LA FONCTION ζ D'APRÈS RIEMANN

par

Javier Fresán

Table des matières

Le 11 août 1859, Georg Friedrich Bernhard Riemann fut élu à l'Académie des sciences de Berlin, sur la requête de Kummer, de Borchardt et de Weierstrass. Deux ans avant, lorsque sa thèse de doctorat sur la théorie des fonctions abéliennes n'avait pas encore paru dans le Journal de Crelle, Riemann était presque inconnu de la communauté mathématique. Cependant, comme fut signalé par les trois proposants de sa candidature, il ne s'agissait pas d'un *jeune talent plein d'espoir, mais d'un chercheur indépendant tout à fait mature qui avait favorisé en grande partie le développement des mathématiques* [**Mo**, p.63].

La première tâche du correspondant nouvellement élu consistait à présenter à l'Académie un mémoire concernant ses recherches les plus récentes. Riemann accomplit ce travail avec éclat dans le seul papier qu'il

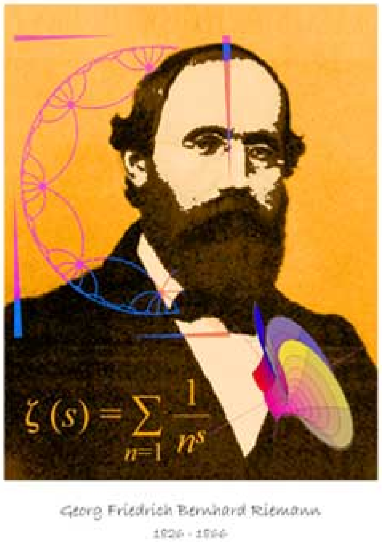

FIGURE 1. G. F. Bernhard Riemann (1826-1866)

a jamais consacré à la théorie des nombres : "Ueber die Anzahl der Primzahlem unter einter gegebenen Grösse", un titre que l'on peut traduire par "Sur le nombre des nombres premiers inférieures à une grande donnée". C'est peut-être l'article où le rapport entre longueur et importance est le plus élevé tout au cours de l'histoire des mathématiques.

En effet, ses huit pages contiennent beaucoup plus que l'*étude sur la fréquence des nombres premiers* annoncée dans l'introduction : c'est la première fois que la fonction ζ, qui avait joué un certain rôle dans l'*Introductio in Analysin Infinitorum* d'Euler, est considérée comme une fonction de variable complexe au lieu de réelle et prolongée plus loin que le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$, sur lequel elle pouvait être étendue aussitôt à travers la même formule. Cela explique que cette fonction soit appelée zêta de Riemann et pas zêta d'Euler dans la littérature.

En plus, Riemann reprend une équation fonctionnelle reliant les valeurs de ζ en s et en $1-s$ qui avait été déjà trouvée par Euler, et il la démontre par deux méthodes différentes. Les égalités qu'il obtient entre-temps lui permettent de calculer sans souci l'image de tous les entiers négatifs et de démontrer notamment que la fonction s'annule aux entiers négatifs pairs et que ce sont les seuls zéros réels. Ensuite, il conjecture que le reste de racines ont partie réelle $\frac{1}{2}$. C'est *l'hypothèse de Riemann*, une question qui reste toujours ouverte et qui a motivé les recherches les plus impressionnantes de toutes les générations de lecteurs de Riemann.

Grâce à l'introduction de l'analyse complexe dans la théorie des nombres, Riemann est capable d'esquisser la preuve du théorème des nombres premiers, autrement dit de la formule asymptotique

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \to \infty$$

pour le nombre $\pi(x)$ de nombres premiers inférieures ou égaux à x.

Une première approximation avait été déjà trouvé numériquement par le jeune Gauss en 1792, en termes de l'intégrale logarithmique

$$\mathrm{Li}(x) - \mathrm{Li}(2) = \int_2^x \frac{dt}{\log t},$$

qui jouera elle aussi un rôle principal dans l'article de Riemann, dont la formule la plus importante est la suivante :

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\xi(\rho)=0} \mathrm{Li}(x^\rho) - \log 2 + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\log t},$$

où $f(x)$ est une fonction étroitement liée à $\pi(x)$.

Cependant, il fallut attendre encore presque 40 ans pour que Hadamard et de la Vallé-Poussin réussissent à mener l'idée de compter les nombres premiers à travers l'intégration complexe à bien. Riemann ne pouvait pas se servir de la non-annulation de ζ sur la droite de partie réelle égale à 1, un résultat qui s'est avérée fondamentale pour la preuve et qui n'a été présenté à l'Académie de Sciences de Paris que le 22 juin 1896.

L'objectif modeste de ces notes est de présenter une lecture exhaustive du papier "Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grande donnée" remplissant les nombreux et souvent non banals détails laissés au lecteur. Déjà à son époque, la manque de rigueur et l'obscurité de Riemann étaient célèbres parmi l'école allemande. Pour reprendre l'expression d'Edwards, lorsque Riemann fait un énoncé, cela peut être quelque chose que le lecteur peut vérifier tout seul, quelque chose que Riemann a démontré ou a l'intention de démontrer, quelque chose qui ne sera pas prouvé jusqu'à des années après, quelque chose qui reste encore indémontré aujourd'hui ou même quelque chose qui est faux sous les hypothèses qui sont données [**Ed**, p. x]. Malgré tout, il n'est pas moins vrai que "Sur le nombre des nombres premiers inférieures à une grande donnée" est un chef d'œuvre comparable, en charme, aux classiques de la littérature, de la peinture et de la musique.

D'après le joli article d'André Weil sur la préhistorie de la fonction zêta [**W2**], le premier à se poser le problème du calcul de la somme des inverses des carrés a été l'italien Pietro Mengoli, dans son livre *Novae Quadraturae Arithmeticae Seu De Additione Fractionum* (1650). Cependant, il s'est vite rendu compte que les techniques "télescopiques" qui lui avaient permis d'évaluer la somme des inverses des nombres triangulaires

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \text{etc}$$

ne donnent rien lorsque l'on essaye de les appliquer pour une question, celle du calcul de $\zeta(2)$, qui *requiert un esprit plus riche.*

Les résultats de Mengoli ont été redécouverts par Jacob Bernoulli, qui dans l'œuvre *Positiones de Seriebus Infinitus* (1689) introduit pour la première fois $\zeta(m)$ pour un nombre rationnel quelconque. Vu que $\zeta(1)$ diverge, tandis que la valeur $\zeta(2)$ est finie, Bernouilli sait que la fonction zêta converge pour $m \geq 2$ et qu'elle diverge pour $m < 1$, mais il n'est pas tout à fait clair s'il est conscient de ce qui se passe entre 1 et 2. Ensuite, il décompose $\zeta(m)$ comme la somme indexée par les nombres pairs $\varphi(m)$ et celle où n décrit l'ensemble des impairs $\psi(m)$. Les relations suivantes sont presque immédiates :

$$\varphi(m) = 2^{-m}\zeta(m), \quad \frac{\psi(m)}{\varphi(m)} = 2^m - 1.$$

Comme le fait noter Weil, ces deux identités mènent à

$$\zeta(m) = (1 - 2^{-m})^{-1}\psi(m),$$

qui permet d'avancer un premier pas vers la formule produit [**W2**, p. 5]. Cela a été démontré par Euler, qui est le premier aussi à donner la valeur exacte de $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. C'est en rappelant ses travaux splendides que l'on commence ce mémoire.

La source principale pour le texte en français a été la traduction de Leonce Laugel inclus dans les *Œuvres mathématiques* de Riemann, publiées avec une préface de Charles Hermite et un discours de Félix Klein par Gauthiers-Villars à Paris en 1898 et réimprimées plusieurs fois [**R2**], que l'on a contrasté avec l'original allemand [**R1**] et avec la traduction anglaise d'Edwards [**Ed**, p. 299-305].

Malheureusement, cette édition contient de nombreuses fautes d'impression, que l'on signale ici :

p. 166, 2è formule : il faut lire $\int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$ au lieu de $\int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^{x-1}}$.

p. 166, 4è formule : le signe après la parenthèse doit être positif.

p. 167, ligne 7 : il faut lire $(-2\pi ni)^{s-1}(-2\pi i)$ au lieu de $(-2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$.

p. 168, 7è formule : sous le signe d'intégration, la valeur correcte de l'argument du cosinus n'est pas $\frac{1}{4}t\log x$ mais $\frac{1}{2}t\log x$.

p. 170, lignes 23 et 24 : il faut lire y^{-a} au lieu de $y^{-\alpha}$.

p. 171, 2è formule : la valeur $\frac{s}{2}$ auquel Π est évalué doit être entre parenthèses.

p. 171, dernière formule : le terme qui multiplie l'intégrale n'est pas $\log x$ mais $\frac{1}{\log x}$.

p. 173, 3è formule : il y a un logarithme qui manque après le signe de sommation à l'intérieur de l'intégrale.

p. 175, dernière formule : le terme π ne multiplie pas mais divise dans le terme à droite de l'égalité. Cette coquille apparaît déjà dans [**R1**].

p. 176, dernière ligne : en essayant de corriger un *lapsus calami* de Riemann, les éditeurs allemands en commettent un autre lorsqu'ils affirment que $\zeta(0) = \frac{1}{2}$ au lieu de $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$. Cela reste incorrect chez l'édition française.

Remerciements. — Je tiens à remercier Marc Frisch et Ricardo Pérez-Marco pour ses commentaires précieux à un brouillon de ce texte.

1. Au commencement était Euler

Pour résoudre le problème de Bâle, la strategie d'Euler consiste *grosso modo* à considérer la fonction transcendante

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

comme si c'était un polynôme fini et à utiliser la formule qui permet d'exprimer un polynôme P de degré n, qui ne s'annule pas à l'origine, comme le produit

$$P(x) = P(0)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{x_k}\right),$$

où x_k décrit l'ensemble de racines de P.

Puisque Euler sait que le sinus s'annule aux multiples entiers de π et que le terme constant de la série vaut 1, cela le mène à écrire

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Alors, en comparant les coefficients du terme quadratique dans le produit infini et dans le développement en série, on obtient l'égalité :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Avec la même méthode, il est possible de calculer $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ et plus généralement toutes les valeurs de la fonction aux entiers pairs.

