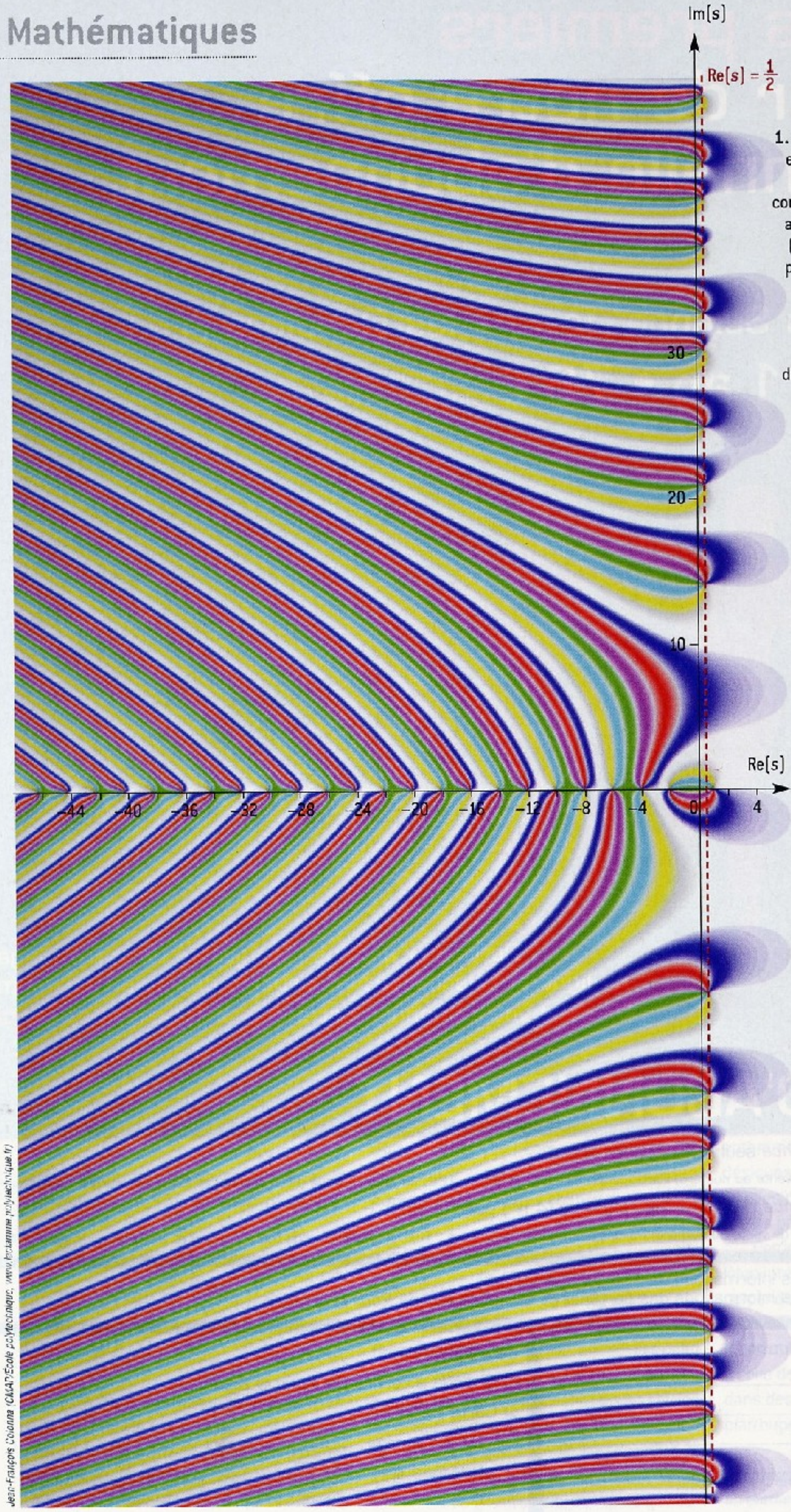


1. LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN est une fonction $\zeta(s)$ d'une variable complexe s qui prend des valeurs complexes. La conjecture de Riemann affirme que les valeurs non triviales (distinctes de −2, −4, −6, etc.) de s pour lesquelles $\zeta(s) = 0$ sont toutes de partie réelle égale à 1/2.
Les couleurs codent ici l'argument des valeurs ζ de la fonction, c'est-à-dire l'angle ϕ apparaissant dans l'écriture $\zeta = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, où $r > 0$ est le module de ζ.

Jean-François Colonna (CMAP/Ecole polytechnique, www.lactamme.polytechnique.fr)

L'ESSENTIEL

- **La fonction zêta de Riemann, initialement définie pour une variable complexe s de partie réelle supérieure à 1, peut être prolongée à tout le plan complexe, à l'exception du point $s = 1$.**
- **Les valeurs non triviales de la variable s pour lesquelles la fonction zêta s'annule apportent des informations sur la répartition des nombres premiers, entre autres.**
- **D'après la conjecture de Riemann, les zéros non triviaux se trouvent tous sur la droite verticale Re[s] = 1/2. Cette conjecture semble vraie, mais reste indémontrée.**

La « fonction zêta de Riemann » concentre en elle de nombreux résultats importants de la théorie des nombres. Mais ces résultats dépendent d'une conjecture qui, depuis 150 ans, constitue un grand défi lancé aux mathématiciens.

