

数学分析六大定理的相互证明

SMLYFM

版本: 1.0

更新: February 3, 2026

目录

1 六大定理的相互证明	2
-------------	---

1 六大定理的相互证明

- 确界定理（实数系连续性定理） 1.1
- 单调有界定理 1.2
- Cauchy 定理 1.3
- 区间套定理 1.4
- 聚点定理 1.5
- 有限覆盖定理（Heine-Borel 定理） 1.6

确界定理（实数系连续性定理）：非空有上界的实数集必有上确界，非空有下界的实数集必有下确界。

单调有界定理：在实数系中，单调且有界的数列必定收敛。

Cauchy 定理：数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{x_n\}$ 是基本（柯西）数列。

区间套定理：若 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套，则存在唯一的实数 ξ 属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ ，且 ξ 属于所有这些闭区间，并且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$

聚点定理、魏尔斯特拉斯定理、致密性定理、Bolzano-Weierstrass 定理：

- 聚点定理：在一个有界序列中，至少存在一个聚点。
- 魏尔斯特拉斯定理：每个有界数列都有至少一个聚点。
- 致密性定理：一个集合是致密的当且仅当它的每一个开覆盖都有有限子覆盖。
- Bolzano-Weierstrass 定理：任何有界数列必有一个收敛的子序列。

(a). 聚点定理：

- 定义：在一个有界序列中，至少存在一个聚点。
- 说明：聚点是指序列中某一子序列的极限。如果一个序列是有界的，那么它至少有一个聚点。
- 应用：该定理说明了有界序列在某种意义上不会“散开”，一定存在某些点是序列的极限点。

(b). 魏尔斯特拉斯定理（也称为有界性原理）：

- 定义：每个有界数列都有至少一个聚点。
- 说明：这个定理与聚点定理基本一致，它强调了有界数列一定存在至少一个聚点。
- 应用：该定理是序列收敛性分析中的基础，特别是对于有界数列的性质研究。

(c). 致密性定理：

- 定义：一个集合是致密的当且仅当它的每一个开覆盖都有有限子覆盖。
- 说明：这个定理描述了致密集（通常称为紧致集或紧集）的特性。一个集合如果每一个开覆盖（即用开集覆盖整个集合）都可以找到一个有限的子覆盖，那么这个集合是致密的。
- 应用：致密性定理在拓扑学中非常重要，用于研究集合的极限性质和连续函数的性质。

(d). Bolzano-Weierstrass 定理：

- **定义**: 任何有界数列必有一个收敛的子序列。
- **说明**: 这个定理指出, 有界数列总是可以找到一个收敛的子序列。这意味着有界数列在某种程度上总是可以提取出一个收敛的部分。
- **应用**: Bolzano-Weierstrass 定理在分析学中广泛应用, 特别是在证明各种关于收敛性的命题时。

总结:

- **聚点定理和魏尔斯拉斯定理**主要关注有界数列的聚点存在性。
- **致密性定理**关注的是集合的覆盖性质, 是一个拓扑学定理。
- **Bolzano-Weierstrass 定理**进一步说明了有界数列不仅有聚点, 而且必有一个收敛的子序列。

它们各自从不同的角度描述了数列和集合的性质, 在数学分析和拓扑学中都有着广泛的应用。

有限覆盖定理 (Heine-Borel 定理):

- **定义**: 一个集合是紧的当且仅当它是闭且有界的; 设 H 为闭区间 $[a, b]$ 的一个 (无限) 开覆盖, 则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖 $[a, b]$ 。
- **说明**: 如果一个开覆盖 S 覆盖了闭区间 $[a, b]$, 即 $[a, b] \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, 其中 U_i 是 S 中的开区间, 则存在有限个开区间 $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}$ 使得 $[a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$ 。

注 1. 有界集:

集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ 称为有界的, 如果存在实数 M 使得对于所有 $x \in A$, 有 $|x| \leq M$ 。即集合 A 的所有元素都被限制在一个有限的范围内。

2. 上(下)确界:

给定一个非空的有上界集合 $S \subseteq \mathbb{R}$, 上确界 (或称为最小上界) $\sup S$ 是满足下列条件的唯一实数:

- 对于所有 $x \in S$, 有 $x \leq \sup S$ 。
- 如果 y 是任意上界, 则 $\sup S \leq y$ 。

类似地, 集合 S 的下确界 (或称为最大下界) $\inf S$ 定义为:

- 对于所有 $x \in S$, 有 $x \geq \inf S$ 。
- 如果 z 是任意下界, 则 $\inf S \geq z$ 。

3. 数列收敛:

数列 $\{a_n\}$ 称为收敛的, 如果存在实数 L 使得对于任意 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N 使得当 $n \geq N$ 时, $|a_n - L| < \epsilon$ 。此时, L 被称为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ 。

4. 闭区间套:

一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 称为闭区间套, 如果对于所有 n 都有 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ 。根据闭区间套定理, 存在唯一的实数 ξ , 使得 ξ 属于所有这些闭区间, 即 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ 。

5. 聚点邻域开集:

(a). 聚点:

如果对于任意 $\epsilon > 0$, 在区间 $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ 内包含集合 A 的无限多个点, 则称 x 是集合 A 的一个聚点。

(b). 邻域:

一个点 x 的 ϵ -邻域定义为开区间 $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ 。

(c). 开集:

集合 $G \subseteq \mathbb{R}$ 称为开集, 如果对于集合 G 中的任意一点 x , 存在 x 的一个邻域完全包含于 G 中。

6. 基本数列:

数列 $\{a_n\}$ 称为基本数列 (或柯西数列), 如果对于任意 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $m, n \geq N$ 时, 有 $|a_n - a_m| < \epsilon$ 。根据柯西收敛定理, 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是它是一个基本数列。

定理 1.1 (确界定理 (实数系连续性定理)) (1) 非空有上界的实数集必有上确界, 非空有下界的实数集必有下确界。

(2) 设 S 是实数集 \mathbb{R} 的一个非空子集, 且 S 有上界, 则 S 在 \mathbb{R} 中有一个上确界。

$$\forall S \subseteq \mathbb{R}, S \neq \emptyset \text{ 且 } \exists u \in \mathbb{R} \text{ 使得 } \forall x \in S, x \leq u, \exists \sup S \in \mathbb{R} \text{ 使得 } \sup S = \inf \{u \in \mathbb{R} \mid \forall x \in S, x \leq u\}$$

确界定理 \Rightarrow 单调有界定理

证明: 设数列 $\{x_n\}$ 是单调增加且有上界, 令 $S = \{x_1, x_2, \dots\}$, 根据**确界定理**, 存在 $\beta \in \mathbb{R}$, 使得 $\beta = \sup S$, 满足如下条件:

1. $\forall x_k \in S, k \in \mathbb{N}^+$, 有 $\beta \geq x_k$;
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ 使得 $x_{n_0} + \varepsilon > \beta$ 。

