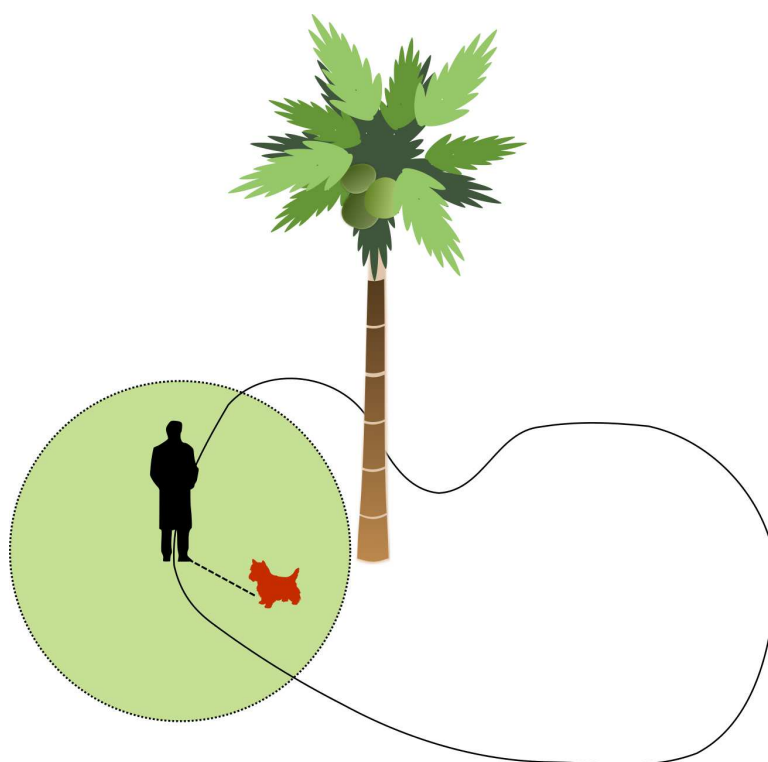


Fonctions holomorphes



M308 – L3 MFA

Université Paris-Sud

D. Hulin 2013–14

Bibliographie

Il y a abondance de belles références d'analyse complexe. On peut citer entre autres les textes introductifs suivants :

Lang *Complex analysis*

Remmert *Theory of complex functions*

Freitag Busam *Complex analysis*

Cartan *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*

Conway *Functions of one complex variables I*

Rudin *Real and complex analysis*

(ou sa traduction française *Analyse réelle et complexe*)

ainsi que

Needham *Visual complex analysis*

pour aborder l'analyse complexe élémentaire par son aspect le plus géométrique.

Complétons cette bibliographie succincte par quelques ouvrages (bien) plus avancés pour

approfondir l'étude des fonctions d'une variable complexe :

Conway *Functions of one complex variables II*

Remmert *Classical topics in complex functions theory*

Segal *Nine introductions in complex analysis*

apercevoir quelques uns des prolongements de cette théorie

Reyssat *Quelques aspects des surfaces de Riemann*

Jarnicki Pflug *Invariant distances and metrics in complex analysis*

Ahlfors *Lectures on quasiconformal mappings*

ou encore s'aventurer dans le domaine des fonctions de plusieurs variables complexes

Range *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables*

Hörmander *An introduction to complex analysis in several complex variables*

Table des matières

1	Fonctions holomorphes, fonctions analytiques	6
A	Fonctions holomorphes	6
B	Séries entières	8
C	Fonctions analytiques	10
D	Fonctions holomorphes, fonctions analytiques	11
2	Exponentielle complexe ; logarithmes	13
A	La fonction exponentielle	13
B	Logarithme(s)	16
C	Déterminations du logarithme	18
C.1	La détermination principale du logarithme	18
C.2	Autres déterminations du logarithme	19
D	Racines k -ièmes d'un nombre complexe	20
E	Fonctions trigonométriques et hyperboliques	20
F	Vers la fonction \wp de Weierstrass	22
3	Théorème de Cauchy dans un convexe	23
A	Primitives	23
B	Intégrale d'une fonction sur un chemin	24
C	Critère pour l'existence locale de primitives	27
D	Critère pour l'existence globale de primitives	28
E	Théorème de Cauchy dans un convexe	29
F	Logarithmes et racines d'une fonction holomorphe sur un convexe . .	31
G	Intégrer une fonction doublement périodique	32
4	Formule de Cauchy dans un convexe	33
A	Indice d'un lacet par rapport à un point	33
B	Formule de Cauchy dans un convexe	35
C	Analyticité des fonctions holomorphes	38
D	Quelques premières conséquences	40
D.1	Anneau des fonctions analytiques	40
D.2	Régularité des fonctions holomorphes	40
D.3	Suites de fonctions holomorphes	42
D.4	Holomorphie sous le signe intégrale	42
E	Définir la fonction de Weierstrass	44

5 Applications de la formule de Cauchy	45
A Formule de Cauchy pour les dérivées	45
B Estimées de Cauchy	46
C Le principe du maximum	47
D Le théorème de Liouville	48
E Estimées de Cauchy uniformes	49
F <i>Dériver la fonction de Weierstrass</i>	51
6 Zéros d'une fonction holomorphe	52
A Petits rappels de topologie	52
B Zéros d'une fonction holomorphe	52
C Compter les zéros d'une fonction holomorphe	55
D Etude locale d'une fonction holomorphe	58
7 Singularités isolées d'une fonction holomorphe	61
A Classification des singularités	61
B Fonctions méromorphes	64
C Groupes d'automorphismes	66
C.1 Groupe des automorphismes de \mathbb{C}	66
C.2 Groupe des automorphismes du disque	67
D <i>Ordre d'une fonction elliptique</i>	70
8 Théorème et formule de Cauchy homologiques	72
A Lacets homologues	72
B Théorème et formule de Cauchy	73
C Espaces simplement connexes	77
9 Séries de Laurent	81
A Fonctions holomorphes sur un anneau	81
B Développement en série de Laurent	82
C Théorème des résidus	85
D <i>Ordre d'une fonction elliptique, suite</i>	88
10 Produits infinis	89
A Prescrire les zéros d'une fonction holomorphe	89
B Produits infinis	90
C Un exemple : factorisation de la fonction sinus	92
D Fonction holomorphe avec zéros prescrits	94
11 La sphère de Riemann	97
A Ajouter un point à \mathbb{C}	97
B La sphère de Riemann	99
12 Le théorème de l'application conforme de Riemann	102
A Retour sur l'uniformisation	102
B Familles normales	104
C Preuve du théorème de l'application conforme	106

Le paragraphe 8.C (espaces simplement connexes), ainsi que les chapitres 11 (sphère de Riemann) et 12 (théorème de l'application conforme de Riemann) ne figurent pas au programme de l'examen.

1. Fonctions holomorphes, fonctions analytiques

Où l'on présente les protagonistes : fonctions holomorphes et fonctions analytiques. On s'apercevra bientôt que ce sont deux avatars d'un même personnage.

A Fonctions holomorphes

Dans tout le cours, $U \subset \mathbb{C}$ désignera un ouvert de \mathbb{C} .

Définition 1.1 Soit $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est \mathbb{C} -dérivable en $z_0 \in U$ lorsqu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \alpha$$

On note alors $f'(z_0) = \alpha$: c'est la dérivée (au sens complexe) de f en z_0 .

L'accroissement h prend bien sûr des valeurs complexes. De façon équivalente, on demande que

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + o(h). \quad (*)$$

L'application $h \in \mathbb{C} \rightarrow \alpha h \in \mathbb{C}$ est \mathbb{C} -linéaire. Notons que \mathbb{C} est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2, et que *a fortiori* $h \in \mathbb{C} \rightarrow \alpha h \in \mathbb{C}$ est \mathbb{R} -linéaire. La condition $(*)$ exprime donc que l'application $f : U \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ est \mathbb{R} -différentiable en z_0 , de différentielle

$$D_{z_0} f : h \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \rightarrow \alpha h \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2.$$

Soyons plus précis. L'application

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x + iy \in \mathbb{C}$$

identifie \mathbb{R}^2 , que l'on munira de sa structure euclidienne canonique, avec \mathbb{C} .

A travers cette identification, notre application

$$f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

se lit

$$\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2,$$

où

$$\tilde{f}(x, y) = f(x + iy).$$

Notation 1.2 On notera f' la dérivée complexe de f , $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ les dérivées partielles de \tilde{f} .

Proposition 1.3 Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est \mathbb{C} -dérivable en z_0
2. \tilde{f} est \mathbb{R} -différentiable en z_0 et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$; on a alors $f'(z_0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(z_0)$
3. \tilde{f} est \mathbb{R} -différentiable en z_0 et sa matrice jacobienne s'écrit $J_{z_0} \tilde{f} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; on a alors $f'(z_0) = a + ib$
4. \tilde{f} est \mathbb{R} -différentiable en z_0 et sa différentielle $D_{z_0} \tilde{f} \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est nulle, ou est une similitude directe

En 2, on pense $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ et en 3 ou 4 on pense $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Preuve On a vu que f est \mathbb{C} -dérivable en z_0 ssi \tilde{f} est \mathbb{R} -différentiable en z_0 et si il existe $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que, pour $h = x + iy$, on ait

$$D_{z_0} \tilde{f} \cdot (x + iy) = (a + ib)(x + iy) = (a + ib)x + i(a + ib)y = (ax - by) + i(bx + ay)$$

Remarque 1.4 Un élément de $GL(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est une similitude directe ssi il est produit d'une rotation et d'une homothétie de rapport non nul ssi il conserve les angles et l'orientation.

Il suit que l'image par f , \mathbb{C} -dérivable en z_0 avec $f'(z_0) \neq 0$, de deux courbes régulières se coupant à angle droit en z_0 seront deux courbes se coupant à angle droit en $f(z_0)$: on dit que f est conforme.

On obtient comme conséquence immédiate.

Corollaire 1.5 Equations de Cauchy-Riemann

Soit $f = P + iQ : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Alors f est \mathbb{C} -dérivable en z_0 si et seulement si P et Q (parties réelle et imaginaire de f) sont \mathbb{R} -différentiables en z_0 avec, en ce point :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Définition 1.6 Une fonction $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe si elle est \mathbb{C} -dérivable en chaque point de U .

Proposition 1.7 — L'ensemble $\mathcal{H}(U)$ des fonctions holomorphes sur U constitue une algèbre : stable par addition, multiplication et multiplication par un scalaire, fonction constante égale à 1

- Si $f \in \mathcal{H}(U)$ et ne s'y annule pas, $1/f \in \mathcal{H}(U)$
- Si $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ sont holomorphes, la composée $g \circ f$ est holomorphe

Preuve Immédiate, avec les règles “usuelles” pour calculer les dérivées. \square

Exemple 1.8 – Les fonctions $z \rightarrow \bar{z}$ et $z \rightarrow \operatorname{Re} z$ ne sont pas holomorphes

- Une fonction polynomiale $P(z) = \sum_0^k a_n z^n$ est holomorphe

Par contre une fonction $x + iy \in \mathbb{C} \rightarrow P(x, y) \in \mathbb{C}$ pour $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ ne sera en général pas holomorphe

- La fonction $z \rightarrow 1/z$ est holomorphe sur \mathbb{C}^* ; les fractions rationnelles $P(z)/Q(z)$ sont holomorphes en dehors des zéros de Q

Proposition 1.9 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Une fonction holomorphe $f \in \mathcal{H}(U)$ est constante si et seulement si $f' = 0$.

Preuve \Rightarrow Immédiat.

\Leftarrow Suit du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction de variable réelle \tilde{f} , qui est de différentielle nulle. \square

On va passer à une famille d'exemples fondamentaux qui englobe les polynômes.

B Séries entières

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, et la “série entière” (formelle) associée $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$.

Définition 1.10 Le rayon de convergence de la série entière est

$$R := \sup\{r \geq 0 \mid |a_n| r^n \text{ est borné}\}.$$

Il se peut que $R = 0$; prendre $a_n = n^n$.

Rappel 1.11 — On a $1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$

- pour $0 \leq r < R$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $\overline{D}(0, r)$
- pour $|z| > R$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ ne converge pas.

Définition 1.12 Le disque ouvert $D(0, R)$ est appelé disque de convergence de la série entière.

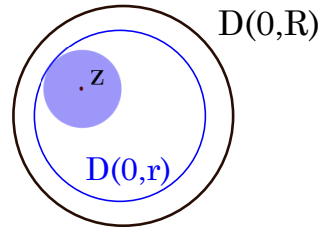
Proposition 1.13 Supposons $R > 0$. On définit $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ pour $|z| < R$.

1. Le rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n z^{n-1}$ est égal à R .
2. La fonction f est holomorphe sur $D(0, R)$, et on a pour $|z| < R$:

$$f'(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n z^{n-1}.$$

Preuve L'assertion sur le rayon de convergence découle de la proposition précédente.

Soit $z \in D(0, R)$: on va montrer que f est \mathbb{C} -dérivable en z . Comme on ne veut pas trop s'approcher du bord du disque de convergence (danger !), on choisit r tel que $|z| < r < R$. Pour $h \in \mathbb{C}$ tel que $|z| + |h| < r$, on aura donc :



$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_0^\infty n a_n z^{n-1} &= \sum_1^\infty a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right) \\ &= \sum_2^\infty a_n v_n(h). \end{aligned}$$

A n fixé, $v_n(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$. Il faut voir que la somme de la série tend vers 0. Pour cela, on cherche à majorer $v_n(h)$. Or l'identité

$$X^n - Y^n = (X - Y)(X^{n-1} + \dots + Y^{n-1})$$

montre que

$$v_n(h) = (z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \dots + z^{n-1} - n z^{n-1}.$$

On a donc, uniformément en h tel que $|z| + |h| < r$, $|a_n v_n(h)| \leq 2n a_n r^{n-1}$: majoration par le terme général d'une série convergente. Le résultat suit. \square

Corollaire 1.14 La fonction f admet des dérivées (au sens complexe) de tous ordres, qui sont toutes développables en série entière sur $D(0, R)$ et qui s'obtiennent en dérivant la série terme à terme. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$

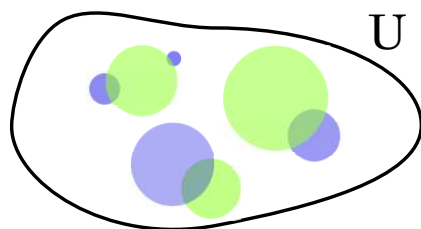
Unicité du développement en série entière :
la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est la série de Taylor de f en 0.

C Fonctions analytiques

Ce sont les fonctions qui sont localement développables en série entière.

Définition 1.15 Une fonction $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique lorsque, pour tout $z_0 \in U$, il existe un disque $D(z_0, r) \subset U$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tels qu'on ait, pour tout $z \in D(z_0, r)$:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$



Bien entendu, les coefficients a_n de la série entière qui restitue f sur le disque $D(z_0, r)$ dépendent du point z_0 ; on a $a_n = a_n(z_0) = f^{(n)}(z_0)/n!$

Remarque 1.16 Soit f analytique sur U .

- Elle est holomorphe.
- Elle admet des dérivées complexes de tous ordres, qui sont encore holomorphes. Elle est de classe C^∞ .
- Elle est somme de sa série de Taylor en chaque point.

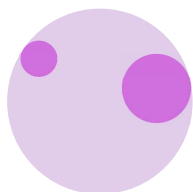
Exemple 1.17 - Un polynôme est analytique. Sa série de Taylor en chaque point a un nombre fini de termes non nuls.

- La fonction $z \rightarrow 1/z$ est analytique sur \mathbb{C}^* .

Proposition 1.18 Analyticité des séries entières

Soient $\sum_0^\infty a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ sa somme.

Alors f est analytique. Plus précisément : si $z_0 \in D(0, R)$, f est somme de sa série de Taylor en z_0 sur tout le disque $D(z_0, R - |z_0|)$.



Remarque 1.19 Cet énoncé n'est pas une tautologie !

Preuve Ce sera une conséquence de la sommation par paquets pour les séries à termes positifs, ou bien absolument convergentes.

Etape 1 : Le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_0 est au moins $R - |z_0|$. On a en effet

$$f^{(p)}(z_0) = \sum_{n=p}^{\infty} n \cdots (n-p+1) a_n z_0^{n-p} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} z_0^q$$

d'où

$$|f^{(p)}(z_0)| \leq \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{q!} |a_{p+q}| |z_0^q|$$

et donc (termes positifs ; on regroupe selon $p+q=n$)

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} |f^{(p)}(z_0)| r^p \leq \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{p!q!} |a_{p+q}| |z_0^q| r^p = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z_0| + r)^n < \infty$$

dès lors que $r < R - |z_0|$.

Etape 2 : La série de Taylor de f en z_0 a pour somme f sur le disque $D(z_0, R - |z_0|)$.

On a vu que, pour $|h| < R - |z_0|$, la série double

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} z_0^q h^p$$

est absolument convergente. Comme dans l'étape 1, on calcule sa somme de deux façons :

- en sommant en p à l'extérieur : on reconnaît la série de Taylor de f en z_0 , évaluée en h
- en sommant selon $p+q=n$: on obtient $\sum_0^{\infty} a_n (z_0 + h)^n = f(z_0 + h)$. \square

D Fonctions holomorphes, fonctions analytiques

Notre premier objectif sera de démontrer le résultat fondamental suivant.

Théorème 1.20 Soit $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Alors

$$f \text{ est holomorphe} \Leftrightarrow f \text{ est analytique}.$$

\Leftarrow Vu ci-dessus, c'est immédiat.

\Rightarrow Est très surprenant ! En effet, demander que f soit holomorphe, c'est "simplement" demander que f soit \mathbb{C} -dérivable en chaque point. Elle est alors analytique.

En particulier :

- f est automatiquement C^1
- et même C^∞
- et en plus elle est localement somme de sa série de Taylor en chaque point.

Comparer aux fonctions de variable réelle :

- $f(x) = x^2 \sin(1/x)$
- $f(x) = e^{-1/x^2}$

qui sont dérivables en tout point de \mathbb{R} .

Rappelons également le

Théorème 1.21 Théorème de Borel

Soit (a_n) une suite arbitraire de nombres complexes. Il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ pour laquelle, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(0) = a_n$.

On sait donc prescrire arbitrairement toutes les dérivées d'une fonction de classe C^∞ en un point. En particulier, pour $f^{(n)}(0) = (n!)^2$, la série de Taylor de f en 0 aura un rayon de convergence nul.

2. Exponentielle complexe ; logarithmes

Nous étudions la fonction exponentielle complexe. L'étude de cet exemple fondamental nous prépare (entre autres) au chapitre suivant, où l'on parlera de primitives.

A La fonction exponentielle

Proposition 2.1 – La série entière $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. Elle définit une fonction $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, i.e. une fonction entière. On note aussi $\exp(z) = e^z$.

- On a $\exp(0) = 1$ et $(\exp)' = \exp$.
- Pour $z, w \in \mathbb{C}$ on a $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ et $e^{w+z} = e^w e^z$. En particulier, $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ne s'annule pas.
- L'application exponentielle réelle $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une bijection croissante.

On a $|e^z| = 1$ si et seulement si $z \in i\mathbb{R}$.

Définition 2.2 Une fonction entière est une fonction holomorphe définie sur \mathbb{C} tout entier.

Preuve Les deux premiers points sont clairs. L'identité $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ suit de ce que la conjugaison $z \in \mathbb{C} \rightarrow \bar{z} \in \mathbb{C}$ est continue.

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on introduit $g(z) = e^z e^{a+b-z}$. On a $g' = 0$, donc $g(z) \equiv g(0) = e^{a+b}$ par la proposition 1.9. Pour $z = a$, on obtient $e^a e^b = e^{a+b}$. En particulier, e^z est non nul, d'inverse e^{-z} . Ceci justifie la notation $\exp(z) = e^z$, en posant $e := \exp(1)$.

On étudie d'abord la fonction exponentielle réelle sur $[0, \infty[$ en remarquant que sa dérivée y est positive, et on complète l'étude en utilisant la relation $e^{-x} = 1/e^x$.

Enfin $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ avec $|e^{iy}|^2 = e^{iy} e^{-iy} = 1$, tandis que $e^x = 1$ si et seulement si $x = 0$. \square

Remarque 2.3 L'exponentielle complexe \exp est l'unique application entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie simultanément $f(0) = 1$ et $f'(z) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ceci résulte de la proposition 1.9, appliquée à $z \in \mathbb{C} \rightarrow f(z)e^{-z} \in \mathbb{C}$.

On veut maintenant montrer que $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective. Nous allons utiliser un argument de topologie. Nous commençons par énoncer la variante holomorphe du théorème d'inversion locale.

Remarque 2.4 Rappelons qu'on a annoncé qu'une fonction holomorphe est automatiquement de classe C^1 . Nous admettons (provisoirement) ce résultat pour démontrer la proposition suivante, ainsi que son corollaire. Nous n'appliquerons cependant dans l'immédiat le corollaire 2.6 qu'à la fonction exponentielle qui, par construction, est analytique donc de classe C^1 .

Proposition 2.5 Inversion locale holomorphe

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe et $z_0 \in U$. On suppose que $f'(z_0) \neq 0$.

Alors f est un biholomorphisme au voisinage de z_0 : il existe un voisinage $V \subset U$ de z_0 pour lequel $f(V) \subset \mathbb{C}$ est ouvert, et tel que l'application $f : V \rightarrow f(V)$ soit bijective d'inverse f^{-1} holomorphe.

Preuve Rappelons que, pour f holomorphe, on a l'équivalence

$$f'(z_0) = a + ib \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad J_{z_0} \tilde{f} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \text{GL}_2\mathbb{R},$$

où $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ désigne l'application de variable réelle sous-jacente, qui est de classe C^1 (remarque 2.4). Il suit donc du théorème d'inversion locale que \tilde{f} est un difféomorphisme d'un voisinage V de z_0 sur son image $f(V)$. L'inverse d'une similitude directe est encore une similitude directe. La proposition 1.3 assure alors que l'application réciproque $f^{-1} : f(V) \rightarrow V$ est également holomorphe. \square

Corollaire 2.6 Application ouverte, version préliminaire

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe dont la dérivée ne s'annule pas. Alors f est une application ouverte.

Nous reviendrons ultérieurement sur cet énoncé (voir 6.18).

Exemple 2.7 L'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est ouverte.

On rappelle qu'un ouvert de \mathbb{C}^* est un ouvert de \mathbb{C} inclus dans \mathbb{C}^* .

Théorème 2.8 — L'application exponentielle $\exp : (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ est un morphisme de groupes surjectif.

- Il existe un unique réel positif, noté π , pour lequel $\text{Ker}(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$.
- On a $e^{i\pi} = -1$ et $e^{i\pi/2} = i$.

Remarque. L'argument que nous allons développer ci-dessous pour démontrer la surjectivité de l'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ montre, plus généralement, qu'un sous-groupe ouvert d'un groupe topologique est toujours fermé.

Il suit par exemple que le groupe $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ des matrices à déterminant positif est engendré par $\exp(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ (\exp désignant ici l'exponentielle matricielle) : toute matrice réelle de déterminant positif s'écrit comme produit d'exponentielles de matrices réelles.

Preuve On a vu ci-dessus que l'application exponentielle est un morphisme de groupes, et que son image est ouverte.

Surjectivité. L'image $H = \exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^*$ est un sous-groupe ouvert de \mathbb{C}^* . C'est donc aussi un sous-groupe fermé de \mathbb{C}^* . En effet on a

$$\mathbb{C}^* = H \bigsqcup \bigcup_{a \in \mathbb{C}^*, a \notin H} aH,$$

où \bigsqcup indique une union disjointe et où chaque classe $aH \subset \mathbb{C}^*$ modulo H est ouverte comme H , puisque la multiplication $z \in \mathbb{C} \rightarrow az \in \mathbb{C}$ par $a \in \mathbb{C}^*$ est un homéomorphisme de \mathbb{C} et induit donc un homéomorphisme de \mathbb{C}^* . On conclut par connexité de \mathbb{C}^* .

Noyau de \exp . Il nous reste à étudier le noyau de $\exp : (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$. On a vu (proposition 2.1) que $\mathrm{Ker}(\exp) \subset i\mathbb{R}$. On peut donc se contenter de chercher le noyau du morphisme de groupes $h : t \in (\mathbb{R}, +) \rightarrow e^{it} \in (\mathbb{S}^1, \cdot)$. Ce morphisme est surjectif et continu. Son noyau $\mathrm{Ker} h \subset \mathbb{R}$ est donc un sous-groupe fermé de \mathbb{R} , qui est :

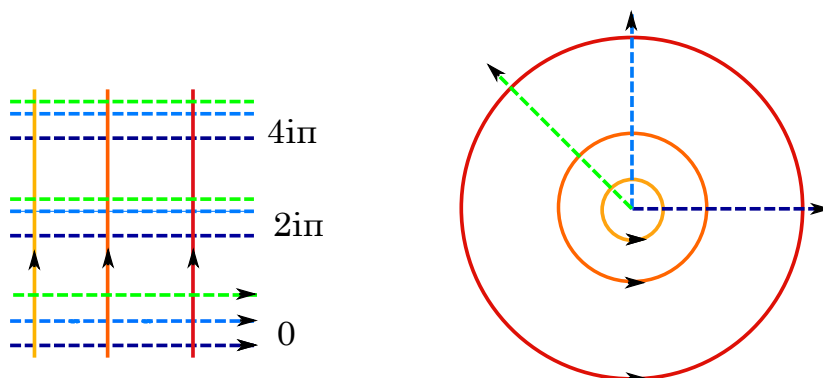
- distinct de \mathbb{R} (car h est surjectif)
- non trivial (car si $e^{it_0} = i$, on a $e^{4it_0} = 1$).

Il existe donc un unique réel $a > 0$ pour lequel $\mathrm{Ker} h = a\mathbb{Z}$. On définit π par la relation $2\pi := a$.

Deux valeurs de \exp . On a alors $e^{i\pi} = -1$, ($e^{i\pi}$ étant différent de 1, et de carré égal à 1).

Puisque de carré égal à -1 , on a $e^{i\pi/2} = \pm i$. Il reste à voir que sa partie imaginaire est positive. Pour cela on considère de nouveau l'application $h : t \in \mathbb{R} \rightarrow e^{it} \in \mathbb{S}^1$. La partie imaginaire de $h(t)$ (autrement dit, $\sin t$!) s'annule si et seulement si $h(t) = \pm 1$. Il s'ensuit que $\mathrm{Im} h(t)$ garde un signe constant sur l'intervalle $]0, \pi[$. Comme $h'(0) = i$, ce signe est positif. \square

Ci-dessous, on “dessine” l'application exponentielle complexe. Elle envoie les droites horizontales (partie imaginaire constante) sur les demi-droites issues de l'origine, et les droites verticales (partie réelle constante) sur les cercles. Comme prévu (voir la remarque 1.4), elle préserve les angles droits.



B Logarithme(s)

Dans le domaine réel, l'application $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une bijection croissante. Son inverse est le logarithme népérien, noté $\log : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Dans le domaine complexe, l'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective, mais non injective. Lorsque $z \in \mathbb{C}^*$, on peut écrire $z = e^w$, où w est **un** logarithme de z , défini à $2i\pi$ près. Quand $z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$:

- la partie réelle de z , soit $x = \log |z|$, est bien définie
- sa partie imaginaire y , définie à 2π près, est **un** argument de z .

Définition 2.9 Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert. Une application $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une détermination (continue) du logarithme lorsque

- f est continue
- pour tout $z \in U$, on a $z = e^{f(z)}$.

Remarque 2.10 L'existence d'une détermination continue du logarithme sur U équivaut à l'existence d'une détermination continue de l'argument sur U .

Exemple 2.11 Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur \mathbb{C}^* tout entier.

Preuve Sinon, on disposerait d'une détermination continue de l'argument

$$z \in \mathbb{C}^* \rightarrow \theta(z) \in \mathbb{R}$$

avec, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $z = |z| e^{i\theta(z)}$. En particulier, en se restreignant au cercle unité, on aurait pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{it} = e^{i\theta(e^{it})}.$$

L'application continue $t \in \mathbb{R} \rightarrow t - \theta(e^{it}) \in 2\pi\mathbb{Z}$, définie sur un ensemble connexe et à valeurs dans un espace discret serait donc constante.

