frac{\pi}{3} + \epsilon, \pi - \epsilon[$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{3\epsilon}{2} \leq \frac{3\theta}{2} \leq \frac{3\pi}{2} - \frac{3\epsilon}{2}, \quad \cos(3\theta/2) \leq \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{3\epsilon}{2}) = -\sin(3\epsilon/2) < 0,$$

Il vient pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow +\infty \\ \frac{\pi}{3} + \epsilon \leq \arg x \leq \pi - \epsilon}} |\text{Ai}(x)| 2\pi |x|^{1/4} e^{-\frac{1}{3}|x|^{3/2} \sin(3\epsilon/2)} = +\infty, \quad (9.2.10)$$

car pour $|x| \geq R_0$, $\frac{\pi}{3} + \epsilon \leq \arg x \leq \pi - \epsilon$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq |\text{Ai}(x) 2\pi e^{\frac{2}{3}x^{3/2}} x^{1/4}| = |\text{Ai}(x)| 2\pi e^{\frac{2}{3}|x|^{3/2} \cos(3\theta/2)} |x|^{1/4} \\ &\leq |\text{Ai}(x)| 2\pi e^{-\frac{2}{3}|x|^{3/2} \sin(3\epsilon/2)} |x|^{1/4}, \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{2} e^{\frac{1}{3}|x|^{3/2} \sin(3\epsilon/2)} \leq |\text{Ai}(x)| 2\pi e^{-\frac{1}{3}|x|^{3/2} \sin(3\epsilon/2)} |x|^{1/4},$$

ce qui implique (9.2.10).

Si $\arg x = \pm\pi/3$, alors le Théorème 9.2.4 implique

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \text{Ai}(re^{i\pi/3}) 2\pi r^{1/4} e^{i\pi/12} e^{\frac{2}{3}ir^{3/2}} &= 1 \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \text{Ai}(re^{-i\pi/3}) 2\pi r^{1/4} e^{-i\pi/12} e^{-\frac{2}{3}ir^{3/2}}. \quad (9.2.11) \end{aligned}$$

On peut maintenant s'interroger sur le comportement de la fonction d'Airy sur \mathbb{R}_- . En utilisant l'identité (9.1.10), il vient pour $r > 0$,

$$\begin{aligned} \text{Ai}(-r) &= -j\text{Ai}(-jr) - j^2\text{Ai}(-j^2r) = e^{-i\pi/3}\text{Ai}(re^{-i\frac{\pi}{3}}) + e^{i\pi/3}\text{Ai}(re^{i\frac{\pi}{3}}) \\ &= 2\text{Re}(e^{i\frac{\pi}{3}}\text{Ai}(re^{i\frac{\pi}{3}})). \end{aligned}$$

En outre on a, d'après le Théorème 9.2.4, pour $r > 0$,

$$\begin{aligned} \text{Ai}(re^{i\pi/3}) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}r^{3/2}e^{i\pi/2}} e^{-i\pi/12} r^{-1/4} (1 + O(r^{-3/2})) \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}r^{3/2}i} e^{-i\pi/12} r^{-1/4} (1 + O(r^{-3/2})), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Ai}(re^{i\pi/3})e^{i\pi/3} &= \frac{1}{2\pi}e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}r^{3/2})}r^{-1/4}(1+O(r^{-3/2})) \\ \operatorname{Ai}(-r) &= \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}r^{3/2}\right)r^{-1/4}(1+O(r^{-3/2})),\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\operatorname{Ai}(-r) = \frac{1}{\pi r^{1/4}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}r^{3/2}\right)(1+O(r^{-3/2})). \quad (9.2.12)$$

9.3 Dessins

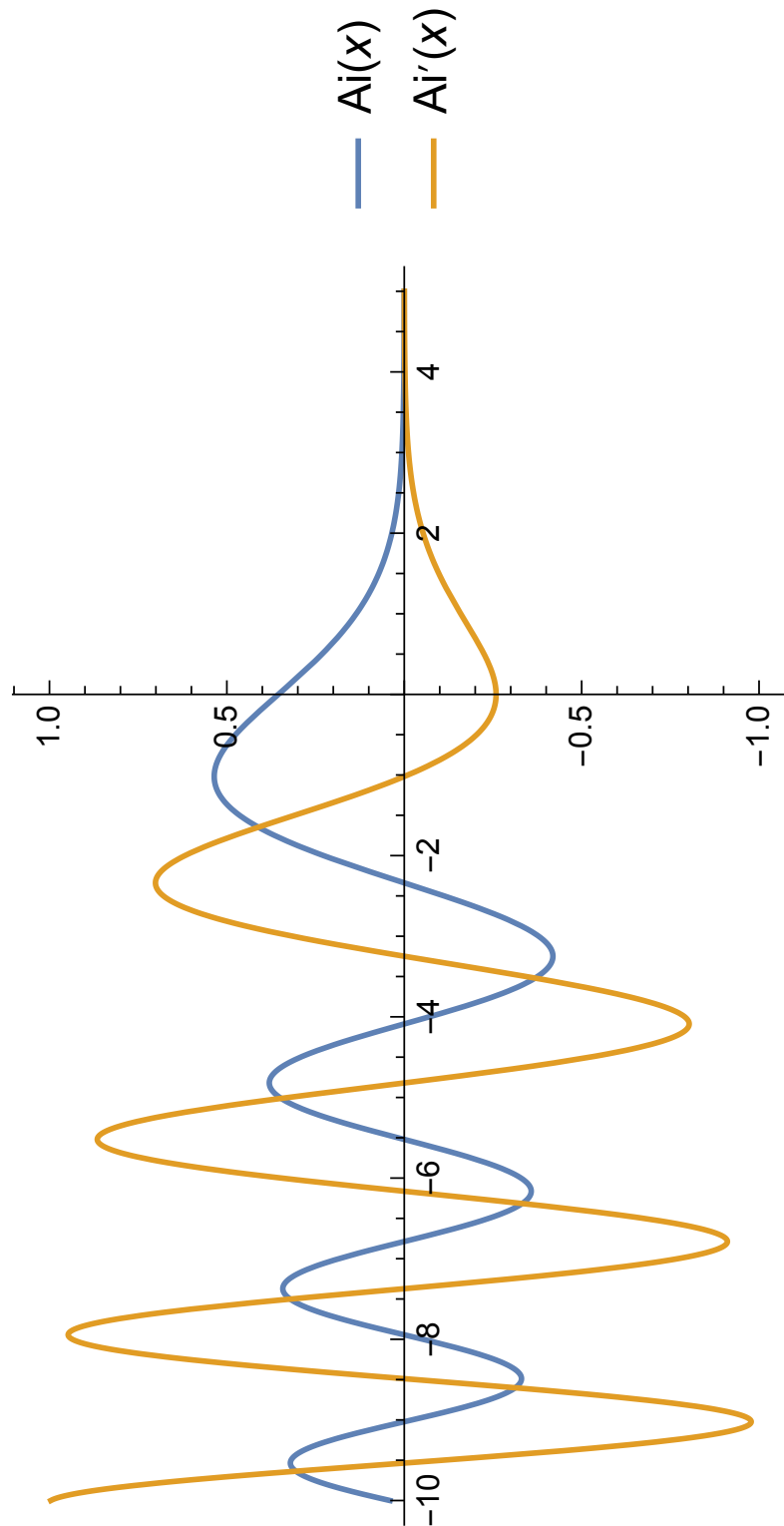


FIGURE 9.1 – La fonction d’Airy et sa dérivée.

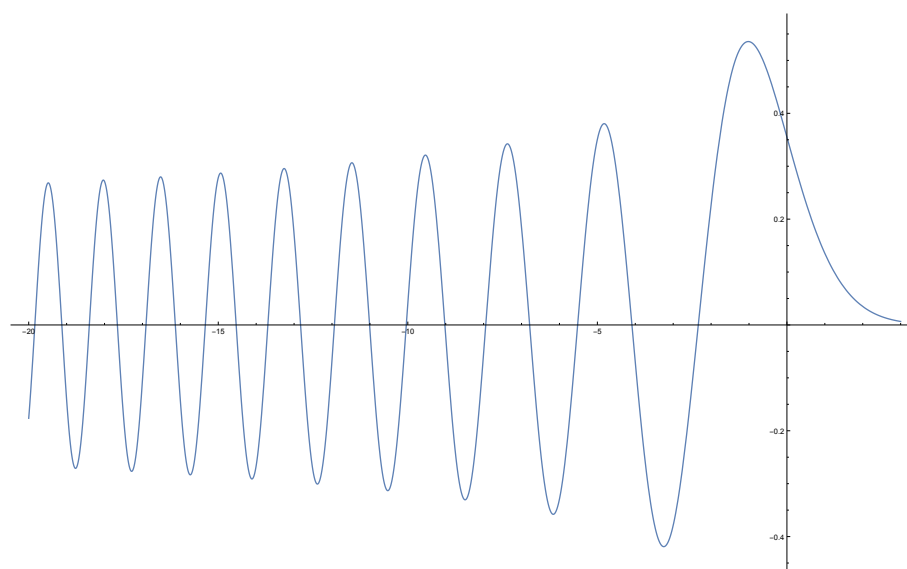
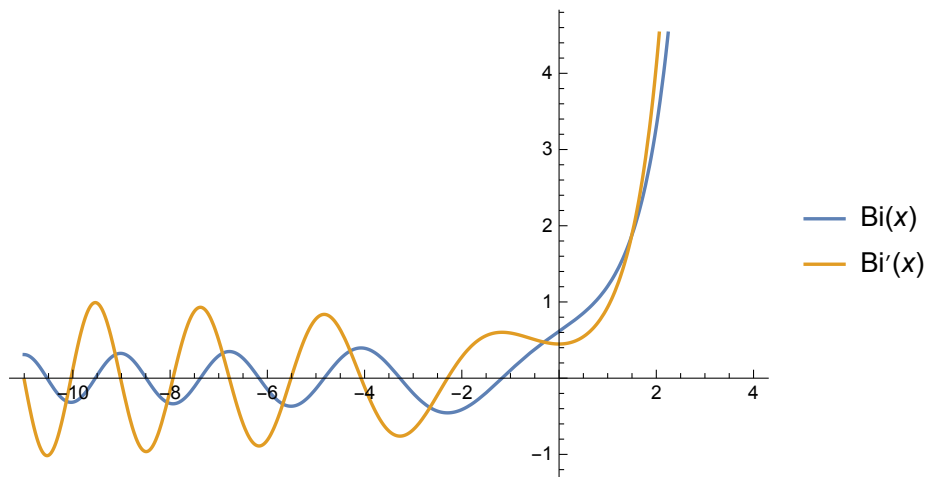
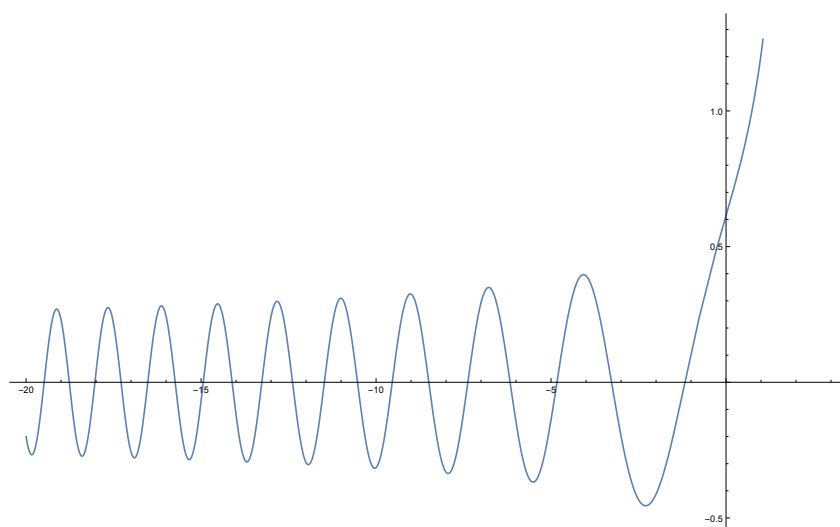


FIGURE 9.2 – La fonction d’Airy sur l’axe négatif.

FIGURE 9.3 – La seconde fonction d’Airy Bi et sa dérivée.

FIGURE 9.4 – La seconde fonction d’Airy Bi sur l’axe négatif.

Chapitre 10

Oscillateur harmonique et fonctions d'Hermite

10.1 Polynômes d'Hermite

10.1.1 Présentation à l'aide d'une fonction génératrice

Soit $x \in \mathbb{C}$. La fonction $\mathbb{C} \ni t \mapsto e^{-t^2+2tx} = G(x, t)$ est entière et par suite

$$G(x, t) = e^{-t^2+2tx} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(x), \quad H_n(x) = \frac{\partial^n G}{\partial t^n}(x, 0), \quad (10.1.1)$$

avec un rayon de convergence infini pour tout $x \in \mathbb{C}$. Notons que

$$\begin{aligned} H_0(x) &= G(x, 0) = 1, & H_1(x) &= \frac{\partial G}{\partial t}(x, 0) = e^{-t^2+2tx}(-2t + 2x)|_{t=0} = 2x, \\ H_2(x) &= \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(x, t)|_{t=0} = e^{-t^2+2tx}\{(-2t + 2x)^2 - 2\}|_{t=0} = 4x^2 - 2. \end{aligned}$$

Lemme 10.1.1. *Pour $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n , de même parité que n , dont le monôme de plus haut degré est $2^n X^n$. On a également, pour $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}$,*

$$H_{n+1}(X) = 2X H_n(X) - 2n H_{n-1}(X), \quad (10.1.2)$$

$$H'_n(X) = 2n H_{n-1}(X), \quad (10.1.3)$$

$$H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!}. \quad (10.1.4)$$

N.B. On dira que la fonction G est une fonction génératrice pour la suite des polynômes d'Hermite H_n .

Démonstration. On a pour $n \in \mathbb{N}$, avec $g(y) = e^{-y^2}$, l'identité $G(x, t) = g(x - t)e^{x^2}$, et donc

$$H_n(x) = \frac{\partial^n G}{\partial t^n}(x, 0) = e^{x^2}(-1)^n g^{(n)}(x) = e^{x^2}(-1)^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{e^{-x^2}\}. \quad (10.1.5)$$

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que H_n est un polynôme de degré n , de même parité que n , dont le monôme de plus haut degré est $2^n X^n$. C'est vérifié pour $n = 0, 1, 2$. Supposons que cette propriété est vérifiée pour un entier $n \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= e^{x^2} (-1)^{n+1} \frac{d}{dx} \left\{ e^{-x^2} e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \{ e^{-x^2} \} \right\} \\ &= (-1)^{n+1} \left(\frac{d}{dx} - 2x \right) \left\{ (-1)^n H_n(x) \right\} = -H'_n(x) + 2xH_n(x), \end{aligned} \quad (10.1.6)$$

et l'on trouve que H_{n+1} est un polynôme de monôme de plus haut degré $2X2^n X^n = 2^{n+1} X^{n+1}$. En outre comme H_n est de la parité de n , H'_n et XH_n sont de la parité de $n+1$ ainsi donc que H_{n+1} , ce qui achève notre raisonnement par récurrence. On a en outre

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, t) = 2tG(x, t) = 2 \sum_{n \geq 0} (n+1) \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} H_n(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{t^k}{k!} 2k H_{k-1}(x), \quad (10.1.7)$$

avec un rayon de convergence infini pour tout $x \in \mathbb{C}$. On a également (cf. (10.1.1))

$$H'_k(x) = \frac{\partial^{k+1} G}{\partial x \partial t^k}(x, 0).$$

et comme la fonction $t \mapsto (\partial G / \partial x)(x, t)$ est entière pour tout x , il vient

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, t) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} H'_k(x),$$

qui donne avec (10.1.7), $H'_k(x) = 2k H_{k-1}(x)$ pour $k \geq 1$. Comme nous avons démontré en (10.1.7) que pour $n \geq 0$, $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$, il vient pour $n \geq 1$,

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x),$$

ce qui donne (10.1.2), (10.1.3). La propriété (10.1.4) est vraie pour $m = 0$ et si on la suppose vérifiée pour un entier $m \geq 0$, il vient de (10.1.2) (déjà démontré!) pour $2m+1$,

$$\begin{aligned} H_{2m+2}(0) &= -(4m+2)H_{2m}(0) \\ &= (-1)^{m+1} \frac{(2m+2)!}{(m+1)!} \frac{m+1}{(2m+1)(2m+2)} (4m+2) = (-1)^{m+1} \frac{(2m+2)!}{(m+1)!}, \end{aligned}$$

soit le résultat cherché. \square

10.1.2 Une présentation plus explicite

En utilisant la formule de *Faà di Bruno* sur la dérivation des fonctions composées, on peut obtenir une expression plus explicite des polynômes d'Hermite. Rappelons que pour $g, f \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a pour $n \geq 1$

$$\frac{(g \circ f)^{(n)}}{n!} = \sum_{1 \leq r \leq n} \frac{g^{(r)} \circ f}{r!} \prod_{\substack{n_1 + \dots + n_r = n \\ n_j \geq 1}} \frac{f^{(n_j)}}{n_j!}. \quad (10.1.8)$$

On définit H_n par la formule

$$H_n(x) = e^{x^2} (-1)^n \left(\frac{d}{dx} \right)^n \{ e^{-x^2} \}. \quad (10.1.9)$$

On se propose maintenant de calculer explicitement H_n en utilisant la formule (10.1.8) : il vient avec $g(y) = e^y$, $f(x) = -x^2$, pour $n \geq 1$

$$H_n(x) = e^{x^2} (-1)^n n! \sum_{1 \leq r \leq n} \frac{g^{(r)} \circ f}{r!} \prod_{\substack{n_1 + \dots + n_r = n \\ n_j \geq 1}} \frac{f^{(n_j)}}{n_j!}.$$

Les valeurs possibles de n_j dans la formule ci-dessus sont 1, 2 : il faut choisir un sous-ensemble de $\{1, \dots, r\}$ à s éléments, $1 \leq s \leq r$ sur lequel $n_j = 1$. Il vient par conséquent

$$H_n(x) = e^{x^2} (-1)^n n! \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ s+2(r-s)=n}} \frac{e^{-x^2}}{r!} (-2x)^s \left(\frac{-2}{2!} \right)^{r-s} C_r^s.$$

On remarque que $n - s = 2k$ (un entier pair ≥ 0) et pour $n \geq 1$,

$$r - s = k, 1 \leq k + s \leq n, 2k \leq n, \quad \text{i.e. } 1 \leq k + n - 2k \leq n, 2k \leq n,$$

soit $0 \leq 2k \leq n$, pour $n \geq 2$. Il vient, pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned} H_n(x) &= e^{x^2} (-1)^n n! \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ s+2(r-s)=n}} \frac{e^{-x^2}}{r!} (-2x)^s \left(\frac{-2}{2!} \right)^{r-s} \frac{r!}{(r-s)! s!} \\ &= n! \sum_{0 \leq k \leq n/2} \frac{(-2x)^{n-2k} (-1)^k}{(n-2k)! k!}, \end{aligned}$$

formule également valable pour $n = 0, 1$ car de (10.1.9) vient

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n(x) = n! \sum_{0 \leq k \leq E(n/2)} \frac{(2x)^{n-2k} (-1)^k}{(n-2k)! k!}, \quad (10.1.10)$$

ce qui montre immédiatement que H_n est un polynôme de degré n , de même parité que n , dont le monôme de plus haut degré est $2^n X^n$. De plus si $n = 2m$ est pair on redémontre (10.1.4). En outre pour $n \geq 1$, on peut calculer directement

$$\begin{aligned} H'_n(x) &= n! \sum_{0 \leq k < n/2} \frac{(2x)^{n-2k-1} 2(n-2k) (-1)^k}{(n-2k)! k!} \\ &= 2n (n-1)! \sum_{0 \leq k < n/2} \frac{(2x)^{n-1-2k} (-1)^k}{(n-1-2k)! k!} = 2n (n-1)! \sum_{0 \leq 2k \leq n-1} \frac{(2x)^{n-1-2k} (-1)^k}{(n-1-2k)! k!} \\ &= 2n H_{n-1}(x). \quad (10.1.11) \end{aligned}$$

De plus, la formule (10.1.6) est prouvée directement par récurrence, et l'on a donc

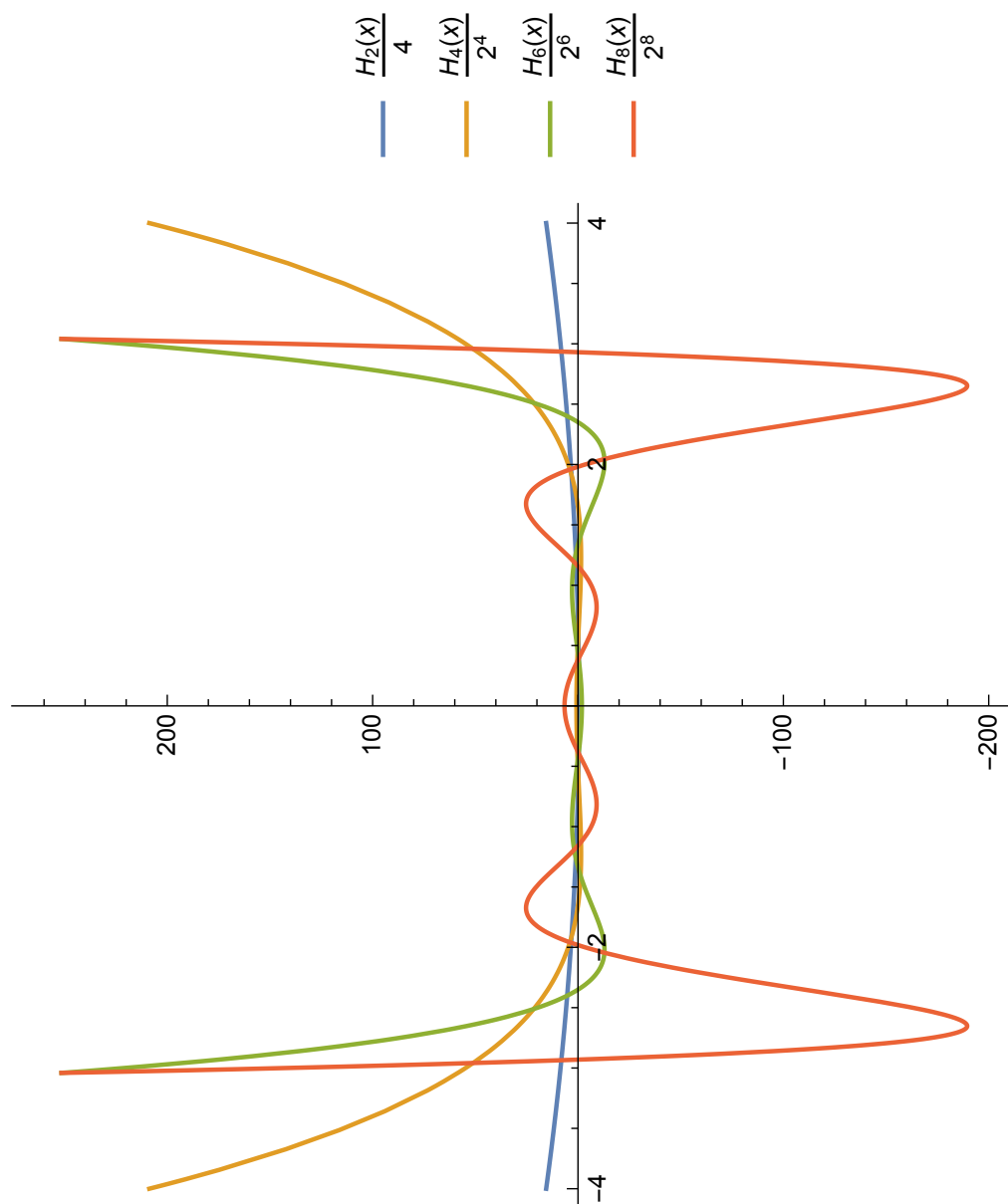
$$H_{n+1}(x) = -H'_n(x) + 2xH_n(x),$$

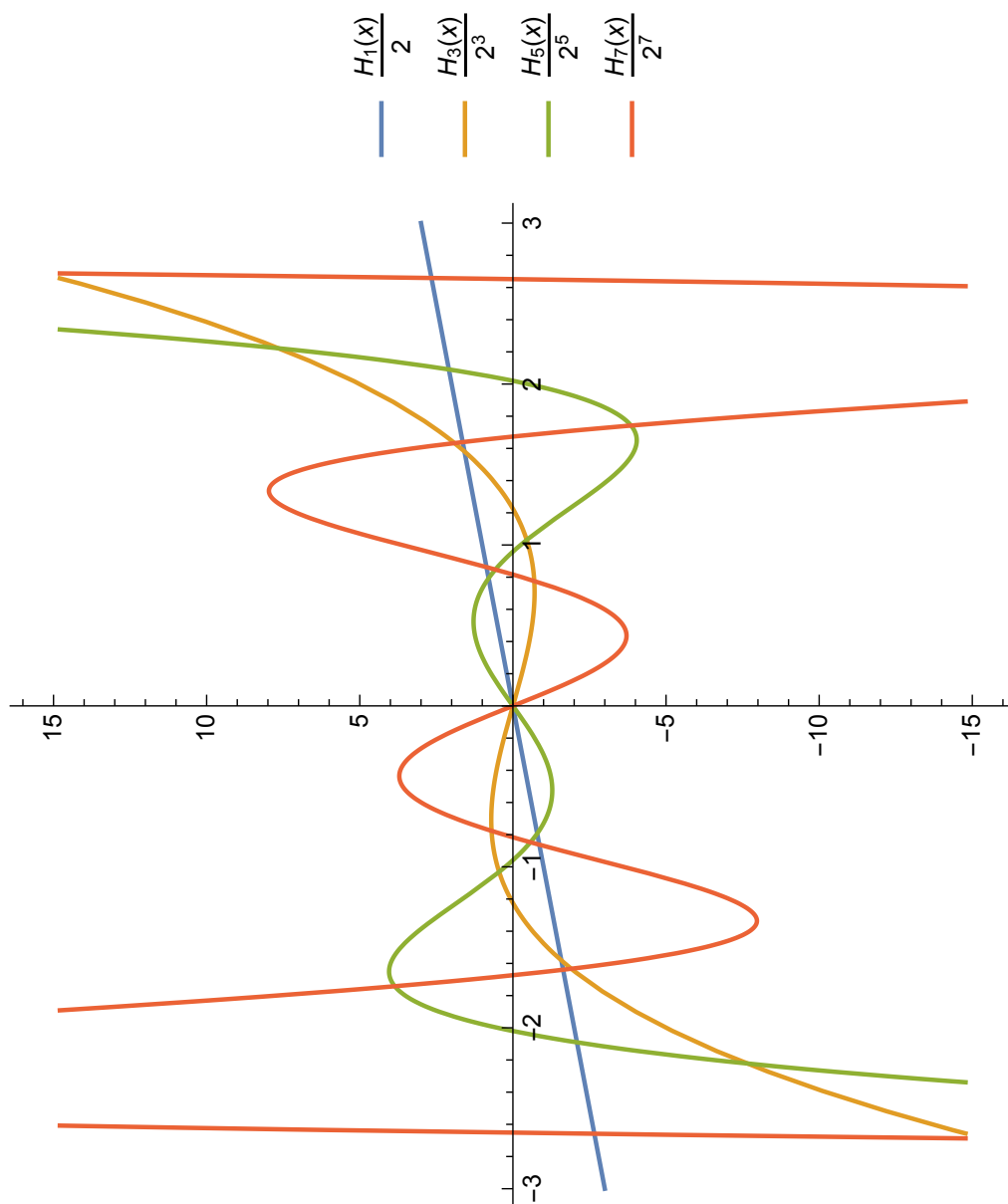
de sorte qu'avec le calcul (10.1.11), on obtient le Lemme 10.1.1 sans utiliser la fonction génératrice, avec en outre l'expression explicite (10.1.10).

10.1.3 Quelques calculs explicites

La commande *Mathematica* `HermiteH[n, x]` permet d'obtenir le nième polynôme d'Hermite. En écrivant `HermiteH[n, x] // TraditionalForm`, on obtient

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \\ H_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120 \\ H_7(x) &= 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x \\ H_8(x) &= 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680 \\ H_9(x) &= 512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x \\ H_{10}(x) &= 1024x^{10} - 23040x^8 + 161280x^6 - 403200x^4 + 302400x^2 - 30240 \\ &\dots\dots\dots \\ H_{20}(x) &= 1048576x^{20} - 99614720x^{18} + 3810263040x^{16} - 76205260800x^{14} \\ &\quad + 866834841600x^{12} - 5721109954560x^{10} + 21454162329600x^8 \\ &\quad - 42908324659200x^6 + 40226554368000x^4 - 13408851456000x^2 \\ &\quad + 670442572800 \end{aligned}$$

FIGURE 10.1 – Les polynômes d'Hermite $2^{-2k}H_{2k}$, $1 \leq k \leq 4$.

FIGURE 10.2 – Les polynômes d'Hermite $2^{-2k-1}H_{2k+1}$, $1 \leq k \leq 3$.

