

Mémoire de première année de
Magistère de mathématiques



De l'analyse complexe à la répartition des nombres premiers

réalisé par Emilie Kaufmann
sous la direction de Henri Carayol

Strasbourg, le 17 septembre 2008

Table des matières

Introduction	4
Notations	5
I Fonctions arithmétiques et séries de Dirichlet	7
1.1 Définition et domaine de convergence	8
1.1.1 Abscisse de convergence	8
1.1.2 Prolongements des séries de Dirichlet	10
1.1.3 Produit de convolution de deux séries de Dirichlet	11
1.2 Formule du produit Eulérien	12
1.3 Quelques exemples liés à la fonction ζ	13
1.4 La fonction de Von Mangoldt, Λ	14
1.4.1 Dérivation d'une série de Dirichlet	14
1.4.2 Dérivée logarithmique et fonction de Von Mangoldt	14
II Caractères de groupes abéliens finis et fonctions L	17
2.1 Théorie des caractères	18
2.1.1 Caractère d'un groupe abélien fini	18
2.1.2 Relations d'orthogonalité	18
2.1.3 Caractères de Dirichlet	21
2.1.4 Caractère primitif	22
2.2 Fonctions L de Dirichlet	22
2.3 Dérivée logarithmique des fonctions L	24
III Fonctions sommatoires	26
3.1 Fonctions sommatoires et fonctions sommatoires lissées	27
3.2 Exemples importants	28

3.2.1	Fonctions π et ψ	28
3.2.2	Théorèmes des nombres premiers et fonctions ψ	29
3.3	Transformée de Fourier	33
3.3.1	Définition	33
3.3.2	Exemple important	33
3.3.3	Formule d'inversion de Fourier	34
3.3.4	Formule de Poisson	34
3.3.5	Etude des fonctions θ	34
3.4	Transformée de Mellin	36
3.4.1	Définition	36
3.4.2	Etude de l'exemple de Γ	37
3.4.3	Formule d'inversion de Mellin	39
3.5	Formule intégrale évaluant une fonction sommatoire lissée	40
3.5.1	Formule intégrale	40
3.5.2	Application à des fonctions connues	41
3.6	Technique de déplacement du contour d'intégration	43

IV Prolongement analytique des fonctions L sur $Re(s) > 0$ et théorème de la progression arithmétique 46

4.1	Prolongement sur $Re(s) > 0$	47
4.2	Non annulation des fonctions L en 1	49
4.3	Théorème de la progression arithmétique	51

V Prolongement des fonctions L sur \mathbb{C} 55

5.1	Le cas de la fonction ζ	56
5.1.1	Equation fonctionnelle	56
5.1.2	Prolongement de ζ	58
5.2	Equation fonctionnelle plus générale et singularités des fonctions L	58
5.2.1	Equation fonctionnelle	58
5.2.2	Conséquences sur les propriétés des fonctions L	63

VI Zéros des fonctions L 67

6.1	Zéros de fonctions holomorphes d'ordre 1	68
6.1.1	Fonction d'ordre fini	68
6.1.2	Formule de Jensen	70

6.1.3	Application aux fonctions d'ordre 1	72
6.2	Zéros triviaux des fonctions L	74
6.3	Zéros non triviaux	75
VII	Théorèmes des nombres premiers	85
7.1	Le théorème des nombres premiers	86
7.1.1	Non annulation de ζ sur $\sigma = 1$	86
7.1.2	Démonstration du théorème des nombres premiers	88
7.1.3	Equivalence avec la non-annulation de ζ	89
7.1.4	Théorème des nombres premiers avec un terme d'erreur	90
7.2	Le théorème de nombres premiers en progression arithmétique	101
7.2.1	Résultats sur des sommes lisses	101
7.2.2	Démonstration du théorème	106
VIII	Hypothèse de Riemann et amélioration du terme d'erreur pour le théorème des nombres premiers	109
8.1	Retour sur les termes d'erreur des théorèmes précédents	110
8.2	Hypothèse de Riemann et théorème des nombres premiers	110
8.3	Hypothèse de Riemann généralisée	112
	Conclusion	112
	Remerciements	114

Le but de ce mémoire est de présenter quelques résultats importants de théorie analytique des nombres. Il s'agit d'utiliser des outils d'analyse complexe (estimation de sommes à l'aide d'intégrales sur des contours bien choisis, théorème des résidus, résultats sur les zéros fonctions des holomorphes d'ordre fini...) et d'arithmétique (nombre premiers, caractères de Dirichlet et fonctions L ...) pour montrer des résultats sur la répartition des nombres premiers.

Un des objectifs de ce mémoire est la démonstration du théorème des nombres premiers : en notant $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x il s'agit de montrer que $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ lorsque x tend vers l'infini. Ce théorème a été démontré simultanément par Hadamard et de la Vallée Poussin en 1896 en se servant de l'analyse complexe, avec notamment la fonction ζ et sa non-annulation au voisinage de la droite $\operatorname{Re}(s) = 1$. Dans ce mémoire, on trouvera une démonstration de ce type du théorème des nombres premiers. Mais on montrera des résultats plus généraux sur la répartition des nombres premiers congrus à a modulo q avec le théorème de la progression arithmétique et le théorème des nombres premiers en progression arithmétique. Le théorème des nombres premiers est en fait un corollaire de ce dernier résultat, mais il sera démontré séparément, de manière un peu différente. Nous verrons enfin le lien entre le théorème des nombres premiers et la célèbre conjecture de Riemann

Le lien que nous ferons entre l'arithmétique et l'analyse complexe passe tout d'abord par les séries de Dirichlet, auxquelles nous allons nous intéresser dans la première partie. La somme d'une série associée à une fonction arithmétique donnée peut en effet être vue comme une fonction complexe dont on peut étudier les propriétés. La fonction ζ est l'exemple le plus simple d'une série de Dirichlet, et nous nous intéresserons aussi à la fonction de Von Mangoldt qui intervient dans la dérivée logarithmique de ζ . Si le théorème des nombres premiers a un lien avec la seule fonction ζ , pour étudier la répartition des nombres premiers congrus à a modulo q , il faut s'intéresser aux fonctions L de Dirichlet, ce que nous ferons dans la seconde partie. Nous verrons en effet comment transformer des sommes ne prenant en compte que des termes congrus à a modulo q en faisant intervenir des caractères de Dirichlet.

Nous étudierons ensuite les propriétés des fonctions sommatoires, qui apparaissent intuitivement lorsqu'on étudie des fonctions du type $\pi(x)$, qui peuvent se voir comme des sommes de fonctions arithmétiques. Certaines fonctions sommatoires, $\psi(x)$ ou $\psi(x; q, a)$ sont très importantes car l'étude de leur comportement asymptotique suffit à montrer les théorèmes des nombres premiers. Nous introduirons également les fonctions sommatoires lissées, que nous utiliserons pour démontrer le théorème des nombres premiers en progression arithmétique et à la fin de la 3ème partie nous obtiendrons une formule intégrale exprimant une fonction sommatoire lissée comme une transformée de Mellin inverse. En l'appliquant aux fonctions $\psi(x)$ et $\psi(x; q, a)$, on obtient des formules intégrales faisant intervenir les fonctions $-\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)}$ et $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ pour le théorème des nombres premiers.

Comme la dérivée logarithmique des fonctions L intervient, nous devons prolonger ces fonctions de manière méromorphe sur \mathbb{C} (ce que nous ferons dans la cinquième partie) mais aussi étudier leurs zéros (sixième partie). Nous verrons qu'il existe une autre façon de prolonger ces fonctions, sur $\operatorname{Re}(s) > 0$, que nous mettrons en oeuvre dans la cinquième partie. Pour donner une première application à ce prolongement, nous démontrerons également dans cette partie le théorème de la progression arithmétique : il existe une infinité de nombres premiers congrus à a modulo q .

La septième partie est consacrée aux démonstrations des deux théorèmes des nombres premiers, qui se basent surtout sur la transformation des formules intégrales précédemment obtenues. Enfin, nous étudierons dans la dernière partie plusieurs formulations équivalentes de la conjecture de Riemann et montrerons en particulier en quoi elle donne un bon terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers.

Notations

Dans toute la suite on désignera par s une variable complexe et on écrira $s = \sigma + it$, où σ est la partie réelle de s et t sa partie imaginaire.

Si m et n sont deux entiers, (n, m) désigne leur pgcd.

On notera \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers, et p désignera un entier premier.

Si x est un réel, $[x]$ désigne la partie entière de x , soit le plus grand entier inférieur ou égal à x .

On rappelle la définition du symbole de Landau O . Soit $f(s)$ une fonction à valeurs dans \mathbb{C} et $g(s)$ une fonction à valeurs dans \mathbb{R} .

$$f(s) = O(g(s))$$

dans une région R de \mathbb{C} si il existe une constante A telle que pour tout s dans la région R on ait :

$$|f(s)| \leq A g(s)$$

A est appelée constante implicite (relative au O) : lorsque la fonction f dépend de plusieurs paramètres, on peut être amené à préciser de quels paramètres cette constante dépend. La constante est ici uniforme sur tout la région R : ce sera toujours le cas lorsqu'on donnera aucune précision supplémentaire.

Lorsqu'on parle de O au voisinage d'un certain point, cela signifie qu'il existe un voisinage du point considéré sur lequel on a une majoration de ce type (la constante A dépend alors du voisinage).

On utilisera la notation $\log(x)$ pour désigner la détermination principale du logarithme sur \mathbb{C} , qui coïncide avec le logarithme népérien sur \mathbb{R} . On pourra donc énoncer indifféremment le théorème des nombres premiers des deux manières suivantes :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)} \quad \text{ou} \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

Première partie

Fonctions arithmétiques et séries de Dirichlet

1.1 Définition et domaine de convergence

Définition 1.1.1 (Fonction arithmétique) Une fonction arithmétique est une application $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$: c'est une suite de nombres complexes.

Une fonction arithmétique est dite **multiplicative** si

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid (m, n) = 1, f(mn) = f(m)f(n)$$

Une fonction arithmétique est dite **totalement multiplicative** si

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f(mn) = f(m)f(n)$$

Définition 1.1.2 (Série de Dirichlet associée à une fonction arithmétique) La série de Dirichlet associée à la fonction arithmétique f est définie en s par :

$$D_f(s) = \sum_{n \geq 1} f(n)n^{-s}$$

On note parfois a_n au lieu de $f(n)$, puisque cela correspond à une suite de nombres complexes.

Cette définition est celle donnée à l'origine par Dirichlet, mais on peut généraliser ce concept à une série de la forme $\sum_{n \geq 1} f(n)e^{-\lambda_n s}$ avec λ_n nombre complexe dont la partie réelle tend vers l'infini lorsque $n \rightarrow \infty$. Le cas précédent correspond alors à $\lambda_n = \ln(n)$. Dans la suite, on ne s'intéressera qu'aux séries de Dirichlet définies dans **1.1.2**.

Une fonction arithmétique telle que la série de Dirichlet associée converge dans un domaine du plan complexe est dite à **croissance modérée**.

1.1.1 Abscisse de convergence

On s'intéresse maintenant aux parties du plan complexe sur lesquelles une série de Dirichlet converge.

Si $f(n) = O(n^\beta)$, alors $f(n)n^{-s} = O(n^{\beta-\sigma})$ et la série de Dirichlet $D_f(s)$ converge absolument dans la région $\sigma > \beta + 1$.

On note $\sigma_{conv} = \inf \{ \operatorname{Re}(s) \mid D_f(s) < \infty \}$, abscisse de convergence d'une série de Dirichlet. On peut également définir de la même façon σ_{abs} , abscisse de convergence absolue d'une série de Dirichlet.

Théorème 1.1.1 Si la série $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ converge pour $s = s_0$ alors elle converge uniformément sur tout domaine de la forme $\operatorname{Re}(s - s_0) \geq 0, |\arg(s - s_0)| \leq \alpha$ avec $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

DÉMONSTRATION

La démonstration repose sur le résultat suivant

$$\left| e^{-\alpha z} - e^{-\beta z} \right| \leq \frac{|z|}{\operatorname{Re}(z)} \left(e^{-\alpha \operatorname{Re}(z)} - e^{-\beta \operatorname{Re}(z)} \right)$$

si $0 < \alpha < \beta$

En effet,

$$\begin{aligned} e^{-\alpha z} - e^{-\beta z} &= z \int_{\alpha}^{\beta} e^{-tz} dt \\ \left| e^{-\alpha z} - e^{-\beta z} \right| &\leq |z| \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t \operatorname{Re}(z)} dt = \frac{|z|}{\operatorname{Re}(z)} \left(e^{-\alpha \operatorname{Re}(z)} - e^{-\beta \operatorname{Re}(z)} \right) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer la convergence uniforme de la série de Dirichlet sur la zone considérée en utilisant le critère de Cauchy uniforme. Soit $\epsilon > 0$

Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s_0}$ converge, il existe N tel que si $n, n' \geq N$ alors

$$\left| \sum_{k=n}^{n'} a_k k^{-s_0} \right| \leq \epsilon$$

Soit $n, n' \geq N$.

Notons $A_{n,n'} = \sum_{k=n-1}^{n'} a_k k^{-s_0}$ et $S_{n,n'}(s) = \sum_{k=n}^{n'} a_k k^{-s}$.

$$\begin{aligned} S_{n,n'}(s) &= \sum_{k=n}^{n'} a_k k^{-s_0} k^{-(s-s_0)} = \sum_{k=n}^{n'} (A_{n,k} - A_{n,k-1}) k^{-(s-s_0)} \\ &= \sum_{k=n}^{n'-1} A_{n,k} \left(k^{-(s-s_0)} - (k+1)^{-(s-s_0)} \right) + A_{n,n'} n'^{-(s-s_0)} \\ &= \sum_{k=n}^{n'-1} A_{n,k} \left(e^{-(s-s_0) \ln(k)} - e^{(s-s_0) \ln(k+1)} \right) + A_{n,n'} n'^{-(s-s_0)} \end{aligned}$$

Et en notant x la partie réelle de $s - s_0$

$$\begin{aligned} |S_{n,n'}(s)| &\leq \sum_{k=n}^{n'-1} |A_{n,k}| \left| e^{-(s-s_0) \ln(k)} - e^{(s-s_0) \ln(k+1)} \right| + |A_{n,n'}| n'^{-x} \\ &\leq \sum_{k=n}^{n'-1} \epsilon \frac{|s-s_0|}{x} \left(e^{-x \ln(k)} - e^{-x \ln(k+1)} \right) + \epsilon n'^{-x} \\ &\leq \epsilon \left(\frac{|s-s_0|}{x} \sum_{k=n}^{n'-1} (k^{-x} - (k+1)^{-x}) + n'^{-x} \right) \\ &\leq \epsilon \left(\frac{|s-s_0|}{x} (n^{-x} - n'^{-x}) + n'^{-x} \right) \\ &\leq \epsilon(2k+1) \end{aligned}$$

en notant $k = \frac{|s-s_0|}{x} = \frac{1}{\cos(\arg(s-s_0))} \leq \frac{1}{\cos(\alpha)}$ donc

$$|S_{n,n'}(s)| \leq \epsilon \left(\frac{2}{\cos(\alpha)} + 1 \right)$$

La série $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $\operatorname{Re}(s - s_0) \geq 0$, $|\arg(s - s_0)| \leq \alpha$, elle converge donc uniformément dans cette région.

□

Corollaire 1.1.1 *Si une série de Dirichlet converge pour $s = s_0$, elle converge uniformément sur tout compact du demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$: en particulier elle converge sur le **demi-plan de convergence** $\sigma > \sigma_{\text{conv}}$. $D_f(s)$ est donc une fonction holomorphe sur $\sigma > \sigma_{\text{conv}}$.*

DÉMONSTRATION

Ce corollaire est immédiat, puisque tout compact de ce demi-plan s'inclut dans une zone du type celle donnée dans le théorème 1.1.1 avec α suffisamment proche de $\frac{\pi}{2}$. On a convergence uniforme sur tout compact, la somme de la série est donc une fonction holomorphe.

1.1.2 Prolongements des séries de Dirichlet

On a vu qu'une série de Dirichlet définit une fonction holomorphe sur le demi-plan de convergence. Nous allons voir que dans certains cas, bien qu'une série de Dirichlet ne converge que sur une zone du type $\sigma > \sigma_{\text{conv}}$, on peut la prolonger analytiquement à gauche en une fonction holomorphe : ce sera le cas par exemple pour les fonctions L de Dirichlet.

En revanche, dans le cas des séries de Dirichlet à coefficients réels positifs (ie. la fonction arithmétique f prend ses valeurs dans \mathbb{R}^+), on ne peut pas prolonger D_f en une fonction holomorphe à gauche de l'abscisse de convergence. Pour justifier ceci, montrons le théorème suivant :

Théorème 1.1.2 *Soit $g(s) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n s}$ une série de Dirichlet à coefficients a_n réels positifs. Supposons que f converge pour $\sigma > \rho$ avec $\rho \in \mathbb{R}$ et que f soit prolongeable analytiquement en une fonction holomorphe au voisinage de $s = \rho$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que f converge pour $\sigma > \rho - \epsilon$.*

DÉMONSTRATION

On peut se ramener par translation au cas $\rho = 0$.

Comme g est holomorphe au voisinage de zéro, il existe ϵ tel que sur le disque fermé de centre ϵ et de rayon 2ϵ , g est somme de sa série de Taylor en ϵ .

$$g(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (z - \epsilon)^p g^{(p)}(\epsilon)$$

Mais on a aussi par dérivation terme à terme :

$$g^{(p)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-\lambda_n)^p e^{-\lambda_n z}$$

Et en prenant $z = \epsilon$ on obtient :

$$\begin{aligned}
g(z) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (z - \epsilon)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-\lambda_n)^p e^{-\lambda_n \epsilon} \\
g(-\epsilon) &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p!} (-2\epsilon)^p a_n (-\lambda_n)^p e^{-\lambda_n \epsilon} \\
g(-\epsilon) &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \epsilon} \frac{1}{p!} (2\epsilon \lambda_n)^p
\end{aligned}$$

On a une série double à termes positifs qui est sommable car en sommant d'abord par rapport à p , la série converge.

$$g(-\epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \epsilon} e^{2\epsilon \lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n \epsilon} < +\infty$$

La série de Dirichlet converge en $s = -\epsilon$ donc sur $Re(s) > -\epsilon$ d'après le théorème **1.1.1**.

□

Ce théorème justifie l'affirmation précédente, car si un prolongement holomorphe était possible au niveau de l'abscisse de convergence, la série convergerait pour un $\sigma < \sigma_{conv}$, ce qui est exclu par définition de l'abscisse de convergence.

Par contre, un prolongement méromorphe est possible pour les série à termes positifs, mais avec dans ce cas un pôle en $s = \sigma_{conv}$: c'est le cas pour la fonction ζ , comme on le verra plus loin.

1.1.3 Produit de convolution de deux séries de Dirichlet

Soit f (resp. g) une fonction arithmétique à croissance modérée telle que la série de Dirichlet associée converge pour $\sigma > \sigma_f$ (resp. σ_g). Soit $\sigma > \max(\sigma_f, \sigma_g)$. On a

$$D_f(s) \times D_g(s) = D_h(s) = \sum_{n \geq 1} h(n) n^{-s}$$

où h est une fonction arithmétique appelée **produit de convolution de Dirichlet de f et g** . On note $h = f * g$ et

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{ab=n} f(a) g(b)$$

La convolution de deux fonctions arithmétiques est clairement commutative, comme le montre la dernière formule obtenue.

Inverse pour la convolution

On définit la fonction arithmétique δ par :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$D_\delta = 1$, δ est donc l'élément neutre pour la convolution de deux fonctions arithmétiques.

Proposition 1.1.1 *Il existe une inverse $(f^*)^{-1}$ de f pour la convolution (ie $f * (f^*)^{-1} = \delta$) si et seulement si $f(1) \neq 0$.*

DÉMONSTRATION

Supposons que $(f^*)^{-1}$ existe. Notons h la convolution de f et $(f^*)^{-1}$. $h(1) = 1$ donc $f(1)(f^*)^{-1}(1) = 1$ d'où $f(1) \neq 0$.

De plus, on peut alors définir $(f^*)^{-1}$ de manière unique, par récurrence. En effet,

$$(f^*)^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}$$

Ensuite on a

$$(f^*)^{-1}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} f(d)(f^*)^{-1}\left(\frac{n}{d}\right)$$

1.2 Formule du produit Eulérien

Proposition 1.2.1 (Formule du produit Eulérien) *Si f est une fonction arithmétique multiplicative, à croissance modérée, alors pour tout s tel que $D_f(s)$ converge absolument, on a :*

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{k \geq 0} f(p^k)p^{-ks} \right) \quad (1.1)$$

DÉMONSTRATION

Montrons d'abord la convergence absolue du produit ci-dessus. On note $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers.

$$\begin{aligned} \prod_{p=2}^{p_n} \left| \sum_{k \geq 0} f(p^k)p^{-ks} \right| &\leq \prod_{p=2}^{p_n} \sum_{k \geq 0} |f(p^k)| p^{-k\sigma} \leq \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \text{ ayant des} \\ \text{facteurs premiers} \\ \in [2; p_n]}} |f(m)| m^{-\sigma} \\ &\leq \sum_{m \geq 1} |f(m)| m^{-\sigma_0} = A < \infty \end{aligned}$$

Montrons maintenant la convergence de ce produit vers la série de Dirichlet de f . Pour cela, notons $E(N)$ l'ensemble des entiers dont tous les diviseurs premiers sont inférieurs à N .

$$\prod_{p \leq N} \left(\sum_{k \geq 0} f(p^k)p^{-ks} \right) = \sum_{n \in E(N)} f(n)n^{-s}$$

En effet, f est multiplicative donc $f(p^k)p^{-ks}f(q^r)q^{-rs} = f(p^kq^r)(p^kq^r)^{-s} = f(m)m^{-s}$ où $m \in E(N)$. Réciproquement, tout $n \in E(N)$ s'écrit $\prod p_i^{\alpha_i}$ d'où $f(n)n^{-s} = \prod f(p_i^{\alpha_i})p_i^{-\alpha_i s}$, qui est bien un terme du produit de gauche.

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)n^{-s} - \sum_{n \in E(N)} f(n)n^{-s} = \sum_{n \in L(N)} f(n)n^{-s}$$

où $L(N) = \{ \text{entiers ayant un diviseur premier} > N \}$.

$$\begin{aligned} \left| D_f(s) - \prod_{p \leq N} \left(\sum_{k \geq 0} f(p^k)p^{-ks} \right) \right| &\leq \sum_{n \in L(N)} |f(n)|n^{-s} \\ &\leq \sum_{n \geq N} |f(n)|n^{-s} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

d'où la limite souhaitée

□

Cette formule, due à Euler, permet de faire un lien important entre les séries de Dirichlet et les nombres premiers : on passe en effet d'une somme à un produit sur l'ensemble des nombres premiers.

1.3 Quelques exemples liés à la fonction ζ

La fonction ζ de Riemann est définie sur $\sigma > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Il s'agit en fait d'une série de Dirichlet, associée à la fonction arithmétique $f : n \rightarrow 1$. Le produit Eulérien nous donne alors le lien entre cette fonction et les nombres premiers :

$$\boxed{\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k \geq 0} p^{-ks} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}}$$

Cette formule est valable pour $\sigma > 1$, région sur laquelle ζ converge absolument.

Nous allons maintenant voir maintenant à titre d'exemple que les séries de Dirichlet des fonctions arithmétiques connues ont un lien avec la fonction ζ .

Fonction de Möbius μ

On rappelle que $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$ si n est produit de k nombres premiers distincts, $\mu(n) = 0$ si n possède un facteur premier multiple. Pour $\sigma > 1$, la série de Dirichlet associée à μ converge absolument et on peut utiliser la formule du produit Eulérien :

$$D_\mu(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 + \mu(p)p^{-s}) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s}) = (\zeta(s))^{-1}$$

Donc si $\sigma > 1$:

$$\boxed{D_\mu(s)\zeta(s) = 1} \quad (1.2)$$

Fonction nombre de diviseurs τ

On définit $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, ie $\tau(n)$ est le cardinal de l'ensemble des diviseurs de n .

$$D_\tau(s) = \sum_{n \geq 0} \tau(n)n^{-s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k \geq 0} \tau(p^k)p^{-ks} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k \geq 0} (1+k)p^{-ks}$$

car p^k possède $k+1$ diviseurs : $1, p, \dots, p^{k-1}, p^k$.

$$D_\tau(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k \geq 1} (k)(p^{-s})^{k-1} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{(1-p^{-s})^2} = \zeta^2(s)$$

donc si $\sigma > 1$,

$$\boxed{D_\tau(s) = \zeta^2(s)}$$

Fonction d'Euler ϕ

$\phi(n) \leq n$ donc D_ϕ converge si $\sigma > 2$ et la formule $n = \sum_{d|n} \phi(n)$ peut s'interpréter comme une convolution : $Id = \phi * 1$. Et donc $D_{Id} = D_\phi \cdot \zeta$.

Or $D_{Id}(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s+1} = \zeta(s-1)$. Donc, si $\sigma > 2$:

$$\boxed{D_\phi(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}}$$

1.4 La fonction de Von Mangoldt, Λ

1.4.1 Dérivation d'une série de Dirichlet

On suppose que $D_f(s)$ converge absolument pour $\sigma \geq \sigma_0$. Alors on peut dériver terme à terme et on a :

$$\begin{aligned} D'_f(s) &= \sum_{n \geq 1} (-\log(n))f(n)n^{-s} \\ (D_f)' &= D_{-f \log} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION

$|\log(n)f(n)n^{-s}| \leq \log(n)|f(n)|n^{-\sigma_0}$, série convergente : on peut donc dériver terme à terme.

1.4.2 Dérivée logarithmique et fonction de Von Mangoldt

Si f est à croissance modérée et telle que $f(1) \neq 0$, sur la zone de convergence absolue on peut définir $(D_f)'$ et D_{f*-1} . On définit alors la dérivée logarithmique d'une série de Dirichlet comme un produit de convolution :

$$-\frac{(D_f)'(s)}{D_f(s)} = -(D_f)'(s)D_{f^*-1}(s)$$

Définition 1.4.1 (Fonction de Von Mangoldt) La fonction de Von Mangoldt, Λ est définie par rapport à la dérivée logarithmique de la fonction ζ , qui peut être considérée comme une série de Dirichlet :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = D_\Lambda(s) = \sum_{n \geq 1} \Lambda(n)n^{-s}$$

D'après (1.2), la formule $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = D_\Lambda(s)$ est équivalente à

$$-\zeta'(s)D_\mu(s) = D_\Lambda(s)$$

Λ se présente donc comme le produit de convolution de $\log(n)$, fonction arithmétique correspondant à l'opposé de ζ' et de μ . $\Lambda = \log * \mu = \mu * \log$ d'où

$$\begin{aligned} \Lambda(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \log\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) (\log(n) - \log(d)) \\ &= \log(n) \left(\sum_{d|n} \mu(d) \right) - \sum_{d|n} \mu(d) \log(d) \end{aligned}$$

Or $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ si $n \geq 1$ donc

$$\Lambda(n) = - \sum_{d|n} \mu(d) \log(d)$$

$\Lambda(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}) = -(\mu(p_1) \log(p_1) + \mu(p_2) \log(p_2) + \mu(p_1 p_2) \log(p_1 p_2))$ car on supprime les diviseurs contenant un nombre premier à une puissance supérieure à 1 (μ est nul pour de tels nombres). Alors $\Lambda(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}) = -(\log(p_1) + \log(p_2) - \log(p_1 p_2)) = 0$. De manière générale, si n possède au moins deux facteurs premiers distincts, on voit que $\Lambda(n) = 0$.

A l'aide de la formule du produit Eulérien, calculons maintenant $\Lambda(p^k)$.

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k \geq 0} \log(p^k) p^{-ks} \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s}) \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \log(p) p^{-s} \sum_{k \geq 0} k p^{-ks} \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s}) \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{\log(p) p^{-s}}{1 - p^{-s}} \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k \geq 1} \log(p) p^{-ks} \end{aligned}$$

Donc $\Lambda(p^k) = \log(p)$ par identification avec la formule du produit.

Finalement :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^k \text{ avec } k \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction de Von Mangoldt est particulièrement importante car la fonction sommatoire associée, que nous étudierons dans la partie suivante joue un rôle important en théorie analytique. Nous verrons notamment que pour démontrer le théorème des nombres premiers, il suffit d'étudier le comportement asymptotique de cette fonction sommatoire.

Deuxième partie

Caractères de groupes abéliens finis et fonctions L

2.1 Théorie des caractères

2.1.1 Caractère d'un groupe abélien fini

Définition 2.1.1 Soit G un groupe abélien fini de cardinal n .

Un caractère de G est un morphisme $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ de G dans le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* .

Propriétés

- Comme G est de cardinal n , pour tout x , $x^n = e$ d'où $\chi(x)^n = 1$: $\chi(x)$ est donc une racine de l'unité, d'où $|\chi(x)| = 1$
- Pour un groupe cyclique, un caractère est déterminé de manière unique par l'image d'une générateur s (qui est forcément une racine n -ième). Les caractères sont alors les $\chi_\omega : s^a \longmapsto \omega^a$ où $\omega \in W_n$, ensemble des racines n -ièmes de l'unité
- L'ensemble des caractères forme un groupe pour la multiplication des applications, appelé **groupe dual** et noté \hat{G} . L'élément neutre est le **caractère trivial** χ_0 tel que $\forall x \in G, \chi_0(x) = 1$ (il sera parfois aussi noté 1) et l'inverse d'un caractère χ est le caractère conjugué $\bar{\chi}$ tel que $\bar{\chi}(x) = \overline{\chi(x)}$. En effet,

$$\chi(x)\bar{\chi}(x) = \chi(x)\overline{\chi(x)} = |\chi(x)|^2 = 1$$

Proposition 2.1.1 (Prolongement d'un caractère d'un sous-groupe) H un sous-groupe de G

Tout caractère de H peut-être prolongé en un caractère de G .

DÉMONSTRATION

La démonstration se fait par récurrence sur $[G : H]$, indice de H dans G .

- Si $[G : H] = 1$, $G = H$ et le « prolongement » est évident
- Supposons la proposition vraie pour un indice $\leq k$.
Soit H d'indice $(k + 1)$ et χ un caractère de H .
Soit $x \notin H$. G/H est fini donc il existe r tel que $x^r = 1$ dans G/H ie $x^r \in H$: on prend r le plus petit entier vérifiant cette condition ($r > 1$) et on se donne $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\chi(x^r) = \omega^r$.
Soit H' le sous-groupe de G engendré par H et x . Tout élément h' de H' s'écrit $h' = hx^a$, $h \in H$ et $a \in \mathbb{Z}$. On définit un caractère sur H' par

$$\chi'(h') = \chi(h)\omega^a$$

$H \subsetneq H'$ d'où $[G : H'] < [G : H]$. On peut alors par hypothèse de récurrence prolonger χ' en un caractère χ_G de G .

