ამოცანათა კრებული მათემატიკურ ანალიზში

მათემატიკის საფუძვლების ელემენტები

ზ. კუჭავა, LaTeX

11.2.2025

წინასიტყვაობა

ამოცანათა კრებულის შედგენა ძირითადად განპირობებული იყო იმ მიზეზით, რომ კლასიკური ამოცანათა კრებულები, რომლებიც გამოიყენებიან უმაღლეს სასწავლებლებში, ბიბლიოგრაფიულ იშვიათობად იქცნენ. მეორე მიზეზი არის ქართულ ენაზე ისეთი ამოცანათა კრებულის ხილვის სურვილი, რომელიც მაქსიმალურად შეესაბამება მათემატიკურ ფაკულტეტებზე სწავლებისას ავტორის მიერ მიღებულ გამოცდილებას.

შესავალი

§ 1. მათემატიკის საფუძვლების ელემენტები.

0.1 მათემატიკის აგებულება

ქვემოთ აღწერილია მათემატიკური თეორიების აგებულება მათემატიკისადმი თეორიულ-სიმრავლური მიდგომის საფუძველზე.

მათემატიკური თეორია იწყება იმით, რომ ირჩევენ ანბანს (სიმბოლოებს), რომლის საშუალებითაც ჩაიწერება მათემატიკური სიტყვები და წინადადებები. ძირითადად გამოიყენება ლათინური შრიფტის ასოები (A, a, B, b, ... და ა.შ.) და სპეციალური სიმბოლოები (მაგალითად $+$, $-$, $\int$ და ა.შ.). საზოგადოდ მათემატიკური ჩანაწერი შეიძლება იყოს ასოების და სპეციალური სიმბოლოების ნებისმიერი თანმიმდევრობა მაგრამ თავიდანვე თანხმდებიან წესებზე, რომელთა მიხედვით განასხვავებენ აზრიან და უაზრო მათემატიკურ ჩანაწერებს. მაგალითად: $2+2=4$ და $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ აზრიანი მათემატიკური ჩანაწერებია, ხოლო $((+)))=7(-=8.$ უაზრო ჩანაწერია. შევნიშნოთ, რომ ჩანაწერი $2+2=5$ აზრიანი, რა თქმა უნდა, არის მაგრამ მცდარია (ჭეშმარიტი და მცდარი გამონათქვამების შესახებ ქვემოთ გვექნება საუბარი). ბუნებრივია, მათემატიკაში ვმუშაობთ აზრიან ჩანაწერებთან.

აზრიან მათემატიკურ ჩანაწერებში გამოიყოფა ორი კატეგორია: საგნები (ობიექტები, თერმები) და ფორმულები (გამონათქვამები, დამოკიდებულებები, თვისებები). განიმარტება წესები, რომელთა მიხედვით ყოველ აზრიან მათემატიკურ ჩანაწერზე ცალსახად ითქმება ის ფორმულაა თუ საგანი. მაგალითად: $2 = 2$ ფორმულაა, $\sqrt[4]{1000}$ კი - საგანი, ხოლო $2+2$ არც ფორმულაა, არც საგანი.

შემდეგ ნაბიჯზე ირჩევენ რამოდენიმე ფორმულას, რომელთაც ეწოდებათ **აქსიომები** (ე.წ. ცხადი აქსიომები) და განმარტავენ მათემატიკური ჩანაწერების გარდაქმნის წესებს (ე.წ. სქემებს, გამოყვანის სქემებს, აქსიომათა სქემებს). ფორმულებს, რომლებიც მიიღებიან გარდაქმნის წესების საშუალებით ეწოდებათ არაცხადი აქსიომები. დასაშვებია, რომ მათემატიკურ თეორიას არ ქონდეს ცხადი აქსიომები.