于是 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = n_0$, $\forall n > N$, 有 $x_n + \varepsilon \geq x_N + \varepsilon > \beta > x_n > x_n - \varepsilon$ 。

因此 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = n_0$, $\forall n > N$, 有 $\beta - \varepsilon < x_n < \beta + \varepsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta$$

确界定理 \Rightarrow Cauchy 收敛原理

证明: (必要性) 先证数列 $\{x_n\}$ 收敛 \Rightarrow 数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 使得

$$\forall n, m > N, |x_{n,m} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。

再证 (充分性) 数列 $\{x_n\}$ 是基本数列 \Rightarrow 数列 $\{x_n\}$ 收敛。

设数列 $\{x_n\}$ 是基本数列, 则数列 $\{x_n\}$ 有界, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n, m > N$, 都有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$ 。

取定 $\varepsilon = 1$ 时, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}^+$ 使得

$$\forall n > N_1, |x_n - x_{N_1}| < \varepsilon,$$

于是 $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{N_1}, |x_{N_1}| + 1\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个上界,

$$m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{N_1}, -1\}$$

是数列 $\{x_n\}$ 的一个下界。因此数列 $\{x_n\}$ 有界。下说明数列 $\{x_n\}$ 收敛。

令 $S = \{x_n\}$, 数列 $\{x_n\}$ 中小于 x 的数只有有限个, 显然数集 S 有界, 根据 确界存在定理, 数集 S 必有上确界, 设 $\beta = \sup S$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\beta - \varepsilon \in S$, $\beta + \varepsilon \notin S$, 从而 $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ 中含有数列 $\{x_n\}$ 中无限项, 于是存在数列 $\{x_{n_k}\}$ 的子列, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \beta$$

又数列 $\{x_n\}$ 是基本数列, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n, m > N$, $|x_n - x_m| < \varepsilon$, 取 $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n > N$, $k > K$ 有

$$|x_n - \beta| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \beta| < \varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 收敛, 证毕。

确界存在定理 \Rightarrow 闭区间套定理

证明: 设一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套, 则数集 $S = \{a_1, a_2, \dots\}$ (S 如果有相同的数则只算作一个) 有上界, 而且 $b_n, n = 1, 2, 3, \dots$ 都是数集 S 的上界, 存在性, 根据 确界存在定理, 数集 S 有上确界 (最小上界), 记为 $\alpha = \sup S$, 于是

1. $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\alpha \geq a_n$;
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 使得 $a_N + \varepsilon > \alpha$, 由(1)知 $a_n \leq \alpha \leq b_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 由(2)知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \text{又} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \quad \text{可知} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$$

唯一性, 若另有 α' , 使得 $a_n \leq \alpha' \leq b_n, n = 1, 2, 3, \dots$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha'$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 可知 $\alpha = \alpha'$, 证毕。

确界存在定理 \Rightarrow 聚点定理

证明: 设 S 是有界无穷集, 根据 确界存在定理, 数集 S 有上下确界, 令 $\alpha = \inf S$, $\beta = \sup S$ 。若 α, β 其中有一点不是数集 S 的孤立点, 则此点必为聚点。反设, 假设 α, β 其中都是数集 S 的孤立点, 令

$$E = \{x \mid \text{数集 } S \text{ 中仅有有限个数小于 } x, x \in \mathbb{R}\}$$

显然 E 有上界，根据 **确界存在定理**，数集 E 有上确界，令 $\beta' = \sup E$ ，因此 $\forall \varepsilon > 0$, $\beta' + \varepsilon \notin E$, $\beta' - \varepsilon \in E$ ，于是

$(\beta' - \varepsilon, \beta' + \varepsilon)$ 中含有 S 中无穷点，从而 β' 是 S 的聚点，证毕

确界存在定理 \Rightarrow 有限覆盖定理

证明：设闭区间 $[a, b]$ 在实数 R 上，任取闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖 $\{O_\lambda\}$ ，令

$$D = \{x | x \in [a, b], \exists [a, x] \text{ 能被 } \{O_\lambda\} \text{ 的有限子集覆盖}\}$$

下说明集合 D 是非空有界的。

$\{O_\lambda\}$ 是闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖，则存在 $\{O_\lambda\}$ 的一个开区间 O_a ，使得 $a \in O_a$ ，于是 $a \in D$ ，从而集合 D 非空，又显然 $D \subseteq [a, b]$ ，从而集合 D 是有界的，因此集合 D 是非空有界的。

根据 **确界存在定理**，集合 D 有上确界，设 $\xi = \sup D$ ，下说明 $\xi = b$ 。假设 $\xi < b$ ，则 $\xi < b$, $[a, \xi]$ 能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限子集 $O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \dots, O_{\lambda_n}$ 覆盖，又 $\xi \in [a, b]$ ，则存在 $\{O_\lambda\}$ 的一个开区间 (α, β) 使得 $\xi \in (\alpha, \beta)$ ，任取 $x_1 \in (\xi, \beta)$ ，易知 $[a, x_1]$ 可被 $\{O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \dots, O_{\lambda_n}\}$ 覆盖。从而 $x_1 \in D$ ，而 $x_1 > \xi$ 与 $\xi = \sup D$ 矛盾，证毕。

定理 1.2 (单调有界定理) (1) 在实数系中，单调且有界的数列必定收敛。

(2)

1. 如果数列 $\{a_n\}$ 是单调增加的，并且有上界，那么 $\{a_n\}$ 收敛。
2. 如果数列 $\{a_n\}$ 是单调减少的，并且有下界，那么 $\{a_n\}$ 收敛。

单调有界定理 \Rightarrow 确界存在定理

证明：设 S 是非空有上界数集，任取它的一个上界 b ，则 $S \subseteq [a, b]$ ，其中 $a \in S$ 。

对 $[a, b]$ 二等分为 $[a, \frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2}, b]$ ，若 $\frac{a+b}{2}$ 非 S 的上界，则记 $[a_1, b_1] = [a, \frac{a+b}{2}]$ ，否则记 $[a_1, b_1] = [\frac{a+b}{2}, b]$ 。

对 $[a_1, b_1]$ 继续二等分为 $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ ，若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 非 S 的上界，则记 $[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ ，否则记 $[a_2, b_2] = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ 。

如此递推，对 $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ 二等分为 $\left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right]$ ，若 $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ 非 S 的上界，则记 $[a_n, b_n] = \left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$ ，否则记 $[a_n, b_n] = \left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right]$ 。

由此，得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 。

易知数列 $\{a_n\}$ 单调增加有上界，数列 $\{b_n\}$ 单调减少有下界且 $\forall x \in S$ 有 $b \geq x$ 。根据单调

有界定理, 可知 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均收敛, 存在 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$, 又

$$|a_n - b_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$ 。

下说明 ξ 是 S 的上确界:

1. $\forall x \in S$, 有 $\xi \geq x$;
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 使得 $\xi - a_n < \varepsilon$, 即 $\xi < a_n + \varepsilon$, 其中 $a_n \in S$ 。

综上所述, ξ 为 S 的上确界。证毕。

单调有界定理 \Rightarrow Cauchy 收敛原理

证明:(必要条件) 先证数列 $\{x_n\}$ 收敛 \Rightarrow 数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 使得

$$\forall n, m > N, |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

从而

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。

再证 (充分条件) 数列 $\{x_n\}$ 是基本数列 \Rightarrow 数列 $\{x_n\}$ 收敛。

设数列 $\{x_n\}$ 是基本数列, 下说明数列 $\{x_n\}$ 有界。 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n, m > N$, 都有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$ 。取定 $\varepsilon = 1$ 时, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}^+$, 使得

$$\forall n > N_1, |x_n - x_{N_1}| < 1$$

于是 $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{N_1}, |x_{N_1}| + 1\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个上界,

$$m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{N_1}, -1\}$$

是数列 $\{x_n\}$ 的一个下界, 因此数列 $\{x_n\}$ 有界。下说明数列 $\{x_n\}$ 收敛。将 $[m, M]$ 均分为

$$\left[m, \frac{m+M}{2}\right], \left[\frac{m+M}{2}, M\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点, 记此闭区间为 $[m_1, M_1]$ 。将 $[m_1, M_1]$ 均分为

$$\left[m_1, \frac{m_1+M_1}{2}\right], \left[\frac{m_1+M_1}{2}, M_1\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点, 记此闭区间为 $[m_2, M_2]$ 。如此一直下去, 得到一列闭区间 $\{[m_n, M_n]\}$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n - m_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} (M - m) = 0$$

易知数列 $\{m_n\}$ 单调增加, 数列 $\{M_n\}$ 单调减少, 根据 **单调有界定理**, 存在实数 α, β 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \beta$$

且

$$m_n \leq \alpha \leq \beta \leq M_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \alpha = \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ 。

令每个 $[m_n, M_n]$ 中取一个 $\{x_n\}$ 中的元素记为 x_{n_k} , 其中 x_n 与 $x_{n_{k-1}}$ 相异, 易知 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \alpha$ 。又数列 $\{x_n\}$ 是基本数列,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

而根据 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \alpha$ 有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}^+, n_k > N, k > K, \text{ 有 } |x_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是 $\forall \varepsilon > 0 \forall n > N k > K$ 有

$$|x_n - \alpha| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 收敛, 证毕。

单调有界定理 \Rightarrow 闭区间套定理

证明: 设一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套, 则数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 数列 $\{b_n\}$ 单调递减有下界, 存在性, 根据 **单调有界定理**, 存在实数 α, β 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 又有

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha = \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。唯一性, 若另有 α' , 使得 $a_n \leq \alpha' \leq b_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha'$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 可知 $\alpha = \alpha'$, 证毕。

单调有界定理 \Rightarrow 聚点定理

方法一

证明: 设 S 是有界无穷点集, 取存在闭区间 $[a, b]$, 使得 $S \subseteq [a, b]$ 。将 $[a, b]$ 均分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

则必在其中之一闭区间含有 S 中无穷个点, 记此闭区间为

$$[a_1, b_1] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \text{ 或 } \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

将 $[a_1, b_1]$ 均分为

$$\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right], \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$$

则必在其中之一闭区间含有 S 中无穷个点，记此闭区间为

$$[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right] \text{ 或 } \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$$

如此一直下去，得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} (b - a) = 0$ ，易知数列 $\{a_n\}$ 单调增加，数列 $\{b_n\}$ 单调减少，根据 **单调有界定理**，存在实数 α, β 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$$

且

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha = \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

下说明 α 是 S 的一个聚点。在每个 $[a_n, b_n]$ 中取一个 S 中的元素记为 x_n ，易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ ，因此 α 是 S 的聚点，证毕。

方法二（证明致密性定理）

证明：先说明任意有界数列必有单调子列，设 $\{x_n\}$ 是一个有界数列，定义数列 $\{x_n\}$ 中的第 k 项 x_k 具有性质 A 是指： $x_k = \max\{x_i | i \geq k\}$ 。

情形一，数列 $\{x_n\}$ 中有无限项具有性质 A ，不妨设为 $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ ，其中

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

则数列 $\{x_{n_k}\}$ 单调减少且有界；

情形二，数列 $\{x_n\}$ 中只有有限项具有性质 A ，则存在 $N \in \mathbb{N}^+$ ， $\forall n > N$ ， x_n 都不具有性质 A 。任取一项记作 x_{n_1} ，其中 $n_1 > N$ ，由于 x_{n_1} 不具有性质 A ，则必存在 $n_2 > n_1$ 使得 $x_{n_2} > x_{n_1}$ ，由于 x_{n_2} 不具有性质 A ，则必存在 $n_3 > n_2$ 使得 $x_{n_3} > x_{n_2}$ ，如此继续下去可以得到一个单调增加的数列 $\{x_{n_k}\}$ 。

从而证明了任意有界数列必有单调子列。根据 **单调有界定理**，数列 $\{x_{n_k}\}$ 必收敛，于是对于任意无界数集 S ，必有聚点。

单调有界定理 \Rightarrow 有限覆盖定理

证明：设闭区间 $[a, b]$ 在实数 R 上，任取闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖 $\{O_\lambda\}$ ，反证法，假设闭区间 $[a, b]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖。将 $[a, b]$ 二等分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2} \right], \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖，将此区间记为 $[a_1, b_1]$ 。将 $[a_1, b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right], \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖，将此区间记为 $[a_2, b_2]$ 。如此下去，便可得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} (b - a) = 0$ 。易知数列 $\{a_n\}$ 单调增加，数列 $\{b_n\}$ 单调减少，根据 **单调有界定理**，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 收敛，又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

可知存在 ξ ，使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi \quad a_n \leq \xi \leq b_n \quad n = 1, 2, \dots$$

由于存在 $\{O_\lambda\}$ 的一个开区间 O_{λ^*} ，使得 $\xi \in O_{\lambda^*}$ ，当 n 充分大时，必有 $[a_n, b_n] \subseteq O_{\lambda^*}$ 与 $[a, b]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖矛盾，因此存在 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖闭区间 $[a, b]$ ，证毕。

定理 1.3 (Cauchy 收敛准则) (1) 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{x_n\}$ 是柯西数列。

(2) 一个实数数列 $\{a_n\}$ 收敛，当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在一个正整数 N ，使得当 $n, m > N$ 时，满足

