

Mémoire de master2

Mathématiques fondamentales

La fonction Upsilon des frères Zamolodchikov



présenté par Véronique Cohen-Aptel

Soutenu le Lundi 26 Mai 2008

Mémoire sous la direction de Vadim Schechtman



Université Paul Sabatier Toulouse

## Résumé

Nous nous intéresserons dans ce mémoire à la fonction  $\Upsilon_b$  (upsilon) des frères Zamolodchikov. Cette fonction très utilisée par les physiciens (voir [13]) méritait d'être étudiée d'un point de vue mathématiques. On regardera plus particulièrement la représentation intégrale de  $\log \Upsilon_b(x)$ . Pour ce faire, nous étudierons la fonction  $\Gamma$  d'Euler au travers d'une formule de Kummer (cela nous donnera une analogie avec la représentation intégrale de  $\log \Upsilon_b(x)$ ). Puis la fonction double Gamma avec la représentation intégrale de  $\log \Gamma_2(x)$ . Ce résultat permettra de prouver les représentations intégrales de  $\log \Gamma_b(x)$ ,  $\log S_b(x)$  et enfin de  $\log \Upsilon_b(x)$ .

Remerciements :

je remercie chaleureusement Monsieur Vadim Schechtman pour son encadrement, ses idées ainsi que pour sa passion des mathématiques qu'il m'a généreusement fait partager.

Je remercie mon mari, mes enfants, parents et amis pour leurs soutiens quotidiens.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 La fonction Gamma d'Euler</b>	<b>11</b>
1.1 Petit historique de Gamma . . . . .	11
1.1.1 Euler . . . . .	11
1.1.2 Gauss . . . . .	11
1.1.3 Weierstrass . . . . .	11
1.2 Définition comme intégrale et propriétés immédiates . . . . .	12
1.2.1 Définition . . . . .	12
1.2.2 Equation fonctionnelle . . . . .	12
1.2.3 Théorème et définition . . . . .	12
1.3 Théorème : Euler, Gauss . . . . .	13
1.4 Théorème : Weiertrass . . . . .	14
1.5 Théorème : formule des compléments . . . . .	14
1.5.1 Corollaire . . . . .	15
1.6 Résidus de Gamma . . . . .	15
1.7 Théorème : Formule de multiplication de Gauss, Legendre . . . . .	15
1.7.1 Démonstration . . . . .	15
1.7.2 Corollaire : Formule de duplication de Legendre . . . . .	16
1.8 Intégration sur le contour de Hankel . . . . .	16
1.8.1 Intégrale de Hankel . . . . .	17
1.8.2 Corollaire . . . . .	17
1.9 Dérivée logarithmique de Gamma : théorème (Gauss) . . . . .	18
1.9.1 Proposition 1 . . . . .	18
1.9.2 Proposition 2 . . . . .	19
1.9.3 proposition 3 . . . . .	21
1.9.4 Démonstration du théorème 1-9 . . . . .	21
1.10 Théorème : Malmsten . . . . .	22
1.11 Formule de Kummer . . . . .	23
<b>2 La fonction double Gamma</b>	<b>24</b>
2.1 Fonction zéta de Riemann-Hurwitz . . . . .	24
2.1.1 Définition donnée par Whittaker and Watson [1] : . . . . .	24
2.1.2 Expression de $\zeta(s, a)$ comme intégrale infinie . . . . .	24
2.1.3 Expression de $\zeta(s, a)$ sur le contour C de Hankel . . . . .	25
2.1.4 Propriétés . . . . .	25
2.1.5 Formule de Lerch (voir [1] p.271) . . . . .	26

2.2	Double fonction $\zeta_2$	26
2.2.1	Définition	26
2.2.2	Représentation intégrale de $\zeta_2$	26
2.3	Double fonction $\Gamma_2$	26
2.3.1	Fonction G de Barnes	26
2.3.2	Fonction $f_{CUE}$	29
2.3.3	Définition de Double fonction $\Gamma_2$ par la fonction $\zeta_2$	30
2.3.4	Formule de la différence :	30
2.4	Formule intégrale	31
2.4.1	Proposition	31
2.4.2	Preuve :	31
2.5	Représentation intégrale de $\log \Gamma_2$	34
2.5.1	Théorème fondamental	34
2.5.2	Démonstration	34
<b>3</b>	<b>La fonction <math>\Gamma_b</math> et double sinus <math>S_b</math></b>	<b>37</b>
3.1	La fonction $\Gamma_b$	37
3.1.1	Définition de la fonction $\Gamma_b$	37
3.1.2	Symétrie	37
3.1.3	Equations fonctionnelles	37
3.1.4	Analyticité	38
3.1.5	Théorème : Représentation intégrale de $\log \Gamma_b(x)$	38
3.1.6	Preuve	38
3.2	La fonction double sinus	39
3.2.1	Définition de la fonction double sinus	39
3.2.2	Relation inverse	39
3.2.3	Équations fonctionnelles	39
3.2.4	Démonstration	39
3.2.5	Analyticité	39
3.2.6	Asymptotique	40
3.2.7	Théorème : Représentation intégrale de $\log S_b(x)$ :	40
3.2.8	Démonstration	40
<b>4</b>	<b>La fonction Upsilon</b>	<b>41</b>
4.1	Définition	41
4.2	Symétries	41
4.3	Equations fonctionnelles	41
4.4	Preuve	42
4.5	Zéros	42
4.6	Théorème principal : représentation intégrale de $\log \Upsilon_b(x)$	42
4.7	Preuve du théorème principal	43
4.8	La formule Dorn-Otto-Zamolodchikov-Zamolodchikov (DOZZ)	43
4.9	Définitions	44
4.10	Proposition	44
4.11	Preuve de la proposition	44
4.12	Résidus	45

4.13	Démonstration . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Un peu d'histoire</b>	<b>47</b>
5.1	Euler . . . . .	47
5.1.1	Sa vie . . . . .	47
5.1.2	Ses écrits . . . . .	48
5.1.3	Ses enfants . . . . .	48
5.1.4	Découvertes . . . . .	48
5.2	Gauss . . . . .	50
5.2.1	Sa vie . . . . .	50
5.2.2	Découvertes et publications . . . . .	51
5.2.3	Ses enfants . . . . .	52
5.3	Weierstrass . . . . .	52
5.3.1	Sa vie . . . . .	52
5.3.2	Publications . . . . .	54
5.4	Barnes . . . . .	54
5.4.1	Sa vie . . . . .	54
5.4.2	Publications : . . . . .	55
5.5	Kummer . . . . .	56
5.5.1	Sa vie . . . . .	56
5.5.2	Contributions . . . . .	56
5.6	Les frères Zamolodchikov . . . . .	57
5.6.1	Alexander Zamolodchikov . . . . .	57
5.6.2	Contributions . . . . .	58
5.6.3	Alexei Zamolodchikov . . . . .	58
5.6.4	Contributions . . . . .	59
	<b>Bibliographie</b>	<b>59</b>

# Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude mathématique de la fonction  $\Upsilon_b$ , fonction très utilisée par les physiciens (Zamolodchikov, Fadeev etc... voir [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18]).

Il permettra également d'établir des analogies entre les formules données dans les chapitres 1 à 4.

Le chapitre 1 est consacré à l'étude de la fonction Gamma D'Euler.

Après avoir cité trois noms illustres concernant cette fonction (Euler, Gauss, Weierstrass), on introduit la fonction  $\Gamma$  par sa définition sous forme intégrale :

pour  $Re(s) > 0$ ,

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt = \Gamma(s).$$

On donne l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),$$

avec  $Re(s) > 0$  et

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

si  $n$  est un entier naturel.

Une autre façon d'appréhender la fonction  $\Gamma$  est donnée par le théorème d'Euler-Gauss :

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^s B(n+1, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^s \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^s \frac{(n-1)!}{s(s+1)\dots(s+n-1)}$$

et également par un produit : théorème de Weierstrass

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} \right\}$$

avec  $Re(s) > 0$ .

En découle la formule des compléments et la formule de multiplication de Gauss-Legendre.

Après ces résultats bien connus, on s'intéressera par la suite à la représentation intégrale de  $\Gamma$  par une intégrale de Cauchy ; on considère pour cela l'intégrale suivante :

$$\int_{\rho}^{0+} e^{-t} t^{s-1} dt, \rho > 0$$

on intègre sur le contour de Hankel.

On obtient le résultat suivant :

$$\Gamma(s) = -\frac{1}{2i \sin(\pi s)} \int_{\infty}^{0+} e^{-t} t^{s-1} dt,$$

si  $Re(s) > 0$ .

Pour clôturer le chapitre 1 : trois résultats importants

- la dérivée logarithmique de la fonction  $\Gamma$
- le théorème de Malmsten

$$\log \Gamma(x) = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} + e^{-t}(x-1) \right) \frac{dt}{t},$$

avec  $Re(x) > 0$ .

- la formule de Kummer :

$$2 \log \Gamma(x) - \log(\pi) + \log(\sin(\pi x)) = \int_0^{\infty} \left( \frac{\sinh(\frac{1}{2} - x)t}{\sinh(\frac{t}{2})} - e^{-t}(1-2x) \right) \frac{dt}{t},$$

avec  $0 < x < 1$ .

Ces résultats permettent de voir une analogie avec la formule intégrale de la fonction upsilon.

Le chapitre 2 traite de la fonction double Gamma. Pour arriver au théorème fondamental de ce chapitre (qui est la représentation intégrale de  $\log \Gamma_2$  :

$$\log \Gamma_2(s|b, b^{-1}) = \int_0^{\infty} \left[ \frac{e^{-sx}}{(1 - e^{-bx})(1 - e^{-x/b})} - \frac{(Q/2 - s)^2}{2} e^{-x} - \frac{Q/2 - s}{x} - \frac{e^{-x}}{12} (1 - Q^2/2) - \frac{1}{x^2} \right] \frac{dx}{x}$$

où  $Q = b + b^{-1}$  et  $Re(s) > 0, Re(b) \neq 0$ .

il faut introduire la fonction zéta de Riemann-Hurwitz, par sa définition donnée par Whittaker and Watson :

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}.$$

Puis voir son expression comme intégrale infinie :

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx$$

où  $\sigma \geq 1 + \delta$  et  $\arg x = 0$  ainsi que son expression sur le contour de Hankel avec ses propriétés :

$$\zeta(s, a) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1 - e^{-z}} dz, \text{ avec } |\arg(-z)| \leq \pi.$$

Ceci nous amène à donner la définition de double fonction  $\zeta_2$  et sa représentation intégrale

$$\zeta_2(s, z|b_1, b_2) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{e^{-sy}}{(1 - e^{-b_1 y})(1 - e^{-b_2 y})} y^{z-1} dy.$$

Avant d'étudier la fonction double  $\Gamma_2$ , un paragraphe est consacré à un cas particulier de  $\Gamma_2$ , la fonction  $G$  de Barnes.

Par définition :

pour  $s \in \mathbb{C}$ ,

$$G(s+1) = \Gamma(s)G(s)$$

et  $G(1) = 1$ .

Après avoir donné brièvement les propriétés principales de cette fonction  $G$  (le plan suit une démarche analogue à la fonction  $\Gamma$  du chapitre 1 : produit de Weierstrass, formule de Stirling, théorème de Gauss, formule des compléments, formule intégrale), une formule d'Alexejewski (analogue de la formule limite d'Euler pour la fonction  $\Gamma$ ) est démontrée en utilisant la formule de "Stirling" .

Théorème, cf [20] : pour  $s \in \mathbb{C}$ ,

$$G(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{(s^2+s)/2} \Gamma(n)^s \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(j)}{\prod_{j=0}^n \Gamma(j+s)}$$

Un exemple d'utilisation de ce théorème se trouve dans la formule suivante :

$$\frac{(G(1+s/2))^2}{G(1+s)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{(s/2)^2}} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(j)\Gamma(j+s)}{(\Gamma(j+s/2))^2}$$

On peut alors donner la définition de la Double fonction  $\Gamma_2$

$$\log [\Gamma_2(s|b_1, b_2)] = \left\{ \frac{\partial \zeta_2}{\partial t}(s, t|b_1, b_2) \right\}_{t=0}.$$

De cette définition découle la formule de la différence :

$$\frac{\Gamma_2(s+b_1|b_1, b_2)}{\Gamma_2(s|b_1, b_2)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{b_2^{\frac{s}{b_2}-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{s}{b_2})}$$



et une première représentation intégrale donnée par Shintani :  
 Soit  $b = (b_1, b_2)$  une paire de nombres positifs. Il existe une constante positive  $\rho_2(b)$  indépendante de  $z$  telle que :

$$\log [\Gamma_2(z|b)/\rho_2(b)] = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{e^{-t}}{(1 - e^{-b_1 t})(1 - e^{-b_2 t})} \frac{\log t}{t} dt$$

$$+ \frac{(\gamma - i\pi)}{2b_1 b_2} \{B_2(\frac{z}{b_1})b_1^2 + 2B_1(\frac{z}{b_1})B_1 b_1 b_2 + B_2 b_2^2\},$$

avec  $\log t$  réel sur le contour  $C$  (habituel cf chapitre 1, 1-8),  $B_1, B_2$  les polynômes de Bernoulli et  $Re(z) > 0$ .

Le chapitre se termine par le théorème fondamental : la représentation intégrale de  $\log \Gamma_2$ .

Le chapitre 3 est consacré aux fonctions  $\Gamma_b$  et double sinus  $S_b$ .  
 Ces fonctions spéciales nous permettront de mieux appréhender la fonction upsilon.

La fonction  $\Gamma_b$  par définition est relié à la fonction  $\Gamma_2$  :

$$\Gamma_b(x) = \frac{\Gamma_2(x|b, b^{-1})}{\Gamma_2(Q/2|b, b^{-1})},$$

avec  $Q = b + b^{-1}$  et  $Re(x) > 0, Re(b) \neq 0$ .

On en déduit ses propriétés de symétrie et une équation fonctionnelle, ainsi que la représentation intégrale de  $\log \Gamma_b(x)$  :

$$\log \Gamma_b(x) = \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-xt} - e^{-Qt/2}}{(1 - e^{-bt})(1 - e^{-t/b})} - \frac{(Q/2 - x)^2}{2} e^{-t} - \frac{(Q/2 - x)}{t} \right] \frac{dt}{t}$$

$Re(x) > 0, Re(b) \neq 0$ .