ცხადი აქსიომების არჩევით ხდება იმ თვისებების გამოცხადება, რომელთა შესწავლა მიმდინარეობს მოცემულ მათემატიკურ თეორიაში. თუ ცხადი აქსიომა წარმოადგენს რაიმე სავსებით კონკრეტული, ფიქსირებული ობიექტის (მაგალითად რაიმე ასოთი აღნიშნული ობიექტის) თვისებას, მაშინ ამ ობიექტს ეწოდება **კონსტანტა**. ამგვარად, აქსიომები არიან ან თავისთავად ცხადი გამონათქვამები ან ჰიპოთეზები, ხოლო კონსტანტები კი სავსებით განსაზღვრული, კონკრეტული ობიექტებია, რომელთა შესწავლა ხდება. თუ ასო არ არის კონსტანტა, მაშინ იგი აღნიშნავს განუსაზღვრელ ობიექტს ე.ი. **ცვლადია**.

მათემატიკური დამტკიცება განიმარტება როგორც ჩამოწერილი ფორმულათა (გამონათქვამთა, დამოკიდებულებათა) თანმიმდევრობა, რომელშიც $\mathbf{R}$ ფორმულისთვის იგი არის ან ცხადი აქსიომა, ან მიღებულია გარკვეული გარდაქმნის წესით ჩამოწერილი ფორმულებისგან, ან $\mathbf{R}$-ს წინ უძღვის ორი ფორმულა $\mathbf{S}$ და $\mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{R}$.

მათემატიკური თეორემა არის ფორმულა (გამონათქვამი, დამოკიდებულება), რომელიც გვხვდება მათემატიკურ დამტკიცებაში. ხშირად "მათემატიკური თეორემა"გამონათქვამის მაგივრად ამბობენ "**ჭეშმარიტი ფორმულა**"(ან ჭეშმარიტი გამონათქვამი, ჭეშმარიტი დამოკიდებულება).

0.2 ლოგიკური კავშირები

მათემატიკური ჩანაწერების შექმნისთვის გამოიყენება სპეციალური სიმბოლოები ე.წ. ლოგიკური კავშირები. ძირითადი კავშირებია: "არა" , "და" , "ან" , "გამომდინარეობს". უკანასკნელი კიდევ გამოითქმება როგორც "თუ ... მაშინ ..."ან "როდესაც ... მაშინ ...".

"არა" უარყოფა. აღინიშნება "$\neg$"ან "$\rceil$". თუ $\mathbf{A}$ არის დამოკიდებულება (ფორმულა, გამონათქვამი, თვისება) მაშინ ჩანაწერი $\rceil A$ წარმოადგენს ფორმულას, რომელსაც ვუწოდებთ $\mathbf{A}$-ს უარყოფას და იკითხება "არა $\mathbf{A}$". თუ $\rceil A$ არის ჭეშმარიტი მათემატიკური გამონათქვა-

მი (თეორემაა), მაშინ **A**-ს ვუწოდებთ **მცდარ გამონათქვამს** (მცდარი ფორმულა, მცდარი დამოკიდებულება). მიღებულია, აღნიშვნის სიმარტივისთვის, ჭეშმარიტ გამონათქვამებს მივაწეროთ ციფრი 1, ხოლო მცდარს - ციფრი 0. ამ ციფრებს მომავალში ვუწოდებთ ფორმულათა (გამონათქვამთა, დამოკიდებულებათა) ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას. ამგვარად უარყოფის ოპერაციას განმარტავს ცხრილი 1.

A	$\rceil A$
0	1
1	0

ცხრ. 1: უარყოფა.

თუ მათემატიკურ თეორიაში შეიძლება დამტკიცდეს თეორემები $\rceil$**A** და **A**, მაშინ ასეთ თეორიას ვუწოდებთ **წინააღმდეგობრივ თეორიას**. ასეთი თეორიების განხილვა არ წარმოადგენს ინტერესს.

"და"კავშირი აღინიშნება "$\wedge$"ან "&"სიმბოლოებით და მისი გამოყენება ხდება შემდეგნაირად: თუ **A** და **B** ორი ფორმულაა, მაშინ ფორმულაა ჩანაწერი **A**&**B**, იკითხება "**A** და **B**". ფორმულას რომელიც შექმნილია "და"კავშირის გამოყენებით ეწოდება **კონიუქცია** და ჭეშმარიტია, როდესაც ჭეშმარიტია ორივე ფორმულა A და B, ცხრილი 2.

