ამოცანათა კრებული მათემატიკურ ანალიზში

ზ. კუჭავა, LaTeX

11.2.2025

§ 2. ქვანტორები და სიმრავლეები.

0.1 ქვანტორები

ვთქვათ $p(x)$ მათემატიკური გამონათქვამია, რომელიც შეიცავს ცვლადს x. გამონათქვამი "ყოველი x-თვის სრულდება $p(x)$" აღინიშნება "$(\forall x)p(x)$" სიმბოლოთი, ხოლო გამონათქვამი "არსებობს x ისეთი, რომ სრულდება $p(x)$" აღინიშნება "$(\exists x)p(x)$" სიმბოლოთი. სიმბოლოს "$\forall$" ეწოდება **ნებისმიერობის ქვანტორი**, ხოლო სიმბოლოს "$\exists$" კი **არსებობის ქვანტორი**.

სამართლიანია შემდეგი ძირითადი თეორემები:

1. თუ R თეორემაა და x არ მონაწილეობს ცხად აქსიომებში, მაშინ $(\forall x)R$ თეორემაა. ამგვარად $R \Rightarrow (\forall x)R$ როდესაც x არ არის რაიმე განსაკუთრებული ობიექტი თეორიაში - არ არის კონსტანტა, ე.ი. x ცვლადია.
2. $(\forall x)R \Rightarrow R$ და $R \Rightarrow (\exists x)R$ თეორემებია.
3. $\rceil(\forall x)R \Leftrightarrow (\exists x)\rceil R$ და $\rceil(\exists x)R \Leftrightarrow (\forall x)\rceil R$ თეორემებია.

ქვანტორებთან მუშაობის დროს, აგრეთვე, გამოიყენება ე.წ. "მუნჯი ცვლადის" ექვივალენტობები: $(\forall \mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \Leftrightarrow (\forall \mathbf{t})\mathbf{p}(\mathbf{t},\mathbf{y})$ და $(\exists \mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \Leftrightarrow (\exists \mathbf{t})\mathbf{p}(\mathbf{t},\mathbf{y})$.

თუ B და R რაიმე ფორმულებია, მაშინ $(\exists_{\mathbf{R}}\mathbf{x})\mathbf{B}$ სიმბოლოთი აღინიშნება ჩანაწერი $(\exists \mathbf{x})(\mathbf{B}\ \&\ \mathbf{R})$, ხოლო $(\forall_{\mathbf{R}}\mathbf{x})\mathbf{B}$ სიმბოლოთი კი - $\rceil(\exists \mathbf{x})\rceil \mathbf{B}$ ჩანაწერი, ანუ $(\forall \mathbf{x})(\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{B})$. ამ სიმბოლოებს ეწოდება "ტიპობრივი ქვანტორები" და ისინი გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როდესაც გვინდა შემოვიფარგლოთ მხოლოდ ისეთი x-ებით, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას R. მაგალითად ხშირად გამოიყენება ჩანაწერები, სადაც R არის $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ რაიმე X სიმრავლისთვის ანუ ჩანაწერები $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X})\mathbf{B}$ და $(\exists \mathbf{x} \in \mathbf{X})\mathbf{B}$.

განვიხილოთ №1 მაგალითი $(R \Rightarrow S) \Rightarrow ((\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S)$ და დავამტკიცოთ დამატებითი ჰიპოთეზის შემოყვანის მეთოდით. დავუშვათ $R \Rightarrow S$ ფორმულა ჭეშმარიტია და დავამტკიცოთ, რომ $(\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S$ ფორმულაც ჭეშმარიტია. ამ უკანასკნელის დამტკიცებისთვის, თავის მხრივ, დავუშვათ (კიდევ ერთი დამატებითი ჰიპოთეზა), რომ

$(\forall x)R$ ფორმულა ჭეშმარიტია. რადგან ვიცით რომ ჭეშმარიტია $(\forall x)R \Rightarrow R$, ამიტიომ იმპლიკაციის მეთოდით მივიღებთ, რომ ჭეშმარიტია ფორმულა R. მაგრამ პირველი დაშვების თანახმად ჭეშმარიტია $R \Rightarrow S$, რაც მოგვცემს, იგივე იმპლიკაციის თვისებით, რომ S-იც ჭეშმარიტია. რადგან პირობიდან ვიცით, რომ x არაა კონსტანტა, ამიტომ სამართლიანია $S \Rightarrow (\forall x)S$. აქედან კი, ისევ იმპლიკაციის თვისებით, ვღებულობთ, რომ ჭეშმარიტია $(\forall x)S$. ამის გამო, მეორე, ჭეშმარიტების $(\forall x)R \Rightarrow R$, დაშვების გამოყენებით ჯერ დავასკვნით, რომ ჭეშმარიტია $(\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S$ ფორმულა და მერე პირველი, $R \Rightarrow S$ ჭეშმარიტების, დაშვების გამო მივიღებთ, რომ ჭეშმარიტია მთელი მაგალითი.