L'hypothèse de **Riemann**

Peter Meier et Jörn Steuding

Le mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) accomplit durant sa courte vie une multitude de prouesses. Il impressionna même le « prince des mathématiques » Carl Friedrich Gauss (1777-1855) par les nouvelles méthodes de nature topologique qu'il introduisit en analyse complexe et par la géométrie aujourd'hui nommée riemannienne en son honneur. À cela s'ajoutent des travaux remarquables de géométrie différentielle et sur les équations différentielles, au rôle si important dans les sciences de la nature, des mémoires de physique mathématique, une fondation théorique de la notion d'intégration et bien d'autres choses.

Un seul article de la plume de Riemann concerne la théorie des nombres : *Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée*. Ce texte aussi témoigne du génie de son auteur. Il contient de nombreuses conjectures qui n'ont été prouvées que plusieurs décennies plus tard. Ainsi qu'une autre que Riemann commente de façon lapidaire : « Il serait à désirer sans doute que l'on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition ; néanmoins, j'ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques rapides essais infructueux, car elle paraît superflue pour le but immédiat de mon étude. »

La démonstration que Riemann avait « laissée de côté pour le moment » continue à faire défaut. Mais ce qu'il voulait prouver est devenu célèbre sous le nom de conjecture ou hypothèse de Riemann. Lors du Congrès international des mathématiciens, à Paris, en 1900, sur la liste des 23 problèmes alors irrésolus par lesquels David Hilbert voulut montrer à ses collègues la voie vers le XX^e siècle, la preuve de l'hypothèse de Riemann figurait à la huitième place. Et un siècle plus tard, la Fondation *Clay* pour les mathématiques a proposé un prix d'un million de dollars pour cette preuve toujours manquante.

« Qui connaît la fonction zêta connaît le monde ! »

En fait, la conjecture de Riemann revêt une importance considérable en théorie des nombres. Sa démonstration donnerait un fondement plus solide à des centaines de travaux mathématiques qui supposent vraie l'assertion de Riemann.

Ces résultats concernent en particulier l'ensemble des nombres premiers. Pour mémoire, il s'agit des nombres entiers supérieurs à 1 qui ne sont divisibles (sans reste) que par 1 et par eux-mêmes : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. D'un côté, ils constituent les « atomes » indispensables du royaume des nombres : chaque entier peut être décomposé de façon unique, à l'ordre près des facteurs, en un produit de puissances de nombres premiers. De l'autre côté, ils incarnent en quelque sorte l'irrégularité, ce qui reste lorsqu'on a éliminé tout ce qui est régulier, c'est-à-dire les multiples de 2, de 3, etc., bref, les nombres composés. Précisément en raison de cette irrégularité, les nombres premiers sont très difficiles à saisir.

De nombreuses questions élémentaires sur les nombres premiers restent aujourd'hui sans réponse, ou du moins sans réponse satisfaisante. En voici trois parmi les plus saillantes :

Comment les nombres premiers sont-ils répartis parmi les nombres entiers ?

Existe-t-il une infinité de nombres premiers jumeaux, c'est-à-dire de paires de nombres premiers de la forme $(p, p+2)$ telles que 5 et 7 ou 11 et 13 ? Tout entier pair supérieur ou égal à 4 est-il la somme de deux nombres premiers ?

La dernière question est nommée conjecture de Goldbach. On sait que les exceptions à cette conjecture, si elles existent, doivent être des nombres gigantesques, mais une réponse définitive semble inaccessible par les méthodes actuelles. Il en est de même pour la conjecture des nombres premiers jumeaux.

2. **BERNHARD RIEMANN** (1826-1866) était professeur de mathématiques à l'Université de Göttingen, en Allemagne.

Quant à la première question, qui porte sur la répartition des nombres premiers, nous disposons de certains résultats. Nous les devons pour l'essentiel à une idée introduite par le savant suisse Leonhard Euler (1707-1783) : on construit un nouvel objet mathématique où chacun des nombres premiers (qui sont en nombre infini) contribue, puis on essaie de l'analyser le plus complètement possible. L'objet porte aujourd'hui le nom de fonction zêta (zêta étant la lettre grecque ζ) et est défini par :

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

Autrement dit, on prend tous les nombres entiers n élevés à la puissance s, où s est pour l'instant un nombre réel quelconque, on en prend les inverses et on additionne (comme on le verra, on peut exprimer cette fonction à partir des seuls nombres premiers). Le signe Σ (la lettre grecque sigma majuscule) est l'abréviation usuelle pour une somme.

La somme ainsi définie comporte une infinité de termes, ce qui ne donne pas toujours une valeur finie. On doit plus rigoureusement définir la somme comme une limite, et celle-ci n'existe pas toujours. Si on prend par exemple $s=1$, on obtient la série dite harmonique

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...$$

qui tend vers l'infini. Si l'on choisit $s<1$, chaque terme de la somme est plus grand que pour $s = 1$, la somme est donc *a fortiori* infinie. Mais si $s > 1$, la série prend une valeur finie, et on dit qu'elle converge.

La propriété cruciale de la fonction $\zeta(s)$ est qu'on peut l'exprimer, du moins pour $s>1$, comme un produit infini de termes correspondant chacun à un nombre premier. En effet, on a *(voir l'encadré ci-dessous)* :

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

Le pi majuscule Π symbolise le produit des termes successifs. Il porte ici sur tous les nombres premiers p, et s'appelle dans ce cas un produit eulérien.

