

La fonction zêta de Riemann

PAR ARNAUD DHALLEWYN

(2013)

Les séries de Dirichlet sont définies par :

$$L(a, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

avec $s \in \mathbb{C}$, et $a = (a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes.

Un cas particulier de série de Dirichlet est la série

$$L(1, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

tel que $s \in \mathbb{C}$ et $\operatorname{Re}(s) > 1$. C'est-à-dire la fonction zêta de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

convergente pour $s > 1$. Extension de la fonction à valeur réelle introduite par Leonhard Euler :

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

où $k \in \mathbb{R}$.

Définitions formelles.

Expression intégrale.

La fonction zêta de Riemann s'écrit aussi sous forme intégrale, pour $\sigma > 1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{(-\ln u)^{s-1}}{1-u} du$$

soit encore :

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

Démonstration.

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{n}\right)^{s-1} \frac{du}{n}$$

en posant $u = nt$, alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{n}\right)^{s-1} \frac{du}{n} = \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt$$

Puis d'après le théorème de convergence monotone, on a :

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t}{1-e^{-t}} t^{s-1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

□

Citons d'autres formules intégrales :

$$(\zeta(s))^2 = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{-(k+1)t}}{1 - e^{-(k+1)t}} dt$$

Pour $s \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$:

$$\zeta(s) = \frac{(-1)^s}{s(s-2)!} \int_0^1 \left(\frac{\log(1-t^{s-1})}{t} \right)^s dt$$

Pour $\sigma > 1$:

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{\Gamma(1+s)} \int_0^{\infty} t^s \operatorname{csch}^2(t) dt$$

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{\Gamma(s+1)} \int_0^{\infty} t^s \operatorname{csch}^2(t) dt$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{2(1-2^{-s})\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \operatorname{csch}(t) dt$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$$

pour $0 < \sigma < 1$, on a la formule :

$$\zeta(s) = -\frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \log x \right\} x^{-s} dx$$

$$\log(\zeta(s)) = \int_2^{\infty} \frac{\pi(t)}{t(t^2-1)} dt$$

formule que l'on démontrera plus tard.

Pour $\sigma > 0$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1-2^{1-s})\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

$$\zeta(s) = \frac{n^{1-s}}{s-1} - s \int_n^{\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt + \sum_{k=1}^n k^{-s}$$

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{(1-2^{1-s})\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} \operatorname{sech}(t) dt$$

Pour $\sigma > -1$:

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{(1-2^{1-s})\Gamma(s+1)} \int_0^\infty t^s \operatorname{sech}^2(t) dt$$

Citons aussi :

$$\zeta(s) = 2 \int_0^\infty \frac{\sin(s \tan^{-1}(t))}{(t^2+1)^{s/2}(e^{2\pi t}-1)} dt + \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1}$$

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{1-2^{1-s}} \int_0^\infty \frac{\cos(s \tan^{-1}(t))}{(t^2+1)^{s/2} \cosh\left(\frac{\pi t}{2}\right)} dt$$

Pour $0 < \sigma < 1$:

$$\zeta(s) = -s \int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{frac}\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

Maintenant avec une intégrale double pour $\sigma > 3$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(-\log(t\eta))^{s-2}}{1-t\eta} dt d\eta$$

Formule de Landau.

Pour tout s :

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = 1 - \frac{1}{2}s\{\zeta(s+1) - 1\} - \frac{s(s+1)}{2.3}\{\zeta(s+2) - 1\} - \dots$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2}s\{\zeta(s+1) - 1\} - \frac{s(s+1)}{2.3}\{\zeta(s+2) - 1\} - \dots \\ &= 1 - \frac{1}{s-1} \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^{s-1}} \left\{ \frac{s(s-1)}{1-2} \frac{1}{n^2} + \frac{(s-1)s(s+1)}{1.2.3} \frac{1}{n^3} + \dots \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{s-1} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{s-1}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-s} - 1 - \frac{s-1}{n} \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{s-1} \sum_{n=2}^\infty \left\{ \frac{1}{(n-1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} - \frac{s-1}{n^s} \right\} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

En effet :

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^{\sigma-1}} \sum_{k \geq 0} \frac{|s| \dots (|s|+k)}{(k+1)!} \frac{1}{n^{k+2}} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\sigma} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-|s|} - 1 \right\}$$

converge $\forall s$. □

Première intégrale de chemin.

$$\zeta(z) = \frac{1}{2 \sin \pi z \Gamma(z)} i \int_{\infty-i0}^{\infty+i0} \frac{(-\lambda)^{z-1}}{e^\lambda - 1} d\lambda$$

Démonstration.

Considérons l'intégrale

$$\int_{\infty-i0}^{\infty+i0} \frac{(-\lambda)^{z-1}}{e^\lambda - 1} d\lambda = (e^{-i\pi z} - e^{i\pi z}) \int_0^\infty \frac{(-t)^{z-1}}{e^t - 1} dt = -2i \sin(\pi z) \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

et

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(z) \zeta(z)$$

d'où :

$$\zeta(z) = \frac{1}{2 \sin \pi z \Gamma(z)} i \int_{\infty-i0}^{\infty+i0} \frac{(-\lambda)^{z-1}}{e^\lambda - 1} d\lambda$$

avec $z \neq 1$.

□

Seconde intégrale de chemin.

$$\zeta(z) = -\frac{\Gamma(1-z)}{2i\pi} \int_{\infty-i0}^{\infty+i0} \frac{(-\lambda)^{z-1}}{e^\lambda - 1} d\lambda$$

Démonstration.

Soit

$$\zeta(z) = \frac{1}{2 \sin \pi z \Gamma(z)} i \int_{\infty-i0}^{\infty+i0} \frac{(-\lambda)^{z-1}}{e^\lambda - 1} d\lambda \Leftrightarrow \zeta(z) = \frac{-1}{2i \sin \pi z \Gamma(z)} \int_{\infty-i0}^{\infty+i0} \frac{(-\lambda)^{z-1}}{e^\lambda - 1} d\lambda$$

et avec la formule des compléments :

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

On obtient :

$$\zeta(z) = \frac{-1}{2i \sin \pi z \Gamma(z)} \int_{\infty-i0}^{\infty+i0} \frac{(-\lambda)^{z-1}}{e^\lambda - 1} d\lambda$$

□

Prolongement analytique.

Théorème.

La fonction $\zeta(s)$ est prolongeable analytiquement en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} ayant pour seule singularité un pôle simple, en $s=1$, de résidu 1.

Démonstration. (Avec une intégrale sur \mathbb{R}^+)

On sait que

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt \Leftrightarrow \zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

en décomposant :

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

Où la seconde intégrale est une fonction holomorphe de s .

Et $\forall t$ tel que $|t| < 2\pi$:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{\mathcal{B}_n t^n}{n!}$$

en remplaçant dans la première intégrale et en intégrant terme à terme, on obtient :

$$\zeta(s) = \frac{1}{(s-1)\Gamma(s)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n!(n+s-1)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

la série est convergente et définit une fonction holomorphe sauf aux entiers négatifs ou nuls. En effet lorsque $s \neq -k$, le rayon de convergence de la série entière de coefficient $\frac{\mathcal{B}_n}{n!}$, n'est pas modifié lorsque l'on divise ses coefficients par les $n + s - 1$. Au voisinage d'un entier négatifs, elle est la somme d'une fonction holomorphe et du terme

$$\frac{\mathcal{B}_{k+1}}{(k+1)!(s+k)}$$

Quand $s \rightarrow -k$, comme $\frac{1}{\Gamma(s)} \rightarrow 0$, $\zeta(s)$ est par conséquent la somme d'une fonction qui tend vers 0 et du terme :

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \frac{\mathcal{B}_{k+1}}{(k+1)!(s+k)} \underset{s \rightarrow -k}{\sim} \frac{s+k}{\text{Res}(\Gamma, -k)} \frac{\mathcal{B}_{k+1}}{(k+1)!(s+k)} = (-1)^k k! \frac{\mathcal{B}_{k+1}}{(k+1)!}$$

Ainsi, on a le prolongement analytique de zêta en une fonction méromorphe sur tout \mathbb{C} , sauf au point $s = 1$. \square

Démonstration. (Par une intégrale de contour)

$\forall s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

On définit $h(s)$ tel que :

$$h(s) = \oint_{\gamma_v} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$$

pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(s) > 1$. On note $\gamma_v = \gamma_{1,v} \cup \gamma_{2,v} \cup \gamma_{3,v}$. Où chaque lacet représentent respectivement la demi-droite dont les points ont pour argument 0, décrite de $+\infty$ à v ; le cercle de rayon v et de centre 0, dont l'argument des points croît de 0 à 2π ; et enfin la demi-droite dont les points ont pour argument 2π , décrite de v à $+\infty$.

$h(s)$ est donc holomorphe sur tout \mathbb{C} pour $0 < v < 2\pi$ et avec $e^u - 1 \neq 0$ et on a :

$$h(s) = \int_{\gamma_{1,v}} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du + \int_{\gamma_{2,v}} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du + \int_{\gamma_{3,v}} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$$

et :

$$\int_{\gamma_{1,v}} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du = \int_{+\infty}^v \frac{r^{s-1}}{e^r - 1} dr$$

ainsi :

$$\lim_{v \rightarrow 0} \int_{\gamma_{1,v}} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du = - \int_0^{+\infty} \frac{r^{s-1}}{e^r - 1} dr = -\zeta(s)\Gamma(s)$$

de même on a

$$\int_{\gamma_{2,v}} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du = \mathcal{O}(v^{\operatorname{Re}(s)-1})$$

ainsi :

$$\lim_{v \rightarrow 0} \int_{\gamma_{2,v}} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du = 0$$

Et enfin :

$$\int_{\gamma_{3,v}} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du = \int_v^{+\infty} \frac{r^{s-1} e^{2i\pi(s-1)}}{e^r - 1} dr \xrightarrow{v \rightarrow 0} e^{2i\pi(s-1)} \zeta(s) \Gamma(s)$$

et du fait que h est indépendante de v on a donc :

$$h(s) = (e^{2i\pi(s-1)} - 1) \zeta(s) \Gamma(s)$$

Avec les formules d'Euler on obtient :

$$e^{2i\pi(s-1)} - 1 = 2i \sin(\pi(s-1)) e^{i\pi(s-1)} = 2i \sin(\pi s) e^{i\pi s}$$

alors en substituant l'expression on aura :

$$h(s) = 2i e^{i\pi s} \sin(\pi s) \zeta(s) \Gamma(s)$$

Mais avec la formule des compléments, $\forall s \mid 0 < \operatorname{Re}(s) < 1$:

$$\Gamma(s) \sin(\pi s) = \frac{\pi}{\Gamma(1-s)}$$

d'où :

$$h(s) = 2\pi i e^{i\pi s} \frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)}$$

et finalement :

$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s} \Gamma(1-s)}{2i\pi} h(s) = \frac{e^{-i\pi s} \Gamma(1-s)}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$$

$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s} \Gamma(1-s)}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$$

cette formule est valable pour $\operatorname{Re}(s) > 1$, l'expression à droite reste valable pour toute valeur bornée de s , définit donc une fonction analytique, et donc d'après le théorème du prolongement analytique, celle-ci représente le prolongement analytique de ζ sauf en $s = 1$.

Et comme h est holomorphe sur tout \mathbb{C} , cela implique le prolongement analytique de ζ en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} . \square

Prolongement avec la formule sommatoire d'Abel

Grâce à la formule sommatoire d'Abel, on a pour $\operatorname{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s} = s \int_1^{\infty} \frac{[u]}{u^{1+s}} du$$

où $[u]$ désigne la partie entière qui se décompose en $u - \{u\}$, où $\{u\}$ est la partie fractionnaire. Ainsi :

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^{1+s}} du$$

Avec $0 < \{u\} < 1$, l'intégrale converge pour $\text{Re}(s) > 0$. Et donc à partir du prolongement pour $\text{Re}(s) > 0$ puis avec l'équation fonctionnelle pour $0 < \text{Re}(s) < 1$, on a le prolongement de ζ pour $\text{Re}(s) \leq 0$ sauf pour $s=0$.

Prolongement analytique avec la fonction éta de Dirichlet

Soit la fonction η définie tel que

$$\eta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

convergente pour $s \in \mathbb{R}_+$, il en est de même pour $\text{Re}(s) > 0$, que l'on peut démontrer par le lemme d'Abel.

Si $\text{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s} = \eta(s) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \eta(s) + \frac{2\zeta(s)}{2^s} \Leftrightarrow (1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \eta(s)$$

on peut aussi écrire

$$\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}}$$

Ceci réalise le prolongement analytique de ζ sur $\text{Re}(s) > 0$, sauf aux points :

$$s = 1 + \frac{2ik\pi}{\ln(2)}$$

où $k \in \mathbb{Z}$ et $\eta(1) = \ln(2)$. Ces points sont en fait les zéros de $1 - 2^{1-s}$.

En appliquant la relation fonctionnelle avec le prolongement analytique pour $\sigma = \text{Re}(s) > 0$, on obtient le prolongement analytique partout sauf en ces points. Comme :

$$0 < \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n} = \frac{1}{3n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

on déduit que

$$\zeta_3(s) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{(3n-2)^s} + \frac{1}{(3n-1)^s} - \frac{2}{(3n)^s} \right) = 1 + \frac{1}{2^s} - \frac{2}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{2}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} - \frac{2}{9^s} + \dots$$

convergente pour $\text{Re}(s)=1$, et on a

$$\zeta(s) = \frac{\zeta_3(s)}{1 - 3^{1-s}}$$

Il suffit donc de calculer la série seulement pour ces points car $\frac{\ln 3}{\ln 2} \notin \mathbb{Q}$, et $1 - 3^{1-s}$ ne peut s'annuler en même temps que $1 - 2^{1-s}$, sauf pour $s=1$.

De même :

$$\eta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx$$

On déduit pour $\text{Re}(s) > 0$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1 - 2^{1-s})\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{|\ln u|^{s-1}}{1+u} du$$

Euler trouva un lien avec les nombres premiers :

Produit Eulérien.

Pour $s > 1$, la fonction zêta de Riemann est donnée par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

où p_k est le k -ième premier.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1^s}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2^s}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_3^s}} \dots \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_1^s} \right)^k \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_2^s} \right)^k \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_3^s} \right)^k \right] \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_1^{2s}} + \frac{1}{p_1^{3s}} + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{p_2^s} + \frac{1}{p_2^{2s}} + \frac{1}{p_2^{3s}} + \dots \right) \dots \\ &= 1 + \sum_{1 \leq i} \frac{1}{p_i^s} + \sum_{1 \leq i \leq j} \frac{1}{p_i^s p_j^s} + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} \frac{1}{p_i^s p_j^s p_k^s} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \end{aligned}$$

□

Dérivée.

Effectuons d'abord le calcul de $\zeta'(s)$:

$$\zeta'(s) = \frac{d}{ds} \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \right) = - \left(\frac{\ln 2}{2^s} + \frac{\ln 3}{3^s} + \frac{\ln 4}{4^s} + \dots \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s}$$

Et plus généralement on a :

$$\zeta^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^s}$$

On peut citer pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\zeta^{(n)}(1-s) &= (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\exp \left\{ s \left(-\log(2\pi) + \frac{i\pi}{2} \right) \right\} \left(\frac{i\pi}{2} - \log(2\pi) \right) \right)^{n-k} \\ &\quad + \exp \left\{ s \left(-\frac{i\pi}{2} - \log(2\pi) \right) \right\} \left(-\frac{i\pi}{2} - \log(2\pi) \right)^{n-k} \frac{\partial^k (\Gamma(s) \zeta(s))}{\partial s^k}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\zeta^{(n)}(1-z) &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\binom{n}{k} \left(\exp \left\{ z \left(\frac{iz}{2} - \log(2\pi) \right) \right\} \left(\frac{i\pi}{2} - \log(2\pi) \right) \right) \right)^{n-k} \\ &\quad + \exp \left\{ z \left(-\frac{i\pi}{2} - \log(2\pi) \right) \right\} \left(-\frac{i\pi}{2} - \log(2\pi) \right)^{n-k} \frac{\partial^k (\Gamma(z) \zeta(z))}{\partial z^k}\end{aligned}$$

Ainsi que :

$$\zeta^{(n)}(0) = (-1)^n n! \left(\frac{\operatorname{Im}(z^{n+1})}{\pi(n+1)!} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k \operatorname{Im}(z^{n-k})}{(n-k)!} \right)$$

où

$$a_k = \left[((s-1)^k) \left(\Gamma(s) \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) \right] \text{ et } z = -\log 2\pi - \frac{i\pi}{2}$$

Théorème de Speiser (1934).

La dérivée de la fonction zêta n'a pas de zéros pour $0 < \sigma < \frac{1}{2}$.

Intégrations.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3 - \sqrt{8} \cos(\log(2)t)) \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|}{t^2 + \frac{1}{4}} dt = \pi \log(2)$$

Pour $\sigma > 1$:

$$\int \zeta(s) ds = s - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{-s}}{\log(k)}$$

Pour $\sigma > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{(1 - 2^{1-(it+\sigma)}) \zeta(\sigma + it)}{\sigma + it} \right| dt = \frac{\pi(1 - 2^{1-2\sigma}) \zeta(2\sigma)}{\sigma}$$

Formules supplémentaires.

$$\int_0^{\infty} \frac{u^n du}{e^u - 1} = n! \zeta(n+1)$$

Voici la formule de Euler pour $|t| < 1$:

$$\ln \Gamma(1+t) = -\gamma t + \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} t^n$$

et donc

$$\gamma = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n}$$

publié dans *commentarii Academiae scientiarum imperialis petropolitanae* en 1734-1735. Legendre écrit dans *Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures* :

$$\ln \Gamma(1+t) = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi t}{\sin \pi t} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-t}{1+t} + (1-\gamma)t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\zeta(2n+1)}{2n+1} t^n$$

Une autre formule intéressante :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \ln(2\pi) + \frac{\pi}{2} \cot\left(\frac{\pi s}{2}\right) - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k+1)^s}$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{s-1}} \binom{n}{k}$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{s}{2}\right)^n}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (2k+1) \zeta(2k+2)$$

On peut désigner la fonction zêta sous forme de série de Laurent :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma_n (s-1)^n$$

où γ_n est la constante de Stieltjes définit comme :

$$\gamma_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(\sum_{k=1}^m \frac{(\log k)^n}{k} \right) - \frac{(\log m)^{n+1}}{n+1} \right]$$

et γ_0 est la constante d'Euler-Mascheroni.

Pour $\sigma > 1$:

$$\zeta(s) = 2^s \frac{1}{2^s - 1} \sum_{k=0}^{\infty} (1+2k)^{-s}$$

et

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{-s}} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^s}$$

Pour $\sigma < 1$:

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \left(\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k)}{k^{1-s}} + \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi k)}{k^{1-s}} \right)$$

Pour $\sigma > 0 \mid s \neq 1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}$$

ζ en tant que limites.

Pour $\sigma > 0$:

$$\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n k^{-s} \frac{n^{1-s} - 1}{1-s} \right) - \frac{1}{1-s}$$

Citons :

$$\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{1-s}} \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k} \frac{(-1)^k k^{-s}}{\binom{2n}{n}}$$

puis pour $z < 1$:

$$\zeta(s) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2^{1-s} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k^s}$$

Théorème.

$$\lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \gamma$$

Démonstration.

On part de la formule

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$$

et aussi du fait que

$$\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$$

Il suit

$$\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) \Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt - \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-2} dt = \int_0^{\infty} t^{s-1} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{te^t} \right) dt$$

avec $s \rightarrow 1$:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$$

Et Rao donna en 1956 le résultat suivant

$$\gamma = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) dx$$

ce qui permet de conclure. □

Problème de Bâle.

En 1644, Pietro Mengoli posa la question de la valeur de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Repris par Jacques Bernoulli dans *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis* en 1689 à Bâle. En 1730 Stirling donne une valeur approchée par une méthode d'accélération de convergenc. En 1735, Euler conjecture que la série vaut $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Il prouva sa conjecture en 1748. Il trouve de même une forme générale pour tout les $\zeta(2k)$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Formule générale pour $\zeta(2k)$.

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \mathcal{B}_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

Par l'équation d'Euler :

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

on a :

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

ce qui implique :

$$y \cot y = iy \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{e^{iy} - e^{-iy}} = iy \frac{e^{2iy} + 1}{e^{2iy} - 1}$$

en posant $z = 2iy$, on obtient :

$$y \cot y = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}$$

La fonction $\frac{z}{e^z - 1}$ est définie et continue sur \mathbb{R} , avec :

$$\frac{z}{e^z - 1} =: \sum_{n \geq 0} \mathcal{B}_n \frac{z^n}{n!}$$

où les \mathcal{B}_n sont les nombres de Bernoulli.

Le membre $\frac{z}{2}$ est une fonction paire, Ainsi $\mathcal{B}_n = 0$ pour $n \geq 3$ impair, et $\mathcal{B}_1 = -\frac{1}{2}$ correspond au terme en z de $y \cot y = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \frac{z}{e^z - 1}$ à partir de :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \frac{z^n}{n!} \right) (e^z - 1) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) = z$$

En comparant les coefficients de z^n :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{B}_k}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

qui permet de calculer les valeurs de récurrences. La combinaison de :

$$y \cot y = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1} \text{ et } \frac{z}{e^z - 1} =: \sum_{n \geq 0} \mathcal{B}_n \frac{z^n}{n!}$$

implique :

$$y \cot y = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_{2k} \frac{(2iy)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} \mathcal{B}_{2k}}{(2k)!} y^{2k}$$

et en considérant :

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

Puis en posant $y = \pi x$ et en multipliant par x , si $|y| < \pi$, nous avons :

$$y \cot y = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2 - y^2} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{y}{\pi n}\right)^2}$$

Le dernier facteur est la somme d'une série géométrique, donc :

$$y \cot y = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{y}{\pi n}\right)^{2k} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}\right) y^{2k}$$

Nous avons ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*$ le coefficient $[y^{2k}]$ dans le développement en série entière de $y \cot y$ égale à :

$$[y^{2k}] = y \cot y = -\frac{2}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{2}{\pi^{2k}} \zeta(2k)$$

Ainsi :

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \mathcal{B}_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}$$

□

On peut aussi écrire $\zeta(2n)$ de plusieurs autres façons :

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \left| \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1} \sum_{r=0}^k (-1)^r r^{2n} \binom{k}{r} \right|$$

et

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^n 2^{2n-2} \pi^{2n}}{(2^{2n}-1)(2n-1)!} \mathbf{E}_{2n-1}(0)$$

ainsi que

$$\frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-3} \pi^{2n}}{(2^{2n}-1)(2n-2)!} \int_0^1 \mathbf{E}_{2n-2}(x) dx$$

Ainsi nous pouvons recalculer $\zeta(2)$:

$$\zeta(2) = \frac{1 \times 2 \times \frac{1}{6} \pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On peut aussi démontrer la formule pour $\zeta(2k)$ d'une autre façon :

Considérons la fonction $\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$.

Soit $\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ avec $s = 2n$:

$$\xi(2n) := \pi^{-\frac{2n}{2}} \Gamma\left(\frac{2n}{2}\right) \zeta(2n) = \pi^n \Gamma(n) \zeta(2n)$$

et $\xi(2n) = \xi(1-2n)$

donc :

$$\xi(2n) = \xi(1-2n) = \pi^{n-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \zeta(1-2n)$$

comme $\Gamma(n) = (n-1)!$ et $\zeta(1-2n) = (-1)^{2n-1} \frac{\mathcal{B}_{2n}}{2n} = -\frac{\mathcal{B}_{2n}}{2n}$ et $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n n!} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)\end{aligned}$$

et comme :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

alors :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = (-1)^n \sqrt{\pi} \frac{4^n n!}{(2n)!}$$

En insérant ces valeurs dans

$$\pi^{-n} \Gamma(n) \zeta(2n) = \xi(2n) = \xi(1-2n) = \pi^{n-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \zeta(1-2n)$$

on trouve :

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} \mathcal{B}_{2n}$$

Bien-sûr tout les $\zeta(2n) \notin \mathbb{Q}$, du fait de l'irrationalité de π^n .

En ce qui concerne $\zeta(2)$, présentons quelques formules ayant la même valeur.

$$\text{Calcul de } \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$$

Soit $f(t) = \frac{\ln t}{t-1}$ est continue sur $]0; 1[$ et donc localement intégrable sur $]0; 1[$.

Quand $t \rightarrow 0$, $\left| \frac{\ln t}{t-1} \right| \sim |\ln t| = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, ainsi f est intégrable au voisinage de 0. Puis quand $t \rightarrow 1$, $\frac{\ln t}{t-1} \sim 1$, ainsi f se prolonge par continuité en 1 et est donc intégrable au voisinage de 1.

Donc finalement, la fonction f est intégrable sur $]0; 1[$ et l'intégrale est alors convergente vers une valeur \mathcal{I} telle que :

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in]0; 1[$, on a :

$$\frac{\ln t}{t-1} = -\ln t \times \frac{1}{1-t} = -\ln t \left(\sum_{k=1}^n t^k \right) = \sum_{k=1}^n -t^k \ln t$$

comme $f(t) = -t^k \ln t$ est intégrable sur $]0; 1[$ car continue sur $]0; 1[$, par intégration on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{k=0}^n \mathcal{I}_k$$

où :

$$\mathcal{I}_k = - \int_0^1 t^k \ln t dt$$

avec $n \longrightarrow +\infty$.

Maintenant soient $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in]0; 1[$. la fonction $t \longmapsto -\ln t$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[\varepsilon; 1]$. On peut effectuer une intégration par partie qui fournit.

$$\int_{\varepsilon}^1 -t^k \ln t dt = \left[-\frac{t^{k+1}}{k+1} \ln t \right]_{\varepsilon}^1 + \frac{1}{k+1} \int_{\varepsilon}^1 t^k dt = \frac{\varepsilon^{k+1} \ln \varepsilon}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} (1 - \varepsilon^{k+1})$$

Quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient $\mathcal{I}_k = \frac{1}{(k+1)^2}$, ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_k = \frac{1}{(k+1)^2}$.

Ainsi, il est facile de voir :

$$\mathcal{I} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

D'où :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{Calcul de } \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$$

Soit la fonction :

$$\frac{x}{e^x - 1} =: \sum_{n \geq 0} \mathcal{B}_n \frac{x^n}{n!}$$

définie et continue sur tout \mathbb{R} .

Considérons :

$$\frac{1 - e^{-nx}}{1 - e^{-x}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-kx}$$

et soit :

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\infty} x e^{-(k+1)x} dx \right) + \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} e^{-nx} dx$$

Comme toutes ces intégrales convergent et que :

$$K_n = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} e^{-nx} dx \longrightarrow 0$$

quand $n \longrightarrow +\infty$. Il suffit de calculer :

$$M_k = \int_0^{\infty} x e^{-(k+1)x} dx$$

En intégrant par parties on trouve :

$$M_k = \frac{1}{(k+1)^2}$$

en remplaçant dans la formule de J on obtient :

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Présentons aussi la série :

$$3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \binom{2n}{n}} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Puis :

$$\zeta(4) = \frac{36}{17} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 \binom{2n}{n}} = \frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{6} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

et :

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln^2 \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) dx = \frac{17\pi^4}{3240} = \frac{17}{36} \zeta(4)$$

Citons une formule issue de [14] faisant intervenir les polynômes d'Euler $E_n(x)$:

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-3} \pi^{2n}}{(2^{2n}-1)(2n-2)!} \int_0^1 E_{2(n-1)}(x) dx$$

Citons aussi :

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2 - x^2} = \sum_{n \geq 0} \zeta(2n+2) x^{2n} = \frac{1 - \pi x \cot(\pi x)}{2x^2} = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \binom{2k}{k} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)} = \prod_{m=1}^{k-1} \frac{1 - \frac{4x^2}{m^2}}{1 - \frac{x^2}{m^2}}$$

Et voici la formule de Borwein-Borwein (1995) :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \ln^2(2 \cos x) dx = \frac{11}{16} \zeta(4)$$

D'autres formules :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)} = \ln(2\pi) - 1 ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{(2n+1)2^{2n}} = \ln \pi - 1 ; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\zeta(2n)}{n2^{2n}} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

cas particulier de la formule plus générale :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\zeta(2k, z)}{k(2k+1)2^{2k}} = (2z-1) \ln\left(z - \frac{1}{2}\right) - 2z + 1 + \ln(2\pi) - 2 \ln \Gamma(z)$$

où $\zeta(s, a)$ est la fonction zêta de Hurwitz.