On obtient une contradiction car $t \rightarrow \theta(e^{it})$ est 2π -périodique sur \mathbb{R} , mais $t \rightarrow t$ ne l'est pas. \square

Le même raisonnement (fonction continue définie sur un connexe et à valeurs dans un espace discret) donne la :

Proposition 2.12 *Soient $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert connexe de \mathbb{C}^* et $f_0 : U \rightarrow \mathbb{C}$ une détermination continue du logarithme sur U . Les autres déterminations continues du logarithme sur U sont exactement les fonctions*

$$f_n := f_0 + 2in\pi \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La proposition suivante nous permettra de construire, lorsqu'elles existent, les déterminations continues du logarithme sur un ouvert de \mathbb{C}^* .

Proposition 2.13 *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert.*

1. *Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une détermination continue du logarithme sur U , f est holomorphe et on a $f'(z) = 1/z$ pour tout $z \in U$.*
2. *On suppose maintenant U connexe. Soit $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $g'(z) = 1/z$ pour tout $z \in U$. Alors il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que $z \in U \rightarrow g(z) - \alpha \in \mathbb{C}$ soit une détermination continue du logarithme.*

Remarque 2.14 – *L'existence d'une détermination continue du logarithme sur U équivaut donc à l'existence d'une "primitive" sur l'ouvert U pour l'application $z \in U \rightarrow 1/z \in \mathbb{C}$.*

– *Le fait que la fonction $z \in \mathbb{C}^* \rightarrow 1/z \in \mathbb{C}$ n'admette pas de primitive est fondamental, et contient en germe la notion d'indice et le théorème des résidus.*

– *Lorsque l'ouvert U n'est pas connexe, on ajuste séparément la constante sur chacune de ses composantes connexes.*

Preuve

1. Soit $z \in U$. Pour $h \in \mathbb{C}$ tel que $z+h \in U$, on a $\exp(f(z+h)) = z+h$, $\exp(f(z)) = z$ et donc

$$\exp(f(z+h) - f(z)) = 1 + \frac{h}{z}.$$

La continuité de f au point z assure que $f(z+h) - f(z) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$. Puisque $\exp(u) = 1 + u + o(u)$, on obtient

$$\exp(f(z+h) - f(z)) = 1 + (f(z+h) - f(z)) (1 + \varepsilon(h)),$$

où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. On a donc

$$f(z+h) - f(z) = \frac{h}{z} (1 + \varepsilon(h))^{-1} :$$

la fonction f est dérivable en z , et on a $f'(z) = 1/z$.

2. Supposons la fonction g holomorphe, avec $g'(z) = 1/z$. Soit $h \in \mathcal{H}(U)$ définie par $h(z) = \exp(g(z))/z$. On vérifie facilement que $h' = 0$, et donc que h est constante puisque l'ouvert U est supposé connexe (proposition 1.9). Il existe donc $a \in \mathbb{C}^*$ tel que, pour tout $z \in U$, on ait $e^{g(z)} = az$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $a = e^\alpha$. La fonction $z \in U \rightarrow g(z) - \alpha \in \mathbb{C}$ est une détermination du logarithme sur U . \square

Remarque. Le fait qu'une détermination continue du logarithme soit holomorphe, ainsi que le calcul de sa dérivée, suivent également du fait que l'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un difféomorphisme local.

C Déterminations du logarithme

C.1 La détermination principale du logarithme

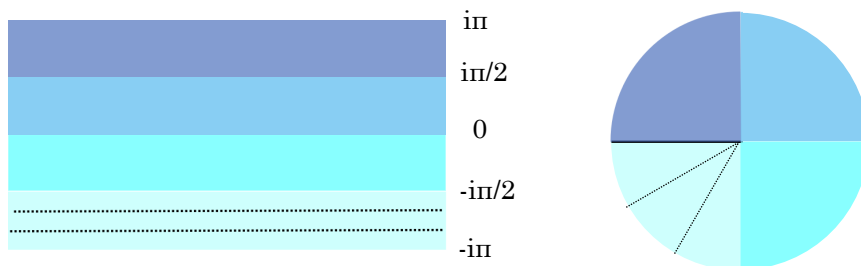
Il suit de l'étude de l'application exponentielle que la restriction

$$\exp : \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$$

est bijective, et est donc un biholomorphisme entre ces deux ouverts. L'application réciproque

$$\ell_\pi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\}$$

est appelée “détermination principale du logarithme”. Elle prolonge au “plan coupé” $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ le logarithme réel $\log : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. La “détermination principale de l'argument” correspondante prend ses valeurs dans $] -\pi, \pi[$.



Cette détermination du logarithme est “maximale” : elle ne se prolonge pas en une détermination (continue) du logarithme sur un ouvert plus grand que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Lemme 2.15 *La détermination principale ℓ_π du logarithme est développable en série entière sur le disque ouvert $D(1, 1)$ centré en 1 et de rayon 1. On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z - 1| < 1$:*

$$\ell_\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}.$$

Preuve On observe que $D(1, 1) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. La fonction $j : z \rightarrow 1/z$ est développable en série entière sur le disque ouvert $D(1, 1)$ centré en 1 et de rayon 1. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - 1| < 1$:

$$j(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z - 1)} = \sum_0^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n.$$

Le résultat suit de ce que la fonction ℓ_π est l'unique primitive de j sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ qui s'annule en $z = 1$. \square

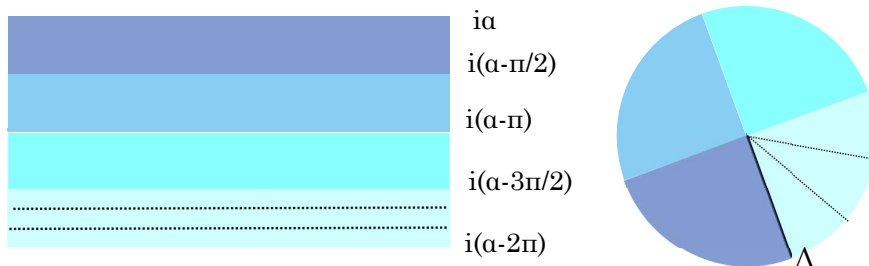
Je vous laisse montrer de même que ℓ_π admet un développement en série entière sur tout autre disque $D \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

C.2 Autres déterminations du logarithme

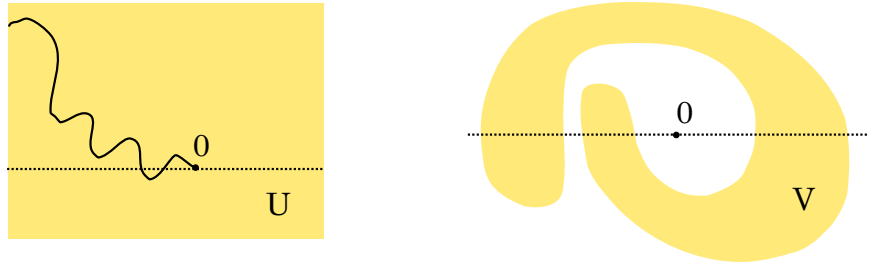
• D'une part il faut bien avouer que c'était du pur favoritisme que de singulariser la droite réelle négative, ainsi que de chercher à prolonger le logarithme népérien. Si Δ est une demi-droite fermée issue de l'origine, et si $\alpha \in \mathbb{R}$ est un argument pour (tous) les éléments de $\Delta \setminus \{0\}$, on obtient de même une détermination du logarithme

$$\ell_\alpha : \mathbb{C} \setminus \Delta \rightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid \alpha - 2\pi < \operatorname{Im} w < \alpha\}$$

sur le nouveau plan coupé $\mathbb{C} \setminus \Delta$.



• D'autre part, vous pourrez vous convaincre facilement de l'existence de déterminations continues du logarithme sur les ouverts U et V de \mathbb{C}^* dessinés ci-dessous (U est \mathbb{C}^* privé de la courbe noire).



D Racines k -ièmes d'un nombre complexe

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Un nombre complexe non nul possède exactement k racines k -ièmes w , telles que $w^k = z$, et qui diffèrent toutes d'une racine k -ième de l'unité.

Lemme 2.16 *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un domaine sur lequel il existe une détermination (continue, donc holomorphe) $\ell : U \rightarrow \mathbb{C}$ du logarithme. L'application*

$$r : z \in U \rightarrow \exp\left(\frac{1}{k}\ell(z)\right) \in \mathbb{C}^*$$

fournit une détermination holomorphe de la racine k -ième sur U .

E Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Les fonctions trigonométriques (sinus, cosinus, tangente et cotangente) et hyperboliques (sinus hyperbolique etc...) que vous avez l'habitude de manier sur \mathbb{R} s'étendent naturellement à la variable complexe.

On définit ainsi les fonctions entières

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, & \cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sinh(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, & \cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

de sorte que $i \sin(z) = \sinh(iz)$ et $\cos(z) = \cosh(iz)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Les quotients

$$\begin{aligned} \tan(z) &= \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, & \cot(z) &= \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \\ \tanh(z) &= \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}, & \coth(z) &= \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} \end{aligned}$$

sont des fonctions méromorphes sur \mathbb{C} (voir le chapitre 7).

Exercice 2.17 (A traiter après le chapitre 7).

Déterminer pour chaque pôle de chacun de ces quotients, l'ordre du pôle ainsi que le résidu correspondant.

Noter enfin que toutes les relations de trigonométrie et de trigonométrie hyperbolique connues sur \mathbb{R} s'étendent à la variable complexe. Cela se vérifie en revenant à la définition via la fonction exponentielle, ou bien en propageant ces identités via le principe du prolongement analytique (chapitre 6).

F Vers la fonction \wp de Weierstrass

La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fournit un exemple de fonction entière (simplement) périodique, avec

$$\exp(z + 2i\pi) = \exp(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. On a $\exp(z + 2i\pi n) = \exp(z)$ pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

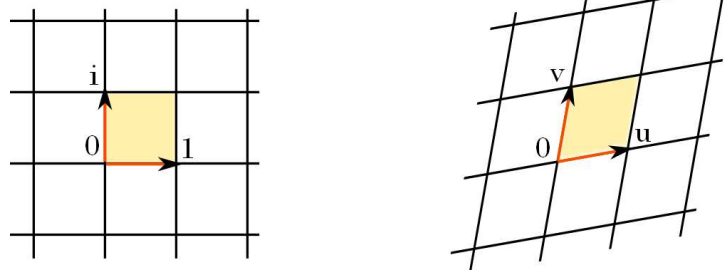
Question Existe-t-il des fonctions entières doublement périodiques (autres que les fonctions constantes bien entendu) ?

Définition 2.18 Une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est doublement périodique lorsqu'il existe deux nombres complexes non nuls $u, v \in \mathbb{C}^*$, dont le ratio ne soit pas réel, et tels que

$$f(z) = f(z + u) = f(z + v)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. La fonction f vérifie alors $f(z + w) = f(z)$ pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \Lambda$, où Λ est le “réseau”

$$\Lambda = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v.$$



Le réseau carré $\Lambda_0 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ engendré par 1 et i , un autre réseau $\Lambda = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$, ainsi que des domaines fondamentaux pour chacun

La fonction f est alors connue dès qu'elle est connue sur le “domaine fondamental” $K := \{xu + yv \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$ du réseau Λ .

Cette question, ainsi que ses développements, nous serviront de fil rouge tout au long du semestre.

3. Théorème de Cauchy dans un convexe

On montre que toute fonction holomorphe admet localement des primitives.

A Primitives

Définition 3.1 Soit $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que la fonction $F : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de f lorsque :

- F est holomorphe
- $F' = f$.

Exemple 3.2 – Pour $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq -1$, l'application $F : z \rightarrow z^{n+1}/(n+1)$ est primitive de $f : z \rightarrow z^n$ (sur \mathbb{C} lorsque $n \geq 0$, et sur \mathbb{C}^* lorsque $n \leq -2$).

– Une détermination du logarithme sur un ouvert de \mathbb{C}^* y est une primitive de $z \rightarrow 1/z$.

On se posera la question de l'existence, et de l'unicité, de primitives pour une fonction donnée.

Unicité. Lorsque U est connexe et $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de f , une fonction $G : U \rightarrow \mathbb{C}$ est primitive de f si et seulement si $G - F$ est constante (proposition 1.9).

Existence. C'est plus délicat ! On pose quelques jalons, en *anticipant* sur la suite du cours.

– Soit F une fonction holomorphe. On a *annoncé* que F est alors *analytique*. On en déduit que sa dérivée $f := F'$ est également analytique, donc holomorphe. Donc seule une fonction holomorphe pourra espérer avoir une primitive.

– Par ailleurs, puisque *une fonction f holomorphe est analytique*, elle est localement développable en série entière : $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$, et elle admet donc toujours localement des primitives $F(z) = c + \sum a_n(z-z_0)^{n+1}/(n+1)$.

– Par contre, une fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ n'admettra en général pas de primitive sur U tout entier. Souvenons-nous en effet de l'exemple de $f : z \in \mathbb{C}^* \rightarrow 1/z \in \mathbb{C}$.

B Intégrale d'une fonction sur un chemin

Définition 3.3 – Un chemin est une application $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, continue et de classe C^1 par morceaux.

– Un lacet est un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ qui est fermé, i.e. tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.



Un chemin, un lacet

Exemple 3.4 – Le chemin $\sigma_{[z_0, z_1]} : t \in [0, 1] \rightarrow z_0 + t(z_1 - z_0) \in \mathbb{C}$ a pour image le segment $[z_0, z_1] \subset \mathbb{C}$, parcouru de z_0 vers z_1 .

– Le lacet $c_n : t \in [0, 2\pi] \rightarrow e^{int} \in \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{Z}^*$) a pour image le cercle unité parcouru $|n|$ fois, dans le sens trigonométrique lorsque $n > 0$, dans le sens contraire sinon. Le lacet c_0 est un lacet constant.

Définition 3.5 Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un chemin. L'intégrale de f sur γ , notée $\int_{\gamma} f(z) dz$ (ou encore parfois simplement $\int_{\gamma} f$), est

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Remarque 3.6 Ne pas se laisser impressionner par la notation $\int_{\gamma} f(z) dz$. Il s'agit d'une banale intégrale de fonction de variable réelle.

Proposition 3.7 Si f admet une primitive F sur U on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

pour tout chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow U$. En particulier, l'intégrale de f sur un lacet γ tracé dans U est nulle.

Preuve Par composition, la fonction $t \rightarrow F(\gamma(t))$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $[a, b]$ privé d'un nombre fini de points, de dérivée

$$(F(\gamma(t)))' = F'(\gamma(t)) \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \gamma'(t).$$

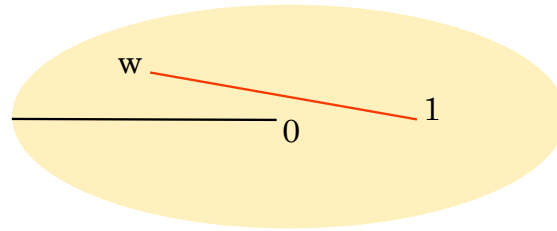
La fonction $I : t \rightarrow \int_a^t f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds$ est également continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $[a, b]$ privé d'un nombre fini de points avec, lorsque c'est défini, $I'(t) = (F(\gamma(t)))'$. \square

Deux exemples

– Si ℓ_π désigne la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (ℓ_π est donc primitive de $z \rightarrow 1/z$, avec $\ell_\pi(1) = 0$), on a pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$

$$\ell_\pi(w) = \int_{\sigma_{[1,w]}} \frac{dz}{z},$$

avec $\sigma_{[1,w]} : t \in [0, 1] \rightarrow 1 + t(w - 1) \in \mathbb{C}^*$.



– Le lacet $c_1 : t \in [0, 2\pi] \rightarrow e^{it} \in \mathbb{C}^*$ a pour image le cercle unité, parcouru dans le sens trigonométrique. On évalue facilement

$$\int_{c_1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{c_1'(t)}{c_1(t)} dt = 2i\pi.$$

Ce petit calcul est fondamental. Ce sera la base de la définition de l'indice, et du théorème des résidus. Le fait que l'intégrale soit non nulle reflète la non-existence d'une primitive pour $z \rightarrow 1/z$ sur \mathbb{C}^* .

Opérations sur les chemins

Reparamétrisation Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un chemin. La reparamétrisation de γ , associée à $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ bijection de classe C^1 telle que $\varphi' > 0$, est $\gamma \circ \varphi : [c, d] \rightarrow U$. Noter que $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$. Le chemin $\gamma \circ \varphi$ a même image géométrique que γ , et il est parcouru dans le même sens.

On a alors, pour toute fonction continue $f : U \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz.$$

Nous n'aurons donc pas à nous inquiéter de l'intervalle de paramétrisation.

Chemin opposé Le chemin opposé à $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ est $\gamma^\vee : [0, 1] \rightarrow U$ défini par $\gamma^\vee(t) = \gamma(1 - t)$. Ce chemin a même image géométrique que γ , mais il est parcouru en sens inverse. Par exemple, $c_{-n} = c_n^\vee$ ($n \in \mathbb{Z}$).

On a

$$\int_{\gamma^\vee} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

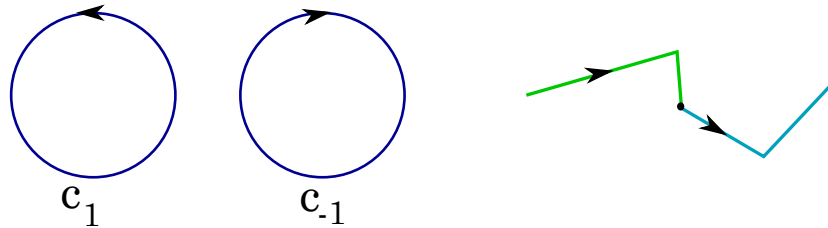
Concaténation Si $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow U$ sont deux chemins avec $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, on peut définir le concaténé $\gamma_1 * \gamma_2 : [0, 2] \rightarrow U$ de ces chemins par :

$$\begin{aligned}\gamma_1 * \gamma_2(t) &= \gamma_1(t) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_1 * \gamma_2(t) &= \gamma_2(t - 1) \quad \text{pour } 1 \leq t \leq 2\end{aligned}$$

Par exemple $c_n = c_1 * \cdots * c_1$ (n fois).

On a alors

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$



Le lacet c_1 et son opposé c_{-1} ; le concaténé de deux chemins

Estimation de l'intégrale sur un chemin

Lemme-Définition 3.8 La longueur d'un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

On a, pour toute fonction continue $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, la majoration

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| L(\gamma).$$

On obtient immédiatement le :

Corollaire 3.9 Soient γ un lacet de U et $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément (ou uniformément sur le support $\gamma([a, b])$ de γ) vers une fonction f . Alors

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz.$$

C Critère pour l'existence locale de primitives

Notation 3.10 Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Le triangle $T(\alpha, \beta, \gamma) = \text{conv}(\alpha, \beta, \gamma)$ est l'enveloppe convexe de ces trois points. Son bord (orienté) est le lacet

$$\partial T := \partial T(\alpha, \beta, \gamma) = \sigma_{[\alpha, \beta]} * \sigma_{[\beta, \gamma]} * \sigma_{[\gamma, \alpha]}.$$

Théorème 3.11 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert convexe. La fonction continue $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ admet une primitive sur U si et seulement si on a

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0 \quad \text{pour tout triangle } T \subset U. \quad (*)$$

Remarque 3.12 – Puisque U est convexe, un triangle T est inclus dans U si et seulement si ses sommets sont dans U .

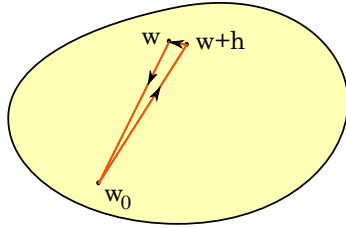
- Si $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ est définie sur un ouvert non convexe V , on appliquera ce critère localement (typiquement sur des boules $B \subset V$) pour obtenir l'existence de primitives pour les restrictions $f|_B$.
- On verra dans le chapitre suivant que la condition $(*)$ est satisfaite par toute fonction f holomorphe sur U .

Preuve \Rightarrow Immédiat d'après la proposition 3.7 puisque ∂T est un lacet.

\Leftarrow Fixons $w_0 \in U$. Guidés par la proposition 3.7, nous allons vérifier que la fonction F définie pour $w \in U$ par

$$F(w) = \int_{\sigma_{[w_0, w]}} f(z) dz,$$

où $\sigma_{[w_0, w]} : t \in [0, 1] \rightarrow w_0 + t(w - w_0) \subset U$ paramètre le segment $[w_0, w]$, est bien (la) primitive de f (qui s'annule en w_0).



Pour $h \in \mathbb{C}$ petit, le point $w + h$ appartient encore à U , et la condition $(*)$ appliquée au triangle $T(w_0, w, w + h) \subset U$ assure que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(w + h) - F(w)) &= \frac{1}{h} \left(\int_{\sigma_{[w_0, w+h]}} f(z) dz - \int_{\sigma_{[w_0, w]}} f(z) dz \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_{\sigma_{[w, w+h]}} f(z) dz \\ &= \int_0^1 f(w + th) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(w) \end{aligned}$$

par continuité de f au point w . □

D Critère pour l'existence globale de primitives

Tant qu'à faire, nous complétons ce qui a été vu dans la section précédente par un critère d'existence globale de primitive pour une fonction définie sur un ouvert quelconque (non convexe). L'ouvert n'étant plus convexe, il n'y a plus de chemin privilégié (segment) pour aller d'un point à un autre.

Théorème 3.13 Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert quelconque, et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. La fonction f admet une primitive sur U si et seulement si son intégrale sur tout lacet c tracé dans U est nulle :

$$\int_c f(z) dz = 0 \quad \text{pour tout lacet } c \subset U . \quad (**)$$

Remarque 3.14 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continue. On veut savoir si f admet une primitive. Lorsque l'ouvert U est convexe, le théorème 3.11 nous dispense de vérifier que l'intégrale $\int_c f(z) dz$ de f sur tout lacet c de U est nulle. Il suffit de vérifier que son intégrale sur le bord de tout triangle $T \subset U$ est nulle.

Preuve La condition $(**)$ est nécessaire (comme en 3.11). On va voir qu'elle est suffisante. Supposons en effet l'ouvert U connexe (sinon on travaille séparément sur chacune de ses composantes connexes); l'ouvert U est alors connexe par arcs C^1 (ou C^1 par morceaux), voir le lemme 8.9. On choisit un point $w_0 \in U$ et l'on définit pour tout point $w \in U$

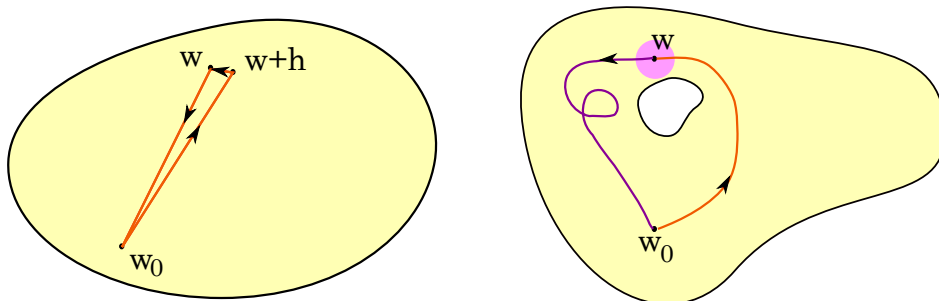
$$F(w) = \int_\gamma f(z) dz ,$$

où γ est n'importe quel chemin tracé dans U joignant w_0 à w : la condition $(**)$ assure que la fonction F est bien définie car l'intégrale ne dépend pas du choix du chemin entre w_0 et w .

Soit $\varepsilon > 0$ pour lequel $D(w, \varepsilon) \subset U$. Soit $|h| < \varepsilon$. Si γ est un chemin joignant w_0 à w et tracé dans U , le chemin concaténé $\gamma * \sigma_{[w, w+h]}$ joint w_0 à $w+h$ et est tracé dans U . On a alors

$$F(w+h) = F(w) + \int_{\sigma_{[w, w+h]}} f(z) dz ,$$

ce qui montre que F est bien primitive de f .



Construction de primitive : U convexe, ou pas.

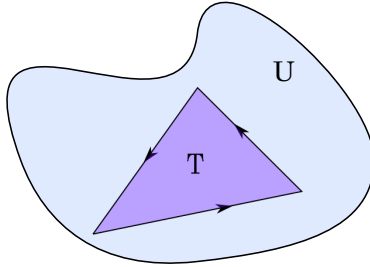
E Théorème de Cauchy dans un convexe

On va démontrer, comme annoncé, qu'une fonction holomorphe admet localement des primitives. Nous devons donc vérifier qu'elle satisfait le critère du théorème 3.11. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme technique 3.15 Lemme de Goursat

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $T \subset U$ un triangle. Alors

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0.$$

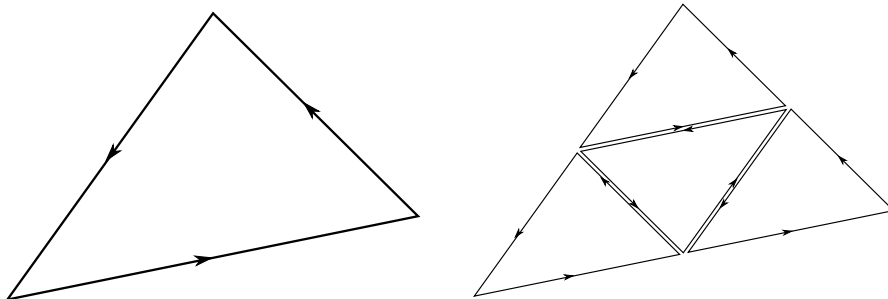


Preuve On découpe le triangle T en quatre triangles homothétiques de rapport $1/2$, soient $T(1), T(2), T(3), T(4)$ que l'on oriente convenablement de sorte que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial T(i)} f(z) dz.$$

On retient parmi les quatre triangles $T(i)$ celui (ou l'un de ceux) pour lequel $|\int_{\partial T(i)} f(z) dz|$ est maximale. On le nomme T_1 , de sorte que

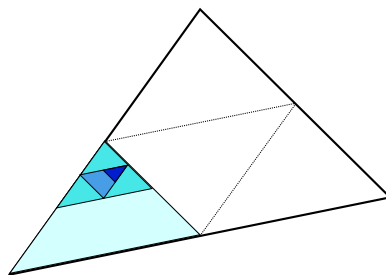
$$|\int_{\partial T} f(z) dz| \leq 4 |\int_{\partial T_1} f(z) dz|.$$



Le triangle T et les quatre triangles $T(1), T(2), T(3), T(4)$

On itère le procédé. Obtient donc une suite $T_{n+1} \subset T_n \subset T$ de triangles, où T_n est homothétique de T de rapport 2^{-n} et satisfait

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right|.$$



T et la suite de triangles T_n

Les triangles T_n forment une suite décroissante de compacts non vides donc leur intersection est non vide. Comme le diamètre de T_n tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, cette intersection est réduite à un point : il existe $z_0 \in T$ tel que $\cap_{n \geq 1} T_n = \{z_0\}$.

On a supposé f holomorphe. En particulier f est \mathbb{C} -dérivable en z_0 . On a donc, en notant $\alpha = f'(z_0)$:

$$f(z) - f(z_0) - \alpha(z - z_0) = o(z - z_0),$$

d'où

$$\sup_{z \in \partial T_n} |f(z) - f(z_0) - \alpha(z - z_0)| = o(\text{diam} T_n).$$

Le diamètre $\text{diam} T_n$ et la longueur du bord de T_n satisfont respectivement $\text{diam} T_n = 2^{-n} \text{diam} T$ et $L(\partial T_n) = 2^{-n} L(\partial T)$. Soit $\varepsilon > 0$. Le lemme 3.8 assure donc qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait pour tout $n \geq N$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T_n} f(z) - f(z_0) - \alpha(z - z_0) dz \right| &\leq \varepsilon \text{diam} T_n L(\partial T_n) \\ &= \varepsilon 4^{-n} \text{diam} T L(\partial T). \end{aligned}$$

La fonction $z \rightarrow f(z_0) + \alpha(z - z_0)$ est polynomiale en z . Elle admet donc une primitive sur \mathbb{C} et son intégrale sur chaque lacet ∂T_n est nulle. On obtient finalement

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right| \leq \varepsilon \text{diam} T L(\partial T).$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la conclusion suit. \square

Corollaire 3.16 Théorème de Cauchy pour un convexe

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert convexe et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

Alors

1. f possède une primitive sur U
2. pour tout lacet γ de U , on a $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Preuve

1. L'existence d'une primitive de f sur U découle du critère donné dans le théorème 3.11 et du lemme de Goursat 3.15.
2. S'en déduit, grâce à la proposition 3.7.