Il est en fait possible de prolonger la fonction zêta en une fonction qui associe à tout nombre réel s une valeur unique bien déterminée. Le calcul de cette valeur dans des cas particuliers donne d'ailleurs lieu à des résultats intéressants ; par exemple, un autre exploit d'Euler est l'étonnante formule *(voir l'encadré page 26)* :

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}...=\frac{\pi^2}{6}$$

Mais ce ne sont pas ces valeurs particulières qui nous intéressent ici. Il s'agit plutôt de traduire des assertions sur les nombres premiers en propriétés de la fonction zêta, parce qu'avec cette fonction une vaste boîte à outils devient disponible. Parmi les nombreuses méthodes ainsi accessibles, figurent la dérivation et l'intégration, mais aussi et surtout l'arsenal de l'analyse complexe.

De Riemann à la fonction zêta

L'idée clef de Riemann a été de ne plus étudier $\zeta(s)$ seulement comme une fonction réelle de la variable réelle s, mais comme une fonction d'une variable complexe *(voir l'encadré page 25)*. La définition initiale de la fonction reste la même, mais la variable s peut désormais prendre des valeurs complexes. Un terme tel que n^s avec un exposant complexe sera défini comme $\exp(s \ln n)$, les fonctions exponentielle (exp) et logarithme (ln) étant définies dans le domaine complexe par des séries de puissances entières ; par exemple, on a pour tout nombre complexe z : $\exp(z) = e^z = 1 + z/1! + z^2/2! + z^3/3! + ...$

Certaines choses changent peu dans cette extension aux nombres complexes. La série d'Euler converge pour s réel supérieur à 1 ; cette condition devient maintenant que la partie réelle de s (notée Re(s)) soit supérieure à 1. Sur la droite réelle, le point 1 est la barrière qui bloque la convergence de la série ; dans le plan complexe, cette barrière est la droite de tous les nombres dont la partie réelle est 1.

D'un produit infini à une somme infinie

Chaque facteur $1/(1-1/p^s)$ dans le produit eulérien infini peut lui-même s'écrire comme une somme infinie. En effet, d'après la formule donnant la somme d'une série géométrique de raison $0<r<1$, on a :

$$1+p^{-s}+p^{-2s}+...=\frac{1}{1-p^{-s}}$$

Le produit eulérien s'écrit donc comme un produit infini de sommes infinies :

$$(1+2^{-s}+2^{-2s}+...)\cdot(1+3^{-s}+3^{-2s}+...)\cdot(1+5^{-s}+...)\cdot...$$

En développant, on obtient la somme (infinie) de tous les produits possibles obtenus en prenant un terme dans chacune des parenthèses. C'est donc la somme de tous les produits possibles de puissances de nombres premiers (on inclut 1 parmi les puissances). Mais à cause de l'unicité de la décomposition d'un nombre entier en un produit de puissances de nombres premiers, c'est aussi exactement la somme des $1/n^s$ pour tous les entiers n, et l'on retrouve la fonction zêta. Comme pour tous les calculs avec une infinité de termes, on doit s'assurer que les manipulations indiquées sont permises, ce qui est le cas ici.

Nombres complexes et fonctions complexes

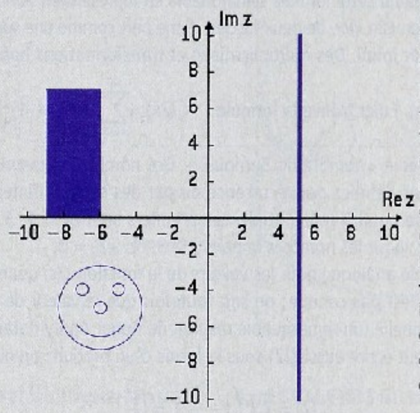
Un nombre complexe est un nombre de la forme $a + ib$, où a et b sont deux nombres réels et i un nombre imaginaire vérifiant, par définition, $i^2 = -1$. Les nombres complexes sont ainsi une extension des nombres réels – motivée, entre autres, par le désir que toute équation algébrique ait une solution.

On peut représenter les nombres complexes par des points dans le plan (on parle de plan complexe, ou de plan de Gauss-Argand). Le nombre $z = a + ib$ est ainsi représenté par le point de coordonnées (a, b), où a est la « partie réelle » de z et b sa « partie imaginaire ». Les nombres réels sont les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle.

Les opérations élémentaires, mais aussi la notion de limite, fonctionnent comme pour les nombres réels. On peut donc définir des séries de puissances entières, fonctions de la forme :

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ...$$

La valeur de f en chaque point z (complexe) est donc définie par une somme infinie. Les coefficients a_i peuvent aussi être des nombres complexes. Les fonctions de ce genre sont dites analytiques.



Dans ce plan de Gauss-Argand ont été figurés les deux points 8 + 6i et −3 + 5i, la droite de tous les nombres complexes de partie réelle 5, le domaine de tous les nombres complexes de partie réelle comprise entre −9 et −6 et de partie imaginaire comprise entre 0 et 7, ainsi que quelques cercles et arcs de cercle.

Les fonctions analytiques, qui ont de nombreuses propriétés intéressantes et fécondes, font l'objet de tout un domaine des mathématiques, l'analyse complexe. Des propriétés remarquables ou mystérieuses que présente une fonction analytique réelle apparaissent souvent sous un autre jour et bien plus clairement lorsque l'on examine la fonction complexe correspondante.