0.2 სიმრავლეები

სიმრავლეთა თეორიაში გამოიყენება სპეციალური სიმბოლოები: $\in$, $\subset$ და წყვილის სიმბოლო.

ჩანაწერი “$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$“ იკითხება როგორც “$\boldsymbol{a}$ ეკუთვნის $\boldsymbol{A}$-ს“. $\boldsymbol{a}$-ს ეწოდება $\boldsymbol{A}$-ს ელემენტი, ხოლო $\boldsymbol{A}$-ს კი სიმრავლე, რომელიც შეიცავს $\boldsymbol{a}$ ელემენტს.

როდესაც $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ და $\boldsymbol{A}$-ის სამართლიანია $\exists \boldsymbol{A}$ და $(\forall \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))$, მაშინ ამბობენ, რომ $\boldsymbol{A}$ სიმრავლე განისაზღვრება $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ პირობით და ეს მიღებულია ჩაიწეროს შემდეგი სახით $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\}$.

ჩანაწერი “$A \subset B$“ წარმოადგენს “$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$“ ჩანაწერის შემოკლებულ აღნიშვნას.

აქსიომადაა მიღებული შემდეგი ფორმულა $(\forall A)(\forall B)((A \subset B \& B \subset A) \Rightarrow (A = B))$ (**ექსტენსიონალობის აქსიომა**).

მტკიცდება, რომ არსებობს და ერთადერთია სიმრავლე X, რომლისთვის სამართლიანია ფორმულა $(\forall x)(x \notin X)$. ამ სიმრავლეს ეწოდება **ცარიელი სიმრავლე** და აღინიშნება სიმბოლოთი “$\emptyset$“.

როდესაც A სიმრავლე ჩაწერილია $A = \{x : p(x)\}$ და $p(x)$ წარმოადგენს ტავტოლოგიის უარყოფას (იგივურად მცდარი წინადადება), მაშინ $A = \emptyset$.

დავუშვათ A და B სიმრავლეებია.

ჩანაწერი “$A \cup B$“ იკითხება როგორც “A სიმრავლის **გაერთიანება** B სიმრავლესთან“ და განიმარტება შემდები ტოლობით

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

ჩანაწერი “$A \cap B$“ იკითხება როგორც “A სიმრავლის **თანაკვეთა** B სიმრავლესთან“ და განიმარტება შემდები ტოლობით

$$A \cap B = \{x : x \in A \;\&\; x \in B\}$$

ჩანაწერი "$A \setminus B$" იკითხება როგორც "A სიმრავლეს გამოკლებული B სიმრავლე" და განიმარტება შემდები ტოლობით

$$A \setminus B = \{x : x \in A \;\&\; x \notin B\}$$

სიმრავლეს $A \setminus B$ ეწოდება კიდევ A და B სიმრავლეების **სხვაობა**.

დავუშვათ მოცემულია სიმრავლე X და $A \subset X$. ჩანაწერი "$C_X A$" იკითხება როგორც "A სიმრავლის **დამატება** X სიმრავლემდე" და გამინარტება ტოლობით $C_X A = X \setminus A$. როდესაც ცხადია რომელ X სიმრავლეზეა საუბარი, ჩვეულებრივ, იწერება უბრალოდ CA.

ჩანაწერი "$A \times B$" იკითხება როგორც "A სიმრავლის **დეკარტული ნამრავლი** B სიმრავლეზე" და განიმარტება შემდეგი ტოლობით $A \times B = \{(x, y) : x \in A \;\&\; y \in B\}$.

ჩანაწერი "$A \Delta B$" იკითხება როგორც "A და B სიმრავლეების **სიმეტრიული სხვაობა** " და განიმარტება შემდეგი ტოლობით $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

განვიხილოთ ქვემოთ მოყვანილი მაგალითების და ამოცანების ამოხსნის ტიპიური ხერხები:

განვიხილოთ №33 მაგალითი $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$. ექვივალენტობის განმარტებიდან გამომდინარე უნდა დავამტკიცოთ ორი წინადადება $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ და $A \subset B \Leftarrow A \cap B = A$. ამგვარად, დავუშვათ (დამატებითი ჰიპოთეზის მეთოდი), რომ სამართლიანია $A \subset B$ და დავიწყოთ $A \cap B = A$ ტოლობის დამტკიცება. ეს, თავის მხრივ, სიმრავლეთა ექსტენსიონალობის აქსიომის საფუძველზე მოითხოვს $A \cap B \subset A$ და $A \cap B \supset A$ წინადადებების დამტკიცებას. დავიწყოთ პირველით: ქვესიმრავლის და სიმრავლეთა თანაკვეთის განმარტების საფუძველზე გადაწერილი ეს წინადადება იქნება $(\forall x)((x \in A \;\&\; x \in B) \Rightarrow x \in A)$ რაც სამართლიანია "და"-ს მოხსნის კანონიდან გამომდინარე (§ 1 №20). მეორე წინადადების დამტკიცებისთვის გამოვიყენოთ დაშვება $A \subset B$ ფორმულის ჭეშმარიტების შესახებ. განვიხილოთ $x \in A$. დაშვების და § 1 №17 გამო $x \in A \Leftrightarrow x \in A \;\&\; A \subset B$. ეს უკანასკნელი შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი ფორმით $x \in A \;\&\; [x \in A \;\&\; (x \in A \;\&\; x \in B)]$. მიღებული გამოსახულებისთვის დასკვნის კანონის 1 №19 გამოყენება კი გვაძლევს $x \in A \;\&\; x \in B$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$. დავუშვათ სამართლიანია ტოლობა $A \cap B = A$. მივიღებთ, რომ $x \in A = A \cap B \Leftrightarrow x \in A \;\&\; x \in B \Rightarrow x \in B$ სადაც ბოლო გამომდინარეობა დავწერეთ ისევ "და"-ს მოხსნის კანონიდან გამომდინარე (§1 №20).

0.3 მაგალითები და ამოცანები

დაამტკიცეთ შემდეგი გამონათქვამები:

თუ x არაა კონსტანტა, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ოთხი მაგალითი

1. $(R \Rightarrow S) \Rightarrow ((\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S)$
2. $(R \Leftrightarrow S) \Rightarrow ((\forall x)R \Leftrightarrow (\forall x)S)$
3. $(R \Rightarrow S) \Rightarrow ((\exists x)R \Rightarrow (\exists x)S)$
4. $(R \Leftrightarrow S) \Rightarrow ((\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)S)$

   დაამტკიცეთ შემდეგი გამონათქვამები

5. $(\forall x)p(x)\ \&\ (\forall x)q(x) \Leftrightarrow (\forall x)\big[p(x)\ \&\ q(x)\big]$
6. $(\exists x)p(x) \vee (\exists x)q(x) \Leftrightarrow (\exists x)\big[p(x) \vee q(x)\big]$

   დაამტკიცეთ შემდეგი გამონათქვამები და მოიყვანეთ საპირისპირო გამომდინარეობების კონტრმაგალითები

7. $(\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x) \Rightarrow (\forall x)\big[p(x) \vee q(x)\big]$
8. $(\exists x)\big[p(x)\ \&\ q(x)\big] \Rightarrow (\exists x)p(x)\ \&\ (\exists x)q(x)$
9. $(\forall x)\big[p(x) \vee q(x)\big] \Rightarrow (\forall x)p(x) \vee (\exists x)q(x)$
10. $(\exists x)A\ \&\ (\forall x)B \Rightarrow (\exists x)\big[A\ \&\ B\big]$

   დაამტკიცეთ შემდეგი ფორმულები, სადაც იგულისხმება, რომ x ასო არ შედის $p(y)$ წინადადებაში

11. $(\forall x)\big[p(y) \vee q(x)\big] \Leftrightarrow p(y) \vee (\forall x)q(x)$
12. $(\exists x)\big[p(y)\ \&\ q(x)\big] \Leftrightarrow p(y)\ \&\ (\exists x)q(x)$

   დაამტკიცეთ შემდეგი გამონათქვამები

13. $(\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\Bigg(p(x) \vee q(y)\Bigg)$
14. $(\exists x)p(x)\ \&\ (\forall x)q(x) \Rightarrow (\exists x)\Bigg(p(x)\ \&\ q(x)\Bigg)$
15. $(\exists x)p(x)\ \&\ (\exists x)q(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)\Bigg(p(x)\ \&\ q(y)\Bigg)$
16. $(\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\Bigg(p(x \vee q(y)\Bigg)$
17. $(\forall x)\Bigg(p(x \Leftrightarrow q(x)\Bigg) \Rightarrow \Bigg((\forall x)p(x) \Leftrightarrow (\forall x)q(x)\Bigg)$

18. $(\forall x)\Big(p(x \Rightarrow q(x)\Big) \Rightarrow \Big((\exists x)p(x) \Rightarrow (\exists x)q(x)\Big)$

19. $(\forall x)(\forall y)p(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)p(x,y)$

20. $(\exists x)(\exists y)p(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)p(x,y)$