A	B	$A \,\&\, B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ცხრ. 2: კონიუქცია.

"ან"კავშირი აღინიშნება "$\vee$"სიმბოლოთი და მისი გამოყენება ხდება შემდეგნაირად: თუ თუ **A** და **B** ორი ფორმულაა, მაშინ ფორმულაა ჩანაწერი **A**$\vee$**B**, იკითხება "**A** ან **B**". ფორმულას, რომელიც შექმნილია "ან"კავშირის გამოყენებით ეწოდება **დიზიუნქცია** და ჭეშმარიტია როდესაც ჭეშმარიტია ერთერთი ფორმულა A ან B, ცხრილი 3.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ცხრ. 3: დიზიუნქცია.

"გამომდინარეობს"კავშირი აღინიშნება "$\Rightarrow$"და მისი გამოყენება ხდება შემდეგნაირად: თუ **A** და **B** ორი ფორმულაა, მაშინ ფორმულაა ჩანაწერი **A**$\Rightarrow$**B**, იკითხება "თუ **A** მაშინ **B**"ან "თუ **A**-დან გამომდინარეობს **B**"ან "როდესაც **A** მაშინ **B**". ფორმულას, რომელიც შექმნილია "გამომდინარეობს"კავშირის გამოყენებით ეწოდება **იმპლიკაცია** და მცდარია მხოლოდ მაშინ, როდესაც ჭეშმარიტია პირველი ფორმულა და მცდარია მეორე, ცხრილი 4.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

ცხრ. 4: იმპლიკაცია.

როგორც ვხედავთ ცხრილები შემოდის აქსიომატურად (გამოყვანის სქემების როლშია), მაგრამ თუ მაგალითებს ნომრებით 3, 11, 21, 38 გამოვაცხადებთ სქემებად, მაშინ შესაძლებელია დამტკიცდეს ზემოთ მოყვანილი ლოგიკური კავშირების შესაბამისი ცხრილების ჭეშმარიტება.

ჩანაწერი "$p \Leftrightarrow q$"წარმოადგენს "$(p \Rightarrow q)\&(q \Rightarrow p)$"ჩანაწერის შემოკლებულ აღნიშვნას. სიმბოლოს "$\Leftrightarrow$"ეწოდება "ექვივალენტობა"და ფორმულებს p და q ეწოდება ექვივალენტური ფორმულები როდესაც $p \Leftrightarrow q$ ჭეშმარიტი ფორმულაა. ადვილი შესამჩნევია, რომ $p \Leftrightarrow q$ ჭეშმარიტია, როდესაც p და q ფორმულებს ერთნაირი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა აქვთ.

სპეციალურ სიმბოლოს "$=$"ეწოდება "ტოლობა"და მისი დაწერისას ხელმძღვანელობენ შემდეგი წესით: თუ ორ ობიექტს შორის წერია "$=$"სიმბოლო, მაშინ ფორმულაში პირველი ობიექტის ნაცვლად მეორე ობიექტის ჩაწერა გვაძლევს საწყისი ფორმულის ექვივალენტურ ფორმულას. ხშირად ექვივალენტურ ფორმულებს შორის წერენ "$=$"სიმბოლოს.

ფორმულას ეწოდება "ტავტოლოგია"(იგივურად ჭეშმარიტი ფორმულა), თუ მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა ყოველთვის არის 1.

ზოგიერთი თეორემა ძალიან ხშირად გამოიყენება მათემატიკური წინადადებების დამტკიცებისთვის და მათ უწოდებენ დამტკიცების მეთოდებს. ქვემოთ მოყვანილია ზოგიერთი მათგანი.