L'une des propriétés les plus intéressantes des fonctions complexes est le « prolongement analytique » : les séries de puissances entières comme ci-dessus convergent seulement dans un disque autour du point central z_0. Ce disque ne peut s'étendre que jusqu'à la première singularité rencontrée. Mais rien n'empêche d'évaluer la série autour d'un autre point. Elle a alors un nouveau disque de convergence et celui-ci peut en partie empiéter sur l'ancien. On peut ainsi étendre de proche en proche le domaine de définition d'une fonction analytique.

Peter Maier

Mais les nombres complexes offrent aussi la possibilité de regarder la fonction définie par la série d'Euler sous un autre angle. Le procédé, nommé « prolongement analytique », est d'usage fréquent en analyse complexe. À l'instar d'Euler avec sa représentation de la série sous forme d'un produit, Riemann trouva une autre expression de la fonction zêta qui fournit les mêmes valeurs là où cette fonction était définie auparavant, mais qui de plus attribue des valeurs finies pour toutes les autres valeurs complexes de s – à l'exception de $s = 1$.

La valeur $s = 1$ est pour la fonction zêta ce que le mathématicien nomme une singularité. La fonction prend ici inévitablement une valeur infinie. Lorsqu'on se restreint à la droite réelle, la singularité constitue une barrière infranchissable ; mais dans le plan, on peut simplement la contourner.

Pour mieux appréhender la fonction zêta, Riemann appela à la rescousse une autre fonction, initialement définie elle aussi sur une partie du plan complexe et qui peut également être étendue à presque tout le plan par prolongement analytique : la fonction Gamma (Γ). Celle-ci généralise la fonction factorielle, c'est-à-dire que pour tout entier positif n, elle vérifie :

$$\Gamma(n) = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1.$$

Pour tous les nombres complexes distincts de 0, −1, −2, −3, etc., la fonction Gamma prend des valeurs finies. Grâce aux techniques de la théorie des fonctions, Riemann obtint la relation suivante entre les fonctions zêta et Gamma :

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma(\tfrac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\,\Gamma(\tfrac{1-s}{2})\zeta(1-s)$$

Une telle équation, qui relie les valeurs de fonctions en différents points, est qualifiée de fonctionnelle. L'équation fonctionnelle ci-dessus a une propriété particulière : elle est invariante si on y remplace s par $1 - s$ et réciproquement. Autrement dit, elle est symétrique par rapport au point $s = 1/2$. Comme, en outre, les fonctions concernées restent inchangées lors d'une réflexion par rapport à l'axe réel (à une « conjugaison complexe » près, c'est-à-dire au changement de i en $-i$ près), on a une symétrie par rapport à la droite des nombres complexes de partie réelle égale à 1/2. On nomme droite critique cet axe de symétrie.

La symétrie mentionnée a d'intéressantes conséquences. Là où la partie réelle de s est supérieure à 1, on connaît directement la fonction zêta, comme expliqué plus haut. On sait ainsi que $\zeta(s)$ n'a là aucun « zéro », c'est-à-dire aucune valeur de s pour laquelle la fonction s'annule, car

LES AUTEURS

Peter MEIER et Jörn STEUDING sont respectivement assistant et professeur à l'Institut de mathématiques de l'Université de Würzburg, en Allemagne. Leurs travaux portent sur la fonction zêta de Riemann et des fonctions apparentées, qui jouent un rôle en théorie des nombres.

$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + ... = \pi^2/6$

Leonhard Euler a obtenu cette formule remarquable en représentant non pas la fonction zêta $\zeta(s)$, mais la fonction $(\sin x)/x$, de deux façons, d'une part comme une somme infinie, d'autre part comme un produit infini. Des multiplications et transformations habiles le conduisirent ensuite au résultat.

Plus généralement, Euler trouva la formule : $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}$

Le nombre B_j est le j-ème « nombre de Bernoulli ». Ces nombres peuvent être introduits par exemple par des suites définies par récurrence ou par des séries infinies (voir http://mathworld.wolfram.com/BernoulliNumber.html). Les premiers sont $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$; pour les nombres impairs $j \geqslant 3$, on a $B_j = 0$.

Une formule simple analogue pour les valeurs de la fonction $\zeta(s)$ quand la variable est un entier positif impair n'est pas connue ; on sait toutefois que la valeur de la fonction zêta au point $s = 3$ est irrationnelle (un remarquable résultat de Roger Apéry datant de 1978).

Par ailleurs, on peut écrire aussi $\zeta(2)$ sous la forme d'un produit ; on obtient :

$$\zeta(2) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \frac{\pi^2}{6}$$

Comme π^2 est irrationnel, le nombre de facteurs dans le produit ne peut être fini (sinon, le résultat serait rationnel). C'est l'une des nombreuses preuves de l'infinité des nombres premiers.

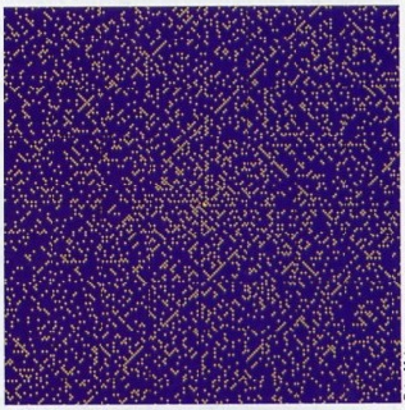
aucun des facteurs du produit eulérien n'est égal à zéro. Grâce à l'équation fonctionnelle, on peut transposer cette connaissance sur le côté gauche du plan complexe.