10.1.4 Équation différentielle

Lemme 10.1.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors le polynôme d'Hermite H_n vérifie*

$$H_n''(X) - 2XH_n'(X) + 2nH_n(X) = 0. \quad (10.1.12)$$

Démonstration. Démontrons par récurrence pour $n \geq 2$ que

$$2nH_n(X) - 4XnH_{n-1}(X) + 4n(n-1)H_{n-2}(X) = 0. \quad (10.1.13)$$

Cela est vérifié pour $n = 2$ car

$$4H_2(X) - 8XH_1(X) + 8H_0(X) = 4(4X^2 - 2) - 8X \cdot 2X + 8 = 0.$$

En supposant (10.1.13) vérifié pour un entier $n \geq 2$, on calcule, en utilisant (10.1.2),

$$\begin{aligned} & (2n+2)H_{n+1}(X) - 4X(n+1)H_n(X) + 4(n+1)nH_{n-1}(X) \\ &= (2n+2)(2XH_n(X) - 2nH_{n-1}(X)) - 4X(n+1)H_n(X) + 4(n+1)nH_{n-1}(X) \\ &= H_n(X)((4n+4)X - 4(n+1)X) + H_{n-1}(X)(-2n(2n+2) + 4(n+1)n) = 0, \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. Utilisant le Lemme 10.1.1, il vient pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned} & H_n''(X) - 2XH_n'(X) + 2nH_n(X) \\ &= 2n2(n-1)H_{n-2}(X) - 2X2nH_{n-1}(X) + 2nH_n(X) = 0, \end{aligned}$$

d'après (10.1.13), ce qui démontre le résultat cherché pour $n \geq 2$. Pour $n = 0$, on a $H_0 = 1$ et l'équation (10.1.12) est trivialement vérifiée. Pour $n = 1$, on a $H_1 = 2X$ et le membre de gauche de (10.1.12) vaut $-4X + 2 \times 2X = 0$, terminant la démonstration. \square

10.2 Fonctions d'Hermite

Proposition 10.2.1. *Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = \delta_{n,m}n!2^n\sqrt{\pi}. \quad (10.2.1)$$

Démonstration. On a en effet pour $n \geq m$,

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{e^{-x^2}\} H_m(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_m^{(n)}(x)dx,$$

qui vaut 0 si $n > m$ (H_m est un polynôme de degré m) et pour $m = n$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} n!2^n dx = n!2^n\sqrt{\pi},$$

soit le résultat cherché. \square

Les polynômes d'Hermite sont à coefficients réels (cf. e.g. (10.1.10)), de sorte que les fonctions ϕ_n , dites *fonctions d'Hermite* définies sur \mathbb{R} par

$$\phi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}(2^n n!)^{-1/2}\pi^{-1/4} \quad (10.2.2)$$

$$= (-1)^n (2^n n!)^{-1/2} \pi^{-1/4} e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{e^{-x^2}\}, \quad (10.2.3)$$

$$\text{vérifient } \langle \phi_n, \phi_m \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \delta_{n,m}. \quad (10.2.4)$$

Théorème 10.2.2. *La suite des fonctions d'Hermite $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Chaque fonction d'Hermite ϕ_n appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. La dernière assertion est triviale car

$$\phi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}(2^n n!)^{-1/2}\pi^{-1/4}$$

et donc $\phi_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ et, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$,

$$x^l \phi_n^{(k)}(x) = P_{n,k,l}(x)e^{-x^2/2}, \quad P_{n,k,l} \text{ polynôme,}$$

ce qui implique que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^l \phi_n^{(k)}(x)| = C_{n,k,l} < +\infty$. Au vu de (10.2.4), il suffit de démontrer que l'orthogonal de l'espace engendré par $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est réduit à $\{0\}$. Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ telle que,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi_n(x) dx = 0.$$

Comme chaque H_n est un polynôme de degré n , l'espace vectoriel engendré par $\{H_n\}_{0 \leq n \leq N}$ est l'espace des polynômes de degré $\leq N$ (récurrence sur N). Par suite on a

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) x^n e^{-x^2/2} dx = 0.$$

Considérons la fonction F , donnée pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} e^{zx} dx.$$

On a pour K compact de \mathbb{C} , $M_K = \sup_{z \in K} |\operatorname{Re} z|$, l'estimation

$$\sup_{z \in K} |f(x) e^{-x^2/2} e^{zx}| \leq \underbrace{|f(x)|}_{L^2} \underbrace{e^{-x^2/2} e^{|x| M_K}}_{L^2} \in L^1(\mathbb{R}),$$

et comme $z \mapsto f(x) e^{-x^2/2} e^{zx}$ est entière, la fonction F est entière. En outre, pour $n \in \mathbb{N}$, il vient

$$F^{(n)}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} x^n dx = 0,$$

ce qui implique que F est identiquement nulle. La fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto h(x) = f(x) e^{-x^2/2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ comme produit de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ (inégalité de Cauchy-Schwarz). On a de plus

$$\hat{h}(\xi) = F(-2i\pi\xi) = 0,$$

de sorte que la transformée de Fourier de h est nulle, et donc $h = 0$. On a donc, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)e^{-x^2/2} = 0,$$

ce qui implique $f(x) = 0$ presque partout et $f = 0$ comme fonction de $L^2(\mathbb{R})$. \square

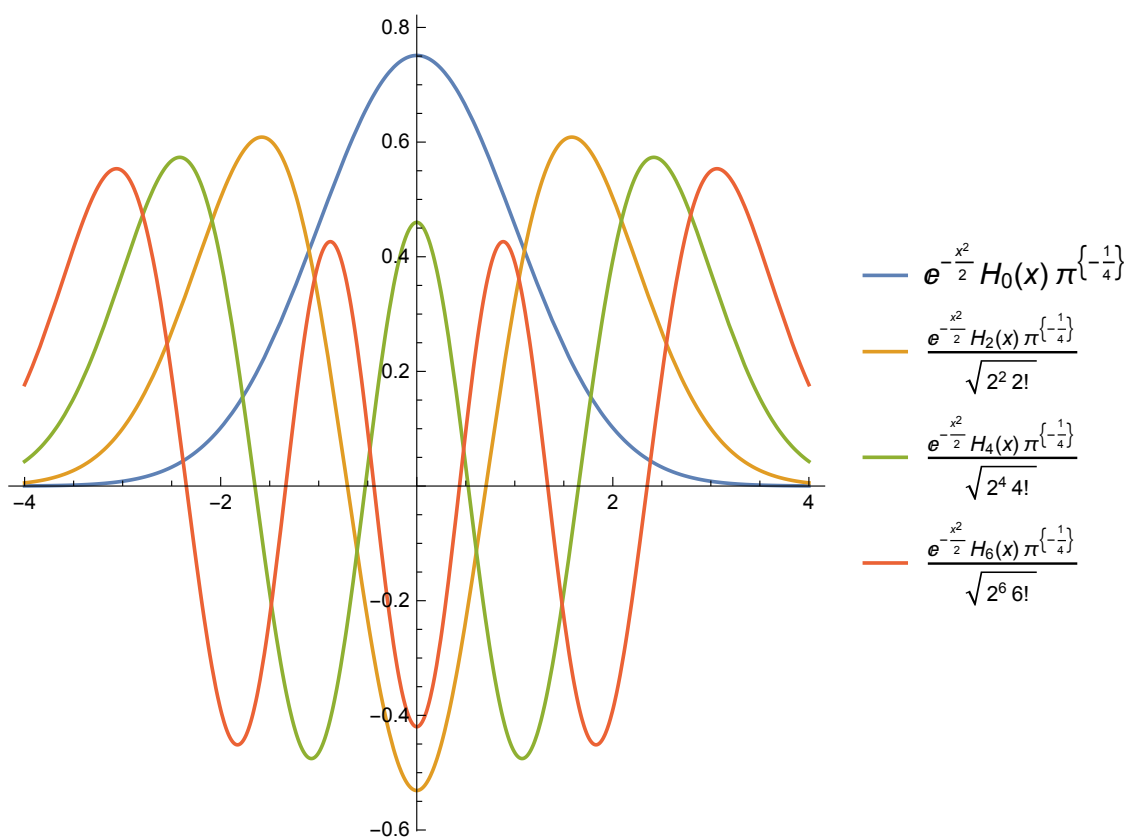
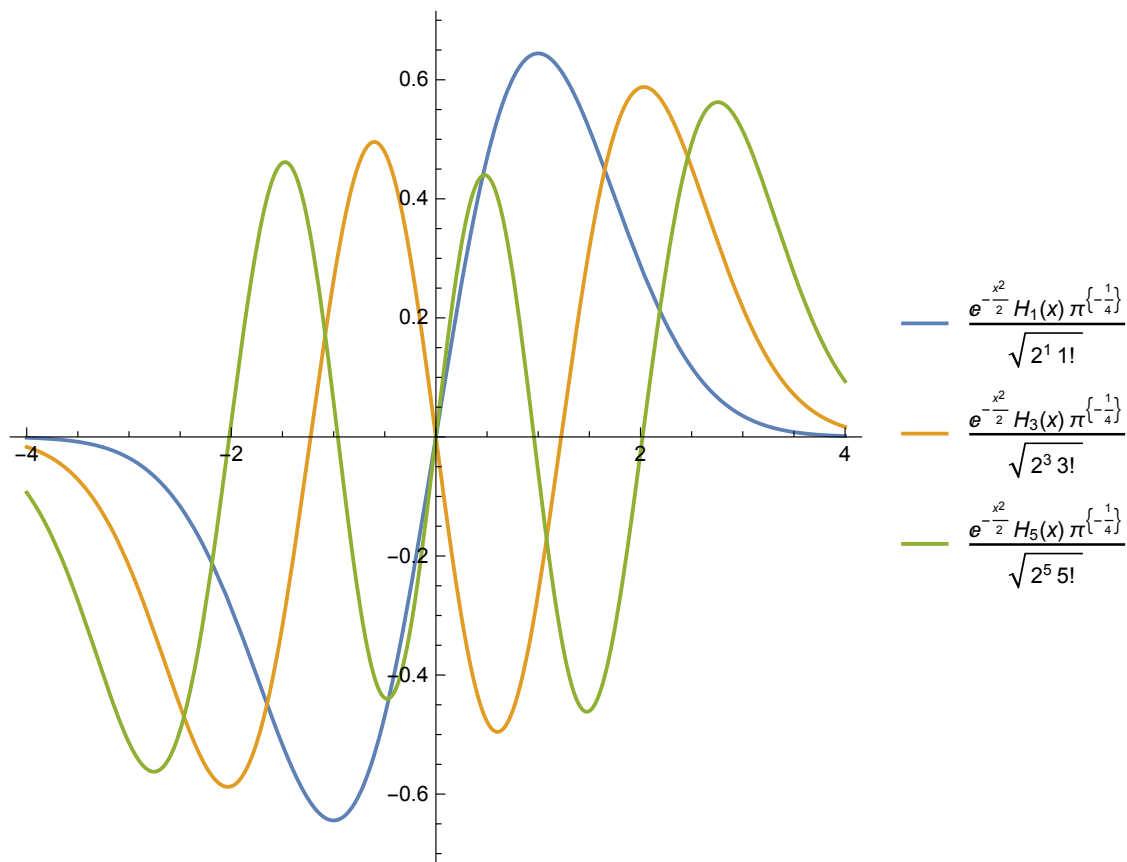


FIGURE 10.3 – FONCTIONS D'HERMITE $\phi_{2k}, 0 \leq k \leq 3$.

FIGURE 10.4 – FONCTIONS D'HERMITE $\phi_{2k+1}, 0 \leq k \leq 2$.

10.3 Oscillateur harmonique

10.3.1 Equation différentielle

Lemme 10.3.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors la fonction d'Hermite ϕ_n définie par (10.2.2) vérifie l'équation différentielle

$$-\phi_n''(x) + x^2\phi_n(x) = (2n+1)\phi_n(x). \quad (10.3.1)$$

Démonstration. En utilisant (10.2.2) et (10.1.12), il vient

$$\begin{aligned} \phi_n'(x) &= \{H_n'(x) - xH_n(x)\}e^{-x^2/2}(2^n n!)^{-1/2}\pi^{-1/4}, \\ \phi_n''(x) &= \{H_n''(x) - xH_n'(x) - H_n(x) - x(H_n'(x) - xH_n(x))\}e^{-x^2/2}(2^n n!)^{-1/2}\pi^{-1/4} \\ &= \{H_n''(x) - 2xH_n'(x) + (x^2 - 1)H_n(x)\}e^{-x^2/2}(2^n n!)^{-1/2}\pi^{-1/4} \\ &= \{-2nH_n(x) + (x^2 - 1)H_n(x)\}e^{-x^2/2}(2^n n!)^{-1/2}\pi^{-1/4} \\ &= -(2n+1)\phi_n(x) + x^2\phi_n(x), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat cherché. \square

10.3.2 Création, annihilation

Définition 10.3.2. L'opérateur de création (resp. annihilation) A_+ (resp. A_-) est l'opérateur différentiel de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même donné par

$$A_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dx} + x \right), \quad A_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} + x \right). \quad (10.3.2)$$

L'oscillateur harmonique \mathcal{H} est l'opérateur différentiel de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même donné par

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right). \quad (10.3.3)$$

Remarque 10.3.3. Du lemme 10.3.1, il vient pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{H}\phi_n = \left(\frac{1}{2} + n \right) \phi_n. \quad (10.3.4)$$

Lemme 10.3.4. Sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\mathcal{H} = A_+ A_- + \frac{1}{2}, \quad (10.3.5)$$

$$[A_-, A_+] = A_- A_+ - A_+ A_- = I. \quad (10.3.6)$$

Démonstration. Pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} 2(A_+ A_- \psi)(x) &= \left(-\frac{d}{dx} + x \right) \{ \psi'(x) + x\psi(x) \} \\ &= -(\psi''(x) + x\psi'(x) + \psi(x)) + x\psi'(x) + x^2\psi(x), \end{aligned}$$

ce qui donne $2A_+ A_- = 2\mathcal{H} - I$ et (10.3.5). De plus, on a

$$\begin{aligned} 2(A_- A_+ - A_+ A_-)\psi &= \left(\frac{d}{dx} + x \right) (-\psi'(x) + x\psi(x)) - \left(-\frac{d}{dx} + x \right) (\psi'(x) + x\psi(x)) \\ &= -\psi''(x) + \psi(x) + x\psi'(x) - x\psi'(x) + x^2\psi(x) \\ &\quad + \psi''(x) + \psi(x) + x\psi'(x) - x\psi'(x) - x^2\psi(x) = 2\psi(x), \end{aligned}$$

soit le résultat cherché. □

Lemme 10.3.5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} A_+^n \phi_0 \quad (10.3.7)$$

$$A_+ \phi_n = \sqrt{n+1} \phi_{n+1}, \quad (10.3.8)$$

$$A_- \phi_{n+1} = \sqrt{n+1} \phi_n, \quad A_- \phi_0 = 0. \quad (10.3.9)$$

Démonstration. En utilisant (10.2.3), calculons

$$(A_+\phi_n)(x) = 2^{-1/2}(-1)^n(2^n n!)^{-1/2}\pi^{-1/4}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\left\{e^{x^2/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\{e^{-x^2}\}\right\}.$$

Comme (sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$), on a

$$\frac{d}{dx} - x = e^{x^2/2} \frac{d}{dx} e^{-x^2/2}, \quad (10.3.10)$$

il vient

$$(A_+\phi_n)(x) = (-1)^{n+1}(2^{n+1}n!)^{-1/2}\pi^{-1/4}e^{x^2/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1}\{e^{-x^2}\} = \sqrt{n+1}\phi_{n+1},$$

soit (10.3.8). La propriété (10.3.7) est vérifiée pour $n = 0$, et si on la suppose vraie pour un entier $n \geq 0$, il vient

$$\phi_{n+1} \stackrel{(10.3.8)}{=} (n+1)^{-1/2}A_+\phi_n = (n+1)^{-1/2}(n!)^{-1/2}A_+A_+^n\phi_0 = \frac{A_+^{n+1}\phi_0}{\sqrt{(n+1)!}},$$

et donc (10.3.7). En outre, en utilisant (10.3.8), il vient

$$\begin{aligned} A_-\phi_{n+1} &= (n+1)^{-1/2}A_-A_+\phi_n \stackrel{(10.3.6)}{=} (n+1)^{-1/2}(A_+A_- + 1)\phi_n \\ &\stackrel{(10.3.5)}{=} (n+1)^{-1/2}\left(\mathcal{H} + \frac{1}{2}\right)\phi_n \stackrel{(10.3.4)}{=} (n+1)^{-1/2}(n+1)\phi_n = (n+1)^{1/2}\phi_n. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\pi^{1/4}\sqrt{2}A_-\phi_0 = \left(\frac{d}{dx} + x\right)(e^{-x^2/2}) = 0,$$

ce qui termine la démonstration du lemme. \square

10.3.3 Opérateurs sur $\ell^2(\mathbb{N})$

Grâce au Théorème 10.2.2, l'application

$$\begin{aligned} \ell^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \phi_n \end{aligned}$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert d'application réciproque

$$\begin{aligned} \Psi : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ u &\mapsto (\langle u, \phi_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned} \quad (10.3.11)$$

On peut donc *identifier* $L^2(\mathbb{R})$ à $\ell^2(\mathbb{N})$ via ces applications. Considérons le sous-espace vectoriel E de $L^2(\mathbb{R})$ défini par

$$E = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \phi_n \right\}_{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{E}}, \quad (10.3.12)$$

avec le sous-espace \tilde{E} de $\ell^2(\mathbb{N})$ défini par

$$E = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}), \sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 |a_n|^2 < +\infty\}. \quad (10.3.13)$$

L'oscillateur harmonique \mathcal{H} s'identifie à l'opérateur $\tilde{\mathcal{H}} : \tilde{E} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ défini par

$$\tilde{\mathcal{H}}((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \left((n + \frac{1}{2})a_n\right)_{n \in \mathbb{N}},$$

donné par la *matrice diagonale infinie*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & & \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} + n & 0 \dots \end{pmatrix}.$$

L'opérateur de création A_+ vérifie

$$A_+ \phi_n = \sqrt{n+1} \phi_{n+1},$$

et avec Ψ donné par (10.3.11), il vient avec $\tilde{A}_+ = \Psi A_+ \Psi^{-1}$,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_+((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) &= \Psi A_+ \left(\sum_n a_n \phi_n \right) \\ &= \Psi \left(\sum_n a_n \sqrt{n+1} \phi_{n+1} \right) = (0, a_0, a_1 \sqrt{2}, a_2 \sqrt{3}, \dots) \\ &= (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b_0 = 0, \quad b_n = a_{n-1} \sqrt{n} \text{ pour } n \geq 1, \end{aligned}$$

avec un résultat dans $\ell^2(\mathbb{N})$ si $\sum_n n |a_n|^2 < +\infty$. Notons que l'opérateur borné de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans lui-même donné par

$$S((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b_0 = 0, \quad b_n = a_{n-1} \text{ pour } n \geq 1, \quad (10.3.14)$$

est isométrique, injectif et non surjectif avec une image de codimension 1. Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la base hilbertienne standard de $\ell^2(\mathbb{N})$, on a

$$S e_n = e_{n+1}, \quad \text{ran } S = S(\ell^2(\mathbb{N})) = e_0^\perp.$$

L'opérateur d'annihilation A_- vérifie $A_- \phi_n = \sqrt{n} \phi_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $A_- \phi_0 = 0$, et avec Ψ donné par (10.3.11), il vient avec $\tilde{A}_- = \Psi A_- \Psi^{-1}$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_-((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) &= \Psi A_- \left(\sum_{n \geq 1} a_n \phi_n \right) = \Psi \left(\sum_{n \geq 1} a_n \sqrt{n} \phi_{n-1} \right) = (a_1, a_2 \sqrt{2}, a_3 \sqrt{3}, \dots) \\ &= (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b_n = a_{n+1} \sqrt{n+1} \text{ pour } n \geq 0, \end{aligned}$$

avec un résultat dans $\ell^2(\mathbb{N})$ si $\sum_n n|a_n|^2 < +\infty$. Notons que l'opérateur borné de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans lui-même donné par

$$S'((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b_n = a_{n+1} \text{ pour } n \geq 0, \quad (10.3.15)$$

est surjectif, non injectif avec un noyau de dimension 1 égal à $\mathbb{C}e_0$. Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la base hilbertienne standard de $\ell^2(\mathbb{N})$, on a

$$S'e_0 = 0, \quad S'e_n = e_{n-1}, \text{ pour } n \geq 1, \quad \ker S = \mathbb{C}e_0.$$

On peut remarquer que $S^* = S'$ car

$$\langle S^*e_m, e_n \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} = \langle e_m, Se_n \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} = \langle e_m, e_{n+1} \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} = \delta_{m,n+1},$$

soit $S^*e_0 = 0$, $S^*e_m = e_{m-1}$ pour $m \geq 1$. On peut résumer une partie des résultats précédents par le résultat suivant.

Théorème 10.3.6. *L'oscillateur harmonique \mathcal{H} défini par (10.3.3) vérifie*

$$\mathcal{H} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2} + n\right) \mathbb{P}_n, \quad \text{Id} = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_n, \quad (10.3.16)$$

où \mathbb{P}_n est la projection orthogonale sur $\mathbb{C}\phi_n$, se prolonge en un opérateur continu de l'espace E (défini en (10.3.12)) dans $L^2(\mathbb{R})$.

10.3.4 La dimension supérieure

Soit $d \geq 1$. On définit pour $\alpha = (\alpha_j)_{1 \leq j \leq d} \in \mathbb{N}^d, x \in \mathbb{R}^d$,

$$\Phi_\alpha(x) = \prod_{j=1}^d \phi_{\alpha_j}(x_j), \quad \mathcal{E}_n = \text{Vect}\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha|=n}, \quad (10.3.17)$$

avec $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$. On dira que les fonctions Φ_α sont les fonctions d'Hermite en dimension d .

Lemme 10.3.7. *La dimension de \mathcal{E}_n est C_{n+d-1}^{d-1} .*

Démonstration. Démontrons que $\text{Card}\{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = l\} = C_{l+d-1}^{d-1}$. Commençons par prouver par récurrence sur l que

$$C_{l+d-1}^{d-1} = \sum_{0 \leq j \leq l} C_{j+d-2}^{d-2}, \quad (10.3.18)$$

ce qui est vérifié pour $l = 0$, et comme $C_{l+d}^{d-1} = C_{l+d-1}^{d-1} + C_{l+d-1}^{d-2}$, on obtient

$$C_{l+1+d-1}^{d-1} = C_{l+d-1}^{d-1} + C_{l+d-1}^{d-2} = \sum_{0 \leq j \leq l+1} C_{j+d-2}^{d-2},$$

ce qui démontre (10.3.18). On a par ailleurs

$$\text{Card}\{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = l\} = \sum_{0 \leq j \leq l} \text{Card}\{\beta \in \mathbb{N}^{d-1}, |\beta| = j\}, \quad (10.3.19)$$

ce qui permet de démontrer par récurrence sur d que

$$\text{Card}\{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = l\} = C_{l+d-1}^{d-1},$$

car cette propriété est vraie pour $d = 1$ et si elle est vérifiée pour un entier $d \geq 1$, il vient de (10.3.19), (10.3.18),

$$\text{Card}\{\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}, |\alpha| = l\} = \sum_{0 \leq j \leq l} \text{Card}\{\beta \in \mathbb{N}^d, |\beta| = j\} = \sum_{0 \leq j \leq l} C_{l+d-1}^{d-1} = C_{l+d}^d.$$

Montrons par récurrence sur d que les $\sum_{0 \leq k \leq n} C_{k+d-1}^{d-1}$ fonctions $\{\Phi_\alpha\}_{|\alpha|=k, 0 \leq k \leq n}$ sont indépendantes. C'est vrai pour $d = 1$. Supposons que cette propriété est vérifiée pour un entier $d \geq 1$. Supposons que

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}, |\alpha| \leq m} c_\alpha \Phi_\alpha = 0.$$

On obtient alors l'identité

$$\sum_{0 \leq k \leq m} \left\{ \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ |\beta| = m-k}} c_{(\beta, k)} \left(\prod_{j=1}^d \phi_{\beta_j}(x_j) \right) \right\} \phi_k(x_{d+1}) = 0,$$

et de l'indépendance des fonctions $\{\phi_k(x_{d+1})\}_{0 \leq k \leq m}$, il vient l'identité sur \mathbb{R}^d

$$\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ |\beta| = m-k}} c_{(\beta, k)} \prod_{j=1}^d \phi_{\beta_j}(x_j) = 0.$$

L'hypothèse de récurrence démontre que tous les $c_{\beta, k}$ sont nuls. □

Remarque 10.3.8. En posant pour $1 \leq j \leq d$,

$$A_{+,j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \right), \quad A_{-,j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \right), \quad (10.3.20)$$

il vient de (10.3.7), avec $\alpha! = \prod_{1 \leq j \leq d} \alpha_j!$,

$$\Phi_\alpha(x) = \prod_{j=1}^d \phi_{\alpha_j}(x_j) = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \prod_{j=1}^d (A_{+,j}^{\alpha_j} \phi_0)(x_j).$$

Théorème 10.3.9. Les $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^d)$ composée par les vecteurs propres de l'oscillateur harmonique en dimension d :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(-\Delta_x + |x|^2) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{d}{2} + n \right) \mathbb{P}_n, \quad \text{Id} = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_n, \quad (10.3.21)$$

où \mathbb{P}_n est la projection orthogonale sur \mathcal{E}_n , espace de dimension C_{n+d-1}^{d-1} . La valeur propre $d/2$ est simple en toute dimension et \mathcal{E}_0 est engendré par

$$\Phi_0(x) = \pi^{-d/4} e^{-|x|^2/2}.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, Φ_α, Φ_β appartiennent à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que

$$\begin{aligned} \langle \Phi_\alpha, \Phi_\beta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \phi_{\alpha_j}(x_j) \prod_{j=1}^d \phi_{\beta_j}(x_j) dx \\ &= \prod_{j=1}^d \langle \phi_{\alpha_j}, \phi_{\beta_j} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \prod_{j=1}^d \delta_{\alpha_j, \beta_j} = \delta_{\alpha, \beta}. \end{aligned}$$

Démontrons que l'orthogonal de l'espace engendré par $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$ est réduit à $\{0\}$. Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que,

$$\text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) \Phi_\alpha(x) dx = 0.$$

Comme chaque H_n est un polynôme de degré n , l'espace vectoriel engendré par $\{H_n\}_{0 \leq n \leq N}$ est l'espace des polynômes de degré $\leq N$ (récurrence sur N). Par suite on a

$$\text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) x^\alpha e^{-|x|^2/2} dx = 0.$$

Considérons la fonction F , donnée pour $z \in \mathbb{C}^d$ par

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-|x|^2/2} e^{\sum_{1 \leq j \leq d} z_j x_j} dx.$$

On a pour K compact de \mathbb{C}^d , $M_K = \sup_{z \in K} |\operatorname{Re} z|$, l'estimation

$$\sup_{z \in K} |f(x) e^{-|x|^2/2} e^{z \cdot x}| \leq \underbrace{|f(x)|}_{L^2} \underbrace{e^{-|x|^2/2} e^{|x| M_K}}_{L^2} \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

et comme $z \mapsto f(x) e^{-|x|^2/2} e^{z \cdot x}$ est entière, la fonction F est entière. En outre, pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, il vient

$$F^{(\alpha)}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-|x|^2/2} x^\alpha dx = 0,$$

ce qui implique que F est identiquement nulle. La fonction $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto h(x) = f(x) e^{-|x|^2/2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$ comme produit de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ (inégalité de Cauchy-Schwarz). On a de plus

$$\hat{h}(\xi) = F(-2i\pi\xi) = 0,$$

de sorte que la transformée de Fourier de h est nulle, et donc $h = 0$. On a donc, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f(x) e^{-|x|^2/2} = 0,$$

ce qui implique $f(x) = 0$ presque partout et $f = 0$ comme fonction de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Nous avons donc démontré que

$$\operatorname{Id} = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_n.$$

En outre de (10.3.20), il vient

$$\mathcal{H} = \sum_{1 \leq j \leq d} \mathcal{H}_j, \quad \mathcal{H}_j = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2 \right),$$

et donc pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$\mathcal{H}\Phi_\alpha = \sum_{1 \leq j \leq d} \left(\frac{1}{2} + \alpha_j \right) \Phi_\alpha = \left(\frac{d}{2} + |\alpha| \right) \Phi_\alpha,$$

ce qui démontre $\mathcal{H} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{d}{2} + n \right) \mathbb{P}_n$. □

Remarque 10.3.10. Bien entendu, l'opérateur \mathcal{H} n'est pas borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, mais peut se définir sur l'espace

$$E = \left\{ \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| = n}} a_\alpha \Phi_\alpha \right\}_{(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \in \tilde{E}}, \quad (10.3.22)$$

$$\text{avec } \tilde{E} = \left\{ (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \in \ell^2(\mathbb{N}^d), \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} |\alpha|^2 |a_\alpha|^2 < +\infty \right\}. \quad (10.3.23)$$

La restriction de \mathcal{H} à E est complètement déterminée par les restrictions de \mathcal{H} à $\text{ran } \mathbb{P}_n = \mathcal{E}_n$ et l'on vient de voir que

$$\mathcal{H}|_{\mathcal{E}_n} = \left(\frac{d}{2} + n \right) \text{Id}. \quad (10.3.24)$$

Chapitre 11

Appendice

11.1 Arithmétique élémentaire

On utilisera constamment et sans référence explicite les propriétés de la relation d'ordre sur \mathbb{N} , et en particulier qu'un sous-ensemble non vide de \mathbb{N} possède un plus petit élément, i.e. \mathbb{N} est bien ordonné. On désignera par \mathbb{Z} l'anneau des entiers relatifs.

11.1.1 Division euclidienne

Nous allons d'abord établir que \mathbb{Z} est un anneau *euclidien*.