La fonction double sinus est reliée à la fonction  $\Gamma_b$  par :

$$S_b(x) = \frac{\Gamma_b(x)}{\Gamma_b(Q - x)}.$$

De même, nous verrons ses propriétés : relation inverse, équations fonctionnelles et la représentation intégrale du  $\log S_b(x)$  :

$$\log S_b(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{\sinh(Q - 2x)t}{\sinh(bt) \sinh(t/b)} + \frac{(2x - Q)}{t} \right] \frac{dt}{t}, \text{ avec } |Re(x)| < Re(Q).$$

Avec les résultats précédents, nous sommes en mesure au chapitre 4 d'étudier la fonction upsilon.

Par définition :

$$\Upsilon_b(x) = \frac{1}{\Gamma_b(x)\Gamma_b(Q-x)}$$

avec  $Q = b + b^{-1}$ .

Nous verrons ses propriétés : symétries, équations fonctionnelles et le théorème principal : la représentation intégrale de  $\log \Upsilon_b(x)$  :

$$\log \Upsilon_b(x) = \int_0^\infty \left[ \left( \frac{Q}{2} - x \right)^2 e^{-t} - \frac{\sinh^2(Q/2 - x)\frac{t}{2}}{\sinh(bt/2) \sinh(t/2b)} \right] \frac{dt}{t}$$

si  $0 < \operatorname{Re}(x) < Q$ .

Une application intéressante de la fonction  $\Upsilon_b(x)$  est l'utilisation de la formule DOZZ (Dorn-Otto-Zamolodchikov) :

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = [\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2}]^{(Q-\sum\alpha_i)/b}$$

$$\times \frac{\Upsilon_0\Upsilon(2\alpha_1)\Upsilon(2\alpha_2)\Upsilon(2\alpha_3)}{\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q)\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)\Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)}$$

dans la proposition suivante :

$$\frac{C(\alpha_1 + b, \alpha_2, \alpha_3)}{C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = -\frac{\gamma(-b^2)}{\pi\mu} \times \frac{\gamma(b(2\alpha_1 + b))\gamma(2b\alpha_1)\gamma(b\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - b)}{\gamma(b(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q))\gamma(b(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3))\gamma(b(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2))}$$

où :

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}.$$

Pour terminer un calcul de résidus :

$$\operatorname{res}_{\sum\alpha_i=Q-n/b} C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = I_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

où :

$$I_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left( \frac{-\pi\mu}{\gamma(-b^2)} \right)^n \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \gamma(-jb^2)}{\prod_{k=0}^{n-1} [\gamma(2\alpha_1 b + kb^2)\gamma(2\alpha_2 b + kb^2)\gamma(2\alpha_3 b + kb^2)]}$$

Dans le dernier chapitre, il est apparu important de s'arrêter quelques instants sur la vie de quelques grands noms rencontrés lors de l'élaboration de ce mémoire :

- Euler
- Gauss
- Weierstrass
- Barnes
- Kummer
- les frères Zamoldochikov

# Chapitre 1

## La fonction Gamma d'Euler

### 1.1 Petit historique de Gamma

#### 1.1.1 Euler

En 1755, Euler publie *Institutiones calculi integralis* où il étudie la fonction  $\Gamma$ , qu'il note  $\Pi$  (Gauss, Riemann utiliseront la notation d'Euler, la notation  $\Gamma$  est dû à Legendre). En 1729, s'intéressant à l'interpolation des fonctions il obtient l'expression :

$$\Gamma(x+1) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1-x}(n+1)^x}{n+x}$$

permettant de représenter  $x!$  avec  $x$  réel... Puis, suite à une correspondance avec Christian Goldbach, dans un article publié en 1730 traitant de l'intégrale de Wallis, celle-ci l'amène à

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = n!$$

#### 1.1.2 Gauss

Dans [8], Gauss fait une étude approfondie de la fonction  $\Gamma$ . Il obtient la fonction  $\Gamma$  comme une limite de la fonction Bêta d'Euler

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

#### 1.1.3 Weierstrass

Enfin, Weierstrass en s'appuyant sur les travaux de Gauss, donne une application exemplaire de son théorème de représentation d'une fonction holomorphe par un produit infini par la formule :

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} \right\}$$

avec  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . avec  $\gamma$  définie par :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n) \right] = \gamma$$

## 1.2 Définition comme intégrale et propriétés immédiates

### 1.2.1 Définition

On définit la fonction  $\Gamma$  par :

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = \Gamma(s),$$

$\operatorname{Re}(s) > 0$ .

Plus précisément (1.2.1) définit  $\Gamma(s)$  comme une fonction holomorphe dans le demi-plan  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

### 1.2.2 Equation fonctionnelle

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),$$

avec  $\operatorname{Re}(s) > 0$  et

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

si  $n$  est un entier naturel.

*preuve* : on intègre par parties :

$$\Gamma(s+1) = [-e^{-t} t^s]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = s\Gamma(s)$$

$\operatorname{Re}(s) > 0$ . L'expression entre crochets tendant vers 0 en  $+\infty$ .

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

Puis par récurrence sur  $n$  entier,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

Tout ceci permet de prolonger  $\Gamma(s)$  en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , avec des pôles simples en  $s = 0, -1, -2, \dots$

### 1.2.3 Théorème et définition

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

où  $B(s,t)$  fonction Béta d'Euler est définie par :

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx$$

avec  $Re(s), Re(t) > 0$ .

*Démonstration* : On a

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} x^{s-1} y^{t-1} dx dy$$

On fait le changement de variables  $x+y = r$ ,  $x = rw$ , donc  $0 \leq r < \infty$ ,  
 $0 \leq w \leq 1$

et  $dr = dx + dy$ ,  $dx = wdr + rdw$ ,  $dy = (1-w)dr - rdw$ , donc  $dx dy = rdw dr$ .

Il s'en suit :

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^1 w^{s-1}(1-w)^{t-1} dw \int_0^\infty e^{-r} r^{s+t-1} dr = B(s,t)\Gamma(s+t)$$

### 1.3 Théorème : Euler, Gauss

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^s B(n+1, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^s \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^s \frac{(n-1)!}{s(s+1)\dots(s+n-1)}$$

*Démonstration* :

On remarque que

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n,$$

d'où

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt$$

pour une preuve de ce résultat cf.[1],12.2

On a :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt = n^s \int_0^1 (1-u)^n u^{s-1} du$$

( $u=t/n$ )

Pour  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$B(n+1, s) = \int_0^1 (1-u)^n u^{s-1} du = \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

et cela est vrai pour tout  $s \neq 0, -1, \dots, -n$

(il suffit de calculer cette intégrale par intégration par parties, en réitérant  $n$  fois) d'où le théorème.

## 1.4 Théorème : Weierstrass

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} \right\}$$

avec  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

*Démonstration* : Cf.[1], 12.11 La formule d'Euler 1-3 et l'équation fonctionnelle 1-2-2 impliquent :

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n^{-s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right) \right]$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n^{-s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ e^{(\sum_{k=1}^n 1/n - \log(n))s} \prod_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-s/k} \right\} \right] \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n^{-s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right) \right] &= e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n} \right\} \end{aligned}$$

## 1.5 Théorème : formule des compléments

On a

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

avec  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

*preuve* : Donnons une démonstration assez rapide, utilisant un théorème sur les fonctions analytiques bien connu qui est le suivant : *si  $f$  est une fonction analytique avec des zéros simples  $a_n$ , alors on a :*

$$f(z) = f(0) e^{\frac{f'(0)z}{f(0)}} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{-\frac{z}{a_n}} \right\}$$

D'après Weierstrass, et ce théorème (avec ici

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}, f(0) = 1, f'(0) = 0 \text{ et } a_n = \pi n :$$

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(-s) &= \frac{-1}{s^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} \right\}^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{s}{n}\right) e^{\frac{s}{n}} \right\}^{-1} \\ &= -\frac{\pi}{\sin(\pi s)} \end{aligned}$$

Et comme

$$\Gamma(1-s) = -s\Gamma(-s)$$

on obtient le résultat.

Il existe d'autres démonstrations notamment par la formule d'Euler et la formule de Cauchy. (cf.notes de cours Automne 2006 de V. Schechtman.)

### 1.5.1 Corollaire

si  $s = 1/2$ , on a

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

## 1.6 Résidus de Gamma

$\Gamma(s)$  a en  $s = -n$  un pôle simple avec le résidu :

$$\text{Res}_{s=-n} \Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

*preuve* : d'après (1-2-4) et (1-2-6) on a,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -n} (x+n) \Gamma(s) &= \lim_{s \rightarrow -n} (x+n) \frac{\pi}{\sin(\pi s) \Gamma(1-s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow -n} \left[ \left( \frac{\pi s + \pi n}{\sin(\pi s)} \right) \frac{1}{\Gamma(1+n)} \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \end{aligned}$$

## 1.7 Théorème : Formule de multiplication de Gauss, Legendre

$$\prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(s + \frac{r}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{\frac{1}{2}-ns} \Gamma(ns).$$

### 1.7.1 Démonstration

C'est une conséquence de la formule d'Euler. On pose :

$$\Phi(s) = \frac{n^{ns} \prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(s + \frac{r}{n}\right)}{n \Gamma(ns)}$$

Alors par la formule d'Euler

$$\Phi(s) = \frac{n^{ns} \prod_{r=0}^{n-1} \lim_{m \rightarrow \infty} (m-1)! m^{s+r/n} / \prod_{i=0}^{(m-1)} (s+r)/(n+i)}{n \lim_{m \rightarrow \infty} (nm-1)! m n^{ns} / \prod_{i=0}^{(nm-1)} (ns+i)}$$

$$\Phi(s) = n^{ns-1} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n^{nm} ((m-1)!)^n m^{ns+(n-1)/2}}{(nm-1)! (nm)^{ns}}$$

$$\Phi(s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n^{nm-1} ((m-1)!)^n m^{(n-1)/2}}{(nm-1)!}$$



ceci ne dépend plus de  $s$ , on pose  $s=1/n$ ,

$$\Phi = \Phi(s) = \prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{r}{n}\right)$$

d'où

$$\Phi^2 = \prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(s + \frac{r}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1-r}{n}\right) = \frac{\pi^{n-1}}{\prod_{r=1}^{n-1} \sin(r\pi/n)}$$

Or :

$$\prod_{r=1}^{n-1} \sin(r\pi/n) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Et puisque

$$\Phi > 0,$$

on en déduit

$$\Phi = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{-1/2},$$

d'où la formule cherchée.

### 1.7.2 Corollaire : Formule de duplication de Legendre

Il suffit d'appliquer (1-7) dans le cas  $n=2$  :

$$\Gamma(2s) = \Gamma(s)\Gamma(s + 1/2) \frac{2^{2s-1/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

## 1.8 Intégration sur le contour de Hankel

Après avoir présenté ces résultats bien connus sur la fonction gamma, intéressons-nous par la suite à la représentation intégrale de  $\Gamma$  par une intégrale de Cauchy ; on considère pour cela l'intégrale suivante :

$$\int_{\rho}^{0+} e^{-t} t^{s-1} dt, \rho > 0$$

on intègre sur le contour de Hankel représenté sur la figure ci-dessous.



On peut prendre pour  $(\rho, 0+)$  un contour défini par :

$$D = \{\rho \geq t \geq \delta\} \cup \{t = -\delta e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq \pi\} \cup \{\delta \leq t \leq \rho\} = D_- \cup D_\delta \cup D_+$$

Ici, on a  $0 < \delta < \rho$ ,  $\delta$  est un nombre arbitraire, l'intégrale ne dépend pas de  $\delta$ . De là par l'extension analytique le long de  $D_\delta$ ,  $\arg(-t) = \pi$  sur  $D_+$ , i.e.

$$(-t)^{(s-1)} = e^{i\pi(s-1)} t^{s-1} \text{ sur } D_+.$$

Il s'en suit :

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^{0+} e^{-t} t^{s-1} dt &= \int_{\rho}^{\delta} e^{-i\pi(s-1)} t^{s-1} e^{-t} dt + \int_{D_\delta} e^{-t} (-t)^{s-1} dt + \int_{\delta}^{\rho} e^{i\pi(s-1)} t^{s-1} e^{-t} dt \\ &= -2i \sin(\pi s) \int_{\delta}^{\rho} t^{s-1} e^{-t} dt + \int_{D_\delta} e^{-t} (-t)^{s-1} dt \end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \int_{D_\delta} e^{-t} (-t)^{s-1} dt &= - \int_{-\pi}^{\pi} (\delta e^{i\theta}) e^{\delta(\cos \theta + i \sin \theta)} e^{i\theta} d\theta \\ &= -i\delta^s \int_{-\pi}^{\pi} e^{is\theta + \delta(\cos \theta + i \sin \theta)} d\theta \longrightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0 \text{ si } \operatorname{Re}(s) > 0. \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{\rho}^{0+} e^{-t} t^{s-1} dt = -2i \sin(\pi s) \int_0^{\rho} t^{s-1} e^{-t} dt$$

si  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

En faisant  $\rho \rightarrow \infty$ , on a le théorème suivant :

### 1.8.1 Intégrale de Hankel

$$\Gamma(s) = -\frac{1}{2i \sin(\pi s)} \int_{\infty}^{0+} e^{-t} t^{s-1} dt,$$

si  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . Et en utilisant la formule des compléments, on en déduit le corollaire suivant :

### 1.8.2 Corollaire

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\infty}^{0+} e^{-t} t^{s-1} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{0+} e^t t^{-s} dt,$$

si  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

Voici maintenant les trois principaux résultats de ce premier chapitre :

- en 1-9 : la dérivée logarithmique de Gamma
- en 1-10 : une représentation intégrale de  $\log \Gamma(x)$  : [1], chap 12, 12-32, exemple 1 : théorème de Malmsten
- en 1-11 : [1] chap 12, 12-31, exemple 3 : une formule de Kummer.

## 1.9 Dérivée logarithmique de Gamma : théorème (Gauss)

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz} [\log \Gamma(z)] = \int_0^\infty \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right) dt$$

*preuve* : nous allons avoir besoin de trois propositions sur la constante d'Euler, pour démontrer ce théorème :

### 1.9.1 Proposition 1

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} dt \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_0^1 \frac{1 - (1 - \frac{t}{n})^n}{t} dt - \int_1^n \frac{(1 - \frac{t}{n})^n}{t} dt \right] \quad (2)$$

*preuve* : (1) un raisonnement par récurrence montre facilement ce résultat. En effet, si  $n = 1$  ou  $n = 2$ , on a :

$$1 = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)}{t} dt$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^2}{t} dt$$

Supposons pour un certain entier  $n$  que l'on a :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} dt$$

Alors

$$\int_0^1 \frac{1 - (1-t)^{n+1}}{t} dt = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n(1-t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} dt + \int_0^1 (1-t)^n dt$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \left[ \frac{-(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

par hypothèse de récurrence.