Inutile de dire que le raisonnement d'Euler manque de toute rigueur du point de vue moderne. Si l'on pouvait manipuler les fonctions transcendantes comme si elles étaient des polynômes, alors l'égalité

$$g(x)\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

serait vraie pour tout $g(x)$ ne s'annulant jamais et telle que $g(0) = 1$. Or, le début du développement en série

$$e^x\frac{\sin x}{x} = 1 + x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{6} + \dots$$

montre que ce n'est pas le cas si $g(x) = e^x$.

Cela a fait l'objet de l'une des critiques de la réponse de Nicolas Bernouilli à la lettre dans laquelle Euler lui communiquait en 1734 ses calculs des valeurs de la fonction ζ. Le mathématicien suisse ne fait aucun cas à cette remarque de Bernouilli, mais l'autre question qu'il lui pose commence à l'inquiéter : est-il vrai que le sinus n'a pas de zéros complexes autres que $n\pi$? On rencontre ici le début des recherches d'Euler sur le rapport entre l'exponentielle complexe et les fonctions trigonométrique.

1.1. La fonction zêta et les nombres premiers. — Trois ans plus tard, en 1737, Euler trouve la formule produit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

où p décrit l'ensemble des nombres premiers.

En effet, chaque facteur à droite est la somme de la série géométrique

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(p^n)^s},$$

donc le produit est la somme de tous les termes du type

$$\sum \frac{1}{(p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k})^s},$$

où p_i sont des nombres premiers et n_j des entiers relatifs. Or, d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, cela équivaut à considérer la somme $\sum n^{-s}$ indexée par les entiers.

La conséquence la plus remarquable de cette formule produit est une nouvelle preuve, en quelque mode constructive, de l'infinitude des nombres premiers, améliorant le résultat de la proposition IX.20 des *Éléments* d'Euclide. En effet, s'il n'y avait qu'un nombre fini des premiers, le produit à droite serait fini, donc convergent pour toute valeur de s. Cependant, la série hharmonique $\zeta(1)$ est divergente.

Pour $s > 1$ réel, on peut faire mieux en prenant des logarithmes dans la formule produit :

$$\log \zeta(s) = \sum_p - \log(1 - p^{-s}).$$

Si l'on se rappelle du développement en série

$$-\log(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots,$$

elle se transforme en

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{-ns}}{n} = \sum_p p^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} (\sum_p p^{-ns}),$$

après des changements de l'ordre de sommation qu'il n'est pas nécessaire de justifier quand on fait des calculs *à la Euler*, mais qui découlent du fait que la série double converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Maintenant, l'observation que le deuxième terme à droite est uniformément borné autour de $s = 1$ implique que la divergence de $\zeta(1)$ ne peut être reflétée que dans la divergence de la somme des inverses des nombres premiers. Comme Euler l'écrit,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots = \log(\log \infty),$$

où le double logarithme s'explique par le fait que cette somme diverge comme le logarithme de la série harmonique, et la série harmonique diverge à son tour comme le logarithme, d'où une formule que l'on a tendance à interpréter comme le comportement asymptotique

$$\sum_{p<x} \frac{1}{p} \sim \log(\log x), \quad x \to \infty.$$

Puisque l'on dispose de la formule intégrale

$$\log(\log x) = \int_1^{\log x} \frac{dt}{t} = \int_e^x \frac{1}{t} \frac{dt}{\log t},$$

l'intégrale de $\frac{1}{t}$ par rapport à la mesure $\frac{dt}{\log t}$ est équivalente à l'intégrale de $\frac{1}{t}$ par rapport à la mesure discrète qui assigne le poids 1 aux nombres premiers et 0 aux autres, ce qui indique que, en outre, les nombres premiers inférieurs à x possèdent une densité proche de $\frac{1}{\log x}$. Cependant, Euler n'avait pas à la main le langage nécessaire pour en tirer cette conséquence et il fallut attendre l'arrivée de Gauss.

En plus, Euler présente une formule produit pour la série

$$L(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^m},$$

à partir de laquelle il déduit

$$L(1) = \prod_p \frac{p}{p \pm 1},$$

où p décrit l'ensemble des premiers et le signe du dénominateur est pris de telle sorte qu'il soit un multiple de 4. Des raisonnements analogues permettent alors de montrer qu'il y a une infinité des nombres premiers de la forme $4n + 1$ ou $4n - 1$ et même de calculer

$$\sum \pm \frac{1}{p} = 0,3349816\ldots,$$

avec la même convention sur le signe.

1.2. L'équation fonctionnelle. — Loin de se contenter de ces résultats, les recherches d'Euler sur la fonction zêta tournent en 1739 vers un nouveau sujet, dont l'origine est la relation

$$1 - 2^m + 3^m - 4^m + \text{etc} = \frac{\pm 2.1.2.3\ldots m}{\pi^{m+1}}(1 + \frac{1}{3^{m+1}} + \frac{1}{5^{m+1}} + \text{etc}),$$

qu'il démontre pour $m = 1, 3, 5, 7$.

Si l'on désigne par $\varphi(s)$ l'analogue alternée de ζ, alors

$$(1 - 2^{-m-1})\varphi(-m) = 2m!\pi^{-m-1}m!\zeta(m+1),$$

compte tenu du rapport entre ζ et la sous-somme indexée par les impairs. Des transformations élémentaires montrent que la formule ci-dessus est équivalente à l'équation fonctionnelle des entiers relatifs pairs. Ainsi, Euler est capable de démontrer l'équation fonctionnelle pour $s = 2, 4, 6, 8$.

Plus tard, dans son article "Remarques sur un beau rapport entre les séries de puissances tant directes que récriproques" (1749), il réussit à conjecturer la valeur correcte

$$\frac{\varphi(1-s)}{\varphi(s)} = \frac{-\Gamma(s)(2^s - 1)\cos(\frac{\pi s}{2})}{(2^{s-1} - 1)\pi^s},$$

pour tout s réel plus grand que 1.

Cette formule sera démontré par Riemman au début de son article, mais il y a au moins trois preuves qui precèdent celle donné par l'allemand. Elles sont dues à des mathématiciens presque oubliés aujourd'hui : Carl Johan Malmsten (1814-1886), qui aida Mittag-Leffter à démarrer la revue Acta Mathematica, Oscar Schlömilch (1823-1901), dont un type de fonction de Bessel porte son nom, et Thomas Clausen (1801-1885), connu par sa découverte d'un facteur premier du sixième nombre de Fermat.

2. Une fonction "toujours valable"

Inspiré de la formule produit d'Euler, l'idée géniale de Riemann est de considérer $\zeta(s)$ non seulement comme une fonction de variable réelle, mais comme la fonction de variable complexe représentée par l'identité d'Euler lorsque les deux expressions ont du sens. Étant donné que

$$|\tfrac{1}{n^s}| = |\tfrac{1}{e^{s\log n}}| = \frac{1}{e^{\mathrm{Re}(s)\log n}} = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}$$

et que la série formée de ces derniers termes converge si et seulement si l'exposant est plus grand que 1, la fonction $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$ converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Ensuite, Riemann cherche ce qu'il appelle *une expression qui reste toujours valable*, autrement dit un prolongement analytique de ζ. D'abord, le changement de variable $y = nx$ donne l'identité suivante, où s est encore réel plus grand que 1 :

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}. \tag{2.1}$$

Le symbole $\Pi(s-1)$ est dû à Gauss et se réfère à la fonction gamma, que l'on note de nos jours, suivant Legendre :

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx.$$

La notation de Gauss adoptée par Riemann est plus naturelle car elle met en évidence le fait que Γ est une généralisation du factoriel.

La formule (2.1) se trouve déjà, écrite à la main le 7 avril 1849 par Ferdinand Eisenstein, dans un exemplaire de la traduction française des *Disquisitiones* de Gauss. Étant donné qu'à cette époque-là Eisenstein et Riemman étaient des amis très proches, il est raisonnable de penser, comme le fait Weil [**W2**], que cela a été l'origine du travail de Riemann.

Une fois qu'il a fait apparaître le terme n^s dans le dénominateur à gauche, la déduction sous-entendue

$$\Pi(s-1) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-nx} \right) x^{s-1} dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1},$$

lui permet d'écrire la formule

$$\Pi(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}. \tag{2.2}$$

Évidemment, il n'y a chez Riemann aucune justification de la possibilité d'échanger la série et l'intégrale pour aboutir à l'identité ci-dessus, mais cela peut être justifié sans difficulté, en faisant appel, par exemple, à la convergence uniforme de la suite des fonctions e^{-nx}.

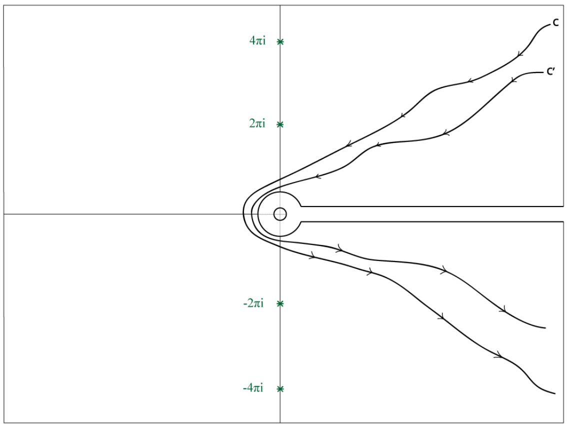

FIGURE 2. Le contour de Riemann

2.1. L'intégrale de contour. — Le pas suivant consiste à transformer l'intégrale réelle (2.2) dans l'intégrale de contour sur le plan complexe

$$I = \int_C \frac{(-z)^{s-1} dx}{e^z - 1}.$$

Comme Riemann l'indique, la fonction

$$(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$$

est multiforme et il faut prendre la détermination telle que *le logarithme de $-x$ soit réel pour x négatif*. Puisque l'argument principal de $-x$ est nul pour x négatif et que

$$\log(-x) = \log|-x| + i\arg(-x),$$

il suffit de considérer la branche usuelle du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, autrement dit celle dont la partie imaginaire est comprise entre $-\pi$ et π. Par passage à l'opposé, on obtient une détermination continue dans le plan complexe privé de l'axe réel positif.