χ_G coïncide avec χ sur H donc on a bien prolongé χ en un caractère de G .

- La proposition est donc vraie quel que soit l'indice de H dans G

□

2.1.2 Relations d'orthogonalité

Les deux relations données par la proposition suivantes sont appelées relations d'orthogonalité sur les caractères.

Proposition 2.1.2

$$\sum_{x \in G} \chi(x) = \begin{cases} \text{Card}(G) & \text{si } \chi = 1 \\ 0 & \text{si } \chi \neq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(x) = \begin{cases} \text{Card}(\hat{G}) & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION

Montrons d'abord la première relation

- Si $\chi = 1$, la formule est évidente
- Si $\chi \neq 1$, il existe x_1 tel que $\chi(x_1) \neq 1$

$$\chi(x_1) \sum_{x \in G} \chi(x) = \sum_{x \in G} \chi(x_1 x) = \sum_{x \in G} \chi(x)$$

car l'application $x \mapsto x_1 x$ est bijective

$$\begin{aligned} (\chi(x_1) - 1) \sum_{x \in G} \chi(x) &= 0 \\ \sum_{x \in G} \chi(x) &= 0 \end{aligned}$$

Montrons la seconde relation

- Si $x = 1$ la formule est évidente
- Si $x \neq 1$, il existe un caractère χ_1 tel que $\chi_1(x) \neq 1$

En effet, $H = \langle x \rangle \neq \{1\}$ est un sous-groupe de G d'ordre $k > 1$. Posons $\chi(x) = \omega$ où ω est une racine k -ième de 1 différente de 1. On définit ainsi un caractère χ sur le groupe cyclique H , que l'on peut d'après la proposition **2.1.1** prolonger à un caractère χ_1 sur G qui vérifie alors $\chi_1(x) = \chi(x) = \omega \neq 1$.

$$\chi_1(x) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(x) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi_1 \chi(x) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(x)$$

On a alors

$$\begin{aligned} (\chi_1(x) - 1) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(x) &= 0 \\ \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(x) &= 0 \end{aligned}$$

□

Ces formules sont appelées « relations d'orthogonalité » car elles sont liées à un produit scalaire.

Soit $V = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C}\}$. C'est un \mathbb{C} -ev de dimension $\text{Card}(G) = n$ (une base est celle des applications f_i définies par $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ où x_j est un élément de G et $1 \leq i \leq n$).

On munit V du produit scalaire :

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)}$$

Proposition 2.1.3 *Les caractères forment une base orthonormée de V pour le produit scalaire ci-dessus.*

DÉMONSTRATION

$$\langle \chi|\chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi(x) \bar{\chi}'(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} (\chi \bar{\chi}')(x)$$

D'après la première relation d'orthogonalité,

Si $\chi \bar{\chi}' = 1$ (ie $\chi = \chi'$) alors $\sum_{x \in G} (\chi \bar{\chi}')(x) = |G|$

Si $\chi \bar{\chi}' \neq 1$ (ie $\chi \neq \chi'$) alors $\sum_{x \in G} (\chi \bar{\chi}')(x) = 0$

Donc

$$\langle \chi|\chi' \rangle = \delta_{\chi, \chi'}$$

Montrons maintenant que cette famille libre orthogonale est aussi génératrice, en montrant que $\{\chi \in \hat{G}\}^\perp = \{0\}$.

Soit $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $\chi \in \hat{G}$, $\langle f|\chi \rangle = 0$ et soit $y \in G$

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(y) \langle f|\chi \rangle &= 0 \\ \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(y) \sum_{x \in G} f(x) \bar{\chi}(x) &= 0 \\ \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(y) \bar{\chi}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Or $\bar{\chi}(x) = \chi^{-1}(x) = \chi(x^{-1})$ donc l'égalité devient :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(yx^{-1}) = 0$$

Et $\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(yx^{-1}) = 0$ sauf si $yx^{-1} = 1$ ie $x = y$, donc

$$\frac{1}{|G|} f(y) \times |G| = f(y) = 0$$

$f(y) = 0$ pour tout y donc $f = 0$

Corollaires

Comme V est de dimension $n = \text{Card}(G)$ et que les caractères forment une base, on déduit que

$$\boxed{\text{Card}(G) = \text{Card}(\hat{G})}$$

On a aussi la formule de décomposition suivant les caractères. Pour tout $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ on a la relation :

$$\boxed{f(x) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \langle f | \chi \rangle \chi(x)}$$

2.1.3 Caractères de Dirichlet

Définition 2.1.2 Soit q un entier ≥ 1

χ , caractère de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ - groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ - est appelé **caractère modulo q** .

On le prolonge sur \mathbb{Z} en son **caractère de Dirichlet associé** (modulo q) de la manière suivante :

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } (n, q) \neq 1 \\ \chi(\bar{n}) & \text{si } (n, q) = 1 \end{cases}$$

\bar{n} désigne la classe de n dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$

Les caractères de Dirichlet modulo q forment un groupe fini d'ordre $\phi(q)$ (car $\text{Card}((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times) = \phi(q)$, où ϕ désigne l'indicatrice d'Euler).

Le **caractère trivial modulo q** est noté ϵ_q est défini par $\epsilon_q(n) = 1$ si $(n, q) = 1$ et $\epsilon_q(n) = 0$ sinon. Le caractère trivial modulo q sera parfois abusivement noté 1.

On peut parler aussi de parité d'un caractère de Dirichlet. En effet, on a $(\chi(-1))^2 = 1$ donc $\chi(-1) = \pm 1$. Un caractère est dit

- **pair** si $\chi(-1) = 1$
- **impair** si $\chi(-1) = -1$

On vérifie que pour tout n, n' appartenant à \mathbb{Z} on a les propriétés :

$$\begin{aligned} \chi(nn') &= \chi(n)\chi(n') \\ \chi(n+kq) &= \chi(n) \end{aligned}$$

Les caractères de Dirichlet sont donc des fonctions arithmétiques totalement multiplicatives. On a par ailleurs la relation suivante, qui est la traduction de la formule d'orthogonalité pour les caractères :

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \chi(a) \bar{\chi}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (a, q) = 1 \text{ et } a \equiv n[q] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

En effet,

$$\sum_{\chi \bmod q} \chi(a) \bar{\chi}(n) = \sum_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(na^{-1}) = \phi(q) \text{ si } na^{-1} \equiv 1[q]$$

Cette formule est très utile car elle permet de « détecter » la condition $a \equiv n[q]$: par exemple si $\pi(x; q, a)$ est le nombre de nombres premiers congrus à a modulo q inférieurs à x on pourra s'écrire

$$\pi(x; q, a) = \sum_{p \leq x} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \chi(a) \bar{\chi}(p)$$

C'est pour cela qu'on étudie ici les caractères : ils vont intervenir dans les séries où on ne va considérer que certains nombres congrus à a modulo q .

2.1.4 Caractère primitif

χ un caractère de Dirichlet modulo q .

A partir de χ on peut construire un caractère χ_1 modulo dq , $d \geq 2$ de la façon suivante :

$$\chi_1(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } (n, dq) \neq 1 \\ \chi(n) & \text{si } (n, dq) = 1 \text{ (} \Rightarrow (n, q) = 1 \text{)} \end{cases}$$

χ_1 est dit **induit par** χ

Définition 2.1.3 (Caractère primitif) *Un caractère de Dirichlet χ mod m est dit **primitif** s'il n'est induit par aucun caractère mod m' , où m' est un diviseur propre de m .*

Un caractère induit χ_1 est égal au caractère primitif χ qui l'induit sauf aux points n tels que $(n, q) = 1$ et $(n, dq) \neq 1$, où $\chi_1(x) = 0$ mais $\chi(x) \neq 0$

L'étude des caractères primitifs est très importante car tout caractère χ modulo q est induit par un unique caractère primitif χ^* (modulo $q^*|q$). On dit que q^* est le conducteur de χ (et du caractère primitif χ^*).

2.2 Fonctions L de Dirichlet

Définition 2.2.1 *Soit $q \geq 1$, χ un caractère de Dirichlet modulo q . La fonction L de χ est la somme de la série de Dirichlet associée à la fonction arithmétique χ :*

$$L(\chi, s) = D_\chi(s) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) n^{-s}$$

La série converge uniformément sur tout compact de $\sigma > 1$, L est holomorphe sur $\sigma > 1$. De plus on peut appliquer la formule du produit Eulérien (1.1), puisque χ est multiplicative. On va même utiliser le fait qu'elle est totalement multiplicative.

Pour $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \chi(n) n^{-s} &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k \geq 0} (\chi(p^k)) p^{-ks} \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k \geq 0} (\chi(p) p^{-s})^k \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \chi(p) p^{-s}} \end{aligned}$$

On a donc la formule

$$L(\chi, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}} \quad (2.2)$$

pour $\sigma > 1$

Fonctions L et caractères primitifs

Proposition 2.2.1 *Soit χ un caractère de Dirichlet modulo q induit par le caractère primitif χ^* modulo q^* . On a*

$$L(\chi, s) = L(\chi^*, s) \prod_{p \mid \frac{q}{q^*}} (1 - \chi^*(p)p^{-s}) \quad (2.3)$$

DÉMONSTRATION

Soit s tel que $\sigma > 1$. On a d'après (2.2)

$$L(\chi, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}$$

Or $\chi(p) \neq \chi^*(p)$ ssi $(p, q^*) = 1$ et $(p, q) \neq 1$ càd ssi $p \mid \frac{q}{q^*}$ et $(p, q^*) = 1$. Lorsque cette condition est réalisée, $\chi(p) = 0$ mais $\chi^*(p) \neq 0$. Ainsi,

$$L(\chi, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \chi^*(p)p^{-s}} \prod_{p \mid \frac{q}{q^*}} (1 - \chi^*(p)p^{-s})$$

Et en réappliquant la formule (2.2),

$$L(\chi, s) = L(\chi^*, s) \prod_{p \mid \frac{q}{q^*}} (1 - \chi^*(p)p^{-s})$$

□

Cette formule est a priori valable pour $\sigma > 1$, zone où on a pour l'instant défini les fonctions L , mais les éventuels prolongements analytiques des fonctions L seront aussi égaux.

On peut appliquer le même raisonnement au caractère trivial :

Proposition 2.2.2 *Soit ϵ_q le caractère trivial modulo q*

$$L(\epsilon_q, s) = \zeta(s) \prod_{p \mid q} (1 - p^{-s})$$

En effet, le caractère trivial modulo q est induit par le caractère trivial modulo 1, qui vaut 1 pour tout n et dont la fonction L associée est la fonction ζ .

Ces deux propositions montrent qu'on peut restreindre notre l'étude à celle des fonctions L associées à des caractères primitifs. En particulier, pour avoir des informations sur les fonctions L des caractères triviaux, il suffit d'étudier la fonction ζ .

2.3 Dérivée logarithmique des fonctions L

Comme dans la partie 1.3 où on faisait le lien entre ζ et d'autres séries de Dirichlet, on va ici chercher un lien entre les fonctions L et des séries de Dirichlet de fonctions arithmétiques bien connues.

Fonction nombre de diviseurs τ

Pour $\sigma > 1$:

$$\begin{aligned} (L(\chi, s))^2 &= \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-2} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{\infty} k(\chi(p))^{k-1} p^{-s(k-1)} \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(\chi(p))^k p^{-s(k)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{\infty} \tau(p^k)(\chi(p))^k p^{-s(k)} \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{\infty} (\tau\chi)(p^k) p^{-s(k)} = \sum_{n \geq 1} \tau(n)\chi(n)n^{-s} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(L(\chi, s))^2 = \sum_{n \geq 1} \tau(n)\chi(n)n^{-s}$$

Fonction De Möbius μ

Pour $\sigma > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(\chi, s)} &= \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \chi(p)p^{-s}) \\ \sum_{n \geq 1} \mu(n)\chi(n)n^{-s} &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k \geq 0} \mu(p^k)\chi(p)^k p^{-sk} = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \chi(p)p^{-s}) \end{aligned}$$

car $\mu(p^k) = 0$ si $k \geq 2$ et $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$. On a donc

$$\frac{1}{L(\chi, s)} = \sum_{n \geq 1} \mu(n)\chi(n)n^{-s}$$

Dérivée logarithmique et fonction de Von Mangoldt Λ

On a d'abord pour $\sigma > 1$,

$$L'(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} (-\log(n))\chi(n)n^{-s}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} &= -L'(\chi, s) \times \frac{1}{L(\chi, s)} \\
&= \left(\sum_{n \geq 1} \log(n) \chi(n) n^{-s} \right) \times (\mu(n) \chi(n) n^{-s}) \\
&= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d|n} \log(d) \chi(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) \chi\left(\frac{n}{d}\right) \right) n^{-s} \\
&= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log(d) \right) \chi(n) n^{-s} \\
&= \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \chi(n) n^{-s}
\end{aligned}$$

On a effectué le produit de convolution des deux séries de Dirichlet $-L'(\chi, s)$ et $\frac{1}{L(\chi, s)}$ puis on s'est rappelé que $\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log(d)$. On a donc montré que :

$$\boxed{-\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} = \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \chi(n) n^{-s}} \tag{2.4}$$

pour $\sigma > 1$

Troisième partie

Fonctions sommatoires

3.1 Fonctions sommatoires et fonctions sommatoires lissées

Définition 3.1.1 (Fonction sommatoire) Soit f une fonction arithmétique. La fonction sommatoire de f est la fonction M_f définie pour $x \geq 1$ par

$$M_f(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} f(n)$$

C'est le comportement asymptotique de certaines fonctions sommatoires que nous étudierons par la suite. Comme on le verra, les propriétés de $M_f(x)$ sont étroitement liées à celles de $D_f(s)$, la série de Dirichlet associée.

Pour certaines séries de Dirichlet, on peut grâce à une transformation d'Abel, technique intervenant souvent en théorie analytique, exprimer $D_f(s)$ en fonction de $M_f(x)$:

Proposition 3.1.1 Soit f une fonction arithmétique vérifiant $f(n) = O(n^\alpha)$ ($\alpha \geq 0$). On a alors

$$M_f(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} f(n) = O(x^{1+\alpha})$$

Et la formule suivante :

$$D_f(s) = \sum_{n \geq 1} f(n)n^{-s} = s \int_1^\infty M_f(x)x^{-s-1}dx$$

pour $\sigma > \alpha + 1$

DÉMONSTRATION

$$M_f(s) \leq K \sum_{1 \leq n \leq x} n^\alpha \leq K \sum_{1 \leq n \leq x} x^\alpha \leq Kx^{1+\alpha}$$

ce qui justifie la première assertion. Pour la deuxième formule, on effectue une transformation d'Abel en posant $f(n) = M_f(n) - M_f(n-1)$. On ne détaille pas ici, mais il y aura plus loin d'autres exemples d'utilisation de cette même technique.

□

Par la suite on verra une formule intégrale qui permettra d'exprimer une fonction sommatoire en fonction de la série de Dirichlet associée. Pour des raisons de régularité, il est parfois plus simple d'évaluer le comportement asymptotique de fonctions sommatoires lissées.

Définition 3.1.2 (Fonction sommatoire lissée) Soit f une fonction arithmétique. On appelle fonction sommatoire lissée associée à f et à la fonction de Schwartz ϕ la série suivante :

$$\mathcal{M}_f(\phi) = \sum_{n \geq 1} f(n)\phi(n)$$

On rappelle la définition d'une fonction de Schwartz :

Définition 3.1.3 (Fonction de Schwartz) Une fonction de Schwarz $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^∞ telle que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad |x^n f^{(m)}(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

f est donc une fonction à décroissance plus rapide que tout polynôme à l'infini

Parmi les fonctions de Schwartz on retrouve bien sûr les fonctions à support compact. On va maintenant préciser la notion de majorant lisse d'une fonction caractéristique, qui est une catégorie de fonctions à support compact.

Définition 3.1.4 (Majorant lisse) Soit $y > 0$. Un majorant lisse de la fonction caractéristique de $[0; y]$, d'amplitude $\Delta > 1$ est une fonction $\phi : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ qui est C^∞ , à support compact dans $[0; \Delta y]$ et telle que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \phi \leq 1 \\ \phi(x) &= 1 \quad \text{si} \quad x \leq y \end{aligned}$$

3.2 Exemples importants

3.2.1 Fonctions π et ψ

On peut citer en exemple les fonctions sommatoires qui comptent le nombre de nombres premiers :

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{p \leq x} 1 \\ \pi(x; q, a) &= \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a[q]}} 1 \end{aligned}$$

Mais ce sont les fonctions ψ que nous utiliserons par la suite pour démontrer les théorèmes des nombres premiers. Il s'agit des fonctions sommatoires associées à la fonction de Von Mangoldt définie précédemment.

On a d'abord la fonction sommatoire de Λ :

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

On peut donner une application de la proposition **3.1.1** avec $f(n) = \Lambda(n) \leq \log(n) = O(n^\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$. On obtient, pour $\sigma > 1$:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx \quad (3.1)$$

Pour s'intéresser à la répartition des nombres premiers congrus à a modulo q (a et q évidemment premiers entre eux) on définit la fonction :

$$\psi(x; q, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a [q]}} \Lambda(n)$$

La fonction $\psi(x; q, a)$ est liée aux caractères de Dirichlet modulo q . En effet, on peut utiliser la formule (2.1) pour introduire la condition $p \equiv a \pmod{q}$:

$$\psi(x; q, a) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) g(n)$$

où $g(n) = 1$ si la condition de congruence est remplie et 0 sinon. La formule (2.1) nous fournit un candidat pour la fonction $g(n)$:

$$\psi(x; q, a) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} \bar{\chi}(a) \chi(n) \right)$$

Et en intervertissant les deux sommes :

$$\psi(x; q, a) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} \bar{\chi}(a) \left(\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi(n) \right) \quad (3.2)$$

3.2.2 Théorèmes des nombres premiers et fonctions ψ

Nous allons maintenant voir en quoi ces deux fonctions jouent un rôle essentiel dans la démonstration des théorèmes des nombres premiers, en montrant les propositions suivantes :

Proposition 3.2.1 *Le théorème des nombres premiers, c'est-à-dire*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

lorsque $x \rightarrow \infty$ est équivalent à

$$\psi(x) \sim x$$

lorsque $x \rightarrow \infty$

Proposition 3.2.2 *Le théorème des nombres premiers en progression arithmétique, c'est-à-dire*

$$\pi(x; q, a) \sim \frac{1}{\phi(q)} \frac{x}{\ln(x)}$$

lorsque $x \rightarrow \infty$ est équivalent à

$$\psi(x; q, a) \sim \frac{x}{\phi(q)}$$

lorsque $x \rightarrow \infty$

On peut noter que la proposition 2 implique la proposition 1 (prendre $q = 2$ et $a = 1$), nous allons donc démontrer cette dernière proposition uniquement.

DÉMONSTRATION

- Montrons que $\pi(x; q, a) \sim \frac{1}{\phi(q)} \frac{x}{\log(x)}$ implique $\psi(x; q, a) \sim \frac{x}{\phi(q)}$

Comme $\Lambda(n) = \log(p)$ si n est une puissance du nombre premier p et 0 sinon, on a :

$$\psi(x; q, a) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a[q]}} \log(p) + \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2 \\ p^k \equiv a[q]}} \log(p) = \theta(x; q, a) + R(x; q, a)$$

Comme $p^k \leq x$ et $k \geq 2$, on a $2 \leq k \leq \frac{\log(x)}{\log(p)}$, d'où $2 \leq k \leq \frac{\log(x)}{\log(2)}$.

$$R(x; q, a) \leq \sum_{\substack{p \leq \sqrt{x} \\ 2 \leq k \leq \frac{\log(x)}{\log(2)}}} \log(p)$$

On a donc $R(x; q, a) \leq \frac{\sqrt{x}(\log x)^2}{\log(2)}$ soit $R(x; q, a) = O(\sqrt{x}(\log x)^2)$.

Notons $N = E(x)$, et effectuons une transformation d'Abel dans le premier terme $\theta(x; q, a)$:

$$\begin{aligned} \theta(x; q, a) &= \sum_{1 \leq n \leq N} \log(n) (\pi(n; q, a) - \pi(n-1; q, a)) \\ &= \log(N) \pi(N; q, a) + \sum_{1 \leq n \leq N-1} \pi(n; q, a) (\log(n) - \log(n+1)) \\ \theta(x; q, a) &= \log(N) \pi(N; q, a) - \sum_{1 \leq n \leq N-1} \pi(n; q, a) \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \\ &= \log(N) \pi(N; q, a) - \sum_{1 \leq n \leq N-1} \int_n^{n+1} \frac{\pi(t; q, a)}{t} dt \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\theta(x; q, a) = \log(N) \pi(N; q, a) - \int_1^N \frac{\pi(t; q, a)}{t} dt \quad (3.3)$$

On a de plus :

$$0 = \pi(x; q, a) (\log(x) - \log(N)) - \int_N^x \frac{\pi(t; q, a)}{t} dt \quad (3.4)$$

En effectuant (3.3)+(3.4) on obtient pour tout x :

$$\theta(x; q, a) = \log(x) \pi(x; q, a) - \int_1^x \frac{\pi(t; q, a)}{t} dt$$

On a donc :

$$\frac{\psi(x; q, a)}{\frac{x}{\phi(q)}} = \frac{\pi(x; q, a) \log(x) \phi(q)}{x} + \frac{\phi(q)}{x} \int_1^x \frac{\pi(t; q, a)}{t} dt + \frac{R(x; q, a) \phi(q)}{x}$$

Comme $\pi(x; q, a) \sim \frac{1}{\phi(q)} \frac{x}{\log(x)}$, $\frac{\pi(x; q, a) \log(x) \phi(q)}{x} \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

Comme $R(x; q, a) = O(\sqrt{x}(\log x)^2)$, $\frac{R(x; q, a) \phi(q)}{x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

Montrons qu'on a aussi $\frac{\phi(q)}{x} \int_1^x \frac{\pi(t; q, a)}{t} dt \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

Pour cela, montrons d'abord que $\int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt \sim \frac{x}{\log x}$:

En faisant une intégration par parties :

$$\int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt = \left[\frac{t}{\log(t)} \right]_2^x + \int_2^x \frac{dt}{(\log(t))^2} = \frac{x}{\log(x)} - \frac{2}{\log(2)} + \int_2^x \frac{dt}{(\log(t))^2}$$

Mais $\frac{1}{(\log(t))^2} = o(\frac{1}{\log(t)})$ et les intégrales divergent donc $\int_2^x \frac{dt}{(\log(t))^2} = o(\int_2^x \frac{dt}{\log(t)})$.

D'où finalement l'équivalence voulue. On a par ailleurs

$$\int_1^x \frac{\pi(t; q, a)}{t} dt \sim \int_2^x \frac{\pi(t; q, a)}{t} dt \sim \int_2^x \frac{t}{\phi(q) \log(t) t} dt$$

car les intégrales divergent. Donc :

$$\frac{\phi(q)}{x} \int_1^x \frac{\pi(t; q, a)}{t} dt \sim \frac{\phi(q)}{x} \frac{1}{\phi(q)} \int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt$$

Ainsi :

$$\frac{\phi(q)}{x} \int_1^x \frac{\pi(t; q, a)}{t} dt \sim \frac{1}{x} \frac{x}{\log(x)} \rightarrow 0$$

Et finalement $\frac{\psi(x; q, a)}{\frac{x}{\phi(q)}} \rightarrow 1$, soit $\psi(x; q, a) \sim \frac{x}{\phi(q)}$.

- Montrons que $\psi(x; q, a) \sim \frac{x}{\phi(q)}$ implique $\pi(x; q, a) \sim \frac{1}{\phi(q)} \frac{x}{\log(x)}$

$$\pi(x; q, a) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a[q]}} 1 = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a[q]}} \frac{\log(p)}{\log(p)} = \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)} - \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2 \\ p^k \equiv a[q]}} \frac{\log(p)}{\log(p^k)}$$

Le deuxième terme de cette somme, $R(x; q, a) \leq \frac{\sqrt{x} \log^2(x)}{2 \log(2)}$ donc $R(x; q, a) = O(\sqrt{x} \log^2(x))$.

On effectue une transformation d'Abel pour le premier terme, appelé $\theta(x; q, a)$, en écrivant $\Lambda(n) = \psi(n) - \psi(n-1)$ et on obtient finalement :

$$\theta(x; q, a) = \frac{\psi(x; q, a)}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\psi(t; q, a)}{t(\log(t))^2} dt$$

Ainsi :

$$\frac{\pi(x; q, a) \log(x) \phi(q)}{x} = \frac{\psi(x; q, a) \phi(q)}{x} + \frac{\phi(q) \log(x)}{x} \int_2^x \frac{\psi(t; q, a)}{t(\log(t))^2} dt + \frac{R(x; q, a) \log(x) \phi(q)}{x}$$

Comme $\psi(x; q, a) \sim \frac{x}{\phi(q)}$, $\frac{\psi(x; q, a) \phi(q)}{x} \rightarrow 1$.

Comme $R(x; q, a) = O(\sqrt{x} \log^2(x))$, $\frac{R(x; q, a) \log(x) \phi(q)}{x} \rightarrow 0$.

Et on a également :

$$\frac{\phi(q) \log(x)}{x} \int_2^x \frac{\psi(t; q, a)}{t(\log(t))^2} dt \sim \frac{\log(x)}{x} \int_2^x \frac{1}{(\log(t))^2} dt$$

Et comme précédemment, on montre en intégrant par parties $\int_2^x \frac{1}{(\log(t))^2} dt$ que

$$\int_2^x \frac{1}{(\log(t))^2} dt \sim \frac{x}{(\log(x))^2}$$

D'où finalement

$$\frac{\phi(q) \log(x)}{x} \int_2^x \frac{\psi(t; q, a)}{t(\log(t))^2} dt \sim \frac{1}{\log(x)} \rightarrow 0$$

Et $\frac{\pi(x; q, a) \log(x) \phi(q)}{x} \rightarrow 1$, soit $\pi(x; q, a) \sim \frac{1}{\phi(q)} \frac{x}{\log(x)}$.

□

Dans la suite on va chercher à évaluer ces fonctions sommatoires, à l'aide d'une formule intégrale faisant intervenir des transformées de Mellin : pour montrer la formule d'inversion de Mellin qui va nous servir, il faut d'abord faire quelques rappels concernant la transformation de Fourier et plus particulièrement l'inversion de Fourier.

3.3 Transformée de Fourier

3.3.1 Définition

Définition 3.3.1 Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ On définit la transformée de Fourier de la fonction f :

$$Tf(s) = \tilde{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi sx} f(x) dx$$

On définit aussi la transformée de Fourier conjuguée de f :

$$\bar{T}f(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi sx} f(x) dx$$

3.3.2 Exemple important

Nous allons étudier la transformée de Fourier des fonction $f_a(x) = e^{-ax^2}$ où $a > 0$.

Proposition 3.3.1 La transformée de Fourier de la fonction f_a est la fonction

$$\tilde{f}_a(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a} x^2}$$

DÉMONSTRATION

Soit s réel. $\tilde{f}_a(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-2i\pi sx} dx$ On peut dériver la transformée de Fourier par rapport à s sous l'intégrale :

$$\begin{aligned} \tilde{f}'_a(s) &= -2i\pi \int_{\mathbb{R}} x e^{-ax^2} e^{-2i\pi sx} dx = \frac{i\pi}{a} \int_{\mathbb{R}} (-2ax) e^{-ax^2} e^{-2i\pi sx} dx \\ &= -\frac{i\pi}{a} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} (-2i\pi s) e^{-2i\pi sx} dx = -\frac{2\pi^2 s}{a} \tilde{f}_a(s) \end{aligned}$$

\tilde{f}_a est donc solution de l'équation différentielle $y' + \frac{2\pi^2 s}{a} y = 0$.

Il existe donc A telle que $\tilde{f}_a(s) = A e^{-\frac{\pi^2}{a} s^2}$. Et

$$A = \tilde{f}_a(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\tilde{f}_a(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a} x^2}$$

Corollaire 3.3.1 L'application $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ est invariante par transformation de Fourier

Cette application correspond en effet à f_a avec $a = \pi$

3.3.3 Formule d'inversion de Fourier

Théorème 3.3.1 Si f et $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\bar{T}\tilde{f}(t) = f(t)$. C'est-à-dire :

$$f(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi sx} \tilde{f}(x) dx$$

3.3.4 Formule de Poisson

Proposition 3.3.2 (Formule de sommation de Poisson) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de Schwartz. Soit \tilde{f} sa transformée de Fourier.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(h) e^{2i\pi(hx)}$$

En particulier, pour $x = 0$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(h) \quad (3.5)$$

3.3.5 Etude des fonctions θ

Nous allons ici appliquer les formules précédentes (inversion de Fourier, formule de sommation de Poisson) pour étudier certaines fonctions qui nous serviront plus tard, notamment pour le prolongement des fonctions L .

Fonction θ

Soit θ la fonction définie pour $y > 0$ par

$$\theta(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 y}$$

Proposition 3.3.3 On a pour tout $y > 0$

$$\theta(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \theta\left(\frac{1}{y}\right) \quad (3.6)$$

DÉMONSTRATION

Appliquons la formule (3.5) à $f(x) = e^{-\pi x^2 y}$ dont la transformée de Fourier est $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{\pi x^2}{y}}$ (c'est une fonction de type f_a avec $a = \pi y$). On a :

$$\theta(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \theta\left(\frac{1}{y}\right)$$

Fonction $\theta(y; q, a)$

On introduit dans cette fonction θ la condition de congruence modulo q .

$$\theta(y; q, a) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv a[q]}} e^{-\pi n^2 y}$$

Proposition 3.3.4 *Pour tout $y > 0$ on a :*

$$\theta(y; q, a) = \frac{1}{q\sqrt{y}} \sum_{x \bmod q} e^{\frac{2i\pi ax}{q}} \theta\left(\frac{1}{q^2 y}; q, x\right) \quad (3.7)$$

DÉMONSTRATION

$$\theta(y; q, a) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(a+mq)^2 y}$$

Calculons la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-\pi(a+xq)^2 y}$.