D'où :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^{n+1}}{t} dt$$

On a donc montré pour tout entier  $n$  :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} dt$$

*Preuve de (2) :* On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n)] = \gamma$$

Donc

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} dt - \log(n) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_0^1 \frac{1 - (1 - \frac{t}{n})^n}{t} dt + \int_1^n \frac{1 - (1 - \frac{t}{n})^n}{t} dt - \int_1^n \frac{dt}{t} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_0^1 \frac{1 - (1 - \frac{t}{n})^n}{t} dt - \int_1^n \frac{(1 - \frac{t}{n})^n}{t} dt \right] \end{aligned}$$

### 1.9.2 Proposition 2

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-1/t}}{t} dt$$

*preuve de la proposition 2 :*

En utilisant la proposition 1 ci-dessus et l'inégalité suivante (voir [1] p.242) :

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq t^2 \frac{e^{-t}}{n} \quad (*)$$

on a :

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \leq \int_0^1 \frac{1 - (1 - \frac{t}{n})^n}{t} dt \leq \int_0^1 \frac{[1 - e^{-t}(1 - \frac{t^2}{n})]}{t} dt$$

Donc par passage à la limite quand  $n$  tend vers l'infini :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1 - (1 - \frac{t}{n})^n}{t} dt = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$$

De la même façon, d'après (\*) on a :

$$-\int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt \leq -\int_1^n \frac{(1 - \frac{t}{n})^n}{t} dt \leq -\int_1^n \frac{[e^{-t} - \frac{t^2 e^{-t}}{n}]}{t} dt$$

puis avec le changement de variable  $t=1/T$  :

$$-\int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt = -\int_{1/n}^1 \frac{e^{-1/t}}{t} dt$$

et

$$-\int_1^n \frac{[e^{-t} - \frac{t^2 e^{-t}}{n}]}{t} dt = -\int_{1/n}^1 \frac{[e^{-1/t} - \frac{e^{-1/t}}{t^2 n}]}{t} dt$$

Et par passage à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [-\int_1^n \frac{[e^{-t} - \frac{t^2 e^{-t}}{n}]}{t} dt] = -\int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t} dt$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [-\int_{1/n}^1 \frac{[e^{-1/t} - \frac{e^{-1/t}}{t^2 n}]}{t} dt] = -\int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t} dt$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [-\int_1^n \frac{(1 - \frac{t}{n})^n}{t} dt] = -\int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t} dt$$

D'où en utilisant la proposition 1, on a :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-1/t}}{t} dt$$

D'après la proposition 2, on a :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt - \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Ceci va nous permettre d'obtenir une nouvelle formule pour  $\gamma$  :

### 1.9.3 proposition 3

$$\gamma = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right\} e^{-t} dt$$

*preuve de la proposition 3 :*

$$\gamma = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_\delta^1 \frac{dt}{t} - \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_\Delta^1 \frac{dt}{t} - \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right]$$

où  $\Delta = 1 - e^{-\delta}$  et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_\Delta^\delta \frac{dt}{t} \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\log(\frac{\delta}{1-e^{-\delta}})] = 0$$

On effectue un changement de variable  $t = 1 - e^{-u}$  dans la première intégrale, et remplaçant  $u$  par  $t$ , on a alors :

$$\gamma = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt - \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right] = \int_0^\infty \left[ \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right] e^{-t} dt$$

### 1.9.4 Démonstration du théorème 1-9

Pour obtenir la formule de Gauss, considérons l'équation suivante :

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{z+m} \right)$$

que l'on obtient facilement en dérivant logarithmiquement :

$$\Gamma(z+1)^{-1} = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Et écrivons

$$\frac{1}{z+m} = \int_0^\infty e^{-t(z+m)} dt,$$

avec  $m$  entier positif et  $\text{Re}(z) > 0$ .

Il vient alors que :

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \int_0^\infty e^{-tz} dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \sum_{m=1}^n (e^{-mt} - e^{-(z+m)t}) dt$$

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-zt} - e^{-(n+1)t} + e^{-(z+n+1)t}}{1-e^{-t}} dt$$

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right) dt - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-zt}}{1 - e^{-t}} e^{-(n+1)t} dt$$

Or la limite de la deuxième intégrale est nulle :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-zt}}{1 - e^{-t}} e^{-(n+1)t} dt = 0$$

En effet, pour

$$0 < t \leq 1, \left| \frac{1 - e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right|$$

est une fonction continue en t dont la limite quand t tend vers zéro est finie.

Et quand  $t \geq 1$ ,

$$\left| \frac{1 - e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right| < \frac{1 + |e^{-zt}|}{1 - e^{-1}} < \frac{2}{1 - e^{-1}} = K$$

Donc :

$$\left| \int_0^\infty \frac{1 - e^{-zt}}{1 - e^{-t}} e^{-(n+1)t} dt \right| < K \int_0^\infty e^{-(n+1)t} dt = K(n+1)^{-1} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Nous avons donc prouvé la formule de Gauss :

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz} [\log \Gamma(z)] = \int_0^\infty \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right) dt$$

avec  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

## 1.10 Théorème : Malmsten

$$\log \Gamma(x) = \int_0^\infty \left( \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} + e^{-t}(x-1) \right) \frac{dt}{t},$$

avec  $\operatorname{Re}(x) > 0$ .

*Démonstration* : On a :

$$\log \Gamma(x) = \int_1^x \frac{d \log \Gamma(t)}{dx} dt = \int_1^x \Psi(t) dt,$$

avec  $\operatorname{Re}(x) > 0$ , d'après la formule de Gauss théorème 1-9.

D'où :

$$\log \Gamma(x) = \int_1^x \left[ \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-x't}}{1 - e^{-t}} \right\} dt \right] dx' = \int_0^\infty \left[ \int_1^x \left\{ \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-x't}}{1 - e^{-t}} \right\} dx' \right] dt$$

car

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-x't}}{1 - e^{-t}} \right\} dt$$

converge uniformément pour  $Re(x') > 0$ .

Donc :

$$\log \Gamma(x) = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{t(1 - e^{-t})} + (x-1) \frac{e^{-t}}{t} \right\} dt = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{(1 - e^{-t})} + (x-1)e^{-t} \right\} \frac{dt}{t}.$$

## 1.11 Formule de Kummer

$$2 \log \Gamma(x) - \log(\pi) + \log(\sin(\pi x)) = \int_0^\infty \left( \frac{\sinh(\frac{1}{2} - x)t}{\sinh(\frac{t}{2})} - e^{-t}(1 - 2x) \right) \frac{dt}{t},$$

avec  $0 < x < 1$ .

*Démonstration :*

$$\begin{aligned} 2 \log \Gamma(x) - \log(\pi) + \log(\sin(\pi x)) &= 2 \log \Gamma(x) + \log \frac{(\sin(\pi x))}{\pi} \\ &= 2 \log \Gamma(x) - \log \Gamma(x) - \log \Gamma(1 - x) \\ &= \log \Gamma(x) - \log \Gamma(1 - x) \end{aligned}$$

Puis on utilise le théorème de Malmsten (1-10)

$$\begin{aligned} \log \Gamma(x) - \log \Gamma(1 - x) &= \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} + e^{-t}(x - 1) \right] \frac{dt}{t} - \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-(1-x)t} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} - x e^{-t} \right] \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-xt} - e^{-(1-x)t}}{1 - e^{-t}} + e^{-t}(2x - 1) \right] \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left[ \frac{e^{t/2}(e^{-xt} - e^{-(1-x)t})}{e^{t/2}(1 - e^{-t})} - (1 - 2x)e^{-t} \right] \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left[ \frac{\sinh(\frac{1}{2} - x)t}{\sinh(\frac{t}{2})} - e^{-t}(1 - 2x) \right] \frac{dt}{t}, \text{ avec } 0 < x < 1 \end{aligned}$$



# Chapitre 2

## La fonction double Gamma

Cette fonction remarquable étudiée par Barnes vers 1900, ne figure pas dans les tables de fonctions spéciales les plus connues.

Elle est citée en exercice (dans " A course of modern analysis p.264 exos 48-49-50) par Whittaker et Watson. Elle a été utilisée par Shintani ( " On a Kronecker limit formula for real quadratic fields ").

Avant Barnes, ces fonctions avaient été introduites sous une forme différente par Hölder, Alexeiewsky, Glaisher, Kinkelin.

### 2.1 Fonction zéta de Riemann-Hurwitz

#### 2.1.1 Définition donnée par Whittaker and Watson [1] :

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}$$

où  $s = \sigma + it$ , avec  $\sigma$  et  $t$  réel,  $0 < a \leq 1$ ,  $\arg(a+n) = 0$ , et  $\sigma \geq 1 + \delta$

#### 2.1.2 Expression de $\zeta(s, a)$ comme intégrale infinie

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx$$

où  $\sigma \geq 1 + \delta$  et  $\arg x = 0$

*démonstration* : d'après chapitre 1, définition 1-2-1, en posant  $t = (a+n)x$ , on a :

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-(a+n)x} (a+n)^s x^{s-1} dx$$

D'où :

$$(a+n)^{-s} \Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-(a+n)x} x^{s-1} dx,$$

avec  $\arg x = 0$ ,  $\sigma > 0$  et à fortiori si  $\sigma \geq 1 + \delta$ , on a :

$$\Gamma(s)\zeta(s, a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_0^{\infty} e^{-(a+n)x} x^{s-1} dx$$

Donc :

$$\Gamma(s)\zeta(s, a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx - \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1 - e^{-x}} e^{-(N+1+a)x} dx \right)$$

Or quand  $x \leq 0$ ,  $e^x \leq 1 + x$

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1 - e^{-x}} e^{-(N+1+a)x} dx \right| \leq \int_0^{\infty} x^{\sigma-2} e^{-(N+a)x} dx = (N+a)^{1-\sigma} \Gamma(\sigma-1)$$

et cette dernière égalité tend vers zéro quand  $N \rightarrow \infty$ . avec  $\sigma \geq 1 + \delta$

D'où si  $\sigma \geq 1 + \delta$  et  $\arg x = 0$  :

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx$$

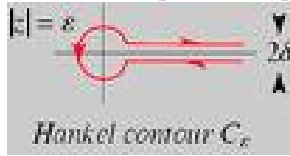
Nous allons avoir besoin des résultats suivants pour démontrer le résultat de Takuro Shintani à la fin du chapitre. Les preuves sont dans le livre de Whittaker et Watson, [1] chapitre 13.

### 2.1.3 Expression de $\zeta(s, a)$ sur le contour C de Hankel

Suivant la méthode expliquée au 1-8 du chapitre 1, on a :

$$\zeta(s, a) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1 - e^{-z}} dz, \text{ avec } |\arg(-z)| \leq \pi$$

où C est représenté par le contour suivant :



### 2.1.4 Propriétés

$$\zeta(0, a) = \frac{1}{2} - a \tag{1}$$

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left[ \zeta(s, a) - \frac{1}{s-1} \right] = -\psi(a) \tag{2}$$

avec

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

### 2.1.5 Formule de Lerch (voir [1] p.271)

$$\left\{ \frac{d}{ds} \zeta(s, z) \right\}_{s=0} = \log \frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}}$$

## 2.2 Double fonction $\zeta_2$

### 2.2.1 Définition

(référéncée dans [12] par (A.52))

$$\zeta_2(s, z|b_1, b_2) = \sum_{n_1, n_2 \geq 0} (s + n_1 b_1 + n_2 b_2)^{-z}$$

### 2.2.2 Représentation intégrale de $\zeta_2$

De la même manière qu'au 2-1-2, on a :

$$\zeta_2(s, z|b_1, b_2) = \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{n_1, n_2 \geq 0} \int_0^\infty e^{-(s+n_1 b_1 + n_2 b_2)y} y^{z-1} dy$$

D'où le premier résultat suivant :

$$\zeta_2(s, z|b_1, b_2) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{e^{-sy}}{(1 - e^{-b_1 y})(1 - e^{-b_2 y})} y^{z-1} dy \quad (1)$$

Puis en appliquant le même procédé décrit au 2-1-3, on obtient une expression de  $\zeta_2(s, z|b_1, b_2)$  sur le contour de Hankel, d'où le deuxième résultat :

$$\zeta_2(s, z|b_1, b_2) = -\frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i} \int_C \frac{(-w)^{z-1} e^{-sw}}{(1 - e^{-b_1 w})(1 - e^{-b_2 w})} dw, \text{ avec } |\arg(-w)| \leq \pi \quad (2)$$

## 2.3 Double fonction $\Gamma_2$

### 2.3.1 Fonction G de Barnes

**Définition**

pour  $s \in \mathbb{C}$ ,

$$G(s+1) = \Gamma(s)G(s)$$

et  $G(1) = 1$ .

L'exposé de Barnes (cf [6]) étant remarquable, contentons-nous d'indiquer brièvement les principales propriétés de G.

### Définition par leur produit de Weierstrass : (3 formes)

$$\begin{aligned}
 G(s+1) &= (2\pi)^{s/2} e^{-s/2 - \frac{\gamma+1}{2}s^2} \prod_{k=1}^{\infty} \left[ \left(1 + \frac{s}{k}\right)^k e^{-s + s^2/2k} \right] \\
 &= (2\pi)^{s/2} e^{-s/2 - \frac{\gamma+1}{2}s^2} \prod_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(s+k)} k e^{z\psi(k) + \frac{s^2}{2}\psi'(k)} \right] \\
 &= (2\pi)^{s/2} e^{(\gamma - \frac{1}{2})s - (\frac{\pi^2}{6} + 1 + \gamma)s^2/2} \Gamma(s) s \prod_{n \geq 0, m \geq 0, n+m \neq 0} \left[ \left(1 + \frac{s}{n+m}\right) e^{\frac{-s}{n+m} + \frac{s^2}{2(n+m)^2}} \right]
 \end{aligned}$$

chaque produit est convergent,  $\gamma$  est la constante d'Euler et  $\psi(s) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)$ .