En ce qui concerne le contour, Riemann explique que C doit être pris *dans le sens positif de $+\infty$ à $+\infty$ et autour d'un domaine de grandeurs qui contient à son intérieur la valeur 0, mais qui ne contient aucune autre valeur de discontinuité de la fonction sous le signe d'intégration.*

Puisque les pôles sont localisés en $2n\pi i$ pour tout entier non nul n, il suffit de considérer des chemins suffisamment éloignés des points $2n\pi i$, comme ceux qui sont indiqués dans la figure 2.1.

Le théorème de résidus permet de montrer que cette intégrale ne dépend pas du chemin choisi, donc on peut le déformer jusqu'à parcourir la droite $\mathrm{Im}(z) = i\epsilon$ partant de $+\infty$, puis un cercle de rayon ϵ dans le sens antihoraire et finalement la droite $\mathrm{Im}(z) = -i\epsilon$ vers $+\infty$.

Compte tenu du fait que la branche du logarithme qui a été choisie impose que $(-z)^s = e^{-i\pi s} z^s$ dans la première partie du chemin et que $(-z)^s = e^{i\pi s} z^s$ après avoir décrit le cercle, l'intégrale se décompose en :

$$-\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{(s-1)(\mathrm{Log}\,(x+i\epsilon)-\pi i)}}{e^{x+i\epsilon}-1} + \int_{|z|=\epsilon} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{(s-1)(\mathrm{Log}\,(x-i\epsilon)+\pi i)}}{e^{x-i\epsilon}-1}.$$

Par passage à la limite lorsque $\epsilon \to 0$:

$$I = (e^{-\pi si} - e^{\pi si}) \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1} + \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|z|=\epsilon} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}$$

Afin de calculer le second terme on note que, pour les nombres complexes $|z| < 1$, il existe des constantes A et B telles que

$$|(-z)^{s-1}| \leq A|z|^{\mathrm{Re}(s)}, \quad |e^z - 1| \geq B|z|.$$

Par conséquent,

$$|\tfrac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}| \leq \tfrac{A|z|^{\mathrm{Re}(s)}}{B|z|} = C|z|^{Re(s)-1}$$

et on en déduit que la valeur absolue de l'intégrale est minorée par $\epsilon^{\mathrm{Re}(s)}$ fois une constante, dont la limite est nulle car $\mathrm{Re}(s) = s > 1$.

Tout le raisonnement précédent est réduit à *on obtient aisément* chez Riemann. Il nous permet d'arriver à la formule

$$I = (e^{-\pi si} - e^{\pi si}) \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}.$$

Alors, on déduit de l'identité trigonométrique due à Euler

$$\sin(\pi s) = \frac{e^{\pi si} - e^{-\pi si}}{2i}$$

et de la formule (2.2) que

$$2\sin(\pi s)\Pi(s-1)\zeta(s) = i\int_C \frac{(-z)^{s-1}dz}{e^z-1}. \tag{2.3}$$

2.2. Une fonction presque finie. — Riemannn poursuit en expliquant que *cette équation donne maintenant la valeur de la fonction $\zeta(s)$ pour un valeur complexe de s quelconque et nous enseigne que cette fonction est uniforme et qu'elle est finie pour toutes les valeurs finies de s sauf 1.*

En effet, l'identité dite de réflexion connue d'Euler

$$\Pi(s-1)\Pi(-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

permet d'écrire la fonction zêta sous la forme :

$$\zeta(s) = \frac{\Pi(-s)}{2\pi}i \int_C \frac{(-z)^{s-1}dz}{e^z - 1}. \tag{2.4}$$

Puisque la fonction

$$\frac{x^{s-1}}{e^x - 1}$$

est de décroissance rapide à l'infini et qu'elle est équivalente à x^{s-2} lorsque $x \to 0$, donc localement intégrable autour de l'origine, la formule cidessus, même si elle a été démontrée sous l'hypothèse que $s > 1$ était réel, a du sens pour toute valeur complexe de s.

En plus, les seuls pôles possibles de $\zeta(s)$ sont ceux de $\Gamma(1-s)$, donc les entiers positifs. Mais $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$ étant réelle analytique pour tout réel $s > 1$, il ne reste que $s = 1$ parmi les singularités possibles.

Un calcul simple montre que

$$\int_C \frac{1}{e^z - 1} = -2\pi i,$$

donc $s = 1$ est en fait un pôle du même résidu $\mathrm{Res}_{s=1}\zeta(s) = 1$ que le pôle $s = 1$ de la fonction Γ.

Puisque il n'y a d'autres pôles, l'intégrale de contour s'annule si s est un entier plus grand que 1, ce qui peut être aussi montré indépendamment à l'aide de la formule de Cauchy.

2.3. Les zéros réels. — Ensuite, Riemann affirme que $\zeta(s)$ *s'évanouit lorsque s est égal à un nombre pair négatif* et il indique très rapidement que cela découle du fait que le développement en série de $f(x) = \frac{1}{e^x-1} + \frac{1}{2}$ ne contient que des puissances impaires. En effet, l'identité

$$\frac{1}{e^x - 1} + 1 = -\frac{1}{e^{-x} - 1}$$

montre que f est impaire, donc qu'elle n'admet que des puissances impaires dans son développement :

$$\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{12}z-\frac{1}{720}z^3+\frac{1}{30240}z^5+\text{etc}$$

Cette série était déjà connu de Jacob Bernouilli, qui l'inclut dans son ouvrage posthume *Ars conjecturandi* (1713), consacré à la théorie des probabilités. En fait, les coefficients B_n intervenant dans la série

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$$

furent baptisés nombres de Bernouilli d'après lui. L'une de leur propriétés les plus remarquables est précisément leur annulation pour les indices impairs supérieurs à 1.

Par évaluation de la formule (2.4) en $s=1-n$ on obtient :

$$\zeta(1-n)=-\frac{\Gamma(n)}{2\pi i}\int_C\frac{(-z)^{-n}dz}{e^z-1}=(-1)^{1-n}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C\frac{z^{-n}}{e^z-1}.$$

Puisque

$$\int_C\frac{z^{-n}}{e^z-1}=\int_C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{B_k}{k!}z^{k-n-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{B_k}{k!}\int_C z^{k-n-1}dz$$

et que la seule intégrale non nulle correspond à $k=n$ et vaut $2\pi i$, on a

$$\zeta(1-n)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\frac{2\pi i}{n!}B_n=-\frac{B_n}{n}.$$

Alors, la valeur $\zeta(-2k)$ est un multiple de B_{2k+1}, donc nulle. Ce sont les zéros dites triviaux de la fonction zêta. À l'aide de coefficients de Bernouilli, on peut aussi calculer la valeur de ζ aux entiers positifs pairs, généralisant de cette façon les résultats d'Euler discutés au début :

$$\zeta(2n)=(-1)^{n+1}\frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}.$$

Cependant, cette formule ne semble pas pouvoir être déduite directement de la formule intégrale (2.4). Edwards soupçonne que cela a été l'une des motivations de Riemann pour s'intéresser à l'équation fonctionnelle de zêta [**Ed**, p. 12].

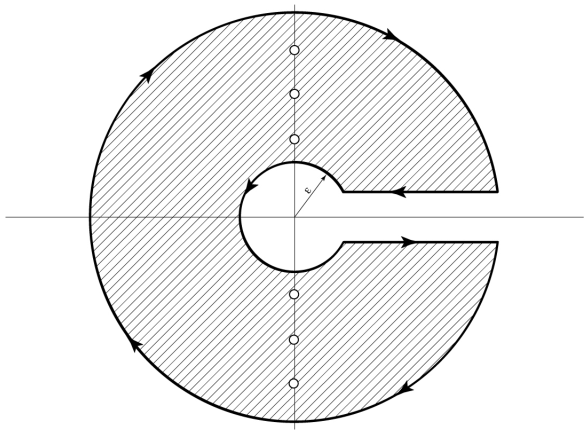

FIGURE 3. Le contour pour obtenir l'équation fonctionnelle

3. L'équation fonctionnelle

Après avoir trouvé les zéros triviaux de ζ, Riemann propose que *lorsque la partie réelle de s est négative, l'intégrale, au lieu d'être prise dans le sens positif autour du domaine de grandeurs assigné, peut être prise dans le sens négatif autour du domaine de grandeurs qui contient toutes les grandeurs complexes restantes, car l'intégrale, pour des valeurs dont le module est infiniment grand, est alors infiniment petite.*

Cela revient à considérer la limite lorsque $\epsilon \to 0$ et que $R \to +\infty$ de l'intégrale sur le contour de la figure 3. D'après (2.3), la première limite est

$$-2i\sin(\pi s)\Pi(s-1)\zeta(s) \tag{3.1}$$

et, comme Riemann l'indique, la limite de la deuxième est nulle, car $|e^z - 1| > \frac{1}{2}$ sur le cercle de rayon R et par conséquent

$$\left|\int_{|z|=R} \frac{(-z)^{s-1}dz}{e^z-1}\right| \leq 2\pi R^s,$$

dont la limite est nulle si la partie réelle de s est négative.