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(a+uq)^2 y} e^{-2i\pi ux} du = \frac{1}{q} e^{\frac{2i\pi ax}{q}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2 y} e^{-2i\pi u(\frac{x}{q})} du \\ &= \frac{1}{q} e^{\frac{2i\pi ax}{q}} \tilde{f}_{\pi y}\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{1}{q\sqrt{y}} e^{\frac{2i\pi ax}{q}} e^{-\frac{\pi^2}{yq^2} x^2} \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Poisson on trouve alors :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(a+mq)^2 y} = \frac{1}{q\sqrt{y}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\frac{2i\pi am}{q}} e^{-\frac{\pi^2}{yq^2} m^2}$$

$e^{\frac{2i\pi am}{q}}$ ne dépend que de la classe de m modulo q : on peut donc transformer cette somme en une somme sur les éléments x de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$:

$$\theta(y; q, a) = \frac{1}{q\sqrt{y}} \sum_{x \bmod q} e^{\frac{2i\pi ax}{q}} \theta\left(\frac{1}{q^2 y}; q, x\right)$$

Fonction $\theta(\chi, y)$

Soit $q \geq 1$ et χ un caractère de Dirichlet modulo q . On définit la fonction

$$\theta(\chi, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) e^{-\pi n^2 y}$$

On peut transformer cette somme selon la parité du caractère χ

– Si χ est pair,

$$\theta(\chi, y) = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \chi(n) e^{-\pi n^2 y} \quad (3.8)$$

– Si χ est impair, $\theta(\chi, y) = 0$

Proposition 3.3.5 *Si χ est primitif on a pour $y > 0$:*

$$\theta(\chi, y) = \frac{\tau(\chi)}{q\sqrt{y}} \theta\left(\bar{\chi}, \frac{1}{q^2 y}\right) \quad (3.9)$$

avec $\tau(\chi)$ la somme de Gauss de χ définie par :

$$\tau(\chi) = \sum_{x \bmod q} \chi(x) e^{\frac{2i\pi x}{q}}$$

DÉMONSTRATION

On commence par scinder la somme suivant les classes modulo q :

$$\theta(\chi, y) = \sum_{a \bmod q} \chi(a) \theta(y; q, a)$$

On utilise alors la formule (3.7) pour chaque terme :

$$\begin{aligned} \theta(\chi, y) &= \frac{1}{q\sqrt{y}} \sum_{a \bmod q} \chi(a) \sum_{x \bmod q} e^{\frac{2i\pi ax}{q}} \theta\left(\frac{1}{q^2 y}; q, x\right) \\ &= \frac{1}{q\sqrt{y}} \sum_{x \bmod q} \theta\left(\frac{1}{q^2 y}; q, x\right) \sum_{a \bmod q} \chi(a) e^{\frac{2i\pi ax}{q}} \\ &= \frac{1}{q\sqrt{y}} \sum_{x \bmod q} \theta\left(\frac{1}{q^2 y}; q, x\right) \bar{\chi}(x) \sum_{a \bmod q} \chi(ax) e^{\frac{2i\pi ax}{q}} \quad (*) \\ &= \frac{1}{q\sqrt{y}} \sum_{x \bmod q} \theta\left(\frac{1}{q^2 y}; q, x\right) \bar{\chi}(x) \tau(\chi) \\ &= \frac{\tau(\chi)}{q\sqrt{y}} \sum_{x \bmod q} \bar{\chi}(x) \theta\left(\frac{1}{q^2 y}; q, x\right) \\ &= \frac{\tau(\chi)}{q\sqrt{y}} \theta\left(\bar{\chi}, \frac{1}{q^2 y}\right) \end{aligned}$$

(*) : si x est premier avec a l'application $a \mapsto ax$ est bijective et on obtient $\tau(\chi)$ par changement de variable, en revanche si ce n'est pas le cas, on utilise le fait que χ est primitif pour montrer que $\tau(\chi) = 0$, de la même manière qu'on le fera plus loin pour démontrer le lemme **5.2.1**

3.4 Transformée de Mellin

3.4.1 Définition

Définition 3.4.1 *Soit f une fonction de Schwartz. On définit la transformée de Mellin de f :*

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx$$

En l'infini, on a $f(x)x^{s-1} = o\left(\frac{1}{x^{n+1-s}}\right)$ pour tout n donc la fonction est intégrable. f est continue en 0 et x^{s-1} est intégrable en 0 ssi $\sigma > 0$.

\hat{f} est donc définie pour $\sigma > 0$

Soit $a \in]0; 1[$ et $b \in]1; +\infty[$. Si $\text{Ré}(s) \in]a; b[$, $f(x)x^{s-1}$ est holomorphe sur cette bande et on a :

– si $x \in]0; 1]$, $|f(x)x^{s-1}| \leq |f(x)|x^{a-1}$, fonction intégrable sur $]0; 1]$

– si $x \in [1; +\infty[$, $|f(x)x^{s-1}| \leq |f(x)|x^{b-1}$, fonction intégrable sur $[1; +\infty[$

\hat{f} est donc holomorphe sur la bande $a \leq \sigma \leq b$ pour tout $a \in]0; 1[$ et $b \in]1; +\infty[$. Donc \hat{f} est holomorphe sur $\sigma > 0$.

Proposition 3.4.1 *Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de Schwartz et \hat{f} sa transformée de Mellin.*

Dans toute bande verticale $A \leq \sigma \leq B$ avec $0 < A < B$, on a pour tout $k \leq 1$:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |s^k \hat{f}(s)| = 0$$

DÉMONSTRATION

Cette proposition se démontre par intégrations par parties successives. Montrons-la par exemple pour $k = 1$

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx = \left[\frac{f(x)x^s}{s} \right]_0^\infty - \frac{1}{\sigma + it} \int_0^\infty f'(x)x^s dx \\ \hat{f}(s) &= \frac{1}{\sigma + it} \frac{1}{\sigma + 1 + it} \int_0^\infty f''(x)x^s dx \end{aligned}$$

On a donc $\lim_{|t| \rightarrow \infty} |s \hat{f}(s)| = 0$

En faisant $k + 1$ intégration par parties, on montre la proposition pour $k > 1$

3.4.2 Etude de l'exemple de Γ

La fonction Γ est définie par

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

La fonction Γ va jouer un rôle important puisqu'elle intervient avec les fonction L dans une équation fonctionnelle (voir partie 5). C'est en fait la transformée de Mellin de la fonction $f(x) = e^{-x}$ (qui est bien une fonction de Schwartz). Elle est donc holomorphe sur $\sigma > 0$.

On montre grâce à une intégration par parties que pour tout s tel que $\sigma > 0$,

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \Gamma(s+1) = g(s)$$

La fonction g est méromorphe sur $\sigma > -1$ avec un pôle simple en 0 (de résidu 1). Or g coïncide avec Γ sur $\sigma > 0$. On peut donc prolonger la fonction Γ de manière méromorphe sur $\sigma > -1$. En

itérant ce processus, on prolonge Γ en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} admettant des pôles simples en les $-k$, $k \in \mathbb{N}$.

On peut montrer la formule suivante où Γ intervient, appelée formule des compléments :

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

Supposons qu'il existe s_0 tel que $\Gamma(s_0) = 0$. Comme $\frac{\pi}{\sin(\pi s_0)} \neq 0$, $1 - s_0$ est nécessairement un pôle de Γ . Mais on a vu que les seuls pôles de Γ sont les $-k$, $k \in \mathbb{N}$, donc $s_0 \in \mathbb{N}^*$. Ceci est impossible car $\Gamma(n) = (n-1)!$. Cette formule nous permet donc de voir que Γ ne s'annule pas sur \mathbb{C} .

Les formules suivantes détaillent le comportement asymptotique de Γ .

Formules de Stirling

Proposition 3.4.2 *Soit σ réel, on a alors la formule de Stirling :*

$$\Gamma(\sigma) \underset{\sigma \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi\sigma} \left(\frac{\sigma}{e}\right)^\sigma \quad (3.10)$$

Uniformément dans la région $a \leq \sigma \leq b$, $|t| \geq 1$ on a la formule de Stirling généralisée :

$$|\Gamma(\sigma + it)| = (2\pi)^{\frac{1}{2}} |t|^{\sigma - \frac{1}{2}} e^{-\pi|t|} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad (3.11)$$

(la constante du O dépend de a et b)

On a aussi, uniformément pour $|\arg(s)| \leq \pi - \epsilon$ la formule de Stirling dérivée :

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) = \log|s| + O\left(\frac{1}{s}\right) \quad (3.12)$$

(la constante du O dépend de ϵ)

DÉMONSTRATION

Les formules (3.11) et (3.12) sont des conséquences du développement de Stirling (qui se démontre par exemple à l'aide de la formule d'Euler - MacLaurin) :

$$\log(\Gamma(z)) = z \log(z) - z - \frac{1}{2} \log(z) + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \sum_{h=1}^p \frac{(-1)^{h-1} B_h}{2h(2h-1)} \frac{1}{z^{2h-1}} + 2k_z i\pi + O\left(\frac{1}{z^{2p}}\right)$$

Notons qu'on peut définir le logarithme de Γ car on a vu que Γ ne s'annule pas. Ce développement fait intervenir les nombres de Bernoulli B_h . Pour obtenir (3.11) il faut prendre l'exponentielle des deux membres et pour (3.12), il faut dériver.

On ne démontrera pas ici la formule de Stirling.

3.4.3 Formule d'inversion de Mellin

Posons $s = \sigma + it$ avec $\sigma > 0$ fixé

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \int_0^\infty f(x) e^{s \log(x)} \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^\infty f(x) e^{\sigma \log(x)} e^{it \log(x)} \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable

$$\begin{aligned}u &= \log(x) \\ du &= \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^u) e^{\sigma u} e^{iut} du$$

$$\begin{aligned}u &= -2\pi x \\ du &= -2\pi dx\end{aligned}$$

$$\hat{f}(s) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(e^{-2\pi x}) e^{-2\pi \sigma x} e^{-2i\pi t x} dx$$

$\hat{f}(\sigma + it) = \tilde{f}_\sigma(t)$ se présente comme la transformée de Fourier de la fonction

$$g_\sigma(x) = 2\pi f(e^{-2\pi x}) e^{-2\pi \sigma x}$$

Utilisons la formule d'inversion de Fourier :

$$g_\sigma(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi t x} \hat{f}(\sigma + ix) dx$$

On en déduit donc en remplaçant g_σ par son expression :

$$\begin{aligned}f(e^{-2\pi t}) e^{-2\pi \sigma t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi t x} \hat{f}(\sigma + ix) dx \\ f(u) u^\sigma &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} u^{-ix} \hat{f}(\sigma + ix) dx\end{aligned}$$

avec $u = e^{-2\pi t}$

$$\begin{aligned}f(u) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} u^{-(\sigma+ix)} \hat{f}(\sigma + ix) i dx \\ f(u) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} \hat{f}(s) u^{-s} ds\end{aligned}$$

La notation (σ) indique que l'on intègre dans le plan complexe sur le contour constitué de la droite verticale de partie réelle σ .

On vient de démontrer la formule d'inversion de Mellin :

Proposition 3.4.3 (Formule d'inversion de Mellin) *Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de Schwartz et \hat{f} sa transformée de Mellin. Soit σ quelconque tel que l'intégrale définissant la transformée de Mellin converge pour $\text{Re}(s) = \sigma$. Alors*

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} \hat{f}(s) x^{-s} ds \quad (3.13)$$

3.5 Formule intégrale évaluant une fonction sommatoire lissée

3.5.1 Formule intégrale

Proposition 3.5.1 *Soit ϕ une fonction de Schwartz, f une fonction arithmétique à croissance modérée. Soit $c > 0$ tel que la série de Dirichlet $D_f(s)$ converge absolument sur la droite $\text{Re}(s) = c$, avec $c > 1$. Alors*

$$\mathcal{M}_f(\phi) = \sum_{n \geq 1} f(n) \phi(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(c)} D_f(s) \hat{\phi}(s) ds \quad (3.14)$$

DÉMONSTRATION

D'après la formule (3.13) appliquée à la fonction de Schwartz ϕ au point n , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_f(\phi) &= \sum_{n \geq 1} f(n) \frac{1}{2i\pi} \int_{(c)} \hat{\phi}(s) n^{-s} ds \\ \mathcal{M}_f(\phi) &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{n \geq 1} \int_{(c)} \hat{\phi}(s) f(n) n^{-s} ds \end{aligned}$$

On peut intervertir série et intégrale grâce à la convergence absolue de D_f . En effet :

$$\left| \int_{(c)} \hat{\phi}(s) f(n) n^{-s} ds \right| \leq |f(n)| n^{-c} \int_{(c)} |\hat{\phi}(s)| ds \leq K |f(n)| n^{-c}$$

D'après la convergence absolue de la série de Dirichlet de f , $|f(n)| n^{-c}$ est le terme général d'une série convergente. Ainsi :

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} \int_{(c)} \hat{\phi}(s) f(n) n^{-s} ds \right| \leq K \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)| n^{-c} \longrightarrow 0$$

lorsque $N \rightarrow \infty$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f(\phi) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(c)} \hat{\phi}(s) \sum_{n \geq 1} f(n) n^{-s} ds \\ \mathcal{M}_f(\phi) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(c)} \hat{\phi}(s) D_f(s) ds\end{aligned}$$

□

Dans la suite, on utilisera des sommes du type $\sum_{n \geq 1} f(n) \phi\left(\frac{n}{x}\right)$ avec ϕ une fonction de Schwartz (par exemple une majorant lisse). L'application $g : u \mapsto \phi\left(\frac{u}{x}\right)$ est une fonction de Schwartz et on a d'après la formule précédente :

$$\mathcal{M}_g(\phi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(c)} \hat{g}(s) D_f(s) ds$$

avec

$$\hat{g}(s) = \int_0^\infty \phi\left(\frac{u}{x}\right) u^{s-1} du = \int_0^\infty \phi(v) (vx)^{s-1} x dv = x^s \hat{\phi}(s)$$

Finalement on a la formule :

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} f(n) \phi\left(\frac{n}{x}\right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(c)} D_f(s) \hat{\phi}(s) x^s ds} \quad (3.15)$$

Si on prend pour fonction ϕ un majorant lisse de $[0; 1]$, la somme ci-dessus devient une somme finie, proche de la fonction sommatoire $M_f(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$.

3.5.2 Application à des fonctions connues

Cas des fonctions L

D'après la proposition **3.2.2**, pour démontrer le théorème des nombres premiers en progression arithmétique il faut étudier le comportement asymptotique de la fonction $\psi(x; q, a)$. D'après la formule (3.2), celle-ci est liée à la fonction sommatoire

$$M_{\Lambda_\chi}(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi(n)$$

On peut grâce à la formule (3.15) évaluer une fonction sommatoire lissée approchant cette dernière fonction sommatoire :

$$\sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \chi(n) \phi\left(\frac{n}{x}\right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(c)} D_{\Lambda_\chi}(s) \hat{\phi}(s) x^s ds$$

pour $c > 1$. Or d'après la formule (2.4), la série de Dirichlet de la fonction Λ_χ est l'opposé de la dérivée logarithmique de la fonction L associée à χ . Ainsi :

$$\sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \chi(n) \phi\left(\frac{n}{x}\right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(c)} -\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)}(s) \hat{\phi}(s) x^s ds \quad (3.16)$$

Cas de ζ

Pour le théorème des nombres premiers « simple », il suffit de s'intéresser à la fonctions sommatoire $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$. Soit η_δ un majorant lisse de $[0; 1]$, d'amplitude $1 + \delta$. On a d'après la formule (3.14) :

$$\sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \eta_\delta \left(\frac{n}{x} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(c)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \hat{\eta}_\delta(s) x^s ds \quad (3.17)$$

Pour démontrer le théorème des nombres premiers en progression arithmétique on montrera d'abord un résultat sur les sommes lisses. En revanche, on montrera le théorème des nombres premiers en estimant une intégrale ne faisant plus intervenir de fonction ϕ de lissage.

Soit x fixé.

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_\delta(s) &= \int_0^\infty \eta_\delta(u) u^{s-1} du = \int_0^1 u^{s-1} du + \int_1^{1+\delta} \eta_\delta(u) u^{s-1} du \\ &= \frac{1}{s} + \int_1^{1+\delta} \eta_\delta(u) u^{s-1} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \hat{\eta}_\delta(s) - \frac{1}{s} \right| &\leq \int_1^{1+\delta} |\eta_\delta(u)| u^{c-1} du \\ &\leq \int_1^{1+\delta} u^{c-1} du \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\hat{\eta}_\delta(s)$ converge vers $\frac{1}{s}$ uniformément pour s tel que $\sigma = c$. D'où

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{(c)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \hat{\eta}_\delta(s) x^s ds = \int_{(c)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \eta_\delta \left(\frac{n}{x} \right) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) + \sum_{x < n \leq (1+\delta)x} \Lambda(n) \eta_\delta \left(\frac{n}{x} \right) \\ &= \psi(x) + \sum_{x < n \leq (1+\delta)x} \Lambda(n) \eta_\delta \left(\frac{n}{x} \right) \end{aligned}$$

Et lorsque δ est suffisamment petit, il n'y a aucun entier entre x et $(1 + \delta)x$ donc

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \eta_\delta \left(\frac{n}{x} \right) = \psi(x)$$

Finalement, en faisant tendre δ vers 0 dans la formule (3.17), on obtient la formule suivante, ne faisant plus intervenir de fonction ϕ de lissage :

$$\psi(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(a)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \quad (3.18)$$

3.6 Technique de déplacement du contour d'intégration

Les formules précédentes permettent d'évaluer des fonctions sommatoires lissées dépendant de x (ou même directement des fonctions sommatoires comme c'est le cas dans (3.18)) à l'aide d'une intégrale sur la droite verticale $\operatorname{Re}(s) = \sigma$. En pratique, le x que l'on choisira sera souvent très grand (on veut étudier le comportement asymptotique de telles sommes).

Comme $|x^s| = x^\sigma$ et $x > 1$ on est tenté de prendre σ aussi petit que possible afin de minimiser $|x^s|$: on voudrait même pouvoir prendre σ inférieur à 1 ($\sigma > 1$ était une des hypothèses de validité de la formule (3.14)) : c'est ce qu'on appelle « déplacer le contour d'intégration vers la gauche ». Ceci exige de pouvoir prolonger D_f au-delà du domaine de convergence absolue.

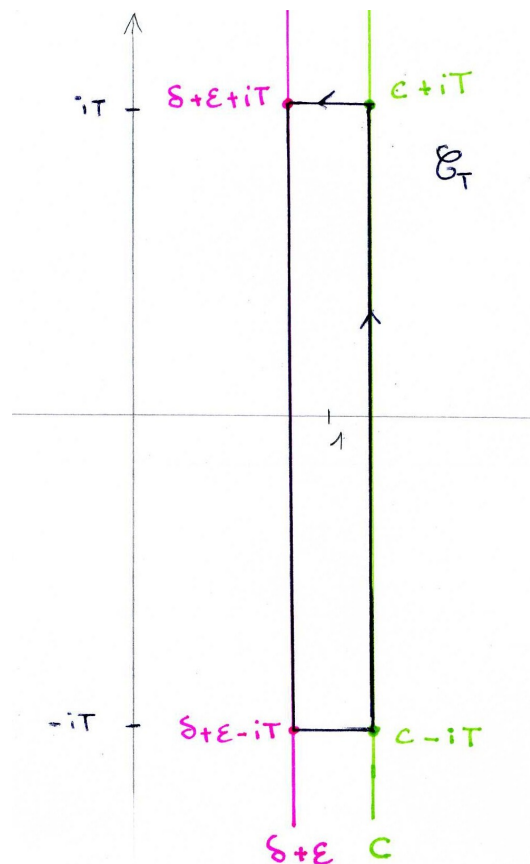
Exemple de déplacement du contour d'intégration

On se place sous les hypothèses suivantes :

- f une fonction arithmétique telle que $\forall \epsilon > 0, f(n) = O(n^\epsilon)$
- D_f se prolonge à gauche de la zone $\sigma > 1$ en une fonction méromorphe
- il existe $\delta < 1$ tel que D_f soit méromorphe sur $\sigma > \delta$ et possède un nombre fini de pôles simples s_1, s_2, \dots, s_k de résidus respectifs r_1, r_2, \dots, r_k dans $\delta < \sigma < c$ (avec $c > 1$)
- $\forall \epsilon$, il existe C (dépendant de ϵ) telle que

$$|D_f(s)| = O((|s| + 1)^c)$$

Soit $\epsilon > 0$ tel que $\delta + \epsilon < 1$ et D_f n'ait pas de pôle dans la zone $\delta < \sigma < \delta + \epsilon$. Soit T tel que tous les pôles de D_f aient une partie imaginaire inférieure en valeur absolue à T . On considère le contour \mathcal{C}_T suivant :



D'après le théorème des résidus, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_T} D_f(s) \hat{\phi}(s) y^s ds = \sum_{i=1}^k r_i y^{s_i} \hat{\phi}(s_i) \quad (3.19)$$

Et le calcul de l'intégrale en décomposant sur les 4 côtés donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_T} D_f(s) \hat{\phi}(s) y^s ds &= \frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [-T, T]}^{\sigma=c} D_f(s) \hat{\phi}(s) y^s ds + \frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [-T, T]}^{\sigma=\delta+\epsilon} D_f(s) \hat{\phi}(s) y^s ds \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta+\epsilon}^c D_f(t-iT) \hat{\phi}(t-iT) y^{t-iT} dt - \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta+\epsilon}^c D_f(t+iT) \hat{\phi}(t+iT) y^{t+iT} dt \end{aligned}$$

Evaluons maintenant les intégrales sur les bords verticaux :

$$\left| \int_{\delta+\epsilon}^c D_f(t \pm iT) \hat{\phi}(t \pm iT) y^{t \pm iT} dt \right| \leq \int_{\delta+\epsilon}^c |D_f(t \pm iT) \hat{\phi}(t \pm iT)| y^t dt$$

Or on a les majorations :

$$\begin{aligned} |D_f(t \pm iT)| &= O((1 + |t \pm iT|)^c) \\ |\hat{\phi}(t \pm iT)| &= O\left(\frac{1}{(1 + |t \pm iT|)^k}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left| \int_{\delta+\epsilon}^c D_f(t \pm iT) \hat{\phi}(t \pm iT) y^{t \pm iT} dt \right| = O\left(\int_{\delta+\epsilon}^c \frac{y^t dt}{(1 + |t \pm |)^2}\right) \longrightarrow 0$$

lorsque $T \rightarrow \infty$. En faisant tendre T vers l'infini dans (3.19), on obtient :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(c)} D_f(s) \hat{\phi}(s) y^s ds = \sum_{i=1}^k r_i y^{s_i} \hat{\phi}(s_i) + \frac{1}{2i\pi} \int_{(\delta+\epsilon)} D_f(s) \hat{\phi}(s) y^s ds$$

Sous les hypothèses précédentes, on a donc

$$\sum_{n \geq 1} f(n) \phi\left(\frac{n}{y}\right) = \sum_{i=1}^k r_i y^{s_i} \hat{\phi}(s_i) + \frac{1}{2i\pi} \int_{(\delta+\epsilon)} D_f(s) \hat{\phi}(s) y^s ds$$

Ce qui nous donne l'estimation suivante pour la fonctions sommatoire lissée dépendant de y :

$$\sum_{n \geq 1} f(n) \phi\left(\frac{n}{y}\right) = \sum_{i=1}^k r_i y^{s_i} \hat{\phi}(s_i) + O\left(y^{\delta+\epsilon}\right)$$

Comme on l'a vu dans les exemples du 3.5.2, on voudra par la suite évaluer les deux intégrales données dans les formules (3.16) et (3.18), c'est-à-dire :

$$\int_{(c)} -\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)}(s)\hat{\phi}(s)x^s ds \quad \text{et} \quad \int_{(a)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}ds$$

On aimerait, comme on vient de le faire dans l'exemple, pouvoir utiliser le théorème des résidus pour pouvoir exprimer ces intégrales en fonctions d'intégrales sur des droites du type $Re(s) = \sigma < 1$ (terme plus petit que l'intégrale sur $\sigma = c$).

Mais ce déplacement du contour d'intégration n'est possible que si l'on peut prolonger $-\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)}$ (resp. $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$) à gauche de $\sigma > 1$ (nous verrons en pratique que même une fois ce prolongement effectué, on ne pourra pas faire un déplacement exactement similaire à celui de l'exemple)

Nous allons donc d'abord prolonger les fonctions L sur \mathbb{C} en des fonctions méromorphes, et nous nous intéresserons également aux zéros de telles fonctions : en effet $\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)}$ n'est holomorphe que si L n'a pas de pôle (et donc L' non plus) et L n'a pas de zéro dans une certaine région...

Quatrième partie

Prolongement analytique des fonctions L sur $Re(s) > 0$ et théorème de la progression arithmétique

Le théorème de la progression arithmétique est un premier résultat sur les nombres premiers en progression arithmétique. Il a été démontré en 1838 par Dirichlet et son énoncé est le suivant :

Théorème 4.0.1 *Soient a et q deux entiers non nuls premiers entre eux.*

Il existe une infinité de nombres premiers congrus à a modulo q

Ce résultat est un corollaire du théorème des nombres premiers en progression arithmétique mais il est intéressant de le démontrer séparément. En effet, sa démonstration nous donne une première approche de la manipulation des fonctions L . En particulier, elle nécessite un prolongement de ces fonctions sur $\operatorname{Re}(s) > 0$, que nous pouvons faire directement, sans utiliser (comme on le fera plus loin) une équation fonctionnelle.

4.1 Prolongement sur $\operatorname{Re}(s) > 0$

Cas où $\chi = \epsilon_q = 1$

Comme on l'a déjà vu, $L(1, s)$ ne diffère de la fonction ζ que par une constante multiplicative : il suffit donc de prolonger ζ sur $\operatorname{Re}(s) > 0$ pour obtenir un prolongement de $L(1, s)$.

Posons $g(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$

Si $\operatorname{Re}(s) > 1$, $\frac{1}{s-1} = \int_1^\infty \frac{1}{t^s} dt = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{1}{t^s} dt$

$$\begin{aligned} g(s) &= \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^s} dt \right) = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^\infty a_n(s) \quad \text{avec } a_n(s) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt \end{aligned}$$

On a a priori convergence de la série sur $\operatorname{Re}(s) > 1$. Montrons qu'il y a aussi convergence uniforme sur tout compact lorsque $\operatorname{Re}(s) \geq \epsilon > 0$.

$$|a_n(s)| \leq \int_n^{n+1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right| dt$$

D'après la formule des accroissements finis appliquée à la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^s}$ et dont la dérivée est $f'(t) = -\frac{s}{t^{s+1}}$, il existe $r \in]n; n+1[$ tel que

$$\left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right| = \left| \frac{s(t-n)}{r^{s+1}} \right| \leq \frac{|s|}{|r|^{\sigma+1}} \leq \frac{|s|}{n^{\sigma+1}} \leq \frac{|s|}{n^{\epsilon+1}}$$

D'où :

$$|a_n(s)| \leq \frac{|s|}{n^{\epsilon+1}} \leq \frac{K}{n^{\epsilon+1}}$$

sur un compact : la série converge donc uniformément sur tout compact de $\sigma \geq \epsilon$. $g(s)$ est donc holomorphe sur tout domaine de la forme $\sigma \geq \epsilon$ donc sur le demi-plan $\sigma > 0$.

On en déduit que ζ est méromorphe sur $\sigma > 0$ avec un pôle simple en 1 de résidu 1. $L(1, s)$ est donc méromorphe avec un pôle simple en 1 de résidu $\prod_{p|m} (1 - p^{-1})$.

Cas d'un caractère non trivial

$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s}$. Posons

$$S_{n,n'}(s) = \sum_{k=n}^{n'} \chi(k)k^{-s} \quad \text{et} \quad A_k = \sum_{r=1}^k \chi(r)$$

On a alors $\chi(k) = A_k - A_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$ avec $A_0 = 0$ par convention. Effectuons une transformation d'Abel :

$$\begin{aligned} S_{n,n'}(s) &= \sum_{k=n}^{n'} (A_k - A_{k-1}) k^{-s} = \sum_{k=n}^{n'} A_k k^{-s} - \sum_{k=n}^{n'} A_{k-1} k^{-s} \\ &= \sum_{k=n}^{n'} A_k k^{-s} - \sum_{k=n-1}^{n'-1} A_k (k+1)^{-s} = \sum_{k=n}^{n'} A_k \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right) + \frac{A_{n'}}{n'^s} - \frac{A_{n-1}}{n^s} \end{aligned}$$

Montrons que (A_k) est une suite bornée. D'après la relation d'orthogonalité pour les caractères :

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \chi(r) = 0$$

car $\chi \neq 1$. Vu la façon dont χ est prolongé à un « caractère sur \mathbb{Z} », on a :

$$\sum_{r=1}^q \chi(r) = 0 \quad \text{ainsi que} \quad \sum_{r=kq}^{(k+1)q} \chi(r) = 0$$

Donc $\sum_{r=1}^k \chi(r) = \sum_{r=\left[\frac{k}{q}\right]}^k \chi(r)$ d'où

$$|A_k| \leq \sum_{r=\left[\frac{k}{q}\right]}^k |\chi(r)| \leq (k - \left[\frac{k}{q}\right]) \leq q$$

On a donc

$$|S_{n,n'}(s)| \leq q \left(\sum_{k=n}^{n'-1} \left| \frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right| + \frac{1}{|n'^s|} + \frac{1}{|n^s|} \right)$$

Supposons s réel avec $s > 0$. Alors

$$|S_{n,n'}(s)| \leq q \left(\sum_{k=n}^{n'-1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right) + \frac{1}{n'^s} + \frac{1}{n^s} \right)$$

La série de gauche est clairement télescopique et on a :

$$|S_{n,n'}(s)| \leq q \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{n'^s} + \frac{1}{n'^s} + \frac{1}{n^s} \right) \leq \frac{2q}{n^s}$$

Si $s \geq \epsilon > 0$ on a

$$|S_{n,n'}(s)| \leq \frac{2m}{n^\epsilon} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

La suite des sommes partielles associée à la série de Dirichlet de χ vérifie le critère de Cauchy donc la série de Dirichlet converge (\mathbb{R} est complet) pour tout réel $s > 0$.

Soit $\epsilon > 0$. La série de Dirichlet converge pour $s = \epsilon$. D'après le corollaire **1.1.1** du théorème **1.1.1**, cette série de Dirichlet converge uniformément sur tout compact du demi-plan $\sigma > \epsilon$.

$L(\chi, s)$ est donc holomorphe sur le demi-plan $\sigma > \epsilon$ pour tout ϵ donc sur le demi-plan $\sigma > 0$.

Bilan

- $L(1, s)$ est méromorphe sur $Re(s) > 0$, avec un pôle simple en 1
- Si $\chi \neq 1$, $L(\chi, s)$ est holomorphe sur $Re(s) > 0$

4.2 Non annulation des fonctions L en 1

Pour démontrer le théorème de la progression arithmétique, on utilisera le logarithme de $L(\chi, 1)$: il faut donc montrer que pour χ non trivial, $L(\chi, 1) \neq 0$.