### Formule de Stirling

$x$  est réel et croît indéfiniment et  $a$  un nombre complexe,

$$\log G(x+a+1) = \frac{x+a}{2} \log 2\pi - \log A + \frac{1}{12} - \frac{3x^2}{4} - ax + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12} + \frac{a^2}{2} + ax\right) \log x + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

où  $A$  est une constante définie par Kinkelin :

$$\log A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \log(1^1 \cdot 2^2 \dots n^n) - \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{12}\right) \log n + \frac{n^2}{4} \right]$$

dont la valeur numérique est  $A = 1,28242713\dots$

### Théorème de Gauss

$$\prod_{r=0}^{n-1} \prod_{s=0}^{n-1} G\left(z + \frac{r+s}{n}\right) = K (2\pi)^{n(n-1)z/2} n^{-n^2 z^2/2 + nz} G(nz)$$

où :

$$K = A^{1-n^2} e^{\frac{n^2-1}{12}} (2\pi)^{-(n-1)/2} n^{-5/12}$$

### Formule des compléments

on pose :

$$\phi(s) = \frac{G(1+s)}{G(1-s)}$$

alors :

$$\phi(s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \phi(s-1).$$

## Relation de Kinkelin

$$\log \phi(s) = s \log 2\pi - \int_0^s \pi s \cot(\pi s) ds$$

## Valeur au point 1/2

$$G(1/2) = A^{-3/2} \pi^{-1/4} e^{1/8} 2^{1/24}$$

## Formule intégrale

si  $Re(s+1) > 0$ ,

$$\log G(s+1) = - \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t(1-e^{-t})^2} [1 - st - \frac{s^2 t^2}{2} - e^{-st}] dt + \frac{s^2}{2} (1 + \gamma) - \frac{3}{2} \log\left(\frac{2\pi}{2}\right)$$

## "Formule d'Alexejewski"

Voir la note [19]

Théorème, cf [20] : pour  $s \in \mathbb{C}$ ,

$$G(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{(s^2+s)/2} \Gamma(n)^s \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(j)}{\prod_{j=0}^n \Gamma(j+s)}$$

Une forme équivalente :

$$G(s+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{(s^2+s)/2} \Gamma(n)^s \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(j+s)}$$

*Démonstration* : cf [19] L'équation fonctionnelle

$$G(s+1) = \Gamma(s)G(s)$$

et  $G(1) = 1$  impliquent que

$$\frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(j)}{\prod_{j=0}^n \Gamma(j+s)} = \frac{G(s)G(n+1)}{G(s+n+1)}$$

On utilise ensuite la " formule de Stirling" pour  $G(s)$ , [6] :

$$G(s+n+1) = A'(2\pi)^{(s+n)/2} e^{-3(s+n)^2/4} (s+n)^{(s+n)^2/2-1/12} (1 + O(1/n))$$

quand  $n \rightarrow \infty$ , où  $A'$  est une constante (dont la valeur exacte ne nous intéresse pas ici).

Il s'en suit ( en écrivant  $f(n) \sim g(n)$  au lieu de  $f(n) = g(n)(1 + O(1/n))$  :

$$\begin{aligned} \frac{G(n+1)}{G(s+n+1)} &\sim \frac{A'(2\pi)^{n/2} e^{-3n^2/4} n^{n^2/2-1/12}}{A'(2\pi)^{(s+n)/2} e^{-3(s+n)^2/4} (s+n)^{(s+n)^2/2-1/12}} \\ &\sim (2\pi)^{-s/2} e^{3sn/2+3s^2/4} \cdot \frac{n^{n^2/2}}{(s+n)^{(s^2+2sn+n^2)/2}} (*) \end{aligned}$$

Or,

$$n^{n^2/2}(s+n)^{n^2/2} = \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-n^2/2} = e^{-sn/2} \cdot e^{sn/2} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-n^2/2}$$

$$= e^{-sn/2} \cdot \left(1 + \frac{s}{n} + \frac{s^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^{n^2/2} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-n^2/2}$$

$$\sim e^{-sn/2} \cdot \left(1 + \frac{s^2}{2n^2}\right)^{n^2/2}$$

$$\sim e^{-sn/2} \cdot e^{s^2/4}$$

Ensuite,

$$\frac{1}{(s+n)^{ns}} = n^{-ns} \cdot \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-ns} n^{-ns} \cdot e^{-s^2}$$

Finalement,

$$\frac{1}{(s+n)^{s^2/2}} \sim n^{-s^2/2}$$

En rassemblant tous ces résultats dans (\*), on obtient :

$$\frac{G(n+1)}{G(s+n+1)} \sim (2\pi)^{-s/2} e^{ns} n^{-ns-s^2/2} \sim n^{-(s^2+s)/2} \Gamma(n)^{-s}, (**)$$

à cause de la formule de Stirling pour  $\Gamma(n)$  :

$$\Gamma(n) = (2\pi)^{1/2} e^{-n} s^{n-1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

si  $n \rightarrow \infty$  (cf.[1], 12.33). Il est clair que (\*\*) entraîne le théorème.

### 2.3.2 Fonction $f_{CUE}$

On trouvera dans [16] (84) un exemple d'utilisation de ce théorème :

**Définition :**

$$f_{CUE}(s/2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{(s/2)^2}} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(j)\Gamma(j+s)}{(\Gamma(j+s/2))^2}$$

**Proposition**

$$f_{CUE}(s/2) = \frac{(G(1 + s/2))^2}{G(1 + s)}$$

*preuve* : d'après la forme équivalente du théorème on a immédiatement :

$$\frac{(G(1 + s/2))^2}{G(1 + s)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{(s/2)^2}} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(j)\Gamma(j + s)}{(\Gamma(j + s/2))^2}$$

### 2.3.3 Définition de Double fonction $\Gamma_2$ par la fonction $\zeta_2$

(Définition référencée dans [12] par (A-53)) :

$$\log [\Gamma_2(s|b_1, b_2)] = \left\{ \frac{\partial \zeta_2}{\partial t}(s, t|b_1, b_2) \right\}_{t=0}$$

**Remarque :**

Si  $(b_1, b_2) = b = 1$ , alors

$$G(s) = \Gamma_2(s|b_1, b_2)$$

### 2.3.4 Formule de la différence :

$$\frac{\Gamma_2(s + b_1|b_1, b_2)}{\Gamma_2(s|b_1, b_2)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{b_2^{\frac{s}{b_2} - \frac{1}{2}} \Gamma(\frac{s}{b_2})}$$

*preuve* :

$$\frac{\Gamma_2(s + b_1|b_1, b_2)}{\Gamma_2(s|b_1, b_2)} = \exp (\log [\Gamma_2(s + b_1|b_1, b_2)] - \log [\Gamma_2(s|b_1, b_2)])$$

$$\frac{\Gamma_2(s + b_1|b_1, b_2)}{\Gamma_2(s|b_1, b_2)} = \exp \left( \left\{ \frac{\partial \zeta_2}{\partial t}(s + b_1, t|b_1, b_2) \right\}_{t=0} - \left\{ \frac{\partial \zeta_2}{\partial t}(s, t|b_1, b_2) \right\}_{t=0} \right)$$

$$\frac{\Gamma_2(s + b_1|b_1, b_2)}{\Gamma_2(s|b_1, b_2)} = \exp \left( \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ - \sum_{n \geq 0} (s + nb_2)^{-t} \right] \right\}_{t=0} \right)$$

$$\frac{\Gamma_2(s + b_1|b_1, b_2)}{\Gamma_2(s|b_1, b_2)} = \exp \left( \left\{ - \frac{\partial}{\partial t} \left[ b_2^{-t} \zeta(t, \frac{s}{b_2}) \right] \right\}_{t=0} \right)$$

on utilise ensuite 2-1-4 (1) et 2-1-5,

$$\frac{\Gamma_2(s + b_1|b_1, b_2)}{\Gamma_2(s|b_1, b_2)} = \exp [\log (b_2) \zeta(0, \frac{s}{b_2}) - \zeta'(0, \frac{s}{b_2})]$$

$$\frac{\Gamma_2(s+b_1|b_1, b_2)}{\Gamma_2(s|b_1, b_2)} = \exp \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{s}{b_2} \right) \log(b_2) - \log \Gamma\left(\frac{s}{b_2}\right) + \frac{1}{2} \log(2\pi) \right]$$

## 2.4 Formule intégrale

(tirée de l'article de Takuro Shintani " On a Kronecker limit for real quadratic fields", [10])

### 2.4.1 Proposition

Soit  $b = (b_1, b_2)$  une paire de nombres positifs. Il existe une constante positive  $\rho_2(b)$  indépendante de  $z$  telle que :

$$\begin{aligned} \log [\Gamma_2(z|b)/\rho_2(b)] &= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{e^{-t}}{(1-e^{-b_1t})(1-e^{-b_2t})} \frac{\log t}{t} dt \\ &+ \frac{(\gamma - i\pi)}{2b_1b_2} \{B_2(\frac{z}{b_1})b_1^2 + 2B_1(\frac{z}{b_1})B_1b_1b_2 + B_2b_2^2\}, \end{aligned}$$

avec  $\log t$  réel sur le contour  $C$  (habituel cf chapitre 1, 1-8),  $B_1, B_2$  les polynômes de Bernoulli et  $Re(z) > 0$ .

### 2.4.2 Preuve :

Il nous faut utiliser un lemme intermédiaire pour démontrer cette proposition.

*Lemme :*

$$\log \left[ \frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}} \right] = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{e^{-zt}}{(1-e^{-t})} \frac{\log t}{t} dt + (\gamma - i\pi) \left( \frac{1}{2} - z \right)$$

*preuve du lemme :* Des propriétés 2-1-3 et 2-1-5, on a :

$$\log \left[ \frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}} \right] = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{e^{-zt}}{(1-e^{-t})} \frac{\log t}{t} dt - \frac{1}{2} \int_C \frac{e^{-zt}}{(1-e^{-t})} \frac{1}{t} dt + \frac{\gamma}{2i\pi} \int_C \frac{e^{-zt}}{(1-e^{-t})} \frac{1}{t} dt$$

Puis de la propriété 2-1-4 (1) et de

$$-\gamma = \left\{ \frac{d}{ds} \Gamma(1-s) \right\}_{s=0},$$

on a le lemme.



Notons  $J(z, b)$  toute la partie après le signe "=" dans la proposition 2-4-1.  
Alors :

$$\begin{aligned}
J(z + b_1, b) - J(z) &= \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{e^{(-z-b_1)t}}{(1 - e^{-b_1 t})(1 - e^{-b_2 t})} \frac{\log t}{t} dt + \frac{(\gamma - i\pi)}{2b_1 b_2} \{B_2(\frac{z+b_1}{b_1})b_1^2 + 2B_1(\frac{z+b_1}{b_1})B_1 b_1 b_2 + B_2 b_2^2\} \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{e^{(-zt)}}{(1 - e^{-b_1 t})(1 - e^{-b_2 t})} \frac{\log t}{t} dt - \frac{(\gamma - i\pi)}{2b_1 b_2} \{B_2(\frac{z}{b_1})b_1^2 + 2B_1(\frac{z}{b_1})B_1 b_1 b_2 + B_2 b_2^2\} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{e^{(-zt)}}{(e^{-b_2 t} - 1)} \frac{\log t}{t} dt + \frac{(\gamma - i\pi)}{2b_1 b_2} \{b_1^2 [B_2(\frac{z+b_1}{b_1}) - B_2(\frac{z}{b_1})] + 2B_1 b_1 b_2 [B_1(\frac{z+b_1}{b_1}) \\
&\quad - B_1(\frac{z}{b_1})]\} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{e^{(-zt)}}{(e^{-b_2 t} - 1)} \frac{\log t}{t} dt + \frac{(\gamma - i\pi)}{2b_1 b_2} (2zb_1 - b_1 b_2),
\end{aligned}$$

(par définition des polynômes de Bernoulli :  $B_1(z) = z - \frac{1}{2}$ ,  $B_2(z) = z^2 - z + \frac{1}{6}$ )

Donc on a d'après le lemme :

$$J(z + b_1, b) - J(z) = -\log \Gamma(z/b_2) + \log(\sqrt{(2\pi)} + \log b_2(\frac{1}{2} - \frac{z}{b_2}))$$

Donc on a :

$$J(z + b_1, b) - J(z) = \log \Gamma_2(z + b_1, b) - \log \Gamma_2(z, b)$$

Car d'après la propriété 2-3-4, on a :

$$\log \Gamma_2(z + b_1|b) = \log \sqrt{(2\pi)} + \log \Gamma_2(z|b) - \log \Gamma(\frac{z}{b_2}) + \log b_2(\frac{1}{2} - \frac{z}{b_2})$$

D'où :

$$J(z + b_1, b) - \log \Gamma_2(z + b_1|b) = J(z, b) - \log \Gamma_2(z|b)$$

et

$$J(z + b_2, b) - \log \Gamma_2(z + b_2|b) = J(z, b) - \log \Gamma_2(z|b)$$

car  $J$  et  $\log \Gamma_2$  sont des fonctions symétriques en  $b_1$  et  $b_2$ .

Montrons maintenant que pour tout  $b$  :

$$\frac{d}{dz}(J(z, b) - \log \Gamma_2(z|b)) = 0 (*)$$

Car alors :

$$J(z, b) - \log \Gamma_2(z|b)$$

est une constante indépendante de  $z$ , ne dépendant que de  $b$ , et donc :

$$\log \Gamma_2(z|b) - J(z, b) = \log \rho_2(b)$$

d'où la proposition 2-4-1.

*preuve de (\*)* :  $J(z, b) - \log \Gamma_2(z|b)$  est une fonction holomorphe sur la partie droite du plan, on peut la prolonger analytiquement avec les périodes  $b_1$  et  $b_2$ .

Donc :

$$\frac{d}{dz}(J(z, b) - \log \Gamma_2(z|b)) = 0$$

pour  $b_1$  et  $b_2$ , la partie gauche de cette égalité dépendant continûment de  $b_1$  et  $b_2$ , on a

$$\frac{d}{dz}(J(z, b) - \log \Gamma_2(z|b)) = 0,$$

pour tout  $b$ .

Donnons maintenant pour terminer ce chapitre un des principaux théorèmes de ce mémoire, une représentation intégrale du  $\log \Gamma_2$  sur  $[0, +\infty[$ . Ce résultat très important permettra d'expliquer toutes les représentations intégrales de  $\log(\Gamma_b(x))$ , de  $\log(S_b(x))$ , et  $\log(\Upsilon_b(x))$  dans les chapitres 3 et 4.