De plus citons la formule :

$$\cot x = \frac{1}{x} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1} \zeta(2n)}{\pi^{2n}}$$

Ainsi que pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k) \zeta(2n-2k) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \zeta(2n)$$

Irrationnalité

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \notin \mathbb{Q}$$

Démonstration. (Beukers)

Critère d'irrationalité

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, est strictement irrationnel si et seulement si, il existe deux suites d'entiers $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ telles que $a_n \alpha + b_n \neq 0$ et que $a_n \alpha + b_n \rightarrow 0$.

Lemme 1.

Définissons $d_n = \text{ppcm}\{1; 2; \dots; n\}$. Avec $p \in \mathbb{P}$.

$$d_n = \prod_{p \leq n} p^{\left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor} \leq \prod_{p \leq n} p^{\frac{\log n}{\log p}} = n^{\pi(n)}$$

avec $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$, on déduit $d^n < 3^n$ (résultat dû à Hanson en 1972).

Lemme 2.

Soient $r, s \in \mathbb{N}$. On introduit :

$$J_{r,s} := \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx dy$$

Si $r > s$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx dy \in \mathbb{Q}$$

avec $(1-xy)|d_r^2$ c'est-à-dire $J_{r,s} \in \frac{1}{d_r^2} \mathbb{Z}$.

Si $r = s$:

$$J_{r,r} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy} dx dy = \left(\zeta(2) - \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2} \right)$$

donc si $r \geq 1$: $J_{r,r} \in \zeta(2)\mathbb{Z} + \frac{1}{d_r^2} \mathbb{Z}$.

Et si $r = 0$, on a :

$$J_{0,0} = \zeta(2)$$

Démonstration du lemme 2.

Considérons :

$$I(r, s, \sigma) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dx dy$$

$|xy| < 1$ donc :

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k$$

et donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \sum x^{r+k+\sigma} y^{s+k+\sigma} dx dy = \sum \int_0^1 \int_0^1 x^{r+k+\sigma} y^{s+k+\sigma} dx dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+s+\sigma+1)} \end{aligned}$$

car

$$\int_0^1 \int_0^1 x^p y^q dx dy = \frac{1}{(p+1)(q+1)}$$

si $r > s$, la somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r-s} \left[\frac{1}{k+s+\sigma+1} - \frac{1}{k+r+\sigma+1} \right] = \frac{1}{r-s} \left[\frac{1}{s+1+\sigma} + \dots + \frac{1}{r+\sigma} \right]$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} I(r, s, \sigma) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dx dy = \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{r-s} \left[\frac{1}{s+1+\sigma} + \dots + \frac{1}{r+\sigma} \right] \right) \\ &= \frac{-1}{r-s} \left(\left(\frac{1}{s+1+\sigma} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{r+\sigma} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Le premier point se déduit en considérant $\sigma = 0$.

Comme $r > s$ et puisque $(r-s)|d_r$ et $(s+k)|d_r$ pour $=1; 2; \dots; r-s$, on en déduit que $J_{r,s} \in \frac{1}{d_r^2} \mathbb{Z}$

Si $r = s$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dx dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1)^2}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} J_{r,r} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy} dx dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1)^2} = \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= \begin{cases} \zeta(2) & \text{si } r=0 \\ \left(\zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \dots - \frac{1}{r^2} \right) & \text{si } r \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration du théorème

On considère :

$$M = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n}{1-xy} \mathcal{P}_n(x) dx dy$$

Où les $\mathcal{P}_n(z)$ sont les polynômes de Legendre.

On a :

$$M = (A_n + B_n \zeta(2)) d_n^{-2}$$

alors :

$$0 < |A_n + B_n \zeta(2)| = d_n^2 |M|$$

avec $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$.

En intégrant n fois par parties par rapport à x :

$$M = (-1) \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n (1-y^n) y^n (1-x^n)}{(1-xy)^{n+1}} dx dy \neq 0$$

Cherchons le maximum de la fonction $\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy}$. En posant $t = \sqrt{xy}$:

$$\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy} = \frac{t^2(1-y-x+t^2)}{1-t^2} \leq \frac{t^2(1-2t+t^2)}{1-t^2} = \frac{t^2(1-t)}{1+t}$$

L'étude de la dérivée donne le maximum $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5$ atteint en $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ainsi :

$$\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy} \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5$$

on déduit :

$$0 < |M| \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2)$$

$n \longrightarrow +\infty$ tel que $d_n < 3^n$ (avec $d_n \sim e^n$), on obtient :

$$0 < |A_n + B_n \zeta(2)| = d_n^2 |M| \leq d_n^2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2) < 9^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2) < \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Ce dernier terme tend vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$, et donc cela garantit $\zeta(2) \notin \mathbb{Q}$. □

Par extension, tous les $\zeta(2k)$ sont irrationnels, car $\zeta(2k) = \frac{p}{q} \pi^r$, et $\pi^r \notin \mathbb{Q}$.

Valeurs aux entiers négatifs.

$$\zeta(-k) = (-1)^k \frac{\mathcal{B}_{k+1}}{k+1} \in \mathbb{Q}$$

Démonstration.

Soit $\text{Re}(s) > 1$:

$$\Gamma(s) \zeta(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

la continuation analytique est réalisée en écrivant :

$$\Gamma(s) \zeta(s) = \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt + \int_1^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

la seconde intégrale est une fonction holomorphe de s . On décompose en série de Taylor dans la première. Comme on a $\forall t$ tel que $|t| < 2\pi$:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\mathcal{B}_n t^n}{n!}$$

en remplaçant dans la première intégrale et en intégrant terme à terme, on trouve :

$$\zeta(s) = \frac{1}{(s-1)\Gamma(s)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathcal{B}_n}{n!(n+s-1)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

La série est convergente et définit une fonction holomorphe partout sauf aux entiers négatifs ou nuls, (car pour s différents de ces valeurs, le rayon de convergence de la série entière de coefficients $\frac{\mathcal{B}_n}{n!}$ n'est pas modifié lorsqu'on divise ces coefficients par les $n + s - 1$) et de même au voisinage d'un entier négatifs $-k$, elle est la somme d'une fonction holomorphe et du terme

$$\frac{\mathcal{B}_{k+1}}{(k+1)!(s+k)}$$

Quand $s \longrightarrow -k$ comme $\frac{1}{\Gamma(s)} \longrightarrow 0$, $\zeta(s)$ est par conséquent la somme d'une fonction qui tend vers 0 et du terme

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \frac{\mathcal{B}_{k+1}}{(k+1)!(s+k)} \underset{s \longrightarrow -k}{\sim} \frac{s+k}{\text{Res}(\Gamma, -k)} \frac{\mathcal{B}_{k+1}}{(k+1)!(s+k)} = (-1)^k k! \frac{\mathcal{B}_{k+1}}{(k+1)!}$$

Ainsi, le prolongement analytique méromorphe de ζ à tout le plan complexe n'a de pôle qu'au point 1, et l'on obtient la formule d'Euler :

$$\zeta(-k) = (-1)^k \frac{\mathcal{B}_{k+1}}{k+1}$$

□

Démonstration.

$\forall s$ tel que $\text{Re}(s) > 1$, on a :

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^s}$$

ce qui fournit un prolongement analytique de ζ au demi-plan $\text{Re}(s) > 0$. On peut alors sommer la série divergente $\zeta(-n)$ par la méthode d'Abel.

$$(1 - 2^{n+1})\zeta(-n) = \lim_{x \rightarrow -1} \sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k = \left(x \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{x}{1-x} \right) \Big|_{x=-1}$$

$$= (-1)^n \frac{d}{dz^n} \left(\frac{1}{e^z + 1} \right) \Big|_{z=0}$$

$$(x = -e^{-z}).$$

$$= (-1)^n (1 - 2^{n+1}) \frac{\mathcal{B}_{n+1}}{n+1}$$

lorsque $s = 2n$ on déduit :

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{\mathcal{B}_{n+1}}{n+1}$$

□

Entiers pairs négatifs

Puis pour les $\zeta(-2n)$, se déduit avec la formule précédente, c'est-à-dire en posant $k = 2n$:

$$\zeta(-k) = (-1)^k \frac{\mathcal{B}_{k+1}}{k+1}$$

devient :

$$\zeta(-2n) = \frac{\mathcal{B}_{2k+1}}{2k+1} = 0$$

pour tout $n \geq 1$; et elles sont alors des racines de $\zeta(s)$ appelées zéros triviaux.

Zéros non-triviaux.

L'équation fonctionnelle de zêta et sa non-annulation pour $\sigma \geq 1$, implique que sur le demi-plan $\sigma \leq 0$ la fonction zêta de Riemann admet pour seuls zéros les points $-2n$. Mais il existe d'autres zéros appelés zéros non-triviaux dans la bande critique $0 < \sigma < 1$, et on peut montrer qu'il n'y en n'a pas autre part. La fonction zêta de Dirichlet définie comme :

$$\eta(\sigma) := \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\sigma} = (2^{1-\sigma} - 1)\zeta(\sigma)$$

montre que les zéros non-triviaux de zêta ne sont pas réel. L'équation fonctionnelle et le fait que $\zeta(k) \in \mathbb{R}$ pour $s \in \mathbb{R}$, impliquent qu'ils sont répartis symétriquement par rapport à la droite $\sigma = \frac{1}{2}$.

Les zéros de la fonction ξ sont les zéros non-triviaux de ζ . Nous définirons plus tard cette fonction.

En fait avec l'équation fonctionnelle, dont on précisera l'énoncé plus tard, on voit pourquoi les zéros triviaux sont tous de la forme $-2n$. En effet $2^s \neq 0$ et, $\pi^{s-1} \neq 0$ et $\Gamma(1-s) \neq 0$, donc les valeurs d'annulation de $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ donne les zéros triviaux.

Généralités sur les zéros non-triviaux

Soit f une fonction méromorphe sur \mathbb{C} ne possédant qu'une unique singularité, se trouvant en 1. Si $\sigma, T \in \mathbb{R}_+^*$, on note $N_f(\sigma, T)$ le nombre de zéros non-triviaux noté $\beta + i\gamma$ de f (comptés avec leur multiplicité), avec $\sigma \leq \beta$ et $0 < \gamma \leq T$. Si $T' \geq T$, on note aussi $N_f(\sigma, T, T') := N_f(\sigma, T') - N_f(\sigma, T)$. Dans le cas particulier de ζ , on a :

$$N(\sigma, T) := N_\zeta(\sigma, T) \text{ et } N(T) := N(0, T)$$

Théorème.

On a pour $T \geq 2$:

$$N(T+1) - N(T) \ll \ln T$$

et :

$$N(T) \ll T \ln T$$

Démonstration.

Soit $t \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + (\tau - \gamma_n)^2} \ll \ln(|\tau| + 2)$$

Alors pour $T < \gamma_n \leq T+1$

$$N(T+1) - N(T) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \leq \sum_{n \geq 0} \frac{2}{1 + (T - \gamma_n)^2} \ll \ln T$$

□

Valeurs aux entiers impairs.

En revanche les $\zeta(2n+1)$ sont peu connus.

L'irrationalité de $\zeta(3)$ est connue de par le théorème d'Apéry (1978). Mais l'irrationalité ou encore la transcendance des autres $\zeta(2n+1)$ sont inconnues, bien qu'il existe des résultats moins forts.

Théorème d'Apéry

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \notin \mathbb{Q}$$

Démonstration. (Beukers)

Critère d'irrationalité

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, est strictement irrationnel si et seulement si, il existe deux suites d'entiers $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ telles que $a_n \alpha + b_n \neq 0$ et que $a_n \alpha + b_n \rightarrow 0$.

lemme 1.

Définissons $d_n = \text{ppcm}\{1; 2; \dots; n\}$. Avec $p \in \mathbb{P}$.

$$d_n = \prod_{p \leq n} p^{\left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor} \leq \prod_{p \leq n} p^{\frac{\log n}{\log p}} = n^{\pi(n)}$$

avec $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$, on déduit $d^n < 3^n$ (résultat dû à Hanson en 1972).

lemme 2.

Soient $r, s \in \mathbb{N}$. On introduit :

$$J_{r,s} := \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} x^r y^s dx dy$$

Si $r > s$:

$$-\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^s dx dy \in \mathbb{Q}$$

avec $(1-xy)|d_r^3$ c'est-à-dire $J_{r,s} \in \frac{1}{d_r^3} \mathbb{Z}$

Si $r = s$:

$$J_{r,r} = -\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^s dx dy = 2 \left(\zeta(3) - \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^3} \right)$$

donc si $r \geq 1$: $J_{r,r} \in \zeta(3)\mathbb{Z} + \frac{1}{d_r^3}\mathbb{Z}$.

Et si $r = 0$ on a :

$$J_{0,0} = 2\zeta(3)$$

démonstration du lemme 2.

Considérons :

$$I(r, s, \sigma) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dx dy$$

$|xy| < 1$ donc :

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k$$

et donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \sum x^{r+k+\sigma} y^{s+k+\sigma} dx dy = \sum \int_0^1 \int_0^1 x^{r+k+\sigma} y^{s+k+\sigma} dx dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+r+\sigma+1)} \end{aligned}$$

car

$$\int_0^1 \int_0^1 x^p y^q dx dy = \frac{1}{(p+1)(q+1)}$$

si $r > s$, la somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r-s} \left[\frac{1}{k+s+\sigma+1} - \frac{1}{k+r+\sigma+1} \right] = \frac{1}{r-s} \left[\frac{1}{s+1+\sigma} + \dots + \frac{1}{r+\sigma} \right]$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} I(r, s, \sigma) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^{r+\sigma} y^{s+\sigma} dx dy = \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{r-s} \left[\frac{1}{s+1+\sigma} + \dots + \frac{1}{r+\sigma} \right] \right) \\ &= \frac{-1}{r-s} \left(\left(\frac{1}{s+1+\sigma} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{r+\sigma} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Le premier point se déduit en considérant $\sigma = 0$.

Comme $r > s$ et puisque $(r-s)|d_r$ et $(s+k)|d_r$ pour $k=1; 2; \dots; r-s$, on en déduit que $J_{r,s} \in \frac{1}{d_r^3} \mathbb{Z}$

Si $r = s$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dx dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)^2}$$

en différentiant par rapport à σ et avec $\sigma = 0$. On trouve alors :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^r dx dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{(k+r+1)^3}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} J_{r,r} &= - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^r dx dy = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1)^3} = 2 \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \\ &= \begin{cases} 2\zeta(3) & \text{si } r=0 \\ 2\left(\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \dots - \frac{1}{r^3}\right) & \text{si } r \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

démonstration du théorème

On considère :

$$M = \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} \mathcal{P}_n(x) \mathcal{P}_n(y) dx dy$$

où les $\mathcal{P}_n(z)$ sont les polynômes de Legendre.

On a :

$$M = (A_n + B_n \zeta(3)) d_n^{-3}$$

alors :

$$0 < |A_n + B_n \zeta(3)| = d_n^3 |M|$$

avec $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$. On peut remarquer :

$$\frac{-\log xy}{1-xy} = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z} dz$$

alors :

$$M = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathcal{P}_n(x) \mathcal{P}_n(y)}{1-(1-xy)z} dx dy dz$$

En intégrant n fois par parties par rapport à x :

$$M = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n (1-x^n) y^n z^n \mathcal{P}_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}} dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(xyz)^n (1-x)^n \mathcal{P}_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}} dx dy dz$$

en posant :

$$w = \frac{1-z}{1-(1-xy)z}$$

on obtient :

$$M = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n (1-w)^n \mathcal{P}_n(y)}{1-(1-xy)w} dx dy dw$$

Et en intégrant n fois par parties par rapport à y :

$$M = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n w^n (1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}} dx dy dw$$

En appliquant le principe du col pour trouver le maximum de la fonction $\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w}$

Pour $x = y$ pour tout $0 \leq x, y, z \leq 1$, avec $t = \sqrt{xy}$ alors $x + y \geq 2t$, et l'on peut majorer :

$$x(1-x)y(1-y) = t^2(1-x-y+t^2) \leq t^2(1-2t+t^2) = t^2(1-t^2)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{w(1-w)}{1-(1-xy)w} = \frac{w(1-w)}{1-(1-t^2)w}$$

en faisant varier w et en fixant t . La fonction en w a pour maximum $\frac{1}{(1+t)^2}$, en $w = \frac{1}{1+t}$.

On a :

$$\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \leq \frac{t^2(1-t)^2}{(1+t)^2}$$

cette dernière ne dépend que de t . En étudiant sa dérivée on vérifie facilement que :

$$\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \leq (\sqrt{2}-1)^4$$

On obtient dorénavant :

$$\begin{aligned}
0 < |M| &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}} dx dy dw \\
&\leq (\sqrt{2}-1)^{4n} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)w} dx dy dw = (\sqrt{2}-1)^{4n} \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} dx dy \\
&= 2(\sqrt{2}-1)^{4n} \zeta(3)
\end{aligned}$$

Comme $M \neq 0$, et puisque $d_n < 3^n$, nous avons :

$$0 < |A_n + B_n \zeta(3)| = d_n^3 |M| \leq 2\zeta(3) d_n^3 (\sqrt{2}-1)^{4n} < 2\zeta(3) 27^n (\sqrt{2}-1)^{4n} < \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Et donc d'après le critère d'irrationalité :

$$\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$$

□

Théorème d'Apéry (Van Der Poorten)

critère d'irrationalité.

S'il y a un $\delta > 0$ et une suite $\frac{p_n}{q_n}$ de nombres rationnels tel que $\frac{p_n}{q_n} \neq \beta$ et

$$\left| \beta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{1+\delta}}$$

avec $n = 1; 2; \dots$

Alors $\beta \notin \mathbb{Q}$.

Mesure d'irrationalité.

Si

$$0 < \left| \beta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{1+\delta}}$$

et les q_n sont de croissance monotone avec $q_n < q_{n-1}^{1+k}$ (pour n suffisamment grand par rapport à $k > 0$) puis pour tous les entiers $p, q > 0$ suffisamment grand par rapport à $\varepsilon > 0$,

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{\frac{1+\delta}{\delta-k} + \varepsilon}}$$

par exemple, si la suite (q_n) croît géométriquement nous pouvons prendre $k > 0$ arbitrairement petit. Puis $1 + \frac{1}{\delta}$ devient un degré d'irrationalité pour β .

preuve de la mesure d'irrationalité

Voir la proposition suppose que

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^\tau}$$

et sélectionner n donc que

$$q_{n-1}^{1+\delta} \leq q^n < q_n^{1+\delta}$$

alors

$$\frac{1}{qq_n} \leq \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| \beta - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| \beta - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q_n^{1+\delta}} + \frac{1}{q^\tau} < \frac{2}{q^\tau}$$

d'où

$$\frac{1}{2}q^\tau \leq qq_n < qq_n^{1+k} < q^{1+\tau(1+k)/(1+\delta)}$$

qui est telle que revendiquée

$$\tau < (1+\delta)/(\delta-k) + \varepsilon$$

Cet argument est efficace dans la mesure où les exigences suffisamment grandes peuvent être explicites.

Démonstration du théorème.

On part du résultat dû à Hjortnaes :

$$\zeta(3) = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}}$$

Démonstration.

On introduit :

$$\varepsilon_{n,k} = \frac{1}{2} \frac{k!^2 (n-k)!}{k^3 (n+k)!}$$

où $k \in \mathbb{N}$. Vérifiant :

$$(-1)^k n(\varepsilon_{n,k} - \varepsilon_{n-1,k}) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!^2}{(n^2-1^2) \dots (n^2-k^2)}$$

en appliquant le développement asymptotique de $\frac{1}{x}$:

$$\sum_{k=1}^K \frac{a_1 \dots a_{k-1}}{(x+a_1) \dots (x+a_k)} = \frac{1}{x} - \frac{a_1 \dots a_K}{x(x+a_1) \dots (x+a_K)}$$

avec $x = n^2$ et $a_k = -k^2$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!^2}{(n^2-1^2) \dots (n^2-k^2)} = \frac{1}{n^2} - 2 \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 \binom{2n}{n}}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3} - 2 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}} &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (\varepsilon_{n,k} - \varepsilon_{n-1,k}) = \sum_{k=1}^N (\varepsilon_{N,k} - \varepsilon_{k,k}) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{2k^3 \binom{N+k}{k} \binom{N}{k}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}} \end{aligned}$$

or le premier terme à droite tend vers 0 quand $N \longrightarrow +\infty$, d'où :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3} - 2 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}}$$

□

Maintenant introduisons pour $k \leq n$:

$$c_{n,k} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{m+n}{m}}$$

tel que $c_{n,k} \longrightarrow \zeta(3)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Lemme

$$2c_{n,k} \binom{n+k}{k} \in \mathbb{Z} + \frac{\mathbb{Z}}{2^3} + \dots + \frac{\mathbb{Z}}{n^3} = \frac{\mathbb{Z}}{d_n^3} \Leftrightarrow 2d_n^3 c_{n,k} \binom{n+k}{n} \in \mathbb{Z}$$

Démonstration.

Nous vérifions les nombres de fois que tout premier p donné divise le dénominateur. Mais

$$\frac{\binom{n+k}{k}}{\binom{n+m}{m}} = \frac{\binom{n+k}{k-m}}{\binom{k}{m}}$$

donc, parce que

$$\text{ord}_p \binom{n}{m} \leq \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor - \text{ord}_p m = \text{ord}_p d_n^3 - \text{ord}_p m$$

nous avons

$$\begin{aligned} \text{ord}_p \left(m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m} / \binom{n+k}{k} \right) &= \text{ord}_p \left(m^3 \binom{n}{m} \binom{k}{m} / \binom{n+k}{k-m} \right) \\ &\leq 3 \text{ord}_p m + \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\ln k}{\ln p} \right\rfloor - 2 \text{ord}_p m \end{aligned}$$

ce qui donne l'assertion, parce que $m \leq k \leq n$. (Si $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{P}$, on note $\text{ord}_p m$ la plus grande puissance de p qui divise m). □

On a aussi pour n suffisamment grand par rapport à $\varepsilon > 0$,

$$d_n \leq e^{n(1+\varepsilon)}$$

soit encore :

$$d_n = \prod_{p \leq n} p^{\lfloor \log n / \log p \rfloor} \leq \prod_{p \leq n} n \simeq n^{n/\log n} = n^{\pi(n)} = e^n$$

Il se révèle que les $c_{n,k}$ ont un trop grand dénominateur par rapport à leur proximité avec $\zeta(3)$, nous devons alors accélérer la convergence pour appliquer le critère d'irrationalité.

On définit :

$$d_{n,k}^{(0)} = c_{n,k} \binom{n+k}{k}$$

de telle sorte que

$$d_{n,k(n)}^{(0)} \longrightarrow \zeta(3) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

puisque en considérant deux matrices triangulaires tel que $k \leq n$ avec $d_{n,k}^{(0)} = c_{n,k} \binom{n+k}{k}$ et $\binom{n+k}{k}$, avec la propriétés que

$$\frac{c_{n,k} \binom{n+k}{k}}{\binom{n+k}{k}} \longrightarrow \zeta(3)$$

en ce sens, étant donnée toute diagonale $(n, k(n))$, le quotient des éléments correspondants des deux matrices converge vers $\zeta(3)$.