On définit la fonction ζ_q de la manière suivante :

$$\zeta_q(s) = \prod_{\chi \bmod q} L(\chi, s)$$

Cette fonction est holomorphe sur $\sigma > 0$ sauf peut-être en 1. La fonction $L(1, s)$ possède en effet un pôle simple en 1, mais s'il existe un caractère non trivial tel que $L(\chi, s)$ s'annule en 1, ζ_q est holomorphe en 1.

Etablissons d'abord une formule sous forme de produit pour $\zeta_q(s)$.

Pour $\sigma > 1$, d'après la formule du produit Eulérien,

$$L(\chi, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}$$

Si $p|q$, $\chi(p) = 0$ donc

$$\begin{aligned} \zeta_q(s) &= \prod_{\chi \bmod q} \prod_{p \nmid q} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}} \\ \zeta_q(s) &= \prod_{p \nmid q} \frac{1}{\prod_{\chi \bmod q} (1 - \chi(p)p^{-s})} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Transformons maintenant $\prod_{\chi \bmod q} (1 - \chi(p)p^{-s})$.

Soit $p \nmid q$. $\bar{p} \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. On note $f(p)$ l'ordre de $\langle \bar{p} \rangle$ dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Déterminons tous les caractères vérifiant $\chi(\bar{p}) = \omega$, où ω est une racine $f(p)$ -ième de l'unité donnée.

$\forall x \in \langle \bar{p} \rangle$, il existe k tel que $\chi(x) = \chi(\bar{p}^k) = \omega^k$ donc χ est uniquement déterminé sur $\langle \bar{p} \rangle$.

Soit x quelconque dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = m\bar{p}^k$ avec m le représentant de x dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times / \langle \bar{p} \rangle$

$$\chi(x) = \chi(m)(\chi(\bar{p}))^k = \chi(m)\omega^k$$

χ est déterminé de manière unique par sa restriction à $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times / \langle \bar{p} \rangle$: or il y a $g(p) = \frac{\phi(q)}{f(p)}$ caractères de ce groupe.

Il y a donc $g(p)$ caractères de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ vérifiant $\chi(\bar{p}) = \omega$.

On a en notant W l'ensemble des racines $f(p)$ -ièmes de l'unité

$$\prod_{\omega \in W} (T - \omega) = T^{f(p)} - 1$$

On a donc :

$$\begin{aligned} T^{f(p)} - 1 &= \prod_{\omega \in W} \omega \prod_{\omega \in W} (\omega^{-1}T - 1) = \prod_{k=1}^{f(p)} e^{\frac{2ik\pi}{f(p)}} \prod_{\omega \in W} (\omega T - 1) \\ &= \exp\left(\frac{2i\pi}{f(p)} \sum_{k=1}^{f(p)} k\right) \prod_{\omega \in W} (\omega T - 1) = e^{i\pi(f(p)+1)} \prod_{\omega \in W} (\omega T - 1) \end{aligned}$$

– Si $f(p)$ est pair, $e^{i\pi(f(p)+1)} = -1$ et $\prod_{\omega \in W} (\omega T - 1) = \prod_{\omega \in W} (1 - \omega T)$ donc on a

$$1 - T^{f(p)} = \prod_{\omega \in W} (\omega T - 1) = \prod_{\omega \in W} (1 - \omega T)$$

– Si $f(p)$ est impair, $e^{i\pi(f(p)+1)} = 1$ et $\prod_{\omega \in W} (\omega T - 1) = -\prod_{\omega \in W} (1 - \omega T)$ donc on a

$$1 - T^{f(p)} = -\prod_{\omega \in W} (\omega T - 1) = \prod_{\omega \in W} (1 - \omega T)$$

Ainsi, pour tout T et quel que soit la parité de $f(p)$ on a :

$$1 - T^{f(p)} = \prod_{\omega \in W} (1 - \omega T)$$

Par ailleurs,

$$\prod_{\chi \bmod q} (1 - T\chi(p)) = \prod_{\omega \in W} \prod_{\chi | \chi(\bar{p}) = \omega} (1 - T\chi(p)) = (1 - T^{f(p)})^{g(p)}$$

En prenant $T = p^{-s}$ et en remplaçant dans (4.1) on obtient :

$$\boxed{\zeta_q(s) = \prod_{p \nmid m} \frac{1}{(1 - p^{-sf(p)})^{g(p)}}} \quad (4.2)$$

De par sa définition, $\zeta_q(s)$ peut se voir comme le produit de convolution de $\phi(q)$ séries de Dirichlet, donc comme une série de Dirichlet, qui a priori converge pour $\sigma > 1$. Cette dernière formule permet de voir que c'est même une série de Dirichlet à coefficients réels positifs. En effet, si p est fixé, $\frac{1}{(1-x)^{g(p)}}$ est la dérivée $(g(p) - 1)$ -ième de la fonction $\frac{1}{(g(p)-1)!} \frac{1}{1-x}$ et pour $|x| < 1$, on a alors

$$\frac{1}{(1-x)^{g(p)}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(g(p)-1)!} n(n-1)(n-g(q)+1)x^{n-g(q)+1}$$

En remplaçant x par $p^{-sf(p)}$ on obtient alors :

$$\zeta_q(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(g(p)-1)!} n(n-1)(n-g(q)+1) p^{-sf(p)(n-g(q)+1)}$$

On reconstitue donc bien une série de Dirichlet à coefficients réels positifs.

Supposons maintenant qu'il existe un caractère χ tel que $L(\chi, 1) = 0$. ζ_q est alors holomorphe sur $\sigma > 0$ car holomorphe en 1 et sur le demi-plan $\sigma > 0$ privé de 1.

La série de Dirichlet à coefficients positifs $\zeta_q(s)$ converge pour $\sigma > 1$ et est prolongeable en une fonction holomorphe sur $\sigma > 0$. D'après le théorème **1.1.2**, la série converge pour $\sigma > 0$. En particulier, la formule du produit Eulérien est valable pour $\sigma > 0$.

Prenons $s > 0$ réel. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-p^{-sf(p)})^{g(p)}} &= (1 + p^{-f(p)s} + \dots + p^{-kf(p)s} + \dots)^{g(p)} > (1 + p^{-f(p)s} + \dots + p^{-kf(p)s} + \dots) \\ &\geq (1 + p^{-\phi(q)s} + p^{-2\phi(q)s} + \dots) \end{aligned}$$

Donc

$$\zeta_q(s) \geq \prod_{p \nmid q} \left(\frac{1}{1 - p^{-\phi(q)s}} \right) = \sum_{(n,q)=1} n^{-\phi(q)s}$$

Il y a divergence pour $s = \frac{1}{\phi(q)} \in]0; 1[$, en contradiction avec ce qui précède.

On a montré par l'absurde que pour tout caractère non trivial, la fonction L associée ne s'annule pas en 1.

4.3 Théorème de la progression arithmétique

Nous allons montrer un résultat un peu plus fort que le théorème de la progression arithmétique, en introduisant la notion de densité.

Définition 4.3.1 (Densité d'une partie A de \mathcal{P}) Soit A une partie de \mathcal{P} . Si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ s > 1}} \frac{\left(\sum_{p \in A} \frac{1}{p^s} \right)}{\log \left(\frac{1}{s-1} \right)}$$

k est appelée densité de la partie A

Montrons que la densité de \mathcal{P} est 1 :

Proposition 4.3.1 *Soit s un réel > 1*

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \log \left(\frac{1}{s-1} \right)$$

DÉMONSTRATION

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} > 0$$

$$\begin{aligned} \log(\zeta(s)) &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \log \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right) = - \sum_{p \in \mathcal{P}} \log(1 - p^{-s}) \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(p^{-s})^k}{k} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} + \sum_{k \geq 2} \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{(p^{-s})^k}{k} \end{aligned}$$

Notons $h(s) = \sum_{k \geq 2} \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{(p^{-s})^k}{k}$: cette fonction est bornée lorsque s tend vers 1 car si $s > 1$:

$$h(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^{2s}(1 - p^{-s})} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s(p^s - 1)} \leq \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} < \infty$$

Ainsi $\log(\zeta(s)) \sim \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s}$ lorsque s tend vers 1

$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + g(s)$ avec $g(1) \neq 0$ donc $\log(\zeta(s)) = \log \left(\frac{1}{s-1} \right) + \log(g(s))$, avec $\log(g(s))$ borné au voisinage de 1.

Ainsi, $\log(\zeta(s)) \sim \log \left(\frac{1}{s-1} \right)$ lorsque s tend vers 1

Par transitivité de l'équivalence, on a alors :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \sim \log \left(\frac{1}{s-1} \right)$$

□

On peut ainsi noter que quelle que soit la partie A de \mathcal{P} la densité k est comprise entre 0 et 1.

En effet, pour tout s réel plus grand que 1,

$$\frac{\left(\sum_{p \in A} \frac{1}{p^s} \right)}{\log \left(\frac{1}{s-1} \right)} \geq 0$$

donc la limite aussi si elle existe.

$$\frac{\left(\sum_{p \in A} \frac{1}{p^s}\right)}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)} \leq \frac{\left(\sum_{p \in P} \frac{1}{p^s}\right)}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)} = 1$$

il en est de même pour la limite éventuelle k .

On remarque également que la densité d'un ensemble fini est nulle.

Théorème 4.3.1 *Soit q quelconque et a tel que $(a, q) = 1$*

Notons $A_a = \{p \in \mathcal{P} | p \equiv a[q]\}$

La densité de A_a est $\frac{1}{\phi(q)}$

Ce théorème nous montre que A_a est infini, car il est de densité non nulle, ce qui démontre le théorème de la progression arithmétique.

DÉMONSTRATION

Etudions d'abord $f_\chi(s) = \sum_{p \nmid q} \frac{\chi(p)}{p^s}$

- Si χ est trivial, $f_1(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} - \sum_{p|q} \frac{1}{p^s}$ donc

$$f_1(s) \sim \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \sim \log\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

lorsque s est réel et tend vers 1 par valeur supérieure.

- Si χ est non trivial, montrons que f_χ reste bornée.

$$L(\chi, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}$$

Soit s réel > 1 . Alors $L(\chi, s) \neq 0$ car aucun terme du produit infini n'est nul.

$$\log(L(\chi, s)) = - \sum_{p \in \mathcal{P}} \log(1 - \chi(p)p^{-s})$$

Et comme $|\chi(p)p^{-s}| < 1$ on a

$$\begin{aligned} \log(L(\chi, s)) &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\chi(p)^n}{np^{sn}} \\ \log(L(\chi, s)) &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\chi(p)}{p^s} + \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{n \geq 2} \frac{\chi(p)^n}{np^{sn}} \\ \log(L(\chi, s)) &= f_\chi(s) + \underbrace{\sum_{p|q} \frac{\chi(p)}{p^s} + \sum_{p, n \geq 2} \frac{\chi(p)^n}{np^{sn}}}_{g(s)} \end{aligned}$$

$$\sum_{p, n \geq 2} \left| \frac{\chi(p)^n}{np^{sn}} \right| \leq \sum_{p, n} \frac{1}{np^{sn}} \leq \frac{1}{2} \sum_p \sum_{n \geq 2} p^{-sn} \geq \sum_p \frac{1}{p(p-1)} < +\infty$$

donc $g(s)$ est bornée au voisinage de 1. Comme $L(\chi, 1) \neq 0$, $\log(L(\chi, s))$ reste borné lorsque s tend vers 1. Ainsi, f_χ est bornée au voisinage de 1.

Montrons maintenant le théorème.

$$\begin{aligned} g_a(s) = \sum_{p \in A_a} \frac{1}{p^s} &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(a) \chi(p) \frac{1}{p^s} \\ &= \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(a) f_{\chi(s)} \end{aligned}$$

Dans cette somme, tous les termes restent bornés d'après l'étude précédente des fonctions f_χ , sauf le terme correspondant au caractère trivial. On a donc

$$g_a(s) \sim \frac{1}{\phi(q)} f_1(s) \sim \frac{1}{\phi(q)} \log \left(\frac{1}{s-1} \right)$$

Ceci montre que A_a a pour densité $\frac{1}{\phi(q)}$ et démontre le théorème

□

Cinquième partie

Prolongement des fonctions L sur \mathbb{C}

5.1 Le cas de la fonction ζ

Pour $\sigma > 1$ on a déjà vu que

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

On a vu dans la partie précédente qu'on peut prolonger analytiquement la fonctions ζ sur $\sigma > 0$ en une fonction méromorphe ayant un unique pôle simple en 1 de résidu 1. Nous allons maintenant prolonger ζ sur \mathbb{C} .

5.1.1 Equation fonctionnelle

Proposition 5.1.1 *Soit ξ la fonction définie par*

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \quad (5.1)$$

ξ est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} possédant deux pôles simples en 0 et en 1 et vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

DÉMONSTRATION

$$\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2 \pi x} dx = \int_0^\infty \left(\frac{u}{n^2 \pi}\right)^{\frac{s}{2}-1} e^{-u} \frac{du}{n^2 \pi} = (n^2 \pi)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \pi^{-\frac{s}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{n^s}$$

Pour $\sigma > 1$ on a :

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{n^s} = \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2 \pi x} dx$$

Et $\sum_{n \geq 1} \int_0^\infty \left| x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2 \pi x} \right| dx$ converge vers $\pi^{-\frac{\sigma}{2}} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) \zeta(\sigma)$ donc on peut intervertir série et intégrale :

$$\xi(s) = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 \pi x} dx$$

D'après la proposition **3.3.1**, la fonction $y \mapsto e^{-\pi x y^2}$ admet pour transformée de Fourier la fonction $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\pi y^2}{x}}$.

D'après la formule de sommation de Poisson,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 \pi x} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \\ 1 + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-n^2 \pi x} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \right) \end{aligned}$$

Avec la notation $\psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-n^2 \pi x}$, la relation ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} 1 + 2\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 + 2\psi\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx \\ &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \right] dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1-\frac{1}{2}} dx - \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} dx \right) + \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}}{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \right]_0^1 - \left[\frac{x^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} \right]_0^1 \right) + \int_1^\infty \left(\frac{1}{u} \right)^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}} \psi(u) du + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{s-1}{2}} - \frac{1}{\frac{s}{2}} \right) + \int_1^\infty \left(u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1} \right) \psi(u) du \end{aligned}$$

Finalement, pour $\sigma > 1$

$$\xi(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) \psi(x) dx \quad (5.2)$$

L'intégrale converge pour toute valeur de s car $\psi(x) = o(e^{-\pi^2 x})$. En effet, $e^{\pi^2 x} \psi(x) = \sum_{n=0}^\infty e^{-n^2 \pi x}$ et $|e^{-n^2 \pi x}| \leq e^{-n^2 \pi^2}$ si $x \geq 1$. La série converge donc uniformément pour $x \in [1; +\infty[$. On a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\pi^2 x} \psi(x) = 0$$

L'intégrande est holomorphe sur tout compact K de \mathbb{C} et

$$\left| \left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) \psi(x) \right| \leq \left(x^{-\frac{\sigma_{inf}}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{\sigma_{sup}}{2}-1} \right) \psi(x)$$

où σ_{inf} et σ_{sup} correspondent aux valeurs extrêmes de la partie réelle de s dans K . D'après cette majoration uniforme par une fonction intégrable, l'intégrale définit une fonction holomorphe sur tout compact K de \mathbb{C} et donc sur \mathbb{C} .

La fonction $\xi(s) - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}$ holomorphe sur $\sigma > 1$ coïncide sur ce demi-plan avec la fonction $g(s) = \int_1^\infty \left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) \psi(x) dx$, holomorphe sur \mathbb{C} . D'après le principe du prolongement analytique, $\xi(s) - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}$ est alors prolongeable sur \mathbb{C} en la fonction holomorphe $g(s)$.

La formule (5.1) est donc valable pour tout $s \in \mathbb{C}$: ξ est donc méromorphe avec deux pôles simples en 0 et en 1.

Cette formule nous ξ est invariante dans le changement $s \leftrightarrow 1-s$ et donc que l'équation fonctionnelle est vérifiée.

5.1.2 Prolongement de ζ

Comme $\Gamma(s) \neq 0 \forall s \in \mathbb{C}$, on peut écrire (pour par exemple $\sigma > 1$) :

$$\zeta(s) = \frac{\xi(s)}{\pi^{\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})}$$

Comme $\Gamma(\frac{s}{2})$ admet un pôle simple en 0, de même que $\xi(s)$, la fonction $\frac{\xi(s)}{\pi^{\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})}$ est holomorphe en 0. Elle admet un pôle simple en 1, de résidu 1 à cause du pôle de ξ . Elle est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ car ξ y est holomorphe et Γ ne s'annule pas, donc sur $\mathbb{C}_{\neq 1}$.

Ainsi, par prolongement analytique, ζ est méromorphe sur \mathbb{C} avec un pôle simple en 1.

Comme Γ a des pôles simples en les $-k$, $k \in \mathbb{N}$ et ξ holomorphe en les $-2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, on peut également remarquer qu'on a

$$\forall m \geq 1 \quad \zeta(-2m) = 0$$

Vu les propriétés de ζ , ζ' est également méromorphe sur \mathbb{C} avec un unique pôle en 1, d'ordre 2 et de résidu -1. La fonction $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ possède donc un pôle simple en 1 de résidu 1. Elle est holomorphe sur $\sigma > 1$ puisque ζ ne s'annule pas dans cette région, mais on ne peut pas encore dire où elle est holomorphe à gauche de $\sigma = 1$: cela dépend des annulations éventuelles de ζ .

5.2 Equation fonctionnelle plus générale et singularités des fonctions L

Nous allons uniquement étudier ici les fonctions L associées à un caractère primitif. Le but est de prolonger de telles fonctions L , ce qui nous donnera alors un prolongement pour une fonction L quelconque, d'après la formule (2.3)

5.2.1 Equation fonctionnelle

On pose

$$W(\chi) = \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{q}}$$

On rappelle la notation pour une somme de Gauss :

$$\tau(\chi) = \sum_{x \bmod q} \chi(x) e^{\frac{2i\pi x}{q}}$$

Lemme 5.2.1 *Soit χ un caractère primitif modulo q . Alors :*

$$\begin{aligned} \tau(\bar{\chi}) &= \chi(-1) \overline{\tau(\chi)} \\ |\tau(\chi)|^2 &= q \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}
\tau(\bar{\chi}) &= \sum_{x \bmod q} \bar{\chi}(x) e^{\frac{2i\pi x}{q}} = \overline{\sum_{x \bmod q} \chi(x) e^{-\frac{2i\pi x}{q}}} = \overline{\sum_{x \bmod q} \chi(-x) e^{\frac{2i\pi x}{q}}} \\
&= \chi(-1) \overline{\sum_{x \bmod q} \chi(x) e^{\frac{2i\pi x}{q}}} = \chi(-1) \overline{\tau(\chi)}
\end{aligned}$$

Ceci démontre la première formule. Pour la seconde, montrons d'abord que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\chi(n)\tau(\bar{\chi}) = \sum_{x[q]} \bar{\chi}(x) e^{2i\pi \frac{nx}{q}} \quad (5.3)$$

1^{er} cas : $(n, q) = 1$

$$\chi(n)\tau(\bar{\chi}) = \sum_{x[q]} \chi(n)\bar{\chi}(x) e^{2i\pi \frac{x}{q}}$$

Dans ce cas, n est inversible dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ et

$$\chi(n)\tau(\bar{\chi}) = \sum_{x[q]} \bar{\chi}(xn^{-1}) e^{2i\pi \frac{x}{q}}$$

L'application $x \mapsto xn^{-1}$ est bijective donc on a

$$\chi(n)\tau(\bar{\chi}) = \sum_{x[q]} \bar{\chi}(x) e^{2i\pi \frac{nx}{q}}$$

2^{eme} cas : $(n, q) = d > 1$

$n \notin (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ donc $\chi(n) = 0$. Pour montrer que la relation (5.3) est vraie, montrons que

$$\sum_{x[q]} \bar{\chi}(x) e^{2i\pi \frac{nx}{q}} = 0$$

On note $n = dn_1$ et $q = dq_1$ avec $(n_1, q_1) = 1$.

$$\sum_{x[q]} \bar{\chi}(x) e^{2i\pi \frac{nx}{q}} = \sum_{x[q]} \bar{\chi}(x) e^{2i\pi \frac{n_1 x}{q_1}} = \sum_{x_1[q_1]} e^{2i\pi \frac{n_1 x_1}{q_1}} \left(\sum_{\substack{x[q] \\ x \equiv x_1[q_1]}} \bar{\chi}(x) \right)$$

On a regroupé les termes suivant leur classe modulo q_1 . Montrons maintenant que pour tout x_1 , la somme $S_1(x) = \sum_{\substack{x[q] \\ x \equiv x_1[q_1]}} \bar{\chi}(x)$ est nulle.

Soit $y \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ tel que $y \equiv 1[q_1]$.

$$\bar{\chi}(y)S(x_1) = \sum_{\substack{x[q] \\ x \equiv x_1[q_1]}} \bar{\chi}(yx) = S(x_1)$$

Donc $(1 - \bar{\chi}(y))S(x_1) = 0$.

$(\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times / K$ où $K = \{y \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times | y \equiv 1[q_1]\}$. Si $\bar{\chi}(y) = 1$ pour tout $y \in K$, $\bar{\chi}(n) = \bar{\chi}(\bar{n})$ où \bar{n} est la classe de n modulo q_1 , donc $\bar{\chi}$ coïncide avec un caractère modulo q_1 , ce qui est exclu car χ est primitif. Il existe donc $y \equiv 1[q_1]$ tel que $\chi(y) \neq 1$. D'où $S(x_1) = 0$, ce qui démontre que la somme est nulle.

Calculons maintenant $|\tau(\chi)|^2$:

$$\begin{aligned} |\tau(\chi)|^2 &= \tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = \chi(-1)\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) \\ |\tau(\chi)|^2 &= \chi(-1) \sum_{n[q]} e^{2i\pi \frac{n}{q}} \chi(n)\tau(\bar{\chi}) = \chi(-1) \sum_{n[q]} e^{2i\pi \frac{n}{q}} \left(\sum_{x[q]} \bar{\chi}(x) e^{2i\pi \frac{nx}{q}} \right) \\ &= \chi(-1) \sum_{x[q]} \bar{\chi}(x) \sum_{n[q]} e^{2i\pi \frac{n(x+1)}{q}} \end{aligned}$$

La somme des exponentielles est nulle sauf si $x = -1$ et dans ce cas elle vaut q donc :

$$|\tau(\chi)|^2 = \chi(-1) \times \chi(-1)q = q$$

□

Cas d'un caractère primitif et pair

Proposition 5.2.1 *Soit χ un caractère pair non trivial. La fonction ξ définie par*

$$\xi(\chi, s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(\chi, s)$$

est une fonction entière vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\xi(\chi, s) = W(\chi)q^{\frac{1}{2}-s}\xi(\bar{\chi}, 1-s)$$

DÉMONSTRATION

Comme dans ce qu'on a fait pour ζ , la démonstration utilise la formule de sommation de Poisson, par l'intermédiaire des fonction θ , qu'on avait étudié dans la partie 3.3.5.

$$\pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \pi^{-\frac{s}{2}} \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-x} dx n^{-s} = (n^2\pi)^{-\frac{s}{2}} \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-x} dx$$

Après le changement de variable $x = n^2\pi u$ cela donne :

$$\pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(\chi, s) &= \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx \\
&= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-\pi n^2 x} \right) x^{\frac{s}{2}-1} dx
\end{aligned}$$

Justifions l'interversion série intégrale :

$$|\chi(n) e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1}| = e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{\sigma}{2}-1}$$

Et

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{\sigma}{2}-1} dx = (\pi n^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) < +\infty$$

On voit apparaître la fonction $\theta(\chi, x)$. Comme dans la formule (3.8) , $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{2} \theta(\chi, x)$ car le caractère est supposé pair. On a alors :

$$\xi(\chi, s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \theta(\chi, x) x^{\frac{s}{2}-1} dx \quad (5.4)$$

Les fonctions $\theta(\chi, x)$ vérifient lorsque pour $x \geq 1$

$$\theta(\chi, x) = O(e^{-\pi x})$$

En effet, $e^{\pi x} \theta(\chi, x) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{\pi x(1-n^2)}$

Et $|\chi(n) e^{\pi x(1-n^2)}| \geq e^{\pi(1-n^2)}$ pour $x \geq 1$: c'est le terme générale d'une série convergente. Grâce à cette domination, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour montrer que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{\pi x(1-n^2)} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\pi x(1-n^2)} = 0$$

Donc $e^{\pi x} \theta(\chi, x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini, cette grandeur est a fortiori bornée, d'où le résultat.

Pour $x \geq 1$ on peut donc majorer l'intégrande. En revanche, le comportement au voisinage de 0 est moins évident. On va donc séparer l'intégrale en deux et effectuer un changement de variable.

Soit $\alpha > 0$

$$\int_0^{\infty} \theta(\chi, x) x^{\frac{s}{2}-1} dx = \int_0^{\alpha} \theta(\chi, x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_{\alpha}^{\infty} \theta(\chi, x) x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

On utilise la formule (3.9) pour remplacer $\theta(\chi, x)$ dans la première intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha \theta(\chi, x) x^{\frac{s}{2}-1} dx &= \frac{\tau(\chi)}{q} \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{x}} \theta\left(\bar{\chi}, \frac{1}{q^2 x}\right) x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} \\
&= \frac{\tau(\chi)}{q} \int_{\frac{1}{q^2 \alpha}}^{+\infty} q^{1-s} \theta(\bar{\chi}, u) u^{\frac{1-s}{2}} \frac{du}{u} \\
&= W(\chi) q^{\frac{1}{2}-s} \int_{\frac{1}{q^2 \alpha}}^{+\infty} \theta(\bar{\chi}, u) u^{\frac{s}{2}} \frac{du}{u}
\end{aligned}$$

En choisissant $\alpha = \frac{1}{q}$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \theta(\chi, s) x^{\frac{s}{2}-1} dx &= W(\chi) q^{\frac{1}{2}-s} \int_{\frac{1}{q}}^{+\infty} \theta(\bar{\chi}, u) u^{\frac{1-s}{2}} \frac{du}{u} + \int_{\frac{1}{q}}^\infty \theta(\chi, x) x^{\frac{s}{2}-1} dx \\
\xi(\chi, s) &= \frac{1}{2} \left(W(\chi) q^{\frac{1}{2}-s} \int_{\frac{1}{q}}^{+\infty} \theta(\bar{\chi}, u) u^{\frac{1-s}{2}-1} du + \int_{\frac{1}{q}}^\infty \theta(\chi, x) x^{\frac{s}{2}-1} dx \right) \quad (5.5)
\end{aligned}$$

A x fixé, $s \mapsto \theta(\chi, s) x^{\frac{s}{2}-1}$ est holomorphe. De plus sur un compact K , $\left| \theta(\chi, x) x^{\frac{s}{2}-1} \right| \leq C e^{-\pi x} x^{\frac{\sigma_{max}}{2}-1}$ est une majoration uniforme en s (σ_{max} est la partie réelle maximale sur le compact K) par une fonction intégrable.

$g(s) = \int_{\frac{1}{q}}^\infty \theta(\chi, x) x^{\frac{s}{2}-1} dx$ est donc une fonction holomorphe sur tout compact K de \mathbb{C} donc sur \mathbb{C} .

On montre de même que $h(s) = \int_{\frac{1}{q}}^{+\infty} \theta(\bar{\chi}, u) u^{\frac{1-s}{2}-1} du$ est aussi holomorphe sur \mathbb{C} .

Ainsi, $\xi(\chi, s)$ est prolongeable en une fonction entière sur \mathbb{C} . Montrons qu'elle satisfait l'équation fonctionnelle :

$$\begin{aligned}
W(\chi) q^{\frac{1}{2}-s} \xi(\bar{\chi}, 1-s) &= \frac{1}{2} \left(W(\chi) q^{\frac{1}{2}-s} W(\bar{\chi}) q^{\frac{1}{2}-(1-s)} \int_{\frac{1}{q}}^{+\infty} \theta(\chi, u) u^{\frac{s}{2}-1} du + W(\chi) q^{\frac{1}{2}-s} \int_{\frac{1}{q}}^\infty \theta(\bar{\chi}, x) x^{\frac{1-s}{2}-1} dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(W(\chi) W(\bar{\chi}) \int_{\frac{1}{q}}^{+\infty} \theta(\chi, u) u^{\frac{s}{2}-1} du + W(\chi) q^{\frac{1}{2}-s} \int_{\frac{1}{q}}^\infty \theta(\bar{\chi}, x) x^{\frac{1-s}{2}-1} dx \right)
\end{aligned}$$

Or $W(\chi) W(\bar{\chi}) = \frac{\tau(\chi) \tau(\bar{\chi})}{q} = \frac{\chi(-1) |\tau(\chi)|^2}{q} = 1$ d'après le lemme **5.2.1**. Ainsi :

$$W(\chi) q^{\frac{1}{2}-s} \xi(\bar{\chi}, 1-s) = \frac{1}{2} \left(\int_{\frac{1}{q}}^{+\infty} \theta(\chi, u) u^{\frac{s}{2}-1} du + W(\chi) q^{\frac{1}{2}-s} \int_{\frac{1}{q}}^\infty \theta(\bar{\chi}, x) x^{\frac{1-s}{2}-1} dx \right) = \xi(\chi, s)$$

□

Cas d'un caractère primitif impair

Proposition 5.2.2 *Soit χ un caractère impair non trivial. La fonction ξ définie par :*

$$\xi(\chi, s) = \pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(\chi, s)$$

est une fonction entière vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\xi(\chi, s) = i^{-1}W(\chi)q^{\frac{1}{2}-s}\xi(\bar{\chi}, 1-s)$$

DÉMONSTRATION

La démonstration utilise la même technique que dans le cas pair : séparation de l'intégrale et insertion d'une fonction θ : mais on ne peut pas utiliser la même fonction θ que dans le cas pair, qui est nulle ici. On peut par exemple introduire la fonction :

$$\theta_1(\chi, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n\chi(n)e^{-\pi n^2 y}$$

et démontrer une formule analogue à (3.9) qui nous permettra de faire un changement de variable comme dans le cas précédent.