დამატებითი ჰიპოთეზის მეთოდი: დავუშვათ რომელიმე მათემატიკურ თეორიაში გამოცხადებულია გარკვეული აქსიომები და **A** ფორმულა არ წარმოადგენს აქსიომას. გვინდა, რომ დავამტკიცოთ ფორმულა $A \Rightarrow B$. განვიხილოთ თეორია, რომელშიც ძველ აქსიომებთან ერთად ფორმულა **A**-ც გამოცხადებულია აქსიომად. თუ ამ

თეორიაში დამტკიცდება ფორმულა **B**, მაშინ თავდაპირველ თეორიაში ჭეშმარიტი იქნება $A \Rightarrow B$.

მარტივად, რომ ვთქვათ თუ დაშვებიდან (დამატებითი ჰიპოთეზიდან), რომ **A** ჭეშმარიტია გამომდინარეობს, რომ **B** ჭეშმარიტია, მაშინ ჭეშმარიტია $A \Rightarrow B$. ეს მეთოდი წარმოადგენს მაგალითს ნომრით 19.

საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდი: დავუშვათ რომელიმე მათემატიკურ თეორიაში გამოცხდებულია გარკვეული აქსიომები და **A** ფორმულა არ წარმოადგენს აქსიომას. გვინდა დავამტკიცოთ ფორმულა **A**. განვიხილოთ თეორია, რომელშიც ძველ აქსიომებთან ერთად ფორმულა $\rceil A$ გამოცხადებულია აქსიომად. თუ ახალი თეორია წინააღმეგობრივია (მაგალითად **B** & $\rceil$**B** ჭეშმარიტია რაიმე **B** ფორმულისთვის), მაშინ თავდაპირველ თეორიაში **A** ფორმულა იქნება ჭეშმარიტი.

მარტივად, რომ ვთქვათ თუ დაშვებიდან, რომ $\rceil A$ ჭეშმარიტია ვღებულობთ წინააღმდეგობრივ თეორიას, მაშინ ჭეშმარიტია **A**. ეს მეთოდი წარმოადგენს მაგალითს №24.

მოვიყვანოთ ქვემოთ მოყვანილი მაგალითების და ამოცანების გამოყვანის ტიპიური ხერხები:

განვიხილოთ №19 ფორმულა $\left[p \mathbin{\&} (p \Rightarrow q)\right] \Rightarrow q$

I ხერხი (ცხრილების საშუალებით): ავაგოთ მოყვანილი ფორმულის შესაბამისი ცხრილი 5

p	q	$\left[p \mathbin{\&} (p \Rightarrow q)\right] \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ცხრ. 5: დამატებითი ჰიპოთეზის მეთოდი.

განვიხილოთ ცვლადების q და p მნიშვნელობების პირველი სტრიქონი. რადგან p-ს მნიშვნელობა 0-ია (მცდარია), ამიტომ კვადრატულ ფრჩხილებში მდგომი კონიუქციის მნიშვნელობაც 0-ია (მცდარია) და ამიტომ გამომდინარეობის მნიშვნელობა არის 1 (ჭეშმარიტი). ანალოგიურად შევავსებთ დანარჩენ სტრიქონებს. რადგან ფორმულის შესაბამის სვეტში გვაქვს სულ მხოლოდ 1-იანები, ამიტომ ფორმულა ჭეშმარიტია.

II ხერხი (ექვივალენტური გარდაქმნების ხერხი): ვისარგებლოთ

№1 მაგალითით და $p \Rightarrow q$ ფორმულა შევცვალოთ მისი ექვივალენტურით $\rceil p \vee q$. ანუ შეიძლება დაიწეროს

$$\left(\Big[p \ \& \ (p \Rightarrow q)\Big] \Rightarrow q\right) \Leftrightarrow \left(\rceil\Big[p \ \& \ (p \Rightarrow q)\Big] \vee q\right)$$

უარყოფის სიმბოლოს ფრჩხილებში შეტანისთვის გამოვიყენოთ №8 მაგალითი

$$\left(\rceil\Big[p \ \& \ (p \Rightarrow q)\Big] \vee q\right) \Leftrightarrow \left(\Big[\rceil p \vee \rceil(p \Rightarrow q)\Big] \vee q\right)$$