Remarque 3.17 Ne pas oublier l'hypothèse de convexité. Se souvenir, encore et toujours, de l'application $z \in \mathbb{C}^* \rightarrow 1/z \in \mathbb{C}^*$ qui n'admet pas de primitive sur \mathbb{C}^* et dont l'intégrale sur le lacet c_1 (d'image le cercle unité) est non nulle.

F Logarithmes et racines d'une fonction holomorphe sur un convexe

Proposition 3.18 Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert convexe et $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe qui ne s'annule pas. Alors

1. il existe $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe avec $f = e^g$; deux telles fonctions diffèrent d'une constante additive dans $2i\pi\mathbb{Z}$
2. il existe, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une fonction holomorphe $h : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ telle que $h^k = f$; deux telles fonctions diffèrent par une constante multiplicative qui est une racine k -ème de l'unité.

Preuve

1. Soit g holomorphe sur U . La fonction $e^{-g}f$ est constante sur U si et seulement si $g' = f'/f$. Prendre pour g une primitive convenable de la fonction holomorphe f'/f sur le convexe U (on ajuste la "constante d'intégration" en se servant de la surjectivité de l'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$).
2. Si $f = e^g$, la fonction $h = \exp \frac{g}{k}$ convient.

L'unicité, à constante près, est laissée au lecteur. □

G Intégrer une fonction doublement périodique

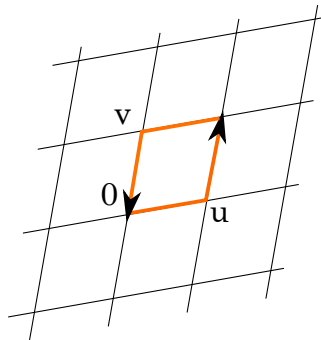
Terminons ce chapitre par un petit exemple qui nous sera utile lors de l'étude de la fonction \wp de Weierstrass.

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue doublement périodique, associée au réseau $\Lambda = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$. Notons $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ le lacet défini par

- $\gamma(t) = 4tu$ lorsque $0 \leq t \leq 1/4$
- $\gamma(t) = u + (4t - 1)v$ lorsque $1/4 \leq t \leq 1/2$
- $\gamma(t) = u + v - (4t - 2)u$ lorsque $1/2 \leq t \leq 3/4$
- $\gamma(t) = 4(1 - t)v$ lorsque $3/4 \leq t \leq 1$.

Le lacet γ décrit le bord du domaine fondamental de Λ , et l'on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$



4. Formule de Cauchy dans un convexe

Un petit effort supplémentaire va nous donner la formule de représentation intégrale de Cauchy, qui permet de calculer la valeur en un point d'une fonction holomorphe connaissant les valeurs qu'elle prend sur un cercle entourant ce point. On en déduira l'analyticité des fonctions holomorphes, tant attendue.

A Indice d'un lacet par rapport à un point

Définition 4.1 Soient $\gamma \subset \mathbb{C}$ un lacet et $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ un point pris hors de l'image de γ . L'indice du lacet γ par rapport au point a est

$$\text{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}.$$

Interprétation géométrique

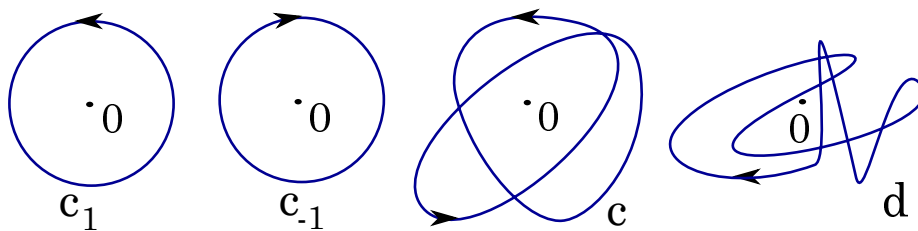
Par translation, on se ramène à $a = 0$. Le lacet γ est tracé dans \mathbb{C}^* et

$$\text{Ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Localement, on a des déterminations du logarithme sur \mathbb{C}^* qui sont des primitives de $z \rightarrow 1/z$. Soit $\alpha \subset \gamma$ un petit arc contenu dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}^*$ sur lequel il existe une détermination du logarithme ℓ . L'intégrale $\int_{\alpha} \frac{dz}{z}$ calcule l'accroissement de ℓ le long de α . Sa partie réelle est la différence des valeurs de $\log|z|$ entre les deux extrémités de α . Sa partie imaginaire nous donne l'accroissement, entre les deux extrémités de α , de la détermination (continue) de l'argument associée à ℓ .

Pour calculer l'intégrale $I = \int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ le long du lacet γ entier, on décompose γ en petits arcs et on ajoute leurs contributions. La partie réelle de I est donc nulle, puisque $|\gamma(1)| = |\gamma(0)|$.

Sa partie imaginaire vérifie $\text{Im } I = \theta(1) - \theta(0)$, où $t \in [0, 1] \rightarrow \theta(t)$ est une détermination continue de l'argument le long du lacet $\gamma : t \in [0, 1] \rightarrow \gamma(t)$ (de sorte qu'on a $\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\theta(t)}$ pour tout $t \in [0, 1]$). On a donc $\text{Ind}(\gamma, 0) = N$, où $N \in \mathbb{Z}$ est "le nombre de tours que γ fait autour de l'origine".



Il faut savoir calculer l'indice "de vue" dans des cas simples ; ici

$$\text{Ind}(c_1, 0) = 1, \text{Ind}(c_{-1}, 0) = -1, \text{Ind}(c, 0) = 2, \text{Ind}(d, 0) = 0$$

Nous allons formaliser cette interprétation géométrique, et montrer la

Proposition 4.2 Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet.

1. L'application $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma \rightarrow I(\gamma, a)$ est à valeurs entières.
2. Elle est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.
3. Elle est nulle sur l'unique composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Preuve 1. Introduisons, pour $t \in [0, 1]$,

$$h(t) = \exp \left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds \right).$$

On veut voir que $h(1) = 1$. On dérive h et on obtient

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}$$

ce qui montre que le ratio $\frac{\gamma'(t) - a}{h(t)}$ est constant. Puisque $\gamma(1) = \gamma(0)$, on a donc bien $h(1) = h(0) = 1$.

Soit $w_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\gamma(t) - a = h(t)e^{w_0}$. On vient de montrer que l'application $t \rightarrow w_0 + \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds$ est une détermination continue du logarithme de $t \rightarrow \gamma(t) - a$.

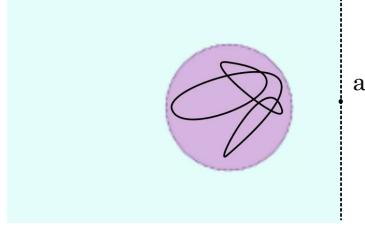
2. L'application $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma \rightarrow \text{Ind}(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$ est continue (application du théorème élémentaire de continuité sous le signe \int : en effet, lorsque $a_n \rightarrow a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, l'intégrand converge uniformément sur $[0, 1]$, de mesure finie). Cette application est à valeurs dans un espace discret, donc sa restriction à toute composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ est constante.

3. L'image du lacet γ est un compact de \mathbb{C} , donc inclus dans un disque $D(0, R)$. Le complémentaire ${}^c D(0, R) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma$ de ce disque est connexe ; il est contenu dans l'unique composante connexe non bornée U_∞ de $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Une simple majoration montre que

$$\text{Ind}(\gamma, a) \rightarrow 0 \text{ lorsque } |a| \rightarrow \infty.$$

L'indice (entier) est donc nul "à l'infini", et donc sur tout U_∞ .

On peut aussi raisonner plus géométriquement. Supposons le lacet γ inclus dans la boule $B(0, R)$. Pour tout $a \in \mathbb{C}$ pour lequel $|a| > R$, le lacet γ sera inclus dans un demi-plan (*a fortiori* un plan coupé) sur lequel il existe une primitive pour $z \rightarrow 1/(z - a)$. \square



Terminons par quelques propriétés élémentaires de l'indice.

Lemme 4.3 Soient $a \in \mathbb{C}$, γ_1, γ_2 des lacets dont l'image ne contient pas a .

- Lacet opposé. $\text{Ind}(\gamma_1^\vee, a) = -\text{Ind}(\gamma_1, a)$
- Concaténé. $\text{Ind}(\gamma_1 * \gamma_2, a) = \text{Ind}(\gamma_1, a) + \text{Ind}(\gamma_2, a)$

Preuve Immédiat. \square

B Formule de Cauchy dans un convexe

Le lemme de Goursat (3.15) nous a permis de démontrer le théorème de Cauchy : dans un convexe, toute fonction holomorphe admet une primitive, et son intégrale sur un lacet est nulle.

Une petite amélioration de ce lemme va nous donner la formule de représentation intégrale de Cauchy.

Lemme encore plus technique 4.4 Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, p un point de U et une fonction $f \in C^0(U) \cap \mathcal{H}(U \setminus p)$ continue sur U et holomorphe en dehors du point p .

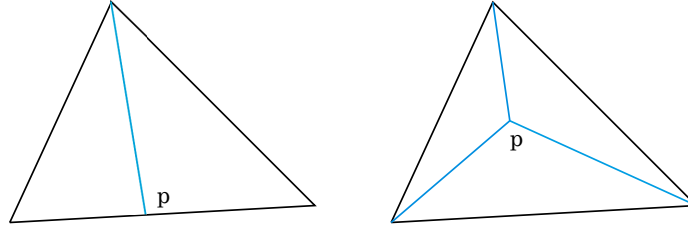
Alors, pour tout triangle $T \subset U$, on a

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0.$$

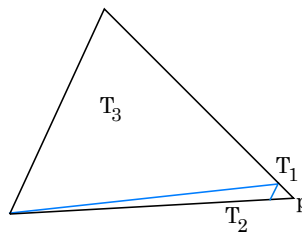
Remarque 4.5 – C'est presque le lemme de Goursat. On a juste relâché un chouïa l'hypothèse de régularité sur f en acceptant une petite singularité au point p , la fonction f restant cependant continue en ce point.

– Notre fonction $f \in C^0(U) \cap \mathcal{H}(U \setminus p)$ admet donc localement des primitives, qui sont holomorphes par définition et dont on démontrera qu'elles sont donc analytiques. En particulier l'hypothèse de ce lemme, à savoir " f continue sur U et holomorphe sauf en un point", impliquera finalement que " f est holomorphe sur U ". Voir également en 4.15.

Preuve Comme dans la preuve du lemme de Goursat, on va estimer l'intégrale $\int_{\partial T} f(z) dz$ en découpant le triangle T . On se ramène d'abord par découpage au cas où le point p est un sommet du triangle.



Supposons donc que p est un sommet de T . On isole alors le point p en découpant de nouveau le triangle T en 3 triangles T_1 , T_2 et T_3 , de sorte que cette fois-ci T_2 et T_3 ne contiennent pas le point p .



Le lemme de Goursat (lemme 3.15) nous dit que l'intégrale de f sur le bord de chacun des deux triangles T_2 et T_3 est nulle. La fonction f , continue, est bornée par M au voisinage de p . Lorsqu'on choisit le découpage de sorte que T_1 soit tout petit, on a donc

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial T_1} f(z) dz \right| \leq M L(\partial T_1),$$

arbitrairement petit. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la formule de Cauchy.

Théorème 4.6 Formule de Cauchy dans un convexe

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert convexe et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soient γ un lacet de U et $a \in U$ pris hors du support de γ . On a alors

$$f(a) \text{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Remarque 4.7 – Lorsque $f \equiv 1$, on retrouve la définition de l'indice.

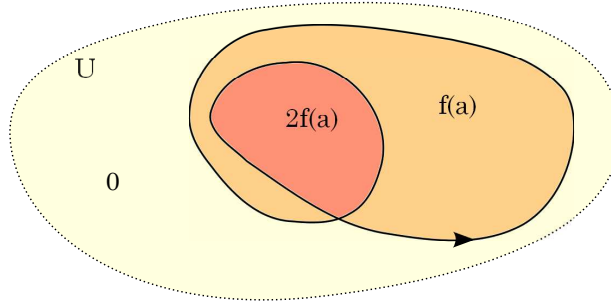
– Le support du lacet γ est son image dans U . On se permettra désormais de noter $\gamma \subset U$, ou $a \in U \setminus \gamma$, pour indiquer que le lacet est tracé dans U , ou bien que γ évite le point a .

Preuve L'application $q : U \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$q(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad \text{si } z \neq a$$

$$q(a) = f'(a)$$

est holomorphe sur $U \setminus a$ et continue sur U . On peut donc lui appliquer le lemme de Goursat amélioré (lemme 4.4) pour montrer que son intégrale sur le bord de tout triangle $T \subset U$ est nulle. Le critère du théorème 3.11 étant satisfait, la fonction q admet une primitive sur U et la proposition 3.7 assure que son intégrale sur tout lacet $\gamma \subset U$ est nulle. Il n'y a plus qu'à séparer les contributions du numérateur pour obtenir l'identité annoncée. \square



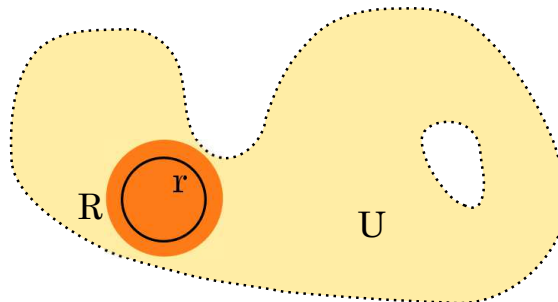
Dans cet exemple, le lacet γ découpe trois composantes connexes dans U . On a indiqué la valeur donnée par l'intégrale de Cauchy lorsqu'on prend le point a dans chacune de ces régions.

Le cas particulier suivant mérite qu'on s'y attarde.

Corollaire 4.8 Formule de Cauchy dans un disque

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert quelconque et $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ un disque fermé ($r > 0$). Pour toute fonction holomorphe sur U et tout point $z \in D(z_0, r)$ à l'intérieur de ce disque, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{(z_0 + re^{it}) - z} re^{it} dt.$$



Remarque 4.9 *En d'autres termes, on restitue les valeurs d'une fonction holomorphe f en chaque point d'un disque ouvert, connaissant seulement ses valeurs sur le bord du disque !*

Preuve C'est la formule de Cauchy que l'on applique, dans un disque ouvert $D(z_0, R) \subset U$ (convexe) avec $r < R$, au lacet

$$c_r : t \in [0, 2\pi] \rightarrow z_0 + re^{it} \in U.$$

□

C Analyticité des fonctions holomorphes

Une fois qu'on connaît la formule de Cauchy dans un disque, l'analyticité des fonctions holomorphes est une conséquence facile de l'analyticité de la seule fonction

$$z \rightarrow 1/z.$$

Théorème 4.10 Analyticité des fonctions holomorphes.

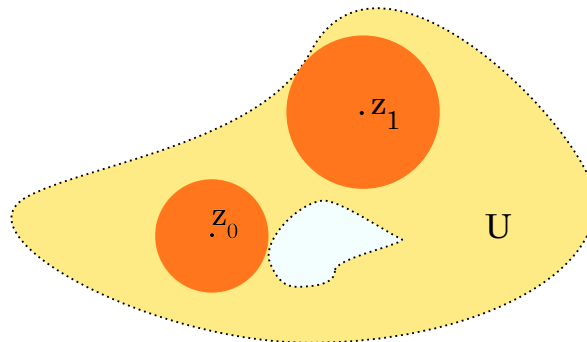
Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors f est analytique.

On peut préciser cette affirmation. Soient $z_0 \in U$ et $R = d(z_0, {}^cU)$ la distance de z_0 au complémentaire de U . Alors f est développable en série entière sur tout le disque $D(z_0, R) \subset U$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{pour } |z - z_0| < R.$$

De plus les coefficients a_n vérifient, pour tout $0 < r < R$ et tout $n \in \mathbb{N}$, les identités :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt. \quad (*)$$



Les disques maximaux, centrés en z_0 ou z_1 , sur lesquels $f \in \mathcal{H}(U)$ est développable en série entière.

Remarque 4.11 – On contrôle le disque sur lequel f est développable en série entière autour de chaque point $z_0 \in U$. C'est le plus grand disque ouvert centré en z_0 et inclus dans U .

– En particulier, le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_0 est au moins égal à $d(z_0, {}^cU)$.

– Soient $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ une fonction entière et $z_0 \in \mathbb{C}$. La série de Taylor de f en z_0 converge vers f sur \mathbb{C} tout entier.

– Le terme de droite dans l'identité (*) ne dépend pas de r , contrairement aux apparences.

Exemple fondamental La fonction $j : z \in \mathbb{C}^* \rightarrow 1/z \in \mathbb{C}$ est analytique. Son développement en série entière au point 1 est valable sur tout le disque $D(1, 1)$. On a, pour tout $|u| < 1$,

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n.$$

Preuve du théorème Soit $0 < r < R$. Le disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$ est alors inclus dans U . La formule de Cauchy dans ce disque (corollaire 4.8) donne, pour tout point $z \in D(z_0, r) \subset U$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{(z_0 + re^{it}) - z} re^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{1 - \frac{z - z_0}{re^{it}}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n r^{-n} e^{-int} \right) dt \end{aligned}$$

en vertu de l'exemple précédent. La fonction f , continue, est bornée sur le cercle $|z - z_0| = r$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n r^{-n} e^{-int}$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$. On peut donc échanger signes somme et intégrale pour obtenir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) (z - z_0)^n,$$

où

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt.$$

L'unicité du développement en série entière assure que $a_n(r)$ est indépendant de $r \in]0, R[$ et vaut $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. \square

Il est important de garder en tête les équivalences suivantes. On verra plus bas deux illustrations du critère d'holomorphic de Morera (théorème 4.17 et proposition 4.19).

Théorème 4.12 Conditions nécessaires et suffisantes d'holomorphic

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert quelconque. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. **Holomorphic** : f est holomorphic
2. **Formule de Cauchy** : pour tout disque fermé $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ et tout point $z \in D(z_0, r)$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} \frac{f(w)}{w - z} dw ,$$

où $c_r : t \in [0, 2\pi] \rightarrow z_0 + re^{it} \subset U$

3. **Condition de Morera** : pour tout triangle $T \subset U$, on a $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$
4. **Analyticité** : f est analytique.

Preuve On vient de montrer $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4$ (corollaire 4.8 et théorème 4.10). On savait déjà que $4 \Rightarrow 1$ (proposition 1.13).

$1 \Rightarrow 3$ C'est le lemme de Goursat 3.15.

$3 \Rightarrow 1$ Noter que l'holomorphic, et l'analyticité, sont des propriétés locales. Si f vérifie la condition de Morera, elle admet localement des primitives (théorème 3.11) qui sont holomorphes donc analytiques. La fonction f elle-même est donc analytique, donc holomorphic. \square

D Quelques premières conséquences

D.1 Anneau des fonctions analytiques

Les propriétés de stabilité suivantes peuvent bien entendu se démontrer de façon élémentaire par des manipulations sur les séries entières, ce qui constitue un excellent exercice. Mais elle suivent également de l'équivalence entre holomorphic et analyticité, et de la proposition 1.7.

Corollaire 4.13 — Si f et g sont analytiques, leur produit l'est.

— Si f est analytique et ne s'annule pas, $1/f$ est analytique.

— Une composée de fonctions analytiques est analytique.

D.2 Régularité des fonctions holomorphes

Proposition 4.14 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphic. Sa dérivée $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ est elle aussi holomorphic.

En effet f , et donc f' , sont analytiques (th. 4.12). Une fonction holomorphe f admet donc des dérivées (au sens complexe) de tous ordres. Le simple fait d'être \mathbb{C} -dérivable en chaque point assure que la fonction est de classe C^∞ . Soulignons encore une fois le contraste avec les fonctions de variable réelle.

Nous étudierons les singularités isolées des fonctions holomorphes au chapitre 7. Citons cependant dès maintenant un premier résultat frappant : une singularité isolée “modérée” d'une fonction holomorphe n'est pas une véritable singularité.

Théorème 4.15 Théorème de prolongement de Riemann

Soit $f : D^(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur le disque pointé $D^*(z_0, R) := D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.*

On suppose que la fonction f est bornée au voisinage (pointé) de z_0 . Alors elle se prolonge par continuité en une fonction holomorphe sur tout le disque $D(z_0, R)$.

Question Se demander si la fonction $z \in \mathbb{C}^* \rightarrow \sin(1/z) \in \mathbb{C}$ fournit, ou non, un contre-exemple au résultat ci-dessus. Ça serait fâcheux...

Preuve La fonction définie par $g(z_0) = 0$ et

$$g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$$

si $z \neq z_0$ est holomorphe, comme f , sur le disque pointé $D^*(z_0, R)$. Elle admet également une dérivée complexe en z_0 , qui est nulle. La fonction g étant holomorphe sur le disque $D(z_0, R)$, elle y est développable en série entière. Puisque $g(z_0) = g'(z_0) = 0$, ce développement s'écrit

$$g(z) = \sum_{n \geq 2} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (z - z_0)^k \right).$$

On a donc, pour $0 < |z - z_0| < R$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (z - z_0)^k$$

et le résultat. □

Remarque 4.16 *Il suit de la preuve qu'on aurait pu affaiblir l'hypothèse “ f bornée au voisinage de z_0 ” en “ $f(z) = o(1/(z - z_0))$ ”.*

D.3 Suites de fonctions holomorphes

Théorème 4.17 Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes.

On suppose que la suite f_n converge localement uniformément sur U vers $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Alors la limite f est holomorphe.

Rappel La suite de fonctions f_n converge localement uniformément vers f sur U si, pour tout point $z_0 \in U$, il existe un voisinage $V \subset U$ de ce point pour lequel les restrictions $f_n|_V$ convergent uniformément vers $f|_V$. Un argument élémentaire de recouvrement montre que f_n converge alors uniformément vers f en restriction à tout compact de U .

Preuve La fonction f est continue, comme limite uniforme locale de fonctions continues. Il suffit donc pour montrer qu'elle est holomorphe de vérifier qu'elle satisfait le critère de Morera (théorème 4.12). Soit $T \subset U$ un triangle. Pour chaque fonction holomorphe f_n , on a

$$\int_{\partial T} f_n(z) dz = 0.$$

La suite f_n converge uniformément vers f sur le bord (compact) ∂T du triangle. Il suit alors du lemme 3.8 que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0. \quad \square$$

Remarque 4.18 – Nous venons donc de montrer que si les fonctions f_n sont \mathbb{C} -dérivables en chaque point, et si elles convergent uniformément vers f , alors la limite f est elle-même \mathbb{C} -dérivable. Ceci sans imposer de contrainte *a priori* sur les dérivées f'_n . Nous y reviendrons dans le théorème 5.15.

– Noter le contraste avec les fonctions de variable réelle. Considérer la suite de fonctions $t \in \mathbb{R} \rightarrow (t^2+1/n)^{1/2} \in \mathbb{R}$ de classe C^∞ , qui converge localement uniformément vers la fonction $t \rightarrow \sqrt{|t|}$ non dérivable en l'origine.

D.4 Holomorphie sous le signe intégrale

Proposition 4.19 Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $g : [0, 1] \times U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On suppose que

- g est continue
- chaque fonction $g_t : z \in U \rightarrow g(t, z) \in \mathbb{C}$ ($0 \leq t \leq 1$) est holomorphe.

Alors la fonction $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$h(z) = \int_0^1 g(t, z) dt = \int_0^1 g_t(z) dz$$

est holomorphe sur U . De plus on peut dériver sous le signe somme : on a en effet, pour tout $z \in U$,

$$h'(z) = \int_0^1 g'_t(z) dt.$$

Preuve De nouveau, h est continue et on va constater que h satisfait le critère de Morera. Soit $T \subset U$ un triangle dont le bord est paramétré par $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$. Il résulte du théorème de Fubini appliqué à la fonction continue $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow g(t, \gamma(s)) \gamma'(s) \in \mathbb{C}$, et de ce que chaque fonction g_t est holomorphe sur U , que

$$\int_{\partial T} h(z) dz = \int_{\partial T} \left(\int_0^1 g(t, z) dt \right) dz = \int_0^1 \left(\int_{\partial T} g_t(z) dz \right) dt = 0.$$

Déterminons maintenant la dérivée de h . Soient $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que le disque fermée de centre z_0 et de rayon r soit inclus dans U . Le théorème 4.10 assure que

$$\begin{aligned} h'(z_0) &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{is}) e^{-is} ds \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 g_t(z_0 + re^{is}) dt \right) e^{-is} ds \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} g_t(z_0 + re^{is}) e^{-is} ds \right) dt \\ &= \int_0^1 g'_t(z_0) dt. \end{aligned}$$

Justifions ces égalités : on est revenus à la définition de h , on a appliqué le théorème de Fubini à la fonction

$$(s, t) \in [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow g_t(z_0 + re^{is}) e^{-is},$$

continue sur un compact, puis on a utilisé le théorème 4.10 pour chacune des fonctions holomorphes g_t ($t \in [0, 1]$). \square

E Définir la fonction de Weierstrass

Soient $\Lambda = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$ un réseau et $\Lambda^* := \Lambda \setminus \{0\}$. Les séries

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}(z) &= \sum_{w \in \Lambda} (z - w)^{-3} \\ \wp(z) &= z^{-2} + \sum_{w \in \Lambda^*} ((z - w)^{-2} - w^{-2}) \end{aligned}$$

définissent deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \Lambda$.

La fonction \mathfrak{q} est une fonction doublement périodique pour le réseau Λ . Elle est impaire.

La fonction \wp est la fonction de Weierstrass pour le réseau Λ . Elle est paire. Nous verrons au chapitre suivant qu'elle est Λ -périodique : sous cette forme ce n'est pas totalement évident, en raison du "terme correcteur" w^{-2} .

On montre en effet que la somme $\sum_{w \in \Lambda^*} |w|^{-\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 2$ (utiliser par exemple le fait que la norme euclidienne et la norme $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes sur \mathbb{R}^2).

La série $\sum_{w \in \Lambda} |(z - w)^{-2}|$ ne convergeant pas, on est amenés à sommer plutôt $\sum_{w \in \Lambda^*} (z - w)^{-2} - w^{-2}$. On constate alors que la série de fonctions

$$\sum_{w \in \Lambda, |w| \geq 2R} ((z - w)^{-2} - w^{-2})$$

converge normalement sur le disque $\{|z| \leq R\}$.

5. Applications de la formule de Cauchy

Ce chapitre est essentiellement consacré aux estimées de Cauchy (encore lui !) Elles fournissent, localement, une borne explicite pour chaque dérivée d'une fonction holomorphe – à partir d'une borne pour la fonction elle-même.

A Formule de Cauchy pour les dérivées

De la formule de Cauchy démontrée au théorème 4.6 suit également une formule de représentation intégrale pour chaque dérivée d'une fonction holomorphe, généralisant l'expression (*) obtenue au théorème 4.10.

Corollaire 5.1 Formule de Cauchy pour les dérivées

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert convexe et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soient γ un lacet de U et $z \in U$ pris hors du support de γ . On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(z) \operatorname{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

En particulier, on restitue toutes les dérivées de f à l'intérieur d'un disque $\overline{D}(z_0, r) \subset U$, connaissant seulement les valeurs de f sur le cercle $|z - z_0| = r$.

Preuve Supposons le lacet γ paramétré par l'intervalle $[0, 1]$. Soit $n \geq 1$. La formule de Cauchy pour la fonction holomorphe $f^{(n)}$ donne

$$f^{(n)}(z) \operatorname{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{f^{(n)}(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt.$$

Le résultat suit par intégrations par parties, en utilisant le fait que γ est un lacet et donc que les termes de bord disparaissent. \square

Exercice 5.2 Preuve alternative de 5.1

Partir de la formule de Cauchy pour f (théorème 4.6), et dériver sous le signe intégrale (proposition 4.19).