Formule générale

On introduit les notations :

- $t_\chi = 0$ si χ est pair et $t_\chi = 1$ si χ est impair
- $\epsilon(\chi) = i^{-t_\chi}W(\chi)$

On peut dans ce cas avoir une formule générale pour l'équation fonctionnelle :

Proposition 5.2.3 *Soit χ un caractère de Dirichlet non trivial modulo q . La fonction ξ définie par :*

$$\xi(\chi, s) = \pi^{-\frac{s+t_\chi}{2}} \Gamma\left(\frac{s+t_\chi}{2}\right) L(\chi, s) \quad (5.6)$$

est une fonction entière vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\xi(\chi, s) = \epsilon(\chi)q^{\frac{1}{2}-s}\xi(\bar{\chi}, 1-s)$$

5.2.2 Conséquences sur les propriétés des fonctions L

Prolongement des fonctions L

Si χ un caractère non trivial. On a pour $\sigma > 1$ par exemple :

$$L(\chi, s) = \frac{\xi(\chi, s)\pi^{\frac{s+t_\chi}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+t_\chi}{2}\right)}$$

Comme Γ ne s'annule pas sur \mathbb{C} , $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+t_\chi}{2}\right)}$ est entière, de même que $\xi(\chi, s)\pi^{\frac{s+t_\chi}{2}}$.

$L(\chi, s)$ est donc prolongeable en une fonction entière sur \mathbb{C} .

Croissance des fonctions L

Montrons que dans toute bande verticale finie $A \leq \sigma \leq B$ les fonctions L sont à croissance polynômiale : c'est-à-dire qu'il existe une fonction polynômiale $P(s)$ telle que dans cette bande,

$$L(\chi, s) = O(P(|s|))$$

Plus précisément, on peut montrer la proposition suivante :

Proposition 5.2.4 (1) Pour $\sigma > 1$ on a pour tout χ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$|L(\chi, \sigma + it)| \leq \zeta(\sigma) = O\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right) \quad (5.7)$$

(2) Soit $A > 0$. On a uniformément pour $-A \leq \sigma < 0$ pour tout χ

$$|L(\chi, \sigma + it)| = O\left((q(|t| + 2))^{\frac{1}{2} - \sigma}\right) \quad (5.8)$$

(3) On a pour $0 \leq \sigma \leq 1$ et pour tout χ

$$|L(\chi, \sigma + it)| = O\left(\frac{\delta(\chi)}{|s - 1|} + (q(|t| + 2))^{\frac{1 - \sigma}{2} + \epsilon}\right) \quad (5.9)$$

pour tout $\epsilon > 0$ (la constante implicite du O dépendant de ϵ). $\delta(\chi) = 1$ si χ est trivial, 0 sinon.

DÉMONSTRATION

(1) $L(\chi, s)$ est dans ce cas somme d'une série de Dirichlet et

$$|L(\chi, s)| \leq \sum_{n \geq 1} n^{-\sigma} = \zeta(\sigma) = O\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right)$$

lorsque $\sigma > 1$

(2) On utilise l'équation fonctionnelle pour se ramener au cas précédent. En notant $\gamma(s) = \pi^{-\frac{s+t\chi}{2}} \Gamma\left(\frac{s+t\chi}{2}\right)$ on a :

$$L(\chi, s) = \epsilon(\chi) q^{\frac{1}{2} - s} L(\bar{\chi}, 1 - s) \frac{\gamma(1 - s)}{\gamma(s)}$$

Comme $1 < 1 - s < 1 + A$, on a

$$L(\chi, s) = O\left(\zeta(1 - \sigma) q^{\frac{1}{2} - \sigma} \left| \frac{\gamma(1 - s)}{\gamma(s)} \right| \right)$$

Et $\zeta(1 - \sigma) = O\left(\frac{1}{\sigma}\right) = O(1)$ dans la zone considérée. Evaluons maintenant $\left| \frac{\gamma(1 - s)}{\gamma(s)} \right|$ à l'aide de la formule de Stirling généralisée (3.11) :

Pour $|t| \geq 1$:

$$\begin{aligned} \left| \Gamma \left(\frac{s+t_\chi}{2} \right) \right| &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{t}{2} \right|^{\frac{\sigma+t_\chi-1}{2}} e^{-\pi \frac{|t|}{2}} \left(1 + O \left(\frac{1}{t} \right) \right) \\ \left| \Gamma \left(\frac{1-s+t_\chi}{2} \right) \right| &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{t}{2} \right|^{\frac{1-\sigma+t_\chi-1}{2}} e^{-\pi \frac{|t|}{2}} \left(1 + O \left(\frac{1}{t} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\gamma(1-s)}{\gamma(s)} \right| = \pi^{\sigma-\frac{1}{2}} \left| \frac{t}{2} \right|^{\frac{t_\chi-\sigma-(\sigma+t_\chi-1)}{2}} \left(1 + O \left(\frac{1}{t} \right) \right) = O \left(\pi^{\sigma-\frac{1}{2}} (|t|+2)^{\frac{1}{2}-\sigma} \right)$$

Comme $\frac{\gamma(1-s)}{\gamma(s)}$ est bornée pour $t \in [-1; 1]$, σ dans une bande verticale finie, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{\gamma(1-s)}{\gamma(s)} \right| = O \left(\pi^{\sigma-\frac{1}{2}} (|t|+2)^{\frac{1}{2}-\sigma} \right)$$

Et donc

$$L(\chi, s) = O \left((q(|t|+2))^{\frac{1}{2}-\sigma} \right)$$

(3) Pour montrer (3), on utilise le lemme d'analyse complexe suivant, qu'on ne démontrera pas (pour le démontrer, on peut utiliser le principe de Phragmen-Lindelöf) :

Lemme 5.2.2 Soit f une fonction holomorphe sur une bande verticale $A \leq \sigma \leq B$ et a, b tels que $A < a < b < B$

Si on a les hypothèses suivantes :

- $\forall t \in \mathbb{R}, |f(a+it)| \leq C(a)|s|^{D(a)}$ et $|f(b+it)| \leq C(b)|s|^{D(b)}$, où C et D sont des constantes dépendant de a ou b

- $\exists \alpha \geq 0$ tel que $f(s) = O(\exp(|s|^\alpha))$ pour $a \leq \sigma \leq b$

Alors pour tout $a \leq \sigma \leq b$ on a

$$|f(\sigma+it)| \leq C(a)^{l(\sigma)} C(b)^{1-l(\sigma)} |s|^{l(\sigma)D(a)+(1-l(\sigma))D(b)}$$

où $l(\sigma)$ est la fonction affine vérifiant $l(a) = 1$ et $l(b) = 0$

Fixons $\epsilon > 0$. Montrons que L vérifie les hypothèses du lemme pour $a = -\epsilon$, $b = 1 + \epsilon$ et par exemple $A = -2\epsilon$, $B = 1 + 2\epsilon$.

Pour la première hypothèse, on prend d'une part $C(b) = \zeta(1 + \epsilon)$ et $D(b) = 0$ (on se trouve dans la zone du (1)) et pour a on est dans la zone du (2) donc on utilise (5.7) :

$$|L(\chi, -\epsilon + it)| = O \left((q(|t|+2))^{\frac{1}{2}+\epsilon} \right) = O \left(|t|^{\frac{1}{2}+\epsilon} \left(q \left(1 + \frac{2}{|t|} \right) \right)^{\frac{1}{2}+\epsilon} \right) \leq C_1 q^{\frac{1}{2}+\epsilon} |t|^{\frac{1}{2}+\epsilon}$$

on peut donc prendre $C(a) = C_1 q^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ et $D(a) = \frac{1}{2} + \epsilon$.

D'après la formule (5.5) on a $\xi(\chi, s) \leq (1 + q^{\frac{1}{2}-\sigma}) \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \theta(x) (x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{1-\sigma}{2}-1}) dx = O \left(1 + q^{\frac{1}{2}-\sigma} \right)$ si le caractère est pair est non trivial (par exemple)

$$L(\chi, s) = O\left(\frac{\pi^{\frac{s}{2}}(1 + q^{\frac{1}{2}-\sigma})}{|\Gamma(\frac{s}{2})|}\right)$$

D'après la formule de Stirling généralisée, dans une bande verticale allant de $-2A$ à $2B$:

$$L(\chi, s) = O\left(\frac{\pi^{\frac{\sigma}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-\pi\frac{|t|}{2}}(1 + O(\frac{1}{t}))}\right) = O(\exp|\sigma + it|^\alpha)$$

pour tout $\alpha > \frac{\pi}{2}$ donc la deuxième hypothèse du lemme est vérifiée.

D'après le lemme on a alors dans la bande considérée (pour un caractère non trivial) :

$$|L(\sigma + it)| \leq (C_1 q^{\frac{1}{2}+\epsilon})^{l(\sigma)} (\zeta(1+\epsilon))^{1-l(\sigma)} |s|^{l(\sigma)(\frac{1}{2}+\epsilon)} = O\left((q|s|)^{(\frac{1}{2}+\epsilon)l(\sigma)}\right)$$

Or $l(\sigma) = \frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon} - \frac{1}{1+2\epsilon}\sigma = K(1-\sigma)$ dans cette bande :

$$|L(\sigma + it)| = O\left((q|s| + 2)^{(\frac{1}{2}+\epsilon)(1-\sigma)}\right)$$

En tenant compte du fait que χ peut être trivial, on obtient la majoration (5.9).

□

On a défini dans cette partie plusieurs fonctions ξ selon que le caractère χ est trivial ou non et selon sa parité. Dans la suite, la fonction ξ désignera celle définie dans la formule (5.1) lorsque χ est trivial, et celle définie dans la formule (5.6) dans le cas contraire.

Savoir que les fonctions L sont à croissance polynômiale sera utile par la suite, quand on parlera de l'ordre de la fonction ξ (cf. partie 6.1.1)

Sixième partie

Zéros des fonctions L

Les résultats les plus délicats à montrer sont ceux concernant les zéros des fonctions L . A titre d'exemple l'étude des zéros de la fonction ζ pose problème aux mathématiciens depuis plus d'un siècle.

Grâce à la formule du produit Eulérien, qui converge uniformément pour $\sigma > 1$, on sait que les fonctions L ne s'annulent pas sur $Re(s) > 1$, mais ce qui nous intéresse est de trouver une zone à gauche de 1 où elles ne s'annulent pas...

6.1 Zéros de fonctions holomorphes d'ordre 1

Une première propriété, vraie pour toutes les fonctions holomorphes est le fait qu'elles possèdent un nombre dénombrable de zéros. En effet, dans tout compact, une fonction holomorphe a un nombre fini de zéros (d'après le principe des zéros isolés) et l'ensemble des zéros de f peut s'écrire

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq n \text{ et } f(z) = 0\}$$

et est dénombrable car réunion dénombrable d'ensembles finis. On pourra ainsi étudier des suites des zéros de f .

On ne connaît pas d'autres résultats généraux sur les zéros des fonctions holomorphes, mais on verra que pour une certaine catégorie de fonctions, celles d'ordre fini, on peut obtenir des résultats utiles en appliquant la formule de Jensen.

6.1.1 Fonction d'ordre fini

Définition 6.1.1 Une fonction entière f est dite d'ordre fini s'il existe un réel α tel que lorsque $|z| = r \rightarrow \infty$

$$f(z) = O(e^{r^\alpha})$$

f est **d'ordre** ρ si ρ est la borne inférieure des réels α tels que l'assertion ci-dessus soit vraie. Si f est d'ordre ρ on a alors, pour tout $\epsilon > 0$,

$$f(z) = O(e^{r^{\rho+\epsilon}})$$

La constante correspondant au O dépend bien sûr de ϵ .

Certaines fonctions bien connues sont d'ordre fini : les fonctions polynômiales sont d'ordre zéro, la fonction exponentielle est d'ordre 1. Dans la suite, on s'intéressera surtout aux fonctions d'ordre 1.

Proposition 6.1.1 La fonction

$$f(s) = (s(s-1))^{\delta(\chi)} \xi(\chi, s)$$

est une fonction entière d'ordre 1

DÉMONSTRATION

Si χ est non trivial, ξ est entière et si χ est trivial, ξ admet deux pôles simple en 0 et 1 donc f est une fonction entière.

Soit $\epsilon > 0$. f vérifiant une équation fonctionnelle, il suffit de montrer qu'on a $|f(s)| = O\left(e^{|s|^{1+\epsilon}}\right)$ uniformément sur $\sigma > 0$ par exemple.

Si $\sigma > 1$,

$$\begin{aligned} |f(s)| &\leq |s(s-1)|\pi^{-\frac{\sigma+t_\chi}{2}}\Gamma\left(\frac{\sigma+t_\chi}{2}\right)\zeta(\sigma) \\ |f(s)|e^{-|s|^{1+\epsilon}} &= O\left(|s|e^{-|s|^{1+\epsilon}}\pi^{-\frac{\sigma}{2}}\Gamma\left(\frac{\sigma+t_\chi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

D'après la formule de Stirling

$$\Gamma\left(\frac{\sigma+t_\chi}{2}\right) \sim \sqrt{2\pi(\sigma+t_\chi)}\left(\frac{\sigma+t_\chi}{2e}\right)^\sigma$$

On a donc :

$$|f(s)|e^{-|s|^{1+\epsilon}} = O\left(|s|e^{-\frac{1}{2}|s|^{1+\epsilon}}\sqrt{2\pi(\sigma+t_\chi)}\exp\left(\sigma\left(\log(\sigma+t_\chi)-2e-\frac{\log(\pi)}{2}\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^{1+\epsilon}\right)\right) = O(1)$$

Ainsi, sur $\sigma > 1$, $f(s) = O\left(e^{|s|^{1+\epsilon}}\right)$

Si $0 < \sigma \leq 1$, on utilise la formule de Stirling généralisée et le résultat (5.9) obtenu pour les fonctions L :

$$\begin{aligned} \left|\Gamma\left(\frac{\sigma+t_\chi}{2}\right)\right| &= (2\pi)^{\frac{1}{2}}\left|\frac{t}{2}\right|^{\frac{\sigma+t_\chi-1}{2}}e^{-\pi\frac{|t|}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right) \\ |L(\chi, s)| &= O\left(\frac{\delta(\chi)}{|s-1|} + (q(|t|+2))^{\frac{1-\sigma}{2}+\epsilon}\right) \end{aligned}$$

On montre alors que dans $0 \leq \sigma \leq 1$ on a aussi $|f(s)| = O\left(e^{|s|^{1+\epsilon}}\right)$ et on en déduit une majoration de ce type pour $s \in \mathbb{C}$.

f est donc d'ordre au plus 1.

Soit σ réel > 1 . $L(\chi, \sigma) = 1 + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\sigma} \rightarrow 1$ lorsque $\sigma \rightarrow \infty$.

On a donc lorsque σ tend vers l'infini $f(\sigma) \sim \sigma^{2\delta(\chi)}\pi^{-\frac{\sigma}{2}}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)$ et d'après la formule de Stirling :

$$f(\sigma) \sim \sigma^{2\delta(\chi)}\pi^{-\frac{\sigma}{2}}\sqrt{\pi\sigma}\left(\frac{\sigma}{2e}\right)^\sigma$$

Et on voit alors que $f(\sigma)e^{-\sigma}$ n'est pas borné lorsque $\sigma \rightarrow \infty$ donc f ne peut pas avoir un ordre plus petit que 1.

□

6.1.2 Formule de Jensen

Soit f une fonction holomorphe. Si on se place sur un disque $|z| < R$, f possède un nombre fini de zéros que l'on peut ranger dans l'ordre croissant de leurs modules : $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|$. Les zéros sont comptés avec multiplicité. Dans la suite, on notera pour simplifier $|z_i| = r_i$.

La formule de Jensen fait un lien entre les modules de ces zéros et le comportement de f sur un cercle les englobant :

Théorème 6.1.1 *f une fonction analytique pour $|z| < R$ avec $f(0) \neq 0$. Soient z_1, z_2, \dots, z_n les zéros de f dans ce disque et r_1, r_2, \dots, r_n leurs modules rangés dans l'ordre croissant. Soit r tel que $r_n < r \leq R$. Alors :*

$$\log \left(\frac{r^n |f(0)|}{r_1 r_2 \dots r_n} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta$$

DÉMONSTRATION

f holomorphe sur $|z| < R$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(z) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{z}{z_i} \right) \Phi(z)$$

où Φ est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur le disque de rayon R .

Nous allons d'abord montrer la formule de Jensen pour deux catégories de fonctions : celles qui ne s'annulent pas et celles du type $f(z) = 1 - \frac{z}{z_i}$.

Cas où f ne s'annule pas

Dans ce cas, $\log(f(z))$ est holomorphe sur $|z| \leq r$ et d'après la formule de Cauchy :

$$\log(f(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(f(re^{i\theta})) d\theta$$

$$f(0) = |f(0)| e^{i \arg(f(0))} \quad \text{d'où} \quad \log(f(0)) = \log(|f(0)|) + i \arg(f(0))$$

$$f(re^{i\theta}) = |f(re^{i\theta})| e^{i \arg(f(re^{i\theta}))} \quad \text{d'où} \quad \log(f(re^{i\theta})) = \log(|f(re^{i\theta})|) + i \arg(f(re^{i\theta}))$$

Ainsi on peut écrire :

$$\log(|f(0)|) + i \arg(f(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta + i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \arg(f(re^{i\theta})) d\theta$$

Et en identifiant les parties réelles on obtient la formule de Jensen :

$$\log(|f(0)|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta$$

Cas où $f(z) = 1 - \frac{z}{z_1}$

Evaluons le module de $f(z)$:

$$\begin{aligned}
|f(z)|^2 &= \left| \frac{z}{z_1} \right|^2 \left| 1 - \frac{z_1}{z} \right|^2 \\
|f(z)|^2 &= \frac{r^2}{r_1^2} \left(1 - \frac{r_1}{r} e^{i(\theta_1 - \theta)} \right) \left(1 - \frac{r_1}{r} e^{-i(\theta_1 - \theta)} \right) \\
\log |f(z)|^2 &= 2 \log \left(\frac{r}{r_1} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r_1}{r} \right)^m e^{im(\theta_1 - \theta)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r_1}{r} \right)^m e^{-im(\theta_1 - \theta)} \\
\log |f(z)|^2 &= 2 \log \left(\frac{r}{r_1} \right) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r_1}{r} \right)^m \cos(m(\theta_1 - \theta)) \\
\log |f(z)| &= \log \left(\frac{r}{r_1} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r_1}{r} \right)^m \cos(m(\theta_1 - \theta))
\end{aligned}$$

En intégrant :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = \log \left(\frac{r}{r_1} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r_1}{r} \right)^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m(\theta_1 - \theta)) d\theta$$

L'intégrale du cosinus sur une période étant nulle on obtient :

$$\log \left(\frac{r}{r_1} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta$$

Soit la formule de Jensen car $f(0) = 1$:

$$\log \left(\frac{r |f(0)|}{r_1} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta$$

Cas général

Soit $f(z) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{z}{z_i} \right) \Phi(z)$. On pose $g_i(z) = 1 - \frac{z}{z_i}$

$$\begin{aligned}
\log \left(\frac{r^n |f(0)|}{r_1 r_2 \dots r_n} \right) &= \log \left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{r g_i(0)}{r_i} \right) \right) + \log(\Phi(0)) \\
\log \left(\frac{r^n |f(0)|}{r_1 r_2 \dots r_n} \right) &= \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{r g_i(0)}{r_i} \right) + \log(\Phi(0))
\end{aligned}$$

Or on sait la formule vraie pour les g_i et pour Φ :

$$\begin{aligned}
\log \left(\frac{r^n |f(0)|}{r_1 r_2 \dots r_n} \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g_i(re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\Phi(re^{i\theta})| d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i=1}^n \log |g_i(re^{i\theta})| + \log |\Phi(re^{i\theta})| \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g_1 \dots g_n \Phi(re^{i\theta})| d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta
\end{aligned}$$

□

Corollaire 6.1.1 Soit $n(x)$ le nombre de zéros de f à l'intérieur du disque fermé $|z| \leq x$.

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|$$

DÉMONSTRATION

D'après la formule de Jensen,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)| = \log \left(\frac{r^n}{r_1 r_2 \dots r_n} \right)$$

Il reste donc à montrer que $\log \left(\frac{r^n}{r_1 r_2 \dots r_n} \right) = \int_0^r \frac{n(x)}{x} dx$

$$\begin{aligned}
\log \left(\frac{r^n}{r_1 r_2 \dots r_n} \right) &= n \log r - \sum_{i=1}^n \log(r_i) \\
&= n \log(r) - \sum_{i=1}^n \log(r_i)(i - (i-1)) \\
&= n(r_n)(\log(r) - \log(r_n)) + \sum_{i=1}^{n-1} i(\log(r_{i+1}) - \log(r_i)) \\
&= n \int_{r_n}^r \frac{n(x)}{x} dx + \sum_{i=1}^{n-1} n(r_i) \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{1}{x} dx \\
&= \int_0^r \frac{n(x)}{x} dx
\end{aligned}$$

□

6.1.3 Application aux fonctions d'ordre 1

Le théorème suivant est un résultat important sur les fonctions d'ordre 1 :

Théorème 6.1.2 Soit f une fonction entière d'ordre 1. Alors

1. Les zéros non nuls (ρ_n) de f vérifient

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\epsilon}} < +\infty$$

pour tout $\epsilon > 0$

2. De plus pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = e^{a+bz} \prod_{\rho \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{\frac{z}{\rho}}$$

où ρ parcourt l'ensemble des zéros non nuls de f et où a et b sont des constantes complexes.

DÉMONSTRATION

Montrons d'abord que si on note $n(x)$ comme dans le corollaire 6.1.1 on a $n(r) = O(r^{1+\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$. Ce résultat montre donc qu'une fonction d'ordre 1 a relativement peu de zéros dans une région donnée...

f est d'ordre 1 donc $\forall \epsilon > 0$, il existe une constante A_ϵ telle que $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|f(re^{i\theta})| \leq A_\epsilon(e^{r^{1+\epsilon}})$$

Soit ϵ positif. On a pour tout $z = re^{i\theta}$:

$$\log |f(re^{i\theta})| \leq \log(A_\epsilon)r^{1+\epsilon}$$

D'après le corollaire 6.1.1

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x} dx < \log(A_\epsilon)r^{1+\epsilon} + |\log(f(0))|$$

Il existe donc une constante K telle que $\int_0^r \frac{n(x)}{x} dx < Kr^{1+\epsilon}$ pour tout $r > 0$. Par ailleurs :

$$\int_r^{2r} \frac{n(x)}{x} dx \geq n(r) \int_r^{2r} \frac{1}{x} dx = n(r) \log(2)$$

Donc :

$$n(r) \leq \frac{1}{\log 2} \int_r^{2r} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{\log 2} \int_0^{2r} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{\log 2} Kr^{1+\epsilon}$$

On a donc $n(r) = O(r^{1+\epsilon})$.

En notant (ρ_n) la suite des zéros (avec multiplicité) non nuls de f , de modules croissants, montrons que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\epsilon}}$ converge.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $r > 0$, $n(r) < Ar^{1+\epsilon}$. On a donc en prenant $r = |\rho_n|$, sachant que $n(|\rho_n|) = n$,

$$\frac{1}{|\rho_n|^{1+\epsilon}} < A \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$$

Et la série converge, son terme général étant majoré par celui d'une série de Riemann convergente.

Pour la démonstration de la deuxième partie de la proposition, considérons le produit infini :

$$g(z) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{z}{\rho_n}\right) e^{\frac{z}{\rho_n}}$$

Ce produit converge uniformément car la série de terme général $1 - \left(1 - \frac{z}{\rho_n}\right) e^{\frac{z}{\rho_n}} = e^{\frac{z}{\rho_n}} \left(1 - \frac{z}{\rho_n} - e^{-\frac{z}{\rho_n}}\right)$ converge uniformément sur tout compact.

En effet, $\left(1 - \frac{z}{\rho_n} - e^{-\frac{z}{\rho_n}}\right) = o\left(\frac{z^2}{\rho_n^2}\right)$ lorsque $n \rightarrow \infty$, terme général d'une série qui converge uniformément sur tout compact.

On montre que la fonction $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ est une fonction entière d'ordre au plus 1. De plus, h ne s'annule pas car f et g ont même zéros avec la même multiplicité.

On peut alors définir $\log(h(z))$, fonction entière développable en série de Taylor au voisinage de l'origine :

$$\log(h(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

Or $\log|f(z)| = O(r^{1+\epsilon})$ implique que pour tout $n \geq 0$, $b_n r^n = O(r^{1+\epsilon})$. Donc pour $n \geq 2$, $b_n = 0$. Ainsi $\log(h(z)) = az + b$ et $h(z) = e^{az+b}$.

On a donc $f(z) = g(z)e^{az+b}$.

□

6.2 Zéros triviaux des fonctions L

On présente ici des résultats sur certains zéros des fonctions L associées à des caractères primitifs.

Proposition 6.2.1 $L(\chi, s)$ n'a pas de zéros sur le demi-plan $\sigma > 1$

DÉMONSTRATION

Ce résultat est évident par la formule du produit Eulérien : $L(\chi, s)$ se présente pour $\sigma > 1$ comme un produit infini absolument convergent donc aucun facteur n'est nul : le produit n'est donc pas nul.

Proposition 6.2.2 Si χ est primitif et pair, alors $L(\chi, s)$ a des zéros en $s = -2k$, $k \geq 1$. Si χ est non trivial, $L(\chi, s)$ s'annule également en $s = 0$

DÉMONSTRATION

1^{er} cas : χ est trivial

$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ est méromorphe avec des pôles simples en $s = 0$ et $s = 1$. Γ a des pôles en $-k$, $k \in \mathbb{N}$, donc $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ a des pôles en $-2k$, $k \in \mathbb{N}$. Λ étant holomorphe en $-2k$, $k \in \mathbb{N}^*$ on a nécessairement des zéros de ζ en ces points.

2^{eme} cas : χ est non trivial

$\xi(\chi, s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Lambda(\chi, s)$ est holomorphe : comme $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ a des pôles en $-2k$, $k \in \mathbb{N}$, $L(\chi, s)$, pour que ξ soit holomorphe en ces points, on doit avoir $L(\chi, -2k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 6.2.3 Si χ est primitif et impair, alors $L(\chi, s)$ a des zéros en $s = -2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION

La raisonnement est le même que dans la démonstration de la proposition précédente, en utilisant cette fois la fonction entière $\xi(\chi, s) = \pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(\chi, s)$

Proposition 6.2.4 Pour tout χ primitif, il existe une infinité de zéros de $L(\chi, s)$ satisfaisant $s \neq 0$ et $0 \leq \sigma \leq 1$.

DÉMONSTRATION

Montrons que $f(s) = (s(s-1))^{\delta(\chi)} \Lambda(\chi, s)$ admet une infinité de zéros dans $0 \leq \sigma \leq 1$: ces zéros correspondent alors à un zéro de $L(\chi, s)$ puisque le facteur Γ n'en a pas dans la région considérée.

f est d'ordre 1. D'après le théorème 6.1.2 il existe des constantes a et b telles que

$$f(z) = e^{a+bz} \prod_{\rho \text{ zero} \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{\frac{z}{\rho}}$$

$f(1-s) = f(s)$, les zéros sont donc symétriques par rapport à la droite $\sigma = \frac{1}{2}$. Or si $\sigma > 1$, f n'a pas de zéro (car ni Γ , ni L n'en ont). On peut donc réécrire

$$f(z) = e^{a+bz} \prod_{\substack{\rho \text{ zero} \neq 0 \\ 0 \leq \text{Re}(\rho) \leq 1}} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{\frac{z}{\rho}}$$

Si ces zéros sont en nombre finis, il existe une constante b' et une fonction polynômiale P telles que

$$f(s) = e^{a+b's} P(s)$$

Or on a déjà vu que $f(\sigma) \sim \sigma^{2\delta(\chi)} \sqrt{\pi\sigma} \left(\frac{\sigma}{2e}\right)^\sigma$ et alors $\frac{f(\sigma)}{P(\sigma)e^{a+b'\sigma}}$ tend vers l'infini lorsque $\sigma \rightarrow \infty$, ce qui est impossible.

□

Les zéros évoqués dans les propositions 6.2.2 et 6.2.3 sont appelés **zéros triviaux** des fonctions L associées à des caractères primitifs. Les zéros triviaux sont des zéros de $L(\chi, s)$ mais pas de $\xi(\chi, s)$: ce sont en quelque sorte des zéros qui « compensent » les pôles de Γ pour que ξ soit holomorphe.

Les autres zéros éventuels des fonctions L sont appelés **zéros non triviaux**.

6.3 Zéros non triviaux

Le but de cette section est d'expliciter une zone sans zéros pour L un peu à gauche de 1, où la fonction $\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)}$ sera alors holomorphe. Nous établirons également une majoration de $\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)}$ dans cette zone, qui nous sera utile dans la démonstration du théorème des nombres premiers en progression arithmétique.

Dans cette partie, on prendra la notion $\rho = \beta + i\gamma$ pour désigner un zéro non trivial de L . Comme les zéros triviaux n'annulent pas ξ à cause des pôles de Γ , et que par ailleurs la fonction Γ ne s'annule pas, les zéros non triviaux correspondent exactement aux zéros de $\xi(\chi, s)$ (et donc de $f(\chi, s)$).

Résultats préliminaires sur les zéros non triviaux de L

Lemme 6.3.1 $q \geq 1$, χ un caractère primitif modulo q .

Il existe un nombre $b(\chi) \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $s \in \mathbb{C}$ qui n'est ni zéro ni pôle de $L(\chi, s)$ on ait :

$$-\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} = \delta(\chi) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) - \sum_{\rho \neq 0} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s+t_\chi}{2} \right) - \frac{1}{2} \log(\pi) - b(\chi) \quad (6.1)$$

où on fait la somme sur les zéros non triviaux de $L(\chi, s)$

DÉMONSTRATION

D'après la proposition 6.1.1, $f(s) = ((s-1)s)^{\delta(\chi)} \xi(\chi, s)$ est une fonction entière d'ordre 1. Et d'après le théorème 6.1.2 sur les fonctions holomorphes d'ordres 1, il existe a et b tels que :

$$((s-1)s)^{\delta(\chi)} \pi^{-\frac{s+t_\chi}{2}} \Gamma \left(\frac{s+t_\chi}{2} \right) L(\chi, s) = e^{a+bs} \prod_{\rho \neq 0} \left(1 - \frac{s}{\rho} \right) e^{\frac{s}{\rho}}$$

où on fait le produit sur les zéros de f , donc sur les zéros non triviaux de L .

En prenant la dérivée logarithmique, pour s ni zéro ni pôle de L :

$$\delta(\chi) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) - \frac{1}{2} \log(\pi) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s+t_\chi}{2} \right) + \frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} = b + \sum_{\rho \neq 0} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) e^{\frac{s}{\rho}}$$

D'où la formule (6.1) : la constante b dépend en fait de χ .