## 2.5 Représentation intégrale de $\log \Gamma_2$

### 2.5.1 Théorème fondamental

$$\log \Gamma_2(s|b, b^{-1}) = \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-sx}}{(1 - e^{-bx})(1 - e^{-x/b})} - \frac{(Q/2 - s)^2}{2} e^{-x} - \frac{Q/2 - s}{x} - \frac{e^{-x}}{12} (1 - Q^2/2) - \frac{1}{x^2} \right] \frac{dx}{x}$$

où  $Q = b + b^{-1}$  et  $Re(s) > 0, Re(b) \neq 0$

### 2.5.2 Démonstration

De la représentation intégrale de  $\zeta_2(s, t|b_1, b_2)$  sur le contour de Hankel, formule 2-2-2 :

$$\zeta_2(s, t|b_1, b_2) = -\frac{\Gamma(1-t)}{2\pi i} \int_C \frac{(-w)^{t-1} e^{-sw}}{(1 - e^{-b_1 w})(1 - e^{-b_2 w})} dw, \text{ avec } |\arg(-w)| \leq \pi$$

et par définition 2-3-3 de  $\log \Gamma_2(s|b, b^{-1})$ , en différenciant par rapport à  $t$  et faisant  $t = 0$ , et sachant que l'on a :

$$-\gamma = \left\{ \frac{d}{dt} \Gamma(1-t) \right\}_{t=0},$$

et

$$\left\{ \frac{d}{dt} (-z)^{(t-1)} \right\}_{t=0} = -\frac{\log(-z)}{z},$$

on a :

$$\log \Gamma_2(s|b, b^{-1}) = \int_C \frac{e^{-sz}}{(1 - e^{-bz})(1 - e^{-z/b})} (\gamma + \log(-z)) \frac{dz}{2i\pi z}, \text{ avec } |\arg(-z)| \leq \pi$$

D'après la méthode décrite au chapitre 1, 1-8 :

sur  $D_+ : \arg(-z) = -\pi$ , donc on a

$$\log(-z) = \log|z| + i \arg(-z) = \log|z| - i\pi$$

Sur  $D_\delta$  ( le cercle ) :

$$-z = \delta e^{i\theta}$$

Donc :

$$\log \Gamma_2(s|b, b^{-1}) = \lim_{\rho \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} \int_\rho^\delta \frac{e^{-sz}}{(1 - e^{-bz})(1 - e^{-z/b})} (\gamma + \log|z| - i\pi) \frac{dz}{2i\pi z}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{\rho \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\rho} \frac{e^{-sz}}{(1 - e^{-bz})(1 - e^{-z/b})} (\gamma + \log |z| + i\pi) \frac{dz}{2i\pi z} \\
& + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{s\delta e^{i\theta}}}{(1 - e^{b\delta e^{i\theta}})(1 - e^{\delta e^{i\theta}/b})} (\gamma + \log \delta e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
\log \Gamma_2(s|b, b^{-1}) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\rho} \frac{e^{-sz}}{(1 - e^{-bz})(1 - e^{-z/b})} \frac{dz}{z} \\
&+ \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{s\delta e^{i\theta}}}{(1 - e^{b\delta e^{i\theta}})(1 - e^{\delta e^{i\theta}/b})} (\gamma + \log \delta + i\theta) \frac{d\theta}{2\pi}
\end{aligned}$$

Appelons

$$I_1 = \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-sx}}{(1 - e^{-bx})(1 - e^{-x/b})} \frac{dx}{x}$$

et

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{s\delta e^{i\theta}}}{(1 - e^{b\delta e^{i\theta}})(1 - e^{\delta e^{i\theta}/b})} (\gamma + \log \delta + i\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{s\delta e^{i\theta}}}{(1 - e^{b\delta e^{i\theta}})(1 - e^{\delta e^{i\theta}/b})} (\gamma + \log \delta) \frac{d\theta}{2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{s\delta e^{i\theta}}}{(1 - e^{b\delta e^{i\theta}})(1 - e^{\delta e^{i\theta}/b})} (i\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

Or au voisinage de 0 :

$$\frac{e^{s\delta e^{i\theta}}}{(1 - e^{b\delta e^{i\theta}})(1 - e^{\delta e^{i\theta}/b})} = \frac{1}{\delta^2 e^{2i\theta}} + \left(\frac{Q}{2} - s\right) \frac{1}{\delta e^{i\theta}} + \left[\frac{Q}{2} \left(\frac{Q}{2} - s\right) + \frac{s^2}{2} - \frac{1}{6}(Q^2 - 1/2)\right] + o(\delta)$$

D'où :

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\gamma + \log \delta) \left[ \frac{1}{\delta^2 e^{2i\theta}} + \left(\frac{Q}{2} - s\right) \frac{1}{\delta e^{i\theta}} + \left[\frac{Q}{2} \left(\frac{Q}{2} - s\right) + \frac{s^2}{2} - \frac{1}{6}(Q^2 - 1/2)\right] + o(\delta) \right] \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{\delta^2 e^{2i\theta}} + \left(\frac{Q}{2} - s\right) \frac{1}{\delta e^{i\theta}} + \left[\frac{Q}{2} \left(\frac{Q}{2} - s\right) + \frac{s^2}{2} - \frac{1}{6}(Q^2 - 1/2)\right] + o(\delta) \right] i\theta \frac{d\theta}{2\pi}$$

Donc :

$$I_2 = (\gamma + \log \delta) \left[ \frac{Q}{2} \left(\frac{Q}{2} - s\right) + \frac{s^2}{2} - \frac{1}{6}(Q^2 - 1/2) \right] + \frac{1}{2\delta^2} + \left(\frac{Q}{2} - s\right) \frac{1}{\delta} + o(\delta)$$

Or grâce au lemme suivant ( pour la preuve voir [3] p. 98-99) :

Lemme :

$$(\gamma + \log \delta) = - \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx + o(\delta)$$

On a également :

$$\frac{1}{2\delta^2} = \int_{\delta}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$$

et :

$$\frac{1}{2\delta} = \int_{\delta}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

Donc :

$$I_2 = - \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \left[ \frac{Q}{2} \left( \frac{Q}{2} - s \right) + \frac{s^2}{2} - \frac{1}{6} \left( Q^2 - \frac{1}{2} \right) \right] dx - \int_{\delta}^{\infty} \frac{dx}{x^3} - \int_{\delta}^{\infty} \left( \frac{Q}{2} - s \right) \frac{dx}{x^2} + o(\delta)$$

Mais on a :

$$\frac{Q^2}{4} - \frac{Qs}{2} + \frac{s^2}{2} - \frac{Q^2}{6} + \frac{1}{12} = \frac{Q^2}{12} - \frac{Qs}{2} + \frac{s^2}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{12} (1 - Q^2/2) + \frac{(Q/2 - s)^2}{2}$$

Conclusion :

on obtient le résultat voulu :

$$\log \Gamma_2(s|b, b^{-1}) = \int_0^{\infty} \left[ \frac{e^{-sx}}{(1 - e^{-bx})(1 - e^{-x/b})} - \frac{(Q/2 - s)^2}{2} e^{-x} - \frac{Q/2 - s}{x} - \frac{e^{-x}}{12} (1 - Q^2/2) - \frac{1}{x^2} \right] \frac{dx}{x}$$

où  $Q = b + b^{-1}$  et  $Re(s) > 0, Re(b) \neq 0$

NB : on enlève à

$$\frac{e^{-sx}}{(1 - e^{-bx})(1 - e^{-x/b})}$$

la quantité :

$$\frac{(Q/2 - s)^2}{2} e^{-x} + \frac{Q/2 - s}{x} + \frac{e^{-x}}{12} (1 - Q^2/2) + \frac{1}{x^2},$$

permettant ainsi à l'intégrale de converger.

# Chapitre 3

## La fonction $\Gamma_b$ et double sinus $S_b$

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à deux fonctions spéciales : la fonction  $\Gamma_b$  et la fonction double sinus  $S_b(x)$ . Elles nous permettront de mieux comprendre la fonction upsilon.

### 3.1 La fonction $\Gamma_b$

#### 3.1.1 Définition de la fonction $\Gamma_b$

A partir de la fonction double Gamma, on peut définir la fonction  $\Gamma_b$ .  
"définition référencée dans [12] par (A 55)" :

$$\Gamma_b(x) = \frac{\Gamma_2(x|b, b^{-1})}{\Gamma_2(Q/2|b, b^{-1})},$$

avec  $Q = b + b^{-1}$  et  $Re(x) > 0, Re(b) \neq 0$

#### 3.1.2 Symétrie

D'après la définition de  $\Gamma_b$ , nous pouvons déduire la propriété suivante :

$$\Gamma_b(x) = \Gamma_{1/b}(x)$$

#### 3.1.3 Equations fonctionnelles

De la première formule vue au chapitre 2 : 2-3-4 formule de la différence :

$$\frac{\Gamma_2(x + s_1|s_1, s_2)}{\Gamma_2(x|s_1, s_2)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{s_2^{\frac{x}{s_2} - \frac{1}{2}} \Gamma(\frac{x}{s_2})},$$

on en déduit immédiatement les deux formules suivantes :

$$\Gamma_b(x + b) = \frac{\sqrt{2\pi} b^{bx-1/2}}{\Gamma(bx)} \Gamma_b(x)$$

$$\Gamma_b(x + b^{-1}) = \frac{\sqrt{2\pi}b^{-x/b+1/2}}{\Gamma(x/b)}\Gamma_b(x)$$

### 3.1.4 Analyticité

De l'étude de la fonction double Gamma de Barnes, il est clair que la fonction  $\Gamma_b$  est une fonction méromorphe de pôles :  $x = -nb - mb^{-1}$ ,  $n, m$ , entiers naturels.

### 3.1.5 Théorème : Représentation intégrale de $\log \Gamma_b(x)$

$$\log \Gamma_b(x) = \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-xt} - e^{-Qt/2}}{(1 - e^{-bt})(1 - e^{-t/b})} - \frac{(Q/2 - x)^2}{2} e^{-t} - \frac{(Q/2 - x)}{t} \right] \frac{dt}{t}$$

$$Re(x) > 0, Re(b) \neq 0$$

### 3.1.6 Preuve

Dans le théorème fondamental 2-6-1 ( chapitre 2) on a vu que :

$$\log \Gamma_2(x, b, b^{-1}) = \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-xt}}{(1 - e^{-bt})(1 - e^{-t/b})} - \frac{(Q/2 - x)^2}{2} e^{-t} - \frac{Q/2 - x}{t} - \frac{e^{-t}}{12} (1 - Q^2/2) - \frac{1}{t^2} \right] \frac{dt}{t}$$

Donc d'après la définition de  $\Gamma_b$ , il est clair que nous avons :

$$\log \Gamma_b(x) = \log \Gamma_2(x, b, b^{-1}) - \log \Gamma_2(Q/2, b, b^{-1})$$

d'où le résultat cherché.

Il existe une autre fonction spéciale reliée à la fonction  $\Gamma_b$ , c'est la fonction double sinus.

## 3.2 La fonction double sinus

### 3.2.1 Définition de la fonction double sinus

La fonction double sinus est reliée à la fonction  $\Gamma_b$  par :

$$S_b(x) = \frac{\Gamma_b(x)}{\Gamma_b(Q-x)}$$

"définition référencée dans [12] par (A 65)"

On en déduit immédiatement la formule suivante :

### 3.2.2 Relation inverse

$$S_b(x)S_b(Q-x) = 1$$

### 3.2.3 Équations fonctionnelles

$$S_b(x+b) = 2 \sin(\pi bx) S_b(x),$$

$$S_b(x+b^{-1}) = 2 \sin(\pi xb^{-1}) S_b(x),$$

### 3.2.4 Démonstration

On a :

$$\begin{aligned} \frac{S_b(x+b)}{S_b(x)} &= 2\pi \frac{\Gamma_b(x+b)}{\Gamma_b(b^{-1}-x)} \frac{\Gamma_b(b^{-1}+b-x)}{\Gamma_b(x)} \\ &= \frac{2\pi}{\Gamma(bx)\Gamma(1-bx)} \\ &= 2 \sin(\pi bx) \text{ ( par la formule des compléments )} \end{aligned}$$

### 3.2.5 Analyticité

Il est clair que la fonction double sinus est une fonction méromorphe,

pôles :  $x = -(nb + mb^{-1})$ ,  $n$  et  $m$  entiers naturels

zéros :  $x = Q + (nb + mb^{-1})$ ,  $n$  et  $m$  entiers naturels

résidus :  $\text{res}_{x=0} S_b(x) = \frac{1}{2\pi}$



### 3.2.6 Asymptotique

$$S_b(x) = e^{\pm \frac{\pi i}{2} x(x-Q)}, \operatorname{Im}(x) \rightarrow \pm \infty$$

Donnons la représentation intégrale du  $\log S_b(x)$ .

### 3.2.7 Théorème : Représentation intégrale de $\log S_b(x)$ :

$$\log S_b(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{\sinh(Q-2x)t}{\sinh(bt) \sinh(t/b)} + \frac{(2x-Q)}{t} \right] \frac{dt}{t}, \text{ avec } |\operatorname{Re}(x)| < \operatorname{Re}(Q)$$

### 3.2.8 Démonstration

D'après la définition de la fonction  $S_b$  et de la représentation intégrale de la fonction  $\log \Gamma_b$  (3-1-5), on a :

$$\log S_b(x) = \log \Gamma_b(x) - \log \Gamma_b(Q-x), |\operatorname{Re}(x)| < \operatorname{Re}(Q),$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-xt} - e^{-(Q-x)t}}{(1 - e^{-bt})(1 - e^{-t/b})} + \frac{(2x-Q)}{t} \right] \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left[ \frac{\sinh(Q-2x)t}{\sinh(bt) \sinh(t/b)} + \frac{(2x-Q)}{t} \right] \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

et  $|\operatorname{Re}(x)| < \operatorname{Re}(Q)$

# Chapitre 4

## La fonction Upsilon

Nous allons voir dans ce chapitre la fonction upsilon, ses liens importants avec les deux fonctions précédemment étudiées.