ახლა გამოვიყენოთ ჯერ №5, მერე №3 და ისევ №5 მაგალითები

$$\left(\Big[\rceil p \vee \rceil(p \Rightarrow q)\Big] \vee q\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\rceil p \vee \Big[\rceil(p \Rightarrow q) \vee q\Big]\right) \Leftrightarrow \left(\rceil p \vee \Big[q \vee \rceil(p \Rightarrow q)\Big]\right) \Leftrightarrow \left(\Big[\rceil p \vee q\Big] \vee \rceil\Big(p \Rightarrow q\Big)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\Big[p \Rightarrow q\Big] \vee \rceil\Big(p \Rightarrow q\Big)\right)$$

მიღებული ფორმულა №14 მაგალითის თანახმად წარმოადგენს ტავტოლოგიას. შევნიშნოთ, რომ დამტკიცების ამ ხერხის გამოყენებისთვის ჯერ აუცილებლად უნდ დავამტკიცოთ ყველა მასში გამოყენებული მაგალითი.

III ხერხი:
გამოვიყენოთ დამატებითი ჰიპოთეზის მეთოდი. დავუშვათ (შემოვიყვანოთ დამატებითი ჰიპოთეზა), რომ ფორმულა $p\&(p \Rightarrow q)$ ჭეშმარიტია. კონიუქციის ცხრილიდან გამომდინარეობს, რომ მაშინ ჭეშმარიტია p და ჭეშმარიტია $p \Rightarrow q$. მაშინ იმპლიკაციის ცხრილიდან გამომდინარეობს, რომ ჭეშმარიტია q. ამგვარად მივიღებთ, რომ ჭეშმარიტია მთელი ფორმულაც $[p \ \& \ (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$.

IV ხერხი: ხანდახან დამატებითი ჰიპოთეზის მეთოდს ათავსებენ ე.წ. კონტრაპოზიციის კანონთან, №23. ამ კანონის მიხედვით შეიძლება $a \Rightarrow b$ წინდადადების დამტკიცების მაგივრად დავამტკიცოთ წინადადება $\rceil b \Rightarrow \rceil a$. ამგვარად დავუშვათ, რომ სამართლიანია $\rceil q$ და ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია $\rceil[p \ \& \ (p \Rightarrow q)]$. დაშვება ნიშნავს, რომ q მცდარია. თუ მცდარია p, მაშინ იმწამსვე მცდარია კვადრატულ ფრჩხილებში მყოფი გამოსახულება. თუ ჭეშმარიტია p, მაშინ მცდარია იმპლიკაცია $p \Rightarrow q$ და ისევ მცდარია კვადრატულ ფრჩხილებში მყოფი გამოსახულება. ამგვარად ჭეშმარიტია $\rceil[p \ \& \ (p \Rightarrow q)]$.

უკანასკნელი განხილული ხერხით დამტკიცება არ უნდა ავურიოთ საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით დამტკიცებასთან, რომლის გამოყენება იქნებოდა $\rceil[p \ \& \ (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ წინადადების განხილვა რაიმე წინააღმდეგობრივი გამონათქვამის მიღების მიზნით. ამ უკანასკნელ ხერხს აღარ განვიხილავთ, რადგან ფორმალურად ის გაიმეორებს დამტკიცების II ხერხში მოყვანილ გამოსახულებებს.