□

Lemme 6.3.2 Soit χ un caractère primitif. Notons $\rho = \beta + i\gamma$ les zéros de $\xi(\chi, s)$ (zéros non triviaux de L). Il vérifient les propriétés suivantes :

- (1) $0 \leq \beta \leq 1$
- (2) ρ est un zéro de $\xi(\chi, s)$ ssi $\bar{\rho}$ est un zéro de $\xi(\bar{\chi}, s)$, ssi $1-\rho$ est un zéro de $\xi(\bar{\chi}, s)$.
- (3) Pour tout $\epsilon > 0$, la série suivante converge absolument :

$$\sum_{\rho \neq 0} \frac{1}{|\rho|^{1+\epsilon}}$$

- (4) Pour tout $s \in \mathbb{C}$ qui n'est pas un zéro de $\xi(\chi, s)$, la série suivante converge absolument :

$$\sum_{\rho \neq s} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} \right)$$

- (5) Si $b(\chi)$ est le nombre complexe défini dans le lemme précédent, on a :

$$\operatorname{Re}(b(\chi)) = -\frac{1}{2} \log(q) - \sum_{\rho \neq 0} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (6.2)$$

DÉMONSTRATION

(1) Comme L ne s'annule pas sur $\sigma >$, ξ ne s'annule pas dans cette zone. L'équation fonctionnelle nous montre aussi que ξ ne s'annule pas sur $\sigma < 0$. Les zéros de ξ sont donc situés dans la « bande critique » $0 \leq \sigma \leq 1$.

(2) Comme $L(\bar{\chi}, s) = \overline{L(\chi, \bar{s})}$, on a aussi $\xi(\bar{\chi}, s) = \overline{\xi(\chi, \bar{s})}$ et donc par l'équation fonctionnelle on a le résultat souhaité

(3) Comme la fonction f est d'ordre 1, d'après la partie 1 du théorème **6.1.2**, la série $\sum_{\rho \neq 0} \frac{1}{|\rho|^{1+\epsilon}}$ converge absolument, en sommant sur les zéros non nuls de f . Or ξ et f ont les mêmes zéros.

$$(4) \quad \frac{1}{s-\rho} = \frac{\overline{s-\rho}}{|s-\rho|^2} \text{ donc}$$

$$\left| \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} \right) \right| = \frac{|\operatorname{Re}(s-\rho)|}{|s-\rho|^2} = O \left(\frac{1}{|\rho|^2} \right)$$

La constante du O dépend de s , fixé. Or d'après la partie (3) de ce lemme, $\sum_{\rho \neq 0} \frac{1}{|\rho|^2} < \infty$ donc

$$\sum_{\rho \neq s} \left| \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} \right) \right| < \infty$$

(5) Soit χ non trivial (la cas trivial se traite de manière similaire). D'après l'équation fonctionnelle :

$$\xi(\chi, s) = \epsilon(\chi) q^{\frac{1}{2}-s} \xi(\bar{\chi}, 1-s)$$

En prenant la dérivée logarithmique :

$$-\frac{\xi'(\chi, s)}{\xi(\chi, s)} + \frac{\xi'(\bar{\chi}, 1-s)}{\xi(\bar{\chi}, 1-s)} = -\frac{1}{2} \log(q)$$

Or d'après le lemme précédent :

$$\frac{\xi'(\chi, s)}{\xi(\chi, s)} = b(\chi) + \sum_{\rho \neq 0} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right)$$

En remplaçant dans l'équation précédente :

$$b(\chi) + b(\bar{\chi}) + \sum_{\rho \neq 0} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-s-\bar{\rho}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \right) = -\log(q)$$

D'après (2) on peut en effet noter $\bar{\rho}$ les zéros de $\xi(\bar{\chi}, s)$ où ρ désigne ceux de $\xi(\chi, s)$. Comme $L(\bar{\chi}, s) = \overline{L(\chi, \bar{s})}$, on voit en appliquant (6.1) à $\bar{\chi}$ que $b(\bar{\chi}) = \overline{b(\chi)}$, donc :

$$2\operatorname{Re}(b(\chi)) = -\sum_{\rho \neq 0} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-s-\bar{\rho}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \right) - \log(q)$$

$\left| \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{1-s-\bar{\rho}} \right| = O \left(\frac{1}{|\rho|^2} \right)$: cette série converge absolument, on peut donc réordonner les termes :

$$\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{1-s-\bar{\rho}} = \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{(1-\bar{\rho})-s}$$

Et $1 - \bar{\rho}$ est zéro de $\xi(\chi, s)$ d'après (2) donc $\sum_{\rho \neq 0} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{1-s-\bar{\rho}} \right) = 0$. Finalement :

$$\operatorname{Re}(b(\chi)) = -\frac{1}{2} \log(q) - \sum_{\rho \neq 0} \frac{1}{\rho}$$

□

Lemme important

Lemme 6.3.3 Soit $q \geq 1$ et χ un caractère primitif modulo q .

(1) Soit $T \geq 0$. Le nombre $m(T, \chi)$ de zéros de $L(\chi, s)$ tels que $0 \leq \beta \leq 1$ et $T \leq \gamma \leq T+1$ vérifie

$$m(T, \chi) = O(\log(q(T+2))) \quad (6.3)$$

(2) Pour $0 \leq \sigma \leq 2$, et s n'étant ni zéro ni pôle de $L(\chi, s)$ on a :

$$-\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} = \delta(\chi) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) - \sum_{|s-\rho| \leq 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log(q|s|)) \quad (6.4)$$

(3) Soit $\sigma \geq 1$. Alors pour tout sous-ensemble fini X de zéros non triviaux ρ de $L(\chi, s)$ on a

$$\sum_{\rho \in X} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} \right) < \operatorname{Re} \left(\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} \right) + \delta(\chi) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-1} \right) + O(\log(q|s|)) \quad (6.5)$$

Dans ces trois assertions, les constantes correspondant aux O sont absolues.

DÉMONSTRATION

(1) Posons $s = 2 + iT$ avec $T \geq 2$. On a

$$\left| \operatorname{Re} \left(\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} \right) \right| \leq \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) n^{-2} = -\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} = O(1)$$

Grâce à la formule de Stirling dérivée (3.12) on a par ailleurs, pour s quelconque dans $0 \leq \sigma \leq 2$:

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s+t_\chi}{2} \right) = O(\log(1+|t|))$$

On rappelle que pour tout ρ , $0 \leq \beta \leq 1$. On sait d'après le lemme **6.3.2** que la série de terme général $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} \right)$ converge. Minorons maintenant cette série :

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} \right) = \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (T-\gamma)^2} \geq \frac{1}{4 + (T-\gamma)^2}$$

Si $\gamma \in [T; T+1]$ alors $(T-\gamma)^2 \leq 1$ et $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} \right) \geq \frac{1}{5}$

Si $\gamma \notin [T; T+1]$ alors $(T-\gamma)^2 > 1$ et $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} \right) \geq \frac{1}{4(T-\gamma)^2 + (T-\gamma)^2} = \frac{1}{5|t-\gamma|^2}$

Ainsi, $Re\left(\frac{1}{s-\rho}\right) \geq \frac{1}{5} \min\left(1, \frac{1}{|T-\gamma|^2}\right)$

En prenant la partie réelle de (6.1) :

$$\begin{aligned} \sum_{\rho \neq 0} \min\left(1, \frac{1}{|T-\gamma|^2}\right) &\leq 5 \sum_{\rho \neq 0} Re\left(\frac{1}{s-\rho}\right) \\ &= 5 \left[Re\left(\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)}\right) + Re\left(\frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s+t_\chi}{2}\right)\right) - \frac{1}{2} \log(\pi) - Re(b(\chi)) - \sum_{\rho \neq 0} \frac{1}{\rho} \right] \\ &= O\left(1 + \log(T) + \left|Re(b(\chi)) + \sum_{\rho \neq 0} \frac{1}{\rho}\right|\right) \end{aligned}$$

D'après la formule (5) du lemme **6.3.2**, $\left|Re(b(\chi)) + \sum_{\rho \neq 0} \frac{1}{\rho}\right| = \frac{1}{2} \log(q)$ donc

$$\sum_{\rho \neq 0} \min\left(1, \frac{1}{|T-\gamma|^2}\right) = O(\log(qT)) \quad (6.6)$$

D'autre part,

$$\sum_{\rho \neq 0} \min\left(1, \frac{1}{|T-\gamma|^2}\right) = \sum_{\substack{\rho \neq 0 \\ T \leq \gamma \leq T+1}} 1 + \sum_{\substack{\rho \neq 0 \\ \gamma \notin [T; T+1]}} \frac{1}{|T-\gamma|^2} = m(\chi, T) + A$$

A est une constante positive donc a fortiori, $m(\chi, T) = O(\log(qT))$

(2) Ecrivons la dérivée logarithmique de L de la manière suivante :

$$-\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} = -\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} + \frac{L'(\chi, 2+it)}{L(\chi, 2+it)} + O(1)$$

On utilise cette écriture pour supprimer la constante $b(\chi)$ intervenant dans le développement de la formule (6.1) :

$$\begin{aligned} -\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} &= \delta(\chi) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right) - \sum_{\rho \neq 0} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) - \delta(\chi) \left(\frac{1}{2+it} + \frac{1}{1+it}\right) + \sum_{\rho \neq 0} \left(\frac{1}{2+it-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) + O(1) \\ &= \delta(\chi) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right) + \sum_{\rho \neq 0} \left(\frac{1}{2+it-\rho} - \frac{1}{\sigma+it-\rho}\right) - \delta(\chi) \left(\frac{1}{2+it} + \frac{1}{1+it}\right) + O(1) \\ &= \delta(\chi) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right) + \sum_{\rho \neq 0} \left(\frac{1}{2+it-\rho} - \frac{1}{\sigma+it-\rho}\right) + O(\log|t|) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Dans la somme sur les zéros, considérons séparément les zéros proches de s , càd ceux vérifiant $|s-\rho| \leq 1$ et les zéros tels que $|s-\rho| \geq 1$.

Si $|s-q| \geq 1$, on a :

$$-|s-q|^2 = (\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2 \geq |t-\gamma|^2 \quad \text{donc} \quad |s-q| \geq |t-\gamma| \quad \text{Ainsi, } |s-q| \geq \max(1, |t-\gamma|)$$

– $|2 + it - q|^2 = (2 - \beta)^2 + (t - \gamma)^2 \geq |t - \gamma|^2$ donc $|2 + it - q| \geq |t - \gamma|$
 Comme il n'y a aucun zéro dans la bande $1 < \sigma \leq 2$ on a de plus $|2 + it - q|^2 \geq 1$. Ainsi,
 $|2 + it - q| \geq \max(1, |t - \gamma|)$

$$\left| \frac{1}{2 + it - \rho} - \frac{1}{\sigma + it - \rho} \right| = \frac{|2 - \sigma|}{|s - \rho||2 + it - \rho|} \leq 2 \min \left(1, \frac{1}{|t - \gamma|^2} \right)$$

$$\left| \sum_{|s - \rho| > 1} \left(\frac{1}{2 + it - \rho} - \frac{1}{\sigma + it - \rho} \right) \right| \leq 2 \sum_{\rho \neq 0} \min \left(1, \frac{1}{|t - \gamma|^2} \right) = O(\log(q|t|)) \quad (6.8)$$

d'après l'équation (6.6)

Estimons maintenant $\sum_{|s - \rho| \leq 1} \frac{1}{2 + it - \rho}$. Comme on l'a déjà vu précédemment, pour tout ρ on a $|2 + it - \rho| \geq 1$ car il n'y a pas de zéro à droite de 1. Donc $\frac{1}{2 + it - \rho} \leq 1$. Alors :

$$\left| \sum_{|s - \rho| \leq 1} \frac{1}{2 + it - \rho} \right| \leq \text{Card}\{\rho \mid |s - \rho| \leq 1\} \leq m(t, \chi) = O(\log(q|t|)) \quad (6.9)$$

d'après (6.3). Reprenons maintenant l'équation (6.7) :

$$-\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} = \delta(\chi) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) - \sum_{|\rho - s| \leq 1} \frac{1}{s - \rho} + \sum_{|\rho - s| \leq 1} \frac{1}{2 + it - \rho} + \sum_{|\rho - s| > 1} \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{2 + it - \rho} \right) + O(\log(q|t|))$$

Compte tenu de (6.8) et (6.9) on a alors :

$$-\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} = \delta(\chi) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) - \sum_{|\rho - s| \leq 1} \frac{1}{s - \rho} + O(\log(q|s|))$$

(3) Prenons maintenant s tel que $\sigma \geq 1$

$$\text{Re} \left(\frac{1}{s - \rho} \right) = \frac{\sigma - \beta}{|s - \rho|^2} \geq 0 \quad (6.10)$$

En prenant la partie réelle dans la formule (6.4) :

$$\sum_{|\rho - s| \leq 1} \text{Re} \left(\frac{1}{s - \rho} \right) = \text{Re} \left(\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} \right) + \delta(\chi) \left(\text{Re} \left(\frac{1}{s} \right) + \text{Re} \left(\frac{1}{s-1} \right) \right) + O(\log(q|s|))$$

Et $\text{Re} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{\sigma}{\sigma^2 + t^2} \leq 1$.

Soit X un sous-ensemble fini de zéros de L et soit $X' = X \cap \{\rho \mid |\rho - s| \leq 1\}$. Comme les sommes sont à termes positifs d'après (6.10), on peut écrire :

$$\sum_{\rho \in X'} \text{Re} \left(\frac{1}{s - \rho} \right) \leq \sum_{|\rho - s| \leq 1} \text{Re} \left(\frac{1}{s - \rho} \right) = \text{Re} \left(\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} \right) + \delta(\chi) \text{Re} \left(\frac{1}{s-1} \right) + O(\log(q|s|))$$

$$\sum_{\rho \in X-X'} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} \right) \leq \sum_{|\rho-s|>1} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} \right) \leq \sum_{|\rho-s|>1} \left| \frac{1}{s-\rho} \right| = O(\log(q|s|))$$

Finalement,

$$\sum_{\rho \in X} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} \right) + \delta(\chi) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-1} \right) + O(\log(q|s|))$$

□

Zone sans zéros pour L

Grâce aux lemmes précédents, on peut maintenant démontrer ce théorème :

Théorème 6.3.1 *Soit $q \geq 1$. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout caractère χ modulo q , la fonction $L(\chi, s)$ n'a pas de zéro pour $s = \sigma + it$ dans la région :*

$$\sigma > 1 - \frac{1}{c(\log(q(|t|+2)))} = 1 - 2\sigma(t) \quad (6.11)$$

De plus, pour s dans la région

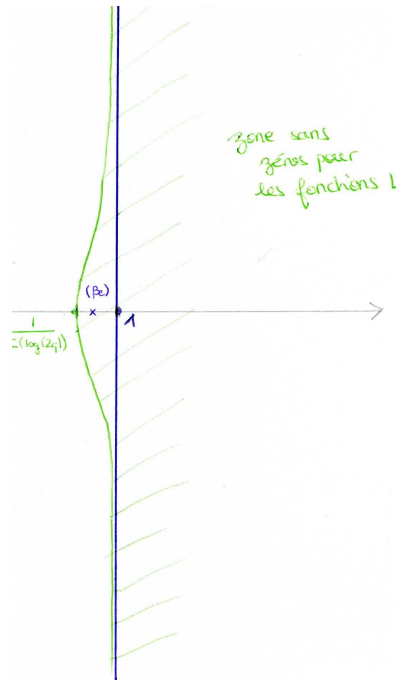
$$\sigma \geq 1 - \sigma(t) \quad (6.12)$$

on a la majoration

$$\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} = O \left(\frac{\delta(\chi)}{|s-1|} + O(\log^2(q|s|)) \right) \quad (6.13)$$

où les constantes implicites sont absolues

La figure suivante montre la zone sans zéro que l'on obtient alors :



DÉMONSTRATION

Pour $\sigma > 1$ on a :

$$\begin{aligned} -\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} &= \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \chi(n) n^{-s} \\ -\operatorname{Re} \left(\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} \right) &= \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \operatorname{Re}(\chi(n) n^{-it}) n^{-\sigma} \end{aligned}$$

$$3|z| + 4\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z^2) = |z|(3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta)) = |z|(2 + 4\cos(\theta) + 2\cos^2(\theta)) = 2|z|(\cos(\theta) + 1)^2 \geq 0$$

Cette inégalité appliquée à $z = \chi(n)n^{-it}$, de module 1 donne

$$3 + 4\operatorname{Re}(\chi(n)n^{-it}) + \operatorname{Re}(\chi^2(n)n^{-2it}) \geq 0$$

En multipliant par $n^{-\sigma}$ et on sommant sur n on obtient, pour $\sigma > 1$:

$$-3\operatorname{Re} \left(\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \right) - 4\operatorname{Re} \left(\frac{L'(\chi, \sigma + it)}{L(\chi, \sigma + it)} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{L'(\chi^2, \sigma + 2it)}{L(\chi^2, \sigma + 2it)} \right) \geq 0 \quad (6.14)$$

Soit X un sous-ensemble de zéros non triviaux de $L(\chi, s)$. Appliquons maintenant la formule (6.5) :

$$\begin{aligned} 4 \sum_{\rho \in X} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma + it - \rho} \right) &< 4\operatorname{Re} \left(\frac{L'(\chi, \sigma + it)}{L(\chi, \sigma + it)} \right) + 4\delta(\chi) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma + it - 1} \right) + O(\log(q|s|)) \\ &< -3\operatorname{Re} \left(\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{L'(\chi^2, \sigma + 2it)}{L(\chi^2, \sigma + 2it)} \right) + 4\delta(\chi) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma + it - 1} \right) + O(\log(q|s|)) \end{aligned}$$

d'après (6.14). On réapplique maintenant la formule (6.5) aux caractères 1 et χ^2 en choisissant pour ensemble fini de zéros $X = \emptyset$:

$$\begin{aligned} 0 &< \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma - 1} \right) + O(\log(q|s|)) \\ 0 &< \operatorname{Re} \left(\frac{L'(\chi^2, \sigma + 2it)}{L(\chi^2, \sigma + 2it)} \right) + \delta(\chi^2) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma + 2it - 1} \right) + O(\log(q|s|)) \end{aligned}$$

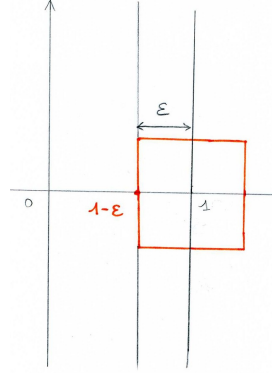
D'où finalement la formule :

$$4 \sum_{\rho \in X} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma + it - \rho} \right) \leq \frac{3}{\sigma - 1} + 4\delta(\chi) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s - 1} \right) + \delta(\chi^2) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma - 1 + 2it} \right) + O(\log(q|s|))$$

Précisons le terme d'erreur. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour $l(t) = c \log(q(|t| + 2))$:

$$4 \sum_{\rho \in X} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma + it - \rho} \right) \leq \frac{3}{\sigma - 1} + 4\delta(\chi) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s - 1} \right) + \delta(\chi^2) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma - 1 + 2it} \right) + \frac{1}{2}l(t) \quad (6.15)$$

Comme $L(\chi, 1) \neq 0$ pour tout χ non trivial et que ζ possède un pôle en 1, il existe $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$ tel que pour tout χ modulo q , $L(\chi, s)$ ne s'annule pas dans le carré suivant de centre 1 et de côté 2ϵ :



On s'intéresse maintenant aux zéros éventuels de L situés dans la zone $1-\epsilon \leq \sigma \leq 1$. Soit $\rho = \beta + i\gamma$ un zéro quelconque dans cette région.

Prenons $s = \sigma + it$ avec $1 < \sigma \leq 2$ et $t = \gamma$. On a $|t| > \epsilon$ et $(s - \rho) \in \mathbb{R}$.

$$4\operatorname{Re}\left(\frac{1}{s-1}\right) = \frac{4(\sigma-1)}{(\sigma-1)^2 + t^2} < \frac{2}{\epsilon^2} \leq \frac{1}{4}l(t)$$

pour c assez grand. De même on a

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sigma-1+2it}\right) \leq \frac{1}{4}l(t)$$

Prenons maintenant pour ensemble X dans la formule (6.15) la singleton $X = \{\rho\}$:

$$\begin{aligned} 4\operatorname{Re}\left(\frac{1}{(\sigma+i\gamma)-(\beta+i\gamma)}\right) &\leq \frac{3}{\sigma-1} + l(\gamma) \\ \frac{4}{\sigma-\beta} &\leq \frac{3}{\sigma-1} + l(\gamma) \end{aligned}$$

Cette formule devient fausse pour σ proche de 1 si β est trop proche de 1. Posons $\sigma = 1 + \frac{1}{2l(\gamma)}$

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sigma-\beta} &\leq 7l(\gamma) \\ \frac{4}{7l(\gamma)} &\leq 1-\beta + \frac{1}{2l(\gamma)} \\ \beta &\leq 1 - \frac{1}{14l(\gamma)} \end{aligned}$$

On a donc une relation entre la partie réelle et la partie imaginaire d'un zéro non trivial. Il n'y a pas de zéro pour $s = \sigma + it$ dans la zone :

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{14c\log(q(|t|+2))} \quad \text{et} \quad |t| > \epsilon$$

Pour c assez grand, on a même $\frac{1}{14c\log(2q)} \leq \epsilon$ et dans ce cas, la formule devient aussi valable pour $|t| \leq \epsilon$. Ainsi, il existe c tel que dans la région suivante, $L(\chi, s)$ n'admet pas de zéro :

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{c\log(q(|t|+2))}$$

Soit $s = \sigma + it$ dans la zone $\sigma \geq 1 - \sigma(t)$. s n'est pas zéro de $L(\chi, s)$ et on a d'après (6.4) :

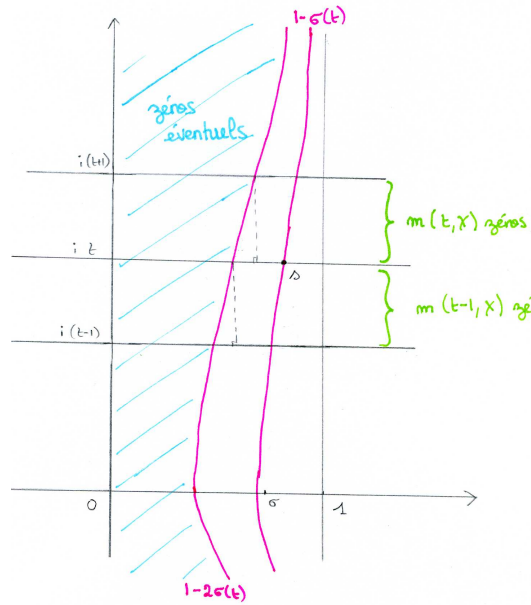
$$-\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} = \delta(\chi) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) - \sum_{|s-\rho| \leq 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log(q|s|))$$

où la constante implicite est indépendante de χ (possible car il y a $\phi(q)$ caractères mod q)

Si ρ vérifie $|\gamma - t| > 1$, le zéro est tel que $|s - \rho| > 1$, donc on ne prend en compte dans la somme ci-dessus que les zéros de L situés dans la bande horizontale

$$t-1 \leq \gamma \leq t+1$$

Soit $t \geq 1$



Dans la zone $t-1 \leq \gamma \leq t$, on a $|s - \rho| \geq \sigma(t)$ et au plus $m(t-1, \chi)$ zéros

Dans la zone $t \leq \gamma \leq t+1$ on a $|s - \rho| \geq \sigma(t+1)$ et au plus $m(t, \chi)$ zéros

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|s-\rho| \leq 1} \frac{1}{s-\rho} \right| &\leq \sum_{|s-\rho| \leq 1} \frac{1}{|s-\rho|} \leq m(t-1, \chi) \times \frac{1}{\sigma(t)} + m(t, \chi) \times \frac{1}{\sigma(t+1)} \\ &\leq K \log(q(t+2)) \log(q(t-1+2)) + K' \log(q(t+1+2)) \log(q(t+2)) \\ &= O(\log^2(q|s|)) \end{aligned}$$

d'après (6.3)

Si $t \leq 1$, $\left| \sum_{|s-\rho| \leq 1} \frac{1}{s-\rho} \right| \leq \sum_{|\bar{s}-\bar{\rho}| \leq 1} \frac{1}{|\bar{s}-\bar{\rho}|}$ et on se ramène au cas précédent.

Comme de plus $|s| \geq 1 - \epsilon \geq \frac{1}{2}$ on a $\frac{1}{s} = O(1)$. Ainsi :

$$-\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} = O\left(\frac{\delta(\chi)}{|s-1|} + O(\log^2(q|s|))\right)$$

□

Septième partie

Théorèmes des nombres premiers

Soit q et a deux entiers premiers entre eux.

7.1 Le théorème des nombres premiers

Nous allons montrer le théorème suivant, équivalent au théorème des nombres premiers, comme on l'a vu dans la partie 3.2 :

Théorème 7.1.1 *Lorsque x tend vers l'infini, $\psi(x) \sim x$*

Nous allons d'abord montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \zeta(1+it) \neq 0$ puis nous verrons que le théorème précédent est équivalent à cette non-annulation de la fonction ζ sur la droite de partie réelle 1.

Avec un tel résultat sur la fonction zeta de Riemann on montre, comme on le verra :

$$\psi(x) = x + o(x)$$

Mais pour obtenir un terme d'erreur plus précis que le $o(x)$ ci-dessus, il faut trouver une zone un peu à gauche de la droite $\sigma = 1$ sur laquelle ζ ne s'annule pas. On pourra alors déplacer le contour d'intégration vers la gauche et obtenir le terme d'erreur grâce à des majoration de la dérivée logarithmique $\left| -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right|$ dans de telles zones.

7.1.1 Non annulation de ζ sur $\sigma = 1$

Proposition 7.1.1 *Pour $\sigma > 1$ on a*

$$|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)| \geq 1 \quad (7.1)$$

DÉMONSTRATION

On se place sur le domaine $\sigma > 1$. $\zeta(s) \neq 0$, à cause de la formule du produit infini. On peut donc définir $\log(\zeta(s))$.

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \prod_{p \in P} \frac{1}{1-p^{-s}} \\ \log(\zeta(s)) &= \sum_{p \in P} \log\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right) \\ \log(\zeta(s)) &= \sum_{p \in P} -\log(1-p^{-s}) \end{aligned}$$

Comme $|p^{-s}| < 1$, on a

$$\begin{aligned} \log(\zeta(s)) &= \sum_{p \in P} \sum_{n \leq 1} \frac{(p^{-s})^n}{n} = \sum_{p \in P} \sum_{n \leq 1} \frac{p^{-sn}}{n} \\ \zeta(s) &= \exp\left(\sum_{p \in P} \sum_{n \leq 1} \frac{p^{-sn}}{n}\right) \end{aligned}$$

Si $s = \exp(z)$, $|s| = \exp(\operatorname{Re}(z))$, donc :

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &= \exp \left(\operatorname{Re} \left(\sum_{p \in P} \sum_{n \leq 1} \frac{p^{-sn}}{n} \right) \right) \\ |\zeta(s)| &= \exp \left(\sum_{p \in P} \sum_{n \leq 1} \operatorname{Re} \left(\frac{p^{-sn}}{n} \right) \right) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{p^{-sn}}{n} &= \frac{p^{-\sigma n} p^{-itn}}{n} = \frac{p^{-\sigma n}}{n} \exp(-itn \log(p)) \\ &= \frac{p^{-\sigma n}}{n} (\cos(n \log(p)t) - i \sin(n \log(p)t)) \end{aligned}$$

Donc :

$$|\zeta(s)| = \exp \left(\sum_{p \in P} \sum_{n \leq 1} \frac{\cos(n \log(p)t)}{np^{\sigma n}} \right)$$

Et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a alors

$$|\zeta(s)|^k = \exp \left(\sum_{p \in P} \sum_{n \leq 1} \frac{k \cos(n \log(p)t)}{np^{\sigma n}} \right)$$

Et finalement, grâce aux propriétés de l'exponentielle on a :

$$\begin{aligned} |\zeta^3(\sigma) \zeta^4(\sigma + it) \zeta(\sigma + 2it)| &= |\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \\ &= \exp \left(\sum_{p \in P} \sum_{n \leq 1} \frac{3 + 4\cos(n \log(p)t) + \cos(2n \log(p)t)}{np^{\sigma n}} \right) \end{aligned}$$

Posons $\phi = n \log(p)t$. Alors $3 + 4\cos(\phi) + \cos(2\phi) \geq 0$. En effet :

$$\begin{aligned} 3 + 4\cos\phi + \cos(2\phi) &= 3 + 4\cos\phi + 2\cos^2\phi - 1 \\ &= 2(1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi) \\ &= 2(1 + \cos\phi)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

L'argument de l'exponentielle est donc positif d'où $|\zeta^3(\sigma) \zeta^4(\sigma + it) \zeta(\sigma + 2it)| \geq 1$.

Corollaire 7.1.1 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\zeta(1 + it) \neq 0$

DÉMONSTRATION

Prenons $\sigma > 1$ et supposons qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $\zeta(1 + it_0) = 0$.

$$\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + it_0)\zeta(\sigma + 2it_0) = (\zeta^3(\sigma)(\sigma - 1)^3) \left(\frac{\zeta^4(\sigma + it_0)}{(\sigma - 1)^4} \right) (\zeta(\sigma + 2it_0)(\sigma - 1))$$

Lorsque $\sigma \rightarrow 1$, $\zeta^3(\sigma)(\sigma - 1)^3$ est borné car ζ^3 possède un pôle d'ordre exactement 3 en 1. L'expression $\frac{\zeta^4(\sigma + it_0)}{(\sigma - 1)^4}$ est également bornée car ζ^4 possède un zéro d'ordre au moins 4 en $1 + it_0$. Et $|\zeta(\sigma + 2it_0)(\sigma - 1)| \rightarrow 0$ lorsque $\sigma \rightarrow 1$.

Ainsi $|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + it)\zeta(\sigma + 2it)| \rightarrow 0$ lorsque $\sigma \rightarrow 1$. En contradiction avec la proposition **7.1.1**.

7.1.2 Démonstration du théorème des nombres premiers

La non-annulation de ζ que nous venons de prouver suffit à démontrer le théorème des nombres premiers. Nous allons pour cela utiliser le théorème suivant, dû à Wiener et Ikehara, que nous admettrons.

Théorème 7.1.2 (Théorème de Wiener-Ikehara) *Soit α une fonction positive et croissante telle que $f(s) = \int_0^\infty e^{-su}\alpha(u)du$ soit définie pour $\sigma > a > 0$.*

Si il existe $A > 0$ tel que $f(s) - \frac{A}{s-a}$ soit holomorphe sur la droite $\sigma = a$. Alors

$$\alpha(u) \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} Ae^{au}$$

D'après la formule (3.1) on a l'expression suivante de la dérivée logarithmique de ζ :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx$$

On obtient après le changement de variable $x = e^u$:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_0^\infty \psi(e^u) e^{-su} du$$

Donc

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-su} \psi(e^u) du = -\frac{1}{s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

La fonction $f(s) - \frac{1}{s-1}$ est holomorphe sur $\sigma = 1$ car au vu de la non annulation de ζ sur cette droite, la fonction $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ est méromorphe sur $\sigma \geq 1$ avec un unique pôle simple en 1 de résidu 1.