B Estimées de Cauchy

Proposition 5.3 Formule de la moyenne Soient $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ un disque fermé inclus dans U . On a

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Preuve Ce n'est que la formule de Cauchy pour f dans un disque, exprimée au centre du disque. \square

Remarque 5.4 La valeur de f au centre du disque est donc égale à la moyenne de f sur le bord. En d'autres termes, une fonction holomorphe satisfait la "propriété de la moyenne".

Cette propriété de la moyenne n'est pas caractéristique des fonctions holomorphes. Elle est satisfaite par toutes les fonctions harmoniques $h : U \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, c'est-à-dire telles que

$$\Delta h := \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

(et seulement par elles).

La partie réelle, et la partie imaginaire, d'une fonction holomorphe sont harmoniques : cela suit des équations de Cauchy-Riemann. Réciproquement, on peut montrer qu'une fonction harmonique réelle est toujours localement (sur tout ouvert convexe) la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Notons $M(r) := \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|$. Il suit de la proposition 5.3 qu'on a la majoration $|f(z_0)| \leq M(r)$. On va fournir des majorations similaires pour les dérivées de f en z_0 .

Théorème 5.5 Estimées de Cauchy

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ un disque fermé inclus dans U et

$$M(r) := \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

le sup du module de f sur le cercle de rayon r centré en z_0 .

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

2. Mieux :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 dt.$$

Preuve

1. Ce premier point suit de l'expression du développement en série de f sur $\overline{D(z_0, r)}$ obtenu via la formule de Cauchy (théorème 4.10).
2. Il est clair que cette seconde assertion (qui n'est autre que la formule de Parseval dans $L^2_{2\pi}$ pour la fonction $f_r : t \rightarrow f(z_0 + re^{it})$) implique la première. Démontrons la. La série

$$f(z_0 + re^{it}) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} r^n e^{int}$$

convergeant normalement pour $t \in [0, 2\pi]$, on peut écrire

$$|f(z_0 + re^{it})|^2 = \sum_{m,n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \frac{\overline{f^{(m)}(z_0)}}{m!} r^{n+m} e^{i(n-m)t},$$

d'où le résultat car on peut intégrer terme à terme, les termes pour lesquels $n \neq m$ ayant une contribution nulle. \square

C Le principe du maximum

L'énoncé suivant est de première importance. Nous y reviendrons au corollaire 6.22 avec un énoncé plus complet, mais nous en proposons dès maintenant une preuve issue des estimées de Cauchy.

Corollaire 5.6 Principe du maximum (version 1)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que le disque fermé de centre z_0 et de rayon r est inclus dans U . Alors

$$|f(z_0)| \leq \max_{t \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + re^{it})|$$

avec égalité si et seulement si f est constante sur le disque $D(z_0, r)$.

Preuve Supposons que $|f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)|$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Les estimées de Cauchy 5.5(2) assurent que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 dt \leq |f(z_0)|^2.$$

Il suit que toutes les dérivées $f^{(n)}(z_0)$ sont nulles ($n \geq 1$) et donc que f , analytique, est constante sur le disque $D(z_0, r)$. \square

Exercice 5.7 Donner une preuve alternative du principe du maximum en utilisant la formule de la moyenne (proposition 5.3).

D Le théorème de Liouville

Une première application des estimées de Cauchy concerne les applications entières bornées. Rappelons la

Définition 5.8 *Une fonction entière est une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur \mathbb{C} tout entier.*

Théorème 5.9 Théorème de Liouville

Une fonction entière bornée est constante.

Preuve Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Supposons $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Les estimées de Cauchy sur le disque $\overline{D}(0, r)$ donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{M}{r^n}.$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient que toutes les dérivées $f^{(n)}(0)$ de f en l'origine sont nulles ($n \in \mathbb{N}^*$). La fonction holomorphe f étant analytique (théorème 4.10), f est somme sur tout le plan complexe d'une série entière dont le seul terme non nul est constant. \square

La même preuve donne plus généralement la

Proposition 5.10 *Soit f une fonction entière “à croissance polynomiale” : on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, c et $R > 0$ tels que*

$$|z| \geq R \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq c|z|^k.$$

Alors f est une fonction polynomiale de degré au plus k .

Du théorème de Liouville suit une première démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss.

Corollaire 5.11 d'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme. Si P ne s'annule pas sur \mathbb{C} , il est constant.

Preuve Si $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ est de degré $n \geq 1$ ($a_n \neq 0$), on a

$$P(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right)$$

et donc $|P(z)| \rightarrow \infty$ lorsque $|z| \rightarrow \infty$. Supposons que P ne s'annule pas. La fonction $z \rightarrow 1/P(z)$ est alors une fonction entière qui tend vers 0 à l'infini, et qui est donc bornée. Le théorème de Liouville assure maintenant que f est constante. \square

E Estimées de Cauchy uniformes

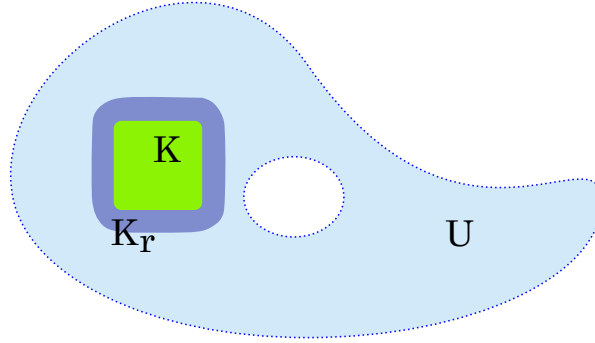
On peut donner de même des estimées de Cauchy uniformes, pourvu qu'on se restreigne à une partie compacte de U . Commençons par un petit rappel de topologie.

Lemme 5.12 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $K \subset U$ un compact.*

1. *On a $d(K, {}^cU) > 0$.*
2. *Pour $0 < r < d(K, {}^cU)$, on introduit le r -voisinage K_r de K , soit*

$$K_r := \cup_{z \in K} \overline{D(z, r)} = \{w \in \mathbb{C} \mid d(w, K) \leq r\}.$$

La partie K_r est un voisinage compact de K inclus dans U .



Preuve Soit $A \subset \mathbb{C}$ une partie de \mathbb{C} . L'application $z \in \mathbb{C} \rightarrow d(z, A) \in \mathbb{R}_+$ est continue (car 1-lipschitzienne). Lorsque $A \subset \mathbb{C}$ est fermée et $z \notin A$, on a $d(z, A) \neq 0$. \square

Corollaire 5.13 Estimées de Cauchy uniformes

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $K \subset U$ un compact et $0 < r < d(K, {}^cU)$. Pour toute fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a l'estimation

$$\sup_{z \in K} |f^{(n)}| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in K_r} |f|.$$

Preuve Conséquence immédiate des estimées de Cauchy. \square

Remarque 5.14 *On insiste de nouveau sur le contraste avec le cas réel.*

Considérer la suite de fonctions $x \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{1}{k} \sin(kx) \in \mathbb{R}$.

Les estimées de Cauchy uniformes vont nous permettre de préciser le théorème 4.17 sur les suites de fonctions holomorphes.

Théorème 5.15 Suites de fonctions holomorphes (bis)

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur U . On suppose que la suite (f_n) converge localement uniformément vers une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Alors

1. la limite f est holomorphe
2. pour chaque entier $p \in \mathbb{N}$, la suite des dérivées $(f_n^{(p)})$ converge localement uniformément vers la dérivée $f^{(p)}$.

Preuve

1. A été vu dans le chapitre précédent.
2. Si $K \subset U$ est compact et $r > 0$ est tel que le r -voisinage K_r de K soit inclus dans U , il suffit des estimées de Cauchy uniformes appliquées à $f - f_n$ que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{z \in K} |f^{(p)}(z) - f_n^{(p)}(z)| \leq \frac{p!}{r^p} \sup_{z \in K_r} |f(z) - f_n(z)|.$$

□

Remarque 5.16 – La convergence uniforme de la suite (f_n) assure la convergence de la suite des $(f_n^{(p)})$ des dérivées de tous ordres.

– Même si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur tout U , on n'aura en général qu'une convergence uniforme locale pour la suite des dérivées. En effet, plus K se rapproche du bord de U , plus on devra prendre r petit.

F Dériver la fonction de Weierstrass

Il suit du théorème de Liouville qu'une fonction entière doublement périodique est constante. Si nous cherchons des fonctions doublement périodiques, elles devront donc avoir des singularités (un peu plus tard, on parlera plus précisément de pôles et de fonctions méromorphes).

A cet effet nous avons introduit au chapitre précédent la fonction de Weierstrass

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{w \in \Lambda^*} ((z - w)^{-2} - w^{-2}).$$

Elle a pour dérivée

$$\wp'(z) = -2 \sum_{w \in \Lambda} (z - w)^{-3}.$$

On en déduit que la fonction de Weierstrass \wp est Λ -périodique.

Il faut simplement vérifier qu'on a le droit de dériver la série terme à terme. C'est bien sûr le cas pour une somme finie. La conclusion suit alors du théorème 5.15, puisque la série

$$\sum_{w \in \Lambda, |w| \geq 2R} ((z - w)^{-2} - w^{-2})$$

converge normalement sur le disque $\{|z| \leq R\}$.

Soit $w \in \Lambda^*$. Puisque la fonction

$$z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda \rightarrow \wp(z + w) - \wp(z) \in \mathbb{C}$$

est holomorphe sur un ouvert connexe et que sa dérivée est nulle (puisque \wp' est périodique), elle est donc constante égale à $c_w \in \mathbb{C}$.

Rappelons que $\Lambda = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$. Nous allons montrer que $c_u = c_v = 0$, ce qui assurera la Λ -périodicité de \wp . Traitons le cas de c_u . La fonction \wp est paire. Puisque $u/2 \notin \Lambda$, la fonction \wp est définie en ce point. Par parité

$$\wp\left(\frac{-u}{2}\right) = \wp\left(\frac{u}{2}\right) = \wp\left(\frac{-u}{2} + u\right) = \wp\left(\frac{-u}{2}\right) + c_u$$

ce qui assure que la constante c_u est nulle.

6. Zéros d'une fonction holomorphe

Dans ce chapitre nous explorons la structure locale d'une fonction holomorphe. Par translation, c'est-à-dire en considérant $z \rightarrow f(z) - f(z_0)$, on est ramenés à étudier la fonction f au voisinage d'un point où elle s'annule.

A Petits rappels de topologie

- Un espace métrique est discret si et seulement si tous ses points sont isolés, c'est-à-dire si et seulement si les singletons sont ouverts.
- Exemple : $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est discret. Par contre son adhérence $\overline{A} = A \cup \{0\}$ ne l'est pas.
- Le théorème de Bolzano-Weierstrass assure qu'un ensemble compact et discret est fini.
- Soit A une partie d'un espace métrique. Un point $x \in E$ est un point d'accumulation de A lorsque $x \in \overline{A} \setminus \{x\}$. Ce point peut, ou non, appartenir à A .
- Si $A \subset E$ n'a pas de point d'accumulation, A est discrète. Si $A \subset E$ est fermée et discrète, elle n'a pas de point d'accumulation dans E .

B Zéros d'une fonction holomorphe

Les zéros d'une fonction holomorphe sont de deux sortes.

Théorème 6.1 *Soient U un ouvert connexe et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui s'annule en z_0 . Alors :*

1. *Soit $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est alors nulle sur U .*
2. *Sinon, il existe un unique entier $k > 0$ tel que*

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z),$$

où $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas en z_0 . L'entier k est l'ordre du zéro de f en z_0 .

Preuve 1. On introduit $Y := \{z \in U \mid f^{(n)}(z) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$. La partie $Y \subset U$ est fermée comme intersection de fermés, puisque chaque dérivée $f^{(n)}$ de f est continue. Si maintenant $z_0 \in Y$, la série de Taylor de f en z_0 est nulle et l'analyticité de f assure que f est identiquement nulle au voisinage de z_0 . Ainsi $Y \subset U$ est ouvert. Lorsque Y est non vide, on conclut que $Y = U$ par connexité de U .

2. Si toutes les dérivées de f en z_0 ne sont pas nulles, on introduit

$$k := \inf\{n \geq 0 \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\} > 0.$$

Puisque f est analytique on a, lorsque $|z - z_0|$ est assez petit,

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!} (z - z_0)^n \right).$$

La fonction holomorphe g définie sur $U \setminus \{z_0\}$ par $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ se prolonge donc en une fonction holomorphe sur U , avec

$$g(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0.$$

Pour l'unicité, on observe que si $f(z) = (z - z_0)^{k_1} g_1(z) = (z - z_0)^{k_2} g_2(z)$ où g_1 et g_2 sont deux fonctions continues en z_0 qui ne s'y annulent pas, la fonction $z \rightarrow (z - z_0)^{k_1 - k_2}$ se prolonge par continuité en z_0 avec une limite non nulle en ce point ; ceci assure que $k_1 = k_2$. \square

On retiendra en outre la série de conséquences fondamentales suivante.

Corollaire 6.2 Principe des zéros isolés

Soient U un ouvert connexe, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle. L'ensemble $Z(f) = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$ des zéros de f est discret : tout zéro de f est isolé.

Preuve Soit $z_0 \in Z(f)$. La proposition précédente assure que z_0 est un zéro d'ordre fini k de f . On a donc

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z),$$

où $g(z_0) \neq 0$. Par continuité, il existe un voisinage de z_0 sur lequel g ne s'annule pas. \square

Remarque 6.3 Il suit que chaque ensemble $Z_{w_0}(f) = \{z \in U \mid f(z) = w_0\}$ est également discret ($w_0 \in \mathbb{C}$).

Corollaire 6.4 Soient U un ouvert connexe, et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle.

1. L'ensemble des zéros de f , soit

$$Z(f) = \{z \in U \mid f(z) = 0\},$$

est fermé dans U et discret, donc sans point d'accumulation dans U .

2. Si $K \subset U$ est un compact, l'ensemble $Z(f) \cap K$ est fini.
3. L'ensemble $Z(f)$ est fini ou dénombrable.

Preuve 1 et 2. Puisque $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est continue, l'ensemble $Z(f)$ est un fermé de U . Les assertions suivent alors du principe des zéros isolés, et des rappels de topologie.

3. S'en déduit en écrivant l'ouvert U comme réunion dénombrable des compacts

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, {}^cU) \geq 1/n, |z| \leq n\} \subset U.$$

□

Remarque 6.5 Par contre, les zéros d'une fonction holomorphe peuvent s'accumuler sur le bord de son domaine de définition. Voir le chapitre 10.

Le principe des zéros isolés est souvent employé sous la forme suivante.

Corollaire 6.6 Soient f_1 et f_2 deux fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe U . Si f_1 et f_2 coïncident sur une partie $A \subset U$ ayant un point d'accumulation dans U , elles sont égales.

En d'autres termes, notre fonction holomorphe est déterminée par ses valeurs sur un ensemble $A \subset U$ ayant un point d'accumulation dans U . En particulier :

Corollaire 6.7 Principe du prolongement analytique

Soient $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit U un ouvert connexe contenant V . Alors f possède au plus un prolongement holomorphe $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$.

Méditer l'exemple fourni par deux déterminations du logarithme sur des plans coupés, et prolongeant la fonction $\log : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Terminons par un dernier corollaire à connotation algébrique.

Corollaire 6.8 *Un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est connexe si et seulement si l'anneau $\mathcal{H}(U)$ des fonctions holomorphes sur U est intègre.*

Preuve Si l'ouvert n'est pas connexe, on choisit une partition $U = U_1 \sqcup U_2$ de U en deux ouverts non vides. Les fonctions indicatrices de U_1 et U_2 sont localement constantes donc holomorphes sur U , non identiquement nulles, mais de produit nul.

Supposons maintenant l'ouvert U connexe. Si $f, g \in \mathcal{H}(U)$ sont deux fonctions holomorphes non identiquement nulles, l'ensemble des zéros du produit fg est réunion de l'ensemble des zéros de f et de celui de g , et est donc dénombrable. \square

C Compter les zéros d'une fonction holomorphe

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $D := \overline{D(z_0, R)} \subset U$ un disque fermé. La formule de Cauchy 4.8 nous apprend que les valeurs de f sur D sont déterminées par ses valeurs sur le bord $\partial D = \{|z - z_0| = R\}$. Dans cet esprit, nous allons démontrer une formule élégante qui permet de déterminer le nombre de zéros de f dans D , comptés avec multiplicité.

Notation 6.9 *Soient $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, et $a \in U$. On introduit*

$$o_a(f) = \inf \{n \geq 0 \mid f^{(n)}(a) \neq 0\}.$$

Lorsque $f(a) \neq 0$, on a $o_a(f) = 0$.

Lorsque $f(a) = 0$, $o_a(f)$ est l'ordre du zéro de f au point a .

Si toutes les dérivées de f en a sont nulles, on convient que $o_a(f) = +\infty$.

Proposition 6.10 Principe de l'argument

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, et $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ un disque fermé inclus dans U . On suppose que f ne s'annule pas sur le cercle $|z - z_0| = r$. Notons $c_r : t \in [0, 2\pi] \rightarrow z_0 + re^{it} \in U$. Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in D(z_0, r)} o_a(f).$$

Remarque 6.11 – D'après le corollaire 6.4, la fonction f a un nombre fini de zéros dans le compact $\overline{D(z_0, r)}$. L'expression $\sum_{a \in D(z_0, r)} o_a(f)$ est donc en fait une somme finie, dont la valeur

$$\mathcal{Z}(f) := \sum_{a \in D(z_0, r)} o_a(f)$$

est le nombre de zéros de f dans le disque (ouvert ou fermé) comptés avec multiplicité.

– Notons que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Ind}(f \circ c_r, 0)$$

compte le nombre de tours que le lacet $f \circ c_r$ fait autour de l'origine, ou encore de combien varie l'argument de $f(z)$ (la partie imaginaire de “ $\log f(z)$ ”) lorsqu'on parcourt le lacet c_r (voir la discussion en 4.1). C'est de là que vient le nom de cet énoncé.

Preuve Puisque le disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$ est compact, la fonction f y admet un nombre fini de zéros a_1, \dots, a_p de multiplicités (ou ordres) respectifs k_1, \dots, k_p . On peut donc écrire

$$f(z) = \prod_{j=1}^p (z - a_j)^{k_j} g(z)$$

où la fonction g est holomorphe sur U et n'a plus de zéros dans $\overline{D(z_0, r)}$. On constate que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^p \frac{k_j}{z - a_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

La fonction g'/g est holomorphe sur un voisinage (convexe) du disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$. Le théorème de Cauchy 3.16 assure donc que sa contribution à l'intégrale sur le lacet c_r est nulle.

La conclusion suit de ce que l'indice $\text{Ind}(c_r, a_j)$ du lacet c_r par rapport à chacun des points $a_j \in D$ vaut 1. \square

On va maintenant chercher à comparer le nombre de zéros de deux fonctions holomorphes proches.

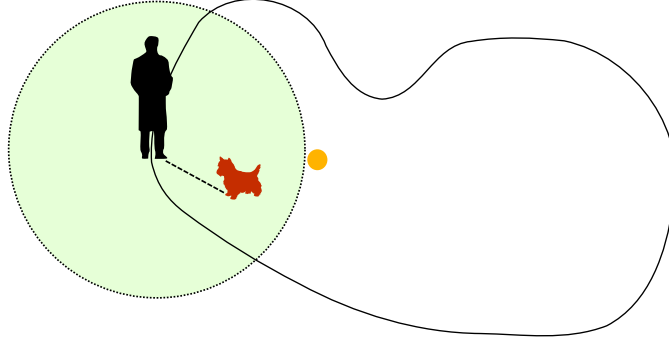
Lemme 6.12 Le maître, son chien et le lampadaire

Soient $a \in \mathbb{C}$ et deux lacets $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ évitant le point a . On suppose que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t) - a|. \quad (*)$$

Alors

$$\text{Ind}(\gamma_1, a) = \text{Ind}(\gamma_2, a).$$



Preuve On introduit le lacet

$$h : t \in [0, 1] \rightarrow \frac{\gamma_2(t) - a}{\gamma_1(t) - a} \in \mathbb{C}.$$

Puisque

$$\frac{h'}{h} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_2 - a} - \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - a},$$

on a l'égalité des indices $\text{Ind}(h, 0) = \text{Ind}(\gamma_2, a) - \text{Ind}(\gamma_1, a)$. La condition (*) assure que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $|h(t) - 1| < 1$: autrement dit le lacet h est tracé dans le disque ouvert $D(1, 1)$, et donc $\text{Ind}(h, 0) = 0$. \square

Corollaire 6.13 Théorème de Rouché

Soient f_1, f_2 deux fonctions holomorphes sur l'ouvert U . Soit $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ un disque fermé. On suppose que

$$|f_1 - f_2| < |f_1| \quad \text{sur le cercle } C_r = \{z, |z - z_0| = r\}. \quad (**)$$

Alors f_1 et f_2 ont même nombre de zéros, comptés avec multiplicité, dans le disque $D(z_0, r)$.

Remarque La condition (**) assure que ni f_1 ni f_2 ne s'annulent sur C_r .

Preuve Par le principe de l'argument, il s'agit de voir que

$$\int_{c_r} \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} dz = \int_{c_r} \frac{f_2'(z)}{f_2(z)} dz,$$

avec toujours $c_r(t) = z_0 + re^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. On introduit les lacets $\gamma_1 = f_1 \circ c_r$ et $\gamma_2 = f_2 \circ c_r$. On a, pour $j = 1$ ou 2 :

$$\int_{c_r} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)} dz = \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z} dz = \text{Ind}(\gamma_j, 0).$$

Le résultat suit du lemme précédent. \square

D Etude locale d'une fonction holomorphe

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. On veut décrire la structure géométrique de f au voisinage d'un point $z_0 \in U$. Rappelons qu'on avait déduit du théorème réel d'inversion locale le résultat suivant.

Rappel 6.14 (Corollaire 2.6)

Si $f'(z_0) \neq 0$, alors f est un biholomorphisme local d'un voisinage de z_0 sur un voisinage de $f(z_0)$. En particulier, f est ouverte au voisinage de z_0 .

Nous allons maintenant nous intéresser au cas où la dérivée $f'(z_0)$ est nulle. On a déjà dit que si toutes les dérivées de f en z_0 s'annulent, alors f est constante au voisinage de z_0 . Etudions donc le cas où z_0 est un zéro d'ordre fini k de $z \rightarrow f(z) - f(z_0)$. Le modèle à avoir en tête est la fonction $p_k : z \rightarrow z^k$ en $z_0 = 0$.

Exemple 6.15 Soient $k \geq 1$ et $r > 0$. L'application $p_k : D(0, r) \rightarrow D(0, r^k)$ est surjective. Tout point de $D(0, r^k) \setminus \{0\}$ a exactement k antécédents dans $D(0, r) \setminus \{0\}$.

Dans le cas général, tout se passe comme dans ce cas modèle.

Théorème 6.16 Structure locale d'une fonction holomorphe

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et $z_0 \in U$. Soit $k \geq 2$. On suppose que $f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, et $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Alors il existe un voisinage V de z_0 et un voisinage W de $f(z_0)$ avec $f(V) = W$, et tels que chaque point de $W \setminus \{f(z_0)\}$ ait exactement k antécédents dans $V \setminus \{z_0\}$.

Preuve Pour simplifier l'écriture, on se ramène par translation au cas où $z_0 = f(z_0) = 0$. On choisit $r > 0$ assez petit pour que le disque fermé $\overline{D(0, r)}$ soit inclus dans U et que f (dont les zéros proches de l'origine sont isolés) ne s'annule pas sur le cercle $C_r = \{|z| = r\}$. On note $\varepsilon = \inf\{|f(z)|, z \in C_r\}$, qui est non nul.

Pour $w \in \mathbb{C}$ avec $|w| < \varepsilon$, la fonction $f_w : z \rightarrow f(z) - w$ ne s'annule pas sur le cercle C_r . Le principe de l'argument assure que le nombre de fois, comptées avec multiplicité, que f prend la valeur w dans le disque $D(0, r)$ est

$$\mathcal{N}_r(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz.$$

La fonction $w \in D(0, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{N}_r(w) \in \mathbb{N}$ est continue, à valeurs entières. On a donc, pour tout $w \in D(0, \varepsilon)$, $\mathcal{N}_r(w) = \mathcal{N}_r(0) = k$.

Si l'on suppose en outre que r est choisi assez petit pour que la restriction de f' au disque $D(0, r)$ ne s'annule qu'en l'origine, on obtient le résultat avec $W = D(0, \varepsilon)$ et $V = f^{-1}(W) \cap D(0, r)$ (ouvert puisque f est continue). \square

On peut montrer plus précisément le résultat suivant, dont le théorème 6.16 est un corollaire.

Théorème 6.17 Structure locale d'une fonction holomorphe (bis)

Soit f holomorphe admettant un zéro d'ordre k en 0 . Il existe alors une fonction holomorphe g définie près de 0 , avec $g(0) = 0$ et $g'(0) \neq 0$, et telle que $f = p_k \circ g = g^k$.

La fonction p_k est donc, à biholomorphisme près, l'unique modèle local pour une fonction holomorphe dont les dérivées en z_0 s'annulent jusqu'à l'ordre k , c'est-à-dire telle que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ et $f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$.

Preuve On a en effet, pour $|z|$ petit,

$$f(z) = \sum_{n \geq k} a_n z^n$$

avec $a_k \neq 0$, ou encore

$$f(z) = a_k z^k (1 + f_1(z))$$

où la fonction f_1 est holomorphe au voisinage de 0 et vérifie $f_1(0) = 0$. Pour $|z|$ petit, on a $|f_1(z)| < 1$ et la fonction $z \rightarrow 1 + f_1(z)$ admet donc une racine k -ième h , par exemple

$$h(z) = \exp\left(\frac{1}{k} \ell_\pi(1 + f_1(z))\right)$$

ℓ_π désignant la détermination principale du logarithme. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $\alpha^k = a_k$. On a

$$f(z) = (\alpha z h(z))^k = (g(z))^k = p_k \circ g(z).$$

La fonction $z \rightarrow g(z) := \alpha z h(z)$ est holomorphe près de 0 , et elle a pour dérivée $g'(0) = \alpha \neq 0$: c'est donc un biholomorphisme local au voisinage de l'origine. \square

Enonçons une conséquence immédiate et spectaculaire de ces résultats.

Corollaire 6.18 Application ouverte, version holomorphe

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Une application holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ non constante est ouverte.

Preuve Conséquence immédiate du théorème 6.17, ou bien de la preuve du théorème 6.16. Il nous faut en effet montrer que, pour tout $z_0 \in U$, l'image $f(U)$ est un voisinage de $f(z_0)$. Or, avec les notations de la preuve du théorème 6.16, nous avons vu que pour $r > 0$ assez petit, l'image $f(D(z_0, r))$ contient le disque $D(f(z_0), \varepsilon)$ où $\varepsilon = \inf\{|f(z)|, z - z_0 \in C_r\}$. \square

Remarque 6.19 Noter l'absence de restriction sur la dérivée de f , qui a le droit de s'annuler.

De même, le théorème d'inversion globale admet une version holomorphe.

Corollaire 6.20 Inversion globale, version holomorphe

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et injective. Alors f est un biholomorphisme sur son image.

Preuve L'injectivité de f assure que f' ne s'annule pas (théorème 6.16)! La fonction $f : U \rightarrow f(U)$ est donc un biholomorphisme local (6.14), donc global de nouveau par injectivité de f . \square

Remarque 6.21 Noter, dans ces énoncés, la différence sidérante avec le cas des fonctions de variable réelle. Considérer par exemple les fonctions $x \rightarrow x^2$ et $x \rightarrow x^3$.

Le corollaire 6.18 nous permet de redonner une nouvelle preuve du principe du maximum vu en 5.6, dont nous rappelons l'énoncé.

Corollaire 6.22 Principe du maximum

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $z_0 \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Si

- 1. $|f|$ admet un maximum local en z_0*
- 2. ou bien $|f|$ admet un minimum local non nul en z_0*
- 3. ou bien $\operatorname{Re} f$, ou $\operatorname{Im} f$, a un maximum ou un minimum local en z_0 ,*

alors la fonction f est constante.