0.3 მაგალითები და ამოცანები

დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

1. $A \Rightarrow B = \rceil A \vee B$
2. $A \mathbin{\&} B = B \mathbin{\&} A$ (კონიუქციის კომუტაციურობა)
3. $A \vee B = B \vee A$ (დიზიუნქციის კომუტაციურობა)
4. $(A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} C = A \mathbin{\&} (B \mathbin{\&} C)$ (კონიუქციის ასოციაციურობა)
5. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ (დიზიუნქციის ასოციაციურობა)
6. $A \mathbin{\&} (B \vee C) = (A \mathbin{\&} B) \vee (A \mathbin{\&} C)$ (კონიუქციის დისტრიბუციულობა)
7. $A \vee (B \mathbin{\&} C) = (A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C)$ (დიზიუნქციის დისტრიბუციულობა)
8. $\rceil(A \mathbin{\&} B) = (\rceil A) \vee (\rceil B)$ (კონიუქციის დე-მორგანის კანონი)
9. $\rceil(A \vee B) = (\rceil A) \mathbin{\&} (\rceil B)$ (დიზიუნქციის დე-მორგანის კანონი)
10. $\rceil(\rceil A) = A$
11. $A \vee A = A$
12. $A \vee \ \& A = A$
13. $A \mathbin{\&} (\rceil A) = 0$ (წინააღმდეგობის კანონი)
14. $A \vee (\rceil A) = 1$ (მესამეს გამორიცხვის კანონი)
15. $A \mathbin{\&} 0 = 0$
16. $A \vee 0 = A$
17. $A \mathbin{\&} 1 = A$
18. $A \vee 1 = 1$

დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი ჩანაწერები ტავტოლოგიებია

19. $[p \mathbin{\&} (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ დასკვნის კანონი
20. $p \mathbin{\&} q \Rightarrow p$ “და“-ს მოხსნის კანონი
21. $p \Rightarrow p \vee q$ “ან“-ის შემოყვანის კანონი
22. $\rceil q \mathbin{\&} (p \vee q) \Rightarrow p$ “ან“-ის მოხსნის კანონი
23. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\rceil q \Rightarrow \rceil p)$ კონტრაპოზიციის კანონი
24. $(\rceil p \Rightarrow q) \mathbin{\&} (\rceil p \Rightarrow \rceil q) \Rightarrow p$ საწინააღმდეგოს დაშვების კანონი (წინააღმდეგობამდე მიყვანის მეთოდი)
25. $(p \Rightarrow q) \mathbin{\&} (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ სილლოგიზმი

26. $(p \Leftrightarrow q)$ & $(q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ ექვივალენტობის ტრანზიტულობის კანონი

27. $(p \Rightarrow r)$ & $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$ წანამძღვრების შეკრების კანონი

28. $(p \Rightarrow q)$ & $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \ \& \ r)$ დასკვნათა გადამრავლების კანონი

29. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ წანამძღვართა გადანაცვლების კანონი

30. $(A \ \& \ B) \Rightarrow C \Leftrightarrow A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

31. $(A \ \& \ B) \Rightarrow C \Leftrightarrow (A \ \& \ \rceil C) \Rightarrow \rceil B$

32. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \ \& \ \rceil B$

33. $(A \ \& \ B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

34. $(A \Rightarrow B) \ \& \ \rceil B \Rightarrow \rceil A$

35. $A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

36. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

37. $(A \Rightarrow R \vee S) \Leftrightarrow [R \vee (A \Rightarrow S)]$

38. $(\rceil A \Rightarrow A) \Rightarrow A$

39. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \ \& \ C) \Rightarrow (B \ \& \ C))$

40. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \vee C) \Rightarrow (B \vee C))$

41. $[(A \Rightarrow B) \ \& \ (C \Rightarrow D)] \Rightarrow [A \vee C \Rightarrow B \vee D]$

42. $[(A \Rightarrow B) \ \& \ (C \Rightarrow D)] \Rightarrow [A \& C \Rightarrow B \& D]$

43. $\rceil(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\rceil(A \Rightarrow B) \vee \rceil(B \Rightarrow A))$

44. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

45. $[(A \vee B)) \ \& \ (A \Rightarrow C)) \ \& \ (B \Rightarrow C)] \Rightarrow C$ შემთხვევათა განცალკევების მეთოდი

46. $(A \vee B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

47. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \Big[(A \ \& \ B) \vee (\rceil A \ \& \ \rceil B)\Big]$

48. $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \rceil(\rceil A \Leftrightarrow B)$

49. $(A \Rightarrow (B \vee \rceil C)) \Leftrightarrow ((C \ \& \ A) \Rightarrow B)$

50. $(A \Rightarrow (B \vee C)) \Leftrightarrow (B \vee (A \Rightarrow C))$

51. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \Big((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \ \& \ C))\Big)$

52. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow \Big((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)\Big)$