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

那么数列 $\{a_n\}$ 是收敛的。

Cauchy 收敛准则 \Rightarrow 确界存在定理

证明：设 S 是非空有上界数集，任取它的一个上界 $b \notin S$ ，任取 $a \in S$ ，则 $S \subseteq [a, b]$ 。将 $[a, b]$ 均分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2} \right], \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$$

若 $\frac{a+b}{2}$ 非 S 的上界，则记 $[a_1, b_1] = \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ ，否则记 $[a_1, b_1] = \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$ 。对 $[a_1, b_1]$ 均分为

$$\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right], \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$$

若 $\frac{a_1 + b_1}{2}$ 非 S 的上界，则记 $[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right]$ ，否则记 $[a_2, b_2] = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$ 。依此类推，对 $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ 均分为

$$\left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right], \left[\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_{n-1} \right]$$

若 $\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ 非 S 的上界，则记 $[a_n, b_n] = \left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right]$ ，否则记 $[a_n, b_n] = \left[\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_{n-1} \right]$ 。依此类推，得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 。易知 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足：

1. $\{[a_n, b_n]\} \subseteq [a, b]$ ，且 $\{[a_{n+1}, b_{n+1}]\} \subseteq [a_n, b_n]$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ ；
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n (b - a) = 0$ 。

因此, $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套。 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, 使得 $(\frac{1}{2})^N (b-a) < \varepsilon$, 则 $\forall n, m > N$, 有

$$|a_n - a_m| < |a_n - b_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a) < \varepsilon$$

$$|b_n - b_m| < |b_n - a_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a) < \varepsilon$$

因此数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均是基本数列。根据 **Cauchy 收敛准则**, $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$, 下说明 ξ 是 S 的上确界。

$\forall x \in S$, 有 $x \leq \xi$; $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, 有 $n > N$, 使得 $a_n \leq x < \xi + \varepsilon$, 即 $b_n \leq \xi + \varepsilon$, 从而 $b_n \in S$ 。综上, ξ 是 S 的上确界, 证毕。

Cauchy 收敛准则 \Rightarrow 单调有界定理

证明: 设数列 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界, 令 $S = \{x_1, x_2, \dots\}$, 任取它的一个上界 $b \notin S$, 任取 $a \in S$, 则 $S \subseteq [a, b]$ 。对 $[a, b]$ 二等分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

若 $\frac{a+b}{2}$ 非 S 的上界, 则记 $[a_1, b_1] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, 否则记 $[a_1, b_1] = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ 。对 $[a_1, b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 非 S 的上界, 则记 $[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, 否则记 $[a_2, b_2] = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ 。依此类推, 对 $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ 二等分为

$$\left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right], \left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right]$$

若 $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ 非 S 的上界, 则记 $[a_n, b_n] = \left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$, 否则记 $[a_n, b_n] = \left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right]$ 。依此类推, 得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 。 $\forall \varepsilon > 0$, 由

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$$

可知 $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $n > N$, 使得 $\frac{1}{2^n}(b-a) < \varepsilon$, 于是 $\forall n, m > N$, 有

$$|a_n - a_m| < |b_n - a_n| < \varepsilon \quad |b_n - b_m| < |b_n - a_n| < \varepsilon$$

因此数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是 Cauchy 数列, 根据 **Cauchy 收敛准则**, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都收敛, 且由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \frac{1}{2^n}(b-a) = 0$ 知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$$

在 $[a_n, b_n]$ 中取某个 $x_n^k \in \{x_1, x_2, \dots\}$, 于是有 $\{x_n^k\}$ 的子列收敛到 ξ , 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^k = \xi$, 易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$

Cauchy 收敛准则 \Rightarrow 闭区间套定理

证明: 设一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套, 存在性, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ 知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 使得 $b_n - a_n < \varepsilon$, 于是 $\forall n, m > N$, 有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$, $|b_n - b_m| < \varepsilon$ 。因此数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是 Cauchy 数列, 根据 Cauchy 收敛准则, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都收敛。由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$$

并设收敛到 ξ 。唯一性, 若另有 ξ' , 使得 $a_n \leq \xi' \leq b_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi'$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 可知 $\xi = \xi'$, 证毕。

Cauchy 收敛准则 \Rightarrow 聚点定理

证明: 设 S 是有界无穷点集, 则存在闭区间 $[a, b]$, 使得 $S \subseteq [a, b]$ 。将 $[a, b]$ 均分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 S 中无穷个点, 记此闭区间为 $[a_1, b_1]$ 。将 $[a_1, b_1]$ 均分为

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 S 中无穷个点, 记此闭区间为 $[a_2, b_2]$ 。 \dots , 将 $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ 均分为

$$\left[a_{k-1}, \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\right], \left[\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}, b_{k-1}\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 S 中无穷个点, 记此闭区间为 $[a_k, b_k]$ 。如此一直下去, 得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} (b - a) = 0$$

易知 $\{a_n\}$ 单调增加, 数列 $\{b_n\}$ 单调减少, 且 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 使得 $b_n - a_n < \varepsilon$, 于是 $\forall n, m > N$, 有

$$|a_n - a_m| < |b_n - a_n| < \varepsilon$$

$$|b_n - b_m| < |b_n - a_n| < \varepsilon$$

因此数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是 Cauchy 数列, 根据 Cauchy 收敛准则, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都收敛, 设收敛到 ξ 。由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$$

下说明 ξ 是 S 的一个聚点。在每个 $[a_n, b_n]$ 中取一个 S 中的元素记为 x_n , 易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, 因此 $\alpha = \xi$ 是 S 的聚点, 证毕。

Cauchy 收敛准则 \Rightarrow 有限覆盖定理

证明: 设闭区间 $[a, b]$ 在实数 R 上, 任取闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖 $\{O_\lambda\}$, 反证法, 假设闭区间 $[a, b]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖, 将 $[a, b]$ 二等分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖, 将此区间记为 $[a_1, b_1]$ 。将 $[a_1, b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖, 将此区间记为 $[a_2, b_2]$ 。如此下去, 便可得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) = 0$$

易知数列 $\{a_n\}$ 单调增加, 数列 $\{b_n\}$ 单调减少, 且 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 使得 $b_n - a_n < \varepsilon$, 于是 $\forall n, m > N$, 有

$$|a_n - a_m| < |b_n - a_n| < \varepsilon$$

$$|b_n - b_m| < |b_n - a_n| < \varepsilon$$

因此数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是 Cauchy 数列, 根据 **Cauchy 收敛准则**, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都收敛, 设收敛到 ξ 。由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$$

且 $\xi \in [a, b]$, 于是存在 $\{O_\lambda\}$ 的一个开区间 O_{λ^*} , 使得 $\xi \in O_{\lambda^*}$, 当 n 充分大时, 必有 $[a_n, b_n] \subseteq O_{\lambda^*}$ 与 $[a, b]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖矛盾。因此存在 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖闭区间 $[a, b]$, 证毕。