Preuve Conséquence immédiate de ce qu'une fonction holomorphe non constante est ouverte. \square

Dans le cas d'un ouvert borné, on peut préciser ce résultat.

Corollaire 6.23 Principe du maximum sur un ouvert borné

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné, et connexe. Soit $f \in C^0(\overline{U}) \cap \mathcal{H}(U)$, holomorphe sur U et continue jusqu'au bord. On a alors $\sup_U |f| \leq \sup_{\partial U} |f|$, avec égalité si et seulement si f est constante.

Preuve La fonction continue $|f|$ atteint son maximum sur le compact \overline{U} . Si ce maximum est atteint en un point de U , le corollaire précédent assure que f est constante. \square

7. Singularités isolées d'une fonction holomorphe

On va maintenant s'intéresser au comportement, au voisinage de a , d'une fonction holomorphe définie sur le disque pointé $D^*(a, R) := D(a, R) \setminus \{a\}$.

A Classification des singularités

Commençons par étudier trois exemples typiques.

- La fonction $z \rightarrow \frac{\sin z}{z}$, définie et holomorphe sur \mathbb{C}^* , se prolonge en une fonction holomorphe sur \mathbb{C} . Cela résulte en effet du développement

$$\sin z = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

On parle dans ce cas de singularité effaçable (ou de singularité apparente).

- Pour la fonction $f : z \in \mathbb{C}^* \rightarrow 1/z \in \mathbb{C}$, on observe que $|f(z)| \rightarrow \infty$ lorsque $|z| \rightarrow 0$. On dit que f possède un pôle en l'origine.

- Considérons enfin la fonction $g : z \in \mathbb{C}^* \rightarrow e^{1/z} \in \mathbb{C}$. L'image par l'application $z \rightarrow 1/z$ du disque pointé $D^*(0, r)$ est le complémentaire $\mathbb{C} \setminus D(0, 1/r)$ du disque de rayon $1/r$. Il suit de l'étude de l'application exponentielle que, pour tout $r > 0$, l'image $g(D^*(0, r))$ est dense dans \mathbb{C} (en l'occurrence, l'image est ici \mathbb{C}^*). On parle alors de singularité essentielle.

On va démontrer que ce sont les trois seules configurations qui peuvent apparaître.

Théorème 7.1 Soit $f : D^*(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un disque pointé. Trois cas mutuellement exclusifs se présentent.

1. Singularité effaçable. La fonction f se prolonge en une fonction holomorphe définie sur tout le disque $D(a, R)$.
2. Pôle. Il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et des complexes β_1, \dots, β_k avec $\beta_k \neq 0$ tels que l'application holomorphe

$$z \in D^*(a, R) \rightarrow f(z) - \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{(z-a)^j} \in \mathbb{C}$$

présente en a une singularité effaçable.

3. Point singulier essentiel. Pour tout $0 < r < R$, l'image $f(D^*(a, r))$ est dense dans \mathbb{C} .

Définition 7.2 Dans le cas d'un pôle :

- L'entier k est unique. C'est l'ordre du pôle. On le note $\bar{o}_a(f) \in \mathbb{N}^*$.
- Les complexes β_1, \dots, β_k sont uniques, et on dit que $\sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{(z-a)^j}$ est la *partie principale* de f en a . On a

$$f(z) = \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{(z-a)^j} + h(z) = \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{(z-a)^j} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n,$$

la fonction h étant holomorphe sur le disque $D(a, R)$.

- Le complexe $\beta_1 \in \mathbb{C}$ jouera un rôle particulier. C'est le *résidu* de f en a . On notera $\text{Res}(f, a) := \beta_1$. Il peut être nul.

Remarque 7.3 – La fonction f admet en a un pôle d'ordre $k \geq 1$

- si et seulement si la fonction $1/f$ admet en a une singularité effaçable et un zéro d'ordre k en a
- si et seulement si il existe une fonction holomorphe $g : D(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$ pour laquelle $g(a) \neq 0$ et telle que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}.$$

On a alors $|f(z)| \rightarrow +\infty$ quand $z \rightarrow a$.

Preuve du théorème Supposons que nous ne soyons pas dans le dernier cas (3). Il existe $0 < r < R$ tel que l'image $f(D^*(a, r)) \subset \mathbb{C}$ ne soit pas dense dans \mathbb{C} , et évite donc un disque $D(w, \epsilon)$.

La fonction

$$g : z \in D^*(a, r) \rightarrow \frac{1}{f(z) - w} \in \mathbb{C}^*$$

est holomorphe sur $D^*(a, r)$, et bornée au voisinage de a . Le théorème de prolongement de Riemann 4.15 assure que g se prolonge en une fonction holomorphe (que l'on notera encore g), définie sur tout $D(a, r)$.

Si $g(a) \neq 0$ la fonction f est bornée au voisinage de a . Le théorème de prolongement de Riemann assure cette fois-ci que f présente en a une singularité effaçable.

Si a est un zéro d'ordre $k \geq 1$ pour g , on écrit

$$g(z) = (z - a)^k g_1(z),$$

où g_1 est holomorphe sur $D(a, r)$ et ne s'annule pas en a , donc ne s'annule pas sur le disque $D(a, r)$. Introduisons la fonction $h_1(z) := 1/g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - a)^n$, holomorphe sur $D(a, r)$. On a alors, pour tout $z \in D(a, r)$,

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)} = w + (z - a)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - a)^n.$$

Le résultat suit avec $\beta_j = b_{k-j}$ ($j = 1 \dots k$), et donc $\beta_k = b_0 = h_1(a) \neq 0$.

Pour l'unicité, on remarque qu'une fonction de la forme $z \rightarrow \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{(z - a)^j}$ n'est bornée au voisinage de a que lorsque tous les β_j sont nuls. \square

Mentionnons à titre culturel le résultat suivant, qui précise le comportement d'une fonction holomorphe au voisinage d'une singularité essentielle.

Théorème 7.4 Grand théorème de Picard

Soit f une fonction holomorphe sur le disque pointé $D^(a, R)$ possédant en a une singularité essentielle. Deux cas se présentent :*

1. *soit, pour tout $0 < r < R$, l'image $f(D^*(a, r))$ est \mathbb{C} tout entier*
2. *soit il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $0 < r < R$ assez petit, l'image $f(D^*(a, r))$ soit $\mathbb{C} \setminus \{w\}$.*

Les fonctions $z \rightarrow \sin(1/z)$ et $z \rightarrow \exp(1/z)$ illustrent, au voisinage de l'origine, l'un et l'autre cas.

On peut reformuler ce résultat comme suit. Soit f holomorphe possédant une singularité isolée au point a . Si il existe un voisinage pointé de a dont l'image par f omet deux points de \mathbb{C} , alors la singularité est un pôle ou bien une singularité effaçable.

B Fonctions méromorphes

Définition 7.5 Une fonction est dite fonction méromorphe sur U lorsqu'il existe une partie $P \subset U$ telle que :

1. $P \subset U$ est une partie fermée de U , et discrète
2. la fonction f est définie et holomorphe sur $U \setminus P$
3. la fonction f admet un pôle en chaque point de P .

Remarque 7.6 – On autorise $P = \emptyset$. Une fonction holomorphe sur U est donc également méromorphe.

– L'ensemble P est fini ou dénombrable. Il n'a pas de point d'accumulation dans U .

Exemple 7.7 – Les fractions rationnelles $R(z)/Q(z)$, où $R, Q \in \mathbb{C}[z]$ sont des fonctions polynomiales, sont méromorphes sur \mathbb{C} .

– Plus généralement, tout quotient $g_1(z)/g_2(z)$, où g_1 et g_2 sont holomorphes sur U et g_2 n'est pas identiquement nulle (sur aucune composante connexe de U) est méromorphe sur U .

Proposition 7.8 L'ensemble $\mathcal{M}(U)$ des fonctions méromorphes sur U est stable par addition, multiplication par un scalaire, multiplication interne, et dérivation.

Lorsque l'ouvert U est connexe, l'inverse d'une fonction méromorphe non identiquement nulle est encore méromorphe ; $\mathcal{M}(U)$ est un corps.

Remarque 7.9 – On peut démontrer, mais nous n'en sommes pas encore là, qu'une fonction méromorphe sur U est toujours quotient de deux fonctions holomorphes sur cet ouvert (voir le corollaire 10.17 lorsque $U = \mathbb{C}$).

– En particulier, lorsque U est connexe, $\mathcal{M}(U)$ est le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{H}(U)$ des fonctions holomorphes sur U (qui est intègre, voir 6.8).

Le principe de l'argument 6.10, qui nous a permis de compter les zéros d'une fonction holomorphe, admet une variante méromorphe.

Théorème 7.10 Principe de l'argument (version méromorphe)

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ méromorphe, et $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ un disque fermé inclus dans U . On suppose que f n'a ni zéros ni pôles sur le cercle $|z - z_0| = r$. Notons $c_r : t \in [0, 2\pi] \rightarrow z_0 + re^{it} \in U$. Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{Z}(f) - \mathcal{P}(f),$$

où $\mathcal{Z}(f)$ et $\mathcal{P}(f)$ désignent respectivement le nombre de zéros et le nombre de pôles de f , comptés avec multiplicité, dans le disque $\overline{D(z_0, r)}$.

Preuve La fonction f admet dans le disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$ un nombre fini de zéros a_1, \dots, a_p de multiplicités k_1, \dots, k_p , et nombre fini de pôles b_1, \dots, b_q de multiplicités n_1, \dots, n_q . On a

$$\mathcal{Z}(f) = \sum_{j=1}^p k_j \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(f) = \sum_{i=1}^q n_i.$$

Comme dans la preuve de la proposition 6.10, on introduit la fonction

$$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^p (z - a_j)^{-k_j} \prod_{i=1}^q (z - b_i)^{n_i}.$$

Les singularités de la fonction méromorphe g dans $\overline{D(z_0, r)}$ sont effaçables, et g ne s'annule pas sur ce disque. On constate que

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{j=1}^p \frac{k_j}{z - a_j} + \sum_{i=1}^q \frac{n_i}{z - b_i}.$$

La conclusion suit théorème de Cauchy 3.16 appliqué à la fonction g'/g , holomorphe sur un voisinage du disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$. \square

Terminons ce paragraphe par l'étude des séries de fonctions méromorphes.

Définition 7.11 Soient U un ouvert de \mathbb{C} et h_n une suite de fonctions méromorphes sur U . On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} h_n$ converge uniformément sur les compacts de U si, pour tout compact $K \subset U$, il existe un entier $n_k \in \mathbb{N}$ tel que

- pour tout $n \geq n_k$, la fonction h_n ne présente pas de pôle sur K
- la série $\sum_{n \geq n_k} h_n$ est uniformément convergente sur K .

Proposition 7.12 Séries de fonctions méromorphes

Soit h_n une suite de fonctions méromorphes sur U . On suppose que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} h_n$ converge uniformément sur les compacts de U . La somme $h = \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est une fonction méromorphe sur U et l'on peut dériver terme à terme, i.e. $h' = \sum_{n \in \mathbb{N}} h'_n$.

L'ensemble $P(h)$ des pôles de h est inclus dans la réunion $\cup_{n \in \mathbb{N}} P(h_n)$ des ensembles des pôles des h_n .

Preuve La propriété à démontrer est locale. On peut donc se restreindre à un disque ouvert $D := D(z_0, r)$ d'adhérence $K := \overline{D(z_0, r)} \subset U$ dans U . Nous conservons les notations de la définition précédente. En restriction à D , on décompose la somme $h = \sum_{n < n_K} h_n + \sum_{n \geq n_K} h_n$.

Le premier terme est une somme finie de fonctions méromorphes, que l'on peut dériver terme à terme. Le second est, en restriction à D , une série uniformément convergente de fonctions holomorphes. Le résultat suit donc du théorème 5.15 sur les suites de fonctions holomorphes. \square

C Groupes d'automorphismes

Définition 7.13 *Un automorphisme d'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est une application $f : U \rightarrow U$ bijective et biholomorphe.*

L'ensemble $\text{Aut } U$ des automorphismes de U forme un groupe pour la composition.

C.1 Groupe des automorphismes de \mathbb{C}

Nous allons maintenant déterminer le groupe des automorphismes de \mathbb{C} . Ce résultat, intéressant par lui-même, nous permettra également d'illustrer la classification des singularités isolées.

La proposition suivante va suivre facilement de l'étude des singularités isolées d'une fonction holomorphe.

Proposition 7.14 *Soit $f : D^*(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et injective, définie sur un disque pointé. Alors*

- *soit f possède en a une singularité effaçable ; dans ce cas $f'(a) \neq 0$*
- *soit f présente un pôle simple au point a .*

Preuve Puisque l'application f est injective, elle n'est pas constante, donc elle est ouverte (corollaire 6.18). On observe alors que f n'a pas de singularité essentielle en a . Sinon, l'image de la couronne $\{0 < |z - a| < R/2\}$ serait dense et rencontrerait l'ouvert non vide $f(\{R/2 < |z - a| < R\})$: contradiction avec l'injectivité de f .

Supposons donc que f admette en a une singularité effaçable. Puisque f est injective, il résulte de la structure locale d'une application holomorphe (théorème 6.16) que $f'(a) \neq 0$.

Supposons enfin que f admette en a un pôle d'ordre k . L'application $z \in D^*(a, r) \rightarrow 1/f(z) \in \mathbb{C}$ (définie et holomorphe pour $0 < r \leq R$ assez petit) est injective comme f et admet en a une singularité effaçable. Il résulte de la discussion précédente que a est un zéro simple de $1/f$, et donc que f présente en a un pôle d'ordre 1. \square

On va en déduire le

Théorème 7.15 *Le groupe $\text{Aut } \mathbb{C}$ des automorphismes de \mathbb{C} est l'ensemble des applications*

$$z \in \mathbb{C} \rightarrow \alpha z + \beta,$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^$ et $\beta \in \mathbb{C}$.*

Autrement dit, les automorphismes de \mathbb{C} sont les applications affines (sur le corps \mathbb{C}) et bijectives de la droite complexe dans elle-même.

Preuve Les applications $z \in \mathbb{C} \rightarrow \alpha z + \beta \in \mathbb{C}$ sont des automorphismes de \mathbb{C} pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Soit maintenant $f \in \text{Aut } \mathbb{C}$. On va examiner le comportement de f à l'infini. Comme ce n'est pas bien commode de travailler à l'infini, on va utiliser le changement de variable $z \in \mathbb{C}^* \rightarrow 1/z \in \mathbb{C}^*$ pour se ramener en zéro (voir également le chapitre 11).

On étudie donc le comportement en l'origine de la fonction $g : w \in \mathbb{C}^* \rightarrow f(1/w) \in \mathbb{C}$. Puisque g est injective, comme f , la proposition précédente nous dit que g présente en l'origine une singularité effaçable, ou bien un pôle d'ordre 1. Dans le premier cas, g est bornée au voisinage de 0, donc f est bornée au voisinage de l'infini et il suit du théorème de Liouville 5.9 que f est constante, ce qui est exclu.

Ainsi g a un pôle en l'origine, qui est simple puisque g est injective. La fonction $w \rightarrow w g(w)$ est donc bornée au voisinage de l'origine. En revenant à la fonction f , cela nous dit que $z \rightarrow \frac{f(z)}{z}$ est bornée au voisinage de l'infini, ou encore que f est à croissance sous-linéaire. La proposition 5.10 affirme alors que f est une fonction polynomiale de degré au plus 1. \square

C.2 Groupe des automorphismes du disque

Puisque nous sommes si bien partis avec les automorphismes, nous allons maintenant déterminer ceux du disque unité

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}.$$

Leur description découlera du résultat fondamental suivant.

Théorème 7.16 Lemme de Schwarz

Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors

1. $|f'(0)| \leq 1$ et, pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $|f(z)| \leq |z|$;
2. l'égalité $|f'(0)| = 1$ a lieu
 - si et seulement si il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ non nul avec $|f(z_0)| = |z_0|$
 - si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$ tel que $f(z) = \lambda z$
 - si et si seulement si f est un automorphisme du disque.

Remarque 7.17 – A ce stade, nous avons donc déjà déterminé les automorphismes du disque qui fixent l'origine : ce sont les rotations $j_\lambda : z \rightarrow \lambda z$ où $|\lambda| = 1$.

– On munit \mathbb{D} de la distance euclidienne. Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une application holomorphe qui fixe l'origine. De deux choses l'une : soit f est une rotation, soit f rapproche tout le monde (strictement) de l'origine.

– Cela dit, la distance euclidienne n'est pas la bonne distance à considérer dans ce contexte. On peut vérifier que l'expression

$$d_P(z_1, z_2) = \tanh^{-1} \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|}$$

définit une distance sur \mathbb{D} , qui est invariante sous l'action du groupe $\text{Aut } \mathbb{D}$. On l'appelle la “distance de Poincaré” (ou encore “distance hyperbolique”) sur \mathbb{D} . Une isométrie de (\mathbb{D}, d_P) est un automorphisme du disque, ou un anti-automorphisme (c'est-à-dire composé d'un automorphisme de \mathbb{D} et de l'application $z \in \mathbb{D} \rightarrow \bar{z} \in \mathbb{D}$).

Le lemme de Schwarz-Pick (qui est une version $\text{Aut } \mathbb{D}$ invariante du lemme de Schwarz) affirme qu'une application holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ n'augmente pas les distances hyperboliques : pour tout couple z_1, z_2 de points du disque, on a l'inégalité $d_P(f(z_1), f(z_2)) \leq d_P(z_1, z_2)$; de plus, si il y a égalité pour un couple de points $z_1 \neq z_2$ du disque, l'application f est alors une isométrie de \mathbb{D} . C'est un énoncé fondamental de géométrie en courbure négative.

Le lemme de Schwarz sera conséquence du principe du maximum.

Preuve 1. Puisque f s'annule en l'origine, la fonction $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = f(z)/z$ lorsque $z \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$ est continue sur le disque et holomorphe hors de l'origine, donc holomorphe sur le disque (prolongement de Riemann 4.15).

Soit $0 < r < 1$. Puisque f est à valeurs dans \mathbb{D} , i.e. $|f(z)| < 1$, le principe du maximum 6.23 appliqué à la fonction g sur le disque $\overline{D(0, r)} \subset \mathbb{D}$ montre que

$$|z| \leq r \Rightarrow \left| \frac{f(z)}{z} \right| = |g(z)| \leq \sup_{|z|=r} |g(z)| \leq 1/r.$$

En faisant tendre r vers 1, on obtient que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et que $|f'(0)| \leq 1$.

2. Si f est une homothétie de rapport λ avec $|\lambda| = 1$, les autres propriétés sont vérifiées.

Si $|f'(0)| = 1$, ou bien si il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ non nul avec $|f(z_0)| = |z_0|$, cela signifie que la fonction $|g|$ atteint son maximum (qui vaut alors 1) en un point du disque. La fonction holomorphe g est donc constante, égale à λ avec $|\lambda| = 1$.

Soit maintenant $f \in \text{Aut } \mathbb{D}$ (avec toujours $f(0) = 0$). D'après ce qui précède, on a $|f'(0)| \leq 1$. La même conclusion vaut pour l'application réciproque f^{-1} . On a donc

$$|(f^{-1})'(0)| = |1/f'(0)| \leq 1,$$

et finalement $|f'(0)| = 1$. □

Lemme 7.18 *Soit $a \in \mathbb{D}$. L'application*

$$h_a : z \in \mathbb{D} \rightarrow \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \in \mathbb{D}$$

est un automorphisme du disque tel que $h_a(a) = 0$ et $h_a(0) = a$.

Preuve Si $a = 0$, $h_a = -\text{Id}$. Sinon, l'application homographique

$$h_a : \mathbb{C} \setminus \{1/\bar{a}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1/\bar{a}\}$$

est un biholomorphisme entre ces deux ouverts. On observe que h_a est une involution, i.e. $h_a^2 = \text{Id}$ (si l'on est familier avec la géométrie projective, on peut pour cela se contenter de noter que $h_a^2 : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ est une homographie qui fixe les trois points 0, a et ∞). Elle envoie le cercle unité sur lui-même ; en effet on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$|h_a(e^{it})| = \frac{|a - e^{it}|}{|1 - \bar{a}e^{it}|} = \frac{|a - e^{it}|}{|e^{-it} - \bar{a}|} = 1.$$

Le principe du maximum (corollaire 6.23) montre donc que $h_a(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Puisque h_a est une involution, on obtient bien finalement $h_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. \square

Nous savons maintenant décrire tous les automorphismes du disque.

Corollaire 7.19 *Le groupe $\text{Aut } \mathbb{D}$ est l'ensemble des applications*

$$h_{a,\lambda} : z \in \mathbb{D} \rightarrow \lambda \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \in \mathbb{D},$$

avec $a \in \mathbb{D}$ et $|\lambda| = 1$. Le groupe $\text{Aut } \mathbb{D}$ agit transitivement sur le disque.

Remarque 7.20 – Dire que le groupe $\text{Aut } \mathbb{D}$ agit transitivement sur le disque, c'est dire que d'un point de vue holomorphe tous les points du disque se valent.

– Les éléments de $\text{Aut } \mathbb{D}$ sont des exemples d'applications homographiques (ou homographies).

Preuve Il résulte du lemme précédent que chaque application $h_{a,\lambda} = j_\lambda \circ h_a$, pour $|\lambda|$ de module 1, est bien un automorphisme du disque.

Soit maintenant $f \in \text{Aut } \mathbb{D}$. Il existe un unique point $a \in \mathbb{D}$ pour lequel $f(a) = 0$. Introduisons alors

$$g = f \circ h_a.$$

Par composition, g est maintenant un automorphisme du disque qui fixe l'origine. Le lemme de Schwarz nous assure de l'existence de $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 pour lequel $g = j_\lambda$. On a donc $f = j_\lambda \circ h_a$ comme annoncé. \square

D Ordre d'une fonction elliptique

La fonction de Weierstrass \wp et sa dérivée \wp' fournissent deux exemples de *fonctions elliptiques* : elles sont méromorphes sur \mathbb{C} et doublement périodiques relativement à un réseau Λ . On peut exprimer la périodicité de ces fonctions en disant qu'elles sont en fait définies (et méromorphes) sur l'espace quotient \mathbb{C}/Λ (qu'on appelle une courbe elliptique, mais c'est une autre histoire...)

Soit maintenant f une fonction Λ -elliptique non constante. L'ensemble $P(f)$ de ses pôles, comme l'ensemble $Z(f)$ de ses zéros, est discret et bien sûr stable par translation par le réseau $\Lambda = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$.

La fonction f admet donc dans chaque domaine fondamental

$$K_\varepsilon := \{xu + yv \mid \varepsilon \leq x < 1 + \varepsilon, \varepsilon \leq y < 1 + \varepsilon\}$$

le même nombre fini $Z(f)$ de zéros et $P(f)$ de pôles (que l'on comptera, comme toujours, avec multiplicité). C'est le nombre de zéros, ou de pôles, de la fonction vue sur le quotient \mathbb{C}/Λ . On définira l'*ordre* de la fonction elliptique f comme cette valeur commune

$$\text{ordre}(f) := Z(f) = P(f).$$

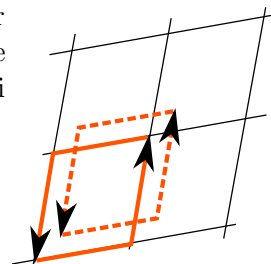
Observer qu'il suit que, dans un domaine fondamental, la fonction f prend autant de fois (avec multiplicité bien sûr) n'importe quelle valeur $c \in \mathbb{C}$!

En effet les fonctions $z \rightarrow f(z)$ et $z \rightarrow f(z) - c$ ont les mêmes pôles avec mêmes multiplicités, donc ont même ordre.

L'ensemble des pôles et des zéros de f étant discret, on peut choisir $\varepsilon \geq 0$ de sorte que le bord ∂K_ε du domaine fondamental K_ε ne contienne ni zéro ni pôle de f . Le principe de l'argument (écrit ici pour le domaine K_ε plutôt que pour un disque) nous donne

$$Z(f) - P(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

par périodicité de f (revoir la fin du chapitre 3 si besoin).



Il est maintenant facile de localiser les zéros de la fonction

$$\wp'(z) = -2 \sum_{w \in \Lambda} (z - w)^{-3},$$

dérivée de la fonction de Weierstrass associée au réseau $\Lambda = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$. La fonction \wp' admet trois zéros simples sur le domaine fondamental

$$K := \{xu + yv \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}.$$

Ce sont les trois points

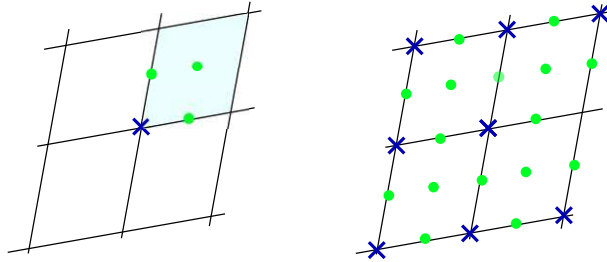
$$\frac{u}{2}, \frac{v}{2} \text{ et } \frac{u+v}{2}.$$

La fonction \wp' admet dans K un unique pôle d'ordre 3 (l'origine) : cette fonction elliptique est donc d'ordre 3. Elle doit donc posséder trois zéros (lorsqu'on les compte avec multiplicité) dans le domaine fondamental K .

Par définition, \wp' est une fonction impaire. On a donc

$$\wp'\left(\frac{u}{2}\right) = -\wp'\left(\frac{-u}{2}\right) = -\wp'\left(\frac{-u}{2} + u\right) = -\wp'\left(\frac{u}{2}\right)$$

par périodicité, donc $\wp'\left(\frac{u}{2}\right) = 0$. Le même raisonnement appliqué à v et $u+v$ montre que les trois points indiqués sont bien zéros de \wp' . Ce sont donc les seuls zéros de \wp' dans K , et ils sont simples.



Les trois zéros et le pôle de \wp' dans K ; les zéros et les pôles \wp' dans \mathbb{C}

Le même raisonnement montre que $\wp(z_1) = \wp(z_2)$ si et seulement si $z_1 = \pm z_2 \pmod{\Lambda}$.

8. Théorème et formule de Cauchy homologiques

A Lacets homologues

Nous avons démontré plus tôt (corollaire 3.16 et théorème 4.6) les résultats suivants, valables pour un ouvert convexe U .

Rappel 8.1 Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert convexe et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soient $\gamma \subset U$ un lacet. Alors

- (1) **Théorème de Cauchy** $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$
- (2) **Formule de Cauchy** pour tout $a \in U$ n'appartenant pas au support de γ on a

$$f(a) \text{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

L'exemple de la fonction $z \in \mathbb{C}^* \rightarrow 1/z \in \mathbb{C}$, et du lacet c_1 paramétrant le cercle unité, nous a convaincu que ce résultat ne pouvait se généraliser sans précautions à un ouvert non convexe. Il est naturel de se poser les deux questions suivantes :

- Donné un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$, quelle condition imposer au lacet $\gamma \subset U$ pour que (1) et (2) soient vrais pour toute fonction holomorphe sur U .
- Caractériser les ouverts connexes $U \subset \mathbb{C}$ pour lesquels (1) et (2) sont satisfaits pour tout lacet $\gamma \subset U$, et toute fonction holomorphe.

Commençons par la première question. Soit a un point n'appartenant pas à U . La fonction $f_a : z \in U \rightarrow 1/(z - a) \in \mathbb{C}$ est alors holomorphe sur U . Demander à ce que le théorème de Cauchy soit satisfait sur le lacet γ pour f_a équivaut à demander que l'indice $\text{Ind}(\gamma, a)$ soit nul.

Définition 8.2 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe.