Prenons un exemple. Le facteur $\Gamma(s/2)$, qui apparaît dans le membre de gauche de l'équation fonctionnelle, prend aux points $s = 0, -2, -4$, etc. une valeur infinie. Mais si l'on choisit pour s l'une de ces valeurs ($s = -2n$ pour un entier naturel n), le membre de droite de l'équation fonctionnelle donne une expression finie et non nulle. Comment est-ce possible ? La seule possibilité est que $\zeta(s)$ s'annule en ces points, puisque tous les autres facteurs de l'équation fonctionnelle sont non nuls. Ainsi, on en déduit que $\zeta(s) = 0$ pour $s = -2, -4, -6$, etc. Ces valeurs de s sont les « zéros triviaux » de la fonction zêta. Ce sont les seuls zéros dont la partie réelle est négative. Le point $s = 0$ n'est en revanche pas un zéro, car $\zeta(1-s)$ donne la singularité $\zeta(1)$.

Pour tous les s de partie réelle supérieure à 1, il n'existe, comme le montre la représentation en produit eulérien, aucun autre zéro. C'est donc seulement dans la bande étroite des nombres complexes de partie réelle comprise entre 0 et 1, la « bande critique », que peuvent se trouver d'autres zéros. C'est sur ces zéros « non triviaux » que porte la fameuse hypothèse de Riemann.

Riemann a conjecturé qu'il existe une infinité de zéros non triviaux de la fonction zêta. À propos de leur localisation, il a formulé deux assertions précises. L'une

101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121



Peter Meier

3. LA SPIRALE DES NOMBRES PREMIERS, construite par le mathématicien d'origine polonaise Stanislaw Ulam (1909-1984). Les entiers naturels *(les 121 premiers en haut, les 10 000 premiers en bas)* sont disposés le long d'une spirale carrée, les nombres premiers étant marqués en jaune. Malgré la grande irrégularité, on reconnaît certaines structures, telle la ligne bleue des carrés impairs qui part du centre vers le coin en bas à droite.

concerne leur répartition verticale : le nombre $N(T)$ de zéros dont la partie imaginaire (c'est-à-dire la hauteur au-dessus de l'axe réel) est comprise entre 0 et une valeur T est :

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{T}{2\pi}\right) - 1\right) + \text{terme d'erreur}\,(T)$$

où le terme d'erreur est petit par rapport à T lorsque T est suffisamment grand. Bien que Riemann ait lui-même donné une idée de la preuve, l'assertion ne fut démontrée complètement que 30 ans plus tard, en 1893, par Hans von Mangoldt. Ce dernier montra aussi que le terme correctif était au plus de l'ordre de $\ln T$.

Quant à la seconde assertion, elle concerne la répartition des zéros horizontalement. Riemann affirma que les zéros non triviaux ne peuvent se trouver qu'au milieu de la bande critique, c'est-à-dire sur la droite critique ; autrement dit, les zéros non triviaux ont pour partie réelle 1/2. C'est cette assertion qui constitue la conjecture de Riemann.

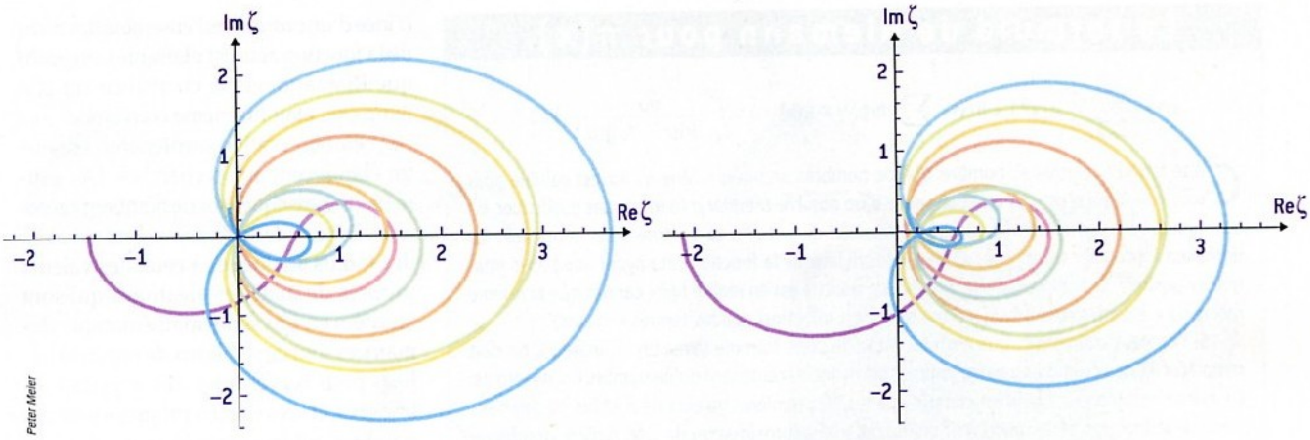
De la fonction zêta aux nombres premiers

Pourquoi s'intéresse-t-on autant aux zéros de la fonction zêta ? Parce qu'ils fournissent des informations sur la répartition des nombres premiers. Il s'agit plus précisément d'une formule évaluant le nombre $\pi(x)$ de tous les nombres premiers inférieurs à x. Gauss avait déjà conjecturé que $\pi(x) \simeq x/\ln x$, formule qu'il avait plus tard raffinée en $\pi(x) \simeq \mathrm{li}(x)$, où $\mathrm{li}(x)$ est le « logarithme intégral », défini par $\mathrm{li}(x) = \int_0^x du/\ln u$. Le signe $\simeq$ signifie ici « à un terme correctif près, qui est petit par rapport à $\mathrm{li}(x)$ pour x assez grand ». Plus petit est ce terme correctif, meilleure est la précision de la formule.