定理 1.4 (闭区间套定理) (1) 若 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套, 则存在唯一的实数 ξ 属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 且存在唯一的实数 ξ , 使得 ξ 属于所有这些闭区间, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$

(2)

1. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 对于所有正整数 n 都成立;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ 。

则存在唯一的实数 ξ , 使得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}$$

闭区间套定理 \Rightarrow 确界存在定理

证明: 设 S 是非空有上界数集, 任取它的一个上界 $b \notin S$, 任取 $a \in S$, 则 $S \subseteq [a, b]$ 。对 $[a, b]$ 二等分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

若 $\frac{a+b}{2}$ 非 S 的上界, 则记 $[a_1, b_1] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, 否则记 $[a_1, b_1] = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ 。对 $[a_1, b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 非 S 的上界, 则记 $[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, 否则记 $[a_2, b_2] = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ 。依此类推, 对 $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ 二等分为

$$\left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right], \left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right]$$

若 $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ 非 S 的上界, 则记 $[a_n, b_n] = \left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$, 否则记 $[a_n, b_n] = \left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right]$ 。依此类推, 得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 。易知 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足:

1. $\{[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]\}$ 对于所有正整数 n 都成立;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2})^n (b - a) = 0$ 。

因此, $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套。根据 **闭区间套定理**, 存在实数 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得

$$a_n \leq \xi \leq b_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$$

下说明 ξ 是 S 的上确界:

1. $\forall x \in S$, 有 $x \leq \xi$;
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 使得 $\xi - a_N < \varepsilon$, 即 $b < \xi + \varepsilon$, 其中 $a_N \in S$ 。

因此, ξ 是 S 的上确界, 证毕。

闭区间套定理 \Rightarrow 单调有界定理

证明: 设数列 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界, 令 $S = \{x_1, x_2, \dots\}$, 任取它的一个上界 $b \notin S$, 任取 $a \in S$, 则 $S \subseteq [a, b]$ 。对 $[a, b]$ 二等分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

若 $\frac{a+b}{2}$ 非 S 的上界, 则记 $[a_1, b_1] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, 否则记 $[a_1, b_1] = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ 。对 $[a_1, b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 非 S 的上界, 则记 $[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, 否则记 $[a_2, b_2] = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ 。依此类推, 对 $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ 二等分为

$$\left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right], \left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right]$$

若 $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ 非 S 的上界, 则记 $[a_n, b_n] = \left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$, 否则记 $[a_n, b_n] = \left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right]$ 。依此类推, 得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 。易知 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足:

1. $\{[a_{n+1}, b_{n+1}]\} \subseteq [a_n, b_n]$ 对于所有正整数 n 都成立;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) = 0$ 。

因此, $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套。根据 **闭区间套定理**, 存在唯一的实数 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得

$$a_n \leq \xi \leq b_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$$

下说明 ξ 是 S 的上确界。在每个 $[a_n, b_n]$ 中取某个 $x_n^k \in \{x_1, x_2, \dots\}$, 于是有 $\{x_n^k\}$ 的子列收敛到 ξ , 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^k = \xi$, 易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, 因此 S 的上确界是 ξ , 证毕。

闭区间套定理 \Rightarrow Cauchy 收敛准则

证明: 先证数列 $\{x_n\}$ 收敛 \Rightarrow 数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 使得

$$\forall n, m > N \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

从而

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。

再证数列 $\{x_n\}$ 是基本数列 \Rightarrow 数列 $\{x_n\}$ 收敛。设数列 $\{x_n\}$ 是基本数列, 下说明数列 $\{x_n\}$ 有界。 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n, m > N$, 都有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$ 。取定 $\varepsilon = 1$ 时, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}^+$, 使得

$$\forall n > N_1, |x_n - x_{N_1}| < \varepsilon$$

于是 $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{N_1}, |x_{N_1}| + 1\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个上界,

$$m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{N_1}, -1\}$$

是数列 $\{x_n\}$ 的一个下界, 因此数列 $\{x_n\}$ 有界。下说明数列 $\{x_n\}$ 收敛。将 $[m, M]$ 均分为

$$\left[m, \frac{m+M}{2}\right], \left[\frac{m+M}{2}, M\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点, 记此闭区间为 $[m_1, M_1]$ 。将 $[m_1, M_1]$ 均分为

$$\left[m_1, \frac{m_1+M_1}{2}\right], \left[\frac{m_1+M_1}{2}, M_1\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[m_2, M_2]$ 。…，将 $[m_{k-1}, M_{k-1}]$ 均分为

$$\left[m_{k-1}, \frac{m_{k-1} + M_{k-1}}{2}\right], \left[\frac{m_{k-1} + M_{k-1}}{2}, M_{k-1}\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[m_k, M_k]$ 。如此一直下去，得到一列闭区间 $\{[m_n, M_n]\}$ ，且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n - m_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} (M - m) = 0$$

易知 $\{m_n\}$ 单调增加，数列 $\{M_n\}$ 单调减少，根据 **闭区间套定理**，存在实数 α, β 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \beta$$

且

$$m_n \leq \alpha \leq \beta \leq M_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \alpha = \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ ，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \xi$ 。下说明 ξ 是 S 的一个聚点。在每个 $[m_n, M_n]$ 中取一个 S 中的元素记为 x_n ，易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ 。因此数列 $\{x_n\}$ 收敛，证毕。

闭区间套定理 \Rightarrow 聚点定理

证明：设 S 是有界无穷点集，则存在闭区间 $[a, b]$ ，使得 $S \subseteq [a, b]$ 。将 $[a, b]$ 均分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 S 中无穷个点，记此闭区间为 $[a_1, b_1]$ 。将 $[a_1, b_1]$ 均分为

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 S 中无穷个点，记此闭区间为 $[a_2, b_2]$ 。…，将 $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ 均分为

$$\left[a_{k-1}, \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\right], \left[\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}, b_{k-1}\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 S 中无穷个点，记此闭区间为 $[a_k, b_k]$ 。如此一直下去，得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ ，且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} (b - a) = 0$$

因此 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套。根据 **闭区间套定理**，存在唯一的实数 $\xi \in \mathbb{R}$ ，使得

$$a_n \leq \xi \leq b_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$$

下说明 ξ 是 S 的一个聚点。在每个 $[a_n, b_n]$ 中取一个 S 中的元素记为 x_n ，易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ ，因此 α 是 S 的聚点，证毕。

闭区间套定理 \Rightarrow 有限覆盖定理

证明: 设闭区间 $[a, b]$ 在实数 R 上, 任取闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖 $\{O_\lambda\}$, 反证法, 假设闭区间 $[a, b]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖, 将 $[a, b]$ 二等分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖, 将此区间记为 $[a_1, b_1]$ 。将 $[a_1, b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖, 将此区间记为 $[a_2, b_2]$ 。如此下去, 便可得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) = 0$$