- Un lacet $\gamma \subset U$ est homologue à 0 lorsque

$$\text{pour tout point } a \notin U, \text{ on a } \text{Ind}(\gamma, a) = 0.$$

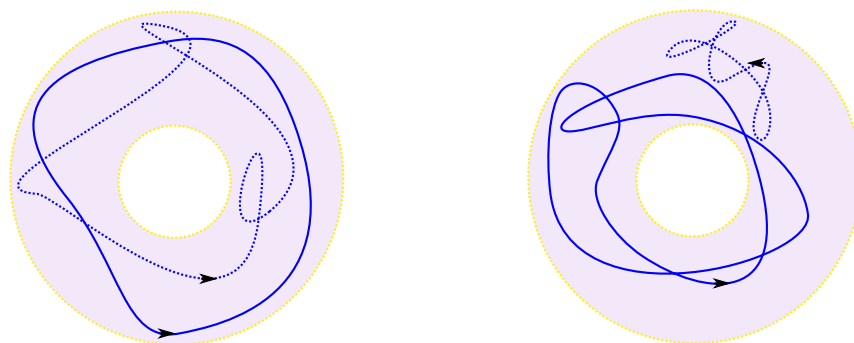
- Deux lacets γ_1 et γ_2 tracés dans U sont homologues lorsque

$$\text{pour tout point } a \notin U, \text{ on a } \text{Ind}(\gamma_1, a) = \text{Ind}(\gamma_2, a).$$

Remarque 8.3 – *Homologue à 0 veut en fait dire “homologue à un lacet constant”.*

– *La notion de lacets homologues est relative à l’ouvert dans lequel on travaille.*

– *Dans un ouvert convexe, tout lacet est homologue à 0.*



Dans un anneau :

deux lacets homologues, mais pas homologues à 0 ; deux lacets homologues à 0.

B Théorème et formule de Cauchy

Théorème 8.4 Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soient $\gamma \subset U$ un lacet homologue à 0. Alors :

- (1) **Théorème de Cauchy** $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$
- (2) **Formule de Cauchy** pour tout $a \in U$ n'appartenant pas au support de γ on a

$$f(a) \operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

Preuve • (1) suit de (2) appliqué à la fonction holomorphe $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = (z - a) f(z)$, pour a choisi dans $U \setminus \gamma$.

• Montrons (2). Comme dans la preuve du cas convexe (théorème 4.6), il s'agit de montrer que

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = 0.$$

La preuve va consister en trois étapes. Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\gamma \subset U$ un lacet.

Lemme 8.5 *L'application $q : U \times U \rightarrow \mathbb{C}$ définie par*

$$q(z, a) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad \text{si } z \neq a \quad \text{et} \quad q(a, a) = f'(a)$$

est continue sur $U \times U$. Pour chaque $z \in U$, l'application

$$q_z : a \in U \rightarrow q(z, a) \in \mathbb{C}$$

est holomorphe.

Preuve Par construction, q est continue hors de la diagonale. La continuité de q au point (a, a) suit de la continuité de la dérivée f' au point a . En effet, soient $z_1, z_2 \in U$ proches de a de sorte que le segment $[z_1, z_2]$ soit inclus dans U . On a

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1) \int_0^1 f'(z_1 + t(z_2 - z_1)) dt.$$

Soit $z \in U$. La fonction q_z est définie et continue sur U , holomorphe sur $U \setminus \{z\}$, donc holomorphe sur U par le théorème de prolongement de Riemann 4.15. \square

Lemme 8.6 *La fonction*

$$h : a \in U \rightarrow \int_{\gamma} q(z, a) dz$$

est holomorphe sur U .

Preuve Conséquence du lemme précédent, et de l'holomorphie sous le signe intégrale (proposition 4.19). \square

Il s'agit maintenant pour obtenir la formule de Cauchy de montrer, en supposant le lacet $\gamma \subset U$ homologue à 0, que la fonction h est nulle sur U .

Lemme 8.7 *On suppose ici que le lacet $\gamma \subset U$ est homologue à 0 et on introduit*

$$\Omega_{\gamma} := \{a \in \mathbb{C} \setminus \gamma, \text{ Ind}(\gamma, a) = 0\}.$$

- L'ensemble $\Omega_{\gamma} \subset \mathbb{C}$ est un voisinage ouvert de l'infini, et $\mathbb{C} = U \cup \Omega_{\gamma}$.
- La fonction

$$k : a \in \Omega_{\gamma} \rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

est holomorphe sur Ω_{γ} . On a $k(a) \rightarrow 0$ lorsque $|a| \rightarrow \infty$.

- Les fonctions k et h coïncident sur leur domaine commun de définition $U \cap \Omega_{\gamma}$.

Preuve

- On a vu que Ω_γ est un voisinage ouvert de l'infini (proposition 4.2). Dire que $\gamma \subset U$ est homologue à 0, c'est dire que le complémentaire de U est inclus dans Ω_γ .
- Le fait que k soit holomorphe découle de nouveau de l'holomorphicité sous le signe intégrale.
- Lorsque $a \in \Omega_\gamma \cap U$, on a par définition de l'indice :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a} dz = f(a) \operatorname{Ind}(\gamma, a) = 0.$$

Il suit que $h(a) = k(a)$. □

Preuve du théorème Le lemme précédent assure que les fonctions h et k sont restrictions d'une même fonction entière qui tend vers 0 à l'infini. Le théorème de Liouville 5.9 assure que cette fonction est identiquement nulle, ce qu'on voulait. □

On va en déduire le corollaire suivant.

Corollaire 8.8 Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, γ_1 et γ_2 deux lacets homologues de U et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors :

- (1) **Théorème de Cauchy** $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$
- (2) **Formule de Cauchy** pour tout $a \in U$ n'appartenant pas à la réunion des supports des lacets γ_1 et γ_2 , on a

$$f(a) \left(\operatorname{Ind}(\gamma_1, a) - \operatorname{Ind}(\gamma_2, a) \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Commençons par un petit rappel de topologie.

Lemme 8.9 Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe.

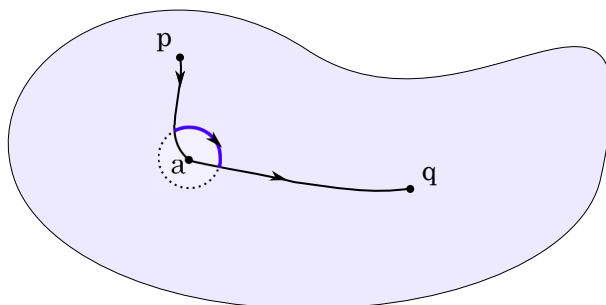
- L'ouvert U est connexe par arcs continus et C^1 par morceaux.
- Soit $a \in U$. L'ouvert $U \setminus \{a\}$ est encore connexe (et donc connexe par arcs continus et C^1 par morceaux).

Preuve On définit une relation d'équivalence \mathcal{R} sur l'ouvert U en décidant que $p\mathcal{R}q$ ssi il existe un chemin continu et C^1 par morceaux, tracé dans U , et joignant p à q . Les classes de cette relation sont ouvertes (car tout point d'une boule $B(p, \varepsilon) \subset U$ est joint à p par un segment tracé dans cette boule – autrement dit l'ouvert U est localement connexe par arcs C^1 par morceaux). Les classes sont donc également fermées, ce qui prouve le premier point.

Soient maintenant $p, q \in U \setminus \{a\}$ et choisissons $\varepsilon < \inf(d(p, a), d(q, a))$. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ un chemin (continu, ou continu et C^1 par morceaux) joignant p à q . Si γ est tracé dans $U \setminus \{a\}$ on est satisfaits. Sinon on introduit

$$t_0 = \inf\{t \in [0, 1], |\gamma(t) - a| = \varepsilon\} \text{ et } t_1 = \sup\{t \in [0, 1], |\gamma(t) - a| = \varepsilon\}.$$

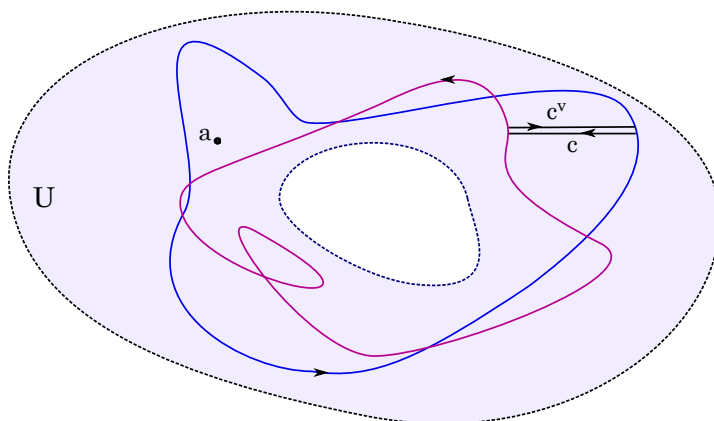
On définit un chemin $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U \setminus \{a\}$ de p à q en posant $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ pour $0 \leq t \leq t_0$ ou $t_1 \leq t \leq 1$, et en décidant que $\tilde{\gamma}([t_0, t_1])$ décrit l'un des arcs du cercle $\{|z - a| = \varepsilon\}$ joignant $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t_1)$. \square



On prend la rocade pour éviter le centre

Preuve du corollaire

Supposons γ_1 et γ_2 paramétrés par l'intervalle $[0, 1]$ et notons $x_1 = \gamma_1(0)$ et $x_2 = \gamma_2(0)$. Le lemme précédent assure qu'il existe un chemin c d'extrémités x_1 et x_2 , et tracé dans $U \setminus \{a\}$. Formons le lacet $\gamma := \gamma_1 * c * \gamma_2^\vee * c^\vee$. On observe que, puisque γ_1 et γ_2 sont homologues, le lacet γ est homologue à 0. Ces deux résultats suivent donc du théorème et de la formule de Cauchy 8.4, les contributions de c et de c^\vee aux intégrales se compensant. \square



C Espaces simplement connexes

Ce paragraphe (homotopie, espaces simplement connexes et application conforme de Riemann) n'est pas au programme de l'examen.

Dans cette section “culturelle”, nous nous intéresserons à la seconde question : quels sont les ouverts connexes $U \subset \mathbb{C}$ dans lesquels la formule et le théorème de Cauchy sont vérifiés, et ce, pour tout lacet $\gamma \subset U$ et toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{H}(U)$.

Il ressort des discussions précédentes que ce sont les ouverts dans lesquels tout lacet est homologue à zéro.

Proposition-Définition 8.10 *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. On dit que l'ouvert U est homotologiquement trivial lorsqu'il satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1. *tout lacet de U est homologue à 0*
2. *toute fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe possède une primitive sur U .*
3. *pour tout point $a \notin U$, la fonction $f_a : z \in U \rightarrow 1/(z - a) \in \mathbb{C}$ admet une primitive sur U*

Lorsque ces propriétés sont satisfaites, toute fonction holomorphe sur U ne s'y annulant pas possède un logarithme et des racines k -ièmes ($k \geq 1$) holomorphes.

Preuve L'implication $1 \Rightarrow 2$ résulte du théorème de Cauchy 8.4, et du théorème 3.13 (critère pour l'existence d'une primitive).

$2 \Rightarrow 3$ est immédiat.

Supposons 3 vrai. Pour $a \notin U$, la fonction f_a admet une primitive sur U , et son intégrale sur tout lacet $\gamma \subset U$ est donc nulle. On a donc bien $\text{Ind}(\gamma, a) = 0$.

L'assertion sur le logarithme et les racines k -ièmes se montre comme dans la proposition 3.18. \square

Un théorème fondamental dû à Riemann affirme que ces conditions, qui portent sur l'ensemble $\mathcal{H}(U)$ des fonctions holomorphes sur U (conditions 2 et 3) ou bien sur la façon dont U est plongé dans \mathbb{C} (condition 1), reflètent en fait une propriété topologique intrinsèque de l'ouvert U . Pour l'énoncer, nous devons introduire la notion d'homotopie.

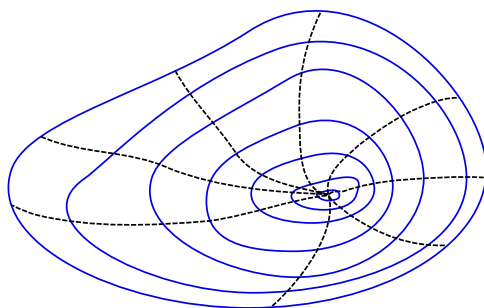
Contrairement à ce dont nous avons convenu jusqu'ici, un “lacet” signifiera maintenant (et seulement dans cette section) “lacet continu” (et non continu et C^1 par morceaux).

Définition 8.11 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Un lacet continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ est homotope à 0 lorsqu'il existe une application continue $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ telle que

- pour tout $s \in [0, 1]$, l'application $H_s : t \in [0, 1] \rightarrow H(s, t) \in U$ est un lacet continu de U
- le lacet H_0 est un lacet constant
- pour $t \in [0, 1]$, on a $H(1, t) = \gamma(t)$, i.e. $H_1 = \gamma$.

On dit que H est une homotopie entre le lacet γ et le lacet constant H_0 .

La famille de lacets H_s fournit donc une déformation continue du lacet initial γ vers un lacet constant.



En plein, les lacets $t \rightarrow H_s(t)$. En pointillés, les chemins $s \rightarrow H(s, t)$.

Exemple 8.12 • L'application $H : (r, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow re^{2i\pi t} \in \mathbb{C}$ réalise une homotopie entre le lacet constant égal à 0 et le lacet $c_1 : t \in [0, 1] \rightarrow e^{2i\pi t}$.
 • Dans \mathbb{C} , ou dans un ouvert convexe $U \subset \mathbb{C}$, tout lacet est homotope à 0.

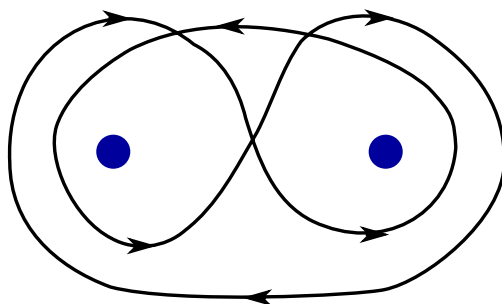
Proposition 8.13 Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et γ un lacet tracé dans U . Si γ est homotope à 0, il est homologue à 0.

Preuve Nous ne détaillerons pas la preuve. Présentons en les grandes lignes. Soient $a \in \mathbb{C} \setminus U$ et H une homotopie entre $\gamma = H_1$ et un lacet constant H_0 . Nous voulons montrer que l'indice $\text{Ind}(\gamma, a)$ est nul.

Le “raisonnement géométrique” mené après la définition de l'indice (4.1) permet de montrer que l'indice $I(s) := \text{Ind}(H_s, a)$ est localement constant : utiliser l'uniforme continuité de H pour recouvrir le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ par n^2 petits carrés $[j/n, (j+1)/n] \times [k/n, (k+1)/n]$ dont les images par H sont contenues dans des domaines (par exemple des boules) dans lesquels la fonction $f_a : z \rightarrow 1/(z - a)$ a une primitive.

L'intervalle $[0, 1]$ étant connexe l'indice $I(s)$, qui est localement constant, est constant. Comme H_0 est un lacet trivial, on a $I(0) = 0$ et donc $I(1) = 0$ comme annoncé. \square

Exemple 8.14 Par contre il faut remarquer qu'un lacet homologue à 0 n'est pas toujours homotope à 0. Donnons, sans démonstration, un exemple de lacet homologue à 0 dont on pourra se convaincre expérimentalement qu'il n'est pas homotope à 0. L'ouvert U est ici le plan complexe privé de deux points, ou de deux disques. La démonstration requiert cependant un peu de technique (théorème de van Kampen).



Définition 8.15 Un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$ est simplement connexe lorsque tout lacet $\gamma \subset U$ est homotope à 0.

On vérifie sans peine que la simple connexité est une propriété topologique, c'est-à-dire invariante par homéomorphisme. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de l'application conforme de Riemann. Rappelons qu'une application holomorphe dont la dérivée ne s'annule pas préserve les angles orientés : elle est conforme.

Théorème 8.16 Théorème de l'application conforme de Riemann

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. l'ouvert U est simplement connexe (tout lacet de U est homotope à 0)
2. l'ouvert U est homologiquement trivial (autrement dit, tout lacet de U est homologue à 0)
3. toute fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ ne s'annulant pas admet une racine carrée holomorphe
4. ou bien $U = \mathbb{C}$; ou bien il existe un biholomorphisme $h : U \rightarrow \mathbb{D}$ entre U et le disque unité.

Il y a donc, à biholomorphismes près, un unique modèle pour tous les ouverts $U \subsetneq \mathbb{C}$ qui sont simplement connexes : le disque. On dit que ces

ouverts sont uniformisés par le disque, le biholomorphisme $h : U \rightarrow \mathbb{D}$ étant une uniformisation de U .

Éléments de preuve On a vu

* $1 \Rightarrow 2$ (proposition 8.13)

* $2 \Rightarrow 3$ (proposition 8.10)

* $4 \Rightarrow 1$ (la simple connexité est une propriété topologique). □

* Le fait que $3 \Rightarrow 4$ est le coeur de l'affaire. La démonstration, même si elle reste accessible avec nos moyens, est un peu délicate. Nous admettrons donc ce point pour l'instant. Il fera l'objet du chapitre 12. Nous y évoquerons également quelques exemples.

9. Séries de Laurent

A Fonctions holomorphes sur un anneau

Pour $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, on note

$$A = A(R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z| < R_2\}$$

l'anneau de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 . Par exemple :

- $A(0, R) = D^*(0, R)$ (disque pointé de rayon R)
- $A(0, \infty) = \mathbb{C}^*$.

Notre but est de décrire toutes les fonctions holomorphes sur l'anneau A . Commençons par donner un exemple de construction d'une telle fonction.

Définition 9.1 Une série de Laurent sur l'anneau $A(R_1, R_2)$ est une série de fonctions

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

où

- la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge sur le disque $D(0, R_2)$
- la série entière $\sum_{n \geq 1} a_{-n} z^n$ converge sur le disque $D(0, 1/R_1)$.

En particulier, la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ converge normalement sur tout anneau fermé $\overline{A(r_1, r_2)} \subset A(R_1, R_2)$.

Lemme 9.2 Soit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ une série de Laurent sur l'anneau $A(R_1, R_2)$, et $f : A(R_1, R_2) \rightarrow \mathbb{C}$ sa somme.

1. La fonction f est holomorphe.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et tout rayon $r \in]R_1, R_2[$, on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt. \quad (*)$$

Preuve La série converge uniformément sur tout compact de $A(R_1, R_2)$. L'holomorphicité de f suit donc du théorème 4.17, et on obtient l'expression des a_n en intervertissant somme et intégrale. \square

On va voir que toutes les fonctions holomorphes sur l'anneau s'obtiennent de cette façon. Comment faire? Le développement en série entière d'une fonction holomorphe sur le disque avait résulté de la formule de Cauchy dans un disque, et de l'analyticité de la fonction $z \rightarrow 1/z$ (voir 4.10). Nous allons procéder ici de la même façon, et commencerons donc par démontrer une formule de représentation intégrale valable pour les fonctions holomorphes sur un anneau.

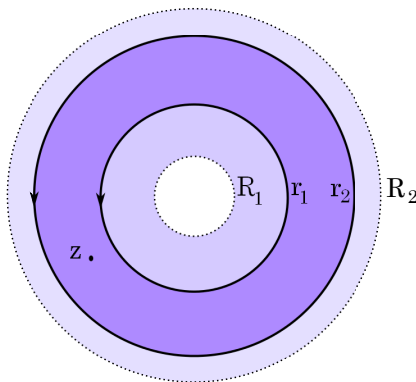
B Développement en série de Laurent

Notation 9.3 Soit $r > 0$. On notera c_r le lacet $t \in [0, 2\pi] \rightarrow re^{it} \in \mathbb{C}$. Son image est le cercle de rayon r , parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

Proposition 9.4 Formule de Cauchy dans un anneau

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur l'anneau $A := \overline{A(R_1, R_2)}$. On se donne $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, de sorte qu'on ait l'inclusion $A(r_1, r_2) \subset A(R_1, R_2)$. Pour tout $z \in A(r_1, r_2)$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_{r_2}} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{c_{r_1}} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$



Preuve Les lacets c_{r_1} et c_{r_2} sont homologues dans l'anneau A ; en effet

$$\begin{aligned} \text{pour } |a| \leq R_1 : \operatorname{Ind}(c_{r_1}, a) &= \operatorname{Ind}(c_{r_2}, a) = 1 \\ \text{pour } R_2 \leq |a| : \operatorname{Ind}(c_{r_1}, a) &= \operatorname{Ind}(c_{r_2}, a) = 0. \end{aligned}$$

La proposition est donc une application immédiate du corollaire 8.8 puisque, lorsque $z \in A(r_1, r_2)$, on a $\operatorname{Ind}(c_{r_1}, z) = 0$ et $\operatorname{Ind}(c_{r_2}, z) = 1$. \square

De la formule de Cauchy dans un anneau va résulter le

Théorème 9.5 Développement en série de Laurent

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur l'anneau $A := A(R_1, R_2)$. La fonction f admet un unique développement

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

en série de Laurent sur A : la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ converge normalement vers f sur les compacts de A . Les coefficients a_n vérifient, pour tout $r \in]R_1, R_2[$, l'identité

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt. \quad (*)$$

Remarque 9.6 – La formule de Cauchy homologique assure que le terme de droite dans (*) ne dépend pas de r . On peut en effet écrire

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz. \quad (*)$$

Preuve Supposons que f admette un développement en série de Laurent. Les identités (*), et donc l'unicité du développement de f en série de Laurent sur A , suivent du lemme 9.2.

Passons à l'existence. Soient $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, de sorte que $\overline{A(r_1, r_2)} \subset A(R_1, R_2)$. On va commencer par montrer que f admet un développement en série de Laurent dans l'anneau ouvert $A(r_1, r_2)$. La formule de Cauchy dans cet anneau (corollaire 9.4) donne, pour tout point $z \in A(r_1, r_2) \subset A$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r_2 e^{it})}{r_2 e^{it} - z} r_2 e^{it} dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r_1 e^{it})}{r_1 e^{it} - z} r_1 e^{it} dt.$$

Puisque $r_1 < |z| < r_2$, on réécrit cette expression sous la forme :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r_2 e^{it})}{1 - \frac{z}{r_2 e^{it}}} dt + \frac{1}{2\pi z} \int_0^{2\pi} \frac{f(r_1 e^{it})}{1 - \frac{r_1 e^{it}}{z}} r_1 e^{it} dt.$$

Le résultat suit alors de l'identité $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$, valable pour $|u| < 1$, la convergence normale de cette série permettant d'intervertir sommes et intégrales. On obtient en effet d'une part

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r_2 e^{it})}{1 - \frac{z}{r_2 e^{it}}} dt = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{2\pi r_2^n} \int_0^{2\pi} f(r_2 e^{it}) e^{-int} dt \right) z^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n,$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi z} \int_0^{2\pi} \frac{f(r_1 e^{it})}{1 - \frac{r_1 e^{it}}{z}} r_1 e^{it} dt &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{r_1^{n+1}}{2\pi z} \left(\int_0^{2\pi} f(r_2 e^{it}) e^{i(n+1)t} dt \right) z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi r_1^{-n}} \int_0^{2\pi} f(r_1 e^{it}) e^{int} dt \right) z^{-n} \\ &= \sum_{n \geq 1} a_{-n} z^{-n}. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré l'existence de coefficients $a_n = a_n(r_1, r_2)$ tels $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(r_1, r_2) z^n$ pour tout $z \in A(r_1, r_2)$. L'unicité du développement en série de Laurent assure que ces coefficients ne dépendent pas de r_1 et r_2 , et donc que l'identité

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

est valable sur tout l'anneau $A(R_1, R_2)$. □

Corollaire 9.7 Décomposition de Laurent

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur l'anneau $A := A(R_1, R_2)$. Il existe un unique couple de fonctions (g, h) tel que

1. g est holomorphe sur le disque $D(0, R_2)$
2. h est holomorphe sur l'anneau $A(R_1, \infty)$ (complémentaire du disque fermé $\overline{D(0, R_1)}$), et tend vers 0 à l'infini
3. $f = g + h$.

La fonction g est la partie régulière de f , et h est sa partie principale.

Preuve L'existence est conséquence du développement en série de Laurent de f , soit

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n,$$

en prenant $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $h(z) = \sum_{n < 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 1} a_{-n} z^{-n}$.

Pour l'unicité, supposons que f admette deux telles décompositions

$$f = g + h = g_1 + h_1.$$

Les fonctions $g - g_1$ (définie sur $D(0, R_2)$) et $h_1 - h$ (définie sur $A(R_1, \infty)$) coïncident sur l'anneau A , et sont donc restrictions à A d'une même fonction entière qui tend vers 0 à l'infini. On conclut par le théorème de Liouville. □

Nous terminons ce paragraphe en revenant sur le cas d'une fonction holomorphe présentant une singularité isolée.

Remarque 9.8 Soit $f : D^*(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Soit $f = g + h$ sa décomposition de Laurent.

La partie régulière g est holomorphe sur le disque $D(0, R)$.

La partie principale h est une fonction holomorphe définie sur tout \mathbb{C}^* . La fonction $z \rightarrow h(1/z)$ se prolonge une fonction entière nulle en 0.

Proposition 9.9 Soient $f : D^*(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur un disque pointé, et $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ son développement en série de Laurent. La fonction présente en l'origine

1. une singularité effaçable si et seulement si $a_n = 0$ pour tout $n < 0$
2. un pôle si et seulement si l'ensemble $\{n < 0 \mid a_n \neq 0\}$ est fini ; l'ordre du pôle est alors $\bar{o}_0 f = -\inf\{n < 0 \mid a_n \neq 0\}$
3. une singularité essentielle si et seulement si $\{n < 0 \mid a_n \neq 0\}$ est infini.

Preuve Les équivalences (1) et (2) découlent de l'unicité du développement en série de Laurent. On a une singularité essentielle en l'origine lorsque ce point n'est ni une singularité effaçable, ni un pôle. \square

Bien entendu, tout ce qui vient d'être fait (par commodité de notation) pour un anneau centré en l'origine se transpose sans difficulté à tout anneau $A_{z_0}(R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\}$.

C Théorème des résidus

Définition 9.10 Soient $f : D^*(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur un disque pointé, et

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

son développement en série de Laurent. Le résidu de f en z_0 est

$$\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}.$$

Remarque 9.11 Le résidu a_{-1} est l'obstruction à ce que la fonction f admette une primitive sur $D^*(z_0, R)$. Ecrivons en effet

$$f(z) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -1}} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} =: f_0 + f_1.$$

La fonction f_0 admet pour primitive F_0 , définie pour $z \in D^*(z_0, R)$ par

$$F_0(z) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -1}} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}.$$

Par contre $f_1(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0}$ n'admet de primitive sur $D^*(z_0, R)$ que si $a_{-1} = 0$.

Il faudra savoir calculer des résidus. A cet effet :

Proposition 9.12 — Si f a un pôle simple en z_0 , on a $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$
 — Si $f = g/h$, où g et h sont holomorphes sur le disque $D(z_0, R)$, et telles que $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ et $h'(z_0) \neq 0$, la fonction f a un pôle simple en z_0 , et $\text{Res}(f, z_0) = g(z_0)/h'(z_0)$
 — En particulier, si f a un zéro simple en z_0 , $\text{Res}(1/f, z_0) = 1/f'(z_0)$
 — Si f a un pôle d'ordre au plus k en z_0 , et $g(z) := (z - z_0)^k f(z)$, alors $\text{Res}(f, z_0) = g^{(k-1)}(z_0)/(k-1)!$

Preuve Immédiat. □

Pour une singularité essentielle en z_0 , le calcul du résidu n'est pas aussi simple que pour les exemples précédents. Mais, dans tous les cas, la formule intégrale suivante qui ré-exprime le fait que $\text{Res}(f, z_0)$ est l'obstruction à ce que f admette une primitive sur le disque pointé reste valable.

Lemme 9.13 Soient f holomorphe sur $D^*(z_0, R)$ et $0 < r < R$. On a

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} f(z) dz,$$

où $c_r : t \in [0, 2\pi] \rightarrow z_0 + re^{it} \in \mathbb{C}$.