21. $(\exists x)(\forall y)p(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)p(x,y)$ მოიყვანეთ საპირისპირო გამომდინარეობის კონტრმაგალითი

22. $(\exists x)(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \big(p \Rightarrow (\exists x)q\big)$ როცა x არ შედის p-ში

23. $(B \Rightarrow A) \Rightarrow \big((\exists x)B \Rightarrow A\big)$ როცა x არაა p-ში და არაა კონსტანტა

24. $(\forall x)(\forall y)(p \mathbin{\&} q) \Leftrightarrow \big((\forall x)p \mathbin{\&} \forall y)q\big)$ როცა y არაა p-ში და x არაა q-ში

25. $(\forall_A x)R \Leftrightarrow (\forall x)(A \Rightarrow R)$

26. $(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists x)R$

27. $(\forall x)R \Rightarrow (\forall_A x)R$

28. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \big[(\exists x)p \Rightarrow (\exists_q x)p\big]$

29. $(\rceil p \Rightarrow q) \Rightarrow \big[(\forall x)p \Rightarrow (\forall_q x)p\big]$

    შემდეგი სამი მაგალითი სამართლიანია როდესაც y არაა R-ში და x არაა S-ში

30. $(\forall_R x)(\forall_S y)p(x,y) \Leftrightarrow (\forall_S y)(\forall_R x)p(x,y)$

31. $(\exists_R x)(\exists_S y)p(x,y) \Leftrightarrow (\exists_S y)(\exists_R x)p(x,y)$

32. $(\exists_R x)(\forall_S y)p(x,y) \Rightarrow (\forall_S y)(\exists_R x)p(x,y)$

    .

    დაამტკიცეთ შემდეგი წინადადებები

33. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

34. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

35. $B \subset A \Rightarrow (A \setminus B) \cup B = A$

36. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow (A \cup B) \setminus B = A$

37. $A \subset B \Rightarrow A \setminus C \subset B \setminus C$

38. $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$

39. $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$

40. $C = A \setminus B \Rightarrow B \cap C = \emptyset$

41. $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \mathbin{\&} B = \emptyset$

42. $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = A$

43. $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$

44. $A \cup B = A \setminus B \Leftrightarrow B = \emptyset$

45. $A \setminus B = A \cap B \Leftrightarrow A = \emptyset$

46. $A \cup B \subset C \Leftrightarrow A \subset C$ & $B \subset C$

47. $C \subset A \cap B \Leftrightarrow C \subset A$ & $C \subset B$

48. $A \subset C \cup B \Leftrightarrow A \setminus B \subset C$

49. $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$

50. $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

51. $A \Delta X = A \Leftrightarrow X = \emptyset$

52. $A \subset C$ & $B \subset D \Rightarrow (A \times D) \cap (B \times C)$

53. $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$

დაამტკიცეთ ტოლობები

54. $\rceil(\forall x \in X)\ p(x) = (\exists x \in X)\ \rceil p(x)$

55. $\rceil(\exists x \in X)\ p(x) = (\forall x \in X)\ \rceil p(x)$

56. $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$

57. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

58. $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$

59. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

60. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

61. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

62. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

63. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

64. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

65. $B \setminus (A \cup C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$

66. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

67. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

68. $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$

69. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$

70. $A \cap B \cap C = A \setminus (A \setminus (B \cap C))$

71. $(A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$

72. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

73. $A \cap (B \cup C) = A \setminus [(A \setminus B) \cap (A \setminus C)]$

74. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

75. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$

76. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

77. $A \Delta (B \Delta D) = (A \Delta B) \Delta D$

78. $A \cap (B \Delta D) = (A \cap B) \Delta (A \cap D)$

79. $A \Delta A = \emptyset$

80. $A \Delta \emptyset = A$

81. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

82. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

83. $(A \times B) \cap (A \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$. შენარჩუნდება თუ არა ტოლობა თუ $\cap$ შეიცვლება $\cup$-ით?

84. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

85. სამართლიანია თუ არა?
$A \times B = B \times A$

86. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
შემდეგ მაგალითებში დავუშვათ $A \subset X$ და $B \subset X$.

87. $A \cup C_X A = X$

88. $A \cap C_X A = \emptyset$

89. $C_X(C_X A) = A$

90. $C_X(A \cap B) = C_X A \cup C_X B$ (დე-მორგანის კანონი)

91. $C_X(A \cup B) = C_X A \cap C_X B$ (დე-მორგანის კანონი)

92. $C_X(A \setminus B) = C_X A \cup B$

93. $(A \cap C_X B) \cup (C_X A \cap B) = A \cup B$

94. $(A \cup C_X B) \cap (C_X A \cup B) = A \cup B$

95. $C_X[C_X(C_X A \cup B) \cup (A \cup C_X B)] = B$