因此 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套。根据 **闭区间套定理**, 存在唯一的实数 ξ 属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$, 且

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad a_n \leq \xi \leq b_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

于是存在 $\{O_\lambda\}$ 的一个开区间 O_{λ^*} , 使得 $\xi \in O_{\lambda^*}$, 当 n 充分大时, 必有 $[a_n, b_n] \subseteq O_{\lambda^*}$ 与 $[a, b]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖矛盾。因此存在 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖闭区间 $[a, b]$, 证毕。

定理 1.5 (聚点定理) (1) 在一个有界的无限点集 S 中, 至少存在一个实数 ξ , 它是这个集合的聚点。即在这个点的任意小的邻域内, 总是包含这个集合中的无穷多个点。

(2) 设 S 是实数集合 \mathbb{R} 的一个有界无限点集, 则存在一个实数 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得对于任意的 $\varepsilon > 0$, 区间 $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ 内总是包含 S 中的无穷多个点。

(3)

- 聚点定理: 在一个有界序列中, 至少存在一个聚点。
- 魏尔斯特拉斯定理: 每个有界数列都有至少一个聚点。
- 致密性定理: 一个集合是致密的当且仅当它的每一个开覆盖都有有限子覆盖。
- Bolzano-Weierstrass 定理: 任何有界数列必有一个收敛的子序列。

聚点定理 \Rightarrow 确界存在定理

证明: 设 S 是非空有上界数集, 任取它的一个上界 $b \notin S$, 取 $a \in S$, 使得 $S \cap (a, b) \neq \emptyset$ 。对 $[a, b]$ 一等分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{和} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

若 $[a, \frac{a+b}{2}] \cap S \neq \emptyset$, 则记 $[a_1, b_1] = [a, \frac{a+b}{2}]$, 否则记 $[a_1, b_1] = [\frac{a+b}{2}, b]$ 。对 $[a_1, b_1]$ 一等分为

$$\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right] \quad \text{和} \quad \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$$

若 $\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right] \cap S \neq \emptyset$, 则记 $[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right]$, 否则记 $[a_2, b_2] = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$ 。依此类推, 对 $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ 一等分为

$$\left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right] \quad \text{和} \quad \left[\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_{n-1} \right]$$

若 $\left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right] \cap S \neq \emptyset$, 则记 $[a_n, b_n] = \left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right]$, 否则记 $[a_n, b_n] = \left[\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_{n-1} \right]$ 。

依此类推, 得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 。记 $R = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$, 其中如有相同项则记一个。

易知集合 R 有界, 根据聚点定理, 集合 R 必有聚点记为 ξ , 则有 $\{b_{n_k}\}$ 的子列 $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} = \xi$ 。

下说明 ξ 是 S 的上确界:

1. $\forall x \in S$, 有 $x \leq \xi$;
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 使得 $\xi - a_n < \varepsilon$, 即 $b < \xi + \varepsilon$, 其中 $a_n \in S$ 。

由 $|a_n - b_{n_k}| = \frac{1}{2^{n_k}}(b - a)$ 知, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$;

ξ 是 S 的一个上界, 不然存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \xi$, 由 $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} = \xi$ 知, 对于 $\varepsilon = x_0 - \xi$, $\exists K \in \mathbb{N}^+$, $\forall k > K$ 有 $-\varepsilon < b_{n_k} - \xi < \varepsilon$, 即 $b_{n_k} - \xi < \varepsilon$, 因此 $x_0 > b_{n_k}$ 是 S 的上界矛盾, 从而 ξ 是 S 的一个上界;

ξ 是 S 的最小上界, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}^+$, 使得 $b_{n_k} - \varepsilon < \xi < \varepsilon$, 因为 $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} = \xi$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}^+$, 使得 $-\varepsilon < b_{n_k} - \xi < \varepsilon$, 从而有 $b_{n_k} - \varepsilon < \xi < \varepsilon$ 。

综合 得 ξ 是 S 的上确界。

聚点定理 \Rightarrow 单调有界定理

证明: 设数列 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界, 令 $S = \{x_1, x_2, \dots\}$, 任取它的一个上界 $b \notin S$, 任取 $a \in S$, 则 $S \subseteq [a, b]$ 。对 $[a, b]$ 二等分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2} \right], \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$$

若 $\frac{a+b}{2}$ 非 S 的上界, 则记 $[a_1, b_1] = \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$, 否则记 $[a_1, b_1] = \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$ 。对 $[a_1, b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right], \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$$

若 $\frac{a_1 + b_1}{2}$ 非 S 的上界, 则记 $[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right]$, 否则记 $[a_2, b_2] = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$ 。依此类推, 对 $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ 二等分为

$$\left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right], \left[\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_{n-1} \right]$$

若 $\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ 非 S 的上界, 则记 $[a_n, b_n] = \left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right]$, 否则记 $[a_n, b_n] = \left[\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_{n-1} \right]$ 。依此类推, 得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 。易知 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足:

1. $\{[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]\}$ 对于所有正整数 n 都成立；
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2})^n (b - a) = 0$ 。

因此， $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套。根据 **聚点定理**， $\{[a_n, b_n]\}$ 每一个区间都至少有一个数列 $\{x_n\}$ 的聚点。又数列 $\{x_n\}$ 单调增加，且 $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$ 。因此数列 $\{x_n\}$ 聚点唯一，设为 ξ ，于是有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ 。证毕。

聚点定理 \Rightarrow Cauchy 收敛准则

证明：先证数列 $\{x_n\}$ 收敛 \Rightarrow 数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，则 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists N \in \mathbb{N}^+$ ，使得

$$\forall n, m > N \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

从而

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。

再证数列 $\{x_n\}$ 是基本数列 \Rightarrow 数列 $\{x_n\}$ 收敛。设数列 $\{x_n\}$ 是基本数列，下说明数列 $\{x_n\}$ 有界。 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists N \in \mathbb{N}^+$ ， $\forall n, m > N$ ，都有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$ 。取定 $\varepsilon = 1$ 时，存在 $N_1 \in \mathbb{N}^+$ ，使得

$$\forall n > N_1, |x_n - x_{N_1}| < \varepsilon$$

于是 $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{N_1}, |x_{N_1}| + 1\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个上界，

$$m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{N_1}, -1\}$$

是数列 $\{x_n\}$ 的一个下界，因此数列 $\{x_n\}$ 有界。下说明数列 $\{x_n\}$ 收敛。将 $[m, M]$ 均分为

$$\left[m, \frac{m+M}{2}\right], \left[\frac{m+M}{2}, M\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[m_1, M_1]$ 。将 $[m_1, M_1]$ 均分为

$$\left[m_1, \frac{m_1+M_1}{2}\right], \left[\frac{m_1+M_1}{2}, M_1\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[m_2, M_2]$ 。…，将 $[m_{k-1}, M_{k-1}]$ 均分为

$$\left[m_{k-1}, \frac{m_{k-1}+M_{k-1}}{2}\right], \left[\frac{m_{k-1}+M_{k-1}}{2}, M_{k-1}\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[m_k, M_k]$ 。如此一直下去，得到一列闭区间 $\{[m_n, M_n]\}$ ，且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n - m_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} (M - m) = 0$$