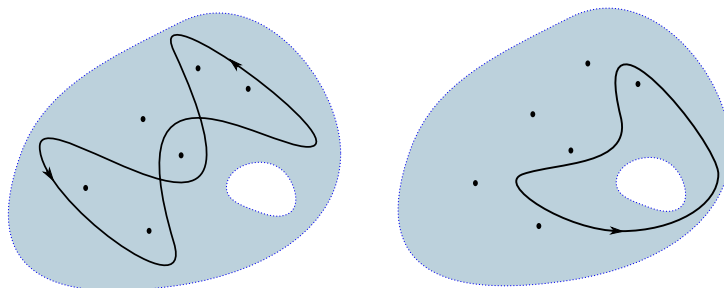
Preuve Vu au lemme 9.2 : la série de Laurent de f converge normalement sur le support du lacet c_r . On peut donc intégrer terme à terme. □

Le théorème des résidus va globaliser ce résultat.

Théorème 9.14 Théorème des résidus

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $\gamma \subset U$ un lacet homologue à 0 dans U . Soient z_1, \dots, z_p des points distincts de $U \setminus \gamma$, et $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_p\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, présentant des singularités isolées en z_1, \dots, z_p . Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^p \text{Res}(f, z_j) \text{Ind}(\gamma, z_j).$$



A gauche le théorème des résidus s'applique (que donne-t-il ?) ; pas à droite

Preuve Soit $f = g_j + h_j$ la décomposition de Laurent de f en z_j , pour $j \in \{1, \dots, p\}$. La partie principale h_j est définie et holomorphe sur tout $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ (remarque 9.8) et y admet un développement

$$h_j(z) = \sum_{n \geq 1} a_{-n,j} (z - z_j)^{-n}$$

normalement convergent sur le complémentaire dans \mathbb{C} de tout disque centré en z_j , et donc sur le support de γ .

Introduisons la fonction définie par $F := f - \sum_{j=1}^p h_j$ sur $U \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$. Cette fonction F possède en chaque z_j une singularité effaçable. Elle se prolonge donc en une fonction holomorphe sur U , que l'on note encore F . Puisque le lacet $\gamma \subset U$ est homologue à 0, le théorème de Cauchy 8.4 nous dit que $\int_{\gamma} F(z) dz = 0$.

Nous avons donc

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^p \int_{\gamma} h_j(z) dz = \sum_{j=1}^p a_{-1,j} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_j},$$

d'où le résultat annoncé puisque $\text{Res}(f, z_j) = a_{-1,j}$. \square

En procédant comme dans le corollaire 8.8, on déduit du théorème des résidus l'énoncé suivant.

Corollaire 9.15 Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, γ_1 et γ_2 deux lacets homologues de U . Soient z_1, \dots, z_p des points distincts de U pris hors des supports de γ_1 et de γ_2 . Soit $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_p\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe présentant des singularités isolées en z_1, \dots, z_p . Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz \right) = \sum_{j=1}^p \text{Res}(f, z_j) (\text{Ind}(\gamma_1, z_j) - \text{Ind}(\gamma_2, z_j)).$$

Remarque 9.16 Le théorème des résidus nous permet de retrouver le principe de l'argument 7.10.

En effet, si f est une fonction méromorphe non identiquement nulle sur l'ouvert connexe U , les pôles du quotient f'/f sont exactement les pôles et les zéros de f , avec :

- si z_0 est un zéro d'ordre k de f , $\text{Res}(f'/f, z_0) = k$
- si z_0 est un pôle d'ordre k de f , $\text{Res}(f'/f, z_0) = -k$.

D *Ordre d'une fonction elliptique, suite*

Le théorème des résidus va nous permettre de montrer que l'ordre d'une fonction elliptique (non constante) est au moins 2.

On procède comme dans le chapitre 7, et on choisit un domaine fondamental K_ε pour le réseau Λ de sorte que le bord ∂K_ε de ce domaine fondamental ne contienne pas de pôle de f .

Compte tenu de la périodicité de f , le théorème des résidus s'écrit

$$\sum_{j=1}^p \operatorname{Res}(f, z_j) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K_\varepsilon} f(z) dz = 0,$$

où z_1, \dots, z_p sont les pôles de f dans K_ε . Lorsque la fonction f admet un pôle simple en z_0 , son résidu en ce point est non nul. Ceci prouve que f a au moins deux pôles dans K_ε , comptés avec multiplicité.

10. Produits infinis

A Prescrire les zéros d'une fonction holomorphe

Rappelons que si $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe, et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe non identiquement nulle, l'ensemble $Z(f) \subset U$ de ses zéros est une partie fermée et discrète de U (de façon équivalente, $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans U). En particulier, $Z(f)$ est fini ou dénombrable.

Il est facile de prescrire un nombre fini de zéros $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset U$, de multiplicités respectives $m_n \in \mathbb{N}^*$: considérer le polynôme $\prod_{n=1}^k (z - \alpha_n)^{m_n}$. Le théorème suivant affirme plus généralement que l'on peut prescrire l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe sur U , avec leurs multiplicités, du moment que cet ensemble ne s'accumule pas dans U .

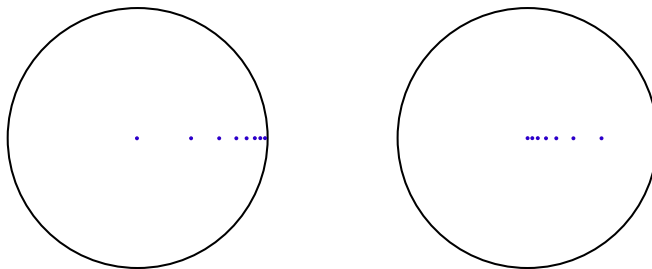
Théorème 10.1 Fonction holomorphe avec zéros prescrits

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points distincts de U , et une suite (m_n) d'entiers strictement positifs. On suppose que l'ensemble $A = \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'a pas de point d'accumulation dans U . Il existe alors une fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- l'ensemble des zéros de f est A
- chaque α_n est un zéro de f de multiplicité m_n .

Exemple 10.2 – Il existe une fonction holomorphe f sur le disque unité dont l'ensemble des zéros soit $Z(f) = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

— La seule fonction holomorphe sur le disque qui s'annule en chaque point $\alpha_n = 1/n$ (pour $n \geq 2$) est la fonction nulle.



Les zéros d'une fonction holomorphe peuvent s'accumuler sur le bord de l'ouvert

L'idée de la preuve est bien sûr de prendre des produits comme dans le cas où A est un ensemble fini. Mais cette fois-ci il faudra considérer des produits infinis en s'assurant d'une part de la convergence du produit, et d'autre part que le produit ne s'annule que lorsqu'un des facteurs s'annule. Nous nous contenterons de démontrer le théorème lorsque $U = \mathbb{C}$. Le cas général reprend les mêmes idées, mais la preuve est plus technique.

B Produits infinis

Nous commençons par les produits infinis de nombres complexes, avant de passer aux produits infinis de fonctions.

Définition 10.3 Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On dit que le produit infini $\prod_0^\infty z_n$ converge lorsque les produits finis $P_k := \prod_0^k z_n$ ont une limite lorsque $k \rightarrow \infty$, et on définit

$$\prod_0^\infty z_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_0^k z_n.$$

Remarque 10.4 – Supposons que le produit infini $\prod_0^\infty z_n$ existe et soit non nul. Alors chaque facteur z_n est non nul, et on a $z_n = P_n/P_{n-1} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1$.

– Par contre il se peut que chaque facteur soit non nul, mais que le produit soit nul. Prendre $z_n = 1/2$ pour tout n .

Nous noterons désormais $z_n = 1 + u_n$.

Proposition 10.5 Supposons que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| < \infty$ (convergence absolue). Alors le produit infini $\prod_0^\infty (1 + u_n)$ converge, et n'est nul que si l'un des facteurs est nul.

Remarque 10.6 La réciproque est fausse. Prendre une suite ε_n tendant (lentement) vers 0, et définir $z_{2n} = (1 + \varepsilon_n)$ et $z_{2n+1} = (1 + \varepsilon_n)^{-1}$.

Preuve L'hypothèse assure que $u_n \rightarrow 0$, et donc que $1 + u_n \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Désignons par $\ell : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$ la détermination principale du logarithme. Puisque $\ell(1) = 0$ et $\ell'(1) = 1$, on a $|\ell(1 + u)| \leq 2|u|$ pour tout complexe u de module suffisamment petit.

On peut donc supposer, quitte à oublier les premiers termes du produit, que $\ell(1 + u_n)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et vérifie $|\ell(1 + u_n)| \leq 2|u_n|$. La série $\sum_{n=0}^\infty \ell(1 + u_n)$ converge donc vers un nombre complexe $b \in \mathbb{C}$. La relation $\exp(\ell(u) + \ell(v)) = \exp(\ell(u)) \exp(\ell(v)) = uv$, et la continuité de la fonction exponentielle, assurent alors que le produit infini converge vers $e^b \neq 0$. D'où le résultat. \square

Passons aux produits infinis de fonctions. La fonction \exp est uniformément continue sur tout demi-plan $\{\operatorname{Re} z \leq M\}$. On a donc le

Lemme 10.7 Soit $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble E . On suppose que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur E et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $p \in E$, on ait $\operatorname{Re} f(p) \leq M$. Alors la suite de fonctions e^{f_n} converge uniformément vers e^f sur E .

Preuve Suit de $|e^{f_n} - e^f| = |e^f| |e^{f_n - f} - 1| \leq e^M |e^{f_n - f} - 1|$ et de la continuité de la fonction exponentielle. \square

Théorème 10.8 Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et une suite $u_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ de fonctions holomorphes ($n \in \mathbb{N}$). On suppose que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ converge normalement sur tout compact de U . Alors

1. la suite des produits $P_k(z) := \prod_{n=0}^k (1 + u_n(z))$ converge uniformément sur tout compact de U ; on note $P(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n(z))$ sa limite
2. le produit infini $z \rightarrow P(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n(z))$ est holomorphe sur U
3. si $P(z_0) = 0$, l'un des facteurs $1 + u_n(z_0)$ est nul
4. un zéro z_0 du produit P annule un nombre fini de facteurs, et les multiplicités (ou ordres) s'additionnent

$$o_{z_0}(P) = \sum_{n=0}^{\infty} o_{z_0}(1 + u_n).$$

Remarque 10.9 En particulier lorsque U est connexe et aucun des facteurs $1 + u_n$ n'est identiquement nul, le produit P n'est pas identiquement nul.

Preuve Soit $K \subset U$ un compact. L'hypothèse assure qu'il existe un entier n_K tel que pour tous $n \geq n_K$ et tout $z \in K$, le logarithme $\ell(1 + u_n(z))$ soit bien défini et vérifie $|\ell(1 + u_n(z))| \leq 2|u_n(z)|$. Le lemme 10.7 et la preuve de la proposition 10.5 assurent la convergence uniforme du produit infini sur le compact K .

La fonction P est donc holomorphe comme limite uniforme locale de fonctions holomorphes (théorème 4.17). Les assertions sur les zéros et les multiplicités suivent de la proposition 10.5. \square

On souhaitera également savoir dériver un produit infini. Noter que, dans le cas d'un produit de fonctions, il est plus judicieux de considérer la dérivée logarithmique, qui sera une fonction méromorphe.

Proposition 10.10 On reprend les notations et les hypothèses du théorème 10.8. On note $f_n(z) = 1 + u_n(z)$, de sorte que $P(z) = \prod_{n=0}^{\infty} f_n(z)$. Soit $Z(P) \subset U$ l'ensemble des zéros de P . Alors la série de fonctions f'_n/f_n converge uniformément, sur tout compact de l'ouvert $U_0 := U \setminus Z(P)$, vers la dérivée logarithmique

$$\frac{P'}{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'_n}{f_n}.$$

Preuve On observe que, pour chaque entier k , la dérivée logarithmique du produit fini $P_k = \prod_{n=0}^k f_n$ est bien définie sur U_0 et vaut

$$\frac{P'_k}{P_k} = \sum_{n=0}^k \frac{f'_n}{f_n}.$$

Soit $K \subset U_0 \subset U$ un compact. Il suit des théorèmes 10.8 et 5.15 que les suites de fonctions holomorphes (P_k) et (P'_k) convergent uniformément sur K , respectivement vers P et P' .

Puisque ni P , ni aucun des produits finis P_k , ne s'annule sur le compact K , il existe donc deux constantes $0 < m_0 < m_1$ telles que, pour tout entier k et tout $z \in K$, on ait $m_0 \leq |P_k(z)| \leq m_1$, $m_0 \leq |P(z)| \leq m_1$ et $|P'_k(z)| \leq m_1$. La suite de fonctions P'_k/P_k converge donc uniformément sur K vers le quotient P'/P . \square

C Un exemple : factorisation de la fonction sinus

La fonction définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $f_0(z) = \sin \pi z = (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})/2$ est une fonction entière dont les zéros, tous simples, sont les points de \mathbb{Z} . Nous pouvons également considérer le produit infini

$$P(z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

dont la convergence suit immédiatement du théorème 10.8, la série $\sum 1/n^2$ étant convergente. Les deux fonctions f_0 et P ont donc mêmes zéros avec mêmes multiplicités. Nous allons en fait voir qu'il s'agit d'une seule et même fonction !

Théorème 10.11 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a l'égalité*

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Preuve Il suit de la proposition 10.10 que la fonction P a pour dérivée logarithmique

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

La dérivée logarithmique de f_0 se calcule directement, et on obtient

$$\frac{f'_0(z)}{f_0(z)} = \pi \cot \pi z.$$

Le lemme ci-dessous assure que les fonctions P et f_0 ont même dérivée logarithmique, et donc que le quotient $h : z \rightarrow \frac{P(z)}{\sin \pi z}$ (qui est une fonction méromorphe dont les singularités sont effaçables) est une fonction constante. Le résultat suit de ce que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, et donc $h(0) = 1$. \square

Lemme 10.12 *On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'identité*

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}. \quad (*)$$

Preuve On observe que, puisque la série de terme général $1/n^2$ converge, la série de fonctions méromorphes $\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$ converge uniformément sur les compacts de \mathbb{C} (voir la définition 7.11).

Les fonctions méromorphes apparaissant de part et d'autre de (*) ont même ensemble de pôles (l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs), qui sont tous d'ordre 1 et de résidu égal à 1. La différence

$$h : z \rightarrow \pi \cot \pi z - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

n'a donc que des singularités effaçables, et se prolonge en une fonction entière. Nous voulons montrer que cette fonction est nulle. On observe déjà que, puisque $\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + O(z)$ lorsque $z \rightarrow 0$, la fonction h s'annule en 0. Nous allons montrer qu'elle est constante en étudiant sa dérivée.

La convergence uniforme locale de la série de fonctions méromorphes assure qu'on peut dériver terme à terme (proposition 7.12). Il vient donc

$$\begin{aligned} h'(z) &= -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} + \frac{1}{z^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2 + n^2}{(z^2 - n^2)^2} \\ &= -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} + 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2} \end{aligned}$$

(regrouper les contributions de n et $-n$ à la seconde ligne pour identifier les deux expressions). Sous cette dernière forme, il est immédiat que la dérivée h' est 1-périodique.

Nous allons ensuite invoquer le théorème de Liouville pour montrer que h' est constante et, mieux, que $h' = 0$. Par périodicité, il nous suffira d'étudier h' sur la bande $\mathcal{B} = \{0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$, que l'on décompose en

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap \{-1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{\infty} = \mathcal{B} \cap \{1 \leq |\operatorname{Im} z|\}$$

- La fonction h' , continue, est donc bornée sur le compact \mathcal{B}_0 .
- Pour $z = x + iy$, on estime

$$|\sin \pi z| \geq \frac{1}{2}(e^{\pi|y|} - e^{-\pi|y|}) \quad \text{et} \quad \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x - n)^2 + y^2}.$$

La fonction h' est donc également bornée sur \mathcal{B}_{∞} , et donc sur \mathbb{C} . Le théorème de Liouville assure qu'elle est constante. Puisque $\lim_{y \rightarrow +\infty} h'(iy) = 0$ (avec y réel), on a bien h' identiquement nulle. \square

D Fonction holomorphe avec zéros prescrits

On veut maintenant démontrer le théorème 10.1 lorsque $U = \mathbb{C}$. Soit donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls telle que $|a_n| \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. On ne suppose pas les complexes a_n deux à deux distincts (c'est ce qui apportera la multiplicité) mais ils apparaissent chacun un nombre fini de fois dans la suite. On se préoccupera ultérieurement des éventuels zéros en l'origine.

On cherche des fonctions entières g_n ne s'annulant pas sur \mathbb{C} , de sorte que le produit infini

$$P(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) g_n(z)$$

soit convergent, et que sa limite P s'annule en chaque point $z_0 \in \mathbb{C}$ à l'ordre

$$o_{z_0}(P) = \# \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = z_0\} \in \mathbb{N}.$$

Le choix des facteurs $1 - z/a_n$ dans ce produit, plutôt que $z - a_n$, ne change pas la face du monde mais permet d'insister sur le fait que le terme général du produit doive tendre vers 1.

Définition 10.13 *On introduit les facteurs élémentaires de Weierstrass*

$$E_0(z) = 1 - z$$

$$E_n(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

L'intérêt de cette suite de fonctions est que $E_n(1) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, tandis que E_n tend uniformément vers 1 sur tout disque fermé $\overline{D(0, r)} \subset D(0, 1)$ inclus dans le disque unité ($r < 1$) lorsque $n \rightarrow \infty$. Cette dernière propriété est conséquence de ce que la détermination principale du logarithme ℓ vérifie, pour tout $|z| < 1$,

$$-\ell(1 - z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}.$$

On a plus précisément l'estimation suivante :

Lemme 10.14 *Pour tous $|z| \leq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$|E_n(z) - 1| \leq |z^{n+1}|.$$

Preuve L'assertion est immédiate pour $n = 0$. Supposons donc $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $E_n(0) = 1$, le développement de Taylor de la fonction entière E_n en l'origine s'écrit

$$E_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \quad \text{d'où} \quad E'_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k z^{k-1}.$$

Par ailleurs, il suit de la définition de E_n que

$$E'_n(z) = -z^n \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}\right).$$

On en déduit d'une part que $b_1 = \cdots = b_n = 0$ et, d'autre part, que $b_k \leq 0$ pour $k \geq n+1$. Puisque $E_n(1) = 0 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ il suit que $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| = 1$. On a donc, pour tout $|z| \leq 1$:

$$|E_n(z) - 1| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| |z^k| \leq |z^{n+1}| \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \leq |z^{n+1}|. \quad \square$$

On va utiliser ces facteurs élémentaires de Weierstrass pour montrer le résultat suivant.

Corollaire 10.15 Fonction entière avec zéros prescrits

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls telle que $|a_n| \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. On définit, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

La fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction entière telle que

- l'ensemble des zéros de f est $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- si $z_0 \in A$ apparaît m fois dans la suite (a_n) , alors z_0 est un zéro d'ordre m de f .

Remarque 10.16 Bien entendu, si l'on veut en outre prescrire un zéro d'ordre m en l'origine, il suffit de rajouter un facteur z^m à ce produit.

Preuve Chaque facteur $z \rightarrow E_n(z/a_n)$ a un unique zéro simple au point a_n . Le résultat annoncé suivra donc du théorème 10.8 si l'on montre que la série $\sum_{n=0}^{\infty} (E_n(z/a_n) - 1)$ converge normalement sur tout compact de \mathbb{C} .

Fixons $r > 0$. Puisque la suite a_n tend vers ∞ , il existe un rang n_r à partir duquel $|a_n| \geq 2r$. Le lemme 10.14 assure que l'on a, pour $|z| \leq r$ et $n \geq n_r$,

$$\left| E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) - 1 \right| \leq \left| \frac{z}{a_n} \right|^{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}},$$

terme général d'une série convergente. \square

Corollaire 10.17 Corps des fractions méromorphes

Toute fonction méromorphe sur \mathbb{C} est quotient de deux fonctions entières. En d'autres termes, le corps $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ des fonctions méromorphes sur \mathbb{C} est le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ des fonctions entières.

Preuve Soit h une fonction méromorphe sur \mathbb{C} . Le corollaire précédent permet de construire une fonction entière f qui admette en chaque pôle de h un zéro de même multiplicité. Le produit fh n'a que des singularités effaçables, et se prolonge donc en une fonction entière g . Par construction, $h = g/f$. \square

On peut maintenant se demander dans quelle mesure une fonction entière est déterminée par l'ensemble de ses zéros.

Théorème 10.18 Théorème de factorisation de Weierstrass

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière non identiquement nulle. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la liste de ses zéros non nuls, répétés avec multiplicité. On suppose que f possède en l'origine un zéro d'ordre $m \in \mathbb{N}$.

Il existe une fonction entière $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle qu'on ait, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n=0}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Preuve Le quotient $z \rightarrow f(z) / \left(z^m \prod_{n=0}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \right)$ est holomorphe sur \mathbb{C} privé de l'origine et de l'ensemble $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et admet en chacun de ces points une singularité effaçable. Elle se prolonge donc en une fonction entière qui ne s'annule pas. On conclut avec la proposition 3.18. \square

11. La sphère de Riemann

On a vu qu'une singularité isolée z_0 d'une fonction holomorphe correspond à un pôle lorsque $|f(z)| \rightarrow \infty$ lorsque $z \rightarrow z_0$.

Dans ce chapitre, nous allons adjoindre au plan \mathbb{C} un unique point "à l'infini" que nous noterons ∞ et munirons l'espace $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ainsi obtenu d'une topologie naturelle qui en fera un espace compact.

Mieux, nous munirons $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ d'une "structure complexe", de sorte que si f est une fonction méromorphe sur U et si $P \subset U$ est l'ensemble de ses pôles, la fonction holomorphe $f : U \setminus P \rightarrow \mathbb{C}$ se prolonge par continuité en une fonction "holomorphe" $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ pour laquelle $\tilde{f}(p) = \infty$ lorsque p est un pôle de f . Les pôles de la fonction méromorphe f deviendront donc des points "comme les autres" pour la fonction holomorphe \tilde{f} .

A Ajouter un point à \mathbb{C}

Définition 11.1 On note $\mathcal{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ l'espace obtenu en adjoignant à \mathbb{C} un unique point noté ∞ . On munit \mathcal{S} de la topologie pour laquelle une partie $\Omega \subset \mathcal{S}$ est ouverte si et seulement si

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert de \mathbb{C}
- ou bien Ω contient le point ∞ , et $\mathcal{S} \setminus \Omega$ est un compact de \mathbb{C} .

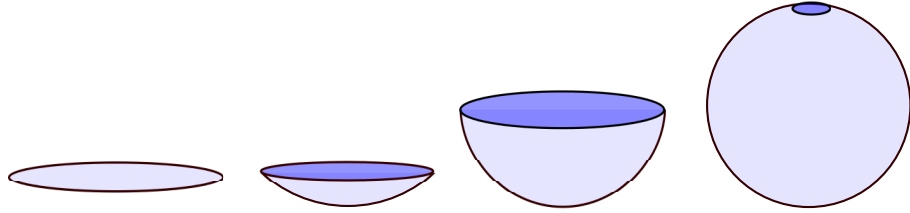
On vérifie facilement que l'on a ainsi défini une topologie sur \mathcal{S} (l'ensemble vide et \mathcal{S} sont des ouverts, une union quelconque ou une intersection finie d'ouverts sont ouverts). Par construction, cette topologie induit sur \mathbb{C} sa topologie usuelle. Une base de voisinages de ∞ est constituée des ouverts

$$\Omega_n = \{z \in \mathbb{C}, |z| > n\} \cup \{\infty\} \subset \mathcal{S} :$$

il faut donc penser géométriquement que l'on a rajouté un point à \mathbb{C} , et que ce point se trouve dans le complémentaire de tous les disques $\overline{D}(0, n)$, c'est-à-dire "à l'infini". Notons que cette topologie est séparée : deux points distincts de \mathcal{S} admettent des voisinages disjoints.

Proposition 11.2 L'espace topologique \mathcal{S} est homéomorphe à la sphère euclidienne $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. En particulier, \mathcal{S} est un espace métrisable compact. L'injection naturelle $i : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{S}$ est un homéomorphisme sur son image $\mathcal{S} \setminus \{\infty\}$.

Avant de démontrer cette proposition, convainquons nous intuitivement du résultat. Le plan est homéomorphe à un disque, donc à une soucoupe, ou à un bol, et finalement à un ballon sans sa valve. Rajoutons la valve, c'est-à-dire le point à l'infini : on obtient la sphère.



Preuve Soient $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sphère unité de \mathbb{R}^3 euclidien, et $N = (0, 0, 1)$ le pôle nord. On introduit le plan équatorial $\mathcal{P} = \{(x, y, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$, que l'on identifie naturellement à \mathbb{C} par l'application $(x, y, 0) \in \mathcal{P} \xrightarrow{\simeq} x + iy \in \mathbb{C}$.

La projection stéréographique

$$p : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathcal{P} \simeq \mathbb{C}$$

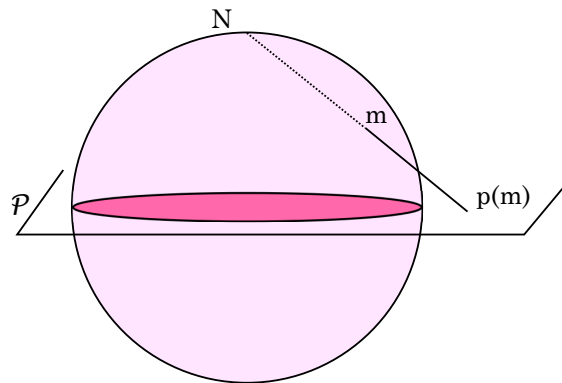
associe à $m \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ le point d'intersection de la droite Nm et du plan \mathcal{P} : pour $m = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, on a donc

$$p(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right) \simeq \frac{x + iy}{1-z}.$$

L'application p réalise un homéomorphisme entre $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ et \mathbb{C} , d'inverse

$$p^{-1}(a + ib) = \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1} \right).$$

On vérifie facilement que p se prolonge par continuité, en posant $\tilde{p}(N) = \infty$, en un homéomorphisme $\tilde{p} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathcal{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. \square



La projection stéréographique

B La sphère de Riemann

Nous allons maintenant munir \mathcal{S} d’une “structure complexe”.
Autrement dit, on va décider ce qu’est une fonction holomorphe
 $f : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathcal{S}$ et à valeurs dans \mathcal{S} .

On identifie désormais \mathbb{C} et son image $i(\mathbb{C}) = \mathcal{S} \setminus \{\infty\}$.

Lemme 11.3 *L’application $j : z \in \mathbb{C}^* \rightarrow 1/z \in \mathbb{C}^*$ est un biholomorphisme de \mathbb{C}^* .*

Elle se prolonge en un homéomorphisme de \mathcal{S} , encore noté $j : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, en posant $j(0) = \infty$ et $j(\infty) = 0$.

Preuve Immédiat. □

A travers cet homéomorphisme, on pourra lire ce qui se passe près de l’infini au voisinage de l’origine.

On veut maintenant définir ce qu’est une application holomorphe définie sur un ouvert de \mathcal{S} , et à valeurs dans \mathcal{S} . Cette définition sera dictée par les propriétés naturelles suivantes que l’on souhaite voir satisfaites :

- la “structure complexe” de \mathcal{S} induit sur $\mathbb{C} \subset \mathcal{S}$ sa “structure complexe habituelle”
- l’application $j : z \in \mathcal{S} \rightarrow 1/z \in \mathcal{S}$ est holomorphe, et est donc un biholomorphisme de \mathcal{S}
- une composée de fonctions holomorphes est encore holomorphe
- l’holomorphie est une propriété locale.

Définition 11.4 *Soit $\Omega \subset \mathcal{S}$ un ouvert. Une application $f : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ sera holomorphe lorsque*

1. *pour $z_0 \in \Omega$ tel que $z_0 \neq \infty$ et $f(z_0) \neq \infty$: dans un voisinage de z_0 , l’application f est à valeurs complexes et holomorphe (au sens usuel)*
2. *si $\infty \in \Omega$ et $f(\infty) \neq \infty$: l’application $f \circ j : z \rightarrow f(1/z)$ est, au voisinage de l’origine, à valeurs complexes et holomorphe*
3. *pour $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = \infty$: l’application $j \circ f : z \rightarrow 1/f(z)$, qui s’annule en z_0 , est holomorphe au sens ci-dessus (1. ou 2.) au voisinage de z_0 .*

Définition 11.5 *La sphère \mathcal{S} , munie de la structure complexe ainsi définie, est appelé sphère de Riemann.*

Remarque 11.6 Il suit de cette définition que les propriétés locales des fonctions holomorphes $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sont également satisfaites par les fonctions holomorphes $f : \Omega \subset \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$: zéros isolés 6.4, application ouverte 6.18, structure locale 6.16 (se ramener dans \mathbb{C} via j pour donner un sens à la dérivée en ∞ , ou en un point d’image ∞).