Théorème 11.1.1. *Soient a et b des entiers, $b \neq 0$. Il existe un et un seul couple d'entiers (q, r) tels que*

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|. \quad (11.1.1)$$

Démonstration. Si (q_j, r_j) vérifient (11.1.1), on a $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, ce qui donne $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ et donc $|b| > |r_1 - r_2| = |b||q_1 - q_2|$, qui implique $q_1 = q_2$ puis $r_1 = r_2$. Considérons maintenant, en supposant $b \geq 1$, l'ensemble des entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que $a < (k+1)b$. Comme $b \geq 1$, cet ensemble est non vide et minoré. Soit q son plus petit élément : on a

$$qb \leq a < (q+1)b,$$

ce qui donne (1.1.1). Si $b \leq -1$, on applique le résultat précédent au couple $(a, -b)$. \square

Nous allons exploiter le Théorème 11.1.1 pour montrer que l'anneau \mathbb{Z} est *principal*.

Théorème 11.1.2. *Soit H un sous-groupe additif de \mathbb{Z} . Il existe un unique entier $a \geq 0$ tel que $H = a\mathbb{Z} = \{ak\}_{k \in \mathbb{Z}}$.*

Démonstration. On peut supposer que H n'est pas réduit à $\{0\}$. Considérons alors $H \cap \mathbb{Z}_+^*$: c'est un ensemble non vide minoré d'entiers (\mathbb{Z}_+^* est l'ensemble des entiers ≥ 1). Soit a son plus petit élément ; comme H est un groupe additif on a $a\mathbb{Z} \subset H$. Réciproquement si $x \in H$, d'après le Théorème 11.1.1, $x = aq + r$ avec $0 \leq r < a$; si on avait $r > 0$ l'égalité précédente impliquerait $r \in H \cap \mathbb{Z}_+^*$, donc $r \geq a$, ce qui contredit $r < a$. Par suite on obtient $r = 0$ et $H = a\mathbb{Z}$. \square

Définition 11.1.3. Soient a et b des entiers. Les entiers $a \wedge b$ (ppcm de a et b) et $a \vee b$ (pgcd de a et b) sont définis par

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}, \quad a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}.$$

Notons tout d'abord que la définition est cohérente car $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ et

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ak + bl\}_{k,l \in \mathbb{Z}},$$

sont des sous-groupes de \mathbb{Z} et que le Théorème 11.1.2 assure qu'ils sont de la forme $c\mathbb{Z}$, où c est le plus petit élément strictement positif du sous-groupe. Par ailleurs la terminologie ppcm (plus petit commun multiple) est justifiée par le fait que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est l'ensemble des multiples communs à a et b et que d'après la définition et le théorème qui précède, $a \wedge b$ est le plus petit élément strictement positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. La terminologie pgcd (plus grand commun diviseur) est justifiée par le fait que si d divise a et b , i.e. $a, b \in d\mathbb{Z}$, alors $(a \vee b)\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$, d'où d divise $a \vee b$, et en particulier si $d \geq 0$, $d \leq a \vee b$. De plus on a $a, b \in (a \vee b)\mathbb{Z}$ donc $a \vee b$ divise a et b . Finalement la notation \wedge est rémanente de l'intersection \cap alors que le \vee rappelle la réunion \cup : le groupe $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est le groupe engendré par $a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z}$, i.e. l'intersection des sous-groupes contenant $a\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z}$.

Théorème 11.1.4. Soient a et b des entiers. Alors $(a \vee b) \times (a \wedge b) = \pm ab$

Démonstration. Supposons tout d'abord que a et b soient premiers entre eux, i.e. $a \vee b = 1$, i.e. $ka + lb = 1$ pour des entiers k, l . On a $a \wedge b = ma = nb$ et donc

$$nkb = mka = m - mlb, \quad m = b(nk + ml),$$

d'où m est divisible par b , ce qui donne le résultat car

$$a \wedge b = ab(nk + ml) \in ab\mathbb{Z}.$$

Dans le cas général, si $a \vee b = d$, alors $a = da'$, $b = db'$, avec a' et b' premiers entre eux car $kda' + ldb' = d$ et donc $ka' + lb' = 1$. Il vient

$$(a \vee b)(a \wedge b) = d(da' \wedge db') = dd(a' \wedge b') = d^2 a' b' = ab.$$

□

11.1.2 Congruences

Soit a un entier non nul. On considère le sous-groupe $H = a\mathbb{Z}$ qui est aussi un idéal de \mathbb{Z} , i.e. un sous-groupe additif tel que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $xH \subset H$. L'anneau quotient $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ est muni canoniquement d'une structure d'anneau commutatif unitaire (non nécessairement intègre). En effet, si \bar{x} et \bar{y} sont les classes de $x, y \in \mathbb{Z}$, alors on définit

$$\bar{x} \oplus \bar{y} = \overline{x + y}, \quad \bar{x} \otimes \bar{y} = \overline{xy},$$

ce qui est légitime car, pour $\alpha, \beta \in H$

$$x + \underbrace{\alpha + \beta}_{\in H} = x + y + \underbrace{(\alpha y + \beta x + \alpha \beta)}_{\in H \text{ car } H \text{ est un idéal}} \quad \text{et} \quad (x + \alpha)(y + \beta) = xy + \underbrace{(\alpha y + \beta x + \alpha \beta)}_{\in H \text{ car } H \text{ est un idéal}}.$$

Notons par exemple que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le corps à deux éléments $\{\bar{0}, \bar{1}\}$ avec $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$, que

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\},$$

n'est pas intègre car $\bar{2} \times \bar{2} = \bar{0}$, que

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

En effet si $x \in \mathbb{Z}$ et $n \neq 0$, la division euclidienne donne

$$x = qn + r, 0 \leq r < |n|.$$

D'autre part, si r_1 et r_2 sont deux entiers distincts dans $[0, n[$, ils sont distincts modulo n , car $r_1 - r_2$ ne peut être multiple non nul de n .

Proposition 11.1.5. *Soit p un entier ≥ 2 . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i) p n'a pas de diviseur non trivial.
- (ii) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.
- (iii) Pour tout entier $a \notin p\mathbb{Z}$, $a \vee p = 1$.
- (iv) $(p-1)! + 1 = 0$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (Théorème de Wilson).

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on dit que p est un nombre premier.

Démonstration. Supposons (i). Soit $2 \leq a \leq p-1$ un entier. Comme a et p n'ont pas de diviseur commun, $a \vee p = 1$, i.e. $a\mathbb{Z} + p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, d'où il existe k, l entiers tels que

$$ak + pl = 1 \text{ i.e. } ak = 1 \text{ dans } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

donc a est inversible et (ii) est démontré. Le même argument donne l'équivalence entre (i), (ii), (iii). Il reste à démontrer le théorème de Wilson (iv). Supposons tout d'abord que (i)(ii)(iii) soient satisfaits. Alors si $2 \leq x \leq p-2$, x est inversible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $x \neq x^{-1}$ sinon

$$0 = x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \text{ et } x \in \{1, p-1\},$$

donc

$$\{2, \dots, p-2\} = \{x_1, x_1^{-1}, \dots, x_{\frac{p-3}{2}}, x_{\frac{p-3}{2}}^{-1}\}.$$

Par suite le produit $2 \cdot 3 \cdots (p-3)(p-2) = 1$ et donc $(p-1)! = -1$ soit (iv). Réciproquement si (iv) est satisfait, $(p-1)!$ est inversible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et donc $2, 3, \dots, p-2$ le sont également, ce qui donne (ii). \square

Remarque 11.1.6. Si a, b, c sont des entiers tels que $a|bc$ i.e. a divise bc , i.e. $bc \in a\mathbb{Z}$ et que a et b sont premiers entre eux i.e. $a \vee b = 1$, alors $a|c$. En effet l'hypothèse signifie $bc = 0$ et b inversible dans $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$. il vient $c = 0$ dans $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$.

Définition 11.1.7. La fonction d'Euler φ est définie sur les entiers naturels par $\varphi(1) = 1$ et pour $n \geq 2$ par

$$\varphi(n) = \text{Card} \{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x \text{ inversible}\}. \quad (11.1.2)$$

Proposition 11.1.8. *La fonction φ est multiplicative, i.e. vérifie*

$$\text{pour } a \vee b = 1, \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad (11.1.3)$$

En outre on a

$$w \quad (11.1.4)$$

Pour démontrer cette proposition, on va d'abord établir le lemme

Lemme 11.1.9 (Théorème chinois). *Soient a et b des entiers premiers entre eux. Alors $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ et il existe α, β entiers tels que $a\alpha + b\beta = 1$. L'application*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \\ (x, y) &\mapsto b\beta x + a\alpha y \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Démonstration du lemme. Notons tout d'abord que cette application est bien définie car elle fait correspondre $b\beta x + a\alpha y + (k\beta + l\alpha)ab$ à $(x + ka, y + lb)$. C'est évidemment un homomorphisme de groupe, qui plus est injectif : si $b\beta x + a\alpha y = 0$, alors $b\beta x = 0$ dans $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ et comme $b\beta = 1$ dans $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ on a $x = 0$. On obtient de même $y = 0$. La surjectivité est conséquence de l'égalité des cardinaux. En outre, F est un isomorphisme d'anneaux car, modulo ab ,

$$\begin{aligned} (b\beta x + a\alpha y)(b\beta x' + a\alpha y') - (b\beta xx' + a\alpha yy') \\ = (b^2\beta^2 - b\beta)xx' + (a^2\alpha^2 - a\alpha)yy' \\ = xx'b\beta(-a\alpha) + yy'a\alpha(-b\beta) = 0. \end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition. Le résultat (11.1.3) est alors une conséquence immédiate du Lemme 11.1.9. De plus pour p premier $\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1}$ ¹ et donc pour

$$(1.2.4) \quad n = \prod_{1 \leq j \leq r} p_j^{a_j}, \quad \varphi(n) = n \prod_{1 \leq j \leq r} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right).$$

En outre, pour p premier

$$\sum_{d|p^a} \varphi(d) = 1 + \sum_{1 \leq b \leq a} \varphi(p^b) = 1 + \sum_{1 \leq b \leq a} p^b \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right)p \left(\frac{p^a - 1}{p - 1}\right) = p^a.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \sum_{d|\prod p_j^{a_j}} \varphi(d) &= \sum_{d_1|p_1^{a_1}, \dots, d_r|p_r^{a_r}} \varphi(d_1 \dots d_r) \\ &= \sum_{d_1|p_1^{a_1}, \dots, d_r|p_r^{a_r}} \prod \varphi(d_1) \dots \varphi(d_r) \\ &= \prod \sum_{d_j|p_j^{a_j}} \varphi(d_j) = \prod p_j^{a_j} = n. \end{aligned}$$

La formule (11.1.4) est prouvée. □

1. Si m est un multiple de p , alors $m = kp$, $kpp^{a-1} = 0$ et m n'est pas inversible modulo p^a ; les multiples de p entre 1 et p^a sont $\{kp\}_{1 \leq k \leq p^{a-1}}$. Si m n'est pas un multiple de p alors $m \vee p^a = 1$ car un diviseur commun à m et à p^a doit être une puissance de p .

{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83,
 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173,
 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269,
 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373,
 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467,
 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593,
 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691,
 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821,
 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937,
 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033,
 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123,
 1129, 1151, 1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231,
 1237, 1249, 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321,
 1327, 1361, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451,
 1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549,
 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627,
 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747,
 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871,
 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987,
 1993, 1997, 1999, 2003, 2011, 2017, 2027, 2029, 2039, 2053, 2063, 2069, 2081, 2083,
 2087, 2089, 2099, 2111, 2113, 2129, 2131, 2137, 2141, 2143, 2153, 2161, 2179, 2203,
 2207, 2213, 2221, 2237, 2239, 2243, 2251, 2267, 2269, 2273, 2281, 2287, 2293, 2297,
 2309, 2311, 2333, 2339, 2341, 2347, 2351, 2357, 2371, 2377, 2381, 2383, 2389, 2393,
 2399, 2411, 2417, 2423, 2437, 2441, 2447, 2459, 2467, 2473, 2477, 2503, 2521, 2531,
 2539, 2543, 2549, 2551, 2557, 2579, 2591, 2593, 2609, 2617, 2621, 2633, 2647, 2657,
 2659, 2663, 2671, 2677, 2683, 2687, 2689, 2693, 2699, 2707, 2711, 2713, 2719, 2729,
 2731, 2741, 2749, 2753, 2767, 2777, 2789, 2791, 2797, 2801, 2803, 2819, 2833, 2837,
 2843, 2851, 2857, 2861, 2879, 2887, 2897, 2903, 2909, 2917, 2927, 2939, 2953, 2957,
 2963, 2969, 2971, 2999, 3001, 3011, 3019, 3023, 3037, 3041, 3049, 3061, 3067, 3079,
 3083, 3089, 3109, 3119, 3121, 3137, 3163, 3167, 3169, 3181, 3187, 3191, 3203, 3209,
 3217, 3221, 3229, 3251, 3253, 3257, 3259, 3271, 3299, 3301, 3307, 3313, 3319, 3323,
 3329, 3331, 3343, 3347, 3359, 3361, 3371, 3373, 3389, 3391, 3407, 3413, 3433, 3449,
 3457, 3461, 3463, 3467, 3469, 3491, 3499, 3511, 3517, 3527, 3529, 3533, 3539, 3541,
 3547, 3557, 3559, 3571, 3581, 3583, 3593, 3607, 3613, 3617, 3623, 3631, 3637, 3643,
 3659, 3671, 3673, 3677, 3691, 3697, 3701, 3709, 3719, 3727, 3733, 3739, 3761, 3767,
 3769, 3779, 3793, 3797, 3803, 3821, 3823, 3833, 3847, 3851, 3853, 3863, 3877, 3881,
 3889, 3907, 3911, 3917, 3919, 3923, 3929, 3931, 3943, 3947, 3967, 3989, 4001, 4003,
 4007, 4013, 4019, 4021, 4027, 4049, 4051, 4057, 4073, 4079, 4091, 4093, 4099, 4111,
 4127, 4129, 4133, 4139, 4153, 4157, 4159, 4177, 4201, 4211, 4217, 4219, 4229, 4231,
 4241, 4243, 4253, 4259, 4261, 4271, 4273, 4283, 4289, 4297, 4327, 4337, 4339, 4349,
 4357, 4363, 4373, 4391, 4397, 4409, 4421, 4423, 4441, 4447, 4451, 4457, 4463, 4481,
 4483, 4493, 4507, 4513, 4517, 4519, 4523, 4547, 4549, 4561, 4567, 4583, 4591, 4597,
 4603, 4621, 4637, 4639, 4643, 4649, 4651, 4657, 4663, 4673, 4679, 4691, 4703, 4721,
 4723, 4729, 4733, 4751, 4759, 4783, 4787, 4789, 4793, 4799, 4801, 4813, 4817, 4831,
 4861, 4871, 4877, 4889, 4903, 4909, 4919, 4931, 4933, 4937, 4943, 4951, 4957, 4967,
 4969, 4973, 4987, 4993, 4999, 5003, 5009, 5011, 5021, 5023, 5039, 5051, 5059, 5077,
 5081, 5087, 5099, 5101, 5107, 5113, 5119, 5147, 5153, 5167, 5171, 5179, 5189, 5197,
 5209, 5227, 5231, 5233, 5237, 5261, 5273, 5279, 5281, 5297, 5303, 5309, 5323, 5333,
 5347, 5351, 5381, 5387, 5393, 5399, 5407, 5413, 5417, 5419, 5431, 5437, 5441, 5443,
 5449, 5471, 5477, 5479, 5483, 5501, 5503, 5507, 5519, 5521, 5527, 5531, 5557, 5563,
 5569, 5573, 5581, 5591, 5623, 5639, 5641, 5647, 5651, 5653, 5657, 5659, 5669, 5683,
 5689, 5693, 5701, 5711, 5717, 5737, 5741, 5743, 5749, 5779, 5783, 5791, 5801, 5807,
 5813, 5821, 5827, 5839, 5843, 5849, 5851, 5857, 5861, 5867, 5869, 5879, 5881, 5897,
 5903, 5923, 5927, 5939, 5953, 5981, 5987, 6007, 6011, 6029, 6037, 6043, 6047, 6053,
 6067, 6073, 6079, 6089, 6091, 6101, 6113, 6121, 6131, 6133, 6143, 6151, 6163, 6173,
 6197, 6199, 6203, 6211, 6217, 6221, 6229, 6247, 6257, 6263, 6269, 6271, 6277, 6287,
 6299, 6301, 6311, 6317, 6323, 6329, 6337, 6343, 6353, 6359, 6361, 6367, 6373, 6379,
 6389, 6397, 6421, 6427, 6449, 6451, 6469, 6473, 6481, 6491, 6521, 6529, 6547, 6551,
 6553, 6563, 6569, 6571, 6577, 6581, 6599, 6607, 6619, 6637, 6653, 6659, 6661, 6673,
 6679, 6689, 6691, 6701, 6703, 6709, 6719, 6733, 6737, 6761, 6763, 6779, 6781, 6791,
 6793, 6803, 6823, 6827, 6829, 6833, 6841, 6857, 6863, 6869, 6871, 6883, 6899, 6907,
 6911, 6917, 6947, 6949, 6959, 6961, 6967, 6971, 6977, 6983, 6991, 6997, 7001, 7013,
 7019, 7027, 7039, 7043, 7057, 7069, 7079, 7103, 7109, 7121, 7127, 7129, 7151, 7159,
 7177, 7187, 7193, 7207, 7211, 7213, 7219, 7229, 7237, 7243, 7247, 7253, 7283, 7297,
 7307, 7309, 7321, 7331, 7333, 7349, 7351, 7369, 7393, 7411, 7417, 7433, 7451, 7457,
 7459, 7477, 7481, 7487, 7489, 7499, 7507, 7517, 7523, 7529, 7537, 7541, 7547, 7549,
 7559, 7561, 7573, 7577, 7583, 7589, 7591, 7603, 7607, 7621, 7639, 7643, 7649, 7669,
 7673, 7681, 7687, 7691, 7699, 7703, 7717, 7723, 7727, 7741, 7753, 7757, 7759, 7789,
 7793, 7817, 7823, 7829, 7841, 7853, 7867, 7873, 7877, 7879, 7883, 7901, 7907, 7919}

FIGURE 11.1 – LES 1000 PREMIERS NOMBRES PREMIERS.

11.2 Sous-groupes additifs de \mathbb{R}

Soit G un sous-groupe additif de \mathbb{R} non réduit à $\{0\}$. Ceci implique que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide (et minoré par 0). Posons

$$a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*).$$

• **Si $a = 0$, alors le sous-groupe G est dense dans \mathbb{R} .** En effet pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_k \in G, x_k > 0$ tel que

$$0 < x_k < 1/k.$$

Soit $y \in \mathbb{R}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_{k,y} \in \mathbb{Z}$ tel que

$$G \ni N_{k,y}x_k \leq y < (N_{k,y} + 1)x_k \in G.$$

Il suffit de prendre $N_{k,y} = E(y/x_k)$. Par conséquent pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_k \in G$ tel que $|y - y_k| \leq 1/k$: en effet il suffit de prendre $y_k = N_{k,y}x_k$.

• **Si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$.** Montrons d'abord que $a \in G$. Par définition de l'infimum, on sait que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_\epsilon \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$a \leq x_\epsilon < a + \epsilon.$$

Si $x_\epsilon = a$, cela implique que $a \in G$: on peut donc supposer en raisonnant par l'absurde que

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in G, \quad a < x_\epsilon < a + \epsilon.$$

Choisissons $\epsilon = a$. On peut donc trouver $x \in G$ avec $a < x < 2a$ et par suite, prenant $\epsilon = x - a$, on peut trouver $y \in G$ avec $a < y < x < 2a$ ce qui implique $0 < x - y < a$ et $x - y \in G$, ce qui est impossible d'après la définition de a . Nous avons démontré que $a \in G$, ce qui implique $a\mathbb{Z} \subset G$.

De plus si $x \in G$ et $M = E(x/a)$, on a

$$Ma \leq x < (M + 1)a,$$

ce qui implique $x = Ma \in a\mathbb{Z}$, sinon

$$0 < \underbrace{x - Ma}_{\in G} < a,$$

contredisant la définition de a . Nous avons démontré $G \subset a\mathbb{Z} \subset G$ et par suite $G = a\mathbb{Z}$.

11.3 Fonctions holomorphes

Définitions, premières propriétés

Définition 11.3.1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. La fonction f est dite holomorphe sur Ω si

$$\forall z \in \Omega, \quad \lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ \zeta \neq z}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \quad \text{existe,}$$

et en notant $f'(z)$ cette limite, si $\Omega \ni z \mapsto f'(z) \in \mathbb{C}$ est continue. L'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur Ω sera noté $\mathcal{H}(\Omega)$.

Remarque 11.3.2. Une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ est continûment différentiable car pour $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$, on a $f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + \epsilon(h)h$, $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$, ce qui donne pour $f'(z_0) = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} h \\ \operatorname{Im} h \end{pmatrix} + o(|h|).$$

Exemple. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de chacun de ses points, i.e. telle que

$$\forall z \in \Omega, \exists R > 0, \exists (a_k)_{k \geq 0} \text{ suite de } \mathbb{C} \text{ avec } \sum_{k \geq 0} |a_k| R^k < +\infty,$$

$$\forall h \in \mathbb{C}, |h| \leq R, \quad f(z + h) = \sum_{k \geq 0} a_k h^k.$$

Alors f est holomorphe sur Ω . En effet, on a pour $z \in \Omega$ et $0 < |h| \leq R$, $f(z + h) - f(z) = a_1 h + \sum_{k \geq 2} a_k h^k$, et donc

$$|h^{-1}(f(z + h) - f(z)) - a_1| \leq |h| \sum_{k \geq 2} |a_k| |h|^{k-2} \leq |h| R^{-2} \sum_{k \geq 2} |a_k| R^k,$$

ce qui implique $f'(z) = a_1$. De plus, pour $|h_0| \leq R/2$, $|h| \leq R/2$, en remarquant que

$$\sum_{k \geq l \geq 0} |a_k| C_k^l |h_0|^{k-l} |h|^l \leq \sum_{k \geq 0} |a_k| (|h_0| + |h|)^k \leq \sum_{k \geq 0} |a_k| R^k < +\infty,$$

on obtient

$$f(z + h_0 + h) = \sum_{k \geq 0} a_k (h_0 + h)^k = \sum_{k \geq 0} a_k \sum_{0 \leq l \leq k} C_k^l h_0^{k-l} h^l = \sum_{l \geq 0} h^l \sum_{k \geq l} a_k C_k^l h_0^{k-l},$$

et comme $\sum_{l \geq 0} \sum_{k \geq l} |a_k| C_k^l |h_0|^{k-l} (R/2)^l \leq \sum_{k \geq 0} |a_k| R^k < +\infty$, on trouve

$$f'(z + h_0) = \sum_{k \geq 1} a_k C_k^1 h_0^{k-1} = a_1 + O(h_0),$$

démontrant la continuité de $z \mapsto f'(z)$.

Définition 11.3.3. Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , I un intervalle compact de \mathbb{R} , $\gamma : I \rightarrow \Omega$ une application de classe C^1 et f une fonction continue sur Ω . On pose

$$\int_{\gamma} f(\xi) d\xi = \int_I f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

On dit que $\int_{\gamma} f(\xi) d\xi$ est l'intégrale de f le long du *chemin* γ . Si $\gamma(\min I) = \gamma(\max I)$, on dira que γ est un *lacet* de Ω .

Remarque 11.3.4. Cette intégrale est inchangée si γ est remplacée par $\gamma \circ \kappa$ où $\kappa : J \rightarrow I$ est un difféomorphisme croissant d'un intervalle J (nécessairement compact) sur I . En effet on a

$$\int_I f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_J f(\gamma(\kappa(s))) \dot{\gamma}(\kappa(s)) \kappa'(s) ds.$$

Remarque 11.3.5. Si le segment $[z_1, z_2] = \{(1-t)z_1 + tz_2\}_{t \in [0,1]}$ est inclus dans Ω , on a

$$\int_{[z_1, z_2]} f(\xi) d\xi = - \int_{[z_2, z_1]} f(\xi) d\xi.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_{[z_1, z_2]} f(\xi) d\xi &= \int_0^1 f((1-t)z_1 + tz_2)(z_2 - z_1) dt \\ &= - \int_1^0 f(t'z_1 + (1-t')z_2)(z_2 - z_1) dt' = \int_0^1 f(t'z_1 + (1-t')z_2)(z_2 - z_1) dt' \\ &= - \int_{[z_2, z_1]} f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Remarque 11.3.6. On peut remplacer l'hypothèse de régularité C^1 pour γ par C^1 par morceaux, signifiant qu'il existe $(t_j)_{1 \leq j \leq N}$ avec $t_0 = \min I < t_1 < t_2 < \dots < t_N < t_{N+1} = \max I$ tels que γ soit continue de l'intervalle compact I à valeurs dans Ω et C^1 sur chacun des intervalles $[t_j, t_{j+1}]$, $0 \leq j \leq N$. On définit alors

$$\int_{\gamma} f(\xi) d\xi = \sum_{0 \leq j \leq N} \int_{\gamma_j} f(\xi) d\xi, \quad \gamma_j : [t_j, t_{j+1}] \rightarrow \Omega, \quad \gamma_j(t) = \gamma(t).$$

Lemme 11.3.7. Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , I un intervalle compact de \mathbb{R} , $\gamma : I \rightarrow \Omega$ un lacet de Ω et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors

$$\int_{\gamma} f'(\xi) d\xi = 0.$$

Démonstration. On obtient par la Remarque 11.3.2 et la règle de composition des fonctions différentiables, $\frac{d}{dt}\{f(\gamma(t))\} = f'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)$ qui est une fonction continue. On a alors

$$\int_{\gamma} f'(\xi) d\xi = \int_a^b f'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = [f(\gamma(t))]_a^b = 0.$$

□

Lemme 11.3.8. Soit Ω un ouvert convexe de \mathbb{C} , $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_1, z_2, z_3 \in \Omega$. Alors

$$\int_{\text{triangle}(z_1, z_2, z_3)} f(\xi) d\xi = 0.$$

N.B. Remarquons tout d'abord que l'énoncé a un sens car la convexité de Ω assure que le triangle (z_1, z_2, z_3) est inclus dans Ω . Par ailleurs, nous pouvons préciser que pour $z_1, z_2, z_3 \in \Omega$, on définit

$$\int_{[z_1, z_2]} f(\xi) d\xi = \int_0^1 f((1-t)z_1 + tz_2) dt (z_2 - z_1), \quad (11.3.1)$$

$$\int_{\text{triangle}(z_1, z_2, z_3)} f(\xi) d\xi = \int_{[z_1, z_2]} f(\xi) d\xi + \int_{[z_2, z_3]} f(\xi) d\xi + \int_{[z_3, z_1]} f(\xi) d\xi. \quad (11.3.2)$$

Démonstration. Posons pour $z_1, z_2 \in \Omega$,

$$G(z_2) = \int_{[z_1, z_2]} f(\xi) d\xi = \int_0^1 f((1-t)z_1 + tz_2) (z_2 - z_1) dt.$$

La fonction G est holomorphe sur Ω (bien définie sur Ω grâce à sa convexité) et l'on a

$$\begin{aligned} G'(z_2) &= \int_0^1 \underbrace{f'((1-t)z_1 + tz_2)(z_2 - z_1)}_{u'(t)} \underbrace{t}_{v(t)} dt + \int_0^1 f((1-t)z_1 + tz_2) dt \\ &= \left[f((1-t)z_1 + tz_2) t \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 f((1-t)z_1 + tz_2) dt + \int_0^1 f((1-t)z_1 + tz_2) dt \\ &= f(z_2). \end{aligned}$$

Cela implique que la fonction

$$\Omega \ni z_2 \mapsto \int_{[z_1, z_2]} f(\xi) d\xi - \int_{[z_3, z_2]} f(\xi) d\xi,$$

est différentiable de dérivée nulle et donc constante égale à sa valeur pour $z_2 = z_3$, ce qui implique

$$\begin{aligned} &\int_{[z_1, z_2]} f(\xi) d\xi + \int_{[z_2, z_3]} f(\xi) d\xi + \int_{[z_3, z_1]} f(\xi) d\xi \\ &= \int_{[z_1, z_2]} f(\xi) d\xi - \int_{[z_3, z_2]} f(\xi) d\xi + \int_{[z_3, z_1]} f(\xi) d\xi \\ &= \int_{[z_1, z_3]} f(\xi) d\xi - \int_{[z_1, z_3]} f(\xi) d\xi = 0, \end{aligned}$$

le résultat cherché. □

Lemme 11.3.9. Soient Ω un ouvert convexe de \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$, $z_1, z_2, z_3 \in \Omega$ et

$$f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\}) \cap C^0(\Omega).$$

Alors on a

$$\int_{\text{triangle}(z_1, z_2, z_3)} f(\xi) d\xi = 0.$$

Démonstration. On remarque tout d'abord (en regroupant les termes dans le second membre de l'égalité) que

$$\begin{aligned}
& \int_{[z_1, z_2]} f(\xi) d\xi + \int_{[z_2, z_3]} f(\xi) d\xi + \int_{[z_3, z_1]} f(\xi) d\xi \\
&= \int_{[z_1, z_2]} f(\xi) d\xi + \underbrace{\int_{[z_2, z_0]} f(\xi) d\xi}_{-\text{terme 02}} + \underbrace{\int_{[z_0, z_1]} f(\xi) d\xi}_{\text{terme 01}} \\
&\quad + \int_{[z_2, z_3]} f(\xi) d\xi + \underbrace{\int_{[z_3, z_0]} f(\xi) d\xi}_{-\text{terme 03}} + \underbrace{\int_{[z_0, z_2]} f(\xi) d\xi}_{\text{terme 02}} \\
&\quad + \int_{[z_3, z_1]} f(\xi) d\xi + \underbrace{\int_{[z_1, z_0]} f(\xi) d\xi}_{-\text{terme 01}} + \underbrace{\int_{[z_0, z_3]} f(\xi) d\xi}_{\text{terme 03}}.
\end{aligned}$$