D'après le théorème de Wiener-Ikehara, on a alors

$$\psi(e^u) \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} e^u$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$ soit :

$$\psi(x) \sim x \quad x \rightarrow \infty$$

□

7.1.3 Equivalence avec la non-annulation de ζ

On a vu que $\zeta(1+it) \neq 0$ implique le théorème des nombres premiers, nous allons voir maintenant que le théorème des nombres premiers implique que $\zeta(1+it) \neq 0$. Ces deux résultats sont donc équivalents.

Proposition 7.1.2 *Si $\psi(x) \sim x$ lorsque $x \rightarrow \infty$, alors $\zeta(1+it) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$*

DÉMONSTRATION

Soit $t \neq 0$. Nous allons montrer que la fonction $\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}$ n'admet pas de pôle lorsque $\sigma \rightarrow 1$: on aura alors le résultat puisque le numérateur $\zeta'(s)$ n'admet pas de pôle en $s = 1+it$ si $t \neq 0$.

On a pour $s = \sigma + it$ avec $\sigma > 1$ et $t \neq 0$, d'après (3.1) :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx$$

Et d'après le théorème des nombres premiers, on peut écrire $\psi(x) = x + \delta(x)$, où $\delta(x) = o(x)$.

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= s \int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx + s \int_1^\infty \frac{\delta(x)}{x^{s+1}} dx \\ -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \frac{s}{s-1} + s \int_1^\infty \frac{\delta(x)}{x^{s+1}} dx \end{aligned}$$

La fonction $\frac{s}{s-1}$ est holomorphe en $1+it$. montrons qu'il en est de même pour $g(s) = \int_1^\infty \frac{\delta(x)}{x^{s+1}} dx$

Comme $\delta(x) = o(x)$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel x_0 (dépendant de ϵ) tel que pour tout $x \geq x_0$, $|\delta(x)| \leq \epsilon x$. Ainsi :

$$|g(s)| \leq \int_1^{x_0} \frac{|\delta(x)|}{x^{\sigma+1}} dx + \epsilon \int_{x_0}^\infty \frac{1}{x^\sigma} dx = K_\epsilon + \frac{\epsilon}{\sigma-1}$$

Pour $1 < \sigma \leq 1 + \frac{\epsilon}{K_\epsilon - \epsilon}$,

$$|(\sigma-1)g(s)| \leq 2\epsilon \tag{7.2}$$

Et $|(\sigma-1)g(s)| = |((\sigma+it) - (1+it))g(\sigma+it)|$.

Si g admet un pôle en $1+it$ on a deux possibilités :

- Si ce pôle est simple, $((\sigma+it) - (1+it))g(\sigma+it)$ tend vers le résidu de ce pôle et donc vers une limite non nulle lorsque σ tend vers 1

– Si ce pôle est multiple, $|(\sigma + it) - (1 + it))g(\sigma + it)|$ tend vers l'infini lorsque σ tend vers 1
 Dans les deux cas on a une contradiction avec l'inégalité (7.2), valable pour tout ϵ .

Donc la fonction g est holomorphe en $1 + it$, ce qui implique que $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ l'est aussi et donc que ζ ne s'annule pas sur cette droite.

□

7.1.4 Théorème des nombres premiers avec un terme d'erreur

Nous allons maintenant obtenir une version « améliorée » du théorème des nombres premier avec un terme d'erreur le plus précis possible. Grâce à la formule d'inversion de Mellin on obtient, pour $a > 1$ (cf. formule (3.18)) :

$$\psi(x) = \int_{(a)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds$$

Comme $\zeta(1 + it) \neq 0$, pour un réel fixé T , il existe une zone de la forme

$$\begin{aligned} 1 - \beta(T) &\leq \sigma \leq 2 \\ -T &\leq t \leq T \end{aligned}$$

où $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ est méromorphe et n'a qu'un seul pôle, en 1. Le problème est que $\beta(T)$ peut tendre vers 0 lorsque T tend vers l'infini... On ne peut donc pas se ramener à une intégrale verticale de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}$ sur une droite du type $\sigma = 1 - \beta$. Dans la suite, on ne va donc pas directement déplacer le contour d'intégration vers la gauche comme on l'avait fait dans la partie 3.6 pour passer de l'intégrale verticale sur une droite située à droite de 1 à l'intégrale sur une droite verticale située à gauche de 1, mais on va intégrer la fonction $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}$ sur un contour du type suivant pour essayer d'évaluer l'intégrale qui définit $\psi(x)$ à l'aide du théorème des résidus.

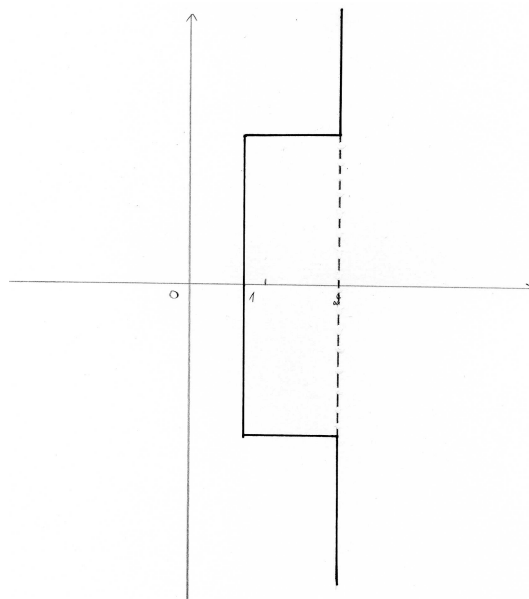


FIG. 7.1 – Contour d'intégration

Pour évaluer ψ , on aura besoin de pouvoir évaluer $\zeta(s)$, $\zeta'(s)$ ou encore $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ dans des rectangles bien choisis : nous allons d'abord établir les estimations qui nous seront utiles par la suite.

Estimations de ζ , ζ' et $-\frac{\zeta'}{\zeta}$

Proposition 7.1.3 *Soit $n \geq 1$ quelconque.*

Pour tout s tel que $\sigma > 0$ on a la formule :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^s} + \frac{n^{-s}}{2} + \frac{n^{1-s}}{s-1} - s \int_n^\infty \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx \quad (7.3)$$

DÉMONSTRATION

Par intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} (x - [x] - \frac{1}{2}) \frac{-s}{x^{s+1}} dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^s} + \frac{1}{(n+1)^s} \right) - \int_n^{n+1} \frac{1}{x^s} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^s} + \frac{1}{(n+1)^s} \right) + \frac{1}{s+1} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^s} &= \frac{n^{-s}}{2} + \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^s} + \frac{1}{(n+1)^s} \right) + \frac{N^{-s}}{2} \\ &= \frac{n^{-s}}{2} + \frac{N^{-s}}{2} + \sum_{k=n}^{N-1} s \int_k^{k+1} \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{s+1} \sum_{k=n}^{N-1} \left(\frac{1}{k^{s-1}} - \frac{1}{(k+1)^{s-1}} \right) \\ &= \frac{n^{-s}}{2} + \frac{N^{-s}}{2} + s \int_n^N \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{s+1} \left(\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{N^{s-1}} \right) \end{aligned}$$

Lorsque N tend vers l'infini, l'intégrale converge car $\left| \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} \right| = O\left(\frac{1}{x^{\sigma+1}}\right)$ et $\sigma > 0$.

On a donc lorsque $N \rightarrow \infty$ la formule suivante, valable pour $\sigma > 0$:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{n^{-s}}{2} + \frac{n^{1-s}}{s+1} + s \int_n^\infty \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx$$

On en déduit la proposition

□

En utilisant cette nouvelle écriture de ζ montrons le théorème suivant :

Théorème 7.1.3 Soit $A > 0$ une constante. Il existe $t_0 > 0$ tel que dans la région

$$\begin{aligned} 1 - \frac{A}{\log|t|} &\leq \sigma \leq 2 \\ |t| &> t_0 > 1 \end{aligned}$$

on ait $\zeta(s) = O(\log|t|)$ uniformément.

En d'autres termes, il existe une constante K telle que pour tout s dans cette région,

$$|\zeta(s)| \leq K|\log|t||$$

(la constante K dépend uniquement de A)

DÉMONSTRATION

D'après la proposition **7.1.3** on a pour $\sigma > 0$

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} = \frac{N^{-s}}{2} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s \int_N^\infty \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx$$

On a donc :

$$\left| \zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \right| \leq \frac{|s|}{2} \int_N^\infty \frac{1}{x^{1+\sigma}} dx + \frac{N^{1-\sigma}}{|s-1|} + \frac{N^{-\sigma}}{2}$$

Et $|s| = \sqrt{\sigma^2 + t^2} \leq \sqrt{4 + t^2} \leq 5|t|$ pour $|t| > 1$ (par exemple)

De plus, $|s-1| = \sqrt{(\sigma-1)^2 + t^2} \geq |t|$ donc $\frac{1}{|s-1|} \leq \frac{1}{|t|}$

Ainsi,

$$\left| \zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \right| = O\left(|t| \int_N^\infty \frac{1}{x^{1+\sigma}} dx\right) + O\left(\frac{N^{1-\sigma}}{|t|}\right) + O(N^{-\sigma})$$

Si $n \leq |t| \left(\frac{\log(n)}{\log|t|} \leq 1\right)$,

$$|n^{-s}| = n^{-\sigma} = e^{(-\sigma \log(n))} \leq \exp\left(-\left(1 - \frac{A}{\log|t|}\right) \log(n)\right) = n^{-1} \exp\left(\frac{A \log(n)}{\log|t|}\right) \leq \frac{e^A}{n}$$

Prenons $N = \lceil |t| \rceil$. Dans ce cas si $n \leq N$, $n^{-s} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et de même, $N^{-\sigma} = O\left(\frac{1}{N}\right)$. Enfin, $N^{1-\sigma} = NN^{-\sigma} = O(1)$.

Finalement,

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^N O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{|t|}{N}\right) + O\left(\frac{1}{|t|}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= O(\log(N)) + O(1) = O(\log|t|) \end{aligned}$$

Théorème 7.1.4 Dans la même région que dans le théorème 7.1.3

$$\zeta'(s) = O(\log^2 |t|)$$

DÉMONSTRATION

On procède comme dans la démonstration précédente en partant de la relation :

$$\zeta'(s) = - \sum_2^N \frac{\log(n)}{n^s} + \int_N^\infty \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} (1 - s \log(x)) dx - \frac{N^{1-s} \log(N)}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{(s-1)^2} + \frac{1}{2} N^{-s} \log(N)$$

Cette relation s'obtient en dérivant la relation (7.3) : on évalue ensuite chaque terme de la somme en prenant $N = [|t|]$ et voit apparaître un $\log |t|$ en facteur supplémentaire.

□

Théorème 7.1.5 Il existe une constante réelle positive c et $t_0 > 0$ tels que $\zeta(s)$ n'a pas de zéro dans la région

$$\begin{aligned} \sigma &> 1 - \frac{c}{\log^9 |t|} \\ |t| &> t_0 \end{aligned}$$

De plus dans cette même région,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = O(\log^7 |t|)$$

DÉMONSTRATION

D'après la formule (7.1), pour $\sigma > 1$ on a

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \right| \leq |\zeta(\sigma)|^{\frac{3}{4}} |\zeta(\sigma + 2it)|^{\frac{1}{4}}$$

Et $(\sigma - 1)\zeta(\sigma)$ est borné au voisinage de 1 et dans la région $1 \leq \sigma \leq 2$ donc $\zeta(\sigma) = O\left(\frac{1}{(\sigma-1)}\right)$ dans cette zone. On se trouve en particulier dans la zone définie dans le théorème 7.1.3 (avec une valeur de A quelconque que l'on fixe) donc $\zeta(\sigma + 2it) = O(\log(|t|))$. Ainsi :

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \right| = O\left(\frac{\log^{\frac{1}{4}} |t|}{(\sigma - 1)^{\frac{3}{4}}}\right)$$

Avec $\sigma > 1 - \frac{A}{\log(t)}$, $|t| > t_0$ on a aussi :

$$\zeta(1 + it) - \zeta(\sigma + it) = - \int_1^\sigma \zeta'(u + it) du = O((\sigma - 1) \log^2 |t|) \quad (7.4)$$

Il existe alors une constante A_1 telle que

$$|\zeta(\sigma + it)| - |\zeta(1 + it)| < A_1(\sigma - 1)\log^2|t|$$

Et il existe A_2 telle que $\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \right| < \frac{1}{A_2} \frac{\log^{\frac{1}{4}}|t|}{(\sigma - 1)^{\frac{3}{4}}}$ (pour σ compris entre 1 et 2) et donc $|\zeta(\sigma + it)| > A_2 \frac{(\sigma - 1)^{\frac{3}{4}}}{\log^{\frac{1}{4}}|t|}$. On a alors l'inégalité :

$$|\zeta(1 + it)| > A_2 \frac{(\sigma - 1)^{\frac{3}{4}}}{\log^{\frac{1}{4}}|t|} - A_1(\sigma - 1)\log^2|t|$$

Prenons maintenant $\sigma - 1 = A_3 \log^{-9}|t|$

$$|\zeta(1 + it)| > (A_2 A_3^{\frac{3}{4}} - A_1 A_3) \log^{-7}|t|$$

Pour A_3 suffisamment petit, le terme de droite est positif. Il existe donc B tel que

$$|\zeta(1 + it)| > B \log^{-7}|t| \quad (7.5)$$

Reprenons maintenant la formule (7.4) avec cette fois $1 > \sigma > 1 - \frac{A}{\log|t|}$. On a l'inégalité

$$|\zeta(\sigma + it)| > B \log^{-7}|t| - A_4(1 - \sigma)\log^2|t|$$

Prenons maintenant σ tel que $1 - \sigma < c \log^{-9}|t|$ alors :

$$|\zeta(\sigma + it)| > (B - A_4 c) \log^{-7}(|t|)$$

En prenant c suffisamment petit, on réalise à la fois la condition $B - A_4 c > \frac{B}{2}$ et $1 - \frac{A}{\log|t|} < 1 - \frac{c}{\log^9|t|}$.

On a alors l'existence d'un triplet (c, A, t_0) tel que dans la région $\sigma > 1 - c \log^{-9}|t|$, $|t| > t_0$ on ait uniformément :

$$|\zeta(\sigma + it)| > A \log^{-7}|t|$$

En particulier, ζ ne s'annule pas dans cette zone et on a bien

$$\frac{1}{\zeta(s)} = O(\log^7|t|)$$

□

Théorème 7.1.6 *Il existe c et t_0 tel que dans la région $2 \geq \sigma > 1 - \frac{c}{\log^9|t|}$, $|t| > t_0$*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log^9(t))$$

(la constante du O ne dépendant que de c)

DÉMONSTRATION

Découle des théorème **7.1.4** et **7.1.5**

Démonstration du théorème des nombres premiers

Théorème 7.1.7 (Théorème des nombres premiers) *Il existe une constante d telle que*

$$\psi(x) = x + O\left(x \exp[-d(\log(x))^{\frac{1}{10}}]\right)$$

lorsque $x \rightarrow \infty$

DÉMONSTRATION

Soit $T > t_0$. Posons $s_0(T) = 1 - \frac{c}{\log^9(T)}$.

On choisit T tel que ζ n'ait pas de zéro dans le rectangle de sommet $s_0(T) + it_0$, $s_0(T) - it_0$, $2 - it_0$, $2 + it_0$: cela existe car ζ ne s'annule pas sur $\sigma \geq 1$. (t_0 est la constante définie dans le théorème 7.1.5).

Prenons maintenant $\sigma + it$ avec $T > |t|$

Posons $a = 1 + \frac{c}{\log^9(T)}$ et $b = 1 - \frac{c}{\log^9(T)}$. On considère le rectangle R_T (cf. figure 7.2)

$\forall |t| > t_0$ à l'intérieur du rectangle ci-dessus on a $\sigma > 1 - \frac{c}{\log^9(T)} > 1 - \frac{c}{\log^9|t|}$ donc :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log^9(T))$$

En particulier,

$$\frac{\zeta'(\sigma \pm iT)}{\zeta(\sigma \pm iT)} = O(\log^9(T))$$

A l'intérieur du rectangle considéré, ζ ne s'annule pas (voir figure) donc la fonction $\frac{-\zeta'}{\zeta}$ est méromorphe et possède un unique pôle simple, 1, de résidu 1. Appliquons le théorème des résidus pour évaluer l'intégrale $\int_{(a)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds$ (qui vaut $\psi(x)$) :

$$\int_{R_T} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds = 2i\pi x$$

En décomposant l'intégrale sur chacun des côtés :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{a-iT}^{a+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds = x + \frac{1}{2i\pi} \left[\int_{a-iT}^{b-iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds + \int_{b-iT}^{b+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds + \int_{b+iT}^{a+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \right]$$

D'autre part :

$$\int_{(a)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds = \int_{a-i\infty}^{a-iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds + \int_{a-iT}^{a+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds + \int_{a+iT}^{a+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds$$

Des deux équations précédentes, on déduit que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(a)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds = x + \frac{1}{2i\pi} [I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5]$$

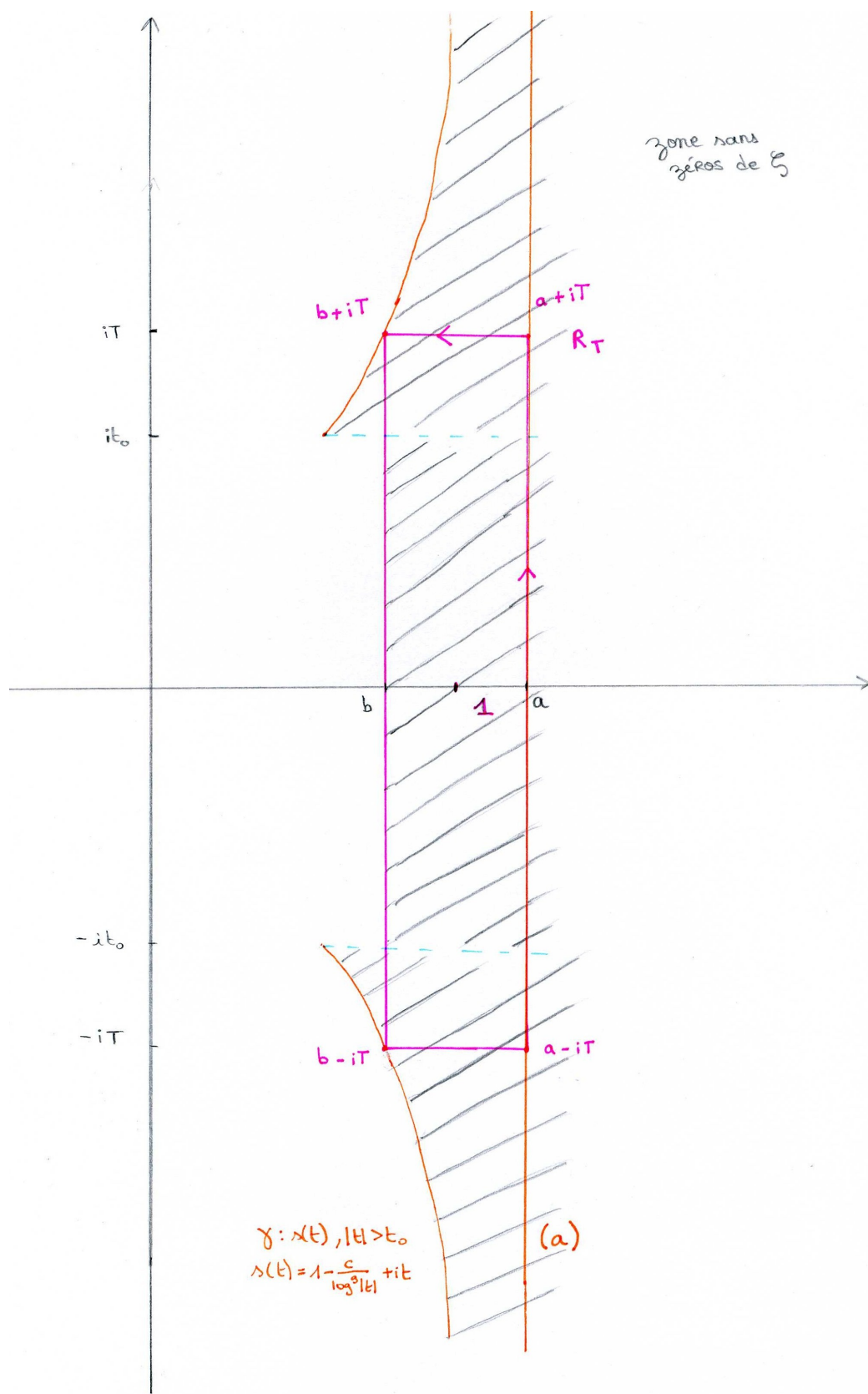


FIG. 7.2 – Rectangle R_T

avec les notation

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{a-i\infty}^{a-iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds & I_2 &= \int_{a+iT}^{a+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \\ I_3 &= \int_{a-iT}^{b-iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds & I_4 &= \int_{b+iT}^{a+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \\ I_5 &= \int_{b-iT}^{b+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \end{aligned}$$

Evaluons chacune de ces intégrales :

Estimation de I_1 et I_2

$$I_2 = \lim_{U \rightarrow \infty} \int_{a+iT}^{a+iU} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds = \lim_{U \rightarrow \infty} \int_{a+iT}^{a+iU} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \frac{x^s}{s} ds$$

Comme la série converge uniformément pour $\sigma > 1$, on peut intervertir série et intégrale :

$$I_2 = \lim_{U \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \int_{a+iT}^{a+iU} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{1}{s} ds \quad (7.6)$$

Estimons maintenant l'intégrale, en faisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{a+iT}^{a+iU} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{1}{s} ds &= \left[\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s \log\left(\frac{x}{n}\right)} \right]_{a+iT}^{a+iU} + \frac{1}{\log\left(\frac{x}{n}\right)} \int_{a+iT}^{a+iU} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s^2} \\ &= \frac{1}{\log\left(\frac{x}{n}\right)} \left(\frac{x}{n}\right)^a \left[\frac{e^{iU \log\left(\frac{x}{n}\right)}}{a+iU} - \frac{e^{iT \log\left(\frac{x}{n}\right)}}{a+iT} + \int_T^U \frac{e^{it \log\left(\frac{x}{n}\right)}}{(a+it)^2} idt \right] \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_{a+iT}^{a+iU} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{1}{s} ds = O \left(\frac{1}{|\log\left(\frac{x}{n}\right)|} \left(\frac{x}{n}\right)^a \left[\frac{1}{|a+iU|} + \frac{1}{a+iT} + \int_T^U \frac{dt}{a^2+t^2} \right] \right)$$

Or $U > T$ et $|a+iT| > T$. D'autre part, $\int_T^U \frac{dt}{a^2+t^2} < \int_T^\infty \frac{dt}{a^2+t^2} = O\left(\frac{1}{T}\right)$ lorsque $T \rightarrow \infty$. Ainsi :

$$\int_{a+iT}^{a+iU} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{1}{s} ds = O \left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^a}{T |\log\left(\frac{x}{n}\right)|} \right)$$

lorsque $T \rightarrow \infty$.

En majorant $\Lambda(n)$ par $\log(n)$ on obtient donc pour (7.6) :

$$I_2 = O \left(\frac{x^a}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n) n^{-a}}{|\log\left(\frac{x}{n}\right)|} \right)$$

pour T assez grand.

Pour majorer la somme, on va étudier séparément 3 zones :

$$(i) \ n < \frac{x}{2} \quad (ii) \ \frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2} \quad (iii) \ n > \frac{3x}{2}$$

Pour n dans la région (i),

$$\left| \log \left(\frac{x}{n} \right) \right| > \log(2)$$

Pour n dans la région (ii),

$$\left| \log \left(\frac{x}{n} \right) \right| = \left| \log \left(\frac{n}{x} \right) \right| > \log \left(\frac{3}{2} \right)$$

Finalement pour n dans ces deux régions on a par exemple

$$\left| \log \left(\frac{x}{n} \right) \right| > \frac{1}{10}$$

On a alors :

$$\sum_{n < \frac{x}{2}} \frac{\ln(n)n^{-a}}{\left| \log \left(\frac{x}{n} \right) \right|} = O \sum_{n < \frac{x}{2}} \ln(n)n^{-a} = O(\zeta'(a)) = O\left(\frac{1}{(a-1)^2}\right) \quad (7.7)$$

En effet, ζ' a un pôle d'ordre 2 en 1, donc $(x-1)^2\zeta'(x)$ est continue (en tant que fonction réelle) sur par exemple $0 \leq x \leq 2$ et donc bornée. De même, on a

$$\sum_{n > \frac{3x}{2}} \frac{\ln(n)n^{-a}}{\left| \log \left(\frac{x}{n} \right) \right|} = O \sum_{n > \frac{3x}{2}} \ln(n)n^{-a} = O(\zeta'(a)) = O\left(\frac{1}{(a-1)^2}\right) \quad (7.8)$$

Pour n dans (ii), en posant $z = 1 - \frac{n}{x}$, on vérifie que $|z| \leq \frac{1}{2}$ et on peut développer en série entière l'expression :

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{x}{n} \right) &= \log(1-z)^{-1} \\ &= z \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \dots \right) \end{aligned}$$

Si $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$,

$$\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \dots \right) \geq 1$$

Si $-\frac{1}{2} \leq z \leq 0$,

$$\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \dots \right) = -\frac{\ln(1-z)}{z} > \frac{3}{4}$$

Finalement, il existe une constante c_1 (qui vaut par exemple $\frac{3}{4}$) telle que

$$\left| \log \left(\frac{x}{n} \right) \right| \geq c_1 z$$

Ainsi, $\frac{1}{\left| \log \left(\frac{x}{n} \right) \right|} \leq \frac{c_2}{|z|} \leq \frac{c_2 x}{|x-n|}$ et

$$\sum_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} \frac{\ln(n)n^{-a}}{\left| \log \left(\frac{x}{n} \right) \right|} = O \left(x \sum_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} \frac{\ln(n)n^{-a}}{|x-n|} \right) = O \left(x^{1-a} \log(x) \sum_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} \frac{1}{|x-n|} \right)$$

Notons $x = [x] + \delta$. Dans la somme, $|x-n|$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\delta, |\delta \pm 1|, |\delta \pm 2|, \dots, |\delta \pm \frac{[x]}{2}|$ donc

$$\sum_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} \frac{1}{|x-n|} < \left(\frac{1}{\delta} + \sum_{k=1}^{[x]} \frac{1}{k} \right) = O(\log(x))$$

Finalement, en combinant (7.7), (7.8) et les deux dernières équations, on obtient :

$$I_2 = O \left(\frac{x^a}{T} \left(\frac{1}{(a-1)^2} + x^{1-a} \log^2(x) \right) \right)$$

On a la même majoration pour I_4 (qui est valable pour T grand)

Estimation de I_3 et I_4

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_b^a -\frac{\zeta'(u+iT)}{\zeta(u+iT)} \frac{x^{u+iT}}{u+iT} du \\ |I_4| &< \int_b^a \left| \frac{\zeta'(u-iT)}{\zeta(u-iT)} \right| \frac{x^u}{|u-iT|} du \\ |I_4| &< K(a-b) \log^9(T) \frac{x^a}{T} \\ |I_4| &< 2K \log^9(T) \frac{x^a}{T} \end{aligned}$$

On obtient une majoration du même type pour I_3 . On a donc

$$I_3 = O \left(\frac{x^a}{T} \log^9(T) \right) \quad \text{et} \quad I_4 = O \left(\frac{x^a}{T} \log^9(T) \right)$$

Estimation de I_5

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_{-T}^T -\frac{\zeta'(b+it)}{\zeta(b+it)} \frac{x^{b+it}}{b+it} i dt \\ |I_5| &< \int_{-T}^T \left| -\frac{\zeta'(b+it)}{\zeta(b+it)} \right| \frac{x^b}{|b+it|} dt \\ |I_5| &< K x^b \log^9(T) \int_{-T}^T \frac{1}{\sqrt{b^2 + t^2}} dt \end{aligned}$$

Et on a $\int_{-T}^T \frac{1}{\sqrt{b^2+t^2}} dt = 2 \int_0^T \frac{1}{\sqrt{b^2+t^2}} dt = O\left(\int_{|b|}^{T+|b|} \frac{1}{t} dt\right) = O(\log(T))$

D'où finalement :

$$|I_5| = O\left(x^b \log^{10}(T)\right)$$

On combinant ces estimations,

$$\phi(x) - x = R(x)$$

avec

$$R(x) = O\left(\frac{x^a}{T} \left(\frac{1}{(a-1)^2} + x^{1-a} \log^2(x)\right) + \frac{x^a}{T} \log^9(T) + x^b \log^{10}(T)\right)$$

(si T est assez grand)

Il s'agit maintenant de choisir T en fonction de x de manière à avoir un reste aussi petit que possible : pour se « débarrasser » du terme en x^a , qui est prépondérant devant x , on pose $T = x^{a-b}$: on a alors $\frac{x^a}{T} = x^b$, terme négligeable devant x .

