MindFlow 笔记模式功能演示

MindFlow 用户

2026 年 1 月 19 日

```
user@mindflow:~$ section --id=0 --title="目录"
```

```
user@mindflow:~$ section --id=1 --title="数学宏库演示"
```

1.1 微分与积分算子

MindFlow 提供丰富的数学宏，简化 PDE 和分析的排版：

- 偏导数: $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (二阶)
- 微分元: $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\mu$ (测度)
- 积分域: $\int_\Omega f\,\mathrm{d}x$, $\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}x$, $\int_{\partial\Omega} g\,\mathrm{d}s$ (边界)

热方程的经典形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

1.2 函数空间与范数

Sobolev 空间的嵌入定理：若 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 且 $p > n$，则 $u \in C(\bar{\Omega})$。

常用范数宏：

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \tag{1-1}$$

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_\Omega |f|^2\,\mathrm{d}\mu} \tag{1-2}$$

1.3 常用集合与符号

- 数集: $\mathbb{R}$ (实数), $\mathbb{N}$ (自然数), $\mathbb{Z}$ (整数), $\mathbb{Q}$ (有理数), $\mathbb{C}$ (复数)
- 收敛: $u_n \rightharpoonup u$ (弱收敛), $X \hookrightarrow Y$ (嵌入)
- 极限: $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

```
user@mindflow:~$ section --id=2 --title="定理环境演示"
```

2.1 经典 amsthm 环境

定理 1 (Lax-Milgram). *设 V 是 Hilbert 空间, $a(\cdot,\cdot)$ 是 V 上的有界强制双线性形式, $F \in V'$。则存在唯一的 $u \in V$ 使得*

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V$$

证明. 利用 Riesz 表示定理构造算子 $A : V \to V$，证明其为双射。 □

2.2 TColorBox 美化环境

定义 2.1 (Sobolev 空间 $W^{k,p}$)

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，$k \in \mathbb{N}$，$1 \le p \le \infty$。定义

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \le k\}$$

其中 $D^\alpha u$ 是弱导数。

定理 2.2 (Poincaré 不等式)

设 Ω 有界且有 Lipschitz 边界，$1 \le p < \infty$。则存在常数 $C > 0$ 使得

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p} \le C\|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

其中 $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,\mathrm{d}x$ 是平均值。

证明

反证法：假设不存在这样的常数，构造序列并利用紧嵌入定理导出矛盾。 □

引理 3 (Grönwall 引理)

若 $y(t) \le a(t) + \int_0^t b(s)y(s)\,\mathrm{d}s$，则 $y(t) \le a(t) + \int_0^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(r)\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s$。

推论 4 (能量估计)

对于抛物方程，解的 L^2 范数随时间指数衰减。

注

以上定理是 PDE 弱解理论的基石，广泛应用于变分问题。

```
user@mindflow:~$ section --id=3 --title="提示框环境"
```

【注意】关于 physics 包

MindFlow 加载了 physics 包，但由于与 siunitx 冲突，`\qty` 命令被重定义。如需使用 siunitx 的 `\qty`，请参考文档。

【技巧】高效学习建议

1. 先理解物理直觉，再追求数学严谨
2. 多做具体例子，建立计算感觉
3. 使用 MindFlow 定理环境整理笔记

【警告】常见错误

在 Sobolev 嵌入定理中，临界指数 $p^* = \frac{np}{n-p}$ 在 $p = n$ 时失效，此时需要 BMO 空间的工具。

【结论】本节要点

- L^p 空间是 Banach 空间，L^2 是 Hilbert 空间
- Sobolev 嵌入定理描述了导数正则性与连续性的关系
- Poincaré 不等式是变分法的核心工具

user@mindflow:~$ section --id=4 --title="代码环境演示"

以下是使用 PyTorch 求解 Poisson 方程的 PINN 代码：

代码 4-1：Physics-Informed Neural Network

```python
import torch
import torch.nn as nn

class PINN(nn.Module):
    def __init__(self, layers):
        super().__init__()
        self.net = nn.Sequential(*[
            nn.Sequential(nn.Linear(layers[i], layers[i+1]), nn.Tanh())
            for i in range(len(layers)-1)
        ])

    def forward(self, x):
        return self.net(x)

# 训练循环
model = PINN([2, 64, 64, 1])
optimizer = torch.optim.Adam(model.parameters(), lr=1e-3)
```

user@mindflow:~$ section --id=5 --title="图文混排演示"

神经网络的训练过程可以通过损失函数的下降曲线来监控。理想情况下，训练损失和验证损失应该同时下降并趋于稳定。

如果验证损失在某个点开始上升而训练损失继续下降，则说明模型出现了过拟合。此时可以考虑：

- 增加训练数据
- 使用正则化 (L2, Dropout)
- 提前停止训练

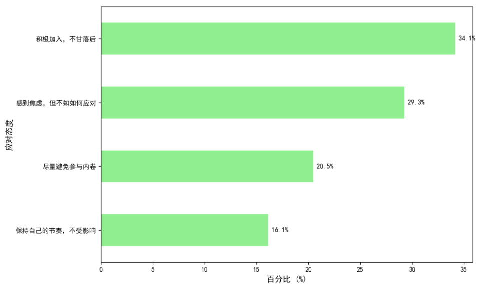

图 5-1　深度学习训练曲线

```
user@mindflow:~$ section --id=6 --title="深度学习宏演示"
```

神经网络的目标是最小化损失函数：

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ell(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}_i), y_i)$$

其中 $\boldsymbol{\theta}$ 是模型参数，$\mathcal{D} = \{(\boldsymbol{x}_i, y_i)\}$ 是训练数据。

常用损失函数：

- 均方误差: $\mathrm{MSE} = \mathbb{E}[(y - \hat{y})^2]$
- 交叉熵: $\mathrm{CE} = -\sum_c y_c \log \hat{y}_c$
- KL 散度: $\mathrm{KL}(p\|q) = \sum_x p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}$