Dorénavant, on applique les transformations suivantes (pour chaque matrices) :

$$d_{n,k}^{(0)} \rightarrow d_{n,n-k}^{(0)} = d_{n,k}^{(1)}$$

$$d_{n,k}^{(1)} \rightarrow \binom{n}{k} d_{n,k}^{(1)} = d_{n,k}^{(2)}$$

$$d_{n,k}^{(2)} \rightarrow \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} d_n^{(2)} = d_{n,k}^{(3)}$$

$$d_{n,k}^{(3)} \rightarrow \binom{n}{k} d_{n,k}^{(3)} = d_{n,k}^{(4)}$$

$$d_{n,k}^{(4)} \rightarrow \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} d_{n,j}^{(4)} = d_{n,k}^{(5)}$$

$$\binom{n+k}{k} \rightarrow \binom{2n-k}{n}$$

$$\rightarrow \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n}$$

$$\rightarrow \sum_{k_1=0}^k \binom{k}{k_1} \binom{n}{k_1} \binom{2n-k_1}{n}$$

$$\rightarrow \sum_{k_1=0}^k \binom{k}{k_1} \binom{n}{k_1} \binom{n}{k} \binom{2n-k_1}{n}$$

$$\rightarrow \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} \binom{k}{k_2} \binom{k_2}{k_1} \binom{n}{k_1} \binom{n}{k_2} \binom{2n-k_1}{n}$$

On définit les nombres d'Apéry :

$$a_n = d_{n,n}^{(5)} \text{ et } b_n = c_{n,n}^{(5)} = \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} \binom{k}{k_2} \binom{k_2}{k_1} \binom{n}{k_1} \binom{n}{k_2} \binom{2n-k_1}{n}$$

ces transformations ont conservées les propriétés :

$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \zeta(3), \quad b_n \in \mathbb{N}, \quad 2d_n^3 a_n \in \mathbb{Z}$$

Dorénavant on considère la récursion :

$$n^3 u_n + (n-1)^3 u_{n-2} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5) u_{n-1}$$

avec $n \geq 2$ et avec les conditions initiales $a_0 = 0, a_1 = 6, b_0 = 1, b_1 = 5$. De plus $\frac{a_n}{b_n}$ sont les convergents de la fraction continue :

$$\zeta(3) = \frac{6}{5 + \frac{1}{\ddots + \frac{n^6}{(34n^3 + 51n^2 + 27n + 5) + \frac{(n+1)^6}{\ddots}}}}$$

Démonstration. (Zagier-Cohen)

Remarquons l'égalité, valable dans $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$, avec $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k \left(\binom{n}{k} \right)^2 \binom{n}{l} \binom{k}{l} \binom{2n-l}{n} X_l = \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} \right)^2 \left(\binom{2n-k}{n} \right)^2 X_k$$

On note :

$$b_{n,k} = \left(\binom{n}{k} \right)^2 \left(\binom{n+k}{k} \right)^2 \text{ et } a_{n,k} = b_{n,k} c_{n,k}$$

de cette façon :

$$b_n = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \text{ et } a_n = \sum_{k=0}^n b_{n,k} c_{n,k}$$

On pose également $Q(n) = 34n^3 + 51n^2 + 27n + 5$ et donc $Q(n-1) = -Q(-n)$. Il faut donc montrer que

$$\sum_{k=0}^n \{ (n+1)^3 b_{n+1,k} - Q(n) b_{n,k} + n^3 b_{n-1,k} \} = 0$$

on applique la méthode du « creative telescoping », on pose :

$$B_{n,k} = 4(2n+1)(k(2k+1) - (2n+1)^2) \left(\binom{n}{k} \right)^2 \left(\binom{n+k}{k} \right)^2$$

alors (on adopte la notation $\binom{n}{k} = C_n^k$) :

$$B_{n,k} - B_{n,k-1} = (n+1)^3 (C_{n+1}^k)^2 (C_{n+1+k}^k)^2 - Q(n) (C_n^k)^2 (C_{n+k}^k)^2 + n^3 (C_{n-1}^k)^2 (C_{n-1+k}^k)^2$$

Pour le vérifier, on voit que :

$$\frac{c_{n,k+1}}{c_{n,k}} = \frac{(n+k+1)^2}{(n-k)^2(k+1)^4} \quad \text{et} \quad \frac{c_{n+1,k}}{c_{n,k}} = \left(\frac{n+k+1}{n-k+1} \right)$$

et on calcule. De même, pour les $a_{n,k}$, on pose

$$A_{n,k} = B_{n,k} c_{n,k} + \frac{5(2n+1)(-1)^{k-1}k}{n(n+1)} C_n^k C_{n+k}^k$$

et on vérifie que :

$$A_{n,k} - A_{n,k-1} = (n+1)^3 b_{n+1,k} c_{n,k} - Q(n) b_{n,k} c_{n,k} + b_{n-1,k} + c_{n-1,k}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} & (n+1)^3 b_{n+1,k} c_{n+1,k} - Q(n) b_{n,k} c_{n,k} + b_{n-1,k} + c_{n-1,k} \\ &= (B_{n,k} - B_{n,k-1}) c_{n,k} + (n+1)^3 b_{n+1,k} (c_{n+1,k} - c_{n,k}) - n^3 b_{n-1,k} (c_{n,k} - c_{n-1,k}) \end{aligned}$$

et que :

$$c_{n,k} - c_{n-1,k} = \frac{(-1)^k k!^2 (n-k-1)!}{n^2 (n+k)!}$$

Pour ce qui est de la fraction continue, les numérateurs et dénominateurs de ses convergents $\frac{p_n}{q_n}$ vérifient :

$$U_{n+1} + Q(n)U_n = n^6 U_{n-1}$$

avec les conditions initiales $p_0=1, p_1=5, q_0=0, q_1=6$. En posant $u_n = \frac{U_n}{n!^3}$, on retrouve la relation de récurrence. \square

Maintenant on pose :

$$P(n-1) = 34n^3 - 51n^2 + 27n - 5$$

soit

$$\begin{cases} n^3 a_n - P(n-1) a_{n-1} + (n-1)^3 a_{n-2} = 0 \\ n^3 b_n - P(n-1) b_{n-1} + (n-1)^3 b_{n-2} = 0 \end{cases}$$

on multiplie la première par b_{n-1} et la seconde par a_{n-1} , on obtient :

$$n^3 (a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n) = (n-1)^3 (a_{n-1} b_{n-2} - a_{n-2} b_{n-1})$$

en rappelant :

$$a_1 b_0 - a_0 b_1 = 6 \times 1 - 0 \times 5 = 6$$

ainsi :

$$a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n = \frac{6}{n^3}$$

Vu que $\zeta(3) - \frac{a_0}{b_0} = \zeta(3)$, on déduit :

$$\left| \zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6}{k^3 b_k b_{k-1}}$$

donc :

$$\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} = O(b_n^{-2})$$

nous avons :

$$b_n - (34 - 51n^{-1} + 27n^{-2} - 5n^{-3})b_{n-1} + (1 - 3n^{-1} + 3n^{-2} - n^{-3})b_{n-2} = 0$$

et l'équation limite $x^2 - 34x + 1 = 0$ tirée de la relation de récurrence; qui a pour racines :

$$17 \pm 12\sqrt{2} = (1 \pm \sqrt{2})^4$$

on calcule facilement que :

$$b_n = O(\alpha^n) \text{ avec } \alpha = (1 + \sqrt{2})^4$$

De plus H.Cohen a plus précisément calculé que :

$$b_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{(2\pi\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}} \frac{(1 + \sqrt{2})^{4n}}{n^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{48 - 15\sqrt{2}}{64n} + O(n^{-2}) \right)$$

Et nous écrivons :

$$p_n = 2d_n^3 a_n, \quad q_n = 2d_n^3 b_n$$

nous avons $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ et :

$$q_n = O(\alpha^n e^{3n}) \text{ et } \zeta(3) - \frac{p_n}{q_n} = O(\alpha^{-2n}) = O\left(q_n^{-(1+\delta)}\right)$$

avec

$$\delta = \frac{\log \alpha - 3}{\log \alpha + 3} = 0.080529... > 0$$

D'où par le critère d'irrationalité, $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$; et de plus parce que $\delta^{-1} = 12.417820...$ nous avons :

pour tout entiers $p, q > 0$ suffisamment grand par rapport à $\varepsilon > 0$:

$$\left| \zeta(3) - \frac{p}{q} \right| > q^{-(\theta + \varepsilon)}$$

avec $\theta = 13.417820...$

En fait Apéry[4] n'a donnée que les grandes lignes de la démonstration, elle fut complètement achevée dans les écrits de Van Der Poorten[1], Cohen[2], Reyssat[3]. Puis d'autres démonstrations sont ensuite apparues dans les écrits de Beukers, Sorokin, Nesterenko, Prévost.

Formules pour certains $\zeta(2n + 1)$.

Une formule dû à Ramanujan :

$$\zeta(3) = \frac{7\pi^3}{180} - 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(e^{2\pi n} - 1)} \right)$$

Démonstration.

Tout d'abord :

$$\pi^3 = \frac{180}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \tanh(n\pi)}$$

or :

$$\frac{1}{n^3 \tanh(n\pi)} = \frac{1}{n^3} \times \frac{e^{n\pi} + e^{-n\pi}}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}} = \frac{1}{n^3} \times \frac{1 + e^{-2n\pi}}{1 - e^{-2n\pi}} = \frac{1}{n^3} \times \frac{(e^{2n} - 1) + 2}{(e^{2n} - 1)} = \frac{1}{n^3} + \frac{2}{e^{2n} - 1}$$

d'où :

$$\pi^3 = \frac{180}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \tanh(n\pi)} = \frac{180}{7} \zeta(3) + \frac{180}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3(e^{2n\pi} - 1)}$$

finalement :

$$\zeta(3) = \frac{7\pi^3}{180} - 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(e^{2\pi n} - 1)} \right)$$

□

Une formule dû à Euler, présentée par Ewell (1999) :

$$\zeta(3) = \frac{\pi^2}{7} \left[1 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{(2k+1)(2k+2)2^{2k}} \right]$$

Une formule dû à Plouffe :

$$\zeta(3) = 14 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 \sinh(\pi k)} - \frac{11}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3(e^{2k\pi} - 1)} - \frac{7}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3(e^{2k\pi} + 1)}$$

Listons d'autres formules pour $\zeta(3)$:

$$\zeta(3) = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)!^2}{n(2n)!} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}} = 10 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\operatorname{arcsinh} t)^2}{t} dt$$

$$\zeta(3) = 10 \int_0^{\log \omega} t^2 \cosh t dt \quad \text{où } \omega = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

$$\zeta(3) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{205k^2 + 250k + 77}{64} \frac{(k!)^{10}}{((2k+1)!)^5} = \frac{8}{7} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^3}$$

$$\zeta(3) = \frac{37}{900} \pi^3 - \frac{2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[\frac{4}{e^{\pi n} - 1} + \frac{1}{e^{4\pi n} - 1} \right]$$

Maintenant pour $\zeta(5)$:

$$\zeta(5) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^5 \binom{2k}{k}} - \frac{5}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} H_{k-1}^{(2)}}{k^3 \binom{2k}{k}} = \frac{-16}{11} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2(-1)^n + 1] H_n}{n^4}$$

$$\zeta(5) = \frac{1}{294} \pi^5 - \frac{72}{35} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{2\pi n} - 1)} - \frac{2}{35} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{2\pi n} + 1)}$$

$$\zeta(5) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5 \sinh(\pi n)} - \frac{39}{20} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(e^{2\pi n} - 1)} - \frac{1}{20} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{2\pi n} + 1)}$$

$$\zeta(5) = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{4}{5n^2} \right) \frac{(-1)^n}{n^3 \binom{2n}{n}}$$

Puis pour $\zeta(7)$:

$$\zeta(7) = \frac{19}{56700} \pi^7 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7(e^{2\pi n} - 1)} = \frac{409\pi^7}{94500} - \frac{2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7} \left[\frac{4}{e^{\pi n} - 1} + \frac{1}{e^{4\pi n} - 1} \right]$$

Maintenant :

$$\zeta(9) = \frac{125}{3704778} \pi^9 - \frac{992}{495} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^9(e^{2k\pi} - 1)} - \frac{2}{495} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^9(e^{2k\pi} + 1)}$$

$$\zeta(11) = \frac{1453}{425675250} \pi^{11} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{11}(e^{2k\pi} - 1)}$$

$$\zeta(13) = \frac{89}{257432175} \pi^{13} - \frac{16512}{8255} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{13}(e^{2k\pi} - 1)} - \frac{2}{8255} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{13}(e^{2k\pi} + 1)}$$

$$\zeta(15) = \frac{13687}{390769879500} \pi^{15} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{15}(e^{2k\pi} - 1)}$$

$$\zeta(17) = \frac{397549}{112024529867250} \pi^{17} - \frac{261632}{130815} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{17}(e^{2k\pi} - 1)} - \frac{2}{130815} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{17}(e^{2k\pi} + 1)}$$

$$\zeta(19) = \frac{7708537}{21438612514068750} \pi^{19} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{19}(e^{2k\pi} - 1)}$$

$$\zeta(21) = \frac{68529640373}{1881063815762259253125} \pi^{21} - \frac{4196352}{2098175} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{21}(e^{2k\pi} - 1)} - \frac{2}{2098175} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{21}(e^{2k\pi} + 1)}$$

En fait H.Cohen a donnée deux formules permettant de calculer pour certains $\zeta(2r+1)$ une série ou une sommation de séries.

$$\zeta(2r+1) = \sum_{l=0}^{r-1} \left(2 + \frac{\delta_{10}}{2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n, 2r-2l}}{n^{2l+1} (2n)!}$$

où δ_{10} est le symbole de kronecker. Alors en effet pour $r=1$, on a le $c_{n,k}$ d'Apéry. Pour $r=2$ on a :

$$\zeta(5) = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 \binom{2n}{n}} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} k^{-2} - \frac{4}{5n^2} \right)$$

Il donne aussi la formule :

$$(1 - 2^{1-2r}) \zeta(2r) = \sum_{l=0}^{r-1} \left(2 - \frac{\delta_{10}}{2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n, 2r-2l} (-1)^{n-1}}{n^{2l} (2n)!}$$

et pour $r=1$, on a :

$$\zeta(2) = 3 \sum_{n \geq 1} \frac{(n-1)!^2}{(2n)!} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 \binom{2n}{n}}$$

et pour $r=2$:

$$\frac{7}{8} \zeta(4) = \frac{-3}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 \binom{2n}{n}} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} k^{-2} - \frac{4}{3n^2} \right)$$

Citons la formule de Landau-Ramanujan (1902) :

$$a_k = \int_1^2 \frac{(\ln(x))^k}{x-1} dx$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{12} \text{ et } a_2 = \frac{1}{4}\zeta(3)$$

Puis la célèbre formule de Ramanujan :

Soient $\alpha, \beta > 0 \mid \alpha\beta = \pi^2$ avec $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha^{-n} \left\{ \frac{1}{2} \zeta(2n+1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2n-1}}{e^{2\alpha k}} \right\} = (-\beta)^{-n} \left\{ \frac{1}{2} \zeta(2n+1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2n-1}}{e^{2\beta k} - 1} \right\}$$

$$- 2^{2n} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!} \frac{\mathcal{B}_{2n+2-2k}}{(2n+2-2k)!} \alpha^{n+1-k} \beta^k$$

Un autre généralisation dû à Cohen :

$$\zeta(4m-1) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4m-1}(e^{2\pi n} - 1)} - \frac{1}{2} (2\pi)^{4m-1} \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \frac{\mathcal{B}_{2j}}{(2j)!} \frac{\mathcal{B}_{4m-2j}}{(4m-2j)!}$$

Citons la formule

$$\zeta'(-2n) = \frac{(-1)^n \zeta(2n+1)(2n)!}{2^{2n+1} \pi^{2n}} \Leftrightarrow \zeta(2n+1) = \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(2n)!} \pi^{2n} \zeta'(-2n)$$

voici quelques valeurs particulières :

$$\zeta'(-2) = \frac{-\zeta(3)}{4\pi^2}; \zeta'(-4) = \frac{3\zeta(5)}{4\pi^4}; \zeta'(-6) = \frac{45\zeta(7)}{4\pi^6}; \zeta'(-8) = \frac{315\zeta(9)}{4\pi^8}$$

Et la formule pour $n \geq 1$:

$$\zeta(2n+1) = \frac{1}{(2n)!} \int_0^{\infty} \frac{t^{2n}}{e^t - 1} dt$$

Maintenant donnons d'autres formules :

$$\zeta(2n+1) = \frac{(-1)^n 2^{2n-1} \pi^{2n+1}}{(2^{2n+1} - 1)(2n)!} \int_0^1 \mathbf{E}_{2n}(x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$$

$$\zeta(2n+1) = \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^1 \mathcal{B}_{2n+1}(x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$$

ces deux dernières formules sont invariables si l'on change la fonction tangente par la fonction cotangente.

$$\zeta(2n+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(2m+1)^{2n+1}} \sum_{k=1}^m \cot^{2n+1}\left(\frac{k}{2m+1}\right)$$

$$\frac{\zeta'\left(\frac{1}{2} + n\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2} + n\right)} = \frac{\Lambda(2)}{\sqrt{2}} 2^{-n} + \mathcal{O}(3^{-n})$$

Citons des formules de S.Plouffe (2006) qui sont issues de [13] :

$$\begin{aligned}
\zeta(5) &= \frac{694}{204813}\pi^5 - \frac{6280}{3251} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^5(e^{4\pi n} - 1)} + \frac{296}{3251} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{5\pi n} - 1)} - \frac{1073}{6502} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{10\pi n} - 1)} \\
&\quad + \frac{37}{6502} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{20\pi n} - 1)} \\
\zeta(3) &= \frac{13\pi^3\sqrt{3}}{45} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(e^{\pi n\sqrt{3}} - 1)} - \frac{9}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(e^{2\pi n\sqrt{3}} - 1)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(e^{4\pi n\sqrt{3}} - 1)} \\
\zeta(5) &= \frac{11\pi^5\sqrt{3}}{5670} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{\pi n\sqrt{3}} - 1)} - \frac{33}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{2\pi n\sqrt{3}} - 1)} + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{4\pi n\sqrt{3}} - 1)} \\
\zeta(5) &= \frac{5\pi^5\sqrt{7}}{3906} + \frac{64}{31} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{\pi n\sqrt{7}} - 1)} + \frac{130}{31} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{\pi n\sqrt{28}} - 1)} - \frac{4}{31} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{\pi n\sqrt{112}} - 1)} \\
\zeta(3) &= 28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(e^{\pi n} - 1)} - 37 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(e^{2\pi n} - 1)} + 7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(e^{4\pi n} - 1)} \\
\zeta(5) &= 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{\pi n} - 1)} - \frac{259}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{2\pi n} - 1)} - \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{4\pi n} - 1)} \\
\zeta(7) &= \frac{304}{13} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7(e^{\pi n} - 1)} - \frac{103}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7(e^{2\pi n} - 1)} + \frac{19}{52} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7(e^{4\pi n} - 1)} \\
\zeta(9) &= \frac{2^5}{861} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9(e^{\pi n} - 1)} - \frac{1617613}{1640} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9(e^{2\pi n} - 1)} + \frac{373}{34440} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9(e^{4\pi n} - 1)} \\
\zeta(11) &= \frac{92992}{4009} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11}(e^{\pi n} - 1)} - \frac{1617613}{64144} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11}(e^{2\pi n} - 1)} + \frac{1453}{64144} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11}(e^{4\pi n} - 1)} \\
\zeta(13) &= \frac{717696}{30953} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13}(e^{\pi n} - 1)} - \frac{124738499}{4952480} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13}(e^{2\pi n} - 1)} + \frac{2179}{4952480} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13}(e^{4\pi n} - 1)} \\
\zeta(15) &= \frac{3503872}{151129} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{15}(e^{\pi n} - 1)} - \frac{243606007}{9672256} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{15}(e^{2\pi n} - 1)} + \frac{13687}{9672256} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{15}(e^{4\pi n} - 1)} \\
\zeta(17) &= \frac{203545088}{8779521} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{17}(e^{\pi n} - 1)} - \frac{801871973691}{31840396160} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{17}(e^{2\pi n} - 1)} + \\
&\quad + \frac{2986673}{95521188480} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{17}(e^{4\pi n} - 1)} \\
\zeta(19) &= \frac{7893541888}{340474381} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{19}(e^{\pi n} - 1)} - \frac{168852101149}{6704726272} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{19}(e^{2\pi n} - 1)} \\
&\quad + \frac{7708537}{87161441536} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{19}(e^{4\pi n} - 1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta(9) &= \frac{64}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9(e^{\pi n} - 1)} + \frac{441}{20} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9(e^{2\pi n} - 1)} - 32 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9(e^{3\pi n} - 1)} - \frac{4763}{60} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9(e^{4\pi n} - 1)} \\
&\quad + \frac{529}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9(e^{6\pi n} - 1)} - \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9(e^{12\pi n} - 1)} \\
\zeta(5) &= \frac{-149}{43983} \pi^5 + \frac{785}{4344} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{12\pi n} - 1)} - \frac{22765}{4344} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{6\pi n} - 1)} + \frac{1570}{543} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{3\pi n} - 1)} \\
&\quad - \frac{61}{4344} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{20\pi n} - 1)} + \frac{1769}{4344} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{10\pi n} - 1)} - \frac{122}{543} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5(e^{5\pi n} - 1)}
\end{aligned}$$

Une formule intégrale pour $\zeta(3)$ est donnée par la formule suivante :

$$\zeta(3) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{u^2 du}{e^u - 1}$$

Citons la formule de Yu-Williams (1993) :

$$\zeta(3) = -2\pi^2 \sum_{n \geq 0} \frac{\zeta(2n)}{(2n+2)(2n+3)2^{2n}}$$

ainsi que la formule de Amdeberhan :

$$\zeta(3) = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{3n}{n} \binom{2n}{n}} \times \frac{(56n^2 - 32n + 5)}{(2n-1)^2}$$

Puis :

$$\zeta(3) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (205k^2 - 160k + 32) (k!)^2}{k^5 (2k)!}$$

Dans [14] on tire les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\zeta(2n+1) &= \frac{(-1)^n 2^{2n-1} \pi^{2n+1}}{(2^{2n+1} - 1)(2n)!} \int_0^1 \mathbf{E}_{2n}(x) \tan\left(\frac{1}{2}\pi x\right) dx \\
&= \frac{(-1)^n 2^{2n-1} \pi^{2n+1}}{(2^{2n+1} - 1)(2n)!} \int_0^1 \mathbf{E}_{2n}(x) \cot\left(\frac{1}{2}\pi x\right) dx = \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^1 \mathcal{B}_{2n+1}(x) \tan\left(\frac{1}{2}x\pi\right) dx \\
&= \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n} \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^1 \mathcal{B}_{2n+1}(x) \cot\left(\frac{1}{2}x\pi\right) dx
\end{aligned}$$

En 1979, Gutnik dans [11] a démontré que, $\forall q \in \mathbb{Q}$, il y a au moins un des deux nombres

$$3\zeta(3) + q\zeta(2), \quad \zeta(2) + 2q \log(2)$$

est irrationnel.

En 1981, dans [5] Beukers montre que dans les deux ensembles suivants, il y a au moins un nombre irrationnel :

$$\left\{ \frac{\pi^4}{\zeta(3)}; \frac{7\pi^4 \log(2)}{\zeta(3)} - 15\pi^2; \frac{7\pi^6}{3240\zeta(3)} - \zeta(3) \right\}$$

$$\left\{ \frac{\zeta(3)}{\pi^2}; \frac{\zeta(3)}{\pi^2} - \frac{\pi^4}{360}; \zeta(3)\pi^2 - 30\zeta(5); \frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\pi^2} - \frac{\pi^6}{2268} \right\}$$

T.Rivoal démontra dans [6],[7] qu'il y a une infinité de $\zeta(2n+1) \notin \mathbb{Q}$. Résultat dont nous allons présenter la démonstration.

Démonstration. (T.Rivoal)

Théorème.

Soit $a \equiv 1 \pmod{2}$ tel que $a \geq 3$, et $\delta(a)$ la dimension du \mathbb{Q} – espace vectoriel engendré par $1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(a)$. On a alors

$$\delta(a) \geq \frac{1}{3} \log a$$

De plus, $\forall \varepsilon > 0, \exists A(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$ tel que si $a > A(\varepsilon)$,

$$\delta(a) \geq \frac{1 - \varepsilon}{1 + \log 2} \log a$$

que l'on écrit aussi :

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta(3) + \dots + \mathbb{Q}\zeta(2n-1) + \mathbb{Q}\zeta(2n+1)) \geq \frac{1 - \varepsilon}{1 + \log 2} \log a$$

En conséquence, il y a une infinité de $\zeta(2n+1) \notin \mathbb{Q}$.

Critère d'indépendance linéaire de Nesterenko.

Considérons N réels $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ ($N \geq 2$) et supposons qu'il existe N suites $(p_{l,n})_{n \geq 0}$ tel que :

- $\forall l \in \{1; \dots; N\}, p_{l,n} \in \mathbb{Z}$
- Avec $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$,

$$\alpha_1^{n+o(n)} \leq \left| \sum_{l=1}^N p_{l,n} \xi_l \right| \leq \alpha_2^{n+o(n)}$$

- $\forall l \in \{1; \dots; N\}, |p_{l,n}| \leq \beta^{n+o(n)}$ avec $\beta > 1$.

Dans ces conditions :

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}\xi_1 + \mathbb{Q}\xi_2 + \dots + \mathbb{Q}\xi_N) \geq \frac{\log \beta - \log \alpha_1}{\log \beta - \log \alpha_1 + \log \alpha_2}$$

Résultats auxiliaires.

On utilise les polylogarithmes pour $|z| < 1$:

$$\text{Li}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)^n}$$

en particulier $\text{Li}_1(z) = -\log(1-z)/z$ et pour $n \geq 2$, $\text{Li}_n(1) = \zeta(n)$. La démarche de Nikishin conduit à introduire :

$$N_{n,a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-an-b+2)}{(k+1)^a(k+2)^a\dots(k+n)^a(k+n+1)^b} z^{-k}$$

avec $a, b, n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq b \leq a$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq 1$ avec $z \neq 1$. Ces séries fournissent des approximations de Padé de type I des polylogarithmes; spécialisées en $z = 1$, elles donnent donc des combinaisons linéaires à coefficients rationnels en les ζ impairs, les pairs et $\log(2)$.

Apéry, suggère plutôt que de prouver que chaque valeur de $\zeta(2n+1)$ soit irrationnel, qu'il serait plus judicieux de les considérer toutes ensembles afin de prouver leur indépendance linéaire sur \mathbb{Q} . Pour cela, il faut modifier la série de Nikishin de la façon suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_n(k)}{(k+1)^a \dots (k+n+1)^a} z^{-k}$$

où $q_n(k)$ est une fonction paire de $k + \frac{n}{2} + 1$. La parité de q_n assure en effet qu'une fois la fraction rationnelle décomposée en fractions partielles, les polynômes correspondant aux dénominateurs avec une puissance paire s'annulent pour $z = 1$: on obtient ainsi des combinaisons linéaires à coefficient rationnel uniquement en les ζ impairs.

La seconde idée est de paramétrer le nombre de zéros entiers de q_n par un entier r et d'ajuster celui-ci de sorte que les coefficients des combinaisons linéaires aient une croissance moins importante que pour la série de Nikishin, tout en gardant une décroissance rapide de la combinaison elle-même. Pour cela on introduit :

$$S_{n,a,r}(z) = n!^{a-2r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \dots (k-rn+1)(k+n+2) \dots (k+(r+1)n+1)}{(k+1)^a(k+2)^a \dots (k+n+2)^a} z^{-k}$$

où $n, a, r \in \mathbb{Z}$, $1 \leq r < \frac{a}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Les conditions sur a et r assure que $S_{n,a,r}(z)$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq 1$. Pour simplifier on écrit :

$$S_n(z) = n!^{a-2r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-rn+1)_{rn}(k+n+2)_{rn}}{(k+1)_{n+1}^a} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} R_n(k) z^{-k}$$

où $(\alpha)_k$ est le symbole de Pochhammer :

$$(\alpha)_0 = 1; (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1) \text{ si } k \in \mathbb{N}^*$$

On peut aussi remarquer que $S_n(z)$ est une fonction hypergéométrique généralisée :

$$S_n(z) = z^{-rn-1} n!^{a-2r} \frac{\Gamma(rn+1)^{a+1} \Gamma((2r+1)n+2)}{\Gamma((r+1)n+2)^{a+1}} \\ \times {}_{a+2}F_{a+1} \left(\begin{matrix} rn+1, \dots, rn+1, (2r+1)n+2 \\ (r+1)n+2, \dots, (r+1)n+2 \end{matrix} \middle| z^{-1} \right)$$

étudions plus précisément cette série.

On pose $D_\lambda = \frac{1}{\lambda!} \frac{d^\lambda}{dt^\lambda}$ et $R_n(t) = n!^{a-2r} \frac{(t-rn+1)_{rn}(t+n+2)_{rn}}{(t+1)_{n+1}^a}$

Pour $l \in \{1; \dots; a\}$ et $j \in \{0; \dots; n\}$, on note :

$$c_{l,j,n} = D_{a-l}(R_n(t)(t+j+1)^a)|_{t=-j-1} \in \mathbb{Q}$$

$$P_{0,n}(z) = - \sum_{l=1}^a \sum_{j=1}^n c_{l,j,n} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(k+1)^l} z^{j-k}$$

et

$$P_{l,n}(z) = \sum_{j=0}^n c_{l,j,n} z^j$$

Les $P_{l,n}(z)$ sont donc des polynômes à coefficients rationnels. Maintenant donnons un lemme qui fournit des combinaisons linéaire à coefficients rationnels en les ζ impairs, lorsque $n \equiv 0 \pmod{2}$.

Lemme 1.

On a

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{l=2}^a P_{l,n}(1) \zeta(l)$$

de plus, si $(n+1)a + l \equiv 1 \pmod{2}$, alors $P_{l,n}(1) = 0$ En particulier, si $n \equiv 0 \pmod{2}$ et $a \geq 3$ tel que $a \equiv 1 \pmod{2}$, $P_{l,n}(1) = 0 \ \forall l \in \{2; \dots; a\}$, avec $l \equiv 0 \pmod{2}$. Ainsi $S_n(1)$ est alors une combinaison linéaire uniquement en les ζ impairs :

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{l=1}^{(a-1)/2} P_{2l+1,n}(1) \zeta(2l+1)$$

ce lemme est démontré dans [7] pages 5-6.

Lemme 2.

Définissons l'intégrale :

$$I_n(z) = \int_{[0;1]^{a+1}} \left(\frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r (1-x_l)}{(z - x_1 x_2 \dots x_{a+1})^{2r+1}} \right)^n \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_{a+1}}{(z - x_1 x_2 \dots x_{a+1})^2}$$

qui converge a priori $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. La série $S_n(z)$ admet la représentation intégrale, pour $|z| \geq 1$:

$$S_n(z) = \frac{((2r+1)n+1)!}{n!^{2r+1}} z^{(r+1)n+2} I_n(z)$$

ce lemme est démontré dans [7] page 7.