Par le théorème des résidus, la limite de l'intégrale vaut $2\pi i$ fois la somme de tous les résidus de la fonction sous le signe, qui *ne devient discontinue que lorsque x est égal à un multiple entier de $\pm 2\pi i$ et l'intégrale, par conséquent, est égale à la somme des intégrales prises dans le sens négatif autour de ces valeurs. Mais l'intégrale relative à la valeur*

$n2\pi i$ *égale* $(-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$. En effet,

$$\int_{|z-2\pi ni|=\epsilon} \frac{(-z)^{s-1}dz}{e^z-1} = \int_{|\omega|=1} \frac{\omega(-2\pi ni-\omega)^{s-1}}{e^\omega-1}\frac{d\omega}{\omega} = (-2\pi ni)^{s-1}$$

d'après la formule de Cauchy, compte tenu de la limite

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{\omega}{e^\omega - 1} = 1.$$

On en déduit :

$$-2i\sin(\pi s)\Pi(s-1)\zeta(s) = (-2\pi i)\sum(-n2\pi i)^{s-1},$$

autrement dit

$$2\sin(\pi s)\Pi(s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s[(-i)^{s-1}+i^{s-1}]\zeta(1-s).$$

Le remplacement $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sert à écrire

$$i^{s-i} + (-i)^{s-1} = \frac{1}{i}(e^{i\frac{\pi}{2}s} - e^{-i\frac{\pi}{2}s}) = 2\sin(\tfrac{\pi s}{2})$$

et la formule devient alors

$$\sin(\pi s)\Pi(s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s\sin(\tfrac{\pi s}{2})\zeta(1-s)$$

Ensuite, l'identité de réflexion

$$\sin(\pi s)\Pi(s-1) = \frac{\pi}{\Pi(-s)}$$

mène à l'expression

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin(\tfrac{\pi s}{2})\Pi(-s)\zeta(1-s). \tag{3.2}$$

et via la formule de duplication

$$\Pi(-s) = \pi^{-\frac{1}{2}}2^{-s}\Pi(\tfrac{1-s}{2}-1)\Pi(-\tfrac{s}{2}),$$

on obtient l'égalité

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \pi^{\frac{s-3}{2}}\sin(\tfrac{\pi s}{2})\Pi(-\tfrac{s}{2})\Pi(\tfrac{1-s}{2}-1)\zeta(1-s).$$

Une nouvelle application de la réflexion

$$\sin(\tfrac{\pi s}{2})\Pi(\tfrac{-s}{2}) = \frac{\pi}{\Pi(\frac{s}{2}-1)}$$

mêne enfin à l'équation fonctionnelle

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Pi(\tfrac{s}{2}-1)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Pi(\tfrac{1-s}{2}-1)\zeta(1-s). \tag{3.3}$$

Tous ces calculs *en vertu de propriétés connues de la fonction* Π, que Riemann n'écrit pas, lui permettent d'exprimer son équation fonctionnelle par le fait que *la quantité*

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Pi(\tfrac{s}{2}-1)\zeta(s)$$

reste inaltérée lorsque s est remplacé par 1-s.

Comme le voulait Riemann, en évaluant la formule (3.2) en $s = 1-2n$,

$$\zeta(1-2n) = 2^{1-2n}\pi^{-2n}(-1)^n\Pi(2n-1)\zeta(2n)$$

pour tout $n > 0$. Puisque

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \quad \Pi(2n-1) = (2n-1)!$$

la valeur de ζ aux entiers pairs n'est autre que

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}\pi^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}.$$

3.1. La deuxième méthode. — Vu l'équation fonctionnelle, le même jeu du début du papier, appliqué cette fois au changement de variable $y = n^2\pi x$, permet à Riemann d'écrire

$$\int_0^\infty e^{-n^2\pi x}x^{\frac{s}{2}-1}dx = \frac{1}{n^s}\Pi(\tfrac{s}{2}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}.$$

Alors un raisonnement analogue à celui qui mène à (2.2) montre que

$$\Pi(\tfrac{s}{2}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx, \tag{3.4}$$

où l'on a introduit la notation $\psi(x)$ pour la série

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}.$$

Le pas crucial consiste maintenant à utiliser une conséquence d'une formule que Riemann a appris du traité *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum* (1829) de Carl Jacobi, où il l'attribue, à son tour, au mathématicien français Siméon Denis Poisson :

$$2\psi(x) + 1 = x^{-\frac{1}{2}}[2\psi(\tfrac{1}{x}) + 1]. \tag{3.5}$$

En effet, il s'agit d'un cas particulier de la formule de sommation

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)$$

mettant en rapport la somme des valeurs sur les entiers d'une fonction f et sa transformée de Fourier

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}dx.$$

Soit $f(x) = e^{-\pi tx^2}$, où $t > 0$. Calculons la transformé de Fourier

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi tx^2}e^{-2\pi ixy}dx.$$

À travers l'égalité

$$\frac{\pi}{t}y^2 - \pi tx^2 - 2\pi ixy = -\pi t(x + i\frac{y}{t})^2,$$

on obtient l'expression équivalente

$$\hat{f}(y) = e^{-\frac{\pi}{t}y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t(x+i\frac{y}{t})^2}dx.$$

Après le changement de variable $u = \sqrt{t}(x + i\frac{y}{t})$,

$$\hat{f}(y) = t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{t}y^2} \int_L e^{-\pi u^2}du,$$

L étant la droite $\mathrm{Im}(z) = \frac{y}{t}$ du plan complexe.

Pour calculer cette intégrale, le théorème des résidus nous permet de revenir à l'axe réel. En effet, $e^{-\pi u^2}$ n'a pas de singularité à l'intérieur du contour de la figure 4, donc son intégrale est nulle. Compte tenu du fait que dans les droites verticales x ne varie pas et que l'orientation du L est opposée à celle de l'axe réel, on conclut par passage à la limite que

$$\int_L e^{-\pi u^2}du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1,$$

la dernière égalité étant déjà connu de Gauss.

Par conséquent, $\hat{f}(y) = t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{t}y^2}$ et la formule de Poisson donne

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi t} = t^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2pi\frac{1}{t}},$$

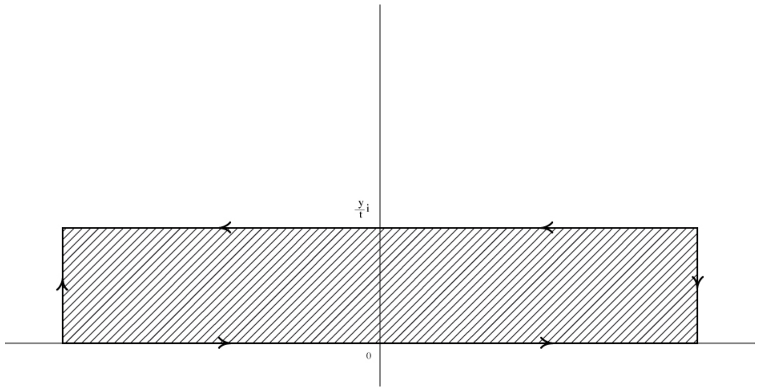

FIGURE 4. Le contour qui permet de ramener l'intégrale sur l'axe réel.

ce qui entraîne, par symétrie de la série, le résultat de Jacobi, que l'on peut exprimer plus proprement en introduisant la série

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi t},$$

qui satisfait l'équation fonctionnelle

$$\theta(t) = t^{-\frac{1}{2}}\theta(\tfrac{1}{t})$$

et dont les zéros seront l'objet d'un travail ultérieur de Riemann.

Si l'on sépare la formule intégrale (3.4) en deux parties et l'on remplace $\psi(x)$ par l'identité de Jacobi dans la première d'entre elles :

$$\begin{aligned}\Gamma(\tfrac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) &= \int_0^1 [x^{-\frac{1}{2}}\psi(\tfrac{1}{x}) + \tfrac{x^{-\frac{1}{2}}-1}{2}]x^{\frac{s}{2}-1}dx + \int_1^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx \\ &= \int_0^1 \psi(\tfrac{1}{x})x^{\frac{s-3}{2}}dx + \int_0^1 (\tfrac{x^{\frac{s-3}{2}}-x^{\frac{s-2}{2}}}{2})dx + \int_1^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx.\end{aligned}$$

Le calcul élémentaire

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s-2}{2}})dx = \frac{1}{2}(\tfrac{2}{s-1} - \tfrac{2}{s}) = \frac{1}{s(s-1)}$$

et le changement de variable $xy = 1$ dans l'intégrale

$$\int_0^1 \psi(\tfrac{1}{x})x^{\frac{s-3}{2}}dx = -\int_0^\infty -\psi(y)y^{\frac{3-s}{2}}\frac{dy}{y^2} = \int_0^\infty \psi(y)y^{-\frac{s+1}{2}}dy$$

entraînent que

$$\Pi(\tfrac{s}{2}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}})dx. \tag{3.6}$$

Même s'il ne l'écrit pas, Riemann est bien conscient que cette représentation intégrale fournit une deuxième preuve de l'équation fonctionnelle de ζ car le changement de s par $1-s$ laisse le premier terme invariant et il échange les exposants à l'intérieur de l'intégrale.

C'est en fait cette preuve de l'équation fonctionnelle qu'il est coutumier de présenter dans les traitements modernes du sujet, tandis que la première démonstration est plutôt oubliée.

4. La fonction ξ et l'hypothèse de Riemann

Ensuite, Riemann pose $s = \frac{1}{2} + ti$, motivé par le fait que $\frac{1}{2}$ est le seul point fixe du changement ci-dessus, et il définit

$$\xi(t) = \Pi(\tfrac{s}{2})(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s).$$

Puisque $\Pi(\frac{s}{2}) = \frac{s}{2}\Pi(\frac{s}{2}-1)$, on a :

$$\xi(t) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Pi(\tfrac{s}{2}-1)\zeta(s)$$

et l'équation fonctionnelle pour le terme à droite implique que la nouvelle fonction ξ de la variable t est pair, autrement dit :

$$\xi(t) = \xi(-t).$$

Le rapport entre les expressions dépendant de s et celles dépendant de t est en quelque mode confus et il mène Riemann à un calcul erroné. D'habitude, la notation ξ représente

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\Pi(\tfrac{s}{2}-1)\zeta(s),$$

la partie réelle de s n'étant pas fixée, tandis que l'on désigne par

$$\Xi(t) = \xi(\tfrac{1}{2}+it)$$

ce qui Riemann note $\xi(t)$. Par contre, dans ces notes on a préféré garder la notation originale de Riemann afin d'être plus capables de reconstruire ses méthodes et de voir où il se trompe.

En observant que $s(s-1) = -(t^2 + \frac{1}{4})$, ainsi que le rapport entre $\xi(t)$ et $\Pi(\frac{s}{2}-1)\zeta(s)$, la représentation intégrale (3.6) se transforme en

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{2}\int_1^\infty \psi(x)(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}})\\ &= \frac{1}{2} - (t^2+\frac{1}{4})\int_1^\infty \psi(x)\frac{x^{\frac{t}{2}i-\frac{3}{4}}+x^{-\frac{t}{2}i-\frac{3}{4}}}{2}dx.\end{aligned}$$

Or, la trigonométrie nous apprend que

$$\frac{x^{\frac{t}{2}i}+x^{-\frac{t}{2}i}}{2} = \frac{e^{\frac{t}{2}\log xi}+e^{-\frac{t}{2}\log xi}}{2} = \cos(\tfrac{t}{2}\log x),$$

d'où la formule

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - (t^2+\frac{1}{4})\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos(\tfrac{t}{2}\log x)dx \tag{4.1}$$

que Riemann présente dans la quatrième page de son mémoire.