Or Riemann a réussi à améliorer la prédiction de Gauss quant à $\pi(x)$. Le cœur de son idée est une deuxième représentation en produit, elle-même issue de la théorie des polynômes, c'est-à-dire des fonctions de la forme :

$$f(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + ... + a_n s^n$$

Un polynôme à coefficients a_i complexes et de degré n (n étant la plus haute puissance dont le coefficient correspondant n'est pas nul) a exactement n zéros, ou « racines », complexes – c'est



4. LES VALEURS DE LA FONCTION ZÊTA $\zeta(s)$ sont ici représentées pour $s = 1/2 + it$ *(à gauche)* et $s = 5/8 + it$ *(à droite)*, dans le domaine $0 \leq t \leq 50$. Quand la partie réelle de s est égale à 1/2, la courbe traverse plusieurs fois le point $\zeta = 0$; ce sont les zéros de la fonction zêta. En dehors de la droite critique $\mathrm{Re}(s) = 1/2$, de tels passages par le point $\zeta = 0$ ne se produisent pas dans ce domaine – conformément à l'hypothèse de Riemann.

le théorème fondamental de l'algèbre. Et si 0 n'est pas lui-même une racine du polynôme, on peut écrire ce dernier sous la forme $a(1 - s/s_1)(1 - s/s_2)...(1 - s/s_n)$, où les s_i sont les racines et a une constante appropriée.

La fonction zêta n'est bien sûr pas un polynôme. Mais Riemann parvint à l'écrire elle aussi comme un produit de facteurs de la forme $(1-s/\rho)$, où ρ parcourt les zéros non triviaux, avec quelques ingrédients supplémentaires :

$$\frac{s-1}{2}\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \exp(A+Bs)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\exp\left(\frac{s}{\rho}\right)$$

où A et B sont des constantes. Dans le membre de gauche, on trouve au lieu de $\zeta(s)$ la demi-équation fonctionnelle : celle-ci est multipliée par $(s - 1)$, pour éliminer la singularité au point $s = 1$.

Riemann a certes pu obtenir cette formule, mais pas la prouver. C'est seulement en 1893 que le mathématicien français Jacques Hadamard y parvint, et ses résultats généraux sur ce sujet constituent maintenant une partie importante de l'analyse complexe.

Riemann disposait ainsi de deux représentations différentes de la même fonction par un produit : le produit eulérien et la formule ci-dessus. En les comparant, il obtint une formule explicite pour la fonction des nombres premiers $\pi(x)$ *(voir l'encadré page 28)*. Mais cette formule aussi dut attendre des décennies avant d'être démontrée, par von Mangoldt en 1895.

Les idées et les conjectures de Riemann stimulèrent les recherches dans cette direction et fécondèrent le domaine en plein essor de la théorie des fonctions complexes. Ces efforts furent enfin couronnés de succès avec la preuve en 1896 de la conjecture de Gauss, nommée aujourd'hui « théorème des nombres premiers », par Hadamard et Charles de La Vallée-Poussin, simultanément mais indépendamment.

Pour cette preuve, on doit s'assurer que la fonction zêta n'a pas de zéros dans une partie suffisamment grande de la bande critique. Helge von Koch démontra en 1900 la propriété suivante. Plaçons

La fonction Gamma

On définit d'abord pour tous les nombres complexes s de partie réelle positive la fonction $\Gamma(s)$ par l'intégrale :

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty u^{s-1}\exp(-u)du$$

Des théorèmes classiques du calcul intégral donnent :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \exp(-u)du = 1$$

et, par intégration par parties, l'équation fonctionnelle $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$ pour tout s de partie réelle positive. On obtient ainsi $\Gamma(2) = 1 \times \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2 \times \Gamma(2) = 2$ et, en général, $\Gamma(n + 1) = n \times \Gamma(n) = n!$ pour tout entier positif n.

L'équation fonctionnelle s'écrit aussi $\Gamma(s) = \Gamma(s + 1)/s$. On peut en déduire une valeur de la fonction Gamma pour les nombres de partie réelle comprise entre −1 et 0 à partir des valeurs connues, et donc lui donner un sens. Pour le point $s = 0$, on devrait diviser par 0 et donc la fonction Gamma n'est pas définie en 0. Le procédé peut être étendu et l'on parvient à définir la fonction Gamma pour tous les nombres complexes s à l'exception des entiers négatifs. En ces entiers, la fonction Gamma a des singularités, elle prend une valeur infinie.