Il suffit par conséquent de démontrer que $\int_{\text{triangle}(z_1, z_2, z_0)} f(\xi) d\xi = 0$. Si $z_1 = z_0$, le résultat est immédiat et l'on peut donc supposer que $z_1 \neq z_0$. La droite réelle Δ_{01} engendrée par le segment $[z_0, z_1]$ partage l'ouvert Ω et l'on a

$$\Omega = (\Delta_{01} \cap \Omega) \cup \Omega_+ \cup \Omega_-, \quad \Omega_{\pm} = \{z \in \Omega, \pm \text{Im}((z_1 - z_0)\overline{(z - z_0)}) > 0\}.$$

Les ouverts Ω_{\pm} sont convexes², ne contiennent pas z_0 et donc $f \in \mathcal{H}(\Omega_{\pm})$. En outre, on a par continuité de f sur Ω ,

$$\int_{\text{triangle}(z_1, z_2, z_0)} f(\xi) d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\text{triangle}(z_1 + \epsilon(z_2 - z_1), z_2, z_0 + \epsilon(z_2 - z_0))} f(\xi) d\xi.$$

Supposons $z_2 \in \Omega_+$: il vient pour $t \in]0, 1]$

$$\begin{aligned}
& \text{Im}((z_1 - z_0)\overline{(z_1 + t(z_2 - z_1) - z_0)}) = t \text{Im}((z_1 - z_0)\overline{(z_2 - z_0 + z_0 - z_1)}) \\
&= t \text{Im}((z_1 - z_0)\overline{(z_2 - z_0)}) > 0, \quad \text{car } z_2 \in \Omega_+. \quad \text{En outre,} \\
& \text{Im}((z_1 - z_0)\overline{(z_0 + t(z_2 - z_0) - z_0)}) = t \text{Im}((z_1 - z_0)\overline{(z_2 - z_0)}) > 0.
\end{aligned}$$

Par suite, le triangle $(z_1 + \epsilon(z_2 - z_1), z_2, z_0 + \epsilon(z_2 - z_0))$ est inclus dans Ω_+ et du lemme 11.3.8, il vient que l'intégrale de f sur ce triangle est nulle. Le raisonnement est analogue si $z_2 \in \Omega_-$ et le résultat est immédiat si $z_2 \in \Delta_{01}$ car on a alors $z_2 - z_0 = \theta(z_1 - z_0)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
& \int_{[z_1, z_2]} f(\xi) d\xi + \int_{[z_2, z_0]} f(\xi) d\xi + \int_{[z_0, z_1]} f(\xi) d\xi \\
&= \int_{[z_1, (1-\theta)z_0 + \theta z_1]} f(\xi) d\xi + \int_{[(1-\theta)z_0 + \theta z_1, z_0]} f(\xi) d\xi + \int_{[z_0, z_1]} f(\xi) d\xi = \phi(\theta),
\end{aligned}$$

2. Si $\zeta_0, \zeta_1 \in \Omega$ avec $\text{Im}((z_1 - z_0)\overline{(\zeta_0 - z_0)}) > 0$, $\text{Im}((z_1 - z_0)\overline{(\zeta_1 - z_0)}) > 0$, il vient avec $\zeta_t = (1-t)\zeta_0 + t\zeta_1$, que $\zeta_t \in \Omega$ et

$$\text{Im}((z_1 - z_0)\overline{(\zeta_t - z_0)}) = \text{Im}((z_1 - z_0)\overline{((1-t)\zeta_0 - (1-t)z_0)}) + \text{Im}((z_1 - z_0)\overline{(t\zeta_1 - tz_0)}) > 0.$$

avec

$$\begin{aligned}\phi(\theta) = \int_1^\theta f((1-t)z_0 + tz_1)(z_1 - z_0)dt + \int_\theta^0 f((1-t)z_0 + tz_1)(z_1 - z_0)dt \\ + \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz_1)(z_1 - z_0)dt = 0,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. \square

Proposition 11.3.10. Soient Ω un ouvert convexe de \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$, et

$$f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\}) \cap C^0(\Omega).$$

Soit I un intervalle compact de \mathbb{R} , $\gamma : I \rightarrow \Omega$ un lacet de Ω . Alors on a

$$\int_\gamma f(\xi)d\xi = 0.$$

Démonstration. On pose pour $z \in \Omega$, $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\xi)d\xi$. Si $z, z+h \in \Omega$, on a

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z_0, z+h]} f(\xi)d\xi - \int_{[z_0, z]} f(\xi)d\xi,$$

et d'après le Lemme 11.3.8, on a

$$\int_{[z_0, z+h]} f(\xi)d\xi + \int_{[z+h, z]} f(\xi)d\xi + \int_{[z, z_0]} f(\xi)d\xi = 0,$$

ce qui implique

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(\xi)d\xi = \int_0^1 f(z+th)h dt.$$

Par suite, on obtient

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z),$$

et donc que F est holomorphe sur Ω telle que $F' = f$. D'après le Lemme 11.3.7, il vient

$$\int_\gamma f(\xi)d\xi = \int_\gamma F'(\xi)d\xi = 0,$$

soit le résultat cherché. \square

Théorème 11.3.11. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} étoilé par rapport à $\omega_0 \in \Omega$: pour tout $z \in \Omega$, le segment $[\omega_0, z]$ est inclus dans Ω . Soit $z_0 \in \Omega$, et soit

$$f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\}) \cap C^0(\Omega).$$

Soit I un intervalle compact de \mathbb{R} , γ un lacet de Ω . Alors on a

$$\int_\gamma f(\xi)d\xi = 0.$$

N.B. Un ouvert convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points. En revanche l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est étoilé par rapport au point 1, mais non convexe.

Démonstration. On pose pour $z \in \Omega$, $F(z) = \int_{[\omega_0, z]} f(\xi) d\xi$, qui est bien défini car Ω est étoilé par rapport à ω_0 . Soit $z \in \Omega$. Le segment $[\omega_0, z]$ est inclus dans Ω et possède un voisinage convexe inclus dans Ω : en effet l'ouvert

$$V_r = \cup_{\zeta \in [\omega_0, z]} D(\zeta, r)$$

est un voisinage convexe du compact $[\omega_0, z]$ et $V_r \subset \Omega$ pour un $r > 0$ assez petit³. Si $|h| < r$, on a $\omega_0, z, z+h \in V_r$ et

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[\omega_0, z+h]} f(\xi) d\xi - \int_{[\omega_0, z]} f(\xi) d\xi,$$

et d'après le Lemme 11.3.8, on a sur l'ouvert convexe V_r ,

$$\int_{[\omega_0, z+h]} f(\xi) d\xi + \int_{[z+h, z]} f(\xi) d\xi + \int_{[z, \omega_0]} f(\xi) d\xi = 0,$$

ce qui implique

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(\xi) d\xi = \int_0^1 f(z+th) h dt.$$

Par suite, on obtient

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z),$$

et donc que F est holomorphe sur Ω telle que $F' = f$. D'après le Lemme 11.3.7, il vient

$$\int_{\gamma} f(\xi) d\xi = \int_{\gamma} F'(\xi) d\xi = 0,$$

soit le résultat cherché. \square

Théorème 11.3.12. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors la fonction f est développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω et toutes les dérivées $\Omega \ni z \mapsto f^{(k)}(z)$ sont holomorphes sur Ω .

3. Sinon pour tout $k \geq 1$, on pourrait trouver $\zeta_k \in [\omega_0, z]$, $\theta_k \in \mathbb{R}$, $0 \leq r_k < k^{-1}$ tels que $\zeta_k + r_k e^{i\theta_k} \notin \Omega$. Comme le segment $[\omega_0, z]$ est compact et Ω est ouvert, on pourrait trouver $\zeta \in [\omega_0, z] \cap \Omega^c$, ce qui est absurde. De plus V_r est convexe car, pour $t_1, t_2 \in [0, 1]$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $\rho_1, \rho_2 \in [0, r]$, $t \in [0, 1]$,

$$Z = (1-t)((1-t_1)\omega_0 + t_1 z + \rho_1 e^{i\theta_1}) + t((1-t_2)\omega_0 + t_2 z + \rho_2 e^{i\theta_2}),$$

on a $(1-t)t_1 + tt_2 = t_3 \in [0, 1]$ et donc $(1-t)(1-t_1) + t(1-t_2) = 1-t_3$, ce qui donne

$$Z = (1-t_3)\omega_0 + t_3 z + (1-t)\rho_1 e^{i\theta_1} + t\rho_2 e^{i\theta_2},$$

et comme $0 \leq (1-t)\rho_1 + t\rho_2 < r$, cela implique $Z \in V_r$.

N.B. Ce théorème démontre en particulier que l'exemple de fonction holomorphe qui suit la Remarque 11.3.2 est en fait le cas général. Le lecteur remarquera le contraste saisissant avec la théorie de la différentiation réelle ; ici nous démontrons que f continûment différentiable au sens complexe implique l'analyticité, ce qui n'est évidemment pas vérifié dans la théorie réelle (pensez par exemple à la fonction de classe C^1 définie par $\mathbb{R} \ni x \mapsto \phi(x) = x^2 \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x)$ telle que $\phi'(x) = 2x \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x)$ et ϕ' n'est pas différentiable en 0).

Notation. On utilisera la notation suivante. Pour $z \in \mathbb{C}, r > 0$, on pose

$$D(z, r) = \{\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta - z| < r\}, \quad \dot{D}(z, r) = \{\zeta \in \mathbb{C}, 0 < |\zeta - z| < r\}. \quad (11.3.3)$$

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ et $r_0 > 0$ tel que $\overline{D(z_0, r_0)} \subset \Omega$. Il existe $r_1 > r_0$ tel que

$$\overline{D(z_0, r_0)} \subset D(z_0, r_1) = \Omega_0 \subset \Omega,$$

et l'ouvert Ω_0 est convexe. On considère pour $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega_0, \gamma(t) = z_0 + r_0 e^{2i\pi t}$, $|z - z_0| < r_0$,

$$I(z) = \int_{\gamma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi.$$

Notons que la fonction $\xi \mapsto \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} = G(\xi, z)$ est holomorphe sur $\Omega_0 \setminus \{z\}$ et que par ailleurs,

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow z \\ \xi \neq z}} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} = f'(z),$$

de sorte que la fonction $\xi \mapsto G(\xi, z)$ est continue sur Ω_0 et holomorphe sur $\Omega_0 \setminus \{z\}$. De la Proposition 11.3.10, il vient que $I(z) = 0$, soit

$$\forall z \in D(z_0, r_0), \quad \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z}. \quad (11.3.4)$$

Lemme 11.3.13. Soit $z_0 \in \mathbb{C}, r_0 > 0, \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + r_0 e^{2i\pi t}$. Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} 1 & \text{si } |z - z_0| < r_0, \\ 0 & \text{si } |z - z_0| > r_0. \end{cases}$$

Démonstration. On considère pour $|z - z_0| \neq r_0$,

$$J(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{r_0 2i\pi e^{2i\pi t}}{z_0 + r_0 e^{2i\pi t} - z} dt = \int_0^1 (1 - (z - z_0)r_0^{-1}e^{-2i\pi t})^{-1} dt,$$

et l'on remarque que si $|z - z_0| < r_0$, on a

$$(1 - (z - z_0)r_0^{-1}e^{-2i\pi t})^{-1} = \sum_{k \geq 0} e^{-2i\pi kt} \frac{(z - z_0)^k}{r_0^k},$$

et comme pour $\rho \in [0, 1[, \int_0^1 \sum_{k \geq 0} \rho^k dt = \sum_{k \geq 0} \rho^k$, il vient pour $|z - z_0| < r_0$,

$$J(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(z - z_0)^k}{r_0^k} \int_0^1 e^{-2i\pi kt} dt = 1.$$

Si $|z - z_0| > r_0$, on a

$$J(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{r_0 2i\pi e^{2i\pi t}}{z_0 + r_0 e^{2i\pi t} - z} dt = \int_0^1 \frac{r_0}{(z_0 - z)(1 + e^{2i\pi t} r_0 (z_0 - z)^{-1})} dt,$$

et comme

$$\frac{e^{2i\pi t}}{(1 + e^{2i\pi t} r_0 (z_0 - z)^{-1})} = \sum_{k \geq 0} e^{2i\pi t(k+1)} r_0^k (z - z_0)^{-k},$$

on trouve $J(z) = 0$ et le résultat du lemme. \square

En utilisant ce lemme et (11.3.4), il vient pour $|z - z_0| < r_0$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_0^1 f(z_0 + r_0 e^{2i\pi t}) (1 - (z - z_0) r_0^{-1} e^{-2i\pi t})^{-1} dt,$$

et par suite, comme pour $\rho \in [0, 1[$,

$$\int_0^1 \sup_{[0,1]} |f(z_0 + r_0 e^{2i\pi t})| \sum_{k \geq 0} \rho^k dt < +\infty,$$

il vient

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \int_0^1 f(z_0 + r_0 e^{2i\pi t}) e^{-2i\pi kt} dt \frac{(z - z_0)^k}{r_0^k} = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k, \quad |a_k| \leq r_0^{-k} \sup_{\gamma} |f|,$$

une série entière de rayon de convergence $\geq r_0$. L'exemple de la page 177 montre que $f^{(l)}$ est holomorphe pour tout l et que pour $|z - z_0| < r_0$,

$$f^{(l)}(z) = \sum_{k, k \geq l} \frac{a_k k!}{(k-l)!} (z - z_0)^{k-l},$$

ce qui achève la démonstration du théorème. \square

Nous avons démontré en particulier le résultat suivant.

Corollaire 11.3.14. Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$, $r_0 > 0$ tels que $\overline{D(z_0, r_0)} \subset \Omega$. Alors, pour $|z - z_0| < r_0$, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$, $\gamma(t) = z_0 + r_0 e^{2i\pi t}$, et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (11.3.5)$$

Théorème 11.3.15. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet de \mathbb{C} et soit $\Omega = (\gamma([0, 1]))^c$. On pose pour $z \in \Omega$,

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z}. \quad (11.3.6)$$

La fonction Ind_{γ} est à valeurs dans \mathbb{Z} , constante sur chacune des composantes connexes de Ω , nulle sur la composante non bornée.

N.B. On dira que $\text{Ind}_\gamma(z)$ est l'indice du point z par rapport au lacet γ .

Démonstration. Posons pour $s \in [0, 1], z \in \Omega$

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t) - z} dt.$$

On a

$$\dot{\phi}(s) = \frac{\dot{\gamma}(s)}{\gamma(s) - z}, \quad \frac{d}{ds}(e^{\phi(s)}) = e^{\phi(s)} \frac{\dot{\gamma}(s)}{\gamma(s) - z},$$

et

$$\frac{d}{ds}(e^{\phi(s)}(\gamma(s) - z)^{-1}) = e^{\phi(s)} \left(\frac{\dot{\gamma}(s)}{(\gamma(s) - z)^2} - \frac{\dot{\gamma}(s)}{(\gamma(s) - z)^2} \right) = 0,$$

ce qui implique

$$e^{\phi(s)} = (\gamma(s) - z)^{-1} e^{\phi(0)} = \frac{\gamma(s) - z}{\gamma(0) - z}, \quad e^{\phi(1)} = 1,$$

et par conséquent $2i\pi \text{Ind}_\gamma(z) = \phi(1) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ (cf. Théorème 1.1.1), ce qui donne que $\text{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. En outre $\text{Ind}_\gamma \in \mathcal{H}(\Omega)$, ce qui implique que Ind_γ est constante sur chaque composante connexe de Ω , car l'image d'un connexe U est un connexe de \mathbb{Z} , donc un point. Par ailleurs on a

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \text{Ind}_\gamma(z) = 0,$$

et si W est la composante non bornée de Ω , ceci implique que Ind_γ est constante égale à 0 sur W . \square

Théorème 11.3.16. Soit Ω un ouvert étoilé de \mathbb{C} , $\gamma : I \rightarrow \Omega$ un lacet de Ω et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. On a pour $z \in \Omega \setminus \gamma(I)$,

$$f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (11.3.7)$$

Démonstration. On considère pour γ un lacet de l'ouvert étoilé Ω , $z \in \Omega \setminus \gamma(I)$,

$$I(z) = \int_\gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi.$$

Notons que la fonction $\xi \mapsto \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} = G(\xi, z)$ est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$ et que par ailleurs,

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow z \\ \xi \neq z}} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} = f'(z),$$

de sorte que la fonction $\xi \mapsto G(\xi, z)$ est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$. Du Théorème 11.3.11, il vient que $I(z) = 0$, soit d'après (11.3.6), le résultat

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) 2i\pi \text{Ind}_\gamma(z).$$

\square

Remarque 11.3.17. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, telle que

$$\forall z \in \Omega, \quad \lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ \zeta \neq z}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \quad \text{existe.} \quad (11.3.8)$$

Alors la fonction f est holomorphe sur Ω . On peut donc modifier a posteriori la définition 11.3.1 en ne retenant que la propriété (11.3.8).

Pour démontrer cette assertion, on note que, avec

$$f'(z) = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ \zeta \neq z}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z},$$

il nous suffit de démontrer que $\Omega \ni z \mapsto f'(z)$ est continue pour que les propriétés de la définition 11.3.1 soient vérifiées. On remarque que (11.3.8) implique que f est différentiable en tout point de Ω , donc en particulier est une fonction continue sur Ω . Soit $z_0 \in \Omega$ et $r_0 > 0$ tels que $D(z_0, r_0) \subset \Omega$. Pour $|z - z_0| < r_0$, on pose

$$F_0(z) = \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi = \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz) dt (z - z_0).$$

Il nous suffit de démontrer que, pour $z \in D(z_0, r_0)$,

$$f(z) = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ \zeta \neq z}} \frac{F_0(\zeta) - F_0(z)}{\zeta - z}, \quad (11.3.9)$$

car cela impliquera que F_0 est holomorphe sur $D(z_0, r_0)$ (au sens de la définition 11.3.1 car f est continue) avec $F_0' = f$, ce qui donnera l'holomorphie de f (cf. Théorème 11.3.12). Considérons, pour $z, z+h \in D(z_0, r_0)$,

$$\begin{aligned} F_0(z+h) - F_0(z) - f(z)h &= \int_{[z_0, z+h]} f(\xi) d\xi - \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi - f(z)h \\ &= \int_{[z_0, z+h]} f(\xi) d\xi - \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi - \int_{[z, z+h]} f(\xi) d\xi + \int_{[z, z+h]} (f(\xi) - f(z)) d\xi. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\left| \int_{[z, z+h]} (f(\xi) - f(z)) d\xi \right| \leq |h| \sup_{\xi \in [z, z+h]} |f(\xi) - f(z)| = |h| \epsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0,$$

car f est continue. Il est donc suffisant de démontrer que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[z_0, z+h]} f(\xi) d\xi - \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi - \int_{[z, z+h]} f(\xi) d\xi \\ &= \int_{[z_0, z+h]} f(\xi) d\xi + \int_{[z, z_0]} f(\xi) d\xi + \int_{[z+h, z]} f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

soit de démontrer pour $z_1, z_2, z_3 \in D(z_0, r_0)$,

$$\int_{\text{triangle}(z_1, z_2, z_3)} f(\xi) d\xi = 0, \quad (11.3.10)$$

où cette intégrale est définie en (11.3.2). On utilisera dans la suite la notation

$$\int_{[z_1, z_2, z_3]} f(\xi) d\xi \quad \text{pour désigner} \quad \int_{\text{triangle}(z_1, z_2, z_3)} f(\xi) d\xi.$$

Considérons les milieux $z'_1 = (z_2 + z_3)/2$, $z'_2 = (z_3 + z_1)/2$, $z'_3 = (z_1 + z_2)/2$ et les 4 triangles

$$T_1^{(1)} = [z_1, z'_3, z'_2], \quad T_2^{(1)} = [z_2, z'_1, z'_3], \quad T_3^{(1)} = [z_3, z'_2, z'_1], \quad T_4^{(1)} = [z'_1, z'_2, z'_3].$$

Comme on a ⁴

$$\begin{aligned} & \int_{T(z_1, z_2, z_3)} f(\xi) d\xi \\ &= \int_{T(z_1, z'_3, z'_2)} f(\xi) d\xi + \int_{T(z_2, z'_1, z'_3)} f(\xi) d\xi + \int_{T(z_3, z'_2, z'_1)} f(\xi) d\xi + \int_{T(z'_1, z'_2, z'_3)} f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

l'un des 4 triangles $\{T_j^{(1)}\}_{1 \leq j \leq 4}$ vérifie

$$\left| \int_{T_j^{(1)}} f(\xi) d\xi \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{T^{(0)}} f(\xi) d\xi \right|, \quad T^{(0)} = [z_1, z_2, z_3].$$

Par suite on trouve une suite de compacts

$$\tilde{T}^{(0)} \supset \tilde{T}_{k_1}^{(1)} \supset \tilde{T}_{k_2}^{(2)} \supset \dots \supset \tilde{T}_{k_n}^{(n)} \supset \tilde{T}_{k_{n+1}}^{(n+1)} \supset \dots,$$

tels que

$$\left| \int_{T_{k_{n+1}}^{(n+1)}} f(\xi) d\xi \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{T_{k_n}^{(n)}} f(\xi) d\xi \right|, \quad \ell(T_{k_{n+1}}^{(n+1)}) = \frac{1}{2} \ell(T_{k_n}^{(n)}),$$

où \tilde{T} désigne l'enveloppe convexe du triangle T et $\ell(T)$ est le périmètre de T . Il vient immédiatement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_{T_{k_n}^{(n)}} f(\xi) d\xi \right| \geq \frac{1}{4^n} \left| \int_{T^{(0)}} f(\xi) d\xi \right|, \quad \ell(T_{k_n}^{(n)}) = \frac{1}{2^n} \ell(T^{(0)}).$$

Comme la suite de compacts non vides $(K_n = \tilde{T}_{k_n}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, il existe $\zeta_0 \in D(z_0, r_0)$ tel que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{T}_{k_n}^{(n)} = \{\zeta_0\}.$$

4. On a en effet

$$\begin{aligned} \int_{T(z_1, z_2, z_3)} f(\xi) d\xi &= \int_{[z_1, z_2]} f(\xi) d\xi + \int_{[z_2, z_3]} f(\xi) d\xi + \int_{[z_3, z_1]} f(\xi) d\xi \\ &= \int_{[z_1, z'_3]} f(\xi) d\xi + \int_{[z'_3, z_2]} f(\xi) d\xi + \int_{[z_2, z'_1]} f(\xi) d\xi + \int_{[z'_1, z_3]} f(\xi) d\xi + \int_{[z_3, z'_2]} f(\xi) d\xi + \int_{[z'_2, z_1]} f(\xi) d\xi \\ &= \left(\int_{[z_1, z'_3]} f(\xi) d\xi + \int_{[z'_3, z_2]} f(\xi) d\xi \right) + \left(\int_{[z_2, z'_1]} f(\xi) d\xi + \int_{[z'_1, z_3]} f(\xi) d\xi \right) + \left(\int_{[z_3, z'_2]} f(\xi) d\xi + \int_{[z'_2, z_1]} f(\xi) d\xi \right) \\ &= \left(\int_{[z_1, z'_3, z'_2]} f(\xi) d\xi - \int_{[z'_3, z'_2]} f(\xi) d\xi \right) + \left(\int_{[z'_3, z_2, z'_1]} f(\xi) d\xi - \int_{[z'_1, z'_2]} f(\xi) d\xi \right) + \left(\int_{[z'_1, z_3, z'_2]} f(\xi) d\xi - \int_{[z'_2, z'_1]} f(\xi) d\xi \right) \\ &= \int_{[z_1, z'_3, z'_2]} f(\xi) d\xi + \int_{[z'_3, z_2, z'_1]} f(\xi) d\xi + \int_{[z'_1, z_3, z'_2]} f(\xi) d\xi + \underbrace{\int_{[z'_2, z'_3]} f(\xi) d\xi + \int_{[z'_3, z'_1]} f(\xi) d\xi + \int_{[z'_1, z'_2]} f(\xi) d\xi}_{\int_{[z'_2, z'_3, z'_1]} f(\xi) d\xi}. \end{aligned}$$

En effet le diamètre de K_n ⁵ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$ (l'intersection ne peut contenir plus d'un point) et en outre si $y_n \in K_n$ (qui est non vide), la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite du compact K_0 de laquelle on peut extraire une sous-suite $(y_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ convergente de limite ζ_0 telle que $\forall j \in \mathbb{N}$, $\zeta_0 \in K_{n_j}$ (car la suite de compacts $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante); comme la suite $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, on a $\zeta_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. On obtient par conséquent,

$$\left| \int_{T^{(0)}} f(\xi) d\xi \right| \leq 4^n \left| \int_{T_{k_n}^{(n)}} f(\xi) d\xi \right| = 4^n \left| \int_{T_{k_n}^{(n)}} (f(\xi) - f(\zeta_0) - f'(\zeta_0)(\xi - \zeta_0)) d\xi \right|.$$

Or nous avons

$$f(\xi) - f(\zeta_0) - f'(\zeta_0)(\xi - \zeta_0) = (\xi - \zeta_0)\eta_0(\xi - \zeta_0), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \eta_0(\tau) = 0,$$

et cela implique

$$\begin{aligned} \left| \int_{T^{(0)}} f(\xi) d\xi \right| &\leq 4^n \ell(T_{k_n}^{(n)}) \sup_{\xi \in \tilde{T}_{k_n}^{(n)}} |\xi - \zeta_0| |\eta_0(\xi - \zeta_0)| \\ &\leq 4^n \ell(T_{k_n}^{(n)})^2 \sup_{\xi \in \tilde{T}_{k_n}^{(n)}} |\eta_0(\xi - \zeta_0)| \\ &\leq 4^n \ell(T^{(0)})^2 \frac{1}{2^{2n}} \sup_{\xi \in \tilde{T}_{k_n}^{(n)}} |\eta_0(\xi - \zeta_0)| = \ell(T^{(0)})^2 \sup_{\xi \in \tilde{T}_{k_n}^{(n)}} |\eta_0(\xi - \zeta_0)| \\ &\leq \ell(T^{(0)})^2 \sup_{|\xi - \zeta_0| \leq \text{diam}(\tilde{T}_{k_n}^{(n)})} |\eta_0(\xi - \zeta_0)|, \end{aligned}$$

ce qui donne $\left| \int_{T^{(0)}} f(\xi) d\xi \right| = 0$ en prenant la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, démontrant (11.3.10) et donc la Remarque 11.3.17.

Séries entières

Définition 11.3.18. Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres complexes. On définit $R \in [0, +\infty]$ par

$$\frac{1}{R} = \limsup_k |a_k|^{1/k}, \quad (11.3.11)$$

et on dit que R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$.

Cette terminologie est justifiée par le résultat suivant.

5. Si $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$, l'enveloppe convexe de $\{a_1, a_2, a_3\}$ est

$$\mathcal{T} = \{\theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \theta_3 a_3\}_{\substack{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1 \\ \theta_j \in [0, 1]}}$$

de sorte que avec $\sum_{1 \leq j \leq 3} \theta_j = \sum_{1 \leq j \leq 3} \theta'_j = 1$, $\theta_j, \theta'_j \in [0, 1]$, $\theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \theta_3 a_3 = \theta_1(a_1 - a_3) + \theta_2(a_2 - a_3) + a_3$, et

$$\theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \theta_3 a_3 - (\theta'_1 a_1 + \theta'_2 a_2 + \theta'_3 a_3) = (\theta_1 - \theta'_1)(a_1 - a_3) + (\theta_2 - \theta'_2)(a_2 - a_3),$$

ce qui implique $\text{diam } \mathcal{T} = \sup_{\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{T}} |\zeta_1 - \zeta_2| \leq |a_1 - a_3| + |a_2 - a_3| \leq \text{périmètre}(\mathcal{T})$.

Théorème 11.3.19. Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres complexes et R défini par (11.3.11). Si $R > 0$, alors la série entière $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ est convergente pour $|z| < R$, définit une fonction holomorphe f sur $D(0, R)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les séries entières $\sum_{k \geq n} a_k \frac{k!}{(k-n)!} z^{k-n}$ aient un rayon de convergence $\geq R$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = f^{(k)}(0)/k!, \quad (11.3.12)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in D(0, R), \quad f^{(n)}(z) = \sum_{k \geq n} a_k \frac{k!}{(k-n)!} z^{k-n}. \quad (11.3.13)$$

De plus si $R < +\infty$ et $|z| > R$, le terme général de la série $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ ne tend pas vers 0 et cette série est donc divergente.