Par intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \psi(x)(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}})dx =&2\int_1^\infty \frac{d}{dx}[\psi(x)(\frac{x^{\frac{s}{2}}}{s}+\frac{x^{\frac{1-s}{2}}}{1-s})]dx\\ &-2\int_1^\infty \psi'(x)(\frac{x^{\frac{s}{2}}}{s}+\frac{x^{\frac{1-s}{2}}}{1-s})dx\end{aligned}$$

Puisque $\psi(x)$ décroît plus rapidement qu'une puissance quelconque de x lorsque $x \to \infty$, on a :

$$\int_1^\infty \frac{d}{dx}[\psi(x)(\frac{x^{\frac{s}{2}}}{s}+\frac{x^{\frac{1-s}{2}}}{1-s})]dx = -\psi(1)\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{1-s}\right) = \frac{\psi(1)}{s(s-1)}.$$

On en déduit :

$$\xi(t) = \frac{1}{2}+\psi(1) - \int_1^\infty \psi'(x)[(s-1)x^{\frac{s}{2}}+sx^{\frac{1-s}{2}}],$$

où l'on a juste introduit le facteur $s(s-1)$ sous le signe.

Une intégration par parties de

$$\int_1^\infty \psi'(x)[(s-1)x^{\frac{s}{2}}+sx^{\frac{1-s}{2}}] = \int_1^\infty x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)[(s-1)x^{\frac{s-3}{2}}+sx^{-\frac{s+2}{2}}]$$

tout à fait pareille à celle que l'on vient de faire mène à

$$\xi(t) = \frac{1}{2}+\psi(1)+4\psi'(1)+\int_1^\infty \frac{d}{dx}[x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)](2x^{\frac{s-1}{2}}+2x^{-\frac{s}{2}})dx.$$

Si l'on dérive maintenant l'identité de Jacobi (3.5), on obtient

$$2\psi'(x) = -x^{-\frac{3}{2}}\psi(\tfrac{1}{x}) - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{5}{2}}\psi'(\tfrac{1}{x}),$$

qui donne la formule suivante en remplacent $x = 1$:

$$\frac{1}{2} + \psi(1) + 4\psi'(1) = 0.$$

Ainsi, les premiers termes de la formule pour $\xi(t)$ disparaissent :

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= 4\int_1^\infty \frac{d}{dx}[x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)]\frac{x^{\frac{s-1}{2}}+x^{-\frac{s}{2}}}{2}dx \\
&= 4\int_1^\infty \frac{d}{dx}[x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)]x^{-\frac{1}{4}}\frac{x^{\frac{2s-1}{4}}+x^{\frac{1-2s}{4}}}{2}dx \\
&= 4\int_1^\infty \frac{d}{dx}[x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)]x^{-\frac{1}{4}}\frac{x^{\frac{ti}{2}}+x^{-\frac{ti}{2}}}{2}dx \\
&= 4\int_1^\infty \frac{d}{dx}[x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)]x^{-\frac{1}{4}}\cos(\tfrac{t}{2}\log x)dx.
\end{aligned}$$

En plus de (4.1), cette dernière égalité est la seule qui apparaît chez Riemann, précédée de "l'explication" *ou encore.*

4.1. "Une recherche superflue pour le but immédiat". — Les deux paragraphes qui suivent la formule ci-dessus sont, sans doute, les plus obscurs du papier, car Riemman énonce un théorème sur la distribution des racines de $\zeta(t)$ dont il n'est pas capable de donner la preuve. Dans une lettre trouvé dans son Nachlass, il indique que *c'est une conséquence d'un nouveau développement de la fonction ξ que je n'ai pas encore suffisamment simplifié pour pouvoir vous le communiquer.*

D'abord, Riemann explique que la fonction ξ *est finie pour toutes les valeurs finies de t et peut être développée suivant les puissances de t^2 en une série qui converge très rapidement.*

La première assertion suit du fait que $\xi(t)$ est un produit de deux fonctions qui n'ont pas de pôles, car les singularités de $\Pi(\frac{s}{2}-1)\zeta(s)$ sont simples en $s=0$ et $s=1$ et l'on a multiplié par $s(s-1)$. Par conséquent, $\xi(t)$ est une fonction entière.

Pour récupérer la deuxième propriété, il faut développer en série le cosinus à l'intérieur de l'intégrale. Puisque

$$\cos(\frac{t}{2}\log x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(t\log x)^{2n}}{2^{2n}(2n)!},$$

$\xi(t)$ se transforme en la série en puissances paires

$$\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}t^{2n},$$

où les coefficients sont donnés par la formule

$$a_{2n} = 4\int_1^{\infty} \frac{d}{dx}[x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)]x^{-\frac{1}{4}}\frac{(\log x)^{2n}}{2^{2n}(2n)!}dx.$$

Cependant, Riemann ne donne pas d'estimations de la rapidité de la convergence et cette série non-écrite n'est jamais mentionnée dans la suite. Puisque le but de Riemman est de démontrer que $\xi(t)$ peut être écrit comme le produit infini

$$\xi(t) = \xi(0)\prod_{\xi(\alpha)=0}\left(1-\frac{t}{\alpha}\right) \tag{4.2}$$

et que l'on a vu dans le résumé des travaux d'Euler que cela revient à dire que $\xi(t)$ se comporte comme un polynôme, l'assertion sur la convergence rapide peut être interprétée en cette direction : lorsque le décroissement des a_n est rapide, un nombre fini des termes du "'polynôme infini" $\xi(t)$ fournissent une bonne approximation.

Maintenant, Riemann démontre que $\xi(t)$ n'a pas de zéros en dehors de la bande critique $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Rappelons d'abord la formule

$$\Pi(s) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}$$

connue d'Euler. Cela implique notamment que

$$\log\Pi(\tfrac{s}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{s}{2}\log(1+\tfrac{1}{n}) - \log(1+\tfrac{s}{2n})\right]. \tag{4.3}$$

Ainsi, *pour une valeur de s dont la partie réelle est plus grande que 1, les logarithmes de facteurs de* $\xi(t)$ *restent finis*, voir non nuls. L'équation fonctionnelle fournit alors la non-annulation du produit

$$\xi(t) = \Pi(\tfrac{s}{2})(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

pour $\mathrm{Re}(s) < 0$. Enfin, vu que

$$0 < \mathrm{Re}(s) < 1 \Longleftrightarrow -\tfrac{1}{2} < \mathrm{Im}(s) < \tfrac{1}{2},$$

Riemann conclut que *la fonction* $\xi(t)$ *peut seulement s'évanouir lorsque la partie imaginaire de* t *se trouve comprise entre* $\frac{1}{2}i$ *et* $-\frac{1}{2}i$.

Riemann poursuit en affirmant que *le nombre des racines de* $\xi(t)$ *dont les parties réelles sont comprises entre* 0 *et* T *est environ égal à*

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi},$$

abstraction faite d'une partie fractionnaire de même ordre que la grandeur $\frac{1}{T}$, voir d'une erreur rélative de cette taille.

La seule suggestion qu'il donne, c'est que le nombre de racines de $\xi(t) = 0$ ayant cette propriété est égale à l'intégrale de contour

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C d\log\xi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\xi'(t)}{\xi(t)}dt,$$

où C est la frontière du rectangle de sommets 0, 1, $1+Ti$ et Ti parcouru dans le sens indiqué.

Il s'agit, en effet, d'un théorème bien connu de l'analyse complexe, mais le problème consiste à estimer la valeur absolue de la dérivée logarithmique de $\xi(t)$ sur le contour. Il fallut attendre jusqu'en 1905 pour une preuve complète de l'estimation de Riemann, due au mathématicien allemand von Mangoldt, qui a fait d'autres contributions fondamentales à l'étude de la fonction zêta et de la distribution des nombres premiers.

En ce qui suit, Riemann lance l'affirmation que cette approximation reste valide pour le nombre des racines réelles de $\xi(t)$, autrement dit, sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$, et qu'il est *très probable que toutes les racines sont réelles. Il serait à désirer, sans doute, que l'on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition ; néanmoins j'ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques rapides essais infructueux, car elle paraît superflue pour le but immédiat de mon étude.*

4.2. La représentation de ξ comme produit infini. — La preuve de la formule produit (4.2) esquissée par Riemann part de la remarque que les seules singularités logarithmiques de $\log\xi(t)$ se trouvent aux zéros de $\xi(t)$, donc elles coïncident avec celles de la série formelle

$$\sum_{\xi(\alpha)=0} \log\left(1-\frac{t}{\alpha}\right).$$

Or, la convergence de cette série dépend de manière essentielle de l'ordre de sommation (*si l'on changeait cet ordre des termes de la série, on pourrait obtenir pour résultat n'importe quelle valeur réelle*). Même si Riemann ne l'explicite pas à ce point-là, il entend que chaque racine α doit être accouplé avec $-\alpha$, de sorte que l'on peut considèrer la somme indexée par les racines de partie réelle positive rangées par grandeur :

$$\sum_{\mathrm{Re}(\alpha)>0}\left[\log\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)+\log\left(1+\frac{t}{\alpha}\right)\right]=\sum_{\mathrm{Re}(\alpha)>0}\left[\log\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right)\right] \tag{4.4}$$

Il suffit donc de démontrer la convergence absolue de la série

$$\sum_{\mathrm{Re}(\alpha)>0}\frac{1}{\alpha^2}.$$

D'après la discussion précédente, la dénsité des racines α est à peu près

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi},$$

d'où l'approximation

$$\sum_{\mathrm{Re}(\alpha)>0}\frac{1}{\alpha^2}\sim\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{1}{T^2}\log\frac{T}{2\pi}dT<\infty,$$

que Riemann explique : *en effet, puisque la densité des racines de grandeur t augmente seulement avec t comme le fait* $\log\frac{t}{2\pi}$, *cette expression converge et pour t infini ne devient infinie que comme l'est $t\log t$.*

Compte tenu du fait que $\log\xi(t)$ et la fonction de la formule (4.4) sont toutes les deux pairs, la différence entre elles doit être forcement une fonction paire. Mais, puisque l'accroissement de $\log\xi(t)$ est proche aussi de $t\log t$, cette fonction ne peut contenir de termes d'ordre positif. Elle est donc une constante, dont la valeur se détermine en évaluant en $t = 0$:

$$\log \xi(t) = \sum_{\mathrm{Re}(\alpha)>0} \left[\log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right)\right] + \log \xi(0).$$

La première preuve rigoureuse de cette identité est dûe à Hadamard, qui l'inclut dans son article "Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann" (1893), dans lequel il montre que la décroissance rapide des coefficients a_{2n} insinuée par Riemann est précisément la condition nécessaire et suffisante pour avoir une formule produit. De même, cela rend valide l'expression de $\frac{\sin x}{x}$ obtenue par Euler et cela explique pourquoi le résultat est faux pour la fonction $e^x \frac{\sin x}{x}$ que l'on avait introduite.