易知 $\{m_n\}$ 单调增加，数列 $\{M_n\}$ 单调减少，根据 **聚点定理**，存在实数 α, β 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \beta$$

且

$$m_n \leq \alpha \leq \beta \leq M_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \alpha = \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ 。再根据数列 $\{x_n\}$ 是基本数列 \Rightarrow 数列 $\{x_n\}$ 收敛，设数列 $\{x_n\}$ 是基本数列，下说明数列 $\{x_n\}$ 有界。由此得证。

聚点定理 \Rightarrow 闭区间套定理

证明：设一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套，则数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 有界，存在性，根据聚点定理，存在实数 α, β , 子列 $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$, 子列 $\{b_{n_k}\} \subseteq \{b_n\}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \alpha$, $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} = \beta$ 。

由数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，数列 $\{b_n\}$ 单调递减有下界知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$, 且 $\alpha \leq a_n \leq b_n \leq \beta$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。又 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha = \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

唯一性：若另有 α' , 使得 $a_n \leq \alpha' \leq b_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha'$ 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 可知 $\alpha = \alpha'$ 。证毕。

聚点定理 \Rightarrow 有限覆盖定理

证明：设闭区间 $[a, b]$ 在实数 R 上，任取闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖 $\{O_\lambda\}$ ，反证法，假设闭区间 $[a, b]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖，将 $[a, b]$ 二等分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖，将此区间记为 $[a_1, b_1]$ 。将 $[a_1, b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖，将此区间记为 $[a_2, b_2]$ 。如此下去，便可得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ ，且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) = 0$$

易知数列 $\{a_n\}$ 单调增加有上界，数列 $\{b_n\}$ 单调减少有下界。根据聚点定理，存在实数 α ，使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$$

于是存在 $\{O_\lambda\}$ 的一个开区间 O_{λ^*} ，使得 $\alpha \in O_{\lambda^*}$ ，当 n 充分大时，必有 $[a_n, b_n] \subseteq O_{\lambda^*}$ ，与 $[a_n, b_n]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖矛盾。因此存在 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖闭区间 $[a, b]$ ，证毕。

定理 1.6(有限覆盖定理) (1) 一个集合是紧的当且仅当它是闭且有界的。

(2) 若一个开覆盖 S 覆盖了闭区间 $[a, b]$, 即 $[a, b] \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, 其中 U_i 是 S 中的开区间, 则存在有限个开区间 $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}$ 使得 $[a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$ 。

有限覆盖定理 \Rightarrow 确界存在定理

证明: 反证法, 设 S 是非空有上界的实数集, 假设 S 没有上确界 (最小上界)。任取它的一个上界 $b \notin S$, 任取 $a \in S$, 则 $\forall x \in [a, b]$ 有:

1. x 是 S 的一个上界, 由于 S 无最小上界, 因此 $\exists x' \in [a, b]$, x' 是 S 的一个上界, 且 $x' < x$, 从而存在 x 的一个开邻域 O_x , 其中 O_x 中的元素都是 S 的上界;
2. x 不是 S 的上界, 则存在 $x'' \in S \cap [a, b]$, $x'' > x$, 于是存在 x 的一个开邻域 O_x , 其中 O_x 中的元素都不是 S 的上界。

因此 $[a, b]$ 上的每个点都能找到一个开邻域 O_x , 它要么属于第一类 (每个点都为 S 的上界), 要么属于第二类 (每个点都不是 S 的上界), 从而 $\{O_x \mid x \in [a, b]\}$ 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖。根据 **有限覆盖定理**, 存在有限子集 $\{O_{x_1}, O_{x_2}, \dots, O_{x_k}\}$, 使得 $[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^k O_{x_i}$ 。又因为 b 所在的开区间属于第一类, 相邻接的开区间有公共点, 也应为第一类的, 经过有限邻接, 可知 a 所在的开区间也是第一类的, 与 a 不是 S 的上界矛盾, 因此 S 有上确界。证毕。

有限覆盖定理 \Rightarrow 单调有界定理

证明: 用反证法, 设数列 $\{x_n\}$ 单调递增有上界, 于是存在 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $x_n \in [a, b]$ 。假设 $\{x_n\}$ 不收敛, 则 $\forall x \in [a, b]$, 必存在 x 的某个开邻域 O_x 只含有数列 $\{x_n\}$ 的有限个点。令 $S = \{O_x \mid x \in [a, b]\}$, 则 S 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖。根据 **有限覆盖定理**, S 的有限子集 $\{O_1, O_2, \dots, O_k\}$ 可以覆盖 $[a, b]$, 即 $[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^k O_i$ 。但每个 O_i 中只能含有数列 $\{x_n\}$ 的有限个点, 与 $\{x_n\}$ 在 $[a, b]$ 中齐矛盾, 因此数列 $\{x_n\}$ 必收敛。证毕。

有限覆盖定理 \Rightarrow Cauchy 收敛准则

证明: 先证数列 $\{x_n\}$ 收敛 \Rightarrow 数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 使得

$$\forall n, m > N, \text{ 都有 } |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。

再证数列 $\{x_n\}$ 是基本数列 \Rightarrow 数列 $\{x_n\}$ 收敛。设数列 $\{x_n\}$ 是基本数列，下说明数列 $\{x_n\}$ 有界。 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n, m > N$, 都有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$ 。取定 $\varepsilon = 1$ 时, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}^+$, 使得

$$\forall n > N_1, |x_n - x_{N_1}| < \varepsilon$$

于是 $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{N_1}, |x_{N_1}| + 1\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个上界,

$$m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{N_1}, -1\}$$

是数列 $\{x_n\}$ 的一个下界, 因此数列 $\{x_n\}$ 有界。下说明数列 $\{x_n\}$ 收敛。假设数列 $\{x_n\}$ 不存在收敛子列, 则 $\forall x \in [m, M]$, 存在一个开邻域 O_x , 使得 O_x 至多含有数列 $\{x_n\}$ 的有限项, 令 $D = \{O_x \mid x \in [m, M]\}$, 则 D 是 $[m, M]$ 的一个开覆盖。根据 **有限覆盖定理**, 存在 D 的有限个子集 $\{O_{x_1}, O_{x_2}, \dots, O_{x_k}\}$, 使得 $[m, M] \subseteq \bigcup_{i=1}^k O_{x_i}$ 。而 $\bigcup_{i=1}^k O_{x_i}$ 中只含有数列 $\{x_n\}$ 的有限项, 与 $[m, M] \subseteq \bigcup_{i=1}^k O_{x_i}$ 矛盾, 因此数列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列。设存在实数 ξ , 数列 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$$