Demandons nous d'abord si un tel choix est possible. Comme $a-b = \frac{2c}{\log^9(T)}$ cela revient à résoudre l'équation

$$\begin{aligned} T &= x^{\frac{2c}{\log^9(T)}} \\ \log(T) &= \frac{2c}{\log^9(T)} \log(x) \\ \log^{10}(T) &= 2c \log(x) \\ T &= \exp\left[(2c \log(x))^{\frac{1}{10}}\right] \end{aligned}$$

On peut donc poser $T = x^{a-b}$. Le O précédent est alors valable lorsque x tend vers l'infini.

$$R(x) = O\left(x^b (\log^{18}(T) + \log^{20}(T)) + x^b \log^9(T) + x^b \log^{10}(T)\right)$$

En effet, $a-1 = \frac{c}{\log^9(T)}$ donc $\frac{1}{(a-1)^2} = O(\log^{18}(T))$

De plus, $\log(x) = O(\log^{10}(T))$ et $x^{1-a} = O(1)$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

Finalement, $R(x) = O(x^b \log^{20}(T))$ lorsque T (et donc x) tend vers l'infini.

$$\begin{aligned} O\left(x^b \log^{20}(T)\right) &= O\left(x^{1-\frac{c}{\log^9(T)}} \log^{20}(T)\right) \\ &= O\left(x \exp\left[-\frac{c}{\log^9(T)} \log(x) + 20 \log(\log(T))\right]\right) \\ &= O\left(x \exp\left[-\frac{1}{2} \log(T) + 20 \log(\log(T))\right]\right) \end{aligned}$$

Comme $\frac{-\frac{1}{2} \log(T) + 20 \log(\log(T))}{\log(T)} \rightarrow -\frac{1}{2}$ lorsque $T \rightarrow \infty$, il existe une constante c_3 (par exemple $\frac{1}{4}$) telle que

$$\begin{aligned}
O\left(x^b \log^{20}(T)\right) &= O\left(x \exp[-c_3 \log(T)]\right) \\
&= O\left(x \exp(-d (\log(x))^{\frac{1}{10}})\right)
\end{aligned}$$

On a donc bien l'existence d'une constante d telle que

$$\psi(x) = x + O\left(x \exp[-d (\log(x))^{\frac{1}{10}}]\right)$$

□

7.2 Le théorème de nombres premiers en progression arithmétique

Le théorème des nombres premiers en progression arithmétique donne le comportement asymptotique de la fonction $\psi(x; q, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n)$.

$$\begin{aligned}
\phi(x; q, a) &= \sum_{n \equiv a \pmod{q}} \Lambda(n) \chi_{[0; x]}(n) \\
&= \sum_{n \equiv a \pmod{q}} \Lambda(n) \chi_{[0; 1]} \left(\frac{n}{x} \right)
\end{aligned}$$

Or la fonction caractéristique de l'intervalle $[0; 1]$ peut être approximée par un majorant lisse d'amplitude très petite. Pour démontrer le théorème des nombres premiers en progression arithmétique, on va d'abord établir un résultat pour la somme lissée, où on remplace $\chi_{[0; 1]}$ dans la somme ci-dessus par un majorant lisse de $[0; 1]$, qui est une fonction suffisamment régulière (en particulier une fonction de Schwartz).

7.2.1 Résultats sur des sommes lisses

Théorème 7.2.1 *Soit $q \geq 1$, $a \geq 1$ tel que $(a, q) = 1$. Soit η une fonction de Schwartz. Alors il existe une constante c_1 telle pour tout y suffisamment grand, on ait :*

$$\sum_{n \equiv a \pmod{q}} \Lambda(n) \eta \left(\frac{n}{y} \right) = \frac{y \hat{\eta}(1)}{\phi(q)} + O \left(y \exp(-c \sqrt{\log(y)}) \right) \quad (7.9)$$

où $\hat{\eta}$ désigne la transformée de Mellin de η .

La constante du O dépend de η uniquement.

DÉMONSTRATION

Soit η une fonction de Schwartz (on peut alors définir sa transformée de Mellin).

$$\sum_{n \equiv a \pmod{q}} \Lambda(n) \eta \left(\frac{n}{y} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\Lambda(n) \eta \left(\frac{n}{y} \right) \times \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} \chi(\bar{a}) \chi(n) \right]$$

On a ainsi introduit la condition $n \equiv a \pmod{q}$ grâce à la formule (2.1).

$$\begin{aligned} \sum_{n \equiv a \pmod{q}} \Lambda(n) \eta\left(\frac{n}{y}\right) &= \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} \bar{\chi}(a) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \Lambda(n) \chi(n) \eta\left(\frac{n}{y}\right) \\ &= \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} \bar{\chi}(a) \psi_\eta(y, \chi) \end{aligned}$$

avec la notation $\psi_\eta(y, \chi) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \Lambda(n) \chi(n) \eta\left(\frac{n}{y}\right)$

D'après la formule (3.16), on a :

$$\psi_\eta(y, \chi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(2)} -\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} y^s \hat{\eta}(s) ds$$

On veut maintenant déplacer le contour d'intégration vers la gauche et pour cela, il faut trouver une région la plus à gauche possible où on peut définir l'intégrale de $-\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} y^s \hat{\eta}(s)$: on va pour cela utiliser la zone sans zéros obtenue dans le théorème **6.3.1**, où l'intégrande est holomorphe.

On pose $\sigma(t) = \frac{1}{2c(\log(q(|t|+2)))}$ comme dans le théorème **6.3.1**. $L(\chi, s)$ ne possède pas de zéro dans la région $\sigma > 1 - 2\sigma(t)$.

Soit \mathcal{Z} le contour défini par $s(t) = 1 - d\sigma(t) + it$. A droite de \mathcal{Z} , $-\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)}$:

- n'a aucun pôle si χ est non trivial
- possède un pôle simple en 1 de résidu 1 si χ est trivial

On considère le contour fermé suivant, \mathcal{C}_T composé du segment [AB] compris entre $2 - iT$ et $2 + iT$, du segment [BC] compris entre $2 + iT$ et $s(T)$, de la portion de courbe $s(t)$ où t va de T à $-T$, et du segment [DA] d'extrémités $s(-T)$, $2 - iT$.



D'après le théorème des résidus on a (en appelant g l'intégrande)

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_T} -\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} y^s \hat{\eta}(s) ds = \text{res}(g, 1) = \delta(\chi) \hat{\eta}(1) y \quad (7.10)$$

On peut ensuite découper le contour \mathcal{C}_T verticalement et horizontalement pour évaluer chaque partie. Evaluons d'abord l'intégrale sur les bords horizontaux.

Le contour est contenu dans la région $\sigma \geq 1 - \sigma(t)$ donc d'après (6.13), il existe une constante C telle que

$$\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} \leq C \frac{1}{|s-1|} + O(\log^2(q|s|))$$

Sur le bord supérieur (le raisonnement serait le même pour le bord inférieur) on a par exemple $s = t + iT$ avec $t \in [s(T); 2]$. Lorsque $T > 1$, on a $\frac{1}{|s-1|} = O(1)$.

$$|s| = \sqrt{\sigma^2 + T^2} \leq \sigma + T \leq 2 + T \text{ donc } (\log(q|s|))^2 = O((\log q(2+T))^2)$$

On a donc

$$\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} = O((\log q(2+T))^2)$$

sur le bord supérieur, pour $T > 1$. D'après la proposition **3.4.1** donnant la décroissance de la transformée de Mellin :

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |s|^k \hat{f}(s) = 0$$

pour tout k . Par exemple,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} |\sigma + iT|^2 |\hat{\eta}(\sigma + iT)| = 0 \text{ donc } \lim_{T \rightarrow \infty} (1+T)^2 |\hat{\eta}(\sigma + iT)| = 0 \text{ et}$$

$$\hat{\eta}(\sigma + iT) = O\left(\left(\frac{1}{1+T}\right)^2\right)$$

lorsque $T \rightarrow \infty$

Finalement, on peut majorer l'intégrale sur le bord supérieur :

$$\begin{aligned} \left| \int_{s(T)}^{2+iT} -\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} \hat{\eta}(s) y^s ds \right| &\leq \int_{s(T)}^{2+iT} \left| \frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} \right| |\hat{\eta}(s)| y^\sigma ds \\ &= O\left(y^2 \int_{s(T)}^{2+iT} (\log(q(T+2)))^2 (1+T)^{-2} ds\right) \\ &= O\left(\frac{y^2 (\log(q(T+2)))^2}{(1+T)^2}\right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque $T \rightarrow \infty$

L'intégrale sur les côtés horizontaux tend donc vers 0 lorsque $T \rightarrow \infty$ donc l'égalité (7.10) devient :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(2)} -\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} y^s \hat{\eta}(s) ds - \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{Z}} -\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} y^s \hat{\eta}(s) ds = \delta(\chi) \hat{\eta}(1) y$$

D'où l'égalité

$$\psi_{\eta}(y, \chi) = \delta(\chi) \hat{\eta}(1) y + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{Z}} -\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} y^s \hat{\eta}(s) ds$$

La somme $\sum_{n \equiv a \pmod{q}} \Lambda(n) \eta\left(\frac{n}{y}\right) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} \chi(\bar{a}) \psi_{\eta}(y, \chi)$ qu'on veut évaluer est une somme finie à $\phi(q)$ termes et on peut remplacer chaque $\phi_{\eta}(y, \chi)$ par son expression précédente. La contribution $\delta(\chi) \hat{\eta}(1) y$ n'est comptée que pour le caractère trivial. On a donc :

$$\sum_{n \equiv a \pmod{q}} \Lambda(n) \eta\left(\frac{n}{y}\right) = \frac{1}{\phi(q)} \delta(\chi) \hat{\eta}(1) y + \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{Z}} -\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} y^s \hat{\eta}(s) ds$$

Comme la somme sur les caractères est une somme finie, pour montrer le théorème, il suffit de montrer que si χ est un caractère quelconque modulo q on a

$$I = \int_{\mathcal{Z}} -\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} y^s \hat{\eta}(s) ds = O\left(y \exp(-c_1 \sqrt{\log(y)})\right)$$

Montrons ce résultat :

$$I = y \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{L'}{L}(\chi, 1 - d\sigma(t) + it) \hat{\eta}(1 - d\sigma(t) + it) y^{-d\sigma(t) + it} dt$$

Pour évaluer l'intégrale, intégrons séparément sur les zones $|t| \leq A$ et $|t| > A$, où $A > 0$ est une constante qui sera choisie ultérieurement pour obtenir la majoration la plus fine possible.

Si $|t| \leq A$

D'après (6.13), on a

$$\begin{aligned} \frac{L'}{L}(\chi, 1 - d\sigma(t) + it) &= O((\log(q|1 - d\sigma(t) + it|))^2) = O((\log(q(|t| + 2)))^2) \\ &= O((\log(q(A + 2)))^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(1 - d\sigma(t) + it) &= \int_0^{\infty} \eta(x) x^{1 - d\sigma(t) + it} dx = O\left(\int_0^{\infty} \eta(x) x^{1 - d\sigma(t)} dx\right) \\ &= O\left(\int_0^1 \eta(x) x^{1 - \frac{d}{2c \log(2q)}} + \int_1^{\infty} \eta(x) x^{1 - d\sigma(A)}\right) = O_{\eta}(1) \end{aligned}$$

$$y^{-d\sigma(t) + it} = O\left(y^{-d\sigma(t)}\right) = O\left(y^{-d\sigma(A)}\right) \text{ si } y > 1$$

On a ainsi :

$$\int_{-A}^A -\frac{L'}{L}(\chi, 1 - d\sigma(t) + it) \hat{\eta}(1 - d\sigma(t) + it) y^{-d\sigma(t) + it} dt = O\left(A(\log q(A + 2))^2 \exp(-d\sigma(A) \log(y))\right)$$

Si $|t| > A$ on a

$$\begin{aligned}\frac{L'}{L}(\chi, 1 - d\sigma(t) + it) &= O((\log(q|1 - d\sigma(t) + it|))^2) \\ &= O((\log(q(|t| + 2)))^2) \\ y^{-d\sigma(t)+it} &= O(y^{-d\sigma(t)}) = O(1)\end{aligned}$$

D'après la propriété de décroissance de la transformée de Mellin, on a également

$$\hat{\eta}(1 - d\sigma(t) + it) = O(\eta, \epsilon (1 + |t|)^{-2-\epsilon})$$

pour tout $\epsilon > 0$.

Soit $\epsilon > 0$ quelconque mais fixé. On a :

$$\begin{aligned}\int_{|t|>A} -\frac{L'}{L}(\chi, 1 - d\sigma(t) + it) \hat{\eta}(1 - d\sigma(t) + it) y^{-d\sigma(t)+it} dt &= O\left(\int_{|t|>A} (\log(q(|t| + 2)))^2 (1 + |t|)^{-2-\epsilon} dt\right) \\ &= O\left(\int_{|t|>A} \frac{(\log(q(|t| + 2)))^2}{(1 + |t|)^\epsilon} \frac{1}{(1 + |t|)^2} dt\right)\end{aligned}$$

Or $\frac{(\log(q(|t|+2)))^2}{(1+|t|)^\epsilon} = O(1)$, donc

$$\int_{|t|>A} -\frac{L'}{L}(\chi, 1 - d\sigma(t) + it) \hat{\eta}(1 - d\sigma(t) + it) y^{-d\sigma(t)+it} dt = O\left(\int_{|t|>A} \frac{dt}{(1 + |t|)^2}\right) = O\left(\frac{1}{1 + A}\right)$$

En regroupant ces deux majorations, on conclut que

$$I = O\left(y\left[\frac{1}{1 + A} + A(\log(q(A + 2)))^2 \exp\left(-\frac{d \log(y)}{2c \log(q(A + 2))}\right)\right]\right)$$

Il s'agit maintenant de choisir A pour obtenir la majoration souhaitée : on aimerait se ramener à $\log(q(A + 2))$ de l'ordre de $\sqrt{\log(y)}$. On fixe une constante c_2 telle que $c_2^2 < \frac{d}{2c}$ (on verra pourquoi plus loin)

On fixe A défini par

$$\begin{aligned}\log(q(A + 2)) &= c_2 \sqrt{\log(y)} \\ A &= \frac{1}{q} \exp(c_2 \sqrt{\log(y)}) - 2\end{aligned}$$

Pour y assez grand, on peut définir $A > 0$ ainsi. On a alors pour y assez grand

$$I = O\left(y\left[\frac{1}{1 + A} + A c_2^2 \log(y) \exp\left(-\frac{d}{2c c_2} \sqrt{\log(y)}\right)\right]\right)$$

D'une part

$$\frac{1}{1+A} = \frac{1}{\frac{1}{q} \exp(c_2 \sqrt{\log(y)}) - 1} = O\left(\exp(-c_2 \sqrt{\log(y)})\right)$$

D'autre part, en posant $B = Ac_2^2 \log(y) \exp\left(-\frac{d}{2c} \sqrt{\log(y)}\right)$ on a

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{q} \exp(c_2 \sqrt{\log(y)}) c_2^2 \log(y) \exp\left(-\frac{d}{2cc_2} \sqrt{\log(y)}\right) - 2c_2^2 \log(y) \exp\left(-\frac{d}{2cc_2} \sqrt{\log(y)}\right) \\ &= \frac{c_2^2}{q} \log(y) \exp\left(-\left(\frac{d}{2cc_2} - c_2\right) \sqrt{\log(y)}\right) - 2c_2^2 \log(y) \exp\left(-\frac{d}{2cc_2} \sqrt{\log(y)}\right) \\ &= O\left(\log(y) \exp\left(-\left(\frac{d}{2cc_2} - c_2\right) \sqrt{\log(y)}\right)\right) \end{aligned}$$

Posons $2c_1 = \min\left(c_2, \frac{d}{2cc_2} - c_2\right)$. $c_1 > 0$ car on a choisi $c_2^2 < \frac{d}{2c}$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+A} &= O\left(\exp(-c_1 \sqrt{\log(y)})\right) \\ Ac_2^2 \log(y) \exp\left(-\frac{d}{2c} \sqrt{\log(y)}\right) &= O\left(\log(y) \exp(-2c_1 \sqrt{\log(y)})\right) \\ &= O\left(y \exp(-c_1 \sqrt{\log(y)})\right) \end{aligned}$$

valable lorsque y est assez grand (et la constante du O dépend de η).

On a donc bien

$$I = O\left(y \exp(-c_1 \sqrt{\log(y)})\right)$$

□

7.2.2 Démonstration du théorème

Théorème 7.2.2 (théorème des nombres premiers en progression arithmétique) *Soit des entiers $q \geq 1$ et a tel que $(a, q) = 1$. Alors on a :*

$$\psi(x; q, a) \sim \frac{x}{\phi(q)}$$

lorsque $x \rightarrow \infty$. D'après la partie 3.2.2, ce résultat est équivalent à

$$\pi(x; q, a) \sim \frac{1}{\phi(q)} \frac{x}{\log(x)}$$

lorsque $x \rightarrow \infty$

DÉMONSTRATION

Soit η_δ un majorant lisse d'amplitude δ de $[0, 1]$.

$$\begin{aligned}\phi(x; q, a) &= \sum_{n \equiv a \pmod{q}} \Lambda(n) \chi_{[0;1]} \left(\frac{n}{x} \right) \\ &\leq \sum_{n \equiv a \pmod{q}} \Lambda(n) \eta_\delta \left(\frac{n}{x} \right) \sim \frac{x \hat{\eta}(1)}{\phi(q)}\end{aligned}$$

d'après (7.13). En effet, $y^{\beta_e} = o(y)$ lorsque $y \rightarrow \infty$ (car β_e est réel et < 1).

On a donc pour tout δ ,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x; q, a)}{x} \leq \frac{\hat{\delta}(1)}{\phi(q)} \quad (7.11)$$

Et en faisant tendre δ vers 0 on obtient :

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x; q, a)}{x} \leq \frac{1}{\phi(q)}$$

η_δ est un majorant lisse d'amplitude $1 + \delta$. En particulier, η est à support compact dans $[0; 1 + \delta]$ et $\eta_\delta = 1$ sur $[0, 1]$. Posons $\epsilon_\delta(x) = \eta_\delta((1 + \delta)x)$. La fonction ϵ_δ est C^∞ , à support compact dans $[0; 1]$ et vérifie $\epsilon_\delta(x) = 1$ si $x \leq \frac{1}{1 + \delta}$.

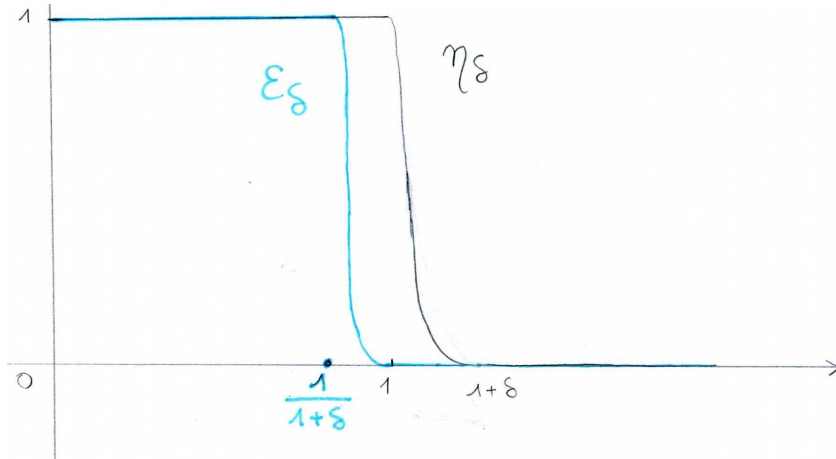


FIG. 7.3 – Fonctions approchant $\chi_{[0,1]}$

Lorsque δ tend vers 0, les fonctions ϵ_δ et η_δ tendent vers $\chi_{[0,1]}$.

$$\begin{aligned}\phi(x; q, a) &\geq \sum_{n \equiv a \pmod{q}} \Lambda(n) \epsilon_\delta \left(\frac{n}{x} \right) \\ &= \sum_{n \equiv a \pmod{q}} \Lambda(n) \eta_\delta \left((1 + \delta) \frac{n}{x} \right)\end{aligned}$$

Posons $y = \frac{x}{1 + \delta}$. $y \rightarrow \infty$ ssi $x \rightarrow \infty$. Alors

$$\phi(x; q, a) \geq \sum_{n \equiv a \pmod{q}} \Lambda(n) \eta_\delta \left(\frac{n}{y} \right) \sim \frac{y \hat{\eta}_\delta(1)}{\phi(q)} = \frac{x \hat{\eta}_\delta(1)}{(1 + \delta) \phi(q)}$$

lorsque $x \rightarrow \infty$. En faisant ensuite tendre δ vers 0 on obtient :

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x; q, a)}{x} \geq \frac{1}{\phi(q)} \quad (7.12)$$

On déduit de (7.11) et (7.12) que $\frac{\psi(x; q, a)}{x}$ possède une limite et que cette limite vaut $\frac{1}{\phi(q)}$. On a donc

$$\pi(x; q, a) \sim \frac{1}{\phi(q)} \frac{x}{\log(x)}$$

lorsque x tend vers l'infini.

□

Remarque

Vu le terme d'erreur mis en avant dans le théorème **7.3.1**, on peut en fait démontrer le théorème des nombres premiers en progression arithmétique avec un terme d'erreur :

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\phi(q)} + O \left(x \exp(-c_1 \sqrt{\log(x)}) \right)$$

Pour passer à cette version « non lissée » du théorème, on peut utiliser des fonctions η de lissage particulières, que nous ne détaillerons pas ici.

Huitième partie

Hypothèse de Riemann et amélioration du terme d'erreur pour le théorème des nombres premiers

8.1 Retour sur les termes d'erreur des théorèmes précédents

Dans un premier temps, on a démontré dans la partie précédente le théorème des nombres premiers en donnant :

$$\psi(x) = x + O\left(x \exp\left(-d(\log(x))^{\frac{1}{10}}\right)\right)$$

On a ensuite démontré le théorème des nombres premiers en progression arithmétique d'une autre manière et obtenu le terme d'erreur suivant :

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\phi(x)} + O\left(x \exp\left(-c_1 \sqrt{\log(x)}\right)\right)$$

Soit en prenant $q = 2$ et $a = 1$, on trouve :

$$\psi(x) = x + O\left(x \exp\left(-c_1 \sqrt{\log(x)}\right)\right)$$

La seconde démonstration nous a donné un terme d'erreur plus précis. En effet :

$$\frac{x \exp\left(-c_1 \sqrt{\log(x)}\right)}{x \exp\left(-d(\log(x))^{\frac{1}{10}}\right)} = \exp\left(\sqrt{\log(x)}\left(-c_1 + d(\log(x))^{-\frac{2}{5}}\right)\right)$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-c_1 + d(\log(x))^{-\frac{2}{5}}\right) = c_1 < 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \exp\left(-c_1 \sqrt{\log(x)}\right)}{x \exp\left(-d(\log(x))^{\frac{1}{10}}\right)} = 0$$

Dans deuxième démonstration, on avait une zone sans zéros de ζ plus éloignée de la droite verticale $\sigma = 1$ que dans la première. **On voit donc que plus la zone sans zéros utilisée est située à gauche, meilleur est le terme d'erreur.**

8.2 Hypothèse de Riemann et théorème des nombres premiers

La conjecture de Riemann, qui dit que tous les zéros non triviaux de ζ sont sur la droite $Re(s) = \frac{1}{2}$ nous fournit alors une zone sans zéros pour ζ bien plus grande que celles utilisées dans les démonstrations précédentes et on obtient alors un bon terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers.

C'est ce que nous pouvons constater avec l'équivalence suivante :

Proposition 8.2.1 *Les énoncés ci-dessous sont équivalents :*

- (1) Les zéros non triviaux ρ de $\zeta(s)$ vérifient $\beta = \frac{1}{2}$
- (2) Pour tout $\epsilon > 0$, on a si $x \geq 2$

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)$$

où la constante implicite dépend de ϵ .

(3) Pour tout $\epsilon > 0$, on a si $x \geq 2$

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)$$

où la constante implicite dépend de ϵ .

On note parfois $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt$ le logarithme intégral. On donne souvent le théorème des nombres premiers sous la forme $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ mais on a aussi $\psi(x) \sim Li(x)$.

DÉMONSTRATION

(1) \Rightarrow (2) On utilise directement la technique du déplacement du contour d'intégration comme on l'avait exposée dans l'exemple de la partie 3.6.

Si ϕ est une fonction de Schwartz, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{(2)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \hat{\phi}(s) x^s ds &= x + \frac{1}{2i\pi} \int_{(\frac{1}{2}+\epsilon)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \hat{\phi}(s) x^s ds \\ &= x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) \end{aligned} \quad (8.1)$$

Or, si η_δ est un majorant lisse de $[0; 1]$ d'amplitude $1 + \delta$, on a :

$$\psi(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(2)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{(2)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \hat{\eta}_\delta(s) x^s ds$$

En faisant un passage à la limite on obtient :

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)$$

En réalité, on ne peut pas faire un passage à la limite de cette manière car le O de la formule (8.1) dépend de δ ... Il faut utiliser d'autres fonctions de lissages que les majorants lisses pour passer de la version lissée à la version non lissée du théorème des nombres premiers. (cf. remarque à la fin du chapitre précédent)

On montre l'équivalence de (2) et (3) en utilisant une transformation d'Abel, de la même façon que dans la partie **3.2.2** où on avait fait le lien entre la fonction ψ et le théorème des nombres premiers. Montrons par exemple que (2) \Rightarrow (3).

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)} + O(\sqrt{x} \log x) \\ &= \frac{\psi(x)}{\log(x)} - \frac{\psi(2)}{\log(2)} + \int_2^x \frac{\psi(t)}{t(\log t)^2} dt + O(\sqrt{x} \log(x)) \\ &= \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log(2)} + \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} + O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+\epsilon}}{\log(x)} + \int_2^x \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}-\epsilon}(\log t)^2}\right) \\ &= \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) \end{aligned}$$

Montrons maintenant que (2) \Rightarrow (1). D'après (3.1) on a :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx$$

Soit $s = \sigma + it$ avec $\frac{1}{2} + \epsilon < \sigma < 1$.

On a $\psi(x) = x + \delta(x)$ avec $\delta(x) = O\left(x^{\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}}\right)$ alors :

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= s \int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx + s \int_1^\infty \frac{\delta(x)}{x^{s+1}} dx \\ &= \frac{s}{s-1} + s \int_1^\infty \frac{\delta(x)}{x^{s+1}} dx \end{aligned}$$

La fonction $\frac{s}{s-1}$ est holomorphe sur $\frac{1}{2} + \epsilon < \sigma < 1$. Soit $g(s) = \int_1^\infty \frac{\delta(x)}{x^{s+1}} dx$.

$$\left| \frac{\delta(x)}{x^{s+1}} \right| \leq K \frac{x^{\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}}}{x^{\sigma+1}} = K x^{-\sigma + \frac{\epsilon}{2} - \frac{1}{2}} \leq x^{-1 - \frac{\epsilon}{2}}$$

Comme on a une majoration de l'intégrande par une fonction intégrable, g est holomorphe. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ est holomorphe sur $\frac{1}{2} + \epsilon < \sigma < 1$. Comme ζ n'a pas de pôle dans cette région, ζ ne possède aucun zéro sur $\frac{1}{2} + \epsilon < \sigma < 1$. On a aussi vu précédemment que ζ ne s'annulait pas sur $\sigma = 1$.

ζ n'a donc pas de zéro sur $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$. D'après l'équation fonctionnelle, les zéros non triviaux de ζ sont symétriques par rapport à $\sigma = \frac{1}{2}$. Les seuls zéros triviaux éventuels sont donc sur la droite $\beta = \frac{1}{2}$.

□

8.3 Hypothèse de Riemann généralisée

Il existe une conjecture plus générale que l'hypothèse de Riemann présentée ci-dessus, faisant intervenir les zéros des fonctions L de Dirichlet. Cette hypothèse de Riemann généralisée est équivalente à un bon terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers en progression arithmétique.

Proposition 8.3.1 (Formulations équivalentes de l'Hypothèse de Riemann Généralisée) *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Pour tout caractère χ primitif modulo q , les zéros non triviaux ρ de $L(\chi, s)$ vérifient $\beta = \frac{1}{2}$.*
- (2) *Pour tout a tel que $(a, q) = 1$ on a pour $x \geq 2$*

$$\psi(q; q, a) = \frac{x}{\phi(q)} + O\left(x^{\frac{1}{2} + \epsilon}\right)$$

où la constante implicite dépend de ϵ .

Conclusion

Pour conjecturer le théorème des nombres premiers en 1792, Gauss avait observé, en se fondant sur des données numériques, que la probabilité qu'un nombre n soit premier était d'environ $\frac{1}{\log(n)}$. C'est de là qu'il a tiré l'estimation bien connue $\pi(n) \sim \frac{n}{\log(n)}$. Avec ce mémoire, j'ai pu comprendre pourquoi il a fallu attendre un siècle et le développement de l'analyse complexe pour pouvoir démontrer ce résultat.

J'ai en effet pu découvrir différentes techniques utiles en théorie analytique des nombres. La technique de la transformation d'Abel revient assez fréquemment, pour passer d'une série de Dirichlet à une fonction sommatoire. L'introduction des caractères de Dirichlet est aussi très importante, car ils interviennent dans les progressions arithmétiques. Enfin, ce sont des théories comme celles de Fourier ou Mellin qui permettent de démontrer la formule fondamentale exprimant une fonction sommatoire lissée en fonction de la série de Dirichlet associée à l'aide d'une intégrale dans le plan complexe.

Cette formule est la base des deux démonstrations que j'ai données des théorèmes des nombres premiers. J'ai d'abord montré le théorème des nombres premiers était strictement équivalent à la non-annulation de ζ sur $\sigma = 1$ en me servant d'un théorème dû à Wiener et Ikehara. Je me suis ensuite concentrée sur l'obtention d'un terme d'erreur. Pour cela, je me suis servie des estimations de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ proposées notamment par Ayoub ou Titchmarsh dans leurs ouvrages datant respectivement de 1963 et 1986.

L'approche utilisée dans la démonstration de théorème des nombres premiers en progression arithmétique est plus moderne, elle a été présentée d'une manière un peu différente par Emmanuel Kowalski dans *Un cours de théorie analytique des nombres* (2004). Elle utilise les propriétés des fonctions entières d'ordre 1, et permet d'obtenir un terme d'erreur meilleur que le précédent.

Enfin ce mémoire m'a permis - et c'était là son objectif initial - de comprendre le lien entre la formulation bien connue de la conjecture de Riemann, en termes de zéros de la fonction ζ et sa formulation équivalente qui donne un bon terme d'erreur pour le théorème des nombres premiers.

Un grand merci à Henri Carayol pour toute l'aide qu'il m'a apportée ; pour les références qu'il m'a fournies, les questions auxquelles il a patiemment répondu, quand bien même elles étaient parfois plus analytiques qu'arithmétiques...

Un grand merci à mes parents et mes amis, qui m'ont soutenue et écoutée parler de choses plus ou moins incompréhensibles, tout en admirant mes « hiéroglyphes » ...

Bibliographie

- [1] Michèle Audin, *Analyse complexe*, 2007
- [2] Raymond Ayoub, *An introduction to the analytic theory of numbers*, 1963
- [3] Pierre Colmez, *Eléments d'analyse et d'algèbre*
- [4] Hubert Delange, *Distribution des nombres premiers et fonction $\zeta(s)$* , 1960
- [5] Jean Dieudonné, *Calcul infinitésimal*
- [6] Claude Gasquet, Patrick Witomski, *Analyse de Fourier et applications*
- [7] Emmanuel Kowalski, *Un cours de théorie analytique des nombres*, 2004
- [8] Jean-Pierre Serre, *Cours d'arithmétique*, 1988
- [9] E.C. Titchmarsh, *Theory of functions*, 1939
- [10] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, 1986