Notons, par contre, que Riemann se trompe dans le calcul de la constante. En effet, il considère ξ comme une fonction de la variable t mais la formule est écrite en termes de s, ce qui fait changer la constante multiplicative de la représentation comme produit infini. En effet, si

$$P(s) = P(0) \prod_{P(\rho)=0} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

et si l'on écrit s sous la forme $\frac{1}{2} + ti$, on obtient

$$\begin{aligned} P(\tfrac{1}{2} + ti) &= P(0) \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{\frac{1}{2} + ti}{\frac{1}{2} + \alpha i}\right) \\ &= P(0) \prod_{\alpha} \left(\frac{\alpha i - ti}{\frac{1}{2} + \alpha i}\right) \\ &= P(0) \prod_{\alpha} \left(\frac{\alpha i}{\frac{1}{2} + \alpha i} \frac{\alpha i - ti}{\alpha i}\right) \\ &= P(0) \prod_{P(\rho)=0} \left(1 - \frac{1/2}{\rho}\right) \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right) \\ &= P(\tfrac{1}{2}) \prod_{\mathrm{Re}(\alpha)>0} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right). \end{aligned}$$

Il n'est pas clair où est la source de l'erreur de Riemann, qui au lieu de la valeur correcte

$$\log(-\Pi(0)\zeta(0)) = \log(\tfrac{1}{2}) = -\log 2 = -0.6931471805\ldots$$

utilise la constante

$$\log(-\Pi(\tfrac{1}{4})\pi^{-\frac{1}{4}}\zeta(\frac{1}{2})) = -0.005775087\ldots$$

Les premiers éditeurs allemand de Riemann ont attribué juste à une faute d'écriture cette erreur, à savoir : Riemann voulait écrire $\log\zeta(0)$ au lieu de $\log\xi(0)$. Cela n'a pas de sens car $\zeta(0)$ n'est pas $\frac{1}{2}$, comme ils le pensent, mais $-\frac{1}{2}$. En plus, d'autres manuscrits de Riemann contenant la même erreur ont survécu. Le premier à se rendre compte a été l'italien Angelo Genocchi l'année après de la publication de l'article de Riemann.

5. La formule principale pour $\pi(x)$

Comme on l'a dit dans l'introduction, en prenant des logarithmes l'équation fonctionnelle devient

$$\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s}) = \sum p^{-s} + \frac{1}{2}\sum p^{-2s} + \ldots$$

Riemann propose de remplacer les termes à l'intérieur des sommes par

$$s\int_{p^n}^{\infty} x^{-s-1}dx = s\left[\frac{x^{-s}}{s}\right]_{p^n}^{+\infty} = p^{-ns},$$

de manière à avoir l'identité

$$\log\zeta(s) = s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{p}\int_{p^n}^{\infty} x^{-s-1}dx.$$

Le but est maintenant d'écrire toutes les intégrales intervenant dans la somme indexée par l'ensemble des nombres premiers dans le même domaine d'intégration. Pour faire cela, on remarque que

$$\sum_{p}\int_{p^n}^{\infty} x^{-s-1}dx = \sum_{k=1}^{\infty} k\int_{p_k^n}^{p_{k+1}^n} x^{-s-1}dx,$$

où l'on a noté p_k le $k-$ième nombre premier.

Un calcul directe montre alors que la série se transforme en l'intégrale

$$\sum_{p}\int_{p^n}^{\infty} x^{-s-1}dx = \int_{1}^{\infty} k(x)x^{-s-1}dx,$$

où $k(x)$ est la fonction de variable réelle qui est nulle entre 0 et 2^n, constante dans les intervalles $[p_k^n, p_{k+1}^n]$ et qui saute une unité en chaque puissance $n-$ième d'un nombre premier.

Après les premières pages *de principes auxiliaires*, Riemann introduit la fonction de comptage de nombres premiers inférieures à une certaine grandeur, qu'il définit de la façon suivante :

Soit $F(x)$ le nombre des nombres premiers qui sont inférieurs à x lorsque x n'est pas exactement égal à un nombre premier, et soit $F(x)$ ce nombre augmenté de $\frac{1}{2}$, lorsque x est premier, de telle sorte que, pour une valeur x pour laquelle $F(x)$ varie par un saut brusque, on ait

$$F(x) = \frac{F(x+0) - F(x-0)}{2}$$

Évidemment, ce que Riemann note 0 correspond à prendre la limite lorsque $\epsilon \to 0$, autrement dit

$$F(p) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F(p+\epsilon) - F(p-\epsilon)}{2},$$

pour tout premier p. Il s'agit d'une convention usuelle dans la théorie de l'intégration pour définir F aussi aux points de discontinuité. La fonction que Riemann note par $F(x)$ est représentée des nos jours par $\pi(x)$ et l'on l'écrira ainsi dorénavant.

À l'aide de cette définition, la fonction $k(x)$ que l'on cherchait pour unifier les domaines d'intégration n'est autre que $\pi(x^{\frac{1}{n}})$, montrée dans la figure 5. Par conséquent,

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_1^{\infty} \pi(x^{\frac{1}{n}}) x^{-s-1} dx = \int_1^{\infty} f(x) x^{-s-1} dx,$$

où l'on a désigné par $f(x)$ l'expression :

$$f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \dots$$

On remarque, à titre d'anecdote, que le fait que Riemann écrit cela, au lieu d'intégrer entre 0 et $+\infty$ semble indiquer que 1 était un nombre premier d'après lui, comme l'était pour Euler.

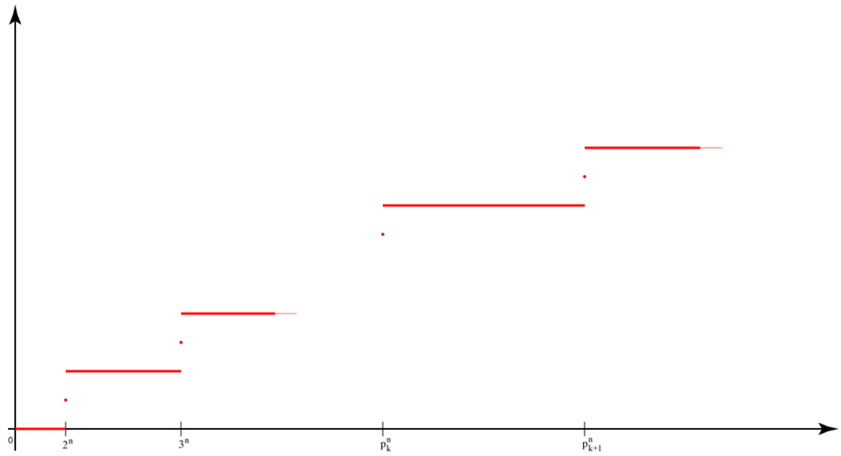

FIGURE 5. La fonction $\pi(x^{\frac{1}{n}})$.

5.1. La formule d'inversion de Fourier. — À partir de cette formule, la suite la plus naturelle pour un connaisseur de l'analyse de Fourier comme l'était Riemann, c'était d'appliquer la formule d'inversion de Fourier afin d'exprimer $f(x)$ en termes d'une intégrale du $\log \zeta(s)$. Vues ses habitudes, on peut considérer qu'il explique très en détail que si l'on dispose de l'équation

$$g(s) = \int_0^\infty h(x) x^{-s} d \log x,$$

pour $s = a + bi$ un nombre complexe de partie réelle fixe $a > 1$ et pour une fonction réelle $h(x)$, alors

$$2\pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s) y^s ds,$$

où l'intégration doit être prise de telle sorte que la partie réelle de s reste constante, autrement dit sur la droite $\mathrm{Re}(z) = a$.

Voyons comme il déduit ce résultat qui est nommé aujourd'hui transformée de Mellin, même si les travaux de Riemann précèdent 40 ans ceux du mathématicien finlandais, et qui correspond *grosso modo* à faire de l'analyse de Fourier sur le groupe multiplicatif des nombres réels au lieu de sur le groupe additif. D'abord,

$$g(s) = \int_0^\infty h(x) x^{-s} d \log x = \int_0^\infty h(x) x^{-a} e^{-ib \log x} d \log x, \tag{5.1}$$

ou comme Riemann l'écrit

$$g(a+bi) = g_1(b) + ig_2(b),$$

avec $g_1(x)$ et $g_2(x)$ données par

$$g_1(b) = \int_0^\infty h(x)x^{-a}\cos(b\log x)d\log x,$$
$$g_2(b) = -\int_0^\infty h(x)x^{-a}\sin(b\log x)d\log x.$$

En multipliant cette identité par $y^{bi} = e^{ib\log y}$ et en intégrant de $-\infty$ à $-\infty$ au sens réel par rapport à b, on a à gauche

$$-\,i\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)y^{bi}ds \tag{5.2}$$

car $ds = idb$, la partie réelle étant fixe. En ce qui concerne le terme à droite, après multiplication et intégration on aboutit à

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^\infty h(x)x^{-a}e^{i(\log y-\log x)b}d\log x\right)db.$$

Le changement $t=\log x$ transforme l'intégrale entre parenthèses en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(e^t)e^{-at}e^{i(\log y-t)b}dt.$$

Ensuite, Riemann fait appel *au théorème de Fourier*. Ses conférences sur les équations différentielles partielles [**R3**, p. 86] indiquent qu'il le connaît sous la forme suivante :

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{i(y-x)\mu}dx\right)d\mu.$$

Pour $\varphi(x) = h(e^x)e^{-ax}$, ce théorème de Fourier entraîne que le terme à droite dans l'écriture de $g(s)$ équivaut à

$$2\pi\varphi(\log y) = 2\pi f(y)y^{-a}. \tag{5.3}$$

En multipliant (5.2) et (5.3) par iy^a on obtient enfin la formule désirée :

$$2\pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)y^s ds.$$

En particulier, *cette intégrale représente, pour une valeur de y pour laquelle a lieu une variation par saut brusque de la fonction, la valeur moyenne des valeurs de la fonction h de chaque côté du saut.*

Riemann considère que le fait que $\pi(x)$ soit défini de façon qu'elle ait cette propriété suffit pour justifier la validité du théorème d'inversion qu'il démontre, pour la fonction $f(x)$. Cela n'est pas vrai, mais puisque les sauts de $\varphi(x) = f(e^x)e^{-ax}$ sont simples, qu'elle est identiquement nulle si $x < 0$ et qu'elle décroît plus rapidement que $e^{-(a-1)x}$ à l'infini, l'inversion de Fourier reste valide.