又数列 $\{x_n\}$ 是基本数列, 则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

而根据 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$ 有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, n_k > N, k > K, |x_{n_k} - \xi| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n > N, k > K, |x_n - \xi| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \xi| < \varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 收敛。证毕。

有限覆盖定理 \Rightarrow 闭区间套定理

证明: 设一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套, 存在性, 下说明 $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$ 。假设 $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \emptyset$, 则 $\forall x \in [a, b]$, 存在一个开邻域 O_x , 使得 O_x 不全与 $[a_n, b_n]$ 相交, 即存在 $N \in \mathbb{N}^+$, 使得 $O_x \cap [a_N, b_N] = \emptyset$ 。令 $S = \{O_x \mid x \in [a, b]\}$, 于是 S 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖。根据 **有限覆盖定理**, 存在 S 的有限个子集 $\{O_{x_1}, O_{x_2}, \dots, O_{x_k}\}$, 使得 $[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^k O_{x_i}$ 。而 $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \emptyset$, $i = 1, 2, \dots, k$ 。取 $[a_{n_i}, b_{n_i}]$ 中最小的区间为 $[a_0, b_0]$, 于是

$$[a_0, b_0] \cap \bigcup_{i=1}^k O_{x_i} = \emptyset$$

与 $[a_0, b_0] \subseteq \bigcup_{i=1}^k O_{x_i}$ 矛盾。因此 $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$ 。即存在 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ 。由于 $\{[a_n, b_n]\}$ 为闭区间套, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \rightarrow 0$, 故 ξ 唯一。若另有 $\xi' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, 则由 $|\xi - \xi'| \leq |b_n - a_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 知, $\xi = \xi'$ 。于是 $\xi = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ 。证毕。

有限覆盖定理 \Rightarrow 聚点定理

证明：设 S 是有界无穷点集，则存在闭区间 $[a, b]$ ，使得 $S \subseteq [a, b]$ 。

情形一，存在 $\xi \in [a, b]$ ， ξ 的任意邻域都包含 S 中的无限项，则在开区间 $(\xi - \frac{1}{k}, \xi + \frac{1}{k})$ 中任取 S 中的一项记为 x_k ，其中 x_k 取与 x_{k-1} 相异的项， $k = 1, 2, 3, \dots$ ，于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ ，因此 ξ 为数集 S 的聚点；

情形二，不存在情形一中的 ξ ，即 $\forall x \in [a, b]$ ，存在 x 的一个开邻域 O_x ，使得 O_x 只含有数集 S 中的有限项。令 $D = \{O_x \mid x \in [a, b]\}$ ，则 D 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖。根据 有限覆盖定理，存在 D 的有限个子集 $\{O_{x_1}, O_{x_2}, \dots, O_{x_k}\}$ ，使得 $[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^k O_{x_i}$ ，而 $\bigcup_{i=1}^k O_{x_i}$ 中只含有数集 S 中的有限项，与 $S \subseteq [a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^k O_{x_i}$ 矛盾，于是只可能情形一成立，因此数集 S 必有聚点，证毕。

数学分析、实分析、泛函分析

Heine-Borel 定理

在实数空间 \mathbb{R}^n 中，一个子集 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是紧的，当且仅当它是闭且有界的。

明

必要性

如果 S 是紧的，那么 S 是闭且有界的。

有界性

假设 S 是紧的。若 S 不有界，那么对于每个正整数 k ，存在 $x_k \in S$ ，使得 $\|x_k\| \geq k$ 。这意味着我们可以在 S 中找到一个无穷序列 $\{x_k\}$ 使得 $\|x_k\| \rightarrow \infty$ 。但由于 S 是紧的， $\{x_k\}$ 必须有一个收敛的子列。然而，这个子列的极限必须在 S 中，并且它的极限必定是无穷大的，这与 S 是紧的矛盾。所以 S 必须是有界的。

闭性

假设 S 是紧的。如果 S 不是闭的，那么存在一个点 $x \in \overline{S} \setminus S$ ，其中 \overline{S} 表示 S 的闭包。由于 $x \notin S$ ，但 $x \in \overline{S}$ ，所以存在 S 中的一个序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x 。由于 S 是紧的， $\{x_k\}$ 的收敛极限 x 必须在 S 中，这与 $x \notin S$ 矛盾。因此， S 必须是闭的。

充分性

如果 S 是闭且有界的，那么 S 是紧的。

根据 Bolzano-Weierstrass 定理，任何在 \mathbb{R}^n 中的有界序列都有一个收敛子列。因为 S 是有界的，所以 S 中的任意序列必然有一个有界子序列。根据 Bolzano-Weierstrass 定理，这个有界子序列有一个收敛子列。

我们需要证明这个收敛子列的极限点也在 S 中。因为 S 是闭的，所以所有极限点都在 S 中。于是，这个收敛子列的极限点在 S 中，这意味着 S 是序列紧的。

在 \mathbb{R}^n 中，序列紧性和覆盖紧性等价。因此， S 是覆盖紧的。

结论

综上所述，我们证明了在 \mathbb{R}^n 中，Heine-Borel 定理成立：一个子集 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是紧的，当且仅当它是闭且有界的。

任意数列都存在单调子列。

证明

设数列为 $\{a_n\}$, 下面分两种情形来讨论:

1. 若对任何正整数 k , 数列 $\{a_{k+n}\}$ 有最大项。设 $\{a_{k+n}\}$ 的最大项为 a_{n_1} , 因 $\{a_{n_1+n}\}$ 亦有最大项, 设其最大项为 a_{n_2} , 显然有 $n_2 > n_1$, 且因 a_{n_1} 是 $\{a_{n_1+n}\}$ 的一个子列, 故

$$a_{n_2} \leq a_{n_1};$$

同理存在 $n_3 > n_2$, 使得

$$a_{n_3} \leq a_{n_2};$$

⋮

这样就得到一个单调递减的子列 $\{a_{n_k}\}$ 。

2. 至少存在某正整数 k , 数列 $\{a_{k+n}\}$ 没有最大项。先取 $n_1 = k + 1$, 因 $\{a_{k+n}\}$ 没有最大项, 故 a_{n_1} 后面总存在项 $a_{n_2}(n_2 > n_1)$, 使得

$$a_{n_2} > a_{n_1};$$

同理在 a_{n_2} 后面的项 $a_{n_3}(n_3 > n_2)$, 使得

$$a_{n_3} > a_{n_2};$$

⋮

这样就得到一个严格递增的子列 $\{a_{n_k}\}$ 。

代数、几何、微分方程、拓扑、分数阶微分方程

敬请期待 . . .