Lemme 3.

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(1)|^{1/n} = \varphi_{r,a}$$

où

$$\varphi_{r,a} = ((r+1)s - r)^r (r+1 - rs)^{r+1} (1-s)^{a-2r}$$

avec

$$0 < \varphi_{r,a} \leq \frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}}$$

ce lemme est démontré dans [7] pages 8-9 et pages 9-10.

Lemme 4.

$\forall l \in \{0; \dots; a\}$, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |P_{l,n}(1)|^{1/n} \leq 2^{a-2r} (2r+1)^{2r+1}$$

ce lemme est démontré dans [7] pages 10-11.

Lemme 5.

On pose $d_n = \text{ppcm}(1; 2; \dots; n)$, alors pour $l \in \{0; \dots; a\}$ on a :

$$d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$$

ce lemme est démontré dans [7] pages 11-12-13.

Dès lors on applique le critère de Nesterenko pour démontrer le théorème, mais d'abord citons la proposition suivante.

Proposition.

Soient $a \geq 3$, tel que $a \equiv 1 \pmod{2}$ et $\forall z \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq r < \frac{a}{2}$, on a :

$$\delta(a) \geq \frac{(a-2r) \log 2 + (2r+1) \log(2r+1) - \log(\varphi_{r,a})}{a + (a-2r) \log 2 + (2r+1) \log(2r+1)}$$

où s est l'unique racine dans $]0; 1[$ du polynôme $Q(s) = r s^{a+2} - (r+1) s^{a+1} + (r+1) s - r$. En particulier :

$$\delta(a) \geq \frac{\log r + \frac{a-r}{a+1} \log 2}{1 + \log 2 + \frac{2r+1}{a+1} \log(r+1)}$$

Démonstration.

Du théorème des nombres premiers on tire que $d_n = e^{n+o(n)}$.

Notons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $l_n = d_{2n}^a S_{2n}(1)$ et pour $l \in \{1; \dots; (a-1)/2\}$, $p_{l,n} = d_{2n}^a P_{2l+1,2n}(1)$. L'équation

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{l=1}^{(a-1)/2} P_{2l+1,n}(1) \zeta(2l+1)$$

montre que l_n est une combinaison linéaire en les ζ impairs :

$$l_n = p_{0,n} + \sum_{l=1}^{(a-1)/2} p_{l,n} \zeta(2l+1)$$

Le fait que $d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$ montre que $\forall l \in \{0; \dots; (a-1)/2\}$ et $\forall n \geq 0$, $p_{l,n} \in \mathbb{Z}$. Ensuite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(1)|^{1/n} = \varphi_{r,a}$$

et

$$d_n = e^{n+o(n)}$$

montrent que pour $\kappa = e^a \varphi_{r,a}$, $\log |l_n| = 2n \log(\kappa) + o(n)$. Puis

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |P_{l,n}(1)|^{1/n} \leq 2^{a-2r} (2r+1)^{2r+1}$$

et

$$d_n = e^{n+o(n)}$$

impliquent que $\forall l \in \{[0; \dots; (a-1)/2]\}$, avec $\tau = e^a 2^{a-2r} (2r+1)^{2r+1}$, $\log |p_{l,n}| \leq 2n \log(\tau) + o(n)$. On peut donc appliquer le critère de Nesterenko avec $N = (a+1)/2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \kappa^2$ et $\beta = \tau^2$:

$$\delta(a) \geq \frac{\log(\tau) - \log(\kappa)}{\log(\tau)} = \frac{(a-2r)\log 2 + (2r+1)\log(2r+1) - \log(\varphi_{a,r})}{a + (a-2r)\log 2 + (2r+1)\log(2r+1)}$$

En utilisant la majoration du lemme 3, qui est $\varphi_{r,a} \leq 2^{r+1}/r^{a-2r}$, et l'encadrement :

$$2r \leq 2r+1 \leq 2(r+1)$$

on obtient

$$\delta(a) \geq \frac{\log r + \frac{a-r}{a+1} \log 2}{1 + \log 2 + \frac{2r+1}{a+1} \log(r+1)}$$

□

Démonstration du théorème.

Supposons $a \equiv 1 \pmod{2}$. Nous allons distinguer plusieurs cas :

- $3 \leq a \leq 167 < e^6$: le théorème d'Apéry donne $\delta(3) \geq 2$, d'où $\delta(a) \geq 2 \geq \frac{1}{3} \log a$.
- $169 \leq a \leq 8.10^3 - 1 < e^9$: On a $\delta(169) \geq 3$, d'où $\delta(a) \geq 3 \geq \frac{1}{3} \log a$.
- $8.10^3 + 1 \leq a \leq 10^5 - 1 < e^{12}$: la proposition donne avec $r = 200$, $\delta(8.10^3 + 1) > 3$, d'où $\delta(a) \geq 4 \geq \frac{1}{3} \log a$.
- $10^5 + 1 \leq a \leq 10^6 - 1 < e^{15}$: la proposition donne avec $r = 600$, $\delta(10^5 + 1) > 4$, d'où $\delta(a) \geq 5 \geq \frac{1}{3} \log a$.
- $a \geq 10^6 + 1$: on choisit $r = \lceil a^{3/2} + 1 \rceil < \frac{a}{2}$ dans la proposition, on obtient $\delta(a) \geq \frac{3}{5c(a)} \log a$

où $c(a) = 1 + \log(2) + \frac{2a^{3/5} + 3}{a+1} \log(a^{3/5} + 1)$ est décroissante et $c(10^6 + 1) < \frac{9}{5}$. Donc $\delta(a) \geq \frac{1}{3} \log a$.

Maintenant on choisit $r = r(a)$, comme l'entier $< \frac{a}{2}$ le plus proche de $a(\log(a))^{-2}$. On a alors

$$\log(r) + \frac{a-r}{a+1} \log(2) = (1 + o(1)) \log(a)$$

et

$$1 + \log(2) + \frac{2r+1}{a+1} \log(r+1) = 1 + \log(2) + o(1)$$

d'où

$$\delta(a) \geq \frac{(1+o(1))\log(a)}{1+\log(2)+o(1)}$$

ce qui prouve le théorème. □

Démonstration. (P.Colmez)

Si les $\mu_i \in \mathbb{R}$, pour $i \in I$, on note $\text{Vect}(\mu_i, i \in I)$ le sous \mathbb{Q} -espace vectoriel de \mathbb{R} engendré par les μ_i , et on note $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Vect}(\mu_i, i \in I)$ sa dimension.

Théorème.

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{Vect}(\zeta(2n+1), n \geq 1) = +\infty$$

Critère de Nesterenko.

μ_1 et μ_2 sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , s'il existe deux suites $(a_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers, et on a $i = 1; 2; \dots$ et telles que $a_{n,1}\mu_1 + a_{n,2}\mu_2 \neq 0$ pour n assez grand et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,1}\mu_1 + a_{n,2}\mu_2 = 0$$

En effet, si $\mu_2 = \frac{c}{d} \mu_1$, avec $d \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{Z}$, alors si $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ et $a_1\mu_1 + a_2\mu_2 \neq 0$:

$$|a_1\mu_1 + a_2\mu_2| = \left| \frac{da_1 + ca_2}{d} \right| |\mu_1| \geq \frac{1}{d} |\mu_1|$$

On a dans le cas générale :

Théorème (critère de Nesterenko).

Soient $\mu_1, \dots, \mu_b \in \mathbb{R}$. On suppose que : $\exists B > 1$ et $\exists A > 1$ et des combinaisons linéaires :

$$L_n = a_{n,1}\mu_1 + \dots + a_{n,b}\mu_b$$

pour $n \in \mathbb{N}$, à coefficient entiers, vérifiant :

•

$$\sum_{1 \leq j \leq b} |a_{n,j}| \leq B^{n+o(n)}$$

•

$$|a_{n,1}\mu_1 + \dots + a_{n,b}\mu_b| = A^{-n+o(n)}$$

Alors

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{Vect}(\mu_1, \dots, \mu_b) \geq 1 + \frac{\log A}{\log B}$$

Résultat démontré dans [47] page 498, relatant la preuve de Fisler-Zudulin de 2010.

Lemme 1.

Soit la série convergeant absolument

$$\sum_{m \geq 1} F(m)$$

et on a

$$\sum_{m=1}^{\infty} F(m) = \sum_{k=2}^a a_k \zeta(k) - \sum_{k=1}^a \sum_{j \geq 0} a_{j,k} \left(\sum_{u=1}^j \frac{1}{u^k} \right)$$

démontré dans [47] page 499.

Choix de fonctions rationnelles.

Soient $a, r \in \mathbb{N}$, $2r \leq a$ et $r \geq 1$. On cherche des combinaisons linéaires à coefficients entiers entre 1 et les $\zeta(k)$, $k \leq a$. Soit

$$\begin{aligned} F_n(X) &= (n!)^{a-2r} \frac{(X-rn)(X-rn+1)\dots(X+(r+1)n)}{(X(X+1)\dots(X+n))^{n+1}} \\ &= (n!)^{a-2r} \frac{(X-rn)\dots(X-1)(X+n+1)\dots(X+(r+1)n)}{(X(X+1)\dots(X+n))^a} \end{aligned}$$

Soit aussi $a_{j,k}^{(n)}$, pour $0 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq a$ et $a_k^{(n)}$ pour $1 \leq k \leq 0$.

$$F_n(X) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^a \frac{a_{j,k}^{(n)}}{(X+j)^k} \quad \text{et} \quad a_k^{(n)} = \sum_{j=0}^n a_{j,k}^{(n)}$$

F_n de degré $(2r+1)n+1-(n+1)(a+1)=(2r-a)n-a \leq -a \leq -2$ et a des pôles d'ordre a en $0; -1; \dots; -n$. D'après le lemme 1, la série

$$S_n = \sum_{m \geq 1} F_n(m)$$

converge donc absolument, et on a :

$$S_n = \beta^{(n)} + \sum_{k=2}^a a_k^{(n)} \zeta(k) \quad \text{avec} \quad \beta^{(n)} = - \sum_{k=1}^a \sum_{j=0}^n a_{j,k}^{(n)} \left(\sum_{u=1}^j \frac{1}{u^k} \right)$$

- $F_n(1) = \dots = F_n(m) = 0$, ce qui montre que S_n ne commence qu'à $m = rn + 1$, c'est-à-dire

$$S_n = \sum_{m \geq 0} F_n(rn + m + 1)$$

donc S_n est petit.

- $F_n(m) \geq 0$ si $m \geq 1$, donc $S_n \neq 0$.
- F_n vérifie $F_n(-n-X) = (-1)^{(n+1)a} F_n(X)$, ce qui fournit si $1 \leq k \leq a$ et $0 \leq j \leq n$:

$$a_{n-j,k}^{(n)} = (-1)^{k+(n+1)a} a_{j,k}^{(n)}$$

Ces relations impliquent que $a_k^{(n)} = 0$ si $k + (n+1)a \equiv 1 \pmod{2}$

Pour garder que les entiers impairs, il suffit de prendre $a \equiv 1 \pmod{2}$ et $n \equiv 0 \pmod{2}$.

Pour appliquer le critère de Nesterenko, il s'agit d'évaluer S_n , majorer $a_k^{(n)}$, et le ppcm de leurs dénominateurs, car on a besoin de combinaisons linéaires à coefficients entiers.

Propriétés sur d_n .

d_n , le ppcm de $1; 2; \dots; n$. Si $1 \leq k \leq a$ et $0 \leq j \leq n$, alors $d_n^{a-k} a_{k,j}^{(n)} \in \mathbb{Z}$ et :

$$\left| a_{k,j}^{(n)} \right| \leq (2n)^{n-1} (n-1)! 2^{na} (r+1)^{2(r+1)n}$$

Corollaire.

- $d_n^a \beta^{(n)} \in \mathbb{Z}$ et $d_n^{a-k} a_k^{(n)} \in \mathbb{Z}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{2; \dots; a\}$.
- Si $\delta > 2^a (r+1)^{2r+2}$, alors $|\beta^{(n)}| = O(\delta^n)$ et $|a_k^{(n)}| = O(\delta^n) \forall k \in \{2; \dots; a\}$.

Démontré dans [47] pages 501-502.

Estimation de S_n .

Une expression intégrale va nous permettre d'étudier le comportement asymptotique de S_n .

Proposition.

•

$$\exists A_0 > 0 \left| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{1/n} = A_0 \right.$$

- $A_0 \leq (2r+1)^{2r+1} r^{2r-a}$

Lemme 2.

Si $a, b \in \mathbb{N}$, alors :

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}$$

Démonstration.

Il s'agit d'un cas particulier de

$$\int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

on a aussi

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \frac{b}{1+a} \int_0^1 x^{a+1} (1-x)^{b-1} dx$$

□

Proposition.

$$S_n = \frac{((2r+1)n+1)!}{(n!)^{2r+1}} \int_{[0;1]^{a+1}} \frac{\prod_{l=1}^{a+1} (1-x_l)^n dx_l}{(1-x_1 \dots x_{a+1})^{(2r+1)n+2}}$$

démontré dans [47] pages 503-504.

Utilisation du critère de Nesterenko.**Proposition.**

- $\exists \gamma > 1$ tel que $d_n = O(\gamma^n)$

- minoration de la dimension du \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les $\zeta(2j+1)$. La proposition suivante fournit une minoration non triviale de $\delta(a)$.

Proposition.

Soit $a \geq 3$ tel que $a \equiv 1 \pmod{2}$. Soit $\delta(a)$ la dimension du \mathbb{Q} -espace vectoriel de \mathbb{R} engendré par 1 et les $\zeta(k)$ ($k \equiv 1 \pmod{2}$). $2 \leq k \leq a$. Alors $\forall r \leq \frac{a}{2}$, $\delta(a)$ minorée par

$$1 + \frac{(1-2r) \log r - a \log \gamma - (2r+1) \log(2r+1)}{a \log 2\gamma + (2r+2) \log(r+1)}$$

démontré dans [47] page 505.

En prenant $r = \frac{a}{(\log a)^2} + O(1)$, on voit que $\delta(a)$ est minorée par $1 + \frac{\log a}{\log 2\gamma} + o(1)$, en particulier $\delta(a) \rightarrow \infty$. Ce qui termine la démonstration du théorème. \square

T.Rivoal démontra dans [8] qu'au moins l'un des $\{\zeta(5); \zeta(7); \dots \zeta(21)\} \notin \mathbb{Q}$, amélioration du théorème de 2 de [7] disant qu'il existe au moins au entier j tel que $5 \leq j \leq 169$ pour lequel $\zeta(j) \notin \mathbb{Q}$.

Puis W.Zudilin démontra dans [9],[10] qu'au moins un des nombres parmi

$$\{\zeta(5); \zeta(7); \zeta(9); \zeta(11)\} \notin \mathbb{Q}$$

L'équation fonctionnelle.

Bernhard Riemann démontra dans [12] que la fonction zêta de Riemann vérifie l'équation fonctionnelle préalablement conjecturé par Leonhard Euler :

$\forall s \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$:

$$\zeta(s) = 2 \cdot (2\pi)^{s-1} \cdot \Gamma(s-1) \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s)$$

On rajoute d'autres formes de cette équation :

$$(2\pi)^s \cdot e^{i\pi s/2} (1 + e^{i\pi(s-1)}) \zeta(1-s) = (1 - e^{2i\pi(s-1)}) \Gamma(s) \zeta(s)$$

et

$$(2\pi)^s \zeta(1-s) = e^{-i\pi s/2} (1 - e^{i\pi(s-1)}) \Gamma(s) \zeta(s) = 2 \sin \frac{\pi(1-s)}{2} \Gamma(s) \zeta(s)$$

avec la formule de duplication :

$$\pi^s \zeta(1-s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{\pi(1-s)}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \zeta(s)$$

et avec la formule des compléments :

$$\pi^s \zeta(1-s) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \zeta(s)$$

ou

$$\pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

De plus Hamburger et Siegel ont montré que la seule fonctions qui satisfait l'équation fonctionnelle est la fonction zêta de Riemann. Une preuve est donnée dans [15] page 31-32.

En méttant d'un côté $\zeta(1-s)$ on a :

$$\zeta(1-s) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \zeta(s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s) = \frac{(2\pi)^{1-s}}{2\Gamma(1-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)} \zeta(s)$$

On peut citer aussi :

$$\zeta(s) = \frac{1}{(s-1)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k-\frac{s}{2}+1\right)}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (2j+1) \zeta(2j+2)$$

Démonstration. (Baez-Duarte (2003)).

Soit

$$\zeta(s) = -s \int_0^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{1+s}} du$$

valable pour $0 < \text{Re}(s) < 1$.

On a ainsi en faisant un changement de variable dans l'intégrale, en posant $u = 2v$:

$$\zeta(s) = -s \int_0^{\infty} 2^{-s} \frac{\{2v\}}{v^{1+s}} dv$$

on soustrait alors les deux quantités, après avoir sorti la puissance de 2. On a ainsi :

$$(2^s - 1)\zeta(s) = -s \int_0^{\infty} \frac{\{u\} - \{2u\}}{u^{1+s}} du$$

on développe la partie fractionnaire en série de Fourier :

$$(2^s - 1)\zeta(s) = - \int_0^{\infty} u^{-1-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(4n\pi u) - \sin(2n\pi u)}{n\pi} du$$

et grâce au théorème de convergence monotone, on obtient :

$$(2^s - 1)\zeta(s) = -s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int_0^{\infty} u^{-1-s} (\sin(4n\pi u) - \sin(2n\pi u)) du$$

que l'on peut calculer. On trouve ainsi pour $-1 < s < 0$, l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int_0^{\infty} u^{-1-s} (\sin(4n\pi u) - \sin(2n\pi u)) du = (2^s - 1) 2^s \pi^{s-1} \Gamma(-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

mais cette égalité reste valable pour $0 \leq s \leq 1$, par prolongement analytique on obtient alors :

$$(2^s - 1)\zeta(s) = -s(2^s - 1) 2^s \pi^{s-1} \Gamma(-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

donc, on déduit immédiatement la relation pour $0 < \sigma < 1$. On l'étend immédiatement à $\mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ par prolongement analytique.

□

De la relation fonctionnelle, on déduit :

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s)$$

la fonction ξ définie par :

$$\xi(s) := \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

Démonstration.

Lemme

Pour $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2 - 2i\pi x y} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi y^2}{t}}$$

Puisque

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2 t} dx = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Dès lors, posons

$$\Phi(x) := e^{-\pi x^2 t}$$

La transformée de Fourier de cette fonction vaut

$$\hat{\Phi}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) e^{-2i\pi x y} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi y^2}{t}}$$

or la fonction Φ est à décroissance rapide à l'infini, donc la formule sommatoire de Poisson s'applique :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{\Phi}(n)$$

ce qui donne :

$$\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{\Phi}(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi y^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

Démonstration de l'équation

On suppose $\sigma > 1$. Du changement de variable $t \rightarrow \pi n^2 t$ on a :

$$\int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} dt = n^{-s} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

La série

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$$

est absolument convergente, on déduit :

$$\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} dt = \int_0^{\infty} \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} dt$$

Soit

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\theta(t) - 1) t^{\frac{s}{2}-1} dt$$

On introduit la fonction de Poisson $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\theta(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t}$$

absolument convergente, et en vertu du lemme on a aussi l'équation fonctionnelle :

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

Maintenant l'équation

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\theta(t) - 1) t^{\frac{s}{2}-1} dt$$

s'écrit aussi :

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\theta(t) - 1) t^{\frac{s}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right) - 1 \right) t^{\frac{s}{2}-1} dt + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} (\theta(t) - 1) t^{\frac{s}{2}-1} dt$$

en posant $u = \frac{1}{t}$ dans la première intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right) - 1 \right) t^{\frac{s}{2}-1} dt &= -\frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{s}{2}-1} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \theta\left(\frac{1}{t}\right) t^{\frac{s-2}{2}} dt \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \theta(u) u^{-\frac{s+1}{2}} du = -\frac{1}{s} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} u^{-\frac{s+1}{2}} du + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} (\theta(u) - 1) u^{-\frac{s+1}{2}} du \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} (\theta(u) - 1) u^{-\frac{s+1}{2}} du \end{aligned}$$

Si maintenant on additionne cette dernière expression avec la deuxième intégrale, on obtient $\forall s \in \mathbb{C} \mid \sigma > 1$:

$$\xi(s) = \frac{-1}{s(1-s)} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\theta(t) - 1}{t} \left(\frac{s}{t^2} + t^{\frac{1-s}{2}} \right) dt$$

qui semble être invariante par $s \mapsto 1-s$.

La fonction $\theta(t) - 1$ étant une fonction à décroissance rapide à l'infini, en appliquant le théorème de Morera et le théorème de Fubini, on obtient que la fonction

$$\int_1^{\infty} \frac{\theta(t) - 1}{t} \left(\frac{s}{t^2} + t^{\frac{1-s}{2}} \right) dt$$

est holomorphe sur \mathbb{C} . Grâce au théorème du prolongement analytique, la formule précédente valable sur tout le domaine de définition de la fonction ξ . Cela permet de la prolonger en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^* \setminus \{1\}$. De plus le terme de droite est invariant par $s \mapsto 1 - s$, donc ξ l'est aussi, ce qui implique bien la relation annoncée. \square

Démonstration. (Riemann)

En partant de l'équation

$$\zeta(z) = \frac{1}{2 \sin \pi z \Gamma(z)} i \int_{\infty - i0}^{\infty + i0} \frac{(-\lambda)^{z-1}}{e^\lambda - 1} d\lambda$$

on a :

$$2 \sin \pi z \Gamma(z) \zeta(z) = i \int_{\infty - i0}^{\infty + i0} \frac{(-\lambda)^{z-1}}{e^\lambda - 1} d\lambda$$

Par le théorème des résidus :

$$\int_{|\lambda - 2\pi i n| = \varepsilon} \frac{(-\lambda)^{z-1}}{e^\lambda - 1} d\lambda$$

vaut

$$(-2i\pi) \operatorname{Res} \left[\frac{(\lambda - 2\pi i n)}{e^\lambda - 1} \right]_{\lambda = 2\pi i n} = -2\pi i \lim_{\lambda \rightarrow 2\pi i n} \left[(\lambda - 2\pi i n) \frac{(-\lambda)^{z-1}}{e^\lambda - 1} \right]$$

par la règle de l'hospital :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 2i\pi n} \frac{(\lambda - 2i\pi n)}{e^\lambda - 1} = \lim_{\lambda \rightarrow 2i\pi n} \frac{1}{e^\lambda} = 1$$

D'où, autour de la singularité $\lambda = 2i\pi n$, l'intégrale vaut :

$$(-2i\pi) \lim_{\lambda \rightarrow 2i\pi n} (-\lambda)^{z-1} = (-2i\pi)(-2i\pi n)^{z-1}$$

de même pour la singularité $\lambda = -2i\pi n$, l'intégrale vaut

$$(-2i\pi)(2i\pi n)^{z-1}$$

L'intégrale autour du domaine de complémentarité est la somme de l'intégrale autours de toutes les singularités et est égales à

$$(-2i\pi) \sum_{n \geq 1} [(-2i\pi n)^{z-1} + (2i\pi n)^{z-1}] = -i(2\pi)^z [(-i)^{z-1} + (i)^{z-1}] \sum_{n \geq 1} n^{z-1}$$

Ainsi :

$$2 \sin \pi z \Gamma(z) \zeta(z) = (2\pi)^z [(-i)^{z-1} + i^{z-1}] \zeta(1 - z)$$

où :

$$[(-i)^{z-1} + i^{z-1}] = i(-i)^z - i(i)^z = i[e^{z \log(-i)} - e^{z \log(i)}] = i[e^{z(-i\pi/2)} - e^{z(i\pi/2)}] = 2 \sin \frac{\pi z}{2}$$

On obtient ainsi, l'équation fonctionnelle de zêta :

$$2 \sin \pi z \Gamma(z) \zeta(z) = (2\pi)^z \cdot 2 \sin \frac{\pi z}{2} \zeta(1 - z)$$

\square

Les zéros de la fonction zêta situés dans le demi-plan des nombres complexes de partie réelle strictement négative sont les entiers pairs strictement négatifs, appelés zéros triviaux. Les autres zéros se trouvent dans la bande des nombres complexes dont la partie réelle est comprise dans l'intervalle $[0;1]$, ces zéros sont symétriques par rapport à la droite réelle et par rapport à la droite des nombres complexes dont la partie réelle vaut $\frac{1}{2}$. Cela résulte du fait que Γ ne possède aucun zéro, et que ζ ne n'en possède aucun de partie imaginaire strictement supérieure à 1.

De même avec la formule des compléments et la formule de duplication on a :

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= 2^s\pi^{\frac{s}{2}-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \\ &= 2^s\pi^{\frac{s}{2}-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left[2^{-s}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\right]\zeta(1-s) \\ &= \pi^{-\frac{1-s}{2}}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\pi}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\right]\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)\end{aligned}$$

D'où la formule :

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

Démonstration.

Pour $\sigma > 0$:

$$\int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}dx = \frac{1}{n^s}\int_0^\infty y^{s-1}e^{-y}dy = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$$

Si $\sigma > 0$, on a :

$$\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{n^s\pi^{\frac{s}{2}}}$$

d'où (avec la convergence absolue) si $\sigma > 1$:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)}{\pi^{\frac{s}{2}}} = \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n \geq 1} e^{-n^2\pi x}dx$$

Dès lors notons :

$$\psi(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-n^2\pi x}$$

nous avons alors pour $\sigma > 1$:

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx$$

et pour $x > 0$, on sait que

$$\sum_{n=-\infty}^\infty e^{-n^2\pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-n^2\pi/x}$$

et

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ 2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right\}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}s-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \right\} dx + \int_1^\infty x^{\frac{1}{2}s-1} \psi(x) dx \\
&= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx \\
&= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) \psi(x) dx
\end{aligned}$$

la dernière intégrale est convergente pour tout s , et donc la formule l'est aussi par prolongement analytique. Puis le côté droit reste inchangé par $s \mapsto 1-s$, d'où :

$$\pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}+\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

□

Démonstration.

De la forme intégrale pour $\sigma > 1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

on a

$$\zeta(s) \Gamma(s) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) x^{s-1} dx + \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

pour $0 < \sigma < 1$

$$\frac{1}{s-1} = - \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{x} dx$$

d'où pour $0 < \sigma < 1$:

$$\zeta(s) \Gamma(s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) x^{s-1} dx$$

qui donne

$$\zeta(s) \Gamma(s) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) x^{s-1} dx - \frac{1}{2s} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) x^{s-1} dx$$

et cela par prolongement analytique pour $\sigma > -1$; mais

$$\int_1^\infty \frac{1}{2} x^{s-1} dx = -\frac{1}{2s} \quad (-1 < \sigma < 0)$$

d'où pour $-1 < \sigma < 0$:

$$\zeta(s) \Gamma(s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) x^{s-1} dx$$

et

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + 2x \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4n^2\pi^2 + x^2}$$

d'où avec la convergence absolue sur $-1 < \sigma < 0$:

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\zeta(s) &= \int_0^\infty 2x \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2\pi^2 + x^2} x^{s-1} dx = 2 \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty \frac{x^s}{4n^2\pi^2 + x^2} dx \\ &= 2 \sum_{n \geq 1} (2n\pi)^{s-1} \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2} s\pi} = \frac{\pi^s 2^{s-1}}{\cos \frac{1}{2} s\pi} \zeta(1-s)\end{aligned}$$

□

Démonstration.