### 4.1 Définition

$$\Upsilon_b(x) = \frac{1}{\Gamma_b(x)\Gamma_b(Q-x)}$$

avec  $Q = b + b^{-1}$  (A-58)[12]

Comme conséquence directe de la définition, et d'après la propriété de symétrie vue pour la fonction  $\Gamma_b$  (chapitre 3, 3-1-2) on a :

### 4.2 Symétries

$$\begin{aligned}\Upsilon_b(x) &= \Upsilon_{b^{-1}}(x) \\ \Upsilon_b(x) &= \Upsilon_b(Q-x) \\ \Upsilon_b(Q/2) &= 1\end{aligned}$$

### 4.3 Equations fonctionnelles

$$\begin{aligned}\Upsilon_b(x+b) &= \frac{\Gamma(bx)}{\Gamma(1-bx)} b^{1-2bx} \Upsilon_b(x) \\ \Upsilon_b(x+b^{-1}) &= \frac{\Gamma(x/b)}{\Gamma(1-x/b)} b^{\frac{2x}{b}-1} \Upsilon_b(x)\end{aligned}$$

## 4.4 Preuve

Par définition et d'après 3-1-3, équations fonctionnelles de  $\Gamma_b$ , chapitre 3, on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{\Upsilon_b(x+b)}{\Upsilon_b(x)} &= \frac{\Gamma_b(x)\Gamma_b(Q-x)}{\Gamma_b(x+b)\Gamma_b(Q-x-b)} \\
 &= \frac{\Gamma_b(x)\Gamma_b(b+b^{-1}-x)}{\Gamma_b(x+b)\Gamma_b(b^{-1}-x)} \\
 &= \frac{\Gamma(bx)b^{b(b^{-1}-x)-\frac{1}{2}}}{\Gamma(1-bx)b^{bx-\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{\Gamma(bx)b^{1-2bx}}{\Gamma(1-bx)}
 \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient la deuxième formule.

Les zéros de la fonction  $\Upsilon_b$  sont importants pour les applications et se trouvent par définition en les pôles de la fonction  $\Gamma_b$ , on a alors le résultat suivant :

## 4.5 Zéros

Nous avons vu que les pôles de la fonction  $\Gamma_b$  au chapitre 3 sont  $x = -nb - \frac{m}{b}$ , quand  $n$  et  $m$  sont des entiers positifs. Il est facile de voir alors que la fonction  $\Upsilon_b(x)$  a des zéros simples pour  $x = -nb - \frac{m}{b}$  et pour  $x = Q + nb + \frac{m}{b}$ .

Nous arrivons au théorème principal de notre exposé, la représentation intégrale de  $\log \Upsilon_b(x)$  :

## 4.6 Théorème principal : représentation intégrale de $\log \Upsilon_b(x)$

Si  $0 < \operatorname{Re}(x) < Q$ , alors on a :

$$\log \Upsilon_b(x) = \int_0^\infty \left[ \left(\frac{Q}{2} - x\right)^2 e^{-t} - \frac{\sinh^2(Q/2 - x)\frac{t}{2}}{\sinh(bt/2) \sinh(t/2b)} \right] \frac{dt}{t}$$

## 4.7 Preuve du théorème principal

D'après le chapitre 3 : théorème 3-1-5, on a la représentation intégrale de la fonction  $\Gamma_b$  : Si  $0 < \text{Re}(x) < Q$ ,

$$\log \Gamma_b(x) = \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-xt} - e^{-Qt/2}}{(1 - e^{-bt})(1 - e^{-t/b})} - \frac{(Q/2 - x)^2}{2} e^{-t} - \frac{Q/2 - x}{t} \right] \frac{dt}{t}$$

Donc en utilisant la définition 4-1 de la fonction  $\Upsilon_b$ , on a pour :

$$\begin{aligned} \log \Upsilon_b(x) &= -\log \Gamma_b(x) - \log \Gamma_b(Q - x) \\ &= -\int_0^\infty \left[ \frac{e^{-xt} - e^{-Qt/2}}{(1 - e^{-bt})(1 - e^{-t/b})} - \frac{(Q/2 - x)^2}{2} e^{-t} - \frac{(Q/2 - x)}{t} \right] \frac{dt}{t} \\ &\quad - \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-(Q-x)t} - e^{-Qt/2}}{(1 - e^{-bt})(1 - e^{-t/b})} - \frac{(Q/2 - x)^2}{2} e^{-t} - \frac{(-Q/2 + x)}{t} \right] \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \log \Upsilon_b(x) &= \int_0^\infty \left[ \frac{-e^{-xt} - e^{-(Q-x)t} + 2e^{-Qt/2}}{(1 - e^{-bt})(1 - e^{-t/b})} + (Q/2 - x)^2 e^{-t} \right] \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left[ \left( \frac{Q}{2} - x \right)^2 e^{-t} - \frac{\sinh^2(Q/2 - x) \frac{t}{2}}{\sinh(bt/2) \sinh(t/2b)} \right] \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

## 4.8 La formule Dorn-Otto-Zamolodchikov-Zamolodchikov (DOZZ)

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = [\pi \mu \gamma(b^2) b^{2-2b^2}]^{(Q - \sum \alpha_i)/b}$$

$$\times \frac{\Upsilon_0 \Upsilon(2\alpha_1) \Upsilon(2\alpha_2) \Upsilon(2\alpha_3)}{\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q) \Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1) \Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)}$$

avec :

$$\Upsilon_0 = \frac{d\Upsilon(x)}{dx} \Big|_{x=0}$$

## 4.9 Définitions

$$I_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left( \frac{-\pi\mu}{\gamma(-b^2)} \right)^n \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \gamma(-jb^2)}{\prod_{k=0}^{n-1} [\gamma(2\alpha_1 b + kb^2) \gamma(2\alpha_2 b + kb^2) \gamma(2\alpha_3 b + kb^2)]}$$

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}$$

## 4.10 Proposition

$$\frac{C(\alpha_1 + b, \alpha_2, \alpha_3)}{C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = -\frac{\gamma(-b^2)}{\pi\mu} \times \frac{\gamma(b(2\alpha_1 + b)) \gamma(2b\alpha_1) \gamma(b\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - b)}{\gamma(b(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q)) \gamma(b(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)) \gamma(b(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2))}$$

## 4.11 Preuve de la proposition

On va utiliser les propriétés de la fonction upsilon plus particulièrement l'équation fonctionnelle 4-3.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{C(\alpha_1 + b, \alpha_2, \alpha_3)}{C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} &= \frac{[\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2}]^{(Q-\sum \alpha_i)/b-1}}{[\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2}]^{(Q-\sum \alpha_i)/b}} \\ &\times \frac{\Upsilon(2\alpha_1 + 2b) \Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q) \Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1) \Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)}{\Upsilon(2\alpha_1) \Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q + b) \Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + b) \Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - b) \Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2 + b)} \end{aligned}$$

Or

$$\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q + b) = \gamma(b(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q)) b^{1-2b(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q)} \Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q)$$

$$\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + b) = \gamma(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) b^{1-2b(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)} \Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)$$

$$\Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - b + b) = \gamma(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - b) b^{1-2b(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - b)} \Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)$$

$$\Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2 + b) = \gamma(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2) b^{1-2b(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)} \Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\gamma(b^2)^{-1} = -b^4 \gamma(-b^2)$$

$$Q = b + \frac{1}{b}$$

D'où la proposition.

## 4.12 Résidus

On considère que  $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  dépend analytiquement de  $s$ , en posant

$$s = (Q - \sum \alpha_i)/b,$$

alors :

$$\text{res}_{\sum \alpha_i = Q - n/b} C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = I_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

## 4.13 Démonstration

Posons :

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = [\pi \mu \gamma(b^2) b^{2-2b^2}]^{(Q - \sum \alpha_i)/b}$$

$$\times \frac{\Upsilon_0 \Upsilon(2\alpha_1) \Upsilon(2\alpha_2) \Upsilon(2\alpha_3)}{\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1) \Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)}$$

Et :

$$Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q)$$

D'où

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$$

On a alors :

$$\text{res}_{\sum \alpha_i = (Q-n)/b} C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{P(s = n)}{\left. \frac{dQ(s)}{ds} \right|_{s=n}}$$

On a

$$P(s = n) = [\pi \mu \gamma(b^2) b^{2-2b^2}]^n$$

$$\times \frac{\Upsilon_0 \Upsilon(2\alpha_1) \Upsilon(2\alpha_2) \Upsilon(2\alpha_3)}{\Upsilon(Q - 2\alpha_3 - bn) \Upsilon(Q - 2\alpha_2 - bn) \Upsilon(Q - 2\alpha_1 - bn)}$$

On a :

$$\Upsilon(Q - x) = \Upsilon(x)$$

et pour tout  $i = 1, 2, 3$

$$\Upsilon(Q - 2\alpha_i - bn) = \Upsilon(2\alpha_i + bn)$$

On utilise alors l'équation fonctionnelle de la fonction  $\Upsilon$   $n$  fois :

$$\Upsilon(2\alpha_i + bn) = \prod_{k=0}^{n-1} [\gamma(2\alpha_i b + kb^2)] b^{n-4bn\alpha_i - nb^2(n-1)} \Upsilon(2\alpha_i),$$

pour tout  $i = 1, 2, 3$ . De plus :

$$\Upsilon(-bn + b) = \gamma(-nb^2) b^{1-2b(-nb)} \Upsilon(-nb)$$

Ainsi par récurrence sur  $n$  et en faisant le produit membre à membre, on a :

$$\Upsilon(-b) = \prod_{j=2}^{n-1} \gamma(-jb^2) b^{n+2b^2(n-1)(n+2)/2} \Upsilon(-nb)$$

$$\Upsilon(-b+b) = \gamma(-b^2) b^{1+2b^2} \Upsilon(-b)$$

donc :

$$\Upsilon(0) = \prod_{j=1}^n \gamma(-jb^2) b^{n+n(n+1)b^2} \Upsilon(-nb)$$

$$\Upsilon(s) = \prod_{j=1}^n \gamma(b(s-jb)) b^{n-2bsn+n(n+1)b^2} \Upsilon(s-nb)$$

On obtient ainsi :

$$res_{\sum \alpha_i=(Q-n)/b} C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left( \frac{-\pi\mu}{\gamma(-b^2)} \right)^n$$

$$\times \frac{\Upsilon_0 b^{-n-nb^2-n^2b^2}}{\prod_{k=0}^{n-1} [\gamma(2\alpha_1 b + kb^2) \gamma(2\alpha_2 b + kb^2) \gamma(2\alpha_3 b + kb^2)]} \times \frac{1}{\frac{dQ(s)}{ds} \big|_{s=n}}$$

De plus on a :

$$\frac{\Upsilon_0}{\frac{dQ(s)}{ds} \big|_{s=n}} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\Upsilon(s) - \Upsilon(0)}{s} \times \frac{s}{\Upsilon(-bn+s) - \Upsilon(-bn)} \right)$$

D'après les résultats ci-dessus :

$$\Upsilon(-bn+s) - \Upsilon(-bn) = \left( \frac{\Upsilon(s) b^{-n+2bsn-n(n+1)b^2}}{\prod_{j=1}^n \gamma(b(s-jb))} - \frac{\Upsilon(0) b^{n+n(n+1)b^2}}{\prod_{j=1}^n \gamma(-jb^2)} \right)$$

Donc :

$$\frac{\Upsilon_0}{\frac{dQ(s)}{ds} \big|_{s=n}} = b^{n+n(n+1)b^2} \prod_{j=1}^n \gamma(-jb^2)$$

Finalement :

$$res_{\sum \alpha_i=(Q-n)/b} C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left( \frac{-\pi\mu}{\gamma(-b^2)} \right)^n \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \gamma(-jb^2)}{\prod_{k=0}^{n-1} [\gamma(2\alpha_1 b + kb^2) \gamma(2\alpha_2 b + kb^2) \gamma(2\alpha_3 b + kb^2)]}$$

# Chapitre 5

## Un peu d'histoire

### 5.1 Euler



1

#### 5.1.1 Sa vie

Il est né en Suisse, à Bâle, en 1707, où il étudie les mathématiques. Il reçut les leçons de Jean Bernoulli. Par la suite il travaille en tant que professeur de mathématiques à Saint-Pétersbourg. Il vient en 1741 se fixer à Berlin, et retourne à Saint-Petersbourg appelé par Catherine II de Russie, où il finit ses jours, le 18 septembre 1783. Il domine les mathématiques du XVIIIe siècle et développe très largement ce qui s'appelle alors la nouvelle analyse.

Complètement aveugle pendant les dix-sept dernières années de sa vie, il produit presque la moitié de la totalité de son travail durant cette période.

Il était membre des Académies de St-Pétersbourg, de Berlin, associé de l'Académie française des sciences, et fut pensionné par la Russie. Il a fait faire à la science mathématique de grands pas, surtout au calcul différentiel et intégral ; il appliqua l'analyse à la mécanique, à la construction des vaisseaux, et donna la démonstration de plusieurs théorèmes énoncés par Pierre de Fermat. Il eut avec

---

<sup>1</sup>Lien internet sur Euler : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Leonhard\\_Euler](http://fr.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler)



d'Alembert, son rival de science, des démêlés où le bon droit ne paraît pas avoir été de son côté.

### 5.1.2 Ses écrits

Entre ses nombreux écrits, presque tous rédigés en latin, on doit remarquer :  
- *Mécanique exposée analytiquement*, Saint-Petersbourg, 1736 ;  
- *L' introduction à l'analyse de l'infini*, Lausanne, 1748 ;  
- *La Science navale* ; - *Les Institutions de calcul différentiel* ; - *les Institutions de calcul intégral*, 1768 ; - *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie* (princesse d'Anhalt-Dessau, nièce du roi de Prusse), écrites en français, de 1761 à 1762, publiées à Saint-Petersbourg en 1768, 3 volumes, in-8.

### 5.1.3 Ses enfants

Euler eut treize enfants, dont trois marchèrent sur ses traces.

L'aîné, Jean Albert, né en 1734 à Saint-Petersbourg, mort en 1810, partagea plusieurs prix à l'Académie des sciences avec Charles Bossut et Alexis Claude Clairaut, et enseigna la physique à St-Petersbourg.

Charles, né en 1740, mort en 1800, remporta également plusieurs prix à l'Académie des sciences ; il exerça la médecine à Saint-Petersbourg et fut médecin de l'empereur.

Christophe, né en 1743 à Berlin, mort vers 1805, appliqua avec succès les mathématiques au génie militaire.

### 5.1.4 Découvertes

En mathématiques, il apporte d'importantes contributions à la théorie des nombres et aussi à la théorie des équations différentielles.

Sa contribution à l'analyse, par exemple, est issue de sa synthèse du calcul différentiel de Leibniz avec la méthode de Newton.