Démonstration. Si $R > 0$, on considère $0 < R_2 < R_1 < R$. Il existe k_0 tel que pour $k > k_0$, $|a_k|^{1/k} \leq 1/R_1$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \sup_{|h| \leq R_2} |a_k h^k| &\leq \sup_{0 \leq k \leq k_0} |a_k| \sum_{0 \leq k \leq k_0} R_2^k + \sum_{k_0 < k} \sup_{|h| \leq R_2} (|a_k|^{1/k} |h|)^k \\ &\leq \sup_{0 \leq k \leq k_0} |a_k| \sum_{0 \leq k \leq k_0} R_2^k + \sum_{k_0 < k} (R_1^{-1} R_2)^k < +\infty, \end{aligned}$$

de sorte que la série $\sum_{k \geq 0} a_k h^k$ converge normalement sur tout compact de $D(0, R)$. Par conséquent, la convergence est uniforme sur tout compact de $D(0, R)$ et la fonction $D(0, R) \ni z \mapsto f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ est continue. On a également démontré

$$\sum_{k \geq 0} |a_k| R_2^k < +\infty,$$

et l'exemple page 177 montre que f est holomorphe sur $D(0, R)$. De plus, pour $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\left| a_{k+n_0} \frac{(k+n_0)!}{k!} \right|^{1/k} = \left(|a_{k+n_0}|^{\frac{1}{k+n_0}} \right)^{1+\frac{n_0}{k}} \left(\frac{(k+n_0)!}{k!} \right)^{1/k}.$$

La formule de Stirling (cf. (7.1.1)),

$$N! = \left(\frac{N}{e} \right)^N \sqrt{2\pi N} (1 + \epsilon_N), \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \epsilon_N = 0, \quad (11.3.14)$$

montre que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{(k+n_0)!}{k!} \right)^{1/k} = 1,$$

ce qui implique

$$\limsup_k \left| a_{k+n_0} \frac{(k+n_0)!}{k!} \right|^{1/k} = \limsup_k \left(|a_{k+n_0}|^{\frac{1}{k+n_0}} \right)^{1+\frac{n_0}{k}}.$$

Soit $\epsilon_0 > 0$ donné. On a pour $k \geq k_0$, $|a_{k+n_0}|^{\frac{1}{k+n_0}} \leq \frac{1}{R} + \epsilon_0$ et par conséquent

$$\left(|a_{k+n_0}|^{\frac{1}{k+n_0}} \right)^{1+\frac{n_0}{k}} \leq \left(\frac{1}{R} + \epsilon_0 \right)^{1+\frac{n_0}{k}},$$

ce qui implique

$$\limsup_k (|a_{k+n_0}|^{\frac{1}{k+n_0}})^{1+\frac{n_0}{k}} \leq \frac{1}{R} + \epsilon_0,$$

ceci pour tout $\epsilon_0 > 0$, ce qui donne que le rayon de convergence de $\sum_{k \geq n} a_k \frac{k!}{(k-n)!} z^{k-n}$ est $\geq R$. On peut donc dériver terme à terme sur $D(0, R)$ et obtenir le résultat cherché.

De plus si $R < +\infty$, $R_2 > R_1 > R$, en extrayant une sous-suite, on obtient

$$\forall j \geq j_0, \quad |a_{k_j}|^{1/k_j} R_1 \geq R_1/R_2.$$

Il vient par conséquent pour $|h| > R_2, j \geq j_0$,

$$\begin{aligned} |a_{k_j} h^{k_j}| &= (|a_{k_j}|^{1/k_j} R_1 |h| R_2^{-1})^{k_j} (R_2/R_1)^{k_j} \\ &\geq \left(\frac{R_1}{R_2} |h| R_2^{-1}\right)^{k_j} (R_2/R_1)^{k_j} = (|h|/R_2)^{k_j} \geq 1 \end{aligned}$$

et la série $\sum a_k h^k$ est divergente. \square

Exemples.

[1] La série entière $\sum_{k \geq 0} z^k$ a pour rayon de convergence 1 et diverge sur le cercle $C(0, 1)$ (centre 0, rayon 1), car le terme général est de module 1 sur le cercle unité.

[2] La série entière $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} z^k$, donnant $-\ln(1-z)$ sur $|z| < 1$ a pour rayon de convergence 1, diverge pour $z = 1$ (série harmonique), converge en tous les autres points du cercle unité (Théorème d'Abel). En effet, on pose pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$B_k = \sum_{0 \leq l \leq k} e^{il\theta} = \frac{e^{i(k+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1},$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{e^{ik\theta}}{k} &= \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{B_k - B_{k-1}}{k} = \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{B_k}{k} - \sum_{0 \leq k \leq N-1} \frac{B_k}{k+1} \\ &= \frac{B_N}{N} + \sum_{1 \leq k \leq N-1} \frac{B_k}{(k+1)k} - B_0. \end{aligned}$$

Comme $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$|B_N|/N \leq 2|e^{i\theta} - 1|^{-1} N^{-1}, \quad \text{et pour } k \geq 1, \quad \frac{|B_k|}{(k+1)k} \leq 2|e^{i\theta} - 1|^{-1} k^{-2},$$

et par suite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{e^{ik\theta}}{k} = -1 + \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{(k+1)k}.$$

En particulier, pour $\theta = \pi$, il vient

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} - 1}{(-2)(k+1)k} = -1 + \sum_{l \geq 1} \frac{1}{(2l+1)2l}.$$

[3] La série entière $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k-1)} z^k$, donnant

$$(1-z) \ln(1-z) + z \text{ pour } |z| < 1,$$

a pour rayon de convergence 1 et converge sur le cercle unité.

Lemme 11.3.20. Soient $z_0 \in \mathbb{C}, r_0 > 0$ et soit f une fonction holomorphe sur $D(z_0, r_0)$. Alors, pour tout $z \in D(z_0, r_0)$, on a

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k,$$

et le rayon de convergence de la série de droite est $\geq r_0$.

Démonstration. On peut supposer $z_0 = 0$. En posant pour $r > 0, t \in [0, 1]$, $\gamma_r(t) = re^{2i\pi t}$, on a pour $|z| < r < r_0, k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi, \quad \text{et par suite} \quad \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leq \frac{2\pi r \sup_{\gamma_r} |f|}{2\pi r^{k+1}},$$

ce qui implique que le rayon de convergence ρ de la série de droite dans le lemme vérifie

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_k \left(\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \right)^{1/k} \leq \frac{1}{r}, \quad \text{et donc } \rho \geq r.$$

Les fonctions holomorphes

$$D(0, r_0) \ni z \mapsto f(z), \quad D(0, r_0) \ni z \mapsto \tilde{f}(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k,$$

ont même développement de Taylor et donc $f - \tilde{f}$ possède un zéro d'ordre infini en 0, ce qui implique $f = \tilde{f}$. \square

N.B. Notre argument est valide en particulier dans le cas $r_0 = +\infty$.

Théorème 11.3.21. Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\}) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$. Alors f se prolonge de manière unique en une fonction holomorphe sur Ω .

Démonstration. Considérons $\Omega_0 = D(z_0, r_0) \subset \Omega$ pour un $r_0 > 0$ (Ω_0 est convexe). On pose pour $z \in \Omega_0$,

$$g(z) = \begin{cases} f(z)(z - z_0) & \text{si } z \neq z_0, \\ 0 & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

La fonction g est holomorphe sur $\Omega_0 \setminus \{z_0\}$ et continue sur Ω_0 car, comme f est bornée au voisinage de z_0 ,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} f(z)(z - z_0) = 0 = g(z_0).$$

Posons alors pour $z \in \Omega_0$, $G(z) = \int_{[z_0, z]} g(\xi) d\xi$. Si $z, z+h \in \Omega$, on a

$$G(z+h) - G(z) = \int_{[z_0, z+h]} f(\xi) d\xi - \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi,$$

et d'après le Lemme 11.3.8 appliqué à l'ouvert convexe Ω_0 , on a

$$\int_{[z_0, z+h]} g(\xi) d\xi + \int_{[z+h, z]} g(\xi) d\xi + \int_{[z, z_0]} g(\xi) d\xi = 0,$$

ce qui implique

$$G(z+h) - G(z) = \int_{[z, z+h]} g(\xi) d\xi = \int_0^1 g(z+th) h dt.$$

Par suite, on obtient

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{G(z+h) - G(z)}{h} = g(z),$$

et donc que G est holomorphe sur Ω_0 telle que $G' = g$. Par suite g est holomorphe sur Ω_0 et comme $g(z_0) = 0$, on a pour $z \in \Omega_0$,

$$h(z)(z - z_0) = g(z), \quad \text{avec } h \text{ holomorphe sur } \Omega_0,$$

ce qui implique pour $z \neq z_0, z \in \Omega_0$,

$$h(z)(z - z_0) = f(z)(z - z_0) \quad \text{et donc} \quad h(z) = f(z).$$

La fonction f se prolonge donc en une fonction holomorphe sur Ω_0 (le prolongement est unique par continuation analytique). \square

Fonctions méromorphes

Définition 11.3.22. Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$. On dit que f possède un pôle en z_0 s'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\Omega \setminus \{z_0\} \ni z \mapsto (z - z_0)^{N_0} f(z)$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω . Le plus petit de ces entiers N_0 s'appelle l'ordre du pôle de f en z_0 . Lorsque $N_0 = 1$, on dira que f possède un pôle simple en z_0 .

N.B. Lorsque le prolongement existe, il est unique (prolongement analytique).

N.B. La fonction z^{-N} , $N \in \mathbb{N}^*$ possède un pôle d'ordre N en 0. En revanche, la fonction $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto e^{z^{-1}} = \psi(z)$ est telle que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto z^N e^{z^{-1}}$ ne se prolonge pas en une fonction holomorphe sur \mathbb{C} : on dira que ψ possède une singularité essentielle en 0.

Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$, possédant un pôle d'ordre N_0 en z_0 . Alors la fonction g donnée sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ par

$$g(z) = (z - z_0)^{N_0} f(z),$$

se prolonge (de manière unique) en une fonction holomorphe sur Ω et l'on a pour $r_0 > 0$, $|z - z_0| < r_0$,

$$\sum_{k \geq 0} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = (z - z_0)^{N_0} f(z),$$

i.e. pour $0 < |z - z_0| < r_0$,

$$f(z) = \sum_{1 \leq l \leq N_0} \frac{g^{(N_0-l)}(z_0)}{(N_0-l)!} (z - z_0)^{-l} + \sum_{l \geq 0} \frac{g^{(l+N_0)}(z_0)}{(l+N_0)!} (z - z_0)^l$$

On définit le *Résidu de f en z_0* , noté $\text{Res}(f, z_0)$ par

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(N_0-1)}(z_0)}{(N_0-1)!}. \quad (11.3.15)$$

Définition 11.3.23. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , P un sous-ensemble discret fermé de Ω , $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus P)$. On dira que f est méromorphe sur Ω si f possède un pôle en tout point de P .

N.B. Une fonction holomorphe sur Ω est aussi méromorphe (prendre $P = \emptyset$).

Remarque 11.3.24. Si K est un compact de Ω , $K \cap P$ est fini car compact discret. Comme Ω est réunion dénombrable de compacts, l'ensemble P est dénombrable.

Exemple. Soient f, g des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω connexe du plan complexe avec g non identiquement nulle. Les zéros P de g forment un sous-ensemble fermé discret de Ω et par conséquent f/g est une fonction méromorphe sur Ω .

Lemme 11.3.25. Soit γ un lacet de \mathbb{C} ne contenant pas 0. Alors pour tout $k \geq 2$,

$$\int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi^k} = 0.$$

Démonstration. Comme $k \neq 1$, on a

$$\int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi^k} = \int_0^1 \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)^k} dt = \left[\frac{\gamma(t)^{1-k}}{1-k} \right]_{t=0}^{t=1} = 0.$$

□

N.B. On obtient immédiatement que si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ est un lacet de \mathbb{C} , $z \notin \gamma(I)$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \quad \int_{\gamma} \frac{d\xi}{(\xi - z)^k} = 0.$$

Théorème 11.3.26. Soit Ω un ouvert étoilé de \mathbb{C} , f une fonction méromorphe sur Ω , γ un lacet de Ω ne passant par aucun pôle de f . Alors si P désigne l'ensemble des pôles de f ,

$$\int_{\gamma} f(\xi) d\xi = 2i\pi \sum_{p \in P} \text{Res}(f, p) \text{Ind}_{\gamma}(p), \quad (11.3.16)$$

où la somme ci-dessus ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.

Démonstration. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ une lacet de Ω . Supposons que Ω soit étoilé par rapport à un point ω_0 et que le compact $\gamma([0, 1])$ soit inclus dans $D(\omega_0, R_0)$, $R_0 > 0$. Alors d'après le Théorème 11.3.15, pour $z \in D(\omega_0, R_0)^c$, on a $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$. Il nous suffit de considérer le nombre fini de pôles $\{p_1, \dots, p_m\}$ (de multiplicités respectives N_1, \dots, N_m) pour lesquels $p_j \in D(\omega_0, R_0)$. On considère alors

$$F(\xi) = f(\xi) - \sum_{1 \leq j \leq m} \sum_{1 \leq l \leq N_j} \frac{a_{j,l}}{(\xi - p_j)^l},$$

avec $a_{j,l}$ tels que F soit holomorphe sur $\Omega \setminus \{p_j\}_{j \geq m+1}$ qui contient

$$\Omega_0 = \Omega \cap D(\omega_0, R_0), \quad R_0 > 0.$$

On remarque que l'ouvert $\Omega_0 = \Omega \cap D(\omega_0, R_0)$ est étoilé par rapport à Ω : si $z \in \Omega \cap D(\omega_0, R_0)$, alors

$$[\omega_0, z] \subset \Omega \cap D(\omega_0, R_0),$$

l'inclusion dans Ω étant due au caractère étoilé de Ω et l'inclusion dans $D(\omega_0, R_0)$ à sa convexité. En outre γ est un lacet de Ω_0 et l'on peut donc appliquer le Théorème 11.3.11 qui implique

$$\int_{\gamma} F(\xi) d\xi = 0.$$

Le Lemme 11.3.25 donne par conséquent, avec le Théorème 11.3.15,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(\xi) d\xi &= \sum_{1 \leq j \leq m} a_{j,1} \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - p_j} = 2i\pi \sum_{1 \leq j \leq m} a_{j,1} \text{Ind}_{\gamma}(p_j) \\ &= 2i\pi \sum_{1 \leq j \leq m} \text{Res}(f, p_j) \text{Ind}_{\gamma}(p_j), \end{aligned}$$

soit le résultat cherché. □

11.4 Analyse de Fourier

11.4.1 Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$

Définition 11.4.1. Pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on pose pour $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x \cdot \xi} u(x) dx. \quad (11.4.1)$$

On dira que \hat{u} est la transformée de Fourier de u .

Remarque 11.4.2. En posant pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\check{u}(x) = u(-x)$, on remarque que

$$\widehat{\check{u}} = \check{\hat{u}}, \quad (11.4.2)$$

car $\widehat{\check{u}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x \cdot \xi} u(-x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x \cdot \xi} u(x) dx = \check{\hat{u}}(\xi)$.

Lemme 11.4.3 (Riemann-Lebesgue). *Pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la fonction \hat{u} est uniformément continue sur \mathbb{R}^n , bornée et vérifie*

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{u}(\xi) = 0. \quad (11.4.3)$$

Démonstration. On a $\|\hat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. De plus si $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\text{avec } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}, \quad D_{x_j} = \frac{\partial}{2i\pi \partial x_j}, \quad (11.4.4)$$

$$\widehat{D_x^\alpha \phi}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi), \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}, \quad (11.4.5)$$

car

$$\widehat{\partial \phi / \partial x_j}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x \cdot \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) dx = 2i\pi \xi_j \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x \cdot \xi} \phi(x) dx,$$

et par conséquent $\widehat{D_{x_j} \phi}(\xi) = \xi_j \hat{\phi}(\xi)$, ce qui donne (11.4.5) par itération. En particulier, on obtient pour $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, avec $P = 1 + \sum_{1 \leq j \leq n} D_{x_j}^2$,

$$\hat{\phi}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-1} \widehat{P\phi}(\xi), \quad |\hat{\phi}(\xi)| \leq (1 + |\xi|^2)^{-1} \|P\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

et donc $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{\phi}(\xi) = 0$. Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$; on a

$$|\hat{u}(\xi)| \leq |\hat{u}(\xi) - \hat{\phi}(\xi)| + |\hat{\phi}(\xi)| \leq \|\widehat{u - \phi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + |\hat{\phi}(\xi)| \leq \|u - \phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + |\hat{\phi}(\xi)|,$$

et donc

$$\limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} |\hat{u}(\xi)| \leq \|u - \phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{impliquant} \quad \limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} |\hat{u}(\xi)| \leq \inf_{\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u - \phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

soit le résultat (11.4.3) par densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. En outre pour $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\hat{u}(\xi) - \hat{u}(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-2i\pi x \cdot \xi} - e^{-2i\pi x \cdot \eta}) u(x) dx,$$

et comme $|(e^{-2i\pi x \cdot \xi} - e^{-2i\pi x \cdot \eta}) u(x)| \leq 2|u(x)|$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique la continuité de \hat{u} . Comme \hat{u} tend vers 0 à l'infini, cela démontre également la continuité uniforme de u : avec

$$\omega_u(h) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi + h) - \hat{u}(\xi)|, \quad \text{on a} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \omega_u(h) = 0,$$

sinon on pourrait trouver une suite $(h_k)_{k \geq 1}$ tendant vers 0 dans \mathbb{R}^n , et $\epsilon_0 > 0$ tels que $\omega_u(h_k) > \epsilon_0$ ce qui impliquerait l'existence d'une suite $(\xi_k)_{k \geq 1}$ de \mathbb{R}^n telle que

$$(*) \quad |\hat{u}(\xi_k + h_k) - \hat{u}(\xi_k)| \geq \epsilon_0.$$

La suite $(\xi_k)_{k \geq 1}$ doit nécessairement rester bornée car \hat{u} tend vers 0 à l'infini. Comme la suite $(h_k)_{k \geq 1}$ est également bornée, les suites $(\xi_k + h_k)_{k \geq 1}$, $(\xi_k)_{k \geq 1}$ sont des suites d'un compact K_0 sur lequel la fonction continue \hat{u} est uniformément continue, ce qui est incompatible avec (*). \square

11.4.2 La transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Définition 11.4.4. Soit $n \geq 1$ un entier. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est défini comme l'espace vectoriel des fonctions u qui sont C^∞ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{C} telles que pour tous les multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta u(x)| < +\infty.$$

Un exemple simple de fonction dans la classe de Schwartz est $e^{-|x|^2}$, ($|x|$ est la norme euclidienne de x) et plus généralement, si A est une matrice $n \times n$ symétrique définie positive, la fonction

$$v_A(x) = e^{-\pi \langle Ax, x \rangle}, \quad (11.4.6)$$

appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Fréchet, dont la topologie est définie par la famille dénombrable de semi-normes $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$p_k(u) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha|, |\beta| \leq k}} |x^\alpha \partial_x^\beta u(x)|. \quad (11.4.7)$$

Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, on peut définir la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par la formule (11.4.1).

Lemme 11.4.5. *La transformation de Fourier est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.*

Démonstration. On remarque simplement que

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{u}(\xi) = \int e^{-2i\pi x \xi} \partial_x^\alpha (x^\beta u)(x) dx (2i\pi)^{|\beta| - |\alpha|} (-1)^{|\beta|},$$

et comme $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{n+1} |\partial_x^\alpha (x^\beta u)(x)| < +\infty$, cela donne le résultat cherché. \square

Lemme 11.4.6. *Pour une matrice symétrique $n \times n$ définie positive A , on a*

$$\widehat{v_A}(\xi) = (\det A)^{-1/2} e^{-\pi \langle A^{-1} \xi, \xi \rangle}, \quad (11.4.8)$$

où v_A est définie par (11.4.6).

Démonstration. En diagonalisant la matrice A , il est suffisant de démontrer la version unidimensionnelle de (11.4.8), i.e. de vérifier

$$\int e^{-2i\pi x \xi} e^{-\pi x^2} dx = \int e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx e^{-\pi \xi^2} = e^{-\pi \xi^2},$$

où la seconde inégalité est obtenue en prenant la dérivée par rapport à ξ de

$$\int e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx.$$

On a en effet

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(\int e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx \right) &= \int e^{-\pi(x+i\xi)^2} (-2i\pi)(x+i\xi) dx \\ &= i \int \frac{d}{dx} (e^{-\pi(x+i\xi)^2}) dx = 0. \end{aligned}$$

Pour $a > 0$, on obtient $\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} e^{-\pi a x^2} dx = a^{-1/2} e^{-\pi a^{-1}\xi^2}$, soit le résultat cherché en dimension 1. Si $n \geq 2$, et A est une matrice symétrique définie positive, il existe une matrice P orthogonale (i.e. ${}^t P P = \text{Id}$) telle que

$$D = {}^t P A P, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \text{tous les } \lambda_j > 0.$$

Par suite comme $|\det P| = 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x \cdot \xi} e^{-\pi \langle A x, x \rangle} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi (Py) \cdot \xi} e^{-\pi \langle A Py, Py \rangle} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi y \cdot ({}^t P \xi)} e^{-\pi \langle D y, y \rangle} dy \\ (\text{avec } \eta = {}^t P \xi) &= \prod_{1 \leq j \leq n} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi y_j \eta_j} e^{-\pi \lambda_j y_j^2} dy_j = \prod_{1 \leq j \leq n} \lambda_j^{-1/2} e^{-\pi \lambda_j^{-1} \eta_j^2} \\ &= (\det A)^{-1/2} e^{-\pi \langle D^{-1} \eta, \eta \rangle} = (\det A)^{-1/2} e^{-\pi \langle {}^t P A^{-1} P {}^t P \xi, {}^t P \xi \rangle} \\ &= (\det A)^{-1/2} e^{-\pi \langle A^{-1} \xi, \xi \rangle}. \end{aligned}$$

□

Proposition 11.4.7. *La transformation de Fourier est un isomorphisme de la classe de Schwartz et pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$u(x) = \int e^{2i\pi x \xi} \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (11.4.9)$$

Démonstration. En utilisant (11.4.8), on peut calculer pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\epsilon > 0$, avec des intégrales absolument convergentes,

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) &= \int e^{2i\pi x \xi} \hat{u}(\xi) e^{-\pi \epsilon^2 |\xi|^2} d\xi \\ &= \iint e^{2i\pi x \xi} e^{-\pi \epsilon^2 |\xi|^2} u(y) e^{-2i\pi y \xi} dy d\xi \\ &= \int u(y) e^{-\pi \epsilon^{-2} |x-y|^2} \epsilon^{-n} dy \\ &= \underbrace{\int (u(x + \epsilon y) - u(x)) e^{-\pi |y|^2} dy}_{\text{de valeur absolue } \leq \epsilon \|y\| \|u'\|_{L^\infty}} + u(x). \end{aligned}$$

En prenant la limite lorsque ϵ tend vers 0, on trouve la formule d'inversion de Fourier

$$u(x) = \int e^{2i\pi x \xi} \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (11.4.10)$$

Nous avons aussi démontré que pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\check{u}(x) = u(-x)$, on a

$$u = \check{\check{u}}. \quad (11.4.11)$$

Comme $u \mapsto \hat{u}$ et $u \mapsto \check{u}$ sont des homomorphismes continus de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cela achève la démonstration de la proposition. □

Proposition 11.4.8. *En utilisant la notation*

$$D_{x_j} = \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D_x^\alpha = \prod_{j=1}^n D_{x_j}^{\alpha_j} \quad \text{avec } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad (11.4.12)$$

on a, pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\widehat{D_x^\alpha u}(\xi) = \xi^\alpha \hat{u}(\xi), \quad (D_\xi^\alpha \hat{u})(\xi) = (-1)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha u(x)}(\xi) \quad (11.4.13)$$

Démonstration. On a pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{u}(\xi) = \int e^{-2i\pi x \cdot \xi} u(x) dx$ et donc

$$\begin{aligned} (D_\xi^\alpha \hat{u})(\xi) &= (-1)^{|\alpha|} \int e^{-2i\pi x \cdot \xi} x^\alpha u(x) dx, \\ \xi^\alpha \hat{u}(\xi) &= \int (-2i\pi)^{-|\alpha|} \partial_x^\alpha (e^{-2i\pi x \cdot \xi}) u(x) dx = \int e^{-2i\pi x \cdot \xi} (2i\pi)^{-|\alpha|} (\partial_x^\alpha u)(x) dx, \end{aligned}$$

ce qui démontre les deux formules. \square

N.B. Le plus important est certainement de remarquer que la transformation de Fourier échange les opérations de dérivation et de multiplication. Par exemple avec

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D_x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{C},$$

on a pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{Pu}(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha \hat{u}(\xi) = P(\xi) \hat{u}(\xi)$, et donc

$$(Pu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x \cdot \xi} P(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (11.4.14)$$

Proposition 11.4.9. *Soient ϕ, ψ des fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors la convolution⁶ $\phi * \psi$ appartient à l'espace de Schwartz et l'application*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni (\phi, \psi) \mapsto \phi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

est continue. De plus, on a

$$\widehat{\phi * \psi} = \hat{\phi} \hat{\psi}. \quad (11.4.15)$$

Démonstration. L'application $(x, y) \mapsto F(x, y) = \phi(x - y)\psi(y)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ car les dérivées par rapport à x, y de la fonction $C^\infty F$ sont des combinaisons linéaires de produits $(\partial^\alpha \phi)(x - y)(\partial^\beta \psi)(y)$ et de plus

$$\begin{aligned} (1 + |x| + |y|)^N |(\partial^\alpha \phi)(x - y)(\partial^\beta \psi)(y)| \\ \leq (1 + |x - y|)^N |(\partial^\alpha \phi)(x - y)| (1 + 2|y|)^N |(\partial^\beta \psi)(y)| \\ \leq p(\phi)q(\psi), \end{aligned}$$

6. $(\phi * \psi)(x) = \int \phi(y)\psi(x - y)dy = \int \phi(x - y)\phi(y)dy.$

où p, q sont des semi-normes sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Cela démontre que l'application bilinéaire $(\phi, \psi) \mapsto F(\phi, \psi)$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. On obtient maintenant directement $\partial_x^\alpha(\phi * \psi) = (\partial_x^\alpha \phi) * \psi$ et

$$\begin{aligned} (1 + |x|)^N |\partial_x^\alpha(\phi * \psi)| &\leq \int |F(\partial_x^\alpha \phi, \psi)(x, y)| (1 + |x|)^N dy \\ &\leq \int \underbrace{|F(\partial_x^\alpha \phi, \psi)(x, y)| (1 + |x|)^N (1 + |y|)^{n+1}}_{\leq p(F)} (1 + |y|)^{-n-1} dy, \end{aligned}$$

où p est une semi-norme de F (donc borné par un produit de semi-normes de ϕ et ψ), démontrant la propriété de continuité. On obtient également du théorème de Fubini,

$$(\widehat{\phi * \psi})(\xi) = \iint e^{-2i\pi(x-y)\cdot\xi} e^{-2i\pi y\cdot\xi} \phi(x-y) \psi(y) dy dx = \hat{\phi}(\xi) \hat{\psi}(\xi),$$

ce qui termine la démonstration de la proposition. \square

11.4.3 La transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Définition 11.4.10. Soit n un entier ≥ 1 . On définit l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ comme le dual topologique de l'espace de Fréchet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: cet espace est appelé l'espace des *distributions tempérées* sur \mathbb{R}^n .

On remarque que l'application

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \phi \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

est continue car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k(\partial \phi / \partial x_j) \leq p_{k+1}(\phi)$, où les semi-normes p_k sont définies en (11.4.7). Cette propriété nous permet de définir par dualité la dérivée d'une distribution tempérée.

Définition 11.4.11. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On définit $\partial u / \partial x_j$ comme un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = - \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \quad (11.4.16)$$

L'application $u \mapsto \partial u / \partial x_j$ est un endomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ car les estimations

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \left| \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle \right| \leq C_u p_{k_u} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \leq C_u p_{k_u+1}(\phi),$$

assurent la continuité sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de la forme linéaire $\partial u / \partial x_j$.

Définition 11.4.12. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et soit P un polynôme de n variables à coefficients complexes. On définit le produit comme un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par

$$\langle Pu, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle u, P\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \quad (11.4.17)$$

L'application $u \mapsto Pu$ est un endomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ car les estimations

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad |\langle Pu, \phi \rangle| \leq C_u p_{k_u}(P\phi) \leq C_u p_{k_u+D}(\phi),$$

où D est le degré de P , assurent la continuité sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de la forme linéaire Pu .

Lemme 11.4.13. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tels que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\int f(x)\varphi(x)dx = 0$. Alors, on a $f = 0$.*

Démonstration. Soit K un compact de Ω et soit $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ égale à 1 sur un voisinage de K . Si $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int \rho(t)dt = 1$, on obtient que, avec $\epsilon > 0$ et $\rho_\epsilon(t) = \epsilon^{-n}\rho(t/\epsilon)$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \rho_\epsilon * (\chi f) = \chi f \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^n).$$

$$\text{On a } (\rho_\epsilon * (\chi f))(x) = \int f(y) \underbrace{\chi(y)\rho((x-y)\epsilon^{-1})\epsilon^{-n}}_{=\varphi_x(y)} dy, \quad \text{avec } \text{supp } \varphi_x \subset \text{supp } \chi,$$

$\varphi_x \in C_c^\infty(\Omega)$, et d'après l'hypothèse du lemme, on obtient $(\rho_\epsilon * (\chi f))(x) = 0$ pour tout x , ce qui implique $\chi f = 0$ d'après le résultat de convergence et donc $f = 0$, p.p. sur K ; on obtient la conclusion du lemme car Ω est réunion dénombrable de compacts. \square

Définition 11.4.14 (Support d'une distribution). Pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on définit le support de u et l'on note $\text{supp } u$ le fermé de \mathbb{R}^n défini par

$$(\text{supp } u)^c = \{x \in \mathbb{R}^n, \exists V \text{ ouvert } \in \mathcal{V}_x, \quad u|_V = 0\}, \quad (11.4.18)$$

où \mathcal{V}_x est l'ensemble des voisinages de x et $u|_V = 0$ signifie que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(V)$, $\langle u, \phi \rangle = 0$.

Proposition 11.4.15.