Soit la formule de Kloosterman issue de [16] :

$$\zeta(s) = \frac{e^{i\pi s}}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left\{ \frac{\Gamma'(1+z)}{\Gamma(1+z)} - \log z \right\} z^{-s} dz$$

pour $-1 < c < 0$. En transformant cette intégrale le long de l'axe réel positif, on obtient pour $0 < \sigma < 1$:

$$\zeta(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \log x \right\} x^{-s} dx$$

et d'après Whittaker et Watson, on voit que :

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \log x - \frac{1}{2x} - 2 \int_0^\infty \frac{t dt}{(t^2 + x^2)(e^{2\pi t} - 1)}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \log x &= \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x} - \log x = \frac{1}{2x} - 2 \int_0^\infty \frac{t dt}{(t^2 + x^2)(e^{2\pi t} - 1)} \\ &= -2 \int_0^\infty \frac{t}{t^2 + x^2} \left(\frac{1}{e^{2\pi t} - 1} - \frac{1}{2\pi t} \right) dt\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{2 \sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty x^{-s} dx \int_0^\infty \frac{t}{t^2 + x^2} \left(\frac{1}{e^{2\pi t} - 1} - \frac{1}{2\pi t} \right) dt \\ &= \frac{2 \sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{2\pi t} - 1} - \frac{1}{2\pi t} \right) t dt \int_0^\infty \frac{x^{-s}}{t^2 + x^2} dx \\ &= \frac{\sin \pi s}{\cos \frac{1}{2} \pi s} \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{2\pi t} - 1} - \frac{1}{2\pi t} \right) t^{-s} dt = 2 \sin \frac{1}{2} \pi s (2\pi)^{s-1} \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right) u^{-s} du \\ &= 2 \sin \frac{1}{2} \pi s (2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)\end{aligned}$$

□

Formules d'approximations et estimations dans le plan.

La plupart des résultats présentés sont dû à Hardy et Littlewood, issue de [17].

Lemme de Van Der Corput.

Soit $f \in C^1([a; b])$ telle que $f'(t)$ soit monotone sur $]a; b[$. On pose :

$$\alpha := \inf_{a < t < b} f'(t) , \quad \beta := \sup_{a < t < b} f'(t)$$

alors $\forall \varepsilon > 0$, on a :

$$\sum_{1 < n \leq b} e(f(n)) = \sum_{\alpha - \varepsilon < \nu < \beta + \varepsilon} \int_a^b e(f(t)) - \nu(t) dt + \mathcal{O}_\varepsilon(\ln(\beta - \alpha + 2))$$

Une démonstration est fournie à la page 132-133 de [18].

Théorème.

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + \mathcal{O}(x^{-\sigma})$$

uniformément pour $\sigma > \sigma_0 > 0$ avec $0 < \delta < 1$, $x \geq 1$, $0 < |t| \leq (1 - \delta)2\pi x$.

Lemme.

Pour $\sigma > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq N} n^{-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - s \int_N^\infty \frac{\langle t \rangle}{t^{s+1}} dt$$

Démonstration.

Pour $\sigma > 1$, on a

$$\zeta(s) - \sum_{n \leq N} n^{-s} = \int_N^\infty \frac{d\lfloor t \rfloor}{t^s} = -\frac{N^{1-s}}{1-s} - \int_N^\infty \frac{d\langle t \rangle}{t^s} = -\frac{N^{1-s}}{1-s} - s \int_N^\infty \frac{\langle t \rangle}{t^{s+1}} dt$$

valable pour $\sigma > 0$ par prolongement analytique. □

Démonstration du théorème.

Lorsque $|t| \leq (1 - \delta)2\pi x$, on a $\forall y \geq x$:

$$\sum_{x < n \leq y} n^{-it} = \int_x^y t^{-it} dt + \mathcal{O}(1)$$

d'après le lemme de Van Der Corput appliqué à $f(t) := -\left(\frac{t}{2\pi}\right) \ln t$ qui satisfait à $|f'(t)| \leq 1 - \delta$ pour $x \leq t \leq y$. On peut donc écrire pour $N \geq x$:

$$\sum_{x < n \leq N} n^{-s} = \int_x^N \frac{dy}{y^s} + \int_x^N \frac{d\{\mathcal{O}(1)\}}{y^\sigma} = \frac{N^{1-s} - x^{1-s}}{1-s} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^\sigma}\right)$$

en remplaçant dans

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq N} n^{-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - s \int_N^\infty \frac{\langle t \rangle}{t^{s+1}} dt$$

puis avec $N \longrightarrow +\infty$, on obtient le résultat annoncé.

L'équation fonctionnelle approchée.

L'équation fonctionnelle de zêta s'écrit :

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\zeta(s) = \chi(s) \zeta(1-s)$$

L'équation fonctionnelle approchée et les résultats suivant sont dû à Hardy, Littlewood et Siegel.

Soit, $\forall \delta > 0$, dans $0 \leq \sigma \leq 1$, avec $x > \delta$ et $y > \delta$, $t = 2x\pi y$, on a :

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} + \chi(s) \sum_{n \leq y} n^{s-1} + \mathcal{O}\left(x^{-\sigma} + t^{\frac{1}{2}-\sigma} y^{\sigma-1}\right)$$

Une démonstration est présente au chapitre 4 de [15].

Dès lors fixons $\sigma = \frac{1}{2}$ et $x = y = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$, alors l'équation fonctionnelle approchée donne

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{n \leq x} n^{-\frac{1}{2}-it} + \chi\left(\frac{1}{2} + it\right) \sum_{n \leq x} n^{-\frac{1}{2}+it} + \mathcal{O}\left(t^{-\frac{1}{4}}\right)$$

Ceci peut être mit sous une autre forme, nous avons :

$$\chi\left(\frac{1}{2} + it\right) \chi\left(\frac{1}{2} - it\right) = 1$$

donc que

$$\left| \chi\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| = 1$$

Soit $\vartheta(t) = -\frac{1}{2} \arg \chi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \vartheta$ donc $\chi\left(\frac{1}{2} + it\right) = e^{-2i\vartheta}$.

Soit

$$Z(t) = e^{i\vartheta} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \left\{ \chi\left(\frac{1}{2} + it\right) \right\}^{-\frac{1}{2}} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

Avec

$$\left\{ \chi\left(\frac{1}{2} + it\right) \right\}^{-\frac{1}{2}} = \pi^{-\frac{it}{2}} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{it}{2}\right)} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^{-\frac{it}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)}{\left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \right|}$$

nous avons aussi

$$Z(t) = -2\pi^{\frac{1}{4}} \frac{\xi\left(\frac{1}{2} + it\right)}{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \right|}$$

ainsi pour $t \in \mathbb{R}$, $Z(t) \in \mathbb{R}$, et :

$$|Z(t)| = \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|$$

Maintenant :

$$e^{i\vartheta} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = e^{i\vartheta} \left(\sum_{n \leq x} n^{-\frac{1}{2}-it} + \chi\left(\frac{1}{2} + it\right) \sum_{n \leq x} n^{-\frac{1}{2}+it} + \mathcal{O}\left(t^{-\frac{1}{4}}\right) \right)$$

avec $\chi\left(\frac{1}{2} + it\right) = e^{-2i\vartheta}$, c'est-à-dire $e^{i\vartheta} \chi\left(\frac{1}{2} + it\right) = e^{-i\vartheta}$, et donc on obtient :

$$Z(t) = e^{i\vartheta} \sum_{n \leq x} n^{-\frac{1}{2}-it} + e^{-i\vartheta} \sum_{n \leq x} n^{-\frac{1}{2}+it} + \mathcal{O}\left(t^{-\frac{1}{4}}\right) = 2 \sum_{n \leq x} n^{-\frac{1}{2}} \cos(\vartheta - t \log n) + \mathcal{O}\left(t^{-\frac{1}{4}}\right)$$

Citons aussi la formule :

$$Z(t) = 2 \sum_{n=1}^m \frac{\cos(\vartheta - t \log n)}{\sqrt{n}} + (-1)^{m-1} \left(\frac{2\pi}{t} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{\cos\left\{t - (2m+1)\sqrt{2\pi t} - \frac{\pi}{8}\right\}}{\cos \sqrt{2\pi t}} + \mathcal{O}\left(t^{-\frac{1}{4}}\right)$$

une démonstration est fournie dans [15].

Estimations dans le plan.

- Sur $\sigma > 1$

ζ satisfait :

$$\frac{\zeta(2\sigma)}{\zeta(\sigma)} \leq |\zeta(\sigma + it)| \leq \zeta(\sigma)$$

et donc ζ n'a aucun zéro sur ce demi-plan. On a aussi :

$$\zeta^3(\sigma) |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1$$

Démonstration.

On applique le théorème de Mertens à la fonction

$$F(s) = \log \zeta(s) = - \sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda(n)}{n^s \ln n}$$

convergente pour $\sigma > 1$

□

- Sur $\sigma = 0$

De la relation fonctionnelle et la formule des compléments, on tire $\forall t \neq 0$:

$$|\zeta(it)| = \sqrt{\frac{t}{\pi \operatorname{sh}(\pi t)}} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi |t|}{2}\right) |\zeta(1 + it)|$$

ainsi :

$$|\zeta(it)| = \mathcal{O}(\sqrt{|t|} \ln^{2/3}|t|)$$

Calculons $\zeta(0)$:

$$\begin{aligned}\zeta(0) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \zeta(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} 2^s \pi^{s-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi s}{2} \right)^{2n+1} \right) \Gamma(1-s) \\ &\quad \left(\frac{1}{(1-s)-1} + 1 - (1-s) \int_1^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{(1-s)+1}} dx \right)\end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{s+1}} dx \\ \zeta(0) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \left(\frac{\pi s}{2} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi s}{2} \right)^{2n} \right) \Gamma(1-s) \\ &\quad \left(\frac{1}{-s} + 1 - (1-s) \int_1^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{2-s}} dx \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} 2^s \pi^{s-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi s}{2} \right)^{2n} \right) \Gamma(1-s) s \left(\frac{1}{-s} + 1 - (1-s) \int_1^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{2-s}} dx \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} 2^{s-1} \pi^s \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi s}{2} \right)^{2n} \right) \Gamma(1-s) \left(-1 + s - s(1-s) \int_1^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{2-s}} dx \right) \\ &= \left(\lim_{s \rightarrow 0^+} 2^{s-1} \pi^s \Gamma(1-s) \left(-1 + s - s(1-s) \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{2-s}} dx \right) \right) \left(\lim_{s \rightarrow 0^+} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi s}{2} \right)^{2n} \right) \\ &= \left(2^{0-1} \pi^0 \Gamma(1-0) \left(-1 + 0 - 0(1-0) \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{2-0}} dx \right) \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi \times 0}{2} \right)^{2n} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \Gamma(1) \times (-1 + 0 - 0) \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \right) = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

- Sur $\sigma < 0$

De l'équation fonctionnelle, la formule de Stirling et le comportement asymptotique de $\sin(\sigma + it)$, on a :

$$|\zeta(\sigma + it)| \ll \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}-\sigma}$$

- Sur $\sigma = 1$

ζ ne converge pas sur $\sigma = 1$, nous le verrons après. Le comportement de $\zeta(s)$ quand $s \rightarrow 1$.

$$\frac{1}{n^s} = s \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^{s+1}} = s \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{s+1}}$$

par sommation pour $\sigma > 1$.

$$\zeta(s) = s \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{s+1}} = s \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{n \leq k} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{s+1}} \right) = s \sum_{k \geq 1} k \cdot \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{s+1}}$$

la dernière sommation est de la forme

$$\zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{[t]}{t^{s+1}} dt = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt$$

où $\{t\} = t - [t]$. Quand $s = 1$, la dernière intégrale de

$$\zeta(s) = s \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{s+1}} = s \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{n \leq k} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{s+1}} \right)$$

vaut

$$\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{t-n}{t^2} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^\infty \frac{dt}{t} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} = 1 - \gamma$$

on obtient donc pour $s \rightarrow 1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$$

en fait :

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \gamma$$

Vers 1350, Oresme montre dans ses *Quaestiones super geometriam Euclidis* que

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

L'ordre de ζ dans la bande critique $0 < \sigma < 1$.

Soit pour $\sigma > 0$:

$$\left| \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| = \left| \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{s}{2}-1} du \right| \leq \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{\sigma}{2}-1} du = \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \mathcal{O}(e^{A\sigma \log \sigma})$$

avec $\sigma \geq \frac{1}{2}$ et $|s-1| > A$, et :

$$\zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}$$

on a :

$$\zeta(s) = \mathcal{O}\left(|s| \int_1^\infty \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}\right) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(|s|)$$

On définit la fonction (qui sera détaillé par la suite) ξ où ses racines sont les zéros non triviaux de ζ :

$$\xi(s) := \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

donne pour $\sigma \geq \frac{1}{2}$ et $|s| > A$:

$$\xi(s) = \mathcal{O}(e^{A|s| \log |s|})$$

de plus avec :

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

cela prends pour $\sigma \leq \frac{1}{2}$ aussi.

La bande critique désigne l'intervalle de valeurs de σ pour lesquelles $0 \leq \sigma \leq 1$, mais les cas 0 et 1 peuvent être étudié séparément comme nous l'avons fait.

La fonction $\zeta(s)$ est délimitée dans tout le demi-plan $\sigma > 1 + \delta > 1$.

Avec l'équation

$$\zeta(s) = \mathcal{O}\left(|s| \int_1^\infty \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}\right) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(|s|)$$

on a $\zeta(s) = \mathcal{O}(|t|)$ pour $\sigma \geq \frac{1}{2}$. Pour $\sigma < \frac{1}{2}$ on utilise l'équation fonctionnelle

$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$$

où $\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{s\pi}{2} \Gamma(1-s)$, on fixe $\alpha \leq \sigma \leq \beta$, comme $t \rightarrow +\infty$

$$|\chi(s)| \sim \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma}$$

Par

$$\chi(s) = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\sigma+it-\frac{1}{2}} e^{i\left(t+\frac{\pi}{4}\right)} \left\{1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{4}\right)\right\}$$

D'où pour $\sigma \leq -\delta < 0$:

$$\zeta(s) = \mathcal{O}\left(t^{\frac{1}{2}-\sigma}\right)$$

et pour $\sigma \geq -\delta$:

$$\zeta(s) = \mathcal{O}\left(t^{\frac{3}{2}+\delta}\right)$$

Ainsi dans tout le demi-plan $\sigma \geq \sigma_0$:

$$\zeta(s) = \mathcal{O}(|t|^k) \quad k = k(\sigma_0)$$

c'est-à-dire que ζ est une fonction d'ordre fini.

Pour $\sigma \geq \frac{1}{2}$ on peut écrire que $\zeta(\sigma + it) = \mathcal{O}(|t|^{1/2})$ et par l'équation fonctionnelle on peut écrire pour $\sigma \leq \frac{1}{2}$ que $\zeta(\sigma + it) = \mathcal{O}(|t|^{1-\sigma})$.

La fonction μ et majorations de $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$.

$\forall \sigma$, on définit $\mu(\sigma)$ comme la limite inférieure de nombres ξ tel que $\zeta(\sigma + it) = \mathcal{O}(|t|^\xi)$. $\mu(\sigma)$ est continue, non décroissante, jamais négative.

Soit $\zeta(s)$ délimitée pour $\sigma \geq 1 + \delta$ ($\delta > 0$), il suit pour $\sigma > 1$

$$\mu(\sigma) = 0$$

et de l'équation fonctionnelle pour $\sigma < 0$:

$$\mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$$

en résumée :

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 & (\sigma > 1) \\ \frac{1}{2} - \sigma & (\sigma < 0) \end{cases}$$

Les équations sont aussi prises par continuité pour $\sigma = 0$ et $\sigma = 1$, on a ainsi pour $0 < \sigma < 1$

$$\mu(\sigma) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma$$

en particulier $\mu\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0$:

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \mathcal{O}\left(t^{\frac{1}{4} + \varepsilon}\right)$$

Les valeurs de $\mu(\sigma)$ sont inconnues pour chaque valeur de σ entre 0 et 1. On a alors :

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \sigma & \left(\sigma \leq \frac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(\sigma > \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

qui est équivalent à ce que $\forall \varepsilon > 0$ on ait $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \mathcal{O}(t^\varepsilon)$ qui est l'hypothèse de Lindelöf. Soit l'équation fonctionnelle approchée valable pour $0 < \sigma < 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} + \chi(s) \sum_{n \leq y} \frac{1}{n^{1-s}} + \mathcal{O}(x^{-\sigma}) + \mathcal{O}\left(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma} y^{\sigma-1}\right)$$

et prenons $\sigma = \frac{1}{2}$ et $x = y = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) &= \sum_{n \leq \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2} + it}} + \mathcal{O}(1) \sum_{n \leq \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2} - it}} + \mathcal{O}\left(t^{-\frac{1}{4}}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\sum_{n \leq \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{1}{n^{1/2}}\right) + \mathcal{O}\left(t^{-\frac{1}{4}}\right) = \mathcal{O}\left(t^{-\frac{1}{4}}\right) \end{aligned}$$

Maintenant présentons des majorations issue de la méthode de Weyl-Hardy-Littlewood et de Van Der Corput. La plupart des démonstrations des résultats suivants sont dans [15].

Théorème.

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \mathcal{O}\left(t^{1/6} \log^{3/2} t\right)$$

Théorème.

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \mathcal{O}(t^{1/6} \log t)$$

Théorème.

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \mathcal{O}(t^\alpha \log^\beta t)$$

différentes valeurs de α ont été trouvées :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 163/988 & \text{Walfisz [19]} \\ 27/164 & \text{Titchmarsh [20]} \\ 229/1392 & \text{Phillips [21]} \\ 19/116 & \text{Titchmarsh [22]} \\ 15/92 & \text{Min [23]} \end{array} \right.$$

Théorème.

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \mathcal{O}(t^{27/164})$$

Dès lors précisons des majorations de $\mu\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\mu\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{6}$$

Plus généralement :

$$\mu\left(\frac{1}{2}\right) \leq \phi$$

Précisons différentes valeurs de ϕ qui sont aussi celles de α :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 7/32 & \text{Heath-Brown [24]} \\ 3/16 & \text{Heath-Brown [25]/Burgess [26]} \\ 6/37 & \text{Haneke [27]/Chen [28]} \\ 173/1067 & \text{Kolesnik [29]} \\ 35/216 & \text{Kolesnik [30]} \\ 139/858 & \text{Kolesnik [31]} \end{array} \right.$$

Formules pour $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$.

Tout d'abord citons la formule de Gram :

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = Z(t) \cos(\theta(t)) - i Z(t) \sin(\theta(t))$$

où :

$$\theta(t) = \text{Im} \log \left(\Gamma\left(\frac{it}{2} + \frac{1}{4}\right) \right) - \frac{t}{2} \log \pi$$

Maintenant avec Z la fonction de Hardy et θ la fonction de Riemann-Siegel :

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = Z(t) e^{-i\pi\theta(t)}$$

Levinson et Montgomery définissent la fonction $J\left(\frac{1}{2} + it\right)$ que l'on définit comme suit :

$$J\left(\frac{1}{2} + it\right) := \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) + \zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right) \left[\frac{h'\left(\frac{1}{2} + it\right)}{h\left(\frac{1}{2} + it\right)} + \frac{h'\left(\frac{1}{2} + it\right)}{h\left(\frac{1}{2} - it\right)} \right]^{-1}$$

où :

$$h(s) := \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

on a :

$$J\left(\frac{1}{2} + it\right) = -e^{-2i\vartheta(t)} \frac{\zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right)}{2\vartheta'(t)}$$

Théorème.

Si $\zeta'\left(\frac{1}{2} + ia\right) = 0$ pour $a \in \mathbb{R}$, alors $\zeta\left(\frac{1}{2} + ia\right) = 0$.

Démonstration.

Soit

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = e^{-i\vartheta(t)} Z(t)$$

en différenciant on a :

$$i\zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right) = -i\vartheta'(t)e^{-i\vartheta(t)}Z(t) + e^{-i\vartheta(t)}Z'(t)$$

en multipliant par $-ie^{i\vartheta(t)}$, nous avons :

$$e^{i\vartheta(t)}\zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right) = -\vartheta'(t)Z(t) - iZ'(t)$$

en prenant la partie réelle :

$$-\vartheta'(t)Z(t) = \operatorname{Re}\left\{e^{i\vartheta(t)}\zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right)\right\}$$

qui s'écrit aussi

$$-2\vartheta'(t)Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right) + e^{-i\vartheta(t)}\zeta'\left(\frac{1}{2} - it\right)$$

$\zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0$ pour $t \in \mathbb{R}$, avec $\zeta'\left(\frac{1}{2} - it\right) = 0$, $t > 0$ et nous prenons $\vartheta'(t)Z(t) = 0$, de $\vartheta'(t) = 0$

seulement pour $t = a_{\vartheta}$ où $\zeta'\left(\frac{1}{2} + ia_{\vartheta}\right) \neq 0$ nous obtenons $Z(t) = 0$. Alors :

$$\zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0 \Rightarrow \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0$$

□

Soit ξ_n les zéros sur la droite critique, alors $\forall t \neq \pm \xi_n$:

$$1 + 2\vartheta'(t) \frac{\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)}{\zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right)} = -e^{-2i\vartheta(t)} \frac{\zeta'\left(\frac{1}{2} - it\right)}{\zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right)}$$

Démonstration.

En multipliant

$$-2\vartheta'(t) Z(t) = e^{i\vartheta(t)} \zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right) + e^{-i\vartheta(t)} \zeta'\left(\frac{1}{2} - it\right)$$

par $e^{-i\vartheta(t)}$, on a :

$$-2\vartheta'(t) \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right) + e^{-2i\vartheta(t)} \zeta'\left(\frac{1}{2} - it\right)$$

de $t \neq \pm \xi_n$ et si $\zeta'\left(\frac{1}{2} + ia\right) = 0$ pour $a \in \mathbb{R}$, alors $\zeta\left(\frac{1}{2} + ia\right) = 0$, on a $\zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right) \neq 0$ donc que nous pouvons diviser par $\zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right)$ et obtenir le résultat

□

Citons aussi la formule :

$$\vartheta(t) = - \int_0^t \operatorname{Re} \frac{\zeta'\left(\frac{1}{2} + ix\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)} dx = -\frac{t}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \int_0^t \operatorname{Re} \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{4} + \frac{ix}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{ix}{2}\right)} dx$$

convergente $\forall t \in \mathbb{R}$.

Théorème de Balazard-Saias-Yor (1999).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| \frac{dt}{\frac{1}{4} + t^2} = 0$$

Théorème de Hadamard-De La Vallée Poussin, et lien avec les nombres premiers.

Nous ne décrivons pas dans les détails le théorème des nombres premiers, car ce sujet est vaste et n'est pas le but de notre étude.

Le premier lien que l'on peut faire entre la fonction ζ et les nombres premiers est le produit Eulérien :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

convergente pour $\sigma > 1$, ce qui garantit avec les propriétés des séries de Dirichlet que ζ ne s'annule pas pour $\sigma > 1$.

Théorème de Césaro.

La probabilités que deux nombres choisis au hasard soient premiers entre eux est $\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$.

On peut généraliser ce théorème au choix de k nombres choisis au hasard de telle sorte à ce que la probabilités qu'ils soient tous premiers entre eux est $\frac{1}{\zeta(k)}$.

Lorsque que C.F.Gauss s'intéressa à la répartition des nombres premiers, il définit la fonction $\pi(x)$ comme le nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée (ici x). On a par définition :

$$\pi(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} 1$$

cette définition va être utile pour comprendre certaines propriétés suivantes. C.F.Gauss conjecture avec A.M.Legendre que :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

C.F.Gauss reformule la propriété précédente de la façon suivante avec une meilleure précision :

$$\pi(x) \sim \text{Li}(x) \sim \text{li}(x)$$

où $\text{Li}(x)$ est le logarithme intégrale de x définit comme suit :

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \text{li}(x) - \text{li}(2) = \int_0^x \frac{dt}{\log t} - \int_0^2 \frac{dt}{\log t}$$

Le théorème des nombres premiers peut être écrit différemment avec p_n . En effet on a pour $n \rightarrow \infty$:

$$\text{li}^{-1}(n) \sim n \log n$$

d'où

$$p_n \sim n \log n$$

Théorème d'équivalence.

L'assertion $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ est équivalente à l'assertion $\psi(x) \sim x$.

Démonstration.

$$\psi(x) = \sum_{p^v \leq x} \log p$$

où $p^v \leq x \Rightarrow v \leq \frac{\log x}{\log 2}$ et $v \geq 2 \Rightarrow p \leq \sqrt{x}$, on en déduit :

$$\sum_{p \leq x} \log p \leq \psi(x) \leq \sum_{p \leq x} \log p + (\sqrt{x} \log x) / \log 2 \leq \pi(x) \log x + (\sqrt{x} \log x) / \log 2$$

Par ailleurs si $\beta < 1$ et $x^\beta \leq p$, on a $\log p \geq \beta \log x$, on en déduit :

$$\sum_{p \leq x} \log p \geq \beta \log x (\pi(x) - \pi(x^\beta))$$

et comme $\pi(x^\beta) \leq x^\beta$, on obtient $\forall \beta < 1$ l'encadrement :

$$\beta(\pi(x) \log x - x^\beta \log x) \leq \psi(x) \leq \pi(x) \log x + (\sqrt{x} \log x)/\log 2$$

on en déduit l'équivalence. □

Dans [18], on trouve deux résultats sur $\pi(x)$ et $\psi(x)$:

$\exists c > 0$ tel que pour $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= x + \mathcal{O}\left(x e^{-c\sqrt{\ln x}}\right) \\ \pi(x) &= \text{li}(x) + \mathcal{O}\left(x e^{-c\sqrt{\ln x}}\right)\end{aligned}$$

Théorème.

On a pour $\sigma > 1$:

$$\ln \zeta(s) = s \int_2^\infty \frac{\pi(u)}{u(u^s - 1)} du$$

Démonstration.

Avec le produit Eulérien, c'est-à-dire :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

on a :

$$\begin{aligned}\log \zeta(s) &= \log \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \log \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=2}^\infty \log \frac{1}{1 - n^{-s}} \sum_{n=1}^\infty \log \frac{1}{1 - n^{-s}} \\ &= \sum_{n=2}^\infty \{\pi(n) - \pi(n-1)\} \log \frac{1}{1 - n^{-s}} = \sum_{n \geq 2} \pi(n) \log \frac{1}{1 - n^{-s}} - \sum_{n \geq 2} \pi(n-1) \log \frac{1}{1 - n^{-s}} \\ &= \sum_{n \geq 2} \pi(n) \log \frac{1}{1 - n^{-s}} - \sum_{n \geq 2} \pi(n) \log \frac{1}{1 - (n+1)^{-s}} \\ &= \sum_{n \geq 2} \pi(n) (\log(1 - (n+1)^{-s}) - \log(1 - n^{-s}))\end{aligned}$$

De plus

$$\frac{d}{dx} \log(1 - x^{-s}) = \frac{1}{1 - x^{-s}} (s x^{-s-1}) = \frac{s}{x(x^s - 1)}$$

D'où :

$$\log(1 - x^{-s}) = \int \frac{s}{x(x^s - 1)} dx + C$$

Ainsi :

$$\log \zeta(s) = \sum_{n \geq 2} \pi(n) \int_n^{n+1} \frac{s}{x(x^s - 1)} dx = \sum_{n \geq 1} \int_n^{n+1} \frac{s \pi(x)}{x(x^s - 1)} dx = s \int_1^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx$$

□

Parlons du théorème des nombres premiers, c'est Euler en premier qui donna une preuve de ce théorème, il procède comme suit :

Avec :

$$\sum \frac{1}{p} \sim \log \left(\sum_n \frac{1}{n} \right)$$

on déduit

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \sim \log \log x$$

avec Δx petit devant x de telle sorte à ce que les nombres premiers entre x et $\Delta x + x$ sont tous de taille x .

$$\log \log (x + \Delta x) - \log \log x \sim \frac{\pi(x + \Delta x) - \pi(x)}{x}$$

et comme

$$(\log \log x)' = \frac{1}{x \log x}$$

la densité des nombres premiers autour de x est de l'ordre de $\frac{1}{\log x}$ et donc $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

Mais c'est Hadamard et De La Vallée Poussin en 1895 qui démontrèrent indépendamment les premiers le théorème des nombres premiers rigoureusement. Plus particulièrement Hadamard montra l'équivalence entre le théorème des nombres premiers et la non-annulation de ζ sur $\sigma = 1$, comme le suggéra Landau, en effet vu que $\psi(x) = x(1 + o(1))$ cela prouve que le théorème des nombres premiers découle que $\zeta(1 + it) \neq 0$. De même Erdős et Selberg donnèrent une démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers en 1948 dans [32] et [33].