Par conséquent,

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log\zeta(s)}{s} y^s ds.$$

Maintenant, on n'a qu'à prendre des logarithmes dans la formule

$$\pi^{-\frac{s}{2}}(s-1)\Pi(\tfrac{s}{2})\zeta(s) = \xi(t)$$

pour obtenir

$$\log\zeta(s) = \frac{s}{2}\log\pi - \log(s-1) + \log\Pi(\tfrac{s}{2}) + \log\xi(t),$$

où l'on rappelle que

$$\log\xi(t) = \sum_{\xi(\alpha)=0} \log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right) + \log\xi(0).$$

Cependant, le remplacement direct dans l'intégrale de l'expression ci-dessus mène à des intégrales qui ne convergent pas. Comme Riemman l'indique, *il sera donc convenable de transformer l'équation précédente à l'aide d'une intégration par parties.*

En effet,

$$\begin{aligned}\lim_{T\to+\infty}\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{\log\zeta(s)}{s}x^s ds = \lim_{T\to+\infty}&\left[\frac{\log\zeta(s)}{s}x^s\right]_{a-iT}^{a+iT}\\ &- \frac{1}{\log x}\lim_{T\to+\infty}\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{d}{ds}(\tfrac{\log\zeta(s)}{s})x^s ds.\end{aligned}$$

En observant que

$$|\log\zeta(s)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_p \frac{p^{-ns}}{n}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_p \frac{p^{-n\mathrm{Re}(s)}}{n} = \log\zeta(\mathrm{Re}(s)),$$

on en déduit que le numérateur de

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} x^s$$

est borné et donc que sa limite lorsque la partie imaginaire de s tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est nulle. Par conséquent,

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d}{ds} \left(\frac{\log \zeta(s)}{s} \right) x^s ds.$$

5.2. La formule principale pour $f(x)$. — En remplacent $\log \zeta(s)$ par les cinq termes calculés dans la section précédente, on obtient une nouvelle expression pour $f(x)$, que l'on peut considérer le résultat le plus important du papier de Riemann.

En ce qui concerne le premier terme, $\frac{s}{2} \log \pi$, la fonction divisée par s est une constante, donc cela ne contribue pas à la formule.

Riemann calcule le terme résultant de la constante $\log \xi(0)$

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{s^2} \log \xi(0) x^s ds = \log \xi(0)$$

à l'aide d'une technique que l'on va expliquer plus tard.

En utilisant la formule (4.3), on montre que

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \Pi(\tfrac{s}{2}) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{ds} \left(\frac{\log(1 + \frac{s}{2n})}{s} \right)$$

car l'autre terme est une constante fois s.

Afin de justifier la dérivation terme à terme, Riemann écrit :

$$-\log \Pi(\tfrac{s}{2}) = \lim_{m=\infty} \left[\sum_{n=1}^{n=m} \log(1 + \frac{s}{2n}) - \frac{s}{2} \log m \right]$$

Cette formule n'est pas tout à fait correcte parce que

$$\log(1 + \frac{1}{n}) = \log(n+1) - \log n$$

et donc la somme dévient

$$-\sum_{n=1}^{m} \frac{s}{2} \log(1 + \frac{1}{n}) = -\frac{s}{2}(\log(m+1) - \log 2).$$

Évidemment cela n'a aucune importance pour la suite car ces termes disparaissent lorsque l'on fait :

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\Pi(\tfrac{s}{2})\right) &= \lim_{m=\infty}\left[\sum_{n=1}^{m}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)\right)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Le calcul précédent permet à Riemann de conclure que tous les termes de la formule pour $f(x)$ prennent la forme

$$g(\beta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d}{ds}\left(\frac{\log(1-\frac{s}{\beta})}{s}\right)x^s ds$$

pour des choix différents de β et quite à déterminer le signe.

Par dérivation sous le signe intégrale :

$$\begin{aligned}
g'(\beta) &= -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d}{ds}\frac{d}{d\beta}\left[\frac{\log(1-\frac{s}{\beta})}{s}\right]x^s ds \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(\beta-s)\beta}\right]x^s ds.
\end{aligned}$$

En intégrant par parties et en observant que

$$\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{(\beta-s)\beta}\frac{x^s}{\log x}\right]_{a-Ti}^{a+Ti} = 0$$

par un raisonnement tout à fait analogue à celui que l'on vient de faire, la dernière égalité se transforme en :

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(\beta-s)\beta}\right]\frac{x^s}{\log x}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^s}{(\beta-s)\beta}ds.$$

Cette intégrale se calcule à l'aide de la formule d'inversion. Puisque

$$\frac{1}{(\beta-s)\beta} = \int_1^{\infty} x^{\beta}x^{-s}d(\log x),$$

on déduit immédiatement

$$g'(\beta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^s}{(\beta-s)\beta}ds = \frac{x^{\beta}}{\beta},$$

qui est égale aussi aux intégrales

$$\int_{\infty}^{0} x^{\beta-1}dx, \quad \int_{0}^{x} x^{\beta-1}dx$$

selon que la partie réelle de β soit négative ou positive.

Ensuite, Riemann considère les intégrales

$$\int_{\infty}^{x} \frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx, \quad \int_{0}^{x} \frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx,$$

où l'intégration doit être prise le long d'un contour qui évite la singularité $x = 1$ comme celui qui est montré dans la figure.

Si $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ cette intégrale est une fonction analytique, tandis que si $\mathrm{Re}(\beta)$, elle diverge pour $x = 0$. Puisque la dérivée de ces intégrales coïncide avec les précedentes, Riemann déduit que

$$g(\beta) = \int \frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx + \mathrm{const},$$

où, à nouveau, le domaine d'intégration va de $-\infty$ à x si la partie réelle de β est négative et de 0 à x autrement.

Dans le premier cas, la constante d'intégration peut être déterminée en faisant tendre la partie de réelle de β vers l'infini négatif. Dans le second cas, l'intégrale de 0 à x prend des valeurs qui diffèrent de $2\pi i$, lorsque l'intégrale relative à des valeurs complexes est prise dans le sens positif ou dans le sens négatif, et elle sera prise dans ce dernier sens, infiniment petit lorsque le coefficient de i dans la valeur de β est égale à l'infiniment grand positif ; mais ce fait aura lieu, dans le premier cas, lorsque ce coefficient est égal à l'infiniment grand négatif. Ceci nous enseigne comment le logarithme doit être déterminé dans le premier membre à faire disparaître la constante d'intégration.

Supposons $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. Ce que Riemann suggère ici, c'est que la constante d'intégration peut être calculée en fixant la partie réelle de β et faisant tendre $\mathrm{Im}(\beta)$ vers $+\infty$. Alors

$$\lim_{\mathrm{Im}(\beta)\to+\infty} \left(g(\beta) - \int_{0}^{x} \frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx \right) = \pm\pi i$$

selon le demi-cercle pour entourer la singularité en $x = 1$ soit pris dans le demi-plan inférieur ou supérieur. Mais comme les déterminations distinctes du logarithme différent par des multiples de πi, cette constante peut être éliminé avec un choix convenable du $\log(1 - \frac{s}{\beta})$.

Maintenant, déterminons la formule pour $f(x)$. Le premier terme de contribution non banale est $-\log(s-1)$, qui correspond au choix $\beta = 1$:

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d}{ds}\left(\frac{\log(s-1)}{s}\right)x^s ds = \int_0^x \frac{dt}{\log t} = \mathrm{Li}(x).$$

En ce qui concerne le terme résultant de la série

$$\sum_\alpha \log\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right),$$

Riemann indique que l'on peut, *après une discussion plus approfondie de la fonction ξ, démontrer aisément que, lorsque les termes sont rangés, celle-ci converge vers la même limite que l'expression*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\sum\log\left(1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha^2}\right)\right]x^s ds$$

lorsque la grandeur de b croît sans limites.

Comme on l'a vu, une manière équivalente d'écrire cette série est

$$\sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0}\left[\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)+\log\left(1-\frac{s}{1-\rho}\right)\right]$$

et donc la valeur du terme correspondant dans la formule de $f(x)$ sera

$$-\sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0}\left[\int_0^x\frac{t^{\rho-1}}{\log t}dt+\int_0^x\frac{t^{-\rho}}{\log t}dt\right] = -\sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0}\left[\mathrm{Li}(x^\rho)+\mathrm{Li}(x^{1-\rho})\right],$$

compte tenu de l'égalité

$$\int_0^x \frac{t^{\beta-1}}{\log t}dt = \int_0^{x^\beta}\frac{dt}{\log t} = \mathrm{Li}(x^\beta)$$

obtenue à travers le changement de variable $u = t^\beta$.

Il ne reste que le terme provenant du logarithme de $\Pi(\frac{s}{2})$, qui est une série dont chaque terme correspond à $\beta = -2n$. Si l'on suppose que la série et l'intégrale peuvent être échangés, c'est égal à

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\int_x^\infty \frac{t^{-2n-1}}{\log t}dt = -\int_x^\infty \frac{1}{t\log t}(\sum_n = 1^\infty \frac{1}{t^2 n})dt$$

car la partie réelle de $-2n$ est négatif.