✔ BIBLIOGRAPHIE

P. Borwein, The Riemann Hypothesis : a Ressource for the Afficionado and Virtuoso Alike, Springer, 2008.

G. Tenenbaum, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres (3[e] édition), Belin, 2008.

J. Steuding, Value Distribution of L-functions, Springer, 2007.

J. B. Conrey, The Riemann Hypothesis, *Notices of the AMS*, vol. 50, p. 341-353, 2003.

S. J. Patterson, An Introduction to the Theory of the Riemann zeta-Function, Cambridge University Press, 1998.

G. Tenenbaum et M. Mendès-France, Les nombres premiers, PUF (collection « Que sais-je? »), 1997.

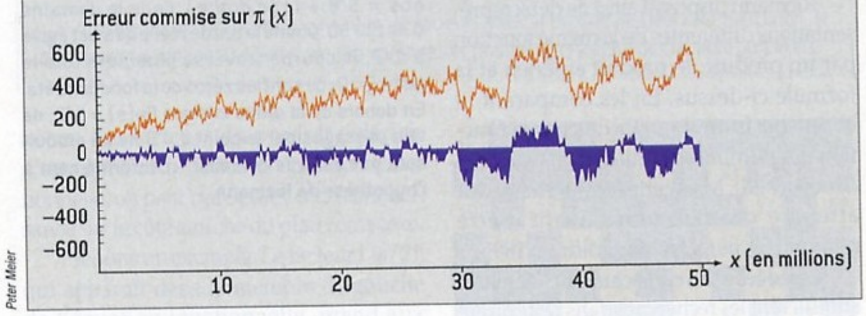
B. Riemann, Œuvres mathématiques, trad. L. Laugel, Gauthier-Villars, 1898. En ligne : http://name.umdl.umich.edu/AAN8469.0001.001

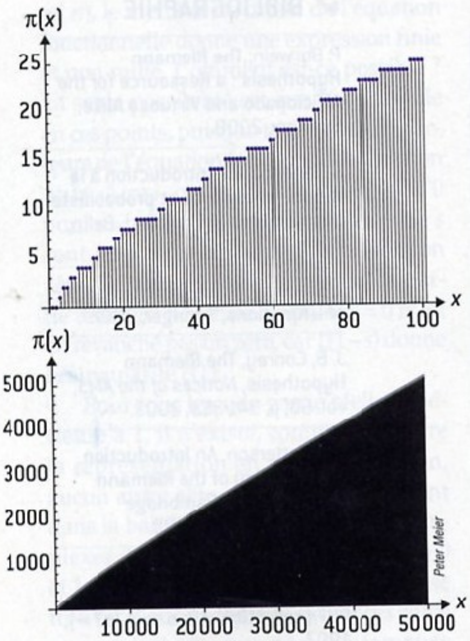
La formule de Riemann pour $\pi(x)$

$$\pi(x)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\,\pi(x^{\frac{1}{n}}) = \mathrm{li}(x) - \sum_{\rho}\left(\mathrm{li}(x^{\rho})+\mathrm{li}(x^{1-\rho})\right) + \int_x^{\infty}\frac{du}{u(u^2-1)\ln u} - \ln 2$$

Cette formule relative au nombre $\pi(x)$ de nombres premiers inférieurs à x est valable pour tout $x \geqslant 2$ qui n'est pas une puissance d'un nombre premier p (dans ce cas particulier, on doit ajouter à gauche $1/(2k)$ pour la contribution de $x = p^k$). La somme dans le membre de droite est à effectuer sur tous les zéros ρ non triviaux de la fonction zêta ayant une partie imaginaire positive. La somme dans le membre de gauche est en réalité finie, car dès que la n-ième racine de x est inférieure à 2, le n-ième terme est nul (ainsi que les termes suivants).

Si l'on veut vraiment calculer $\pi(x)$ à l'aide de cette formule (avec un ordinateur), on doit remplacer les deux sommes par des sommes partielles ne contenant qu'un nombre fini de termes. Or même lorsqu'on ne prend en compte que les 10 premières valeurs de n et les 30 premiers zéros de la fonction zêta, on obtient une excellente approximation de $\pi(x)$ *(voir le graphique ci-dessous)*. L'écart entre cette approximation et la valeur exacte *(en bleu)* est à peine supérieur à 200, même autour de x = 50 millions. En revanche, l'approximation donnée par la formule de Gauss devient de plus en plus mauvaise à mesure que x augmente *(en rouge)*.





5. LA FONCTION $\pi(x)$ compte le nombre de nombres premiers inférieurs à x. Lorsqu'un nombre premier apparaît, la fonction augmente de 1, sinon elle reste constante *(en haut)*. À grande échelle, $\pi(x)$ apparaît étonnamment régulière *(en bas)*.

dans la bande critique une droite verticale qui coupe l'axe réel en une valeur α comprise entre 1/2 et 1. Si la fonction zêta n'a pas de zéros à droite de cette ligne, alors le terme correctif dans le théorème des nombres premiers est de l'ordre de grandeur de x^{α} et réciproquement (pour être exact : l'exposant dans le terme correctif n'est pas α, mais un nombre un peu supérieur, aussi peu que l'on veut).

Il s'ensuit en particulier que le terme d'erreur ne peut être inférieur en ordre de grandeur à $x^{1/2}$, puisque $\zeta(s)$ a des zéros sur la droite critique. Si la conjecture de Riemann est vraie, le terme d'erreur est minimal et il s'ensuit que les nombres premiers sont répartis aussi régulièrement que possible.

L'importance de l'hypothèse de Riemann pour les mathématiques peut difficilement être surestimée. Des centaines d'articles portent sur ses conséquences et des résultats significatifs ont été obtenus en la supposant vraie. Il existe ainsi des méthodes cryptographiques importantes en pratique dont la sécurité dépend de la validité de la conjecture de Riemann.