Théorème de Landau.

Soit une série de Dirichlet avec $a_n \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

Alors $\sigma_{\text{abs}}(\inf \{\text{Re}(s), L(a, s)\} \text{ converge absolument})$, l'abscisse de convergence absolue, n'a aucun voisinage dans \mathbb{C} sur lequel $L(a, s)$ admet un prolongement analytique.

Démonstration de la non-annulation de ζ sur la droite $\sigma = 1$.

Soit $t \in \mathbb{R}^*$, supposons qu'il existe $\zeta(1 + it) = 0$. Alors $\zeta(1 - it)\zeta(\overline{1 + it})$, et donc la fonction $\zeta(s + it)\zeta(s - it)$ possède un zéro double en $s = 1$. Le zéro double en $1 + it$ et $1 - it$ contrebalancent les pôles de $\zeta(s + it)$ en $1 - it$ et de $\zeta(s - it)$ en $1 + it$. On en déduit que $F(s)$ est holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \frac{1}{2}$. De plus comme $\zeta(2s)^{-1}$ est holomorphe au voisinage de $s = \frac{1}{2}$, et comme F est à coefficient positifs. En revanche ζ admet un prolongement, il découle du théorème de Landau que σ_{abs} de F est $< \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\sigma_{\text{abs}} < \frac{1}{2}$. On aboutit à une contradiction car d'une part on a $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ puisque $\zeta(2s)^{-1} = 0$ et d'autre part $F\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, comme somme d'une série à termes positifs non-nuls d'où la proposition.

Le résultat obtenue par Mertens en 1858 permet d'étendre cette propriété au demi-plan $\sigma \geq 1$, comme le montra De La Vallée Poussin.

Théorème de Mertens.

Soit une série de Dirichlet à coefficient positifs ou nuls, d'abscisse de convergence σ_c :

$$F(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

Alors on a pour $\sigma > \sigma_c$:

$$3F(\sigma) + 4 \operatorname{Re} F(\sigma + it) + \operatorname{Re} F(\sigma + 2it) \geq 0$$

Démonstration.

Posons $V(\theta) := 3 + 4 \cos \theta + 2 \cos 2\theta$, pour $\theta \in \mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} 3 + 4 \cos \phi + \cos 2\phi &= 3 + 4 \cos \phi + (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = 3 + 4 \cos \phi + (\cos^2 \phi - (1 - \cos^2 \phi)) \\ &= 3 + 4 \cos \phi + (\cos^2 \phi - 1 + \cos^2 \phi) = 2 + 4 \cos \phi + 2 \cos^2 \phi = 2(1 + \cos \phi + \cos^2 \phi) = 2(1 + \cos \phi)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Or $3F(\sigma) + 4 \operatorname{Re} F(\sigma + it) + \operatorname{Re} F(\sigma + 2it)$ vaut :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n V(t \ln n)}{n^\sigma}$$

cela implique bien que $3F(\sigma) + 4 \operatorname{Re} F(\sigma + it) + \operatorname{Re} F(\sigma + 2it) \geq 0$

□

$\forall \phi \in \mathbb{R}$:

$$3 + 4 \cos \phi + 2 \cos \phi = 2(1 + \cos \phi)^2 \geq 0$$

et pour $\sigma > 1$:

$$\zeta(s) = \exp \left(\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p^{ms}} \right)$$

ainsi $\forall s \in \mathbb{C} | \sigma > 1$:

$$|\zeta(s)| = \exp \left(\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mt \log p)}{m p^{m\sigma}} \right)$$

et

$$\zeta(\sigma)^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| = \exp \left(\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3 + 4 \cos(mt \log p) + \cos(2mt \log p)}{m p^{m\sigma}} \right)$$

avec $3 + 4 \cos \phi + \cos^2 \phi = 2(1 + \cos \phi)^2 \geq 0$, on déduit pour $\sigma > 1$:

$$\zeta(\sigma)^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1$$

Autre démonstration de la non-annulation sur $\sigma = 1$.

On suppose $\zeta(1 + it) = 0$, avec $\sigma \rightarrow 1$, nous avons $\zeta(\sigma) \sim \frac{1}{\sigma - 1}$ et $\zeta(\sigma + it) = \mathcal{O}(\sigma - 1)$, donc que :

$$\zeta(\sigma)^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 = \mathcal{O}(\sigma - 1)$$

ainsi comme $\sigma \rightarrow 1$, on obtient de $\zeta(\sigma)^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1$ que $|\zeta(\sigma + 2it)| \rightarrow +\infty$, ce qui est impossible car $\zeta(s)$ est analytique autour de $1 + 2it$. D'où le résultat.

Maintenant, pour t fixée, soit $\sigma \rightarrow 1$, alors $\zeta^3(\sigma) = \mathcal{O}\{(\sigma - 1)^{-3}\}$.

Théorème.

La fonction zêta de Riemann ne possède aucun zéro dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) = \sigma \geq 1$.

Démonstration.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\zeta(1 + it_0) = 0$. Alors $t_0 \neq 0$ et $\zeta(s)$ est holomorphe au voisinage de $1 + it_0$. D'où $\zeta(\sigma + it_0) \leq \sigma - 1$ avec $\sigma > 1$, et comme d'autre part $\zeta(\sigma) \ll \frac{1}{\sigma - 1}$, on a $\zeta(\sigma + 2it_0) \ll 1$. En effet car $\zeta(s)$ est holomorphe partout sauf en $s = 1$ et est un pôle simple, il suit alors :

$$\zeta(\sigma)^3 |\zeta(\sigma + it_0)|^4 |\zeta(\sigma + 2it_0)| \ll \sigma - 1$$

en contradiction avec le fait que

$$\zeta(\sigma)^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1$$

lorsque $\sigma \rightarrow 1^+$. □

En 1930, Ingham donna une autre démonstration s'appuyant sur l'identité de Ramanujan :

$$\frac{\zeta(\sigma)^2 \zeta(\sigma + i\theta) \zeta(\sigma - i\theta)}{\zeta(2\sigma)} = \sum_{n \geq 1} \frac{|t(n, \theta)|^2}{n^\sigma}$$

où $\sigma > 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ et :

$$t(n, \theta) = \sum_{d|n} d^{i\theta}$$

Lemmes d'analyse complexe.

Formule de Jensen.

Soit $F(s)$ une fonction holomorphe pour $|s| \leq R$, telle que $F(0) = 1$. Pour $0 < r \leq R$, on désigne par $n(r)$ le nombre de zéros (comptés avec multiplicité) de F dans le disque $|s| \leq r$. Alors on a :

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(Re^{i\vartheta})| d\vartheta$$

Ce résultat est démontré dans [18] page 238.

Lemme de Borel-Carathéodory.

Soit $F(s)$ une fonction holomorphe pour $|s| \leq R$, telle que $F(0) = 0$. On suppose que :

$$\max_{|s|=R} \operatorname{Re} F(s) \leq A$$

Alors on a pour $|s| < R$:

$$|F(s)| \leq \frac{2A|s|}{R - |s|}$$

Une démonstration est donnée dans [18] page 239.

Corollaire.

Soit $F(s)$ une fonction holomorphe dans le disque $|s| \leq R$, telle que $F(0) = 1$, et $|F(s)| \leq M$ ($|s| = R$). On désigne par H la suite finie de zéros ρ de F , comptés avec leur ordre de multiplicité, dans le disque $|s| \leq \frac{R}{2}$. Pour tout s tel que $|s| < \frac{R}{2}$, on a :

$$\left| \frac{F'(s)}{F(s)} - \sum_{\rho \in H} \frac{1}{s - \rho} \right| \leq \frac{4R \ln M}{(R - 2|s|)^2}$$

Une démonstration est donnée dans [18] page 239.

Distribution générale des zéros.

La fonction ζ possède une infinité de zéros complexe. $\zeta(s)$ a une infinité de zéros ρ_1, ρ_2, \dots et $0 \leq \sigma \leq 1$ et $(1 - 2^{1-s})\zeta(s) > 0$ où $0 < s < 1$ et $\zeta(s) \neq 0$. $\zeta(s)$ n'a aucun zéro réel entre l'axe 0 et 1, les zéros ρ_1, ρ_2, \dots sont alors tous complexes. Une preuve est donnée dans [15] page 210.

La fonction $N(T)$.

Soit $T > 0$, on définit $N(T)$ comme le nombre de zéros de $\zeta(s)$ dans la région $0 \leq \sigma \leq 1$, $0 \leq t \leq T$, plus particulièrement :

$$N(T) := \sum_{\rho: 0 \leq \gamma \leq T} 1$$

Théorème.

On a avec la notation de Landau, pour $T \rightarrow +\infty$ et $T \geq 2$:

$$N(T+1) - N(T) = \mathcal{O}(\log T)$$

qui s'écrit aussi avec la notation de Vinogradov :

$$N(T+1) - N(T) \ll \ln T$$

Démonstration.

Appliquons pour $R = 3$ la formule de Jensen à la fonction

$$F(s) := \frac{\xi(s+2+iT)}{\xi(2+iT)}$$

D'une part $\forall r, \sqrt{5} \leq r \leq 3$, le disque $|s| \leq r$ contient le rectangle de sommets $-2, -2+i, -1, -1+i$, d'où $n(r) \geq N(T+1) - N(T)$.

D'autre part, on déduit immédiatement de $\zeta(s) \ll \tau$ pour $\sigma \geq 0, |\tau| \geq 1$, et :

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12s} - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\mathcal{B}_2(t)}{(t+s)^2} dt$$

l'estimation pour $|s| \leq 3$:

$$\ln |F(s)| \leq \mathcal{O}(\ln T)$$

La formule de Jensen implique donc :

$$(N(T+1) - N(T)) \ln \left(\frac{3}{\sqrt{5}} \right) \leq \int_{\sqrt{5}}^3 \frac{n(r)}{r} dr \ll \ln T$$

d'où le résultat □

Théorème de Riemann-Von Mangoldt.

Conjecturé par B.Riemann dans [12], et démontré par Von Mangoldt en 1905. On a pour $T \longrightarrow \infty$:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \mathcal{O}(\ln T)$$

Démonstration. (G.Tenenbaum)

On peut supposer sans perte de généralité que T n'est pas l'ordonnée d'un zéro de $\xi(s)$. Soit \mathcal{R} le rectangle de sommets $2 \pm iT$, $-1 \pm iT$, orienté dans le sens direct. On a :

$$2N(T) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{R}} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_{\mathcal{R}} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds$$

Comme \mathcal{R} est symétrique par rapport aux axes $\sigma = \frac{1}{2}$ et $T = 0$ et que $\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}$ respecte cette symétrie à cause de l'équation fonctionnelle, on déduit de ce qui précède que :

$$N(T) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{\mathcal{L}} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds = \frac{1}{\pi} [\arg \xi(s)]_{\mathcal{L}}$$

où \mathcal{L} est la ligne brisée $\left[2; 2+iT; \frac{1}{2}+iT \right]$. Maintenant, par l'équation fonctionnelle de $\xi(s)$ définit comme :

$$\xi(s) := s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s)$$

nous avons :

$$\xi(s) = 2(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s)$$

et

$$[\arg(s-1)]_{\mathcal{L}} = \arg\left(iT - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right), [\arg \pi^{-s/2}]_{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2}T \ln \pi$$

De plus, par la formule de Stirling complexe :

$$\begin{aligned} & \left[\arg \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) \right]_{\mathcal{L}} \\ &= \operatorname{Im} \log \Gamma\left(\frac{iT}{2} + \frac{5}{4}\right) = \operatorname{Im} \left\{ \left(\frac{iT}{2} + \frac{3}{4}\right) \log\left(\frac{iT}{2} + \frac{5}{4}\right) - \frac{iT}{2} - \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \right\} \\ &= \frac{T}{2} \ln \frac{T}{2} - \frac{T}{2} + \frac{3}{8}\pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, il ne reste plus à établir que :

$$\operatorname{Im} \int_{\mathcal{L}} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \ll \ln T$$

le segment vertical de \mathcal{L} étant située dans le demi-plan de convergence absolue, on peut intégrer termes à termes. On a :

$$\left| \int_2^{2+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right| \leq 2 \sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda(n)}{n^2 \ln n} < \infty$$

pour traiter le segment horizontal, on utilise le corollaire du lemme de Borel-Carathéodory, pour la fonction

$$F(s) = \frac{\zeta(2+iT+s)}{\zeta(2+iT)} \text{ avec } R=4 \text{ et } r=\frac{3}{2}$$

Le numérateur est de l'ordre d'une puissance de T et le dénominateur satisfait à

$$|\zeta(2+iT)| \geq 1 - \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6} > 0$$

Si H est la suite finie des zéros de $\zeta(s)$ (comptés avec multiplicités) dans le disque $|s-2-iT| \leq \frac{3}{2}$, on obtient donc pour tout s du segment horizontal $\left[\frac{1}{2} + iT; 2+iT \right]$:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_{\rho \in H} \frac{1}{s-\rho} \ll \ln T$$

et comme $N(T+1) - N(T) \ll \ln T$, on a :

$$\sum_{\rho \in H} 1 \ll \ln T$$

et pour chaque $\rho \in H$, on peut écrire

$$\left| \operatorname{Im} \int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{ds}{s-\rho} \right| \leq \pi$$

cela implique bien :

$$\operatorname{Im} \int_{\mathcal{L}} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \ll \ln T$$

et achève la démonstration □

Cela implique que $\zeta(s)$ possède une infinité de zéros non-triviaux. On peut aussi écrire :

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \left(\frac{T}{2\pi e} \right) + \mathcal{O}(\ln T)$$

Et on a aussi la relation :

$$N(T) = \mathcal{O}(T \log T)$$

On peut aussi écrire :

$$N(T) = 1 + \frac{1}{\pi} \arg \left(\pi^{-i\frac{T}{2}} \Gamma \left(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2} \right) \right) + \frac{1}{\pi} \arg \left(\zeta \left(\frac{1}{2} + iT \right) \right)$$

la formule de Stirling complexe donne :

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{T} \right)$$

où

$$S(T) = \frac{1}{\pi} \arg \left(\zeta \left(\frac{1}{2} + iT \right) \right) = \mathcal{O}(\ln T)$$

Il s'ensuit aussi :

$$(N(T+1) - N(T)) \sim \frac{\ln T}{2\pi}$$

Définissons :

$$S(T) := \frac{1}{\pi} \arg \zeta \left(\frac{1}{2} + iT \right)$$

et

$$L(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + \frac{7}{8}$$

on a alors le théorème suivant :

Théorème.

Pour $T \longrightarrow +\infty$. On a $N(T) = L(T) + S(T) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right)$, le nombre de zéros de $\Xi(s)$ dans le rectangle avec pour sommets $s = \pm T \pm \frac{3i}{2}$ est $2N(T)$, donc que :

$$2N(T) = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{\Xi'(s)}{\Xi(s)} ds$$

prit autour du rectangle.

Théorème.

Pour $T \longrightarrow +\infty$, $S(T) = \mathcal{O}(\log T)$, c'est-à-dire $N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + \mathcal{O}(\log T)$

de même on a $N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + S(T) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right)$. Si les zéros $\beta + i\gamma$ de $\zeta(s)$ avec $\gamma > 0$ sont arrangés dans une séquence $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ donc que $\gamma_{n+1} \geq \gamma_n$, puis comme $n \longrightarrow +\infty$. On a :

$$|\rho_n| \sim \gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log n}$$

Nous avons $N(T) \sim \frac{1}{2\pi} T \log T$, d'où $2\pi N(\gamma_n \pm 1) \sim (\gamma_n \pm 1) \log(\gamma_n \pm 1) \sim \gamma_n \log \gamma_n$, et aussi :

$$N(\gamma_n - 1) \leq n \leq N(\gamma_n + 1)$$

d'où $2\pi n \sim \gamma_n \log \gamma_n$ et aussi $\log n \sim \log \gamma_n$, et donc $\gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log n}$. Depuis $\beta_n = \mathcal{O}(1)$ on a $|\rho_n| \sim \gamma_n$.

Littlewood a montré que $\gamma_{n+1} - \gamma_n \longrightarrow 0$. En effet $|\gamma_{n+1} - \gamma_n| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$.

La fonction $N(\sigma, T)$.

On définit la fonction $N(\sigma, T)$ comme le nombre de zéros $\beta + i\gamma$ de ζ tel que $\beta > \sigma$, $0 < t \leq T$. Pour chaque T , $N(\sigma, T)$ est une fonction non-croissante de σ , et vaut 0 pour $\sigma \geq 1$. On a en particulier :

$$N(\sigma, T) = \text{card} \{ \rho, \text{Re}(\rho) > \sigma, |\text{Im} \rho| \leq T, \zeta(\rho) = 0 \}$$

Avec l'hypothèse de Riemann (que l'on détaillera après) on a $N(\sigma, T) = 0$ pour $\sigma > \frac{1}{2}$. On peut dire aussi pour $\frac{1}{2} < \sigma < 1$:

$$N(\sigma, T) \leq N(T) < AT \log T$$

Théorème de Bohr-Landau (1914).

Pour tout $\sigma > \frac{1}{2}$ on a :

$$N(\sigma, T) = \mathcal{O}(T)$$

Pour toute fonction continue non-négative $f(t)$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \log f(t) dt \leq \log \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right\}$$

ainsi pour $\frac{1}{2} < \sigma < 1$:

$$\int_0^T \log |\zeta(\sigma + it)| dt = \frac{1}{2} \int_0^T \log |\zeta(\sigma + it)|^2 dt \leq \frac{T}{2} \log \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt \right\} = \mathcal{O}(T)$$

Avec

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt = \zeta(2\sigma)$$

pour $\sigma > \frac{1}{2}$. D'où si $\frac{1}{2} \leq \sigma_0 \leq 1$ et $T \rightarrow +\infty$:

$$2\pi \int_{\sigma_0}^1 N(\sigma, T) d\sigma = \int_0^T \log |\zeta(\sigma_0 + it)| dt + \mathcal{O}(\log T)$$

nous avons

$$\int_0^T \log |\zeta(2 + iT)| dt = \operatorname{Re} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n)}{n^2} \frac{n^{-iT-1}}{-i \log n} = \mathcal{O}(1)$$

et

$$\int_{\sigma_0}^1 N(\sigma, T) d\sigma = \mathcal{O}(T)$$

pour $\sigma_0 > \frac{1}{2}$, d'où si $\sigma_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\sigma_0 - \frac{1}{2} \right)$, on a :

$$N(\sigma_0, T) \leq \frac{1}{\sigma_0 - \sigma_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} N(\sigma, T) d\sigma \leq \frac{2}{\sigma_0 - \frac{1}{2}} \int_{\sigma_1}^1 N(\sigma, T) d\sigma = \mathcal{O}(T)$$

Théorème de Carlson (1921).

Pour $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, on a :

$$N(\sigma, T) = \mathcal{O}(T^{4\sigma(1-\sigma)+\varepsilon})$$

Théorème.

Si $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \mathcal{O}(t^\omega \log^\omega t)$ où $\omega \leq \frac{3}{2}$, alors on a uniformément pour $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$:

$$N(\sigma, T) = \mathcal{O}(T^{2(1+2c)(1-\sigma)} \log^5 T)$$

Avec l'hypothèse de Lindelöf $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \mathcal{O}(t^\varepsilon)$, on aurait $N(\sigma, T) = \mathcal{O}(T^{2(1-\sigma)+\varepsilon})$.

Théorème.

$$N(\sigma, T) = \mathcal{O}\left(T^{\frac{3}{2}-\sigma} \log^5 T\right)$$

Théorème de Ingham.

$$N(\sigma, T) = \mathcal{O}(T^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)} \log^5 T)$$

la démonstration se trouve dans [34].

Théorème de Selberg.

On a uniformément pour $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$:

$$N(\sigma, T) = \mathcal{O}\left(T^{1-\frac{1}{4}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)} \log T\right)$$

la démonstration se trouve dans [35].

Théorème de Montgomery.

On a pour $\frac{5}{6} \leq \sigma \leq 1$:

$$N(\sigma, T) \ll T^{2(1-\sigma)/\sigma} (\log T)^{1/4}$$

démontré dans [36].

Théorème de Huxley.

On a pour $\frac{3}{4} \leq \sigma \leq 1$:

$$N(\sigma, T) \ll T^{3(1-\sigma)/(3\sigma-1)} (\log T)^{44}$$

on a aussi pour $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$:

$$N(\sigma, T) \ll T^{12/5(1-\sigma)} (\log T)^{44}$$

démonstration dans [39].

Théorème d'Ivic.

$$N(\sigma, T) \ll \begin{cases} T^{(3-3\sigma)/(7\sigma-4)+\varepsilon} & \text{pour } \frac{3}{4} \leq \sigma \leq \frac{10}{13} \\ T^{(9-9\sigma)/(8\sigma-2)+\varepsilon} & \text{pour } \frac{10}{13} \leq \sigma \leq 1 \end{cases}$$

démonstrations données dans [37] et [38].

Théorème de Heath-Brown.

Pour $\frac{11}{14} \leq \sigma \leq 1$, on a :

$$N(\sigma, T) \ll T^{(9-9\sigma)/(7\sigma-1)+\varepsilon}$$

démontré dans [40].

Quelques formules.

On définit $S(T)$ comme suit :

$$S(T) := \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

et on a :

$$S(T) = N(T) - 1 - \frac{1}{\pi} \vartheta(T)$$

Pour $\vartheta(t) = \arg\left(\pi^{-it/2} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)\right)$, on a $N(T) = 1 + \frac{\vartheta(T)}{\pi} + S(T)$.

On peut citer $S(T) = \mathcal{O}(\log T)$ pour $T \longrightarrow +\infty$ et $S(T) = \mathcal{O}\left(\frac{\log T}{\log \log T}\right)$.

Puis :

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{1}{8} + S(T) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right)$$

A.Selberg donna la formule suivante pour $A > 0$:

$$|S(T)| > A(\log T)^{1/3}(\log \log T)^{-7/3}$$

la fonction $S(T)$ tend vers $+\infty$ très très lentement et change de signe une infinité de fois.

Définitions.

$$N_-(T) = \#\{p = \beta + i\gamma \mid \zeta(p) = 0, \beta < \frac{1}{2}, 0 < \gamma \leq T\}$$

$$N_0(T) = \#\left\{p = \frac{1}{2} + i\gamma \mid \zeta(p) = 0, 0 < \gamma \leq T\right\}$$

$$N'_-(T) = \#\{p' = \beta' + i\gamma' \mid \zeta'(p') = 0, 0 < \gamma' \leq T\}$$

$$N'_-(T) = \#\{p' = \beta' + i\gamma' \mid \zeta'(p') = 0, \beta' < \frac{1}{2}, 0 < \gamma' \leq T\}$$

$$N'_0(T) = \#\left\{p' = \frac{1}{2} + i\gamma' \mid \zeta'(p') = 0, 0 < \gamma' \leq T\right\}$$

$$N'_+(T) = \#\{p' = \beta' + i\gamma' \mid \zeta'(p') = 0, \beta' > \frac{1}{2}, 0 < \gamma' \leq T\}$$

On note $N_0(T) - N_{00}(T) = N'_0(T)$ et $N_{00}(T)$ désigne le nombre de zéros de $\zeta'(s)$ sur la droite critique.

On peut noter alors :

$$N(T) = N_0(T) + 2N_-(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \mathcal{O}(\log T)$$

Berndt prouve en 1970 dans *The number of zeros for $\zeta^{(k)}(s)$* que pour $\zeta'(s)$ on a :

$$N'(T) = N'_-(T) + N'_0(T) + N'_+(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{4\pi} - \frac{T}{2\pi} + \mathcal{O}(\log T)$$

Levinson et Montgomery donnèrent :

$$N_-(T) = N'_-(T) + \mathcal{O}(\log T)$$

On a pour $t \longrightarrow \infty$ et $A = \frac{\log 2}{2}$:

$$N_{00}(T) = \frac{A}{\pi} t + N'_+(t) - N'_-(t) + \mathcal{O}(\log^2 t)$$

Soit $N_1(T)$ le nombre de zéros non-réel de $\zeta'(s)$, alors :

$$N_1(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \mathcal{O}(\log T)$$

Produit de Hadamard.

On a pour $s \neq 1$:

$$\zeta(s) = \frac{e^{bs}}{2(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}$$

et pour $s \in \mathbb{C}$:

$$\xi(s) = e^{as} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}$$

où $a = \frac{1}{2} \ln(4\pi) - \frac{1}{2} \gamma - 1$ et $b = \ln(2\pi) - \frac{\gamma}{2} - 1$.

On a aussi en ce qui concerne les valeurs de a et b :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right)$$

si $s \longrightarrow 0$, on a :

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = b + 1 - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

et $\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \log(2\pi)$ et $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Démonstration. (G.Tenenbaum)

Pour $T \geq 2$, on a $N(T+1) - N(T) \ll \ln T$, ainsi :

$$\sum_{|\gamma| \leq T} \frac{1}{|\rho|^2} \leq 2 \int_0^T \frac{dN(T)}{T^2} \ll \sum_{k \leq T} \frac{\ln(2k)}{k^2} \ll 1$$

Cela implique la convergence du produit infini :

$$\Omega(s) := \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}$$

dont le terme générale est pour tout s , de la forme $1 + \mathcal{O}(|e|^{-2})$. La fonction $\Omega(s)$ est donc une fonction entière de s ayant les mêmes zéros que $\xi(s)$ et, puisque

$$\prod_{\rho} \left(1 - \frac{0}{\rho}\right) e^{0/\rho} = \xi(0) = 1$$

On peut choisir une détermination holomorphe $F(s)$ de $\log(\xi(s)/\Omega(s))$ prenant la valeur 0 en $s=0$. Pour une suite de valeurs de $R \rightarrow +\infty$, d'après le lemme de Borel-Carathéodory, il découle de

$$\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \operatorname{Re} F(Re^{i\theta}) \ll R(\ln R)^2$$

que F est une fonction linéaire de s , on a bien

$$\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \operatorname{Re} F(Re^{i\theta}) \ll R(\ln R)^2$$

Démontrons-là pour tous les R satisfaisant à

$$\min_{\rho} |R - |\rho|| \geq 1/(c \ln R)$$

où $c > 0$. Chaque intervalle $[k; k+2]$ pour $k \geq 2$, contient au moins un tel R . En effet, si c est assez grand, on a :

$$\operatorname{card}\{\rho : k \leq |\rho| \leq k+2\} \leq (N(k+2) - N(k-1)) < J := \lfloor c \ln k \rfloor$$

D'après le principe de Dirichlet; il existe au moins un intervalle $[k + 2j/J; k + (2j+2)/J]$, pour $0 \leq j < J$, ne contenant aucun membres $|\rho|$. On peut alors choisir $R := k + (2j+1)/J$.