Il établit sa renommée très tôt en résolvant un problème connu de longue date - à savoir la détermination de la somme des inverses des carrés d'entiers :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

où  $\zeta(s)$  est la fonction  $\zeta$  de Riemann.

Il montra aussi que pour tout nombre réel  $x$ ,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

C'est la formule d'Euler, qui établit le rôle central de la fonction exponentielle. L'identité d'Euler en est une conséquence immédiate.

En arithmétique, il introduit la fonction indicatrice  $\Phi(n)$  ( dite d'Euler), définie comme le nombre d'entiers inférieurs à  $n$  et premiers à  $n$ .

Généralisant le petit théorème de Fermat, il démontre le théorème d'Euler à la base de la cryptographie RSA de nos jours.

En 1735, il travaille sur une constante (qui portera plus tard le nom de constante d'Euler-Mascheroni) utile dans certaines équations différentielles :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n) \right).$$

Il est un coauteur de la formule d'Euler-Maclaurin qui est un outil extrêmement puissant pour le calcul des intégrales, des sommes et des séries difficiles.

Euler écrit *Tentamen novae theoriae musicae* en 1739, qui est une tentative d'accorder les mathématiques et la musique ; une biographie commente que le travail est destiné « à des musiciens trop avancés dans leurs mathématiques et à des mathématiciens trop musicaux ».

En géométrie et en topologie algébrique, il y a une relation appelée relation d'Euler qui relie le nombre de côtés, de sommets, et de faces d'un polyèdre du genre 0 (en supprimant une face on obtient une surface simplement connexe), par exemple d'un polyèdre convexe.

Étant donné un tel polyèdre, la somme du nombre de sommets  $S$  et de faces  $F$  est toujours égale au nombre de côtés  $C$  plus 2 c'est-à-dire :

$$F - C + S = 2$$

Le théorème s'applique également à n'importe quel graphe du plan. Pour les graphiques non plans, il y a une généralisation : si le graphique peut être plongé dans une variété  $M$ , alors si  $F$  est le nombre de faces,  $S$  le nombre de sommets et  $A$  le nombre d'arêtes,

$$F - A + S = \chi(M),$$

où  $\chi$  est la caractéristique d'Euler de la variété, une constante qui est invariable sous des déformations continues.

En 1736, Euler résout un problème connu sous le nom du problème des sept ponts de Königsberg, publiant un article *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* qui pourrait être l'application la plus ancienne de la théorie des graphes ou de la topologie. Cette publication serait également la plus ancienne et donc la première en Recherche Opérationnelle.

On peut affirmer aujourd'hui, comme Condorcet jadis : " Tous les mathématiciens célèbres qui existent aujourd'hui sont ses élèves : il n'en est aucun, qui ne soit formé par la lecture de ses Ouvrages, qui n'ait reçu de lui les formules, qui dans ses découvertes, ne soit guidé et soutenu par le génie d'Euler. Il doit cet honneur à la révolution qu'il a produite dans les sciences mathématiques ; à l'ordre qu'il a su mettre dans ses grands ouvrages ; à la simplicité, à l'élégance de ses formules ; à la clarté de ses méthodes et de ses démonstrations [...]" , ou dire comme Laplace : " Lisez Euler, c'est notre maître à tous ".

## 5.2 Gauss



2

### 5.2.1 Sa vie

Johann Carl Friedrich Gauss (30 avril 1777 - 23 février 1855) était un mathématicien, astronome et physicien allemand, doté d'un grand génie et ayant apporté de très importantes contributions ; il est considéré comme un des plus grands mathématiciens de tous les temps (il est d'ailleurs surnommé le prince des mathématiciens).

Gauss naquit à Brunswick, dans le duché de Brunswick (maintenant en Allemagne) dans une famille très modeste, dont les parents avaient peu d'éducation.

Gauss fut un enfant prodige, il apprit seul à lire et à compter à l'âge de trois ans et à l'école, il impressionna très tôt ses professeurs.

Le duc de Brunswick remarqua ses aptitudes et lui accorda une bourse en 1792 afin de lui permettre de poursuivre son instruction. Il fut envoyé au collège Caroline qu'il fréquenta jusqu'en 1795 ; il y suivit notamment les cours de l'entomologiste Johann Christian Ludwig Hellwig (1743-1831).

Dans cette période, il formula la méthode des moindres carrés et une conjecture sur la répartition des nombres premiers, conjecture qui fut prouvée par Jacques Hadamard et de La Vallée Poussin en 1896.

Gauss acquit pendant toute sa scolarité une très grande érudition, et lorsqu'il alla au collège, démontra à nouveau des théorèmes importants.

Gauss fit une grande percée en 1796, lorsqu'il caractérisa presque complètement tous les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas uniquement, et compléta de cette façon le travail commencé par les mathématiciens de l'Antiquité grecque. Gauss était si satisfait de ce résultat qu'il demanda qu'un polygone régulier de 17 côtés soit gravé sur son tombeau.

La vie privée de Gauss fut marquée par la mort précoce de sa première femme qu'il aimait, Johanna Osthoff, en 1809, suivie de près par la mort de l'un de ses enfants, Louis. Gauss plongea dans une dépression de laquelle il ne sortit jamais entièrement. Il se remaria avec Friederica Wilhelmine Waldeck (Minna), mais le

---

<sup>2</sup>Lien internet sur la vie de Gauss : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Carl\\_Friedrich\\_Gauss](http://fr.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss)

deuxième mariage ne semble pas avoir été très heureux. Quand sa deuxième femme mourut en 1831 après une longue maladie, l'une de ses filles, Therese, prit en main les tâches ménagères et s'occupa de Gauss jusqu'à la fin de sa vie.

Gauss a rarement collaboré avec d'autres mathématiciens et était considéré par beaucoup comme une personne distante et austère. Gauss était profondément pieux et conservateur. Il soutint la monarchie et s'opposa à Napoléon qu'il vit comme un semeur de révolution.

Il mourut à Göttingen, Hanovre (Allemagne) en 1855 et fut enterré au cimetière de *Albanifriedhof*.

### 5.2.2 Découvertes et publications

Il fut le premier à démontrer rigoureusement le théorème fondamental de l'algèbre ; en fait, il produisit quatre preuves entièrement différentes de ce théorème tout au long de sa vie, et clarifia considérablement le concept de nombre complexe.

Il apporta aussi une source fondamentale en théorie des nombres avec son livre publié en 1801 *Disquisitiones arithmeticae*.

Il fut soutenu par des traites du Duc de Brunswick, mais n'apprécia pas l'instabilité de cet arrangement et aussi ne crut pas que les mathématiques fussent assez importantes pour mériter une telle aide ; il opta donc pour une place dans l'astronomie, et en 1807 fut nommé professeur d'astronomie et directeur de l'observatoire astronomique de Göttingen.

En 1809, Gauss publia un travail d'une importance capitale sur le mouvement des corps célestes. Celui-ci contenait un développement influant de la méthode des moindres carrés, une procédure utilisée aujourd'hui dans toutes les sciences, pour minimiser l'impact d'une erreur de mesure. Il était en mesure de prouver l'exactitude de la méthode dans l'hypothèse d'erreurs normalement distribuées. La méthode fut décrite plus tôt par Adrien-Marie Legendre en 1805, mais Gauss affirma qu'il l'utilisait depuis 1795.

Gauss découvrit la possibilité de géométries non-euclidiennes mais ne publia jamais ce travail.

Plus tard, Gauss essaya de déterminer si le monde physique était en fait euclidien en mesurant des triangles géants. En 1818, Gauss commença une étude géodésique de l'État de Hanovre, travail qui mena plus tard au développement des distributions normales pour décrire les erreurs de mesure ; son *theorema egregium* permit d'établir une propriété importante de la notion de courbure.

En 1831, une collaboration fructueuse avec le professeur de physique Wilhelm Weber aboutit à des résultats sur le magnétisme, et fut à l'origine de la découverte des lois de Kirchhoff en électricité. Ceci entraîna la construction d'un télégraphe primitif.

Il fut également l'auteur de deux des quatre équations de Maxwell, qui constituent une théorie globale de l'électromagnétisme. La loi de Gauss pour les champs électriques exprime qu'une charge électrique crée un champ électrique divergeant. Sa loi pour les champs magnétiques énonce qu'un champ magnétique divergeant vaut 0, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de monopôle magnétique. Les lignes de champ sont donc obligatoirement fermées.

Bien que Gauss n'eût jamais travaillé comme professeur de mathématiques et qu'il détestât enseigner, plusieurs de ses étudiants devinrent de très grands mathématiciens, parmi lesquels figuraient Richard Dedekind et Bernhard Riemann.

### 5.2.3 Ses enfants

Gauss eut six enfants, trois par femme.

Avec Johnanna (1780-1809), ses enfants furent Joseph (1806-1873), Wilhelmina (1808-1846) et Louis (1809-1810). De tous les enfants de Gauss, Wilhelmina était la plus prédisposée à avoir son génie, mais mourut regrettablement jeune.

Avec Minna Waldeck, il eut trois enfants : Eugene (1811-1896), Wilhelm (1813-1879) et Therese (1816-1864). Eugene émigra aux États-Unis en 1832 environ, après une discorde avec son père, pour se retrouver finalement à Saint-Charles, dans le Missouri, où il devint un membre respecté de la communauté. Wilhelm vint s'installer un peu plus tard dans le Missouri, commença comme fermier et se lança dans la vente de chaussures à Saint Louis et devint riche. Therese resta à la maison jusqu'à la mort de Gauss, et se maria après.

## 5.3 Weierstrass

Karl Theodor Weierstrass était, aux dires de son collègue Hermite, le législateur de l'analyse. Ce qualificatif de législateur n'est pas associé aux études de droit que Weierstrass a mené, mais à la rigueur nouvelle qu'il a imposé : qu'a-t-on, et que n'a-t-on pas le droit de faire en analyse.



3

### 5.3.1 Sa vie

Karl Weierstrass est né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde (en Allemagne). Son père était inspecteur des impôts, et père de 4 enfants dont bizarrement aucun ne

---

<sup>3</sup>Lien internet sur la vie de Weierstrass :[http ://www.bibmath.net/bios/ index.php3?action=affichequoi=weierstrass](http://www.bibmath.net/bios/index.php3?action=affichequoi=weierstrass)

s'est marié.

Au lycée, Weierstrass est très brillant, et il acquiert des compétences en mathématiques déjà très intéressantes. En dépit de cela, son père le contraint à suivre des études de droit et d'économie.

Mais Weierstrass ne fréquente guère les amphithéâtres, et au lieu de cela s'adonne à l'escrime, à la boisson et aux mathématiques.

Après 4 ans à l'université de Bonn, il ressort sans le moindre diplôme. Néanmoins, son père consent à financer encore 2 ans d'étude à l'Académie théologique et philosophique de Munster, afin que Weierstrass puisse obtenir les titres nécessaires au professorat dans le secondaire.

A Munster, Weierstrass rencontre Guddermann, qui l'éveillera complètement aux mathématiques. Une grande estime mutuelle caractérisa la relation entre les deux hommes.

A compter de 1842, Karl Weierstrass est donc professeur dans le secondaire. Loin de toute communauté scientifique active, il poursuit seul des recherches sur les fonctions elliptiques entreprises dès Munster. Il publie quelques articles dans le journal de son école, mais ils sont incompris par ses collègues, et ignorés par les mathématiciens.

Ce n'est qu'en 1854, à près de 40 ans (on est loin des génies précoces !) que Weierstrass accède d'un coup à la célébrité grâce à son article *Zur Theorie des Abelschen Functionen* qu'il publie dans le prestigieux *Journal de Crelle*. Il y résume l'essentiel des découvertes qu'il a faites au cours des 15 dernières années.

Quasi-immédiatement, il est fait docteur honoris causa de l'université de Königsberg. En 1856, il obtient une chaire à Berlin, tandis qu'il publie la version complète de son premier article.

L'Université de Berlin, où se côtoient Weierstrass, Kummer et Kronecker, devient alors la plus prestigieuse du monde dans le domaine des mathématiques. Aux cours très réputés de Weierstrass se pressent les meilleurs étudiants européens. Parmi eux, il y a Sonia Kovaleskaya, que Weierstrass instruit à part, car elle n'a pas le droit de s'inscrire à l'Université. Il contribuera énormément à ce qu'elle puisse obtenir le titre de docteur de l'Université de Göttingen et un poste à Stockholm.

La fin de la vie de Weierstrass est assez pénible. Dès 1850, il souffre de graves problèmes de santé, qui sont peut-être conséquences de ses excès de jeunesse. En 1861, il est victime d'une attaque qui l'éloigne de ses cours pendant un an. A compter de cette date, il se contentera de dicter ses cours assis, en laissant le soin à un étudiant d'écrire au tableau.

Puis, deux événements vont gravement le marquer. D'abord, en 1877, il s'oppose assez violemment à son collègue et pourtant ami Kronecker au sujet des découvertes troublantes de Georg Cantor. Ensuite, Sonia Kovaleskaya, qu'il avait tant aidée, et avec qui il avait échangé une large correspondance, décède en 1891. Weierstrass est très affecté, et brûle même toutes ses lettres. Il passe ses 3 dernières années dans un fauteuil roulant, et décède le 19 février 1897 à Berlin.

### 5.3.2 Publications

L'oeuvre mathématique de Weierstrass commence par la théorie des fonctions abéliennes et elliptiques : il donne une théorie complète de l'inversion des intégrales hyperelliptiques.

Weierstrass se signale aussi par sa volonté d'algébrisation de l'analyse. Les principes de la théorie des fonctions doivent reposer selon lui sur des principes algébriques clairs. C'est ainsi que Weierstrass donne les premières définitions claires et rigoureuses des nombres réels, de la continuité. En passant, il découvre une fonction continue nulle part dérivable, ce qui choquera beaucoup l'intuition des analystes de l'époque.

Weierstrass contribue également grandement à la théorie des fonctions analytiques, qu'il définit comme somme de puissances convergentes à l'intérieur d'un disque (les séries entières). Il y démontre les théorèmes de dérivation terme à terme, le principe du prolongement analytique.

## 5.4 Barnes



4

### 5.4.1 Sa vie

Ernest William Barnes est né le 1er avril 1874 à Birmingham. C'était un mathématicien et un scientifique anglais, mais aussi un théologien et un ecclésiastique. Il était le plus vieux des quatre fils de John Starkie Barnes et de Kerry Jane Elizabeth, deux professeurs d'école primaire. En 1883 son père est nommé inspecteur des écoles à Birmingham, une position qu'il occupera pendant tout le reste de sa vie active.