Comme annoncé dans l'introduction, une fonction méromorphe sur un ouvert de \mathbb{C} n'est autre qu'une fonction holomorphe à valeurs dans \mathcal{S} . Précisément :

Lemme 11.7 *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.*

- Une fonction méromorphe f sur U se prolonge par continuité en une fonction holomorphe $\tilde{f} : U \rightarrow \mathcal{S}$, en posant $\tilde{f}(p) = \infty$ pour tout pôle p de f .
- Supposons U connexe. Si $g : U \rightarrow \mathcal{S}$ est holomorphe et n'est pas constante égale à $\infty \in \mathcal{S}$, l'ensemble $P = \{p \in U \mid g(p) = \infty\} \subset U$ est fermé et discret dans U . La fonction g provient, par la construction ci-dessus, d'une fonction méromorphe f sur U dont P est l'ensemble des pôles.

Preuve Suit de la définition 11.4, et de la classification des singularités isolées 7.1. \square

Soit maintenant une fonction holomorphe $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un voisinage pointé U de l'infini, par exemple sur $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| > R\}$. Quand se prolonge-t-elle en une fonction holomorphe $\tilde{f} : U \cup \{\infty\} \subset \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$?

Proposition 11.8 *Une fonction holomorphe $f : A(R, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f} : A(R, \infty) \cup \{\infty\} \subset \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ si et seulement si son développement en série de Laurent est "fini à droite", i.e. si il existe un entier $k_0 \in \mathbb{Z}$ pour lequel*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \leq k_0} a_n z^n.$$

Preuve En effet, f se prolonge au point ∞ en une fonction holomorphe à valeurs dans \mathcal{S} si et seulement si la fonction $g : w \rightarrow f(1/w)$ admet un pôle ou bien une singularité effaçable en l'origine, si et seulement si le développement de Laurent de g sur $A(0, 1/R)$ est fini à gauche. \square

Passons aux fonctions entières, ou bien méromorphes sur \mathbb{C} .

Exemple 11.9 – *Soit $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme non constant. Alors P se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{P} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ en posant $\tilde{P}(\infty) = \infty$.*

– Soient a, b, c, d des complexes tels que $ad - bc \neq 0$. Supposons de plus $c \neq 0$. La fonction homographique correspondante $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{C}$ se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ en posant $\tilde{f}(-d/c) = \infty$ et $\tilde{f}(\infty) = a/c$.

– Soient P et Q deux polynômes non nuls, de degrés respectifs n et m , et de coefficients dominants a_n et b_m . Le quotient $f = P/Q$ se prolonge en $\tilde{f} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ holomorphe en posant $\tilde{f}(\infty) = 0$ si $m > n$, $\tilde{f}(\infty) = \infty$ si $n > m$ et $\tilde{f}(\infty) = a_n/b_n$ si $m = n$.

Réciproquement :

Proposition 11.10 1. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière. Si f se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, alors f est un polynôme.

2. Les fonctions holomorphes $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ sont les fractions rationnelles, ou la fonction constante égale à $+\infty$.

Preuve 1. Soit

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

le développement en série de Laurent de f sur l'anneau $A(0, \infty)$. Puisque f est holomorphe en l'origine, on a $a_n = 0$ pour $n < 0$. Et on a vu dans la proposition 11.8 que le développement de Laurent est fini à droite.

2. Soit $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ une application holomorphe. On suppose que $f \not\equiv \infty$. L'ensemble $\{z \in \mathcal{S} \mid f(z) = \infty\}$ est alors une partie discrète du compact \mathcal{S} , c'est donc un ensemble fini. On peut alors trouver un polynôme Q tel que la restriction à \mathbb{C} de l'application holomorphe $z \in \mathcal{S} \rightarrow Q(z) f(z) \in \mathcal{S}$ soit une application entière $Qf : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Le point précédent permet de conclure que Qf est un polynôme P . \square

Pour conclure, nous déterminons le groupe des automorphismes de \mathcal{S} .

Théorème 11.11 Automorphismes de la sphère de Riemann

Les automorphismes de la sphère de Riemann \mathcal{S} sont les homographies $f : z \in \mathcal{S} \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{S}$ (avec $ad - bc \neq 0$).

Preuve On vérifie aisément que les homographies sont des automorphismes de \mathcal{S} . L'ensemble des homographies forme un groupe, dont on observe qu'il agit transitivement sur \mathcal{S} .

Soit maintenant $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ un automorphisme. Quitte à composer h par une homographie, on peut supposer que $h(\infty) = \infty$. La restriction de h à \mathbb{C} est donc un automorphisme de \mathbb{C} , c'est-à-dire une application affine $z \in \mathbb{C} \rightarrow az + b \in \mathbb{C}$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ (théorème 7.15). \square

12. Le théorème de l'application conforme de Riemann

A Retour sur l'uniformisation

Dans ce dernier chapitre, nous démontrons le résultat suivant, annoncé au chapitre 8 (pour le contexte, revoir le théorème 8.16.)

Théorème 12.1 de l'application conforme

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe distinct de \mathbb{C} . Alors il existe un biholomorphisme $h : U \rightarrow \mathbb{D}$, c'est-à-dire une bijection biholomorphe entre U et \mathbb{D} . On dit que l'ouvert U est uniformisé par le disque.

Remarque 12.2 – Rappelons que, d'après le théorème de Liouville, une fonction entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ à valeurs dans le disque est constante. Il n'existe donc pas de biholomorphisme entre le plan et le disque.

– Un biholomorphisme est a fortiori un homéomorphisme sur son image. Un ouvert de \mathbb{C} est donc simplement connexe si et seulement si il est homéomorphe au disque (ou au plan \mathbb{C} , qui lui est homéomorphe).

– Si U et V sont deux ouverts simplement connexes de \mathbb{C} , tous deux distincts de \mathbb{C} , il existe donc un biholomorphisme $h : U \rightarrow V$.

Exemple 12.3 Notons $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ le demi-plan supérieur. L'application

$$\varphi : z \in \mathbb{H} \rightarrow \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{D}$$

réalise un biholomorphisme entre \mathbb{H} et le disque unité \mathbb{D} .

Preuve L'application φ est obtenue comme restriction de l'homographie

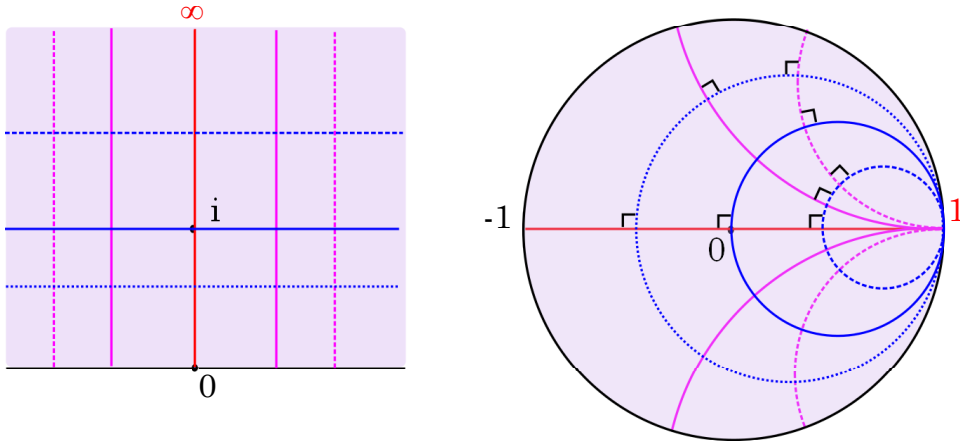
$$\hat{\varphi} : z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

qui est un homéomorphisme de la sphère de Riemann (voir le chapitre 11). On vérifie sans peine que l'image $\hat{\varphi}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ de la droite réelle complétée par le point à l'infini est le cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Le complémentaire de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a deux composantes connexes, qui sont le demi-plan supérieur \mathbb{H} ainsi que le demi-plan inférieur $\mathbb{H}_- = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z < 0\}$.

Le complémentaire de \mathbb{S}^1 dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a deux composantes connexes, qui sont le disque \mathbb{D} , et $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 1\} \cup \{\infty\}$. Puisque $\varphi(i) = 0 \in \mathbb{D}$, on a bien $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$ comme annoncé. \square

Pour “dessiner” l’application $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$, il est bon de remarquer au préalable que, comme toute homographie, $\hat{\varphi} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ envoie un cercle, ou la réunion d’une droite et du point à l’infini, sur un cercle ou bien sur la réunion d’une droite et du point à l’infini. De plus $\hat{\varphi}$, holomorphe, est conforme donc envoie deux courbes (ici, cercles ou droites) se coupant à angle droit sur deux autres courbes se coupant à angle droit. Puisque $\hat{\varphi}(0) = -1$, $\hat{\varphi}(i) = 0$, $\hat{\varphi}(-i) = \infty$ et $\hat{\varphi}(\infty) = 1$, on obtient la configuration suivante.



Uniformisation du demi-plan

Exemple 12.4 Soit $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im } z < \pi\}$. L’application

$$z \in \mathcal{B} \rightarrow e^z \in \mathbb{H}$$

réalise un biholomorphisme entre la bande \mathcal{B} et le demi-plan \mathbb{H} . On en déduit par composition une uniformisation

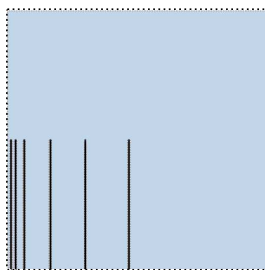
$$z \in \mathcal{B}_a \rightarrow \varphi(\exp(\frac{\pi}{a}z)) \in \mathbb{D}$$

de la bande $\mathcal{B}_a = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im } z < a\}$ ($a > 0$).

Exemple 12.5 – Soient a, a', b et b' des réels positifs. Lorsque $a/b = a'/b'$, l'homothétie $z \in \mathbb{C} \rightarrow a'z/a \in \mathbb{C}$ fournit un biholomorphisme entre les rectangles $\mathcal{R}(0, a, a + ib, ib)$ et $\mathcal{R}(0, a', a' + ib', ib')$.

– Par contre, il n'est pas aussi évident de construire une uniformisation entre le carré $\mathcal{C} =]0, 1[\times]0, 1[$ et le rectangle $\mathcal{R} =]0, 2[\times]0, 1[$, voire même de se convaincre “à la main” qu'elle existe.

Exemple 12.6 Soit $U \subsetneq \mathbb{C}$ l'ouvert égal au carré $]0, 1[\times]0, 1[$ privé de la réunion des segments $\cup_{n \geq 2} \{1/n\} \times]0, 1/2[$, esquissé (tant bien que mal) ci-après. Il n'est pas difficile de voir que U est simplement connexe. Il est donc biholomorphe au disque. Autrement dit il existe une bijection entre U et le disque qui conserve les angles orientés. L'existence d'une telle bijection ne saute pas aux yeux; son comportement “au bord de U ” sera compliqué.



Le carré privé d'un peigne qui s'accumule

B Familles normales

La preuve du théorème d'uniformisation que nous allons donner dans le paragraphe suivant est une jolie illustration de techniques “d'analyse fonctionnelle”, où l'on fait de la “géométrie” sur des espaces de fonctions.

Soit $U \subsetneq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. On veut montrer qu'il existe un biholomorphisme $h : U \rightarrow \mathbb{D}$. Rappelons qu'une application holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{D}$ injective est d'emblée un biholomorphisme sur son image (corollaire 6.20). Introduisons la famille de fonctions

$$\mathcal{F} = \{f : U \rightarrow \mathbb{D} \mid f \text{ est holomorphe et injective}\}.$$

Il suffit donc, pour prouver notre théorème, de trouver une application $h \in \mathcal{F}$ qui soit également surjective, c'est-à-dire telle que $h(U) = \mathbb{D}$.

La belle idée de la démonstration consiste à ramener la recherche de cette application $h \in \mathcal{F}$ qui soit surjective à un problème de recherche d'extremum de fonctionnelle sur \mathcal{F} . On conclura par un argument de compacité (corollaire 12.8). Cet argument de compacité repose sur le théorème suivant.

Théorème 12.7 Théorème d'Ascoli

Soient K un espace métrique compact et $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}^p$ une suite d'applications continues. On suppose que

- la suite f_n est à valeurs dans la boule unité $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^p$
- il existe une constante k telle que chaque f_n soit k -lipschitzienne.

On peut alors extraire de la suite (f_n) une sous-suite qui converge uniformément sur K .

Corollaire 12.8 Soient U un ouvert de \mathbb{C} et $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ une suite d'applications holomorphes. On suppose que les fonctions f_n sont toutes à valeurs dans le disque \mathbb{D} .

1. **Famille normale** Il existe une suite extraite de (f_n) qui converge uniformément sur les compacts de U vers une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$.
2. La fonction f est holomorphe sur U .
3. Si f n'est pas constante, elle est à valeurs dans le disque \mathbb{D} .

Preuve 2. Une limite uniforme locale de fonctions holomorphes est encore holomorphe (théorème 4.17).

3. Les f_n étant à valeurs dans le disque ouvert, la limite f est à valeurs dans le disque fermé $\{|z| \leq 1\}$. Si f , qui est holomorphe, n'est pas constante elle est ouverte (corollaire 6.18) ; elle prend donc finalement ses valeurs dans le disque ouvert.

1. Le lecteur, s'il n'est pas familier avec le théorème d'Ascoli, peut admettre ce résultat et passer au paragraphe suivant. Démontrons le néanmoins.

L'ouvert U est réunion de la suite de compacts

$$K_p = \overline{D(0, p)} \cap \{x \in \mathbb{C} \mid d(x, {}^cU) \geq 3/p\} \subset U.$$

Noter que $K_p \subset \overset{\circ}{K}_{p+1}$. En particulier, tout compact de U est inclus dans l'un des K_p .

Soit $p \geq 1$. On va montrer que la restriction de la suite (f_n) au compact K_p vérifie les hypothèses du théorème d'Ascoli. On pourra donc extraire de (f_n) une sous-suite dont la restriction à K_p soit uniformément convergente. Le procédé diagonal permettra alors d'extraire de (f_n) une sous-suite qui converge uniformément sur chacun des K_p , et donc uniformément sur chaque compact de U .

Fixons donc $p \geq 1$. Nous voulons montrer qu'il existe une constante k_p telle que les restrictions des f_n à K_p soient toutes k_p -lipschitziennes. Ce résultat va suivre de la formule de Cauchy, les fonctions f_n étant à valeurs dans le disque (donc uniformément bornées).

Soient $y, z \in K_p$. On distingue selon que les points y et z sont proches, ou bien éloignés l'un de l'autre.

– Si $|y - z| \geq 1/p$ (le cas facile!), on aura pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(y) - f_n(z)| \leq 2 \leq 2p |y - z|.$$

– Si $|y - z| < 1/p$, on observe a fortiori que $y \in D(z, 2/p)$. On applique alors la formule de Cauchy pour f_n en y et z , dans le disque fermé $\overline{D}(z, 2/p) \subset U$. Il vient, en désignant par c le lacet $t \in [0, 2\pi] \rightarrow c(t) = z + (2/p) e^{it} \in U$:

$$\begin{aligned} f_n(y) - f_n(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f_n(w)}{w - y} - \frac{f_n(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{y - z}{(w - y)(w - z)} f_n(w) dw \end{aligned}$$

et donc, puisque $|f_n|$ est bornée par 1 :

$$|f_n(y) - f_n(z)| \leq p |y - z|.$$

Les restrictions des f_n à K_p sont donc toutes lipschitziennes de constante $k_p = 2p$. \square

C Preuve du théorème de l'application conforme

Nous découpons la preuve en une série de lemmes que nous énonçons d'emblée pour avoir une vue d'ensemble de la démonstration. On rappelle que $U \subsetneq \mathbb{C}$ désigne un ouvert simplement connexe distinct de \mathbb{C} . De la simple connexité de U , nous ne retiendrons “que” la propriété suivante (qui lui sera finalement équivalente) :

Rappel 12.9 (Théorème 8.16.)

Soit $u : U \rightarrow \mathbb{C}^$ holomorphe. Il existe une fonction holomorphe $v : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ telle que $v^2 = u$.*

Choisissons désormais un point $z_0 \in U$. Le groupe $\text{Aut } \mathbb{D}$ des automorphismes du disque agissant transitivement sur \mathbb{D} , on peut se contenter de chercher une uniformisation $U \rightarrow \mathbb{D}$ qui envoie z_0 sur l'origine.

Lemme 12.10 *L'ensemble*

$$\mathcal{F}_0 = \{f : U \rightarrow \mathbb{D} \mid f \text{ est holomorphe et injective, et } f(z_0) = 0\}.$$

est non vide.

On cherche maintenant $h \in \mathcal{F}_0$ qui soit surjective, autrement dit dont l'image $h(U)$ soit maximale. Cela incite à maximiser $|f'(z_0)|$, de sorte que f soit la “plus expansive possible” en ce point.

Lemme 12.11 Soit $f \in \mathcal{F}_0$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{D}$ n'est pas surjective, il existe $f_1 \in \mathcal{F}_0$ telle que $|f'_1(z_0)| > |f'(z_0)|$.

Lemme 12.12 Notons

$$M = \sup\{|f'(z_0)|, f \in \mathcal{F}_0\}.$$

Il existe une fonction $h \in \mathcal{F}_0$ telle que $|h'(z_0)| = M$.

Remarque 12.13 Il s'ensuit que M est fini, ce qu'on peut aussi voir directement (puisque \mathbb{D} est borné) avec la formule de Cauchy pour la dérivée, exprimée en z_0 dans un disque $\overline{D}(z_0, r) \subset U$.

Une fois ces lemmes démontrés, nous serons tirés d'affaire. En effet :

Preuve du théorème de l'application conforme

Le lemme 12.11 montre que l'application $h : U \rightarrow \mathbb{D}$ du lemme 12.12 est surjective. C'est une uniformisation de l'ouvert U . \square

Nous passons maintenant à la démonstration des lemmes 12.10, 12.11 et 12.12. Rappelons que, pour tout $\alpha \in \mathbb{D}$, l'application

$$h_\alpha : z \in \mathbb{D} \rightarrow \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z} \in \mathbb{D}$$

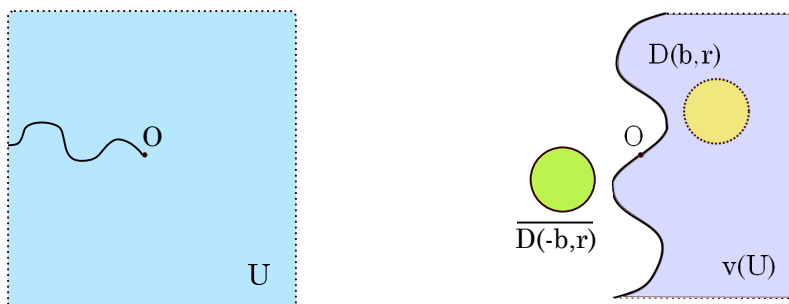
est un automorphisme du disque tel que $h_\alpha(\alpha) = 0$, et d'inverse $h_\alpha^{-1} = h_\alpha$.

Preuve du lemme 12.10 On va commencer par construire $w : U \rightarrow \mathbb{D}$ holomorphe et injective. L'ouvert U étant distinct de \mathbb{C} , on peut choisir $a \in \mathbb{C} \setminus U$. Puisque U est simplement connexe, le rappel 12.9 assure que la fonction $u : z \in U \rightarrow z - a \in \mathbb{C}^*$ admet une racine carrée holomorphe $v : U \rightarrow \mathbb{C}^*$. Puisque $v^2(z) = u(z) = z - a$ pour tout $z \in U$, il suit que $v(y) \neq \pm v(z)$ pour tous $y, z \in U$ distincts.

L'application v holomorphe non constante est ouverte. Son image contient un disque $\overline{D}(b, r) \subset \mathbb{C}^*$; elle évite donc le disque $D(-b, r)$ et même le disque fermé $\overline{D}(-b, r)$. La fonction définie pour $z \in U$ par

$$w(z) = \frac{r}{v(z) + b}$$

est holomorphe sur U , injective comme v , et à valeurs dans le disque \mathbb{D} .



L'ouvert U ; ici z_0 est l'origine.

L'image $v(U)$ ("racine carrée") qui évite un disque.

On se préoccupe maintenant de la condition $f(z_0) = 0$. Il suffit pour cela de composer w avec un automorphisme du disque bien choisi pour obtenir une application $f = h_{w(z_0)} \circ w \in \mathcal{F}_0$. \square

Preuve du lemme 12.11 Soit $f \in \mathcal{F}_0$. On suppose que $f : U \rightarrow \mathbb{D}$ n'est pas surjective. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{D}$ qui ne soit pas dans l'image $f(U)$. En composant par l'automorphisme h_α , on obtient une fonction $h_\alpha \circ f : U \rightarrow \mathbb{D}$ qui ne s'annule pas et admet donc une racine carrée holomorphe g , qui est injective (puisque f l'est) et toujours à valeurs dans \mathbb{D} . Posons enfin

$$f_1 = h_{g(z_0)} \circ g,$$

de sorte que $f_1(z_0) = 0$.

Par construction, $f_1 \in \mathcal{F}_0$. Il nous reste à estimer sa dérivée au point z_0 . En notant q l'application $z \in \mathbb{D} \rightarrow z^2 \in \mathbb{D}$ on a $h_\alpha \circ f = q \circ g$, donc

$$f = h_\alpha \circ q \circ h_{g(z_0)} \circ f_1.$$

Introduisons $F := h_\alpha \circ q \circ h_{g(z_0)} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, de sorte que $f = F \circ f_1$. Puisque $f(z_0) = f_1(z_0) = 0$, on a $F(0) = 0$. Comme F n'est pas injective, le lemme de Schwarz 7.16 assure que $|F'(0)| < 1$. Le résultat suit par dérivation de fonctions composées puisque

$$f'(z_0) = F'(0) f_1'(z_0).$$

\square

Preuve du lemme 12.12 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de \mathcal{F}_0 pour lesquelles $|f_n'(z_0)| \rightarrow M$. Ces fonctions étant à valeurs dans le disque, elles forment une famille normale (corollaire 12.8). Quitte à passer à une suite extraite, on peut donc supposer que la suite $f_n : U \rightarrow \mathbb{D}$ converge uniformément sur les compacts de U vers une fonction holomorphe $h \in \mathcal{H}(U)$, qui prend *a priori* ses valeurs dans $\overline{\mathbb{D}}$.

Nous allons voir que cette application h est bien une uniformisation de U .

– Les estimées de Cauchy pour les dérivées (théorème 5.15) assurent que

$$h'(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z_0).$$

Puisque les f_n sont injectives, leurs dérivées ne s'annulent pas (théorème 6.16) donc $|h'(z_0)| = M \neq 0$, et h n'est pas constante : elle est donc à valeurs dans le disque ouvert (de nouveau le corollaire 12.8).

– Supposons avoir montré que h est injective (ce sera une conséquence immédiate du théorème de Hurwitz ci-dessous). La surjectivité de h est alors conséquence du lemme 12.11, et de ce que $|h'(z_0)| = M$. \square

Il ne nous reste donc pour conclure qu'à démontrer le résultat suivant.

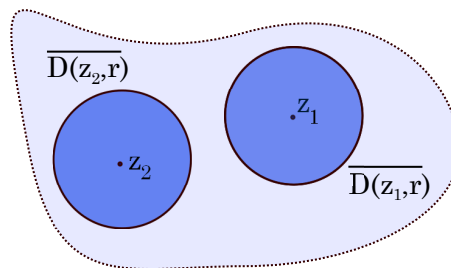
Théorème 12.14 Théorème de Hurwitz

Soient U un ouvert connexe de \mathbb{C} , et $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes qui converge, uniformément sur les compacts de U , vers une fonction holomorphe $h : U \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que chacune des fonctions f_n est injective. Alors

- soit h est constante
- soit h est également injective.

Preuve Supposons h non constante. On veut montrer qu'elle est injective. On va procéder par l'absurde.

Soient z_1 et z_2 deux points distincts de U tels que $h(z_1) = h(z_2) = c$. La fonction h n'étant pas constante, les points où elle prend la valeur c sont isolés. On peut donc choisir deux disques fermés disjoints $\overline{D}(z_1, r) \subset U$ et $\overline{D}(z_2, r) \subset U$ de sorte que $w \rightarrow h(w) - c$ ne s'annule pas sur les cercles $\mathcal{C}_i = \{w, |w - z_i| = r\}$ ($i = 1, 2$). Puisque la suite f_n converge uniformément vers h sur les compacts de U (et donc sur la réunion $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$), le théorème de Rouché (corollaire 6.13) montre que, pour n assez grand, les fonctions $w \rightarrow h(w) - c$ et $w \rightarrow f_n(w) - c$ ont le même nombre de zéros dans chacun des disques $\overline{D}(z_1, r)$ et $\overline{D}(z_2, r)$, ce qui contredit l'injectivité de f_n . \square



Index

- $Z(f)$, 53, 54
- \mathbb{D} , 67
- $\mathcal{H}(U)$, 8
- $\mathcal{M}(U)$, 64
- $\mathcal{P}(f)$, 64
- $\mathcal{Z}(f)$, 56
- $\bar{o}_a(f)$, 62
- $\text{Ind}(\gamma, a)$, 33
- $\text{Res}(f, a)$, 62
- \mathcal{S} , 97
- $o_a(f)$, 55
- analytique (fonction), 10
- anneau intègre, 55
- Ascoli (théorème d'), 105
- automorphisme, 66
- automorphismes de \mathbb{C} , 66
- automorphismes de \mathcal{S} , 101
- automorphismes du disque, 69, 107
- Borel (théorème de), 12
- Cauchy (estimées de), 46, 49
- Cauchy (formule de), 35, 37, 40, 45, 73, 75, 82
- Cauchy (théorème de), 31, 73, 75
- Cauchy-Riemann (équations de), 7, 46
- chemin, 24
- chemin opposé, 25
- conforme (application), 7, 79
- corps des fractions, 64, 96
- discret, 52
- disque pointé, 61
- entière (fonction), 13
- familles normales, 105
- fonction elliptique, 70
- Goursat (lemme de), 29, 35
- harmonique (fonction), 46
- holomorphe (fonction), 8
- homographie, 69
- homologiquement trivial, 77
- homologues (lacets), 72
- homotopie, 78
- Hurwitz (théorème d'injectivité de), 109
- indice, 33
- inversion locale, 14
- lacet, 24, 36
- Laurent (décomposition de), 84
- Laurent (série de), 81, 83
- Liouville (théorème de), 48
- logarithme, 16
- longueur d'un chemin, 26
- méromorphe (fonction), 64
- Morera (critère de), 40
- moyenne (formule de la), 46
- moyenne (propriété de la), 46
- ordre d'un pôle, 62
- ordre d'un zéro, 52, 55
- ordre d'une fonction elliptique, 70, 88
- ouverte (application), 14, 59

pôle, 62, 85
 partie principale, 62, 84, 85
 partie régulière, 84, 85
 Picard (grand théorème de), 63
 point d'accumulation, 52
 point isolé, 52
 primitive, 23
 principe de l'argument, 55, 64, 87
 principe du maximum, 47, 60
 projection stéréographique, 98
 prolongement analytique, 54

 résidu, 62, 85
 résidus (théorème des), 86
 Riemann (prolongement de), 41, 63
 Riemann (théorème de l'application conforme), 79, 102
 Rouché (théorème de), 57, 109

 séries de fonctions méromorphes, 65
 Schwarz (lemme de), 67, 108
 Schwarz-Pick (lemme de), 68
 simplement connexe, 79
 singularité apparente, 61
 singularité effaçable, 62, 85
 singularité essentielle, 62, 85
 sphère de Riemann, 99
 suites de fonctions holomorphes, 50
 support (d'un chemin), 36

 triangle, 27

 uniformisation, 80, 102

 Weierstrass (facteurs élémentaires de), 94
 Weierstrass (factorisation de), 96

 zéros isolés (principe des), 53