Considérons un nombre R satisfaisant

$$\min_{\rho} |R - |\rho|| \geq 1/(c \ln R)$$

pour $|s| = R$ et avec la définition de $\Omega(s)$ on a :

$$\begin{aligned} \ln |\Omega(s)| &= \sum_{\rho} \ln \left| \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho} \right| \\ &\geq - \left\{ \sum_{|\rho| \leq R/2} \frac{R}{|\rho|} + \sum_{R/2 < |\rho| \leq 2R} (2 + \ln(2cR \ln R)) + \sum_{|\rho| > 2R} \frac{R^2}{|\rho|^2} \right\} \end{aligned}$$

où :

$$\ln |(1-z)e^2| \geq \begin{cases} -|z| & (|z| \geq 2) \\ -2 + \ln |1-z| & \left(\frac{1}{2} \leq |z| < 2\right) \\ -|z|^2 & \left(|z| < \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Comme $N(T+1) - N(T) \ll \ln T$, pour $T \geq 2$, on déduit de ce qui précède, la majoration :

$$\ln(1/|\Omega(s)|) \ll R(\ln R)^2$$

maintenant, on a aussi par $\ln|\xi(s)| \ll |s| \ln|s|$ et $\ln|\xi(s)| \ll R \ln R$. Cela implique bien

$$\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \operatorname{Re} F(Re^{i\theta}) \ll R(\ln R)^2$$

et termine la démonstration. □

La fonction R de Riemann.

On définit la fonction R de Riemann $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \operatorname{Li}(x^{1/n})$$

et si l'on note :

$$\frac{1}{\zeta(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^x}$$

on a :

$$R(x) = \frac{n^{1-x}}{\zeta(x)} \operatorname{Li}(x^{1/n})$$

et on a la relation :

$$\pi(x) = R(x) - \sum_{\rho} R(x^{\rho})$$

où ρ parcourt l'ensemble des zéros non-triviaux de $\zeta(s)$.

Région sans zéros.

On a déjà $\zeta(s) \neq 0$ pour $\sigma \geq 1$, qui fournit déjà une région sans zéros. Déterminons une région plus vaste.

Théorème.

$\exists c > 0 \mid \zeta(s)$ possède aucun zéro dans la région du plan complexe définie par l'inégalité

$$\sigma \geq 1 - c/\ln(2 + |t|)$$

Démonstration.

La fonction

$$\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

est à coefficient positifs ou nuls. D'après le théorème de Mertens, on peut écrire $\forall \sigma > 1$ et $\forall \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\frac{-3\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4 \operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma + i\gamma)}{\zeta(\sigma + i\gamma)} - \operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma + 2i\gamma)}{\zeta(\sigma + 2i\gamma)} \geq 0$$

Nous parviendrons au résultat annoncé en majorant chacun des trois termes du membres de gauche lorsque γ est l'ordonnée d'un zéro $\rho = \beta + i\gamma$ de $\zeta(s)$.

En premier lieu on a

$$\frac{-\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \frac{1}{\sigma-1} + \mathcal{O}(1)$$

Ensuite, en dérivant logarithmiquement la formule du produit de Hadamard :

$$\zeta(s) = \frac{e^{bs}}{2(s-1)} \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)^{-1} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}$$

où $s \neq 1$ et $b = \ln(2\pi) - \frac{\gamma}{2} - 1$. On a alors pour $s \neq \rho$:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -b + \frac{1}{s-1} + \frac{\Gamma'\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{2\Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right)} - \sum_{\rho} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho}\right)$$

En estimant le terme relatif à Γ par la formule de Stirling complexe et en remarquant que, pour $\sigma > 1$, $\text{Re}(\rho)$ et $\text{Re}(s - \rho) \geq 0$. Il vient pour $\sigma > 1$ et $|t| \geq 2$:

$$-\text{Re} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \leq \mathcal{O}(\ln |t|)$$

et aussi, en tenant compte de la distribution du zéro $\beta + i\gamma$:

$$-\text{Re} \frac{\zeta'(\sigma + i\gamma)}{\zeta(\sigma + i\gamma)} \leq \mathcal{O}(\ln |\gamma|) - \frac{1}{\sigma - \beta}$$

En reportant ces estimations dans

$$\frac{-3\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\text{Re} \frac{\zeta'(\sigma + i\gamma)}{\zeta(\sigma + i\gamma)} - \text{Re} \frac{\zeta'(\sigma + 2i\gamma)}{\zeta(\sigma + 2i\gamma)} \geq 0$$

On déduit donc l'existence d'une constante positive c_1 telle que l'on ait pour $|\gamma| \geq 2$:

$$\frac{3}{\sigma-1} - \frac{4}{\sigma-\beta} \geq -c_1 \ln |\gamma|$$

d'où :

$$1 - \beta \geq \frac{1 - c_1(\sigma-1) \ln |\gamma|}{(3/(\sigma-1)) + c_1 \ln |\gamma|}$$

En choisissant $\sigma = 1 + (2c_1 \ln |\gamma|)^{-1}$, il suit $1 - \beta \geq c_2 / \ln |\gamma|$, avec $c_2 = c_1/14$. Cela implique bien le résultat annoncé, puisque la condition $|t| \geq 2$ est inutile si l'on réduit suffisamment la valeur de c

□

Korobov et Vinogradov ont pu établir en 1958 la majoration pour $\sigma \geq 0$ et $t \geq 2$:

$$\zeta(s) \ll \left(1 + t^{A(1-\sigma)^{3/2}}\right) (\ln t)^{3/2}$$

d'où découle la meilleure région sans zéros actuellement connue pour $t \geq 3$:

$$\sigma \geq 1 - c (\ln t)^{2/3} (\ln_2 t)^{-1/3}$$

une démonstration est donnée dans [38].

La fonction ξ .

On définit

$$\xi(s) := \frac{1}{2}s(s-1)\eta(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

où η est la fonction éta de Dirichlet. On a l'équation fonctionnelle suivante :

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

De même on a :

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^{s/2}}\zeta(s) = \frac{(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s)}{\sqrt{\pi^s}}$$

et aussi :

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + s(s-1) \int_1^\infty \psi(x) \left(x^{-\frac{1}{2}(s+1)} + x^{\frac{1}{2}(s-1)} \right) dx$$

Première formules de Riemann.

$$\xi(s) = \frac{1}{2} - s(1-s) \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}\left[i\left(\frac{1}{2}-s\right)\right]\log x\right) dx$$

Démonstration.

$\forall s \neq 1$ on a :

$$\eta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x) \left(x^{-(s+1)/2} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) dx$$

où $\psi(x)$ est la fonction elliptique de Poisson. Ainsi :

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{1}{2}s(s-1) \left(\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x) \left(x^{-(s+1)/2} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2} \int_1^\infty \psi(x) \left(x^{-(s+1)/2} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2} \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \left(x^{-i\frac{1}{2}\left(i\left[\frac{1}{2}-s\right]\right)} + x^{i\frac{1}{2}\left(i\left[\frac{1}{2}-s\right]\right)} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2} \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \left(\exp\left\{-i\frac{1}{2}\left(i\left[\frac{1}{2}-s\right]\right)\log x\right\} + \exp\left\{i\frac{1}{2}\left(i\left[\frac{1}{2}-s\right]\right)\log x\right\} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} - s(1-s) \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(i\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-s\right]\log x\right) dx \end{aligned}$$

□

Seconde formule de Riemann.

$$\xi(s) = 4 \int_1^\infty \left(x^{\frac{3}{2}} \psi'(x) \right)' x^{-\frac{1}{4}} \cos \left(\frac{1}{2} \left[i \left(\frac{1}{2} - s \right) \right] \log x \right) dx$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2} \int_1^\infty \psi(x) \left(x^{-\frac{s+1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2} \int_1^\infty \psi(x) dx \left(\frac{x^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{1-s}{2}} + \frac{x^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \left[\frac{s(1-s)}{2} \left(\frac{x^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{1-s}{2}} + \frac{x^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} \right) \psi(x) \right]_1^\infty + \frac{s(1-s)}{2} \int_1^\infty \left(\frac{x^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{1-s}{2}} + \frac{x^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} \right) d\psi(x) \\ &= \frac{1}{2} + \left(s x^{\frac{1-s}{2}} + (1-s) x^{\frac{s}{2}} \right) \psi(x) \Big|_{x=1} + \int_1^\infty \left(s x^{\frac{1-s}{2}} + (1-s) x^{\frac{s}{2}} \right) \psi'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} + \psi(1) + \int_1^\infty \left(s x^{-\frac{s}{2}-1} + (1-s) x^{\frac{s-1}{2}-1} \right) x^{\frac{3}{2}} \psi'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} + \psi(1) + \int_1^\infty x^{\frac{3}{2}} \psi'(x) dx \left(-2x^{-\frac{s}{2}} - 2x^{\frac{s-1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \psi(1) + \left[x^{\frac{3}{2}} \psi'(x) (-2) \left(x^{-\frac{s}{2}} + x^{\frac{s-1}{2}} \right) \right]_{x=1}^{x=\infty} - \int_1^\infty (-2) \left(x^{-\frac{s}{2}} + x^{\frac{s-1}{2}} \right) d \left(x^{\frac{3}{2}} \psi'(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \psi(1) + 4\psi'(1) + 2 \int_1^\infty x^{-\frac{1}{4}} \left(x^{-i\frac{1}{2}i\left[\frac{1}{2}-s\right]} + x^{i\frac{1}{2}i\left[\frac{1}{2}-s\right]} \right) d \left(x^{\frac{3}{2}} \psi'(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \psi(1) + 4\psi'(1) + 2 \int_1^\infty x^{-\frac{1}{4}} \left(e^{-i\frac{1}{2}i\left[\frac{1}{2}-s\right]\log x} + e^{i\frac{1}{2}i\left[\frac{1}{2}-s\right]\log x} \right) d \left(x^{\frac{3}{2}} \psi'(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \psi(1) + 4\psi'(1) + 4 \int_1^\infty x^{-\frac{1}{4}} \cos \left(\frac{1}{2} i \left[\frac{1}{2} - s \right] \log x \right) d \left(x^{\frac{3}{2}} \psi'(x) \right) \end{aligned}$$

Dès lors évaluons $\psi'(1)$; avec :

$$\psi(x) = \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\psi(x) + 1 = x^{-\frac{1}{2}} [2\psi(1/x) + 1]$$

on a :

$$\psi'(x) = \psi'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)x^{-\frac{1}{2}} + \psi\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

ainsi :

$$\psi'(1) = \psi'(1)(-1) + \psi(1)\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}$$

on obtient :

$$4\psi'(1) + \psi(1) + \frac{1}{2} = 0$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}\xi(s) &= 4 \int_1^\infty x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}i\left[\frac{1}{2} - s\right] \log x\right) d\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right) \\ &= 4 \int_1^\infty x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}i\left[\frac{1}{2} - s\right] \log x\right) \left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)' dx\end{aligned}$$

□

La fonction $\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right)$.

On a formellement avec l'équation fonctionnelle de ξ :

$$\Xi(t) = -\frac{1}{2}\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\pi^{-\frac{it}{2} - \frac{1}{4}}\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{it}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2} - it\right)$$

Soient $s = \frac{1}{2} + it$, alors :

$$\begin{aligned}\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + t^2\right) \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t \log x\right) dx \\ &= 4 \int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx} x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t \log x\right) dx\end{aligned}$$

Démonstration.

En substituant $t = i\left(\frac{1}{2} - s\right) = y + i\left(\frac{1}{2} - s\right)$ dans la première formule de Riemann, on a :

$$\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + t^2\right) \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t \log x\right) dx$$

et si l'on substitue dans la seconde formule de Riemann on a :

$$\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = 4 \int_1^\infty \left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)' x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t \log x\right) dx$$

□

On peut citer d'autres formules :

$$\Xi(t) = -\frac{t^2 + \frac{1}{4}}{2\sqrt{\pi^{\frac{1}{2} + it}}} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

$$\Xi(t) = -\frac{1}{2} \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \pi^{-\frac{1}{4} - \frac{t}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

$$Z(t) = -\frac{2\pi^{1/4}}{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)\right|} \Xi(t)$$

$$\Xi(s) = \Xi(-s)$$

$$\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \left[e^{\operatorname{Re} \log \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)} \pi^{-\frac{1}{4}} \left(-t^2 - \frac{1}{4}\right) / 2 \right] \left[\exp \left\{ i \operatorname{Im} \log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right\} \pi^{-it/2} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right]$$

Dès lors donnons une intégral faisant intervenir $\Xi(t)$:

Posons

$$\Phi(x) = \int_0^\infty f(t) \Xi(t) \cos x t dt$$

et soit $f(t) = |\phi(it)|^2 = \phi(it)\phi(-it)$. On écrit $y = e^x$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(it) \phi(-it) \Xi(t) y^{it} dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(it) \phi(-it) \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) y^{it} dt \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{y}} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \phi\left(s - \frac{1}{2}\right) \phi\left(\frac{1}{2} - s\right) \xi(s) y^s ds \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{y}} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \phi\left(s - \frac{1}{2}\right) \phi\left(\frac{1}{2} - s\right) (s-1) \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) y^s ds \end{aligned}$$

prenons $\phi(s) = 1$, alors cela est égale à :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i\sqrt{y}} \sum_{n \geq 1} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left\{ \Gamma\left(2 + \frac{s}{2}\right) - \frac{3}{2} \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) \right\} \left(\frac{y}{n\sqrt{\pi}}\right)^s ds \\ &= \frac{1}{i\sqrt{y}} \sum_{n \geq 1} \left\{ 2 \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \Gamma(\omega) \left(\frac{y}{n\sqrt{\pi}}\right)^{3\omega-4} d\omega - 3 \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(\omega) \left(\frac{y}{n\sqrt{\pi}}\right)^{2\omega-2} d\omega \right\} \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{y}} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{y}{n\sqrt{\pi}}\right)^{-4} e^{-n^2\pi/y^2} - \frac{6\pi}{\sqrt{y}} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{y}{n\sqrt{\pi}}\right)^{-2} e^{-n^2\pi/y^2} \end{aligned}$$

d'où :

$$\int_0^\infty \Xi(t) \cos x t dt = 2\pi^2 \sum_{n \geq 1} (2\pi n^4 e^{-9x/2} - 3n^2 e^{-5x/2}) \exp(-n^2\pi e^{-2x})$$

par contre s'il l'on prend $\phi(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}}$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= -\frac{1}{2i\sqrt{y}} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{1}{s} \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) y^s ds \\ &= -\frac{1}{4i\sqrt{y}} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) y^s ds = \frac{-\pi}{\sqrt{y}} \psi\left(\frac{1}{y^2}\right) + \frac{1}{2} \pi \sqrt{y}\end{aligned}$$

d'où :

$$\int_0^\infty \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} \cos xt dt = \frac{\pi}{2} \{e^{x/2} - 2e^{-x/2} \psi(e^{-2x})\}$$

Factorisation de ξ .

Pour $s = \frac{1}{2} + it$, on a :

$$\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \left(s - \frac{1}{2}\right)^{2n}$$

où

$$a_{2n} = 4 \int_1^\infty \frac{d\left[x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)\right]}{dx} x^{-\frac{1}{4}} \frac{\left(\frac{1}{2} \log x\right)^{2n}}{(2n)!} dx$$

c'est-à-dire :

$$a_{2n} = \frac{4}{(2n)!} \int_1^\infty \left(x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)\right)' x^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} \log x\right)^{2n} dx$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) &= 4 \int_1^\infty \left(x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)\right)' x^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{t}{2} \log x\right) dx \\ &= 4 \int_1^\infty \left(x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)\right)' x^{-\frac{1}{4}} \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} \log x\right)^2 t^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{2} \log x\right)^4 t^4 - \dots\right] dx \\ &= a_0 - a_2 t^2 + a_4 t^4 - \dots\end{aligned}$$

□

$a_{2n} > 0$ puisque :

$$\begin{aligned}\left(x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)\right)' &= \left(x^{\frac{3}{2}} (e^{-1^2 \pi t} + e^{-2^2 \pi t} + e^{-3^2 \pi t} + \dots)\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}} (-\pi) (1^2 e^{-1^2 \pi t} + 2^2 e^{-2^2 \pi t} + \dots)\right)' \\ &= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} (-\pi) (1^2 e^{-1^2 \pi t} + \dots) + x^{\frac{3}{2}} \pi^2 (1^4 e^{-1^2 \pi t} + \dots) \\ &= \pi \sqrt{x} \left(1^2 e^{-1^2 \pi t} \left[1^2 \pi t - \frac{3}{2}\right] + 2^2 e^{-2^2 \pi t} \left[2^2 \pi t - \frac{3}{2}\right] + \dots\right) > 0\end{aligned}$$

En fait :

$$\frac{d}{dx} \left(x^{\frac{3}{2}} \psi'(x) \right) = \frac{d}{dx} \left(- \sum_{n=1}^{\infty} x^{\frac{3}{2}} n^2 \pi e^{-n^2 \pi x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^4 \pi^2 x - \frac{3}{2} n^2 \pi \right) \sqrt{x} e^{-n^2 \pi x}$$

Zeros de ξ .

On rappelle que par définition, les zéros de ξ sont les zéros non-triviaux de ζ . Si on note $\rho = \beta + i\gamma$ un zéro de ξ , vu que $\xi(s) = \xi(1-s)$, on a si ρ est un zéro, un autre zéro qui est $1 - \rho$.

De même nous avons défini précédemment la fonction $N(T)$, qui est en fait le nombre de zéros de ξ .

Formule pour $\xi(2n)$.

$$\xi(2n) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \mathcal{B}_{2n} 2^{2n-1} \pi^n (2n^2 - n)(n-1)!$$

Les zéros sur la droite critique.

On a d'après l'étude précédente :

$$\Xi(t) = 4 \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left\{ x^{\frac{3}{2}} \psi'(x) \right\} x^{-\frac{1}{4}} \cos \left(\frac{t}{2} \log x \right) dx$$

où

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$$

Gram prouva que les 15 premiers zéros non-triviaux ont bien une partie réelle valant $\frac{1}{2}$. En effet les premiers zéros non-triviaux sont :

$$\rho_1 = \frac{1}{2} + i14,1347...; \rho_2 = \frac{1}{2} + i21,0220...; \rho_3 = \frac{1}{2} + i25,0108...; \rho_4 = \frac{1}{2} + i30,4248...; \rho_5 = \frac{1}{2} + i32.9350...$$

En 1914, G.H.Hardy prouve dans [41] que ζ possède une infinité de zéros non-triviaux avec une partie réelle valant $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'il a prouvé que l'équation $\Xi(t) = 0$ a une infinité de solutions.

Démonstration. (Hardy).

Soit la formule de Cahen-Mellin, pour $\sigma, k > 0$:

$$e^{-y} = \frac{1}{2i\pi} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(u) y^{-u} du$$

on déduit pour $k > \frac{1}{2}$:

$$1 + \frac{1}{i\pi} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(u) y^{-u} \zeta(2u) du = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 y}$$

Puis avec le théorème de Cauchy avec pour chemin d'intégration la droite $\sigma = \frac{1}{4}$ et avec des formules de Riemann on a tout en posant $s = \frac{1}{2} + it$:

$$\frac{s(s-1)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \xi(s) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \Xi(t)$$

où $\Xi(t) \in \mathbb{R}$ pour $t \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$1 + \sqrt{\frac{\pi}{y}} - \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{y} \right)^{\frac{1}{4} + it} \frac{\Xi(2t)}{\frac{1}{4} + 4t^2} dt = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 y}$$

On pose $y = \pi e^{i\alpha}$ où $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et :

$$e^{-y} = e^{-\pi \cos \alpha - i\pi \sin \alpha} = e^{\pi i t} = q = \rho e^{i\phi}$$

on obtient :

$$\int_0^\infty \frac{(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \Xi(2t)}{\frac{1}{4} + 4t^2} dt = \pi \cos \frac{1}{4} \alpha - \frac{1}{2} \pi e^{\frac{1}{4} i \alpha} F(q)$$

où :

$$F(q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}$$

Enfin en différentiant $2p$ fois par rapport à α , on a :

$$\int_0^\infty \frac{(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \Xi(2t)}{\frac{1}{4} + 4t^2} dt = \frac{(-1)^p \pi}{4^{2p}} \cos \frac{1}{4} \alpha - \left(\frac{d}{d\alpha} \right)^{2p} \left[\frac{1}{2} \pi e^{\frac{1}{4} i \alpha} F(q) \right]$$

Soit $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} \mid q \rightarrow -1$ suivant un chemin tangent au rayon $\phi = \pi$. Le dernier terme de

$$\int_0^\infty \frac{(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \Xi(2t)}{\frac{1}{4} + 4t^2} dt = \frac{(-1)^p \pi}{4^{2p}} \cos \frac{1}{4} \alpha - \left(\frac{d}{d\alpha} \right)^{2p} \left[\frac{1}{2} \pi e^{\frac{1}{4} i \alpha} F(q) \right]$$

tend vers 0 pour tout p . Il suffit que toutes les fonctions

$$\left(\frac{d}{dy} \right)^{2p} F(q) = 2 \sum_{n \geq 1} n^{4p} q^{n^2} \rightarrow 0$$

issue des théorèmes de Bohr-Riesz sur la sommabilité des séries de Dirichlet.

La série $(1 - 2^{1-2s})\zeta(s)$ est convergente pour $\sigma > 0$, régulière dans tout le plan et d'ordre fini dans tout le demi-plan $\sigma > \sigma_0$. La série est donc sommable $\forall s$, par les moyennes de Césaro et pour s entier négatif, elle a la somme

$$(1 - 2^{1-2s})\zeta(2s) = 0$$

Quand $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \Xi(2t)}{\frac{1}{4} + 4t^2} dt &= \frac{(-1)^p \pi}{4^{2p}} \cos \frac{1}{4} \alpha - \left(\frac{d}{d\alpha} \right)^{2p} \left[\frac{1}{2} \pi e^{\frac{1}{4} i \alpha} F(q) \right] \\ &\rightarrow \frac{(-1)^p \pi}{4^{2p}} \cos \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

On suppose $\Xi(2t)$ garde un signe pour $t > T > 1$, par exemple le signe positif. Alors on a :

$$\int_0^\infty \frac{(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \Xi(2t)}{\frac{1}{4} + 4t^2} dt = \frac{(-1)^p \pi}{4^{2p}} \cos \frac{\pi}{8}$$

Soit p un nombre impair, on a pour k indépendant de p :

$$\int_T^\infty < -\int_0^T < kT^{2p}$$

Mais cela est impossible. Il y a en effet d'après notre hypothèse, un nombre $\delta \geq 0 \mid \Xi(2t) > \delta$, pour

$$2T < t < 2T + 1$$

Donc pour $k, k_1 \geq 0$ ne dépendant pas de p :

$$\int_T^\infty > \int_{2T}^{2T+1} > \delta k_1 (2T)^{2p}$$

Enfin grâce aux deux dernières inégalités sur les intégrales, on a :

$$\delta k_1 2^{2p} < k$$

donc pour p assez grand, une contradiction. □

Démonstration.

$$F(t) = -\frac{1}{2} \left(t^2 + \frac{1}{4} \right) \pi^{-\frac{1}{4} - \frac{it}{2}} \Gamma \left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2} \right) \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right)$$

est paire, entière et réelle si $t \in \mathbb{R}$. Un zéro de zêta sur $\sigma = \frac{1}{2}$ est un zéro réel de F , donc on cherche à prouver que cette fonction a une infinité de zéros réels.

Soit $n \geq 1$ entier; des calculs fastidieux montrent que, si l'on suppose que $F(t)$ garde un signe constant, disons positifs pour $t \geq T$ assez grand, alors on a :

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n} F(t) \cosh \left(\frac{\pi t}{4} \right)}{t^2 + \frac{1}{4}} dt = \frac{(-1)^n \cos \left(\frac{\pi}{8} \right)}{2^{2n}}$$

Mais si n impair, le membre de droite est négatif et donc

$$\int_T^\infty \frac{t^{2n} F(t) \cosh \left(\frac{\pi t}{4} \right)}{t^2 + \frac{1}{4}} dt < -\int_0^T \frac{t^{2n} F(t) \cosh \left(\frac{\pi t}{4} \right)}{t^2 + \frac{1}{4}} dt < KT^{2n}$$

avec K indépendant de n . L'hypothèse sur F implique qu'il existe un nombre positif $L = L(T)$ tel que $F(t) / \left(t^2 + \frac{1}{4} \right) \geq L$ pour $t \in [2T; 2T + 1]$, et donc :

$$\int_T^\infty \frac{t^{2n} F(t) \cosh \left(\frac{\pi t}{4} \right)}{t^2 + \frac{1}{4}} dt \geq \int_{2T}^{2T+1} L t^{2n} dt \geq L(2T)^{2n}$$

et ainsi on aurait :

$$L2^{2n} < K$$

Ce qui ne se peut si n est suffisamment grand. □

Démonstration. [15].

Nous avons :

$$\Xi(t) = -\frac{1}{2} \left(t^2 + \frac{1}{4} \right) \pi^{-\frac{1}{4} - \frac{it}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

où $\Xi(t)$ est une fonction intégrale pair de t , et réel pour $t \in \mathbb{R}$, un zéro de $\zeta(s)$ sur $\sigma = \frac{1}{2}$ correspond alors à un zéro réel de $\Xi(t)$.

Posons $x = -i\alpha$ dans

$$\int_0^\infty \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} \cos xt dt = \frac{\pi}{2} \left(e^{\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}} \psi(e^{-2x}) \right)$$

nous avons :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} \cosh \alpha t dt = e^{-\frac{i\alpha}{2}} - 2e^{\frac{i\alpha}{2}} \psi(e^{2i\alpha}) = 2 \cos \frac{\alpha}{2} - 2e^{\frac{i\alpha}{2}} \left(\frac{1}{2} + \psi(e^{2i\alpha}) \right)$$

Depuis $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \mathcal{O}(t^A)$, $\Xi(t) = \mathcal{O}\left(t^A e^{-\frac{\pi t}{4}}\right)$, et de l'intégrale ci-dessus qui peut-être différencié par rapport à α un certain nombre de fois à condition que $\alpha < \frac{\pi}{4}$. Ainsi :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh \alpha t dt = \frac{(-1)^n \cos \frac{\alpha}{2}}{2^{2n-1}} - 2 \left(\frac{d}{d\alpha} \right)^{2n} e^{\frac{i\alpha}{2}} \left(\frac{1}{2} + \psi(e^{2i\alpha}) \right)$$

Nous prouvons ensuite que le dernier terme vers 0 comme $\alpha \longrightarrow \frac{\pi}{4} \forall n$, l'équation

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ 2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right\}$$

donne l'équation fonctionnelle

$$x^{-\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{1}{4}} \psi(x) = x^{\frac{1}{4}} - 2x^{-\frac{1}{4}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \psi(x) = x^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$$

d'où

$$\begin{aligned} \psi(i + \delta) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi(i + \delta)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi \delta} = 2\psi(4\delta) - \psi(\delta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \psi\left(\frac{1}{4\delta}\right) - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \psi\left(\frac{1}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On voit facilement à partir de cela que $\frac{1}{2} + \psi(x)$ et toutes ses dérivées tendent vers 0 car $x \longrightarrow i$, le long d'un chemin dans un angle $|\arg(x - i)| < \frac{\pi}{2}$. Nous avons ainsi prouvé que :

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}} \int_0^\infty \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh \alpha t dt = \frac{(-1)^n \pi \cos \frac{\pi}{8}}{2^{2n}}$$

Supposons maintenant que $\Xi(t)$ est en fin de compte de même signe, disons, par exemple, positif pour $t \geq T$. Alors :

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh \alpha t dt = L$$

D'où :

$$\int_T^{T'} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh \alpha t dt \leq L$$

$\forall \alpha < \frac{\pi}{4}$ et $T' > T$. D'où en faisant $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}$:

$$\int_T^{T'} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh \frac{\pi}{4} t dt \leq L$$

D'où l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh \frac{1}{4} \pi t dt$$

convergente. L'intégrale à la gauche de

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh \alpha t dt = \frac{(-1)^n \pi \cos \frac{\pi}{8}}{2^{2n}}$$

est alors convergente uniformément par rapport à α pour $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, et il suit que

$$\int_0^{\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh \frac{\pi}{4} t dt = \frac{(-1)^n \pi \cos \frac{\pi}{8}}{2^{2n}}$$

pour tout n .