Ernest William a étudié à la "King Edward's School de Birmingham et plus tard en 1883 à l'université de Trinité à Cambridge. En 1898, le premier prix Smith lui est attribué. Il sera nommé conférencier de mathématiques en 1902,

---

<sup>4</sup>Lien internet sur la vie de Barnes : [http ://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Barnes.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Barnes.html)

doyen junior en 1906-08 et précepteur en 1908. Il a reçu un diplôme Sc.D. de l'université de Cambridge en 1907 et a été élu camarade de la société royale en 1909. La même année où il est devenu conférencier de mathématiques, Barnes est ordonné diacre par l'évêque de Londres.

En 1915, Barnes a laissé Cambridge, et sa carrière de mathématicien, pour une nomination comme maître du temple à Londres.

Il restera maître du temple jusqu'en 1919 puis évêque de Birmingham en 1924. Ses vues de moderniste l'ont amené à être en conflit avec les Anglo-Catholiques dans son diocèse. Il restera évêque de Birmingham jusqu'en 1952, date à laquelle il se retirera pour cause de maladie. Il meurt dans sa maison du Sussex à l'âge de 79 ans, le 29 Novembre 1953.

L'épiscopat de Barnes a été marqué par une série de polémiques provenant de ses croyances religieuses souvent peu orthodoxes. Positions très étonnantes pour quelqu'un qui a eu une place si haute dans l'église.

### 5.4.2 Publications :

Barnes a écrit 29 papiers mathématiques pendant les années 1897-1910.

Ses premiers travaux ont concerné divers aspects de la fonction gamma, y compris des généralisations de cette fonction donnée par la G-fonction de Barnes, qui satisfait l'équation  $G(z+1) = \Gamma(z)G(z)$ , et à la double fonction gamma.

Barnes a ensuite tourné son attention vers la théorie des fonctions intégrales, où, dans une série de papiers, il a étudié leur structure asymptotique.

Il a également considéré les équations de différences linéaires de second ordre liées aux fonctions hypergéométriques.

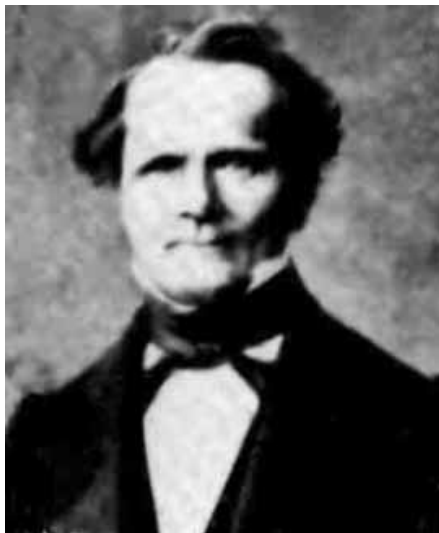
Dans les cinq derniers de ses papiers traitant des fonctions hypergéométriques, Barnes a fait l'utilisation étendue des intégrales étudiées par Mellin.

Il a porté à la connaissance des mathématiciens britanniques, la puissance et la simplicité liées à ces intégrales, maintenant nommées intégrales de Mellin-Barnes.

Son dernier papier mathématique, édité en 1910, était une démonstration courte et élégante d'un résultat précédemment connu de Thomae au sujet d'une transformation d'une fonction hypergéométrique généralisée d'argument d'unité convergent plus rapidement qu'une fonction de la même sorte.



## 5.5 Kummer



<sup>5</sup> Ernst Kummer (29 janvier 1810 à Sorau - 14 mai 1893 à Berlin) est un mathématicien allemand.

### 5.5.1 Sa vie

À l'âge de 3 ans, Kummer perd son père, un médecin. Il fait des études à l'université de Halle, d'abord en théologie puis en mathématiques. Il devint docteur en mathématique en 1831.

Il enseigne pendant 10 ans au lycée de Legnica, où il a Leopold Kronecker et Ferdinand Joachimsthal comme élèves.

Nommé en 1840 professeur à l'université de Breslau grâce à l'appui de Jacobi et de Dirichlet, il reprend la chaire de ce dernier à l'Université de Berlin en 1855. Il s'occupe de nombreux doctorants, notamment Georg Cantor et Hermann Schwarz.

Avec Karl Weierstrass, également nommé en 1856 à l'Université de Berlin, il fonde en 1861 le premier séminaire allemand de mathématique.

Membre correspondant de l'Académie de Berlin dès 1839 grâce au soutien de Jacobi, il en est membre à part entière en 1855, et en devient le secrétaire pour la section mathématiques et physique de 1863 à 1878. Il fut également membre de l'Académie des sciences de Paris et de la Royal Society de Londres.

### 5.5.2 Contributions

Ses premiers travaux concernent les séries hypergéométriques, complétant ceux de Gauss, ce qui lui vaut l'intérêt de Jacobi, puis de Dirichlet.

Mais son nom est associé à ses travaux sur le théorème de Fermat. Pensant l'avoir démontré une première fois en 1837, ses travaux, utilisant les anneaux cyclotomiques, sont entachés d'une erreur, signalée par Dirichlet, qui rend fausse sa démonstration : la décomposition en produit de facteurs premiers n'est pas unique dans n'importe quel anneau cyclotomique.

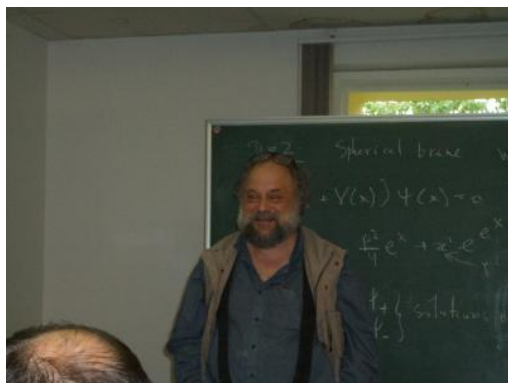
---

<sup>5</sup>Lien internet sur la vie de Kummer :[http://fr.wikipedia.org/wiki/Ernst\\_Kummer](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ernst_Kummer)

Pour corriger ce problème, il met au point la notion de nombre idéal, précurseur de l'idéal d'un anneau. Il démontre ainsi le théorème de Fermat pour tous les nombres premiers réguliers.

Bien que Kummer n'ait pas réussi à démontrer l'hypothèse de Fermat pour tous les entiers, il reçut tout de même un prix de l'Académie des sciences, pour les avancées qu'ont permis ses travaux.

## 5.6 Les frères Zamolodchikov



Alexander Zamolodchikov



Alexei Zamolodchikov <sup>6</sup>

### 5.6.1 Alexander Zamolodchikov

Alexander Zamolodchikov est né à Dubna, région de Moscou, en 1952. Il a un frère jumeau Alexei.

Il obtint son diplôme en physique théorique et mathématique et son Ph.D. en 1978, puis son Doctorat ès-Sciences en 1983, au célèbre Institut de Physique Théorique L.D. Landau à Moscou, où il devint professeur, jusqu'à la fin des années quatre-vingts.

Après l'éclatement de l'URSS, il a été nommé professeur de l'université Rutgers aux Etats-Unis, dans le groupe de théorie des cordes, où il travaille actuellement.

<sup>6</sup>Lien internet sur les frères Zamolodchikov : <http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=cyclesidcycle=177>

Après 1989, il fit plusieurs séjours en France, à l'Ecole Normale, et au LPTM, à Montpellier. Il est membre élu de l'American Physical Society et le lauréat du Prix Heineman de l'année 1999, peut-être le prix le plus prestigieux en physique mathématique, après le Prix Nobel.

Pendant son séjour au Laboratoire de Physique Théorique de l'Ecole Normale Supérieure, il a donné de nombreux séminaires dans divers instituts de recherche et d'universités de Paris- Ile-de-France, ainsi qu'un cours de trois mois, dans le cadre de l'Ecole Doctorale de la région parisienne, sur la théorie des champs d'Ising.

Alexander Zamolodchikov, Professeur à l'Université Rutgers, a bénéficié en 2004-2005 d'une Chaire Internationale de Recherche Blaise Pascal. Issu de l'Ecole de Physique Théorique russe, Monsieur Zamolodchikov est l'un des plus célèbres physiciens théoriciens travaillant dans les domaines fondamentaux de la physique contemporaine, tels que la théorie quantique des champs, la physique statistique, la théorie des cordes et la physique mathématique des systèmes intégrables.

Il est à l'origine de disciplines entières en théorie quantique des champs et en physique statistique, dans lesquelles un grand nombre de physiciens (et mathématiciens) continuent de travailler.

## 5.6.2 Contributions

Parmi ses contributions les plus importantes en physique théorique, les plus significatives sont : - l'introduction en 1978 (avec son frère Al. Zamolodchikov) de la matrice S pour les systèmes intégrables des champs quantiques bi-dimensionnels par la méthode du bootstrap.

C'était le véritable départ du sujet de l'intégrabilité quantique en théorie des champs.

- le travail fondamental, en 1984 (avec A. Belavin et A. Polyakov) (un des articles les plus cités au monde en physique théorique) sur la symétrie conforme à deux dimensions.

Cet article a donné naissance à un nouvel instrument en physique théorique, dont l'importance a été reconnue dans plusieurs domaines, de la physique des transitions de phase à la théorie des cordes moderne. Il a aussi inspiré nombre de travaux de recherche en mathématiques.

- l'application, au cours des années 1990, (avec Al. Zamolodchikov et V. Fateev) des méthodes d'intégrabilité quantique à la théorie de Liouville.

- le modèle de base pour beaucoup d'applications en théorie des cordes et théorie des champs conformes.

Il s'intéresse actuellement au problème fondamental de la thermodynamique des états métastables et des états hors d'équilibre avec une approche nouvelle très prometteuse.

## 5.6.3 Alexei Zamolodchikov

Alexei Zamolodchikov, frère jumeau d'Alexander, est mort récemment le 19 Octobre 2007, à Moscou. Il est à l'origine de disciplines entières en théorie quantique des champs et en physique statistique, dans lesquelles un grand nombre de physiciens (et mathématiciens) continuent de travailler.

#### 5.6.4 Contributions

Parmi ses contributions les plus importantes en physique théorique, les plus significatives sont :

- l'introduction en 1978 (avec son frère Alex. Zamolodchikov) de la matrice  $S$  pour les systèmes intégrables des champs quantiques bi-dimensionnels par la méthode du bootstrap. C'était le véritable départ du sujet de l'intégrabilité quantique en théorie des champs.

- l'application, au cours des années 1990, (avec Alex. Zamolodchikov et V. Fateev des méthodes d'intégrabilité quantique à la théorie de Liouville - le modèle de base pour beaucoup d'applications en théorie des cordes et théorie des champs conformes.

# Bibliographie

- [1] WHITTAKER AND WHATSON, *A course of modern analysis, 4-th Edition, Cambridge at the university Press, 1927.*
- [2] BARNES, E.W., *The theory of the double gamma function, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser A 196(1901), 265-388.*
- [3] BARNES, E.W., *The theory of the Gamma function, Cambridge, (1899) 64-128.*
- [4] BARNES, E.W., *The Genesis of the double gamma function, Cambridge, (1899) 358-381.*
- [5] BARNES, E.W., *On the theory of the multiple gamma function, Philos. Trans. Roy. Soc. Ser A 19 (1904) 374-439.*
- [6] BARNES, E.W., *The theory of the G-function, Quart. J. Math., 31 (1899) 264-314.*
- [7] VIGNÉRAS, M.F., *L'équation fonctionnelle de la fonction Zêta de Selberg du groupe modulaire  $PSL(2, \mathbb{Z})$ , Société mathématique de France, Astérisque 61 (1979) 235-249.*
- [8] GAUSS Carl Friedrich , *Werke, Bd. I - XII, (a) Circa seriem infinitam Vol. II, Gottingae MDCCCXIII = Werke, Bd. III, pp. 124 - 162. (b) Determinatio seriei nostrae per equationem differentialem secundi ordinis, Werke, Bd. III, pp. 207 - 229.*
- [9] BOURBAKI, N., *Eléments de mathématiques XII, chapitre 7 : la fonction Gamma, 1951, 1961 (2d) 1132.*
- [10] SHINTANI, Takuro, *T. Shintani. On a Kronecker limit formula for real quadratic fields. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 24 (1977) 167-199.*
- [11] SHINTANI, Takuro, *A Proof of the Classical Kronecker Limit Formula, University of Tokyo J. Math., Vol. 3, No. 2, (1980) .*
- [12] NAKAYAMA, Yu *Liouville Field Theory : A decade after the revolution, A-3 : special functions p.210-215 : arXiv : hep-th042009v7, 2004.*
- [13] ZAMOLODCHIKOV, A., ZAMOLODCHIKOV, Al., *Conformal bootstrap in Liouville field theory, Nuclear Physics B 477 (1996) 577-605.*
- [14] DORN, H., OTTO, H.J., *Two- and three-point functions in Liouville theory, Nuclear Physics B 429 (1994) 375-388.*
- [15] HUGHES, C.P., KEATING, J.P., O'CONNEL, Neil, *Random matrix theory and the derivative of the Riemann zeta Function, Proc. R. Soc. Lond. A 456 (2000) 2611-2627.*

- [16] KEATING, J.P., SNAITH, N.C., *Random matrix theory and  $\zeta(1/2+it)$* , *Comm. Math. Phys.* 214 (2000) 57-89 .
- [17] KHARCHEV, S., LEBEDEV, D., SEMENOV-TIAN-SHANSKY , M.,  
*Unitary representations of  $U_q(sl(2, \mathbb{R}))$ , the modular double, and the multiparticle  $q$ -deformed Toda chains* , *arXiv :hep-th/0102180 v2 27 Feb 2001*.
- [18] FATEEV, V.A., LITVINOV, A.V., *On differential equation on four-point correlation function in the Conformal Toda Field Theory* , *arXiv :hep-th/0505120 v1 13 May 2005*.
- [19] APTEL-COHEN, V., SCHECHTMAN, V., *Formule d'Euler pour la fonction  $G$  de Barnes*, May 2008.
- [20] ALEXEJEVSKY, W., *"Über eine Classe von Functionen die der Gammafunction analog sind"*, *Wiedmannsche Buchhandlung*, 46 (1894).