- (1) On a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \supset \cup_{1 \leq p \leq +\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$, avec une injection continue pour chacun des $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ contient également toutes les dérivées de tous les ordres au sens de (11.4.16) de toutes les fonctions dans l'un des $L^p(\mathbb{R}^n)$.
- (2) Pour $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$(|u(x)| + |du(x)|)(1 + |x|)^{-N} \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad (11.4.19)$$

pour un $N \geq 0$, la dérivée au sens (11.4.16) coïncide avec la dérivée ordinaire.

Démonstration. (1) Pour $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on peut définir

$$\langle u, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\phi(x)dx, \quad (11.4.20)$$

qui est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: on a

$$|\langle u, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}| \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\phi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|\phi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} ((1 + |x|)^{\frac{n+1}{p'}} |\phi(x)|) C_{n,p} \leq C_{n,p} p_k(\phi), \quad \text{for } k \geq k_{n,p} = \frac{n+1}{p'},$$

aver p_k donné par (11.4.7) (si $p = 1$, on peut prendre $k = 0$). On a effectivement une injection continue de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: tout d'abord l'application donnée par (11.4.20) est bien définie et continue d'après l'estimation

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq \|u\|_{L^p} C_{n,p} p_{k_n,p}(\phi).$$

De plus cette application est linéaire et injective d'après le lemme 11.4.13.

(2) Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\chi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi_0 = 1$ près de 0, on a

$$A = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = - \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = - \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) dx$$

de sorte que, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on trouve

$$A = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) \chi_0(\epsilon x) dx.$$

En faisant une intégration par parties sur des fonctions C^1 à support compact, on obtient

$$A = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j u)(x) \phi(x) \chi_0(\epsilon x) dx + \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \phi(x) (\partial_j \chi_0)(\epsilon x) dx \right\},$$

où $\partial_j u$ est la dérivée ordinaire. On a également

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x) \phi(x) (\partial_j \chi_0)(\epsilon x)| dx \leq \|\partial_j \chi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| (1 + |x|)^{-N} dx \quad p_N(\phi) < +\infty,$$

de sorte que

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j u)(x) \phi(x) \chi_0(\epsilon x) dx.$$

Comme le membre de gauche est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, c'est aussi le cas du membre de droite. Par ailleurs pour $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, le membre de droite est $\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j u)(x) \phi(x) dx$. Comme $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on trouve que

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j u)(x) \phi(x) dx,$$

car l'application $\phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j u)(x) \phi(x) dx$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, grâce à l'hypothèse sur du dans (11.4.19). Cela démontre que $\frac{\partial u}{\partial x_j} = \partial_j u$. \square

La transformation de Fourier peut être prolongée à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Remarquons d'abord que pour T, ϕ dans la classe de Schwartz, en utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\int \hat{T}(\xi) \phi(\xi) d\xi = \iint T(x) \phi(\xi) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx d\xi = \int T(x) \hat{\phi}(x) dx,$$

et l'on peut utiliser cette formule comme une définition.

Définition 11.4.16. Soit T une distribution tempérée ; la transformée de Fourier \hat{T} de T est la distribution tempérée définie par la formule

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \hat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \quad (11.4.21)$$

La forme linéaire \hat{T} est manifestement une distribution tempérée car la transformation de Fourier est continue sur \mathcal{S} . Grâce au lemme 11.4.13, si $T \in \mathcal{S}$, la définition de \hat{T} et (11.4.1) coïncident.

Cette définition donne pour δ_0 masse de Dirac en 0, $\langle \delta_0, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \phi(0)$ (une distribution tempérée), et l'on obtient

$$\widehat{\delta_0} = 1, \quad (11.4.22)$$

car $\langle \widehat{\delta_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$.

Théorème 11.4.17. La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Soit T une distribution tempérée. Alors⁷

$$T = \check{\check{T}}, \quad \check{T} = \hat{\hat{T}}. \quad (11.4.23)$$

On obtient les extensions suivantes de (11.4.13),

$$\widehat{D_x^\alpha T}(\xi) = \xi^\alpha \hat{T}(\xi), \quad (D_\xi^\alpha \hat{T})(\xi) = (-1)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha T(x)}(\xi). \quad (11.4.24)$$

Démonstration. Pour $T \in \mathcal{S}'$, on a

$$\langle \check{\hat{T}}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle \hat{T}, \check{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle \hat{T}, \hat{\hat{\varphi}} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \hat{\hat{\varphi}} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}},$$

où la dernière égalité est due au fait que $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ commute⁸ avec la transformation de Fourier et que (11.4.10) signifie

$$\check{\check{\varphi}} = \varphi,$$

une formule vérifiée sur \mathcal{S}' d'après les égalités qui précèdent. La formule (11.4.13) est vraie également pour $T \in \mathcal{S}'$ car avec $\varphi \in \mathcal{S}$ et $\varphi_\alpha(\xi) = \xi^\alpha \varphi(\xi)$, on a

$$\langle \widehat{D^\alpha T}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \widehat{\varphi_\alpha} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle \hat{T}, \varphi_\alpha \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}},$$

et l'autre formule se démontre de manière analogue. \square

La transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$

Revenons un instant sur le paragraphe 11.4.1 et vérifions que la transformée de Fourier définie précédemment pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec la transformée de Fourier de $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ considérée comme distribution tempérée.

Pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a (définition (11.4.21), théorème de Fubini),

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \int u(x) \hat{\varphi}(x) dx = \iint u(x) \varphi(\xi) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx d\xi = \int \tilde{u}(\xi) \varphi(\xi) d\xi$$

avec $\tilde{u}(\xi) = \int e^{-2i\pi x \cdot \xi} u(x) dx$ qui est donc la transformée de Fourier de u .

7. On définit \check{T} comme la distribution donnée par $\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$ et si $T \in \mathcal{S}'$, \check{T} est aussi une distribution tempérée car $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ est un isomorphisme involutif de \mathcal{S} .

8. Si $\varphi \in \mathcal{S}$, on a $\widehat{\check{\varphi}}(\xi) = \int e^{-2i\pi x \cdot \xi} \varphi(-x) dx = \int e^{2i\pi x \cdot \xi} \varphi(x) dx = \hat{\varphi}(-\xi) = \check{\hat{\varphi}}(\xi)$.

La transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ **Théorème 11.4.18** (formule de Plancherel).

La transformation de Fourier s'étend en un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, i.e. il existe un unique opérateur linéaire borné $F : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, tel que pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $Fu = \hat{u}$ et l'on a $F^*F = FF^* = \text{Id}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. De plus

$$F^* = CF = FC, \quad F^2C = \text{Id}_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (11.4.25)$$

où C est l'isomorphisme involutif de $L^2(\mathbb{R}^n)$ défini par $(Cu)(x) = u(-x)$. On obtient la formule de Plancherel : pour $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$(\hat{u}, \hat{v})_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi = \int u(x) \overline{v(x)} dx = (u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (11.4.26)$$

Démonstration. Pour des fonctions test $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, en utilisant le théorème de Fubini et (11.4.10), on obtient⁹

$$(\hat{\psi}, \hat{\varphi})_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int \hat{\psi}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)} d\xi = \iint \hat{\psi}(\xi) e^{2i\pi x \cdot \xi} \overline{\varphi(x)} dx d\xi = (\psi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

De plus la densité de \mathcal{S} dans L^2 montre qu'il y a une unique extension F de la transformation de Fourier à L^2 et que cette extension est isométrique (i.e. telle que pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\|Fu\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$, i.e. $F^*F = \text{Id}_{L^2}$). On note que C défini par $Cu = \tilde{u}$ est un isomorphisme involutif de $L^2(\mathbb{R}^n)$ et que pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$CF^2u = u = FCFu = F^2Cu.$$

La densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ assure que les opérateurs bornés

$$CF^2, \text{Id}_{L^2(\mathbb{R}^n)}, FCF, F^2C,$$

sont égaux. Par ailleurs, pour $u, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} (F^*u, \varphi)_{L^2} &= (u, F\varphi)_{L^2} = \int u(x) \overline{\hat{\varphi}(x)} dx \\ &= \iint u(x) \overline{\varphi(\xi)} e^{2i\pi x \cdot \xi} dx d\xi = (CFu, \varphi)_{L^2}, \end{aligned}$$

de sorte que $F^*u = CFu$ pour tout $u \in \mathcal{S}$ et par continuité $F^* = CF$ comme opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, ce qui donne $FF^* = FCF = \text{Id}$. \square

11.4.4 Exemples classiques

La fonction d'Heaviside est définie sur \mathbb{R} par $H(x) = 1$ pour $x > 0$, $H(x) = 0$ pour $x \leq 0$; comme fonction mesurable bornée, c'est une distribution tempérée

9. Remarquons que le produit scalaire $(u, v)_{L^2}$ dans l'espace de Hilbert complexe $L^2(\mathbb{R}^n)$ est linéaire par rapport à u et antilinéaire par rapport à v : pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $(\lambda u, \mu v)_{L^2} = \lambda \bar{\mu} (u, v)_{L^2}$.

et l'on peut calculer sa transformée de Fourier. Avec δ_0 la masse de Dirac en 0, $\check{H}(x) = H(-x)$, on a

$$\widehat{H} + \widehat{\check{H}} = \widehat{1} = \delta_0, \quad \widehat{H} - \widehat{\check{H}} = \widehat{\text{sign}}, \quad \frac{1}{i\pi} = \frac{1}{2i\pi} 2\widehat{\delta_0}(\xi) = \widehat{D \text{sign}}(\xi) = \xi \widehat{\text{sign}} \xi.$$

Remarquons que $\mathbb{R} \mapsto \ln|x|$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et ¹⁰ on définit la valeur principale de $1/x$ sur \mathbb{R} par

$$\text{pv}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(\ln|x|), \quad (11.4.27)$$

$$\begin{aligned} \text{de sorte que } \langle \text{pv}\frac{1}{x}, \phi \rangle &= - \int \phi'(x) \ln|x| dx = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{|x| \geq \epsilon} \phi'(x) \ln|x| dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{|x| \geq \epsilon} \phi(x) \frac{1}{x} dx + \underbrace{(\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon)) \ln \epsilon}_{\rightarrow 0} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{|x| \geq \epsilon} \phi(x) \frac{1}{x} dx. \end{aligned} \quad (11.4.28)$$

Ceci implique $\xi(\widehat{\text{sign}}\xi - \frac{1}{i\pi} \text{pv}(1/\xi)) = 0$ et il vient

$$\widehat{\text{sign}}\xi - \frac{1}{i\pi} \text{pv}(1/\xi) = c\delta_0,$$

avec $c = 0$ car le membre de gauche est impair ¹¹. On obtient

$$\widehat{\text{sign}}(\xi) = \frac{1}{i\pi} \text{pv}\frac{1}{\xi}, \quad (11.4.29)$$

$$\widehat{\text{pv}\left(\frac{1}{\pi x}\right)} = -i \widehat{\text{sign}} \xi, \quad (11.4.30)$$

$$\hat{H} = \frac{\delta_0}{2} + \frac{1}{2i\pi} \text{pv}\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{1}{(x-i0)} \frac{1}{2i\pi}. \quad (11.4.31)$$

Considérons maintenant pour $0 < \alpha < n$, la fonction $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, $u_\alpha(x) = |x|^{\alpha-n}$ ($|x|$ est la norme euclidienne de x) ; comme u_α est aussi bornée pour $|x| \geq 1$, c'est une distribution tempérée. Calculons sa transformée de Fourier v_α . Comme u_α est homogène de degré $\alpha - n$, on obtient que v_α est homogène de degré $-\alpha$. D'autre part, si $S \in O(\mathbb{R}^n)$ (le groupe orthogonal), on a au sens des distributions ¹² comme u_α est une fonction radiale, i.e. telle que

$$v_\alpha(S\xi) = v_\alpha(\xi). \quad (11.4.32)$$

La distribution $|\xi|^\alpha v_\alpha(\xi)$ est homogène de degré 0 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et est aussi "radiale", i.e. vérifie (11.4.32). De plus sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la distribution v_α est une fonction C^1 qui

10. Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $\langle \ln|x|, \phi(x) \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mathcal{S}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \ln|x| dx$.

11. Une distribution T sur \mathbb{R}^n est dite impaire (resp. paire) si $\check{T} = -T$ (resp. T).

12. Pour $M \in Gl(n, \mathbb{R})$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on définit $\langle T(Mx), \phi(x) \rangle = \langle T(y), \phi(M^{-1}y) \rangle |\det M|^{-1}$.

coïncide avec ¹³

$$\int e^{-2i\pi x \cdot \xi} \chi_0(x) |x|^{\alpha-n} dx + |\xi|^{-2N} \int e^{-2i\pi x \cdot \xi} |D_x|^{2N} (\chi_1(x) |x|^{\alpha-n}) dx,$$

où $\chi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ vaut 1 près de 0 et $\chi_1 = 1 - \chi_0$, $N \in \mathbb{N}$, $\alpha + 1 < 2N$. Par suite $|\xi|^\alpha v_\alpha(\xi) = c_\alpha$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et la distribution sur \mathbb{R}^n (noter que $\alpha < n$)

$$T = v_\alpha(\xi) - c_\alpha |\xi|^{-\alpha}$$

est supportée en $\{0\}$ et homogène (sur \mathbb{R}^n) de degré $-\alpha$. La condition $0 < \alpha < n$ fournit $v_\alpha = c_\alpha |\xi|^{-\alpha}$. Pour trouver c_α , on calcule

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-n} e^{-\pi x^2} dx = \langle u_\alpha, e^{-\pi x^2} \rangle = c_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-\alpha} e^{-\pi \xi^2} d\xi,$$

qui donne

$$\begin{aligned} 2^{-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \pi^{-\frac{\alpha}{2}} &= \int_0^{+\infty} r^{\alpha-1} e^{-\pi r^2} dr = c_\alpha \int_0^{+\infty} r^{n-\alpha-1} e^{-\pi r^2} dr \\ &= c_\alpha 2^{-1} \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) \pi^{-\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Nous avons démontré le lemme suivant.

Lemme 11.4.19. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in (0, n)$. La fonction $u_\alpha(x) = |x|^{\alpha-n}$ est $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ et est aussi une distribution tempérée sur \mathbb{R}^n . Sa transformée de Fourier v_α est aussi $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ et donnée par*

$$v_\alpha(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \pi^{\frac{n}{2}-\alpha} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}.$$

Transformées de Fourier des gaussiennes

Proposition 11.4.20. *Soit A une matrice $n \times n$ réelle symétrique définie positive. On définit v_A sur \mathbb{R}^n par $v_A(x) = e^{-\pi \langle Ax, x \rangle}$. La transformée de Fourier de v_A est*

$$\widehat{v_A}(\xi) = (\det A)^{-1/2} e^{-\pi \langle A^{-1} \xi, \xi \rangle}. \quad (11.4.33)$$

Si B est une matrice $n \times n$ réelle symétrique non singulière, on a

$$\text{Fourier}(e^{i\pi \langle Bx, x \rangle})(\xi) = \widehat{v_{-iB}}(\xi) = |\det B|^{-1/2} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sign } B} e^{-i\pi \langle B^{-1} \xi, \xi \rangle}. \quad (11.4.34)$$

13. On a $\widehat{u_\alpha} = \widehat{\chi_0 u_\alpha} + \widehat{\chi_1 u_\alpha}$ et pour ϕ supportée dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on obtient,

$$\langle \widehat{\chi_1 u_\alpha}, \phi \rangle = \langle \widehat{\chi_1 u_\alpha} |\xi|^{2N}, \phi(\xi) |\xi|^{-2N} \rangle = \langle |D_x|^{2N} \chi_1 u_\alpha, \phi(\xi) |\xi|^{-2N} \rangle.$$

Démonstration. C'est le lemme 11.4.6 pour la première assertion. En outre en dimension 1 si $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > 0$, on a $\psi_a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, avec $\psi_a(x) = e^{-\pi a x^2}$. De plus la fonction holomorphe sur $\{\operatorname{Re} a > 0\}$

$$\int e^{-2i\pi x\xi} e^{-\pi a x^2} dx - a^{-1/2} e^{-\pi a^{-1}\xi^2}$$

s'annule sur \mathbb{R}_+^* et par prolongement analytique s'annule sur $\{\operatorname{Re} a > 0\}$. Pour la seconde assertion, il suffit, en utilisant la même méthode que celle du lemme 11.4.6, de la démontrer pour $n = 1$. Supposons par exemple que $b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; on a avec $T(x) = e^{i\pi b x^2}$,

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}, \phi \rangle &= \int e^{i\pi b x^2} \hat{\phi}(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int e^{-\pi(\epsilon - ib)x^2} \hat{\phi}(x) dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} (\epsilon - ib)^{-1/2} \int e^{-\pi(\epsilon - ib)^{-1}\xi^2} \phi(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

et donc $\hat{T}(\xi) = e^{i\pi/4} b^{-1/2} e^{-i\pi b^{-1}\xi^2}$. Un calcul analogue donne le résultat cherché pour $b < 0$ et la diagonalisation de la matrice B fournit le résultat en dimension n . \square

11.4.5 Multiplicateurs de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Définition 11.4.21. L'espace $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ des multiplicateurs de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que ,

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha > 0, \exists N_\alpha \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |(\partial_x^\alpha f)(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{N_\alpha}. \quad (11.4.35)$$

Il est facile de voir que pour $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$, l'opérateur $u \mapsto fu$ est continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même et par transposition de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même : on définit pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle fT, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, f\varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}},$$

et si p est une semi-norme \mathcal{S} , la continuité sur \mathcal{S} de la multiplication par f implique qu'il existe une semi-norme q sur \mathcal{S} telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, $p(f\varphi) \leq q(\varphi)$. Un exemple typique de fonction dans $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ est $e^{iP(x)}$ où P est un polynôme réel : les dérivées de $e^{iP(x)}$ sont du type $Q(x)e^{iP(x)}$ où Q est un polynôme de sorte que (11.4.35) est vérifié.

Définition 11.4.22. Soient T, S des distributions tempérées sur \mathbb{R}^n telles que \hat{T} appartienne à $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$. On définit la convolution $T * S$ par

$$\widehat{T * S} = \hat{T} \hat{S}. \quad (11.4.36)$$

On peut noter que cette définition a un sens car \hat{T} est un multiplicateur de sorte que $\hat{T} \hat{S}$ est effectivement une distribution tempérée, dont la transformée de Fourier inverse a un sens. On a

$$\langle T * S, \phi \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \langle \widehat{T * S}, \hat{\phi} \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \langle \hat{S}, \hat{T} \hat{\phi} \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}.$$

Proposition 11.4.23. *Soit T une distribution sur \mathbb{R}^n à support compact. Alors \hat{T} est un multiplicateur qui peut être prolongé en une fonction entière sur \mathbb{C}^n telle que si $\text{supp } T \subset \bar{B}(0, R_0)$,*

$$\exists C_0, N_0 \geq 0, \forall \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad |\hat{T}(\zeta)| \leq C_0(1 + |\zeta|)^{N_0} e^{2\pi R_0 |\text{Im } \zeta|}. \quad (11.4.37)$$

En particulier, pour $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on peut définir comme en (11.4.36) la convolution $T * S$.

Démonstration. Examinons d'abord le cas $R_0 = 0$: la distribution T est supportée dans $\{0\}$ et est par conséquent une combinaison linéaire de dérivées de la masse de Dirac en 0. Les formules (11.4.22), (11.4.24) impliquent que \hat{T} est un polynôme de sorte que les conclusions de la proposition 11.4.23 sont valides dans ce cas.

Supposons que $R_0 > 0$ et considérons une fonction χ égale à 1 sur un voisinage de $\text{supp } T$ (cela implique $\chi T = T$). On a

$$\langle \hat{T}, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle \widehat{\chi T}, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \chi \hat{\phi} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \quad (11.4.38)$$

D'autre part, en définissant pour $\zeta \in \mathbb{C}^n$ (avec $x \cdot \zeta = \sum x_j \zeta_j$ for $x \in \mathbb{R}^n$),

$$F(\zeta) = \langle T(x), \chi(x) e^{-2i\pi x \cdot \zeta} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \quad (11.4.39)$$

on voit que F est une fonction entière : on calcule

$$\begin{aligned} F(\zeta + h) - F(\zeta) &= \langle T(x), \chi(x) e^{-2i\pi x \cdot \zeta} (e^{-2i\pi x \cdot h} - 1) \rangle \\ &= \langle T(x), \chi(x) e^{-2i\pi x \cdot \zeta} (-2i\pi x \cdot h) \rangle \\ &\quad + \langle T(x), \chi(x) e^{-2i\pi x \cdot \zeta} \int_0^1 (1 - \theta) e^{-2i\theta\pi x \cdot h} d\theta (-2i\pi x \cdot h)^2 \rangle, \end{aligned}$$

et en utilisant pour le dernier terme la propriété de continuité de la forme linéaire T , on obtient que la différentielle complexe de F est

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \langle T(x), \chi(x) e^{-2i\pi x \cdot \zeta} (-2i\pi x_j) \rangle d\zeta_j.$$

De plus les dérivées de (11.4.39) sont données par

$$F^{(k)}(\zeta) = \langle T(x), \chi(x) e^{-2i\pi x \cdot \zeta} (-2i\pi x)^k \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \quad (11.4.40)$$

Pour évaluer les semi-normes de

$$x \mapsto \chi(x) e^{-2i\pi x \cdot \zeta} (-2i\pi x)^k,$$

dans l'espace de Schwartz, on doit traiter une somme finie de produits du type

$$|x^\gamma (\partial^\alpha \chi)(x) e^{-2i\pi x \cdot \zeta} (-2i\pi \zeta)^\beta| \leq (1 + |\zeta|)^{|\beta|} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\gamma (\partial^\alpha \chi)(x) e^{2\pi |x| |\text{Im } \zeta|}|.$$

On peut choisir une fonction χ_0 égale à 1 sur $B(0, 1)$, supportée dans $B(0, \frac{R_0 + 2\epsilon}{R_0 + \epsilon})$ telle que $\|\partial^\beta \chi_0\|_{L^\infty} \leq c(\beta) \epsilon^{-|\beta|}$ avec $\epsilon = \frac{R_0}{1 + |\zeta|}$. On trouve avec

$$\chi(x) = \chi_0(x/(R_0 + \epsilon)) \quad (\text{qui vaut 1 sur un voisinage de } B(0, R_0)),$$

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\gamma (\partial^\alpha \chi)(x) e^{2\pi|x||\operatorname{Im} \zeta|}| &\leq (R_0 + 2\epsilon)^{|\gamma|} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |(\partial^\alpha \chi_0)(y) e^{2\pi(R_0+2\epsilon)|\operatorname{Im} \zeta|}| \\
&\leq (R_0 + 2\epsilon)^{|\gamma|} e^{2\pi(R_0+2\epsilon)|\operatorname{Im} \zeta|} c(\alpha) \epsilon^{-|\alpha|} \\
&= (R_0 + 2\frac{R_0}{1+|\zeta|})^{|\gamma|} e^{2\pi(R_0+2\frac{R_0}{1+|\zeta|})|\operatorname{Im} \zeta|} c(\alpha) (\frac{1+|\zeta|}{R_0})^{|\alpha|} \\
&\leq (3R_0)^{|\gamma|} e^{2\pi R_0|\operatorname{Im} \zeta|} e^{4\pi R_0} c(\alpha) R_0^{-|\alpha|} (1+|\zeta|)^{|\alpha|},
\end{aligned}$$

qui implique

$$|F^{(k)}(\zeta)| \leq e^{2\pi R_0|\operatorname{Im} \zeta|} C_k (1+|\zeta|)^{N_k},$$

qui donne que $\mathbb{R}^n \ni \xi \mapsto F(\xi)$ est effectivement un multiplicateur. On a également

$$\langle T, \chi \hat{\phi} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T(x), \chi(x) \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) e^{-2i\pi x \xi} d\xi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

Comme la fonction F est entière, on a pour $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, en utilisant (11.4.40) et le théorème de Fubini sur $\ell^1(\mathbb{N}) \times L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\xi) \phi(\xi) d\xi = \sum_{k \geq 0} \langle T(x), \chi(x) (-2i\pi x)^k \rangle \int_{\operatorname{supp} \phi} \frac{\xi^k}{k!} \phi(\xi) d\xi. \quad (11.4.41)$$

D'autre part, comme $\hat{\phi}$ est aussi entière, on a

$$\begin{aligned}
\langle T, \chi \hat{\phi} \rangle &= \langle T(x), \chi(x) \sum_{k \geq 0} (\hat{\phi})^{(k)}(0) x^k / k! \rangle \\
&= \langle T(x), \chi(x) \underbrace{\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq N} (\hat{\phi})^{(k)}(0) x^k / k!}_{\text{convergence dans } C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \rangle \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq N} \langle T(x), \chi(x) x^k / k! \rangle \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) (-2i\pi \xi)^k d\xi.
\end{aligned}$$

Grâce à (11.4.41), ceci est égal à $\int_{\mathbb{R}^n} F(\xi) \phi(\xi) d\xi$. Par conséquent les distributions tempérées \hat{T} et F coïncident sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, qui est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de sorte que $\hat{T} = F$, ce qui achève la démonstration. \square

11.4.6 La formule sommatoire de Poisson

Paquets d'ondes

On pose pour $x \in \mathbb{R}^n$, $(y, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_{y, \eta}(x) = 2^{n/4} e^{-\pi(x-y)^2} e^{2i\pi(x-y) \cdot \eta} = 2^{n/4} e^{-\pi(x-y-i\eta)^2} e^{-\pi\eta^2}, \quad (11.4.42)$$

$$\text{où pour } \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \zeta^2 = \sum_{1 \leq j \leq n} \zeta_j^2. \quad (11.4.43)$$

On note que la fonction $\varphi_{y, \eta}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avec une norme L^2 égale à 1. En fait $\varphi_{y, \eta}$ apparaît comme une *translatée de phase* d'une gaussienne normalisée. Le lemme suivant introduit la *transformée en paquets d'ondes* comme une ondelette de Gabor.

Lemme 11.4.24. Soit u une fonction dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On définit

$$(Wu)(y, \eta) = (u, \varphi_{y, \eta})_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 2^{n/4} \int u(x) e^{-\pi(x-y)^2} e^{-2i\pi(x-y)\eta} dx \quad (11.4.44)$$

$$= 2^{n/4} \int u(x) e^{-\pi(y-i\eta-x)^2} dx e^{-\pi\eta^2}. \quad (11.4.45)$$

Pour $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la fonction Tu définie par

$$(Tu)(y + i\eta) = e^{\pi\eta^2} Wu(y, -\eta) = 2^{n/4} \int u(x) e^{-\pi(y+i\eta-x)^2} dx \quad (11.4.46)$$

est une fonction entière. L'application $u \mapsto Wu$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ et isométrique de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$. De plus on a la formule de reconstruction suivante,

$$u(x) = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (Wu)(y, \eta) \varphi_{y, \eta}(x) dy d\eta. \quad (11.4.47)$$

Démonstration. Pour u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$(Wu)(y, \eta) = e^{2i\pi y \eta} \widehat{\Omega}^1(\eta, y)$$

où $\widehat{\Omega}^1$ est la transformée de Fourier par rapport à la première variable de la fonction $\Omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ donnée par $\Omega(x, y) = u(x) e^{-\pi(x-y)^2} 2^{n/4}$. Par conséquent, la fonction Wu appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. On peut donc calculer

$$2^{-n/2} (Wu, Wu)_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int u(x_1) \bar{u}(x_2) e^{-\pi[(x_1-y)^2 + (x_2-y)^2 + 2i(x_1-x_2)\eta + \epsilon^2\eta^2]} dy d\eta dx_1 dx_2. \quad (11.4.48)$$

Cette intégrale sur \mathbb{R}^{4n} est absolument convergente et l'on peut utiliser le théorème de Fubini. En intégrant par rapport à η , on trouve la transformée de Fourier d'une gaussienne et l'on obtient $\epsilon^{-n} e^{-\pi\epsilon^{-2}(x_1-x_2)^2}$. Comme on a

$$2(x_1 - y)^2 + 2(x_2 - y)^2 = (x_1 + x_2 - 2y)^2 + (x_1 - x_2)^2,$$

en intégrant par rapport à y , on trouve un facteur $2^{-n/2}$. Il nous reste donc

$$(Wu, Wu)_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int u(x_1) \bar{u}(x_2) e^{-\pi(x_1-x_2)^2/2} \epsilon^{-n} e^{-\pi\epsilon^{-2}(x_1-x_2)^2} dx_1 dx_2. \quad (11.4.49)$$

Après un changement de variables, il vient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int u(s + \epsilon t/2) \bar{u}(s - \epsilon t/2) e^{-\pi\epsilon^2 t^2/2} e^{-\pi t^2} dt ds = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue : l'inégalité triangulaire et l'estimation $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^{-n-1}$ impliquent avec $v = u/C$,

$$\begin{aligned} |v(s + \epsilon t/2) \bar{v}(s - \epsilon t/2)| &\leq (1 + |s + \epsilon t/2|)^{-n-1} (1 + |s - \epsilon t/2|)^{-n-1} \\ &\leq (1 + |s + \epsilon t/2| + |s - \epsilon t/2|)^{-n-1} \\ &\leq (1 + 2|s|)^{-n-1}. \end{aligned}$$

Finalement on obtient pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|Wu\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}^2 = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \quad (11.4.50)$$

et par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, il vient

$$W : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2n}) \quad \text{avec} \quad W^*W = \text{id}_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (11.4.51)$$

On remarque d'abord que $\iint Wu(y, \eta) \varphi_{y, \eta} dy d\eta$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$ (avec une norme $\leq \|Wu\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}$) et en appliquant le théorème de Fubini, on obtient en polarisant (11.4.50) pour $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} (u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= (Wu, Wv)_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \iint Wu(y, \eta) (\varphi_{y, \eta}, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} dy d\eta \\ &= \left(\iint Wu(y, \eta) \varphi_{y, \eta} dy d\eta, v \right)_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

ce qui donne $u = \iint Wu(y, \eta) \varphi_{y, \eta} dy d\eta$, qui constitue le résultat du lemme. \square

Formule de Poisson

Lemme 11.4.25. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, les séries suivantes sont absolument convergentes et*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(z+m)^2} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi m^2} e^{2i\pi m z}. \quad (11.4.52)$$

Démonstration. On pose $\omega(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(z+m)^2}$. La fonction ω est entière et périodique de période 1. De plus, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $z \mapsto e^{-\pi(z+m)^2}$ est entière et pour $R > 0$,

$$\sup_{|z| \leq R} |e^{-\pi(z+m)^2}| \leq \sup_{|z| \leq R} |e^{-\pi z^2}| e^{-\pi m^2} e^{2\pi|m|R} \in \ell^1(\mathbb{Z}).$$

Par conséquent, pour $z \in \mathbb{R}$, on obtient en développant ω en série de Fourier ¹⁴,

$$\omega(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi k z} \int_0^1 \omega(x) e^{-2i\pi k x} dx.$$

14. Noter que l'on utilise ce développement pour une fonction C^∞ périodique de période 1. La démonstration est simple et demande uniquement de calculer

$$1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{1 \leq k \leq N} e^{2i\pi k x} = \frac{\sin \pi(2N+1)x}{\sin \pi x}.$$

Puis on doit démontrer que pour une fonction ω , C^∞ périodique de période 1 telle que $\omega(0) = 0$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\sin \lambda x}{\sin \pi x} \omega(x) dx = 0,$$

ce qui est évident car pour ν de classe C^∞ sur $[0, 1]$ (ici on prend $\nu(x) = \omega(x)/\sin \pi x$), $|\int_0^1 \nu(x) \sin(\lambda x) dx| = O(\lambda^{-1})$ en intégrant par parties.