Ceci, cependant, est impossible, pour un n impair donné, le côté droit est négatif, et d'où :

$$\int_T^{\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh \frac{\pi}{4} t dt < - \int_0^T \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh \frac{\pi}{4} t dt < K T^{2n}$$

où K est indépendant de n . Mais par hypothèse il y a un nombre positif $m = m(T)$ tel que :

$$\frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} \geq m$$

pour $2T \leq t \leq 2T + 1$. D'où :

$$\int_T^{\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh \frac{\pi}{4} t dt \geq \int_{2T}^{2T+1} m t^{2n} dt \geq m (2T)^{2n}$$

d'où :

$$m 2^{2n} < K$$

ce qui est faux pour n suffisamment grand. Ce qui prouve le théorème.

□

On sait désormais qu'il y a une infinité de solutions réelles à l'équation $\Xi(t)=0$, donc que la fonction zêta possède une infinité de zéros sur $\sigma = \frac{1}{2}$; mais on ne sait pas s'il sont tous sur la droite critique, il a alors été établi des proportions que nous allons présenter.

On désigne par $N_0(T)$ le nombre de zéros de $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ pour $0 < t \leq T$. Hardy et Littlewood affirme en 1921 dans [43] que :

$$\exists A > 0 \text{ tel que } N_0(T) > AT$$

Une preuve est donnée dans [46] page 229-237.

En 1932, A.Selberg prouve un meilleur résultat en montrant que :

$$N_0(T) > AT \log T$$

Ce résultat est donné dans [15] page 278 et dans [46] page 237-246.

En 1989 dans [42], Conrey prouve pour T assez grand :

$$N_0(T) \geq \alpha N(T)$$

avec $\alpha = 0.40219$, ainsi, plus de $1/3$ des zéros non triviaux de zêta sont sur la droite critique.

En fait pour les zéros de la droite critique, on sait qu'il existe une constante C telle que $\forall T \geq 2$, on a :

$$N_0(T) \geq CT \ln T \geq CN(T)$$

On en connaît pas la valeur exacte de la constante C , mais Conrey a démontré en 1989 que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf \frac{N_0(T)}{N(T)} \geq 0.4077$$

Autrement dit, plus de $2/5$ des zéros de zêta sont sur la bande critique.

N.Levinson trouva $\alpha = 0.342$ dans [45]; et J.B.Conrey $\alpha = 0.3658$ dans [44].

Lien entre ζ et d'autres fonctions.

Fonction éta de Dirichlet.

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

Fonction de Möbius.

Pour $s > 1$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p (1 - p^{-s}) = \prod_p (1 + \mu(p)p^{-s} + \mu(p^2)p^{-2s} + \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = L(\mu, s)$$

Fonction indicatrice d'Euler.

Pour $s > 2$

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{d|n} d \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n)}{n^s}$$

Fonction $\sigma(n)$.

Pour $s > 2$

$$\zeta(s)\zeta(s-1) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^s}$$

et pour $s > k+1$

$$\zeta(s)\zeta(s-k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n^s} = \sum_{n \geq 1} n^{-s} \sum_{d|n} d^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s}$$

Fonction log.

Avec

$$\log \zeta(s) = \sum_p \log \left(\frac{1}{1-p^{-s}} \right)$$

puis en dérivant par rapport à s , et en remarquant que $\frac{d}{ds} \log \frac{1}{1-p^{-s}} = -\frac{\log p}{p^s-1}$, on a

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{\log p}{p^s-1}$$

Fonction de Von Mangoldt.

Pour $s > 1$

$$\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = L(\Lambda, s)$$

puisque

$$-\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$$

il s'ensuit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \geq 1} \frac{\log n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

Fonction $d_k(n)$.

Pour $s > 1$

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) n^{-s}$$

on a aussi la formule de Ramanujan :

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d(n))^2}{n^s}$$

Fonction $\lambda(n)$ de Liouville.

Pour $s > 1$, on a la formule de Lehman (1960)

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \prod_p \left(\frac{1-p^{-s}}{1-p^{-2s}} \right) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} \right)^{-1} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} - \dots \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$$

Fonction $\omega(n)$.

Pour $s > 1$

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} n^{-s}$$

Fonction $q(n)$.

Pour $s > 1$

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \left(\frac{1-p^{-2s}}{1-p^{-s}} \right) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{q(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s}$$

ou plus généralement

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(sk)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_k(n)}{n^s}$$

Constante d'Euler-Mascheroni.

En 2003 Mavil donne

$$\gamma = \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k \zeta(k)}{k}$$

et

$$1 - \gamma = \sum_{n \geq 2} \frac{\zeta(n) - 1}{n}$$

plus généralement pour $-1 \leq x \leq 1$, on a la formule de T.Drane (2006) :

$$\sum_{k \geq 2} \frac{(-x)^k \zeta(k)}{k} = x\gamma + \ln(x!)$$

on a aussi

$$\gamma = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k) - 1}{k} \quad \text{et} \quad \zeta(s) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{k \geq 1} \frac{\Lambda(k) - 1}{k^s}$$

Fonction λ de Dirichlet.

$$\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^x} = (1 - 2^{-x}) \zeta(x)$$

on a aussi

$$\frac{\zeta(u)}{2^u} = \frac{\lambda(u)}{2^u - 1} = \frac{\eta(u)}{2^u - 2}$$

et en 1987, Spanier et Oldham donnent

$$\zeta(u) + \eta(u) = 2\lambda(u)$$

Fonction $\phi_a(n)$.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\phi_a(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-a-1)}{\zeta(s)}$$

Fonction $\psi(n)$.

$$\frac{-\zeta'(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^s}$$

$$\frac{-\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} = \int_1^{\infty} \frac{\psi(x)-x}{x^{s+1}} dx$$

de telle sorte que

$$\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx$$

Fonction Γ .

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = \log x - \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} + \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s\right)} \right)$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = \exp \left\{ \gamma z - \sum_{k \geq 2} (-1)^k \zeta(k) \frac{z^k}{k} \right\}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{u^n du}{e^u - 1} = n! \zeta(n+1)$$

Pour $|t| < 1$, on a les formules d'Euler :

$$\ln \Gamma(1+t) = -\gamma t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} t^n$$

Legendre écrit la formule d'Euler sous la forme :

$$\ln \Gamma(1+t) = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi t}{\sin \pi t} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-t}{1+t} + (1-\gamma)t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\zeta(2n+1)}{2n+1} t^n$$

Fonction M de Mertens.

$$M(u) := \sum_{n \leq u} \mu(n)$$

pour $\sigma > 1$. On a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = s \int_1^\infty \frac{M(u)}{u^{1+s}} du$$

HR conjecture que l'intégrale converge et que la relation est vraie pour $\sigma > \frac{1}{2}$ avec $s \neq 1$. On sait que

$$M(u) = O(u \exp \{-13(\ln u)^{3/5}(\ln \ln u)^{1/5}\})$$

voir Arnold Walfisz dans *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie* de 1963. Estimation qui dépend de la plus grande région sans zéro.

Conjectures et hypothèse de Riemann.

On a vu qu'il y a pour $\zeta(s)$ deux sortes de zéros : les zéros triviaux de la forme $-2n$, et les zéros non-triviaux dont on ne connaît pas très bien la répartition. En 1859, B. Riemann conjecture dans [12] que tous les zéros non-triviaux ont une partie réelle valant $\frac{1}{2}$, c'est l'hypothèse de Riemann, qui peut se formuler ainsi :

$$\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \Xi(t) = 0$$

La répartition des zéros non-triviaux est en lien direct avec la répartition des nombres premiers, cela améliorerait les majorations actuelles de $\pi(x)$. En effet pour $\rho = \beta + i\gamma$ un zéro non-trivial et $x > 1$, on a la formule de Von Mangoldt :

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum_n \frac{x^{-2n}}{2n} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

pour s'en convaincre d'autant plus, on voit bien que les zéros non-triviaux interviennent dans les termes d'erreurs du théorème des nombres premiers grâce à la formule de Landau :

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) + \mathcal{O}(xT^{-1} \log^2(xT) + \log x)$$

avec $T \geq 1$ et $\gamma \in [-T; T]$.

Assertions équivalentes et implications.

On désigne l'hypothèse de Riemann par **HR**.

On peut trouver des énoncés équivalents, ou des implications de théorèmes qui sont étroitement liés avec l'hypothèse de Riemann.

- **HR** $\Leftrightarrow \exists t_n \rightarrow \infty$ tel que $|\zeta(1 + it_n)| > C \ln \ln t_n$
- **HR** $\Leftrightarrow \pi(x) - \text{Li}(x) = \mathcal{O}(\sqrt{x} \ln x)$
- **HR** $\Leftrightarrow \zeta$ n'a pas de zéros pour $\sigma > \frac{1}{2}$. Puisque les zéros de ζ sont symétriques par rapport à la droite critique.
- Théorème de Speiser : **HR** $\Leftrightarrow \zeta'(s)$ n'a pas de zéros non-triviaux pour $\sigma < \frac{1}{2}$

- Théorème de Yildirim (1996) : **HR** $\Rightarrow \zeta''(s)$ et $\zeta'''(s)$ ne s'annulent pas dans $0 < \sigma < \frac{1}{2}$
- **HR** $\Rightarrow |x^\rho| = \sqrt{x}$ d'où :

$$\sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} = \mathcal{O}(\sqrt{x} \log^2 x) \quad \text{et} \quad \pi(x) = \text{Li}(x) + \mathcal{O}(\sqrt{x} \log x)$$

- **HR** $\Rightarrow N_0(T) = N(T) \sim \frac{1}{2\pi} T \log T$
- **HR** équivalent à ce que si $\eta(s) = 0$ et $0 < \sigma < 1$, alors $\sigma = \frac{1}{2}$
- **HR** $\Rightarrow \delta = 0$ dans le théorème de Valiron
- **HR** $\Rightarrow p_{n+1} - p_n = \mathcal{O}\left(p_n^{1/2} \ln p_n\right)$

Sous l'hypothèse que **HR** soit vraie, on a uniformément pour tout σ tel que $\frac{1}{2} < \sigma_0 < \sigma < 1$:

$$\ln \zeta(\sigma + it) = \mathcal{O}((\ln t)^{2-2\sigma+\varepsilon})$$

et même plus précisément si l'on suppose $\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln \ln t} \leq \sigma \leq 1$, on a

$$\ln \zeta(\sigma + it) = \mathcal{O}(\ln \ln t (\ln t)^{2-2\sigma})$$

de cela on déduit $\forall \sigma > \frac{1}{2}$:

$$\zeta(\sigma + it) = \mathcal{O}(t^\varepsilon)$$

et

$$\frac{1}{\zeta(\sigma + it)} = \mathcal{O}(t^\varepsilon)$$

c'est-à-dire que l'hypothèse de Riemann implique celle de Lindelöf. Donc l'hypothèse de Lindelöf se réformule ainsi $\forall \varepsilon > 0$:

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll |t|^\varepsilon \Leftrightarrow \mu\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

On a plusieurs améliorations de ce résultat; Tout d'abord celle de G.Kolesnik de 1982 :

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \mathcal{O}(t^{1/6-1/216+\varepsilon}) = \mathcal{O}\left(t^{\frac{105}{648}+\varepsilon}\right)$$

puis celle de B.Bombieri et H.Iwaniec de 1986 :

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \mathcal{O}(t^{1/6-1/28+\varepsilon}) = \mathcal{O}\left(t^{\frac{11}{84}+\varepsilon}\right)$$

Maintenant notons Θ la borne supérieure dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ des parties réelles des zéros non-triviaux.

HR $\Rightarrow \Theta = \frac{1}{2}$ et $\mu_\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et l'hypothèse de Lindelöf $\Leftrightarrow \mu_\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $\Theta = \frac{1}{2}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes avec $x \rightarrow \infty$ et $\varepsilon > 0$:

- ζ n'a pas de zéros pour $\{\sigma > \Theta\} \setminus \{1\}$
- $\psi(x) = x + \mathcal{O}(x^\Theta \ln^2 x)$
- $\psi(x) = x + \mathcal{O}_\varepsilon(x^{\Theta+\varepsilon})$
- $\pi(x) = \text{Li}(x) + \mathcal{O}(x^\Theta \ln x)$
- $\pi(x) = \text{Li}(x) + \mathcal{O}_\varepsilon(x^{\Theta+\varepsilon})$
- $M(x) = \mathcal{O}_\varepsilon(x^{\Theta+\varepsilon})$
- $\sigma_{\text{conv}}(\mu) \leq \Theta$

Si l'on prends $\Theta = \frac{1}{2}$, on obtient des énoncés équivalents à l'hypothèse de Riemann.

En 1897, Mertens conjecture que $|M(x)| \leq \sqrt{x}$, cela fut réfuté en 1985 par Odlyzko et Te Riele. En revanche on a l'hypothèse de Mertens généralisée : $|M(x)| \leq A\sqrt{x}$ pour $A > 1$, c'est-à-dire $M(x) = \mathcal{O}(\sqrt{x})$. Cette hypothèse implique l'hypothèse de Mertens affaiblie, qui implique l'hypothèse de Riemann et qui implique l'hypothèse de Lindelöf.

L'hypothèse de densité avec la fonction $N(\sigma, T)$, peut permettre d'avoir si l'hypothèse de Riemann est vraie, la majoration suivante :

$$p_{n+1} - p_n = \mathcal{O}_\varepsilon\left(p_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

Récapitulation des conjectures.

Nous allons énoncer des assertions et les numéroté pour mieux montrer leurs liens.

1. $\sigma_{\text{conv}}(\mu) \leq \frac{1}{2}$
2. $\forall \varepsilon > 0, M(x) = \mathcal{O}_\varepsilon\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$
3. $\psi(x) = x + \mathcal{O}\left(x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x\right)$ et $\pi(x) = \text{Li}(x) + \mathcal{O}\left(x^{\frac{1}{2}} \ln x\right)$
4. L'hypothèse de Riemann
5. $\zeta''(s)$ et $\zeta'''(s)$ non nuls pour $0 < \sigma < \frac{1}{2}$
6. $p_{n+1} - p_n = \mathcal{O}\left(p_n^{\frac{1}{2}} \ln p_n\right)$
7. $\zeta'(s)$ n'a pas de zéros dans $0 < \sigma < \frac{1}{2}$
8. $p_{n+1} - p_n = \mathcal{O}(\ln^2 p_n)$ (conjecture de Cramér)
9. $M(x) = \mathcal{O}(\sqrt{x})$ (conjecture de Mertens généralisée)
- 10.

$$\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \ll_{\sigma, k, \varepsilon} T^\varepsilon$$

11. $N(\sigma, T+1) - N(\sigma, T) = o(\ln T)$

12. $\forall \varepsilon > 0, \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \mathcal{O}_\varepsilon(t^\varepsilon)$ (hypothèse de Lindelöf)
13. $N(\sigma, T) \ll_\varepsilon T^{2(1-\sigma)+\varepsilon}$ (hypothèse de densité)
14. $\forall \varepsilon > 0, p_{n+1} - p_n = \mathcal{O}\left(p_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$
15. $p_{n+1} - p_n = \mathcal{O}(\sqrt{p_n})$
16. $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$ (conjecture d'Andrica, forme faible)
17. $\pi(n^2 + n) > \pi(n^2) > \pi(n^2 - n)$
18. $\pi((n+1)^2) - \pi(n^2) > 0$ (conjecture de Legendre, forme faible)
19. $\pi(p_{n+1}^2) - \pi(p_n^2) \geq 2$
20. $\pi(p_{n+1}^2) - \pi(p_n^2) \geq 4$ (conjecture de Brocard, forme faible)

$1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 7$ et $4 \Rightarrow 5, 4 \Rightarrow 12 \Rightarrow 13 \Rightarrow 14, 4 \Rightarrow 6, 9 \Rightarrow 4$ et $10 \Rightarrow 11 \Leftrightarrow 12, 17 \Rightarrow 16 \Rightarrow 15 \Rightarrow 14$
et $8 \Rightarrow 6 \Rightarrow 14, 8 \Rightarrow 18 \Rightarrow 16$ et $17 \Rightarrow 18 \Rightarrow 19$ et $20 \Rightarrow 19$

Annexe A - La fonction elliptique de Poisson.

Définition.

Pour $t \geq \delta > 0$,

$$\psi(t) = \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 \pi t}$$

L'équation fonctionnelle.

$$\psi(t) = \psi\left(\frac{1}{t}\right) t^{-1/2} + \frac{1}{2} t^{-1/2} - \frac{1}{2}$$

Démonstration.

Fixons u , et intégrons la fonction $e^{-\pi(\theta - iu)^2} = e^{-\pi\theta^2} e^{2i\pi\theta u} e^{\pi u^2}$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, le long du rectangle de sommets $-\infty + iu; -\infty; +\infty; \infty + iu$. Deux de ces intégrales disparaissent :

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty + iu} e^{-\pi\theta^2} e^{2i\pi\theta u} e^{\pi u^2} d\theta \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty + iu} |e^{-\pi\theta^2} e^{2i\pi\theta u} e^{\pi u^2}| d\theta \\ &= \underbrace{|e^{2i\pi\theta u}|}_{=1} \underbrace{|e^{-\pi\theta^2} e^{\pi u^2}|}_{=0} |u| = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty + iu}^{-\infty} e^{-\pi\theta^2} e^{2i\pi\theta u} e^{\pi u^2} d\theta \right| &\leq \int_{-\infty + iu}^{-\infty} |e^{-\pi\theta^2} e^{2i\pi\theta u} e^{\pi u^2}| d\theta \\ &= \underbrace{|e^{2i\pi\theta u}|}_{=1} \underbrace{|e^{-\pi(-\infty)^2} e^{\pi u^2}|}_{=0} |u| = 0 \end{aligned}$$

Par le théorème de Cauchy :

$$\oint e^{-\pi\theta^2} e^{2i\pi\theta u} e^{\pi u^2} d\theta = 0$$

$$= e^{\pi u^2} \int_{\infty+iu}^{-\infty+iu} e^{-\pi\theta^2} e^{2i\pi\theta u} e^{\pi u^2} d\theta + e^{\pi(0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\theta^2} e^{2i\pi\theta(0)} d\theta$$

Alors

$$e^{\pi u^2} \int_{\infty+iu}^{-\infty+iu} e^{-\pi\theta^2} e^{2i\pi\theta u} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\theta^2} d\theta = 1$$

c'est-à-dire

$$e^{-\pi u^2} = \int_{\infty+iu}^{-\infty+iu} e^{-\pi\theta^2} e^{2i\pi\theta u} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\theta^2} e^{2i\pi\theta u} d\theta$$

Pour $m \in \mathbb{Z}$, on pose $u = m\sqrt{t}$. On obtient alors :

$$e^{-m^2\pi t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\theta^2} e^{2i\pi\theta m\sqrt{t}} d\theta$$

on pose $\omega = \theta\sqrt{t}$, ce qui donne :

$$e^{-m^2\pi t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\omega^2/t} e^{2i\pi\omega m} d\omega$$

en sommant les deux côtés, on a :

$$1 + 2 \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{e^{N^2\pi t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\sum_{N=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{\omega^2\pi/t}} e^{2i\pi N\omega} d\omega \right)$$

Par la formule sommatoire de Poisson, et en posant $F(\omega) = \frac{1}{e^{\omega^2\pi/t}}$:

$$\sum_{N=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{\omega^2\pi/t}} e^{2i\pi N\omega} d\omega = \sum_{N=0}^{\infty} F(N)$$

Nous avons alors :

$$1 + 2 \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{e^{N^2\pi t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{e^{N^2\pi t}} \right) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 + 2 \left(\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{e^{N^2\pi t}} \right) \right)$$

Avec $N = \omega$, on a :

$$1 + 2\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 + 2\psi\left(\frac{1}{t}\right) \right)$$

□

Annexe B - La fonction éta de Dirichlet.

On définit la fonction éta de Dirichlet pour de la façon suivante :

$$\eta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

et

$$\eta(s) := \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

tel que

$$\eta(s) = \eta(1-s)$$

Démonstration.

Soit

$$2 \sin \pi s \Gamma(s) \zeta(s) = (2\pi)^s 2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

on pose

$$\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}$$

et

$$\sin(\pi s) \Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1-s)}$$

alors

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} \zeta(s) = (2\pi)^s \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s)$$

c'est-à-dire

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \pi^{1/2} 2^s \Gamma(1-s) \frac{\zeta(1-s)}{\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}$$

Par le fait que $\Gamma(s) = \pi^{-1/2} 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)$, d'où :

$$\Gamma(1-s) = \pi^{1/2} 2^{-s} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)$$

c'est-à-dire

$$\pi^{1/2} \Gamma(1-s) \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)} = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$$

alors

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

qui s'écrit

$$\eta(s) = \eta(1-s)$$

□

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] A.VAN DER POORTEN. *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$* . Math.intellig. 1,195-203 (1979).

- [2] H.COHEN. *Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (d'après Apéry)*. Séminaire de théorie des nombres de Grenoble. VI.1-VI.9 (1978).
- [3] E.REYSSAT. *Irrationalité de $\zeta(3)$, selon Apéry*. Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 20^e année (1978-1979), exposé n0.6, 6pp.
- [4] R.APERY. *Irrationalité de $\zeta(2)$ et de $\zeta(3)$* . Société mathématiques de France, Astérisque 61 (1979), p11-13.
- [5] F.BEUKERS. *The values of Polylogarithms*. Topics in classical theory, 219-228, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, Budapest (1981).
- [6] T.RIVOAL. *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impaires*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 331 (2000), no. 4, p.267-270.
- [7] K.M.BALL/T.RIVOAL. *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. 146 (2001), p.193-207.
- [8] T.RIVOAL. *Irrationalité d'au moins un des neufs nombres $\zeta(5); \zeta(7); \dots; \zeta(21)$* . Acta Arith. 103 (2002), no.2, p.157-167.
- [9] W.ZUDULIN. *One of the number $\zeta(5); \zeta(7); \zeta(9); \zeta(11)$ is irrational*. uspekhi Mat. Nausk 56 (2001), no.4, p.149-150, Russian Math. Surveys, p.774-776.
- [10] W.ZUDULIN. *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values*. preprint, math. NT/0206176, (2002).
- [11] L.A.GUTNIK. *The irrationality of certain quantities involving $\zeta(3)$* , Russ. Math. Surv 34, no.3, 200 (1979). En russe dans Acta Arith.42, no.3, 255-264 (1983).
- [12] B.RIEMANN. *Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée*. (1859).
- [13] S.PLOUFFE. *Identities inspired by Ramanujan Notebook (part 2)*. (2006).
- [14] D.CVIJOVIC/J.KLINOWSKI. *Integral representations of the Riemann zeta function for odd integers arguments*. J.Comput.Appl. Math, 142 (2002).
- [15] E.C.TITCHMARSH. *The theory of the Riemann zeta function*. second edition. (1986).
- [16] KLOOSTERMAN. *Een integraal voor de ζ functie van Riemann*. (1922).
- [17] G.H.HARDY/J.E.LITTLEWOOD. *The zeros of Riemann's zeta function on the critical line*. MZ. 10 (1921) 238-317.
- [18] G.TENENBAUM. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* Belin (2008).
- [19] A.WALFISZ. *Zur Abschätzung von $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$* . Göttinger Nachrichten (1924), 155-8.
- [20] E.C.TITCHMARSH. *On Van Der Corput's method and the zeta function of Riemann*. Q.J.O. 2 (1931).
- [21] E.PHILLIPS. *The zeta function of Riemann; further developments of Van Der Corput's method*. Q.J.O. 4 (1933), 209-25.

- [22] E.C.TITCHMARSH. *On the order of $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$* . Q.J.O. 13 (1942), 11-17..
- [23] S.H.MIN. *On the order of $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$* . Trans.Amer.Math.Soc 65 (1949), 448-72.
- [24] D.R.HEATH-BROWN. *The fourth power moment of the Riemann zeta function*. Proc. London. Math. Soc (3), 38 (1979), 385-422.
- [25] D.R.HEATH-BROWN. *Simple zeros of the Riemann zeta function on the critical line*. Bull London. Math. Soc, 11 (1979), 17-18.
- [26] D.A.BURGESS. *On the character sums and L-series II*. Proc.London.Math.Soc (3), 13 (1963), 524-536.
- [27] J.-R.CHEN. *On the order of $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$* . Chinese.Math.Acta,6 (1965), 463-478.
- [28] W.HANEKE. *Verschärfung der Abschätzung von $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$* . Acta Arith, 8 (1962-63), 357-430.
- [29] G.KOLESNIK. *On the estimation of certain trigonometric sums*. Acta Arith 25 (1973), 7-30.
- [30] G.KOLESNIK. *On the order of $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ and $\Delta(R)$* . Pacific J.Math. 82 (1982), 107-122.
- [31] G.KOLESNIK. *On the methods of exponent pairs*. Acta Arith 45 (1985), 115-143.
- [32] A.SELBERG. *An elementary proof of the prime number theorem*. Ann of Math (2), 50 (1949), 305-13.
- [33] P.ERDÖS. *A new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*. Proc Nat Acad Sci, USA, 35 (1949), 374-384.
- [34] A.E.INGHAM. *On the estimation of $N(\sigma, T)$* . Q.J.O. 11 (1940), 291-2.
- [35] A.SELBERG. *Contributions to the theory of the Riemann zeta function*. Arch for Math og Naturv. B, 48 (1946), no.5.
- [36] H.L.MONTGOMERY. *Topics in multiplicative number theory*. Lectures Notes in Math. 227 (springer, Belin, 1971).
- [37] A.IVIC. *A zero density theorem for the Riemann zeta function*. Trudy Mat Inst. Steklov. 163 (1984), 85-89.
- [38] A.IVIC. *The Riemann zeta function*. (Wiley Interscience, New York, 1985).
- [39] M.N.HUXLEY. *On the difference between consecutive primes*. Invent Math. 15 (1972), 155-164.
- [40] D.R.HEATH-BROWN. *Zero density estimates for the Riemann zeta function and Dirichlet L-functions*. J.London Math. Soc. (2), 20 (1979), 221-232.
- [41] G.H.HARDY. *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*. C.R. Acad. Sci 158 (1914).

- [42] J.B.CONREY. *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line.* reine arge w.math, 399 (1989), pp 1-26.
- [43] G.H.HARDY/J-E.LITTLEWOOD. *The zeros of Riemann's zeta function on the critical line.* M.Z. 10 (1921), 238-317.
- [44] J.B.CONREY. *Zeros of derivatives of Riemann's xi function on the critical line.* J. Number Theory, 16 (1983), 49-74.
- [45] N.LEVINSON. *More than one third of the zeros of Riemann's zeta function are on $\sigma = \frac{1}{2}$.* Adv. Math 13 (1974), 383-436.
- [46] H.M.EDWARDS. *Riemann's zeta function.* Dover (1974).
- [47] P.COLMEZ. *éléments d'analyse et d'algèbre et de théorie des nombres.* (2012).