La plupart des mathématiciens pensent que l'hypothèse de Riemann est vraie, notamment pour des raisons esthétiques (l'idée d'un ordre dans l'ensemble des zéros de la fonction zêta est plaisante), ou parce que Riemann, génie en avance sur son temps, en était lui-même convaincu.

Une observation surprenante a donné un élan récent aux recherches. Des estimations statistiques sur de nombreux zéros non triviaux de la fonction zêta révèlent des motifs analogues à ceux des valeurs propres de matrices aléatoires qui sont étudiées en physique mathématique (les matrices sont des tableaux de nombres utilisés pour représenter des applications linéaires, et les « valeurs propres » sont des nombres qui les caractérisent).

Ces constatations rejoignent certaines idées de Hilbert et du mathématicien d'origine hongroise George Pólya, émises dans les années 1930. Des idées qui ont déjà porté beaucoup de fruits : le Norvégien Atle Selberg a ainsi trouvé vers 1950 des « formules de traces » qui présentent une grande ressemblance avec la formule de Riemann pour la fonction $\pi(x)$ et qui permettent de prouver un analogue de la conjecture de Riemann pour une autre sorte de fonctions zêta. Mais en ce qui concerne l'hypothèse de Riemann elle-même, ce type de tentatives n'avait jusqu'à présent fourni aucun résultat.

Des tentatives de preuve issues de la physique

Depuis 2000, sur la base d'une idée de Jon Keating et Nina Snaith, de l'Université de Bristol, on utilise des matrices aléatoires pour modéliser la fonction zêta sur la droite critique. En se fondant sur l'analogie entre ces objets complètement différents, les mathématiciens formulent des conjectures qui, espère-t-on, fourniront d'autres pistes pour apporter une réponse définitive à la conjecture de Riemann.

Une autre tentative un peu plus facile à saisir fait appel à une étonnante propriété d'approximation de la fonction zêta. En 1975, le mathématicien russe Serguei Voronin prouva que la fonction zêta peut approcher aussi précisément qu'on le veut n'importe quelle fonction (suffisamment régulière) sur un petit domaine. C'est le célèbre « théorème d'universalité de Voronin ». Explicitons un peu ce résultat spectaculaire. Soit une fonction $f(s)$ définie sur un petit disque K, situé n'importe où dans la moitié droite de la bande critique. Supposons que f n'ait aucun zéro dans K et qu'elle y soit analytique (développable en série de puissances entières). Alors pour tout $\epsilon > 0$, aussi petit soit-il, il existe un nombre réel $t > 0$ tel que la différence entre $\zeta(s + it)$ et $f(s)$ soit inférieure à ϵ en valeur absolue, et ce pour tout s de K. En d'autres termes, on peut trouver t tel que $\zeta(s + it)$ soit aussi proche que l'on veut de $f(s)$.

On montre même qu'il existe une infinité de nombres t vérifiant cette approximation pour une fonction f et un nombre ϵ donnés. En quelque sorte, la fonction zêta contient donc dans ses valeurs des informations sur toutes ces fonctions f. Un peu comme s'il s'agissait d'un atlas contenant toutes les cartes possibles... C'est pourquoi on résume le théorème d'universalité de Voronin en disant : « Qui connaît la fonction zêta connaît le monde. »

Cette propriété d'universalité fournit en retour des renseignements sur la fonction zêta elle-même. Si en effet la conjecture de Riemann est correcte, c'est-à-dire que tous les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ se trouvent sur la droite critique, on peut appliquer le théorème d'universalité à $\zeta(s)$ et il en résulte que la fonction zêta s'approxime elle-même – on en déduit qu'elle est autosimilaire, comme le sont les fractales (figures géométriques qui, quel que soit le grossissement choisi, gardent le même aspect). Réciproquement, si on prouvait que la fonction zêta est autosimilaire, la validité de la conjecture de Riemann en découlerait.

PLUS DE 100 MILLIARDS DE ZÉROS de la fonction zêta ont été calculés et corroborent l'hypothèse de Riemann. Mais ces vérifications numériques ne constituent pas une preuve.

Le mathématicien danois Harald Bohr (frère du physicien Niels Bohr) est à l'origine de cette observation, dans les années 1920. Mais, faute du théorème d'universalité, il n'avait pu en donner une preuve. Celle-ci a été fournie par le mathématicien indien Bhaskar Bagchi au début des années 1980.

Beaucoup d'autres reformulations de la conjecture de Riemann sont aujourd'hui connues, mais une preuve semble pourtant toujours aussi éloignée. Bien sûr, si la conjecture était fausse, il suffirait de trouver un seul contre-exemple. Les mathématiciens cherchent aussi dans cette direction. Andrew Odlyzko, à l'Université du Minnesota, Herman te Riele, au Centre de recherche en informatique d'Amsterdam, et d'autres ont calculé jusqu'à présent plus de 100 milliards de zéros de la fonction zêta : ils se trouvent tous sur la droite critique Re $(s) = 1/2$.

Mais ces vérifications numériques ne constituent pas une preuve de l'hypothèse de Riemann. Face à l'infinité des nombres, ce à quoi le raisonnement humain et l'ordinateur peuvent accéder n'est qu'une minuscule goutte dans l'immensité de l'océan. ■