En utilisant le théorème de Fubini sur $L^1(0, 1) \times \ell^1(\mathbb{Z})$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega(x) e^{-2i\pi kx} dx &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-\pi(x+m)^2} e^{-2i\pi kx} dx \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi kt} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi kt} = e^{-\pi k^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent le lemme est démontré pour z réel et comme les deux membres sont des fonctions entières, on peut conclure par prolongement analytique. \square

On obtient directement une version en dimension n du lemme précédent : pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, avec la notation (11.4.43), on a

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} e^{-\pi(z+m)^2} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} e^{-\pi m^2} e^{2i\pi m \cdot z}. \quad (11.4.53)$$

Théorème 11.4.26 (Formule sommatoire de Poisson). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit u une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors, on a*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} u(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{u}(k), \quad (11.4.54)$$

où \hat{u} est la transformée de Fourier de u . En d'autres termes, la distribution tempérée $D_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \delta_k$ est telle que $\widehat{D_0} = D_0$.

Démonstration. Utilisant (11.4.47) et le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} u(k) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \iint W u(y, \eta) \varphi_{y, \eta}(k) dy d\eta \\ &= \iint W u(y, \eta) \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi_{y, \eta}(k) dy d\eta. \end{aligned}$$

Les formules (11.4.53), (11.4.42) donnent

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi_{y, \eta}(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\varphi}_{y, \eta}(k),$$

de sorte que (11.4.47) et le théorème de Fubini impliquent le résultat. \square

11.4.7 Distributions périodiques

Le noyau de Dirichlet

Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit D_N sur \mathbb{R} par

$$\begin{aligned}
 D_N(x) &= \sum_{-N \leq k \leq N} e^{2i\pi kx} \\
 &= 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{1 \leq k \leq N} e^{2i\pi kx} \underbrace{=}_{x \notin \mathbb{Z}} 1 + 2 \operatorname{Re} \left(e^{2i\pi x} \frac{e^{2i\pi Nx} - 1}{e^{2i\pi x} - 1} \right) \\
 &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left(e^{2i\pi x - i\pi x + i\pi Nx} \right) \frac{\sin(\pi Nx)}{\sin(\pi x)} = 1 + 2 \cos(\pi(N+1)x) \frac{\sin(\pi Nx)}{\sin(\pi x)} \\
 &= 1 + \frac{1}{\sin(\pi x)} \left(\sin(\pi x(2N+1)) - \sin(\pi x) \right) = \frac{\sin(\pi x(2N+1))}{\sin(\pi x)},
 \end{aligned}$$

et en prolongeant par continuité en $x \in \mathbb{Z}$ cette fonction 1-périodique, on trouve que

$$D_N(x) = \frac{\sin(\pi x(2N+1))}{\sin(\pi x)}. \quad (11.4.55)$$

Si $v \in C^1(\mathbb{R})$ est 1-périodique, on a avec

$$(D_N \star u)(x) = \int_0^1 D_N(x-t)u(t)dt, \quad (11.4.56)$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 D_N(x-t)v(t)dt = v(x) + \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sin(\pi t(2N+1)) \frac{(v(x-t) - v(x))}{\sin(\pi t)} dt,$$

et la fonction θ_x donnée par

$$\theta_x(t) = \frac{v(x-t) - v(x)}{\sin(\pi t)}$$

est continue sur $[0, 1]$, et d'après le lemme de Riemann-Lebesgue 11.4.3, on obtient

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N \leq k \leq N} e^{2i\pi kx} \int_0^1 e^{-2i\pi kt} v(t)dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 D_N(x-t)v(t)dt = v(x).$$

De plus si v est 1-périodique et C^{1+l} , le coefficient de Fourier

$$c_k(v) = \int_0^1 e^{-2i\pi kt} v(t)dt \stackrel{\text{pour } k \neq 0}{=} \frac{1}{2i\pi k} [e^{-2i\pi kt} v(t)]_{t=1}^{t=0} + \int_0^1 \frac{1}{2i\pi k} e^{-2i\pi kt} v'(t)dt,$$

et en itérant les intégrations par parties, il vient $c_k(v) = O(k^{-1-l})$ de sorte que pour une fonction v de classe C^2 , 1-périodique v , on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi kx} c_k(v) = v(x). \quad (11.4.57)$$

Convergence ponctuelle des séries de Fourier

Lemme 11.4.27. Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, 1-périodique et soit $x_0 \in [0, 1]$. On suppose qu'il existe $w_0 \in \mathbb{R}$ tel que la condition de Dini soit satisfaite, i.e.

$$\int_0^{1/2} \frac{|u(x_0 + t) + u(x_0 - t) - 2w_0|}{t} dt < +\infty. \quad (11.4.58)$$

Alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{|k| \leq N} c_k(u) e^{2i\pi k x_0} = w_0$ avec $c_k(u) = \int_0^1 e^{-2i\pi t k} u(t) dt$.

Démonstration. En utilisant les calculs précédents, on trouve

$$\sum_{|k| \leq N} c_k(u) e^{2i\pi k x_0} = (D_N \star u)(x_0) = w_0 + \int_0^1 \frac{\sin(\pi t(2N+1))}{\sin(\pi t)} (u(x_0 - t) - w_0) dt,$$

et en utilisant la périodicité de u et le fait que D_N est une fonction paire, il vient

$$(D_N \star u)(x_0) - w_0 = \int_0^{1/2} \frac{\sin(\pi t(2N+1))}{\sin(\pi t)} (u(x_0 - t) + u(x_0 + t) - 2w_0) dt.$$

L'hypothèse (11.4.58) assure que la fonction

$$t \mapsto \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]}(t) \frac{u(x_0 - t) + u(x_0 + t) - 2w_0}{\sin(\pi t)}$$

appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et le lemme de Riemann-Lebesgue 11.4.3 permet de conclure. \square

Théorème 11.4.28. Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 1-périodique L^1_{loc} .

(1) Soit $x_0 \in [0, 1]$, $w_0 \in \mathbb{R}$. On pose $\omega_{x_0, w_0}(t) = |u(x_0 + t) + u(x_0 - t) - 2w_0|$ et l'on suppose que

$$\int_0^{1/2} \omega_{x_0, w_0}(t) \frac{dt}{t} < +\infty. \quad (11.4.59)$$

Alors la série de Fourier $(D_N \star u)(x_0)$ converge et a pour limite w_0 . En particulier si (11.4.59) est vérifié avec $w_0 = u(x_0)$, la série de Fourier $(D_N \star u)(x_0)$ converge vers $u(x_0)$. Si u possède une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et est telle que la condition (11.4.59) soit vérifiée avec $w_0 = \frac{1}{2}(u(x_0 + 0) + u(x_0 - 0))$, la série de Fourier $(D_N \star u)(x_0)$ converge vers $\frac{1}{2}(u(x_0 - 0) + u(x_0 + 0))$.

(2) Si la fonction u est de classe de Hölder¹⁵, la série de Fourier $(D_N \star u)(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers $u(x)$.

(3) Si u possède une limite à gauche et à droite en tout point et une demi-dérivée à gauche et à droite en chaque point, la série de Fourier $(D_N \star u)(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers $\frac{1}{2}(u(x - 0) + u(x + 0))$.

Démonstration. (1) est une conséquence du lemme 11.4.27; pour obtenir (2), on note que pour une fonction höldérienne d'indice $\theta \in]0, 1]$, on a pour $t \in]0, 1/2]$,

$$t^{-1} \omega_{x, u(x)}(t) \leq C t^{\theta-1} \in L^1([0, 1/2]).$$

15. La continuité Hölder d'indice $\theta \in]0, 1]$ signifie que $\exists C > 0, \forall t, s, |u(t) - u(s)| \leq C|t - s|^\theta$.

(3) Si u possède une demi-dérivée à droite en x_0 , cela signifie que

$$u(x_0 + t) = u(x_0 + 0) + u'_r(x_0)t + t\epsilon_0(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0_+} \epsilon_0(t) = 0.$$

Par suite pour $t \in]0, 1/2]$, $t^{-1}|u(x_0 + t) - u(x_0 + 0)| \leq |u'_r(x_0) + \epsilon_0(t)|$. Comme $\lim_{t \rightarrow 0_+} \epsilon_0(t) = 0$, il existe $T_0 \in]0, 1/2]$ tel que $|\epsilon_0(t)| \leq 1$ for $t \in [0, T_0]$. Par suite, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/2} t^{-1}|u(x_0 + t) - u(x_0 + 0)|dt \\ & \leq \int_0^{T_0} (|u'_r(x_0)| + 1)dt + \int_{T_0}^{1/2} |u(x_0 + t) - u(x_0 + 0)|dt T_0^{-1} < +\infty, \end{aligned}$$

car u est aussi L^1_{loc} . L'intégrale

$$\int_0^{1/2} t^{-1}|u(x_0 - t) - u(x_0 - 0)|dt$$

est finie et la condition (11.4.59) est vérifiée avec

$$w_0 = \frac{1}{2}(u(x_0 - 0) + u(x_0 + 0)),$$

ce qui termine la démonstration du lemme. \square

Distributions périodiques

On considère maintenant une distribution u sur \mathbb{R}^n qui est périodique de périodes \mathbb{Z}^n . Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ telle que $\chi = 1$ on $[0, 1]^n$. Alors la fonction χ_1 définie par

$$\chi_1(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \chi(x - k),$$

est C^∞ périodique¹⁶ avec périodes \mathbb{Z}^n . De plus comme

$$\mathbb{R}^n \ni x \in \prod_{1 \leq j \leq n} [E(x_j), E(x_j) + 1[,$$

la fonction bornée χ_1 est aussi minorée et $1 \leq \chi_1(x)$. Avec $\chi_0 = \chi/\chi_1$, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \chi_0(x - k) = 1, \quad \chi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, on obtient en utilisant la périodicité de u

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle u(x), \varphi(x) \chi_0(x - k) \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle u(x), \varphi(x + k) \chi_0(x) \rangle,$$

16. Noter que la somme est localement finie car pour K compact de \mathbb{R}^n , $(K - k) \cap \text{supp } \chi_0 = \emptyset$ sauf pour un ensemble fini de $k \in \mathbb{Z}^n$.

où les sommes sont finies. Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a, comme χ_0 est à support compact (e.g. dans $|x| \leq R_0$),

$$\begin{aligned} |\langle u(x), \varphi(x+k)\chi_0(x) \rangle| &\leq C_0 \sup_{|\alpha| \leq N_0, |x| \leq R_0} |\varphi^{(\alpha)}(x+k)| \\ &\leq C_0 \sup_{|\alpha| \leq N_0, |x| \leq R_0} |(1+R_0+|x+k|)^{n+1} \varphi^{(\alpha)}(x+k)| (1+|k|)^{-n-1} \\ &\leq p_0(\varphi)(1+|k|)^{-n-1}, \end{aligned}$$

où p_0 est une semi-norme de φ (indépendante de k). Par suite u est une distribution tempérée et l'on a pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, en utilisant la formule de Poisson,

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u(x), \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \underbrace{\varphi(x+k)\chi_0(x)}_{\psi_x(k)} \rangle = \langle u(x), \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\psi_x}(k) \rangle.$$

On voit maintenant que $\widehat{\psi_x}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+t)\chi_0(x)e^{-2i\pi kt} dt = \chi_0(x)e^{2i\pi kx} \hat{\varphi}(k)$, de sorte que

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle u(x), \chi_0(x)e^{2i\pi kx} \rangle \hat{\varphi}(k),$$

ce qui signifie

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle u(t), \chi_0(t)e^{2i\pi kt} \rangle e^{-2i\pi kx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle u(t), \chi_0(t)e^{-2i\pi kt} \rangle e^{2i\pi kx}.$$

Théorème 11.4.29.

Soit u une distribution périodique sur \mathbb{R}^n de périodes \mathbb{Z}^n . Alors u est une distribution tempérée et si χ_0 est une fonction $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \chi_0(x-k) = 1$, on a

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(u) e^{2i\pi kx}, \quad (11.4.60)$$

$$\hat{u} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(u) \delta_k, \quad \text{avec} \quad c_k(u) = \langle u(t), \chi_0(t) e^{-2i\pi kt} \rangle, \quad (11.4.61)$$

et convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si $u \in C^m(\mathbb{R}^n)$ avec $m > n$, la formule précédente est vérifiée avec convergence uniforme pour (11.4.60) et l'on a

$$c_k(u) = \int_{[0,1]^n} u(t) e^{-2i\pi kt} dt. \quad (11.4.62)$$

Démonstration. Les premières affirmations sont déjà démontrées et le calcul de \hat{u} est immédiat. Si $u \in L_{\text{loc}}^1$ on peut recommencer les calculs ci-dessus en choisissant $\chi_0 = \mathbf{1}_{[0,1]^n}$ et obtenir (11.4.60) avec c_k donné par (11.4.62). De plus si $u \in C^m$ avec $m > n$, on obtient par intégration par parties que $c_k(u)$ est $O(|k|^{-m})$ de sorte que la série (11.4.60) converge uniformément. \square

Théorème 11.4.30. Soit u une distribution périodique sur \mathbb{R}^n de périodes \mathbb{Z}^n . Si $u \in L_{\text{loc}}^2$ (i.e. $u \in L^2(\mathbb{T}^n)$ avec $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$), alors

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(u) e^{2i\pi kx}, \quad \text{with} \quad c_k(u) = \int_{[0,1]^n} u(t) e^{-2i\pi kt} dt, \quad (11.4.63)$$

avec convergence dans $L^2(\mathbb{T}^n)$. De plus, on a

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k(u)|^2.$$

Réciproquement si les coefficients de Fourier $c_k(u)$ définis par (11.4.61) sont dans $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$, la distribution u est $L^2(\mathbb{T}^n)$

Démonstration. Comme dit plus haut, la formule pour les $c_k(u)$ vient du choix de remplacer χ_0 par $\mathbf{1}_{[0,1]^n}$ dans la discussion qui précède le théorème 11.4.29. La formule (11.4.60) donne la convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vers u . Comme

$$\int_{[0,1]^n} e^{2i\pi(k-l)t} dt = \delta_{k,l}$$

on voit en utilisant le théorème 11.4.29 que pour $u \in C^{n+1}(\mathbb{T}^n)$,

$$\langle u, u \rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k(u)|^2.$$

Par suite, l'application $L^2(\mathbb{T}^n) \ni u \mapsto (c_k(u))_{k \in \mathbb{Z}^n} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ est isométrique avec une image contenant l'ensemble dense $\ell^1(\mathbb{Z}^n)$ (si $(c_k(u))_{k \in \mathbb{Z}^n} \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$, u est une fonction continue); comme l'image est fermée¹⁷, l'application est surjective et est un isomorphisme isométrique d'après le théorème de l'application ouverte. \square

17. Si $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ est isométrique linéaire entre espaces de Hilbert et (Au_k) est une suite convergente de \mathcal{H}_2 , alors par linéarité et isométrie, la suite (u_k) est de Cauchy dans \mathcal{H}_1 , et donc converge. La continuité de A implique que si $u = \lim_k u_k$, on a

$$v = \lim_k Au_k = Au, \quad \text{démontrant que l'image de } A \text{ est fermée.}$$

11.5 Coordonnées polaires, cylindriques, sphériques

11.5.1 Coordonnées polaires

Considérons $\nu :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}_{x,y}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ défini par

$$\nu(r, \theta) = (\underbrace{r \cos \theta}_x, \underbrace{r \sin \theta}_y), \quad (11.5.1)$$

et $\kappa : \mathbb{R}_{x,y}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}) \rightarrow]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ défini par

$$\kappa(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Im} \operatorname{Log}(x + iy)), \quad (11.5.2)$$

où le logarithme complexe est défini en (1.3.1) (cf. également le Théorème 1.3.1 et le Corollaire 1.3.5).

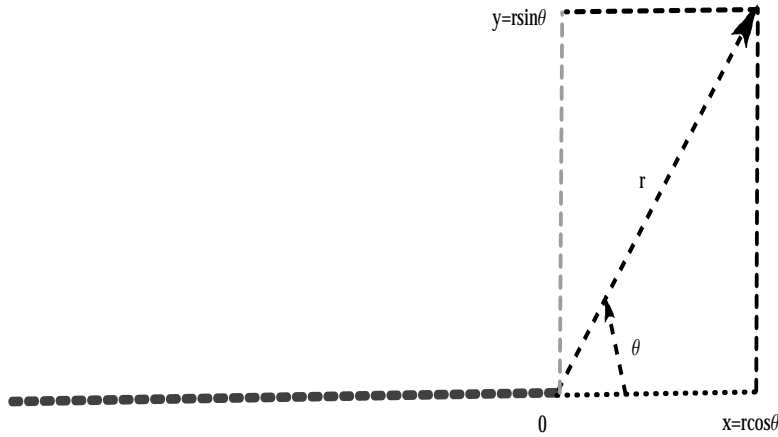


FIGURE 11.2 – Coordonnées polaires.

On a d'après le Théorème 1.3.1, pour $(x, y) \in \mathbb{R}_{x,y}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$,

$$x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} e^{i \operatorname{Im} \operatorname{Log}(x + iy)}, \quad \arg(x + iy) = \operatorname{Im} \operatorname{Log}(x + iy) \in]-\pi, \pi[,$$

et donc $(\nu \circ \kappa)(x, y) = (x, y)$, et pour $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$, $(\kappa \circ \nu)(r, \theta) = (r, \theta)$. Avec $\theta = \operatorname{Im} \operatorname{Log}(x + iy)$ on a

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \operatorname{Im} \frac{1}{x + iy} = -yr^{-2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \operatorname{Im} \frac{i}{x + iy} = xr^{-2}. \quad (11.5.3)$$

Il vient par conséquent

$$\begin{aligned}\nu'(r, \theta)\kappa'(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y/r^2 & x/r^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -(\sin \theta)/r & (\cos \theta)/r \end{pmatrix} = \text{Id}.\end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{cases} r \frac{\partial}{\partial r} &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (11.5.4)$$

Soit f une fonction continue à support compact dans \mathbb{R}^2 . On peut démontrer que

$$\begin{aligned}\iint f(x, y) dx dy &= \iint_{\{r>0, |\theta|<\pi\}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta r dr, \quad (11.5.5)\end{aligned}$$

en utilisant la valeur absolue du jacobien, posant $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = \nu(r, \theta)$,

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \det(\nu'(r, \theta)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

On a vu que ν est un difféomorphisme de classe C^1 de $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus R_-$, où R_- est la demi-droite $(-\infty, 0] \times \{0\}$. Comme l'intégrale de f sur \mathbb{R}^2 est égale à son intégrale sur le plan privé de cette demi-droite, on peut utiliser la formule du changement de variable.

11.5.2 Coordonnées cylindriques

Dans \mathbb{R}^3 avec les coordonnées cartésiennes usuelles, nous voulons utiliser les coordonnées polaires dans le plan (x, y) et conserver la coordonnée z . On pose pour $r > 0, \theta \in]-\pi, \pi[$,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

On utilise le difféomorphisme de classe C^1 ,

$$]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \ni (r, \theta, z) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in (\mathbb{R}^2 \setminus R_-) \times \mathbb{R},$$

où R_- est la demi-droite $(-\infty, 0] \times \{0\}$. Les formules (11.5.4) sont inchangées et si f est une fonction continue à support compact sur \mathbb{R}^3 , la formule (11.5.5) donne

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz. \quad (11.5.6)$$

11.5.3 Coordonnées sphériques

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Si le point (x, y, z) est différent de $0_{\mathbb{R}^3}$, on peut considérer le vecteur $(x/r, y/r, z/r)$ qui appartient à la sphère unité de \mathbb{R}^3 , la sphère \mathbb{S}^2 qui est de dimension 2 (une “surface”). On peut repérer les points sur \mathbb{S}^2 par deux angles, la latitude et la longitude. Nous décrivons ci-après la manière de procéder.

Un travail préliminaire sur les intégrales n'est pas inintéressant pour comprendre les formules et les calculs reliés à ce passage en coordonnées sphériques. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact. Considérant, l'intégrale de f sur \mathbb{R}^3 , on peut utiliser d'abord un passage en coordonnées cylindriques et écrire

$$I(f) = \iiint f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\{\rho > 0, |\theta| < \pi, z \in \mathbb{R}\}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz.$$

Considérons maintenant le demi-plan $\{(z, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\}$ et effectuons un changement de variables en coordonnées polaires dans ce demi-plan ; en appelant ϕ l'angle de ce changement, on remarque que ϕ décrit $]0, \pi[$, car la seconde coordonnée ρ est positive. Il vient avec $z = r \cos \phi$, $\rho = r \sin \phi$, $dz d\rho = r dr d\phi$,

$$I(f) = \iiint_{\{r > 0, |\theta| < \pi, 0 < \phi < \pi\}} f(r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) r \sin \phi r dr d\phi d\theta,$$

soit

$$I(f) = \iiint_{\{r > 0, |\theta| < \pi, 0 < \phi < \pi\}} \underbrace{f(r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)}_{x, y, z} r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta. \quad (11.5.7)$$

Les coordonnées sphériques sur $\mathbb{R}_{(x,y,z)}^3 \setminus R_-$, avec

$$R_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \leq 0, y = 0\},$$

sont définies par

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta, \\ y = r \sin \phi \sin \theta, \\ z = r \cos \phi, \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & r > 0, \\ \theta = \arg(x + iy), & \theta \in]-\pi, \pi[, \\ \phi = \arg(z + i\sqrt{x^2 + y^2}), & \phi \in]0, \pi[, \end{cases} \quad (11.5.8)$$

et pour

$$\begin{aligned} \nu :]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \phi, \theta) &\mapsto (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi), \end{aligned} \quad (11.5.9)$$

$\nu(r, \phi, \theta) = (x, y, z)$, avec

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases} \quad (11.5.10)$$

La figure 11.3 montre que r est la distance euclidienne de (x, y, z) à 0, θ est la

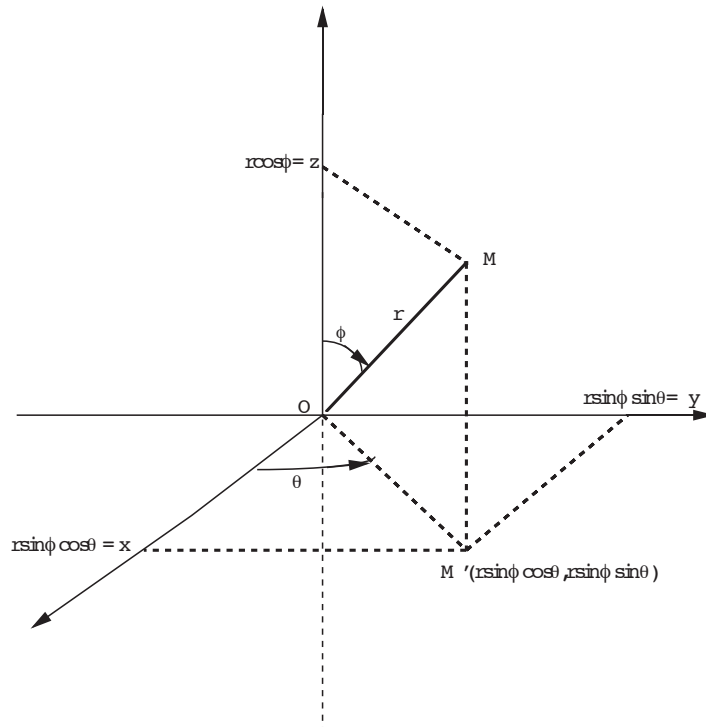


FIGURE 11.3 – COORDONNÉES SPHÉRIQUES : $r > 0, |\theta| < \pi, 0 < \phi < \pi$.

longitude (EST comptée positivement de 0 à π , OUEST négativement de 0 à $-\pi$) et que ϕ est la *co-latitude* : la latitude est $\frac{\pi}{2} - \phi$, variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ dans l'hémisphère nord ($z > 0$) et de 0 à $-\frac{\pi}{2}$ dans l'hémisphère sud ($z < 0$). Le plan de l'équateur est $\{z = 0\}$; au pôle nord $(0, 0, 1)$, on a $\phi = 0$ et au pôle sud $(0, 0, -1)$, on a $\phi = \pi$.

N.B. L'angle de longitude θ est parfois appelé l'azimuth et la colatitude ϕ prend quelquefois le nom d'angle zénithal. Malheureusement les notations traditionnelles des physiciens pour les coordonnées sphériques utilisent la lettre θ pour la colatitude et ϕ pour la longitude, inversant les conventions habituellement utilisées en mathématiques.

N.B. L'application ν donnée par (11.5.9) n'est pas surjective, mais on peut démontrer qu'il s'agit d'un difféomorphisme sur son image $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z), x \leq 0, y = 0\}$.

La matrice jacobienne \mathcal{J} de ν et son déterminant jacobien J sont

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2 \sin \phi \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \\ \cos \phi & -\sin \phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= (r^2 \sin \phi)(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r^2 \sin \phi, \end{aligned}$$

ce qui est cohérent avec la formule (11.5.7). Nous pouvons aisément calculer

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (11.5.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial z} = r \cos \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} - r \sin \phi \frac{\partial}{\partial z}, \quad (11.5.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial z} = -r \sin \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \sin \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad (11.5.13)$$

ce qui donne

$$r \frac{\partial}{\partial r} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (11.5.14)$$

$$\tan \phi \frac{\partial}{\partial \phi} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{z^2 - r^2}{z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (11.5.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}. \quad (11.5.16)$$

De même, en reprenant les calculs en dimension 2, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

$$\theta = \operatorname{Im} \operatorname{Log}(x + iy), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \theta}{r \sin \phi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r \sin \phi},$$

$$\phi = \operatorname{Im} \operatorname{Log}(z + i\sqrt{x^2 + y^2}),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= -(1 - z^2 r^{-2})^{-1/2} z(-r^{-2}) x r^{-1} = \frac{xz}{r^2(r^2 - z^2)^{1/2}} = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -(1 - z^2 r^{-2})^{-1/2} z(-r^{-2}) y r^{-1} = \frac{yz}{r^2(r^2 - z^2)^{1/2}} = \frac{\sin \theta \cos \phi}{r}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= -(1 - z^2 r^{-2})^{-1/2} \left(z(-r^{-2}) z r^{-1} + r^{-1} \right) = \frac{-r}{r \sin \phi} r^{-1} \frac{z^2 - r^2}{r^2} = -\frac{\sin \phi}{r},\end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\sin \theta}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (11.5.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cos \theta}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (11.5.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (11.5.19)$$

En posant pour f différentiable

$$f(x, y, z) = f(r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) = F(r, \phi, \theta),$$

il vient $F = f \circ \nu$ et on a $F' = (f' \circ \nu) \nu'$, i.e.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial \phi} & \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{pmatrix},$$

corroborant les formules (11.5.11), (11.5.12), (11.5.13). On a également

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial \phi} & \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix},$$

et on peut vérifier directement que

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \\ \frac{\cos \theta \cos \phi}{\sin \phi} & \frac{\sin \theta \cos \phi}{\sin \phi} & -\frac{\sin \phi}{\sin \phi} \\ -\frac{\sin \theta}{\sin \phi} & \frac{\cos \theta}{\sin \phi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{pmatrix} = \text{Id}.$$

Les formules (11.5.17), (11.5.18), (11.5.19) se réécrivent

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial \phi} & \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \\ \frac{\cos \theta \cos \phi}{\sin \phi} & \frac{\sin \theta \cos \phi}{\sin \phi} & -\frac{\sin \phi}{\sin \phi} \\ -\frac{\sin \theta}{\sin \phi} & \frac{\cos \theta}{\sin \phi} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Revenons un instant sur la formule (11.5.7) pour remarquer que si f est la fonction indicatrice de la boule euclidienne de centre 0 et de rayon R , on trouve la formule familière

$$\text{Volume}(B(0, R)) = \int_0^R \int_{|\theta| < \pi} \int_0^\pi r^2 \sin \phi \, d\theta d\phi = 2\pi \frac{R^3}{3} [\cos \phi]_\pi^0 = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Qui plus est, on peut utiliser la formule (11.5.7) pour définir l'intégrale sur \mathbb{S}^2 , via la mesure $d\sigma_{\mathbb{S}^2} = \sin \phi \, d\phi d\theta$ sur $]0, \pi[\times]-\pi, \pi[$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^{+\infty} r^2 \iint_{]0, \pi[\times]-\pi, \pi[} f(r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) \sin \phi d\phi d\theta dr \\ &= \int_0^{+\infty} r^2 \iint_{\mathbb{S}^2} f(r\omega) d\sigma_{\mathbb{S}^2}(\omega) dr, \end{aligned}$$

une formule qui se généralise aux dimensions supérieures. Remarquons que l'intégrale de 1 sur la sphère \mathbb{S}^2 donne sa surface : il vient

$$\iint_{\mathbb{S}^2} d\sigma(\omega) = \int_0^\pi \sin \phi d\phi 2\pi = 4\pi.$$

11.5.4 Le laplacien

Pour une fonction f deux fois différentiable sur un ouvert de \mathbb{R}^3 , nous avons défini le laplacien de f , (noté Δf) avec

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}, \quad (11.5.20)$$

et démontré la propriété

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f). \quad (11.5.21)$$

Bien évidemment, on peut définir le laplacien d'une fonction f deux fois différentiable sur un ouvert de \mathbb{R}^2 , avec

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2},$$

et la formule (11.5.21) reste valide ; ceci est immédiat, par exemple en considérant f comme la fonction de trois variables, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2)$. Nous souhaitons calculer dans ce paragraphe l'expression du laplacien, en coordonnées polaires, cylindriques et sphériques.