La somme de la série géométrique étant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2n} = \frac{1/t^2}{1/t^2-1} = \frac{1}{1-t^2},$$

on conclut que le terme restant vaut

$$\int_x^{\infty} \frac{1}{t(t^2-1)\log t} dt.$$

En mettant tout cela ensemble, sans le montrer indépendamment, Riemann déduit l'identité

$$\begin{aligned} f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\alpha} &\left[\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + \mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}-\alpha i})\right] \\ &+ \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2-1}\frac{dt}{t\log t} + \log\xi(0), \end{aligned}$$

qui est correcte sauf pour le fait que $\log\xi(0)$ doit être remplacé par $-\log 2$, d'après la discussion sur la formule produit de ξ.

6. Vers le théorème des nombres premiers

Le but de Riemman n'était pas de déterminer la forme de la fonction $f(x)$, mais le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée, qu'il désigne par $F(x)$ et que nous avons remplacé par la notation usuelle $\pi(x)$. C'est pour cela qu'il propose d'inverser la relation

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\pi(x^{\frac{1}{n}}).$$

à l'aide de ce que l'on appelle de nos jours la formule de Möbius.

Dans une première étape, cela consiste simplement à écrire le terme

$$\frac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\pi(x^{\frac{1}{2n}}),$$

à partir duquel l'on a

$$f(x) - \frac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}}) = \pi(x) + \sum_{\text{impairs}} \frac{1}{n}\pi(x^{\frac{1}{n}}).$$

L'idée est maintenant d'éliminer tous les termes à droite sauf $\pi(x)$ par itération du même processus en remplacent 2 par un nombre premier quelconque. Par exemple, pour $p = 3$,

$$\frac{1}{3}f(x^{\frac{1}{2}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}\pi(x^{\frac{1}{3n}})$$

et cela nous permet d'effacer tous les multiples de 3.

Les seuls termes auxquels il faut faire attention dans la suite sont les multiples de 6. Puisque ils ont déjà été éliminés à l'aide du $p = 2$, on doit les ajouter à nouveau pour continuer avec le premier suivant, donc :

$$f(x) - \frac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}f(x)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{6}f(x^{\frac{1}{6}}) = \pi(x) + \sum_{m} \frac{1}{n}\pi(x^{\frac{1}{m}}),$$

où m décrit les entiers qui ne sont pas de multiples ni de 2 ni de 3.

Alors, on se convainc aussitôt que les entiers divisibles par un carré n'apparaissent pas et que le signe du reste dépend de la parité du nombre de facteurs premiers. Par conséquent,

$$\pi(x) = f(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} f(x^{\frac{1}{n}}),$$

où $\mu(n) = 0$ si n est divisible par un carré et $\mu(n) = k$ si n se décompose en k facteurs premier distincts.

Ensuite, Riemann propose de dériver la série qui représente $\pi(x)$ d'après sa formule principale. Évidemment, $\pi(x)$ étant discontinue cela n'est pas possible, au moins que l'on *se limite à un nombre fini de termes.* Vue la forme intégrale de chacun des termes, cela nous mène à

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{1}{\log x} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-1}}{\log x} - \frac{1}{x(x^2-1)\log x}.$$

On rappelle que la somme indexée par les racines $\rho = \frac{1}{2} + \alpha i$ de ζ doit inclure simultanément ρ et $1 - \rho$. L'identité

$$x^{\rho-1} + x^{-\rho} = x^{-\frac{1}{2}}(x^{\alpha i} + x^{-\alpha i}) = 2x^{-\frac{1}{2}} \cos(\alpha \log x)$$

permet alors d'exprimer la dérivée de $\pi(x)$ sous la forme

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{1}{\log x} - 2 \sum_{\mathrm{Re}(\alpha)>0} \frac{\cos(\alpha \log x)}{x^{\frac{1}{2}} \log x} - \frac{1}{x(x^2-1)\log x}$$

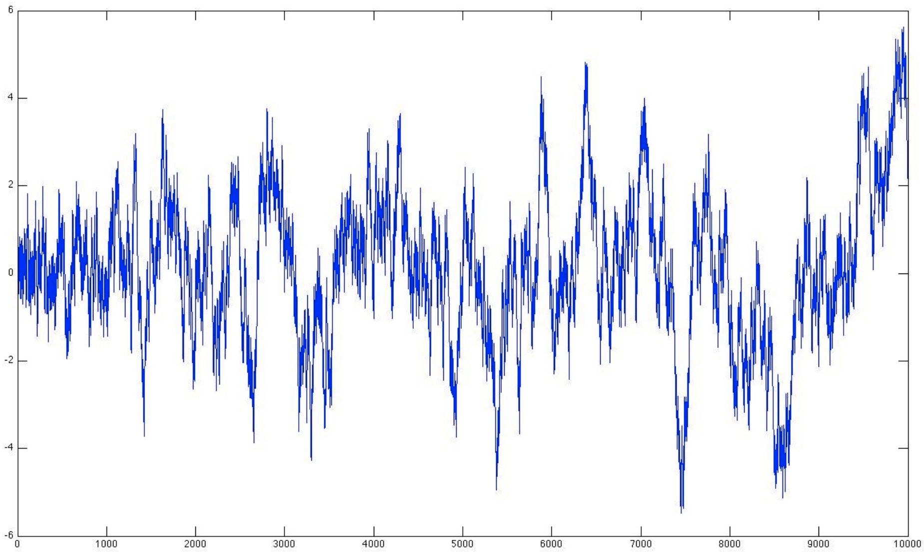

FIGURE 6. Graphe de la différence entre $\pi(x)$ et l'approximation de Riemann fait avec Matlab

et de l'approcher par les deux premiers termes, *abstraction faite d'une partie qui décroît très rapidement lorsque x croît*.

Maintenant, on peut remplacer la formule principale pour $f(x)$ dans l'identité ci-dessus. Comme Riemann le suggère, il a trois type de termes en fonction du comportement lorsque $x \to \infty$. D'abord, les termes qu'il appelle *périodiques* sont ceux qui viennent de la série

$$\sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho}).$$

Ils croissent avec x mais leur signe oscille.

Il y a aussi des termes provenant de

$$\log \xi(0) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t},$$

qui ne croissent pas indéfiniment avec x, et enfin les expressions faisant intervenir $\mathrm{Li}(x)$, qui tendent vers l'infini lorsque x tend vers l'infini. Si l'on se limite à considérer ces derniers termes, on obtient

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}(x^{\frac{1}{n}}).$$

Cette approximation est plus subtile que celle connue de Gauss

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) - \mathrm{Li}(2),$$

qui *n'est exacte qu'aux grandeurs près de l'ordre de* $x^{\frac{1}{2}}$ *et fournit une valeur un peu trop grande.*

Du reste, la comparaison, entreprise par Gauss et Goldschmidt, de $\mathrm{Li}(x)$ *avec le nombre des nombres premiers inférieurs à* x *et poursuivie jusqu'à* $x = 3$ *millions a révélé que ce nombre, à partir de la première centaine de mille, est toujours inférieur à* $\mathrm{Li}(x)$ *et que la différence des valeurs, soumises à maintes oscillations, croît néanmoins toujours avec* x*. Mais la fréquence et la réunion la plus dense par endroits des nombres premiers, si l'on peut s'exprimer ainsi, sous l'influence des termes périodiques, avaient déjà attiré l'attention, lors du dénombrement des nombres premiers, sans que l'on eût aperçu la possibilité d'établir une loi à ce sujet.*

Il serait intéressant, dans un nouveau dénombrement, d'étudier l'influence de chaque terme périodique contenu dans l'expression donnée pour la totalité des nombres premiers. Une marche plus régulière que celle donnée par $\pi(x)$ *serait obtenu à l'aide de la fonction* $f(x)$ *qui, cela se reconnaît déjà très évidemment dans la première centaine, coïncide en moyenne avec* $\mathrm{Li}(x) + \log \xi(0)$.

Bref, Riemann est capable de donner une formule analytique exacte de l'erreur de son approximation mais il n'arrive pas à contrôler la taille de la partie oscillatoire à droite

$$\pi(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}(x^{\frac{1}{n}}) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{\rho} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}(x^{\frac{\rho}{n}}) + \text{d'autres termes.}$$

7. Coda

La publication du papier de Riemann "Sur le nombre des nombres premiers inférieures à une grandeur donnée" que l'on a essayé de disséquer dans ce mémoire constitue l'un des événements les plus fondamentaux de toute l'histoire des mathématiques. Sa valeur précieuse ne se réduit pas aux résultats qu'il démontre : il faut prendre aussi en considération l'influence des assertions sous-entendues ou même indémontrées sur des lecteurs tels que Hadamard, Siegel ou André Weil, pour n'en citer que quelques uns. À l'avis de l'auteur une lecture sagace du texte pourrait encore jeter une lumière nouvelle sur l'hypothèse de Riemann ou la non moins mystérieuse distribution des zéros de la différence entre $\pi(x)$ et l'approximation de Riemann.

Références

[BBC] P. Biane, J.-B. Bost, P. Colmez, *La fonction zêta*, Les éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2003.

[Ed] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 58. Academic Press, New York-London, 1974.

[Mo] M. Monastyrsky, *Riemann, topology, and physics.* Modern Birkhäuser Classics, Boston, 1999.

[R1] G. B. Riemann, "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" en *Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge.* Teubner-Archiv zur Mathematik, Suppl. 1. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig ; Springer-Verlag, Berlin, 1990, p. 177-187.

[R2] G. B. Riemann, "Sur les nombre des nombres premiers inférieures à une grande donnée" en *Œuvres mathématiques de Riemann.* Gauthier-Villars, Paris, 1898, p. 165-176.

[R3] G. B. Riemann, *Partielle Differentialgleichungen*, Lectures edited and prepared for publication by K. Hattenford, Vieweg, Braunschweig, 1876.

[W2] A. Weil, "Prehistory of the zeta-function" en *Number theory, trace formulas and discrete groups*, Academic Press, Boston, 1989, p. 1-9.

[W2] A. Weil, "On Eisenstein's copy of the *Disquisitiones*" en *Algebraic number theory*, Adv. Stud. Pure Math., 17, Academic Press, Boston, 1989, p. 463-469.

J. Fresán, Département de Mathématiques, Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse (France)
E-mail : `fresan@math.univ-paris13.fr`