Le carré d'un champ de vecteurs

Considérons un champ de vecteurs $X = \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix}$ de classe C^1 dans un ouvert U de $\mathbb{R}_{x,y}^2$. Nous avons vu qu'il était pratique d'identifier ce champ de vecteurs à l'opérateur

$$X = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y},$$

qui associe à une fonction f de classe C^1 sur U , la fonction $Xf = a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}$. Calculons $X(Xf)$, pour $f \in C^2(U)$: on a

$$\begin{aligned} X(Xf) &= \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= a\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}\right) + b\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= a\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + ab\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ &\quad + b\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + ba\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + b\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned} X(Xf) &= \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2ab\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &\quad + a\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + b\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned}$$

et l'on peut écrire sous forme plus synthétique l'égalité d'opérateurs

$$\begin{aligned} \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 &= a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2ab\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ &\quad + a\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + b\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (11.5.22)$$

Notons que la première ligne du calcul est assez attendue, fournit un opérateur d'ordre 2 et que la seconde ligne, fournissant un opérateur d'ordre 1, vient simplement du fait que

$$a_j\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_l\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) = a_ja_l\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_m} + a_j\frac{\partial a_l}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_m}. \quad (11.5.23)$$

La partie d'ordre 1 vient simplement du fait que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ ne *commute pas* avec la multiplication par a_l (sauf si a_l ne dépend pas de x_k), i.e.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(a_l f) - a_l\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial a_l}{\partial x_k}f,$$

de sorte qu'on a l'égalité d'opérateurs

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, a_l\right] = \frac{\partial}{\partial x_k}a_l - a_l\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial a_l}{\partial x_k}, \quad (11.5.24)$$

qui n'est identiquement nul que si a_l ne dépend pas de x_k .

11.5.5 Le laplacien en coordonnées polaires

Rappelons une partie des formules (11.5.4) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{cases}$$

En utilisant la définition du laplacien, nous avons

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 = \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2.$$

Nous pouvons appliquer les formules (11.5.23), (11.5.22) pour obtenir

$$\begin{aligned} \Delta &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{-\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{-\sin \theta}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{-\sin \theta}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{-\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} \\ &\quad + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta) \frac{\partial}{\partial r} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ &\quad + r^{-2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \sin \theta (-r^{-2}) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\sin^2 \theta) r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \\ &\quad - r^{-2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \theta \sin \theta (-r^{-2}) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\cos^2 \theta) r^{-1} \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned}$$

Il vient

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Il est plus facile d'écrire

$$r^2 \Delta = r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

et en remarquant avec (11.5.23) que $(r \frac{\partial}{\partial r})^2 = r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r}$, nous obtenons la formule

$$r^2 \Delta_{\mathbb{R}^2} = (r \partial_r)^2 + \partial_\theta^2. \quad (11.5.25)$$

On peut aussi retenir l'expression équivalente

$$\Delta_{\mathbb{R}^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (11.5.26)$$

Cela donne immédiatement la formule pour le laplacien en coordonnées cylindriques dans \mathbb{R}^3 ,

$$\Delta_{\mathbb{R}^3} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (11.5.27)$$

11.5.6 Le laplacien en coordonnées sphériques

On rappelle l'expression des coordonnées sphériques dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

Comme les formules (11.5.17), (11.5.18), (11.5.19) fournissent une expression des champs de vecteurs $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ en coordonnées sphériques, il est tentant d'utiliser une méthode analogue à la précédente en calculant la somme des trois carrés de champs de vecteurs $\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$. Toutefois, on remarque que, si en dimension 2, la formule (11.5.22) comporte 3 termes d'ordre 2 et 4 termes d'ordre 1, l'analogue en dimension 3 comporte 6 termes d'ordre 2 et 9 termes d'ordre 1 ; comme il y a une somme de trois carrés, cela fait en tout 45 termes à calculer ! Nous allons procéder autrement en utilisant une méthode analogue à celle du calcul préliminaire au début du paragraphe 11.5.3.

Commençons par procéder à un changement de variables en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

D'après le calcul en dimension 2 de la formule (11.5.25), il vient

$$\rho^2 \Delta_{\mathbb{R}^3} = (\rho \partial_\rho)^2 + \partial_\theta^2 + \rho^2 \partial_z^2 = \rho^2 (\partial_z^2 + \partial_\rho^2) + \rho \partial_\rho + \partial_\theta^2.$$

Considérons maintenant le demi-plan $\{(z, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\}$ et effectuons un changement de variables en coordonnées polaires dans ce demi-plan ; en appelant ϕ l'angle de ce changement, on remarque que ϕ décrit $]0, \pi[$, car la seconde coordonnée ρ est positive. Il vient avec $z = r \cos \phi, \rho = r \sin \phi$,

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

donc le changement cherché en coordonnées sphériques. On a

$$\rho^2 \Delta_{\mathbb{R}^3} = \rho^2 r^{-2} ((r \partial_r)^2 + \partial_\phi^2) + \partial_\theta^2 + \rho \left(\frac{\partial r}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right).$$

Comme le changement $(z, \rho) \mapsto (r, \phi)$ est polaire deux-dimensionnel, on peut appliquer les formules du paragraphe 11.5.1 : on a

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\rho}{r}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \frac{z}{r^2}.$$

Il vient par conséquent

$$r^2 \Delta_{\mathbb{R}^3} = ((r \partial_r)^2 + \partial_\phi^2) + \frac{r^2}{\rho^2} \partial_\theta^2 + \frac{r^2}{\rho^2} \rho \left(\frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{z}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \right),$$

soit

$$r^2 \Delta_{\mathbb{R}^3} = (r \partial_r)^2 + \partial_\phi^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} \partial_\theta^2 + r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

et donc

$$r^2 \Delta_{\mathbb{R}^3} = (r \partial_r)^2 + r \partial_r + \partial_\phi^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} \partial_\theta^2 + \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \partial_\phi. \quad (11.5.28)$$

On peut aussi retenir l'expression équivalente

$$\Delta_{\mathbb{R}^3} = \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \left(\partial_\phi^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} \partial_\theta^2 + \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \partial_\phi \right). \quad (11.5.29)$$

11.6 La fonction erf

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{[0,z]} e^{-t^2} dt = \int_{[-z/\sqrt{\pi}, z/\sqrt{\pi}]} e^{-\pi s^2} ds. \quad (11.6.1)$$

On note que la fonction erf est entière, impaire, et

$$\operatorname{erf}'(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}, \quad \operatorname{erf}(0) = 0.$$

La courbe représentative de la fonction erf sur la droite réelle est la suivante (on a également $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{erf}(x) = \pm 1$).

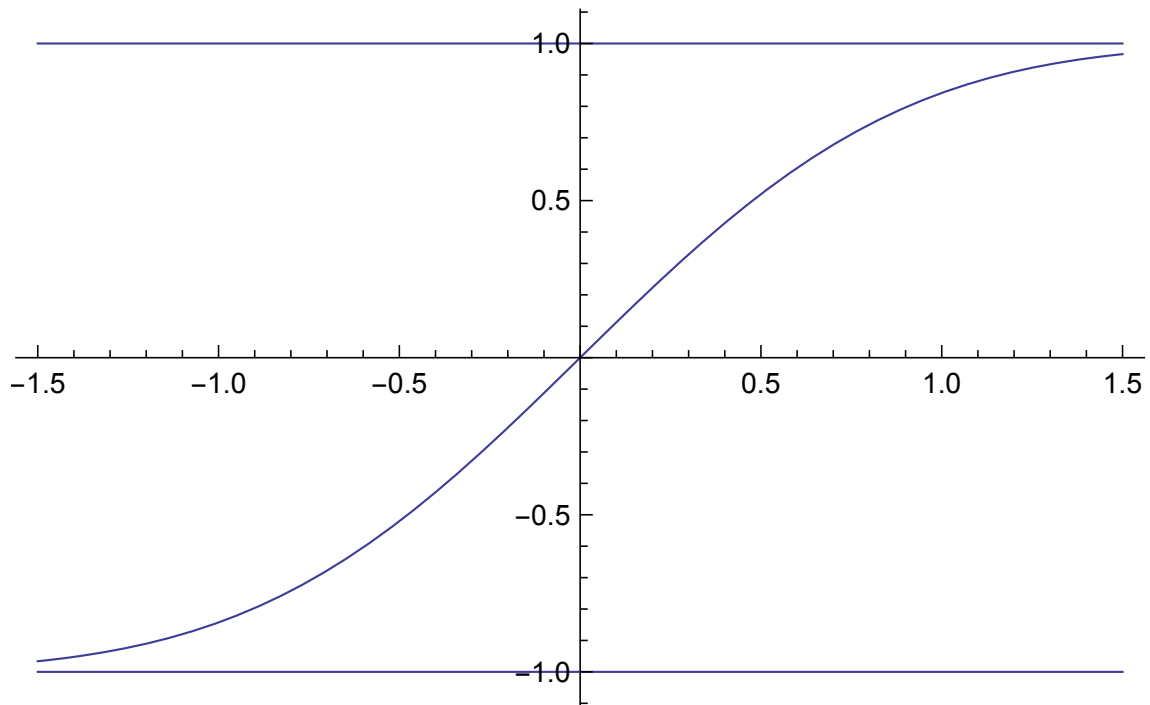


FIGURE 11.4 – FONCTION erf SUR LA DROITE RÉELLE.

Considérons les fonction $f, g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(t, x) = \operatorname{erf}((x+1)/2\sqrt{t}), \quad g(t, x) = \operatorname{erf}((x-1)/2\sqrt{t}),$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{2}(x+1)(-1/2)t^{-3/2} \operatorname{erf}'((x+1)/2\sqrt{t}) - \operatorname{erf}''((x+1)/2\sqrt{t}) \frac{1}{4t} \\ &= -\frac{x+1}{4t^{3/2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{4t}} - \frac{1}{4t} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{4t}} (-2) \frac{(x+1)}{2\sqrt{t}} \\ &= e^{-\frac{(x+1)^2}{4t}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{x+1}{4t^{3/2}} + \frac{x+1}{4t^{3/2}} \right) = 0, \end{aligned}$$

et de même

$$\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0.$$

On remarque que

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t, x) = \operatorname{sign}(x+1), \quad \lim_{t \rightarrow 0_+} g(t, x) = \operatorname{sign}(x-1),$$

et par suite

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{1}{2} (f(t, x) - g(t, x)) = \operatorname{sign}(x+1) - \operatorname{sign}(x-1) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x).$$

Par conséquent, la ¹⁸ solution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ h(0, x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (11.6.2)$$

est donnée par

$$h(t, x) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf}((x+1)/2\sqrt{t}) - \operatorname{erf}((x-1)/2\sqrt{t}) \right). \quad (11.6.3)$$

On a

- à l'instant initial, $h(0, x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$,
- pour $t > 0$, $x \mapsto h(t, x)$ est une fonction C^∞ ,
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t, x) = 0$.

18. On peut démontrer qu'il s'agit de l'unique solution.

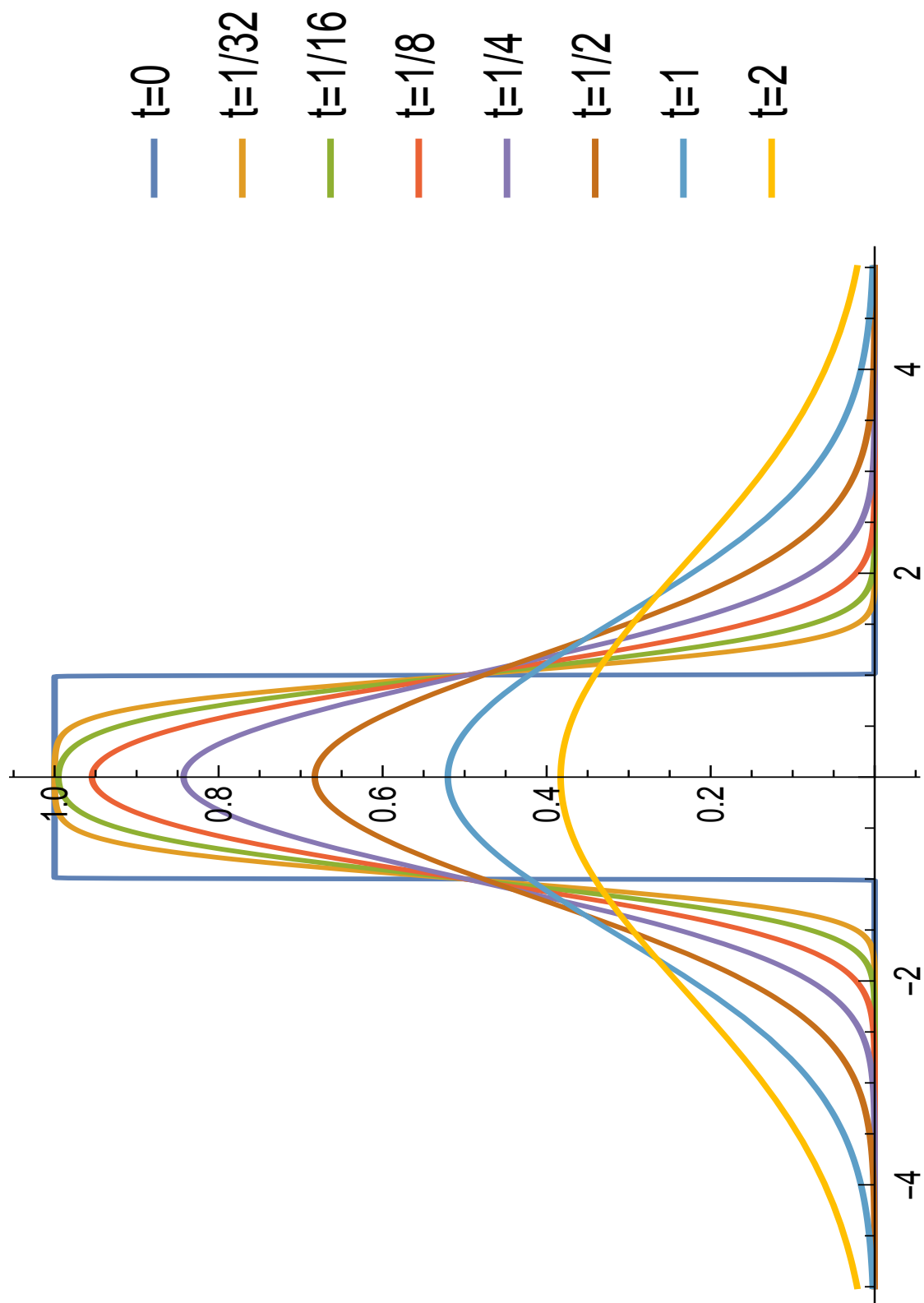


FIGURE 11.5 – SOLUTION DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR À DIFFÉRENTS INSTANTS

Index

Notations

- A_+ : opérateur de création, 163
- A_- : opérateur d'annihilation, 163
- B : fonction Beta, 52
- B_n : polynôme de Bernoulli, 33
- $D_{x_j} = \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_j}$, 198
- $H^{[1]}, H^{[2]}$: fonctions de Hankel, 117
- H_n : polynôme d'Hermite, 153
- J_n : fonction de Bessel, 1^{ère} esp., 101
- Y_ν : fonction de Bessel, 2^{nde} esp., 114
- Γ : fonction Gamma, 21
- Log : dét. princ. log. dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, 17
- $\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$, 78
- $\Phi(s) = \sum_p \frac{\ln p}{p^s}$, 70
- $\Theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$, 69
- Ai : fonction d'Airy, 135
- Bi : fonction d'Airy, 2^{nde} esp., 142
- $\check{u}(x) = u(-x)$, 196
- erf : fonction erf, 227
- \hat{u} , transformée de Fourier, 196
- $\text{Ind}_\gamma(z)$: indice de z / γ , 184
- \mathbb{P} : suite des nombres premiers, 56
- $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$, multiplicateurs de \mathcal{S} , 206
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 199
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 195
- ϕ_n : fonction d'Hermite, 159
- $\pi(x) = \text{Card}\{p \in \mathbb{P}, p \leq x\}$, 77
- θ_J : fonction Theta de Jacobi, 92
- φ : fonction indicatrice d'Euler, 173
- ξ : fonction ξ , 93
- ζ : la fonction Zeta de Riemann, 55
- $a \vee b$: pgcd de a et b , 172
- $a|b$: a divise b , i.e. $b \in a\mathbb{Z}$, 171
- $a \wedge b$: ppcm de a et b , 172
- b_n : nombre de Bernoulli, 33
- angle zénithal, 221
- argument d'un nombre complexe, 18
- azimuth, 221
- caractérisation de la fonction Γ , 54
- co-latitude, 221
- condition de Dini, 213
- congruence, 172
- constante d'Euler, 29
- convexité logarithmique, 54
- coordonnées sphériques, 219
- coordonnées cylindriques, 218
- coordonnées polaires, 217, 219
- dérivée d'une distribution, 199
- développement de Stirling, 84
- développements eulériens, 39
- distributions tempérées, 199
- division euclidienne, 171
- droite critique, 78
- equation caractéristique, 110
- equation de Helmholtz, 127
- equation des ondes, 128
- equation différentielle de Bessel, 109
- equation fonctionnelle de ζ , 96
- equation fonctionnelle de la fonction ξ , 94
- equation indicelle, 110
- fonction cos, 8
- fonction cosh, 8
- fonction cotan, 42
- fonction erf, 227
- fonction sin, 8
- fonction sinh, 8
- fonction ξ , 93
- fonction Beta, 52
- fonction d'Airy, 135
- fonction d'Airy, 2^{nde} espèce, 142
- fonction de Neumann, 114
- fonction exponentielle, 7
- fonction génératrice, 33, 153
- fonction Gamma, 21
- fonction Theta de Jacobi, 92

- fonction Zeta de Riemann, 55
- fonctions d'Hermite, 159
- fonctions de Bessel, 101
- fonctions de Bessel 2^{de} esp., 114
- fonctions de Bessel sph., dim. sup., 133
- fonctions de Bessel sphér. 2^{de} esp., 130
- fonctions de Bessel sphériques, 128
- fonctions de Hankel, 117
- fonctions méromorphes, 192
- formule d'Euler-Maclaurin, 36, 61
- formule d'Hadamard, 188
- formule d'inversion de Fourier, 197
- formule de Cauchy, 193
- formule de Faà di Bruno, 154
- formule de Gauss, 46
- formule de Legendre-Gauss, 50
- formule de Plancherel, 203
- formule de Poisson, 208
- formule de Schlömlich, 108
- formule de Stirling, 81
- formule de Weierstrass, 46, 48
- hypothèse de Riemann, 77, 99
- indice d'un point, 184
- intégrales de Wallis, 53
- lacet, 177
- laplacien en dimension 2, 127
- laplacien en dimension 3, 128
- laplacien, coordonnées polaires, 225
- laplacien, coordonnées sphériques, 226
- latitude, 221
- Laurent Schwartz, 196
- Le noyau de Dirichlet, 212
- logarithme, 17
- logarithme intégral, 78
- longitude, 221
- longueur d'un multi-indice, 195
- méthode d'Euler-Maclaurin, 29
- méthode de Frobenius, 122
- module d'un nombre complexe, 18
- multi-indice, 195
- multiplicateurs de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 206
- nombre π , 9
- nombre de Bernoulli, 32
- ondelettes de Gabor, 208
- opérateur d'annihilation, 163
- opérateur de création, 163
- oscillateur harmonique, 162
- ouvert étoilé, 181
- paquets d'ondes, 208
- phénomène de Stokes, 145
- polynôme de Bernoulli, 32
- polynômes d'Hermite, 153
- premiers polynômes de Bernoulli, 35
- principe des zéros isolés, 15
- produits infinis, 39
- prolongement analytique, 15
- propriété modulaire de θ_J , 93
- série harmonique, 29
- séries entières, 188
- strictement convergent, 39
- support d'une distribution, 200
- théorème chinois, 174
- théorème de d'Alembert, 16
- théorème de Liouville, 16
- théorème de Wilson, 173
- théorème des nombres premiers, 77
- théorème taubérien de Newman, 72
- transf. de Fourier des gaussiennes, 205
- transformée de Fourier, 195
- translation de phase, 208
- zéros triviaux de la fonction ζ , 66

Bibliographie

- [1] George E. Andrews, Richard Askey, and Ranjan Roy, *Special functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. MR 1688958 (2000g :33001)
- [2] George B. Arfken and Hans J. Weber, *Mathematical methods for physicists*, fifth ed., Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, 2001. MR 1810939 (2001j :00004)
- [3] Richard Beals and Roderick Wong, *Special functions*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 126, Cambridge University Press, Cambridge, 2010, A graduate text. MR 2683157 (2011j :33001)
- [4] Enrico Bombieri, *The Riemann hypothesis*, The millennium prize problems, Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006, http://www.claymath.org/sites/default/files/official_problem_description.pdf, pp. 107–124. MR 2238277
- [5] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. IX. Première partie : Les structures fondamentales de l'analyse. Livre IV : Fonctions d'une variable réelle (théorie élémentaire). Chapitre I : Dérivées. Chapitre II : Primitives et intégrales. Chapitre III : Fonctions élémentaires*, Actualités Sci. Ind., no. 1074, Hermann et Cie., Paris, 1949. MR 0031013 (11,86h)
- [6] Robert Campbell, *Les intégrales eulériennes et leurs applications. Étude approfondie de la fonction gamma*, Collection Universitaire de Mathématiques, XX, Dunod, Paris, 1966. MR 0206342 (34 #6161)
- [7] Antoine Chambert-Loir and Stéphane Fermigier, *Exercices d'analyse 3*, Dunod, 1996.
- [8] Antoine Chambert-Loir, Stéphane Fermigier, and Vincent Maillot, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation. Analyse 1.*, 2ème éd. rev. et corr. éd., Paris : Masson, 1997 (French).
- [9] Pierre Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*, Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2009. MR 2583834 (2010m :11001)
- [10] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974, Pure and Applied Mathematics, Vol. 58. MR 0466039 (57 #5922)
- [11] William Ellison and Fern Ellison, *Prime numbers*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York ; Hermann, Paris, 1985. MR 814687 (87a :11082)

- [12] William John Ellison, *Les nombres premiers*, Hermann, Paris, 1975, En collaboration avec Michel Mendès France, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. IX, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1366. MR 0417077 (54 #5138)
- [13] Arthur Erdélyi, Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger, and Francesco G. Tricomi, *Higher transcendental functions. Vol. I*, Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, Fla., 1981, Based on notes left by Harry Bateman, With a preface by Mina Rees, With a foreword by E. C. Watson, Reprint of the 1953 original. MR 698779 (84h :33001a)
- [14] Bernard R. Gelbaum and John M. H. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, The Mathesis Series, Holden-Day Inc., San Francisco, Calif., 1964. MR 0169961 (30 #204)
- [15] I. M. Gelfand and G. E. Shilov, *Generalized functions. Vol. I : Properties and operations*, Translated by Eugene Saletan, Academic Press, New York-London, 1964. MR 0166596 (29 #3869)
- [16] ———, *Generalized functions. Vol. 3*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1967 [1977], Theory of differential equations, Translated from the Russian by Meinhard E. Mayer. MR 0435833 (55 #8786c)
- [17] ———, *Generalized functions. Vol. 2. Spaces of fundamental and generalized functions*, Translated from the Russian by Morris D. Friedman, Amiel Feinstein and Christian P. Peltzer, Academic Press, New York-London, 1968. MR 0230128 (37 #5693)
- [18] Jane P. Gilman, Irwin Kra, and Rubí E. Rodríguez, *Complex analysis. In the spirit of Lipman Bers.*, New York, NY : Springer, 2007 (English).
- [19] Loukas Grafakos, *Classical Fourier analysis*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 249, Springer, New York, 2014. MR 3243734
- [20] ———, *Modern Fourier analysis*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 250, Springer, New York, 2014. MR 3243741
- [21] Bertrand Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques.*, Paris : Ellipses, 1988 (French).
- [22] Lars Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. I*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003, Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition [Springer, Berlin; MR1065993 (91m :35001a)]. MR 1996773
- [23] B. G. Korenev, *Bessel functions and their applications*, Analytical Methods and Special Functions, vol. 8, Taylor & Francis, Ltd., London, 2002, Translated from the Russian by E. V. Pankratiev. MR 1963816 (2004c :33011)
- [24] Nicolas Lerner, *A course on integration theory. Including more than 150 exercises with detailed answers.*, Basel : Birkhäuser/Springer, 2014 (English).
- [25] Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger, and Raj Pal Soni, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Third enlarged edition. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 52, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966. MR 0232968 (38 #1291)

- [26] A. M. Mathai, *A handbook of generalized special functions for statistical and physical sciences*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. MR 1218177 (94g :33001)
- [27] David Mumford, *Tata lectures on theta. I*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007, With the collaboration of C. Musili, M. Nori, E. Previato and M. Stillman, Reprint of the 1983 edition. MR 2352717 (2008h :14042)
- [28] ———, *Tata lectures on theta. II*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007, Jacobian theta functions and differential equations, With the collaboration of C. Musili, M. Nori, E. Previato, M. Stillman and H. Umemura, Reprint of the 1984 original. MR 2307768 (2007k :14087)
- [29] ———, *Tata lectures on theta. III*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007, With collaboration of Madhav Nori and Peter Norman, Reprint of the 1991 original. MR 2307769 (2007k :14088)
- [30] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), no. 9, 693–696. MR 602825 (82h :10056)
- [31] Arnold F. Nikiforov and Vasilii B. Uvarov, *Special functions of mathematical physics*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1988, A unified introduction with applications, Translated from the Russian and with a preface by Ralph P. Boas, With a foreword by A. A. Samarskiĭ. MR 922041 (89h :33001)
- [32] S. J. Patterson, *An introduction to the theory of the Riemann zeta-function*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 14, Cambridge University Press, Cambridge, 1988. MR 933558 (89d :11072)
- [33] George Pólya and Gabor Szegő, *Problems and theorems in analysis. I*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Series, integral calculus, theory of functions, Translated from the German by Dorothee Aeppli, Reprint of the 1978 English translation. MR 1492447
- [34] ———, *Problems and theorems in analysis. II*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Theory of functions, zeros, polynomials, determinants, number theory, geometry, Translated from the German by C. E. Billigheimer, Reprint of the 1976 English translation. MR 1492448
- [35] H. Quéréflec and C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2007.
- [36] Michael Reed and Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics. I*, second ed., Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980, Functional analysis. MR MR751959 (85e :46002)
- [37] J. Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. **6** (1962), 64–94. MR 0137689 (25 #1139)
- [38] Walter Rudin, *Real and complex analysis. 3rd ed.*, 3rd ed. ed., New York, NY : McGraw-Hill, 1987 (English).
- [39] ———, *Analyse réelle et complexe. Traduit de l'anglais par N. Dhombres et F. Hoffman.*, Paris : Masson, 1994 (French).

- [40] Jean Saint Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe. Cours et exercices.*, Paris : Calvage et Mounet, 2007 (French).
- [41] Nico M. Temme, *Special functions*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996, An introduction to the classical functions of mathematical physics. MR 1376370 (97e :33002)
- [42] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk, *Representation of Lie groups and special functions. Vol. 2*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 74, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993, Class I representations, special functions, and integral transforms, Translated from the Russian by V. A. Groza and A. A. Groza. MR 1220225 (94m :22001)
- [43] Z. X. Wang and D. R. Guo, *Special functions*, World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989, Translated from the Chinese by Guo and X. J. Xia. MR 1034956 (91a :33001)
- [44] D. Zagier, *Newman's short proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), no. 8, 705–708. MR 1476753 (98j :11069)

N. LERNER, INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
4 PLACE JUSSIEU,
75252 PARIS CEDEX 05
FRANCE

`nicolas.lerner@imj-prg.fr`