

TAP projekt 1 - sprawozdanie

Mirosław Hamryszak, Marcin Skrzyczewski, Piotr Chachuła

15 kwietnia 2020

Spis treści

1 Symulacja działania obiektu w Matlabie	2
1.1 Otrzymany model	2
2 Modele zlinearyzowane (ciągły w postaci równań stanu i transmitancji) w punkcie pracy	3
2.1 Równania stanu	3
2.2 Transmitancje	4
3 Porównanie działania modeli linowych z działaniem modelu nieliniowego	5
4 Dyskusja na temat jakości przybliżenia liniowego	14
5 Modele dyskretne	15
5.1 Równania stanu	15
5.2 Transmitancje	16
5.3 Porównanie modelu ciągłego z dyskretnym	16

1 Symulacja działania obiektu w Matlabie

1.1 Otrzymany model

Opsiany jest następującymi równaniami

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = F_H + F_C + F_D - F(h) \\ V \frac{dT}{dt} = F_H \cdot T_H + F_C \cdot T_C + F_D \cdot T_D - (F_H + F_C + F_D) \cdot T \\ F(h) = \alpha \sqrt{h}, V(h) = C \cdot h^2, T_{out}(t) = T(t - \tau), F_C(t) = F_{Cin}(t - \tau_c) \end{cases}$$

gdzie:

$C=0,3$

$\alpha = 9$

Punkt pracy zadanego układu: $T_C = 20^\circ C$

$T_H = 65^\circ C$

$T_D = 30^\circ C$

$F_C = 31 cm^3/s$

$F_H = 20 cm^3/s$

$F_D = 10 cm^3/s$

$\tau_c = 100 s$

$\tau = 40 s$

$\tau_c = 45, 94 cm$

$T = 36, 39^\circ C$

Wielkości regulowane: h, T_{out}

Wielkości sterujące: F_H, F_{Cin}

Z otrzymanych danych wynika, że:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_H \\ F_{Cin} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = F_d = v_1, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} h \\ T_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

2 Modele zlinearyzowane (ciągły w postaci równań stanu i transmitancji) w punkcie pracy

Dokonano zlinearyzacji w punkcie $p(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{v}_1)$

2.1 Równania stanu

Ogólny wzór równań kształtuje się następująco:

$$\dot{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$$

$$\dot{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

Mając równania:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 + u_2(t - \tau_c) + v_1 - \alpha \sqrt{\frac{x_1}{c}} \\ \dot{x}_2 &= \frac{T_H u_1 + T_C u_2(t - \tau_c) + T_D v_1 - (u_1 + u_2(t - \tau_c) + v_1)x_2}{x_1} \\ y_1 &= \sqrt{\frac{x_1}{C}} \\ y_2 &= x_2(t - \tau)\end{aligned}$$

Po zlinearyzowaniu otrzymano:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 + u_2(t - \tau_c) + v_1 - \alpha \frac{(\frac{x_1}{C})^{0,25}}{4\bar{x}_1} \\ \dot{x}_2 &= (\frac{T_H}{\bar{x}_1} - \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1})u_1 + (\frac{T_C}{\bar{x}_1} - \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1})u_2 + (\frac{T_D}{\bar{x}_1} - \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1})v_1 - (\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{v}_1)\bar{x}_2 - \frac{1}{\bar{x}_1^2}(T_H \bar{u}_1 + T_C \bar{u}_2 + T_d \bar{v}_1 - (\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{v}_1)\bar{x}_1)x_1 \\ y_1 &= \sqrt{\frac{x_1}{C}} + \frac{1}{2\sqrt{x_1 C}}(x_1 - \bar{x}_1) \\ y_2 &= x_2(t - \tau)\end{aligned}$$

Macierze stanu wyglądają następująco:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\alpha \frac{(\frac{x_1}{C})^{0,25}}{4\bar{x}_1} & 0 \\ -\frac{1}{\bar{x}_1^2}(T_H \bar{u}_1 + T_C \bar{u}_2 + T_d \bar{v}_1 - (\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{v}_1)\bar{x}_1) & \frac{1}{\bar{x}_1(\bar{u}_1 + \bar{u}_2)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{T_H}{\bar{x}_1} - \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} & \frac{T_C}{\bar{x}_1} - \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} & \frac{T_D}{\bar{x}_1} - \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x_1 C}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2.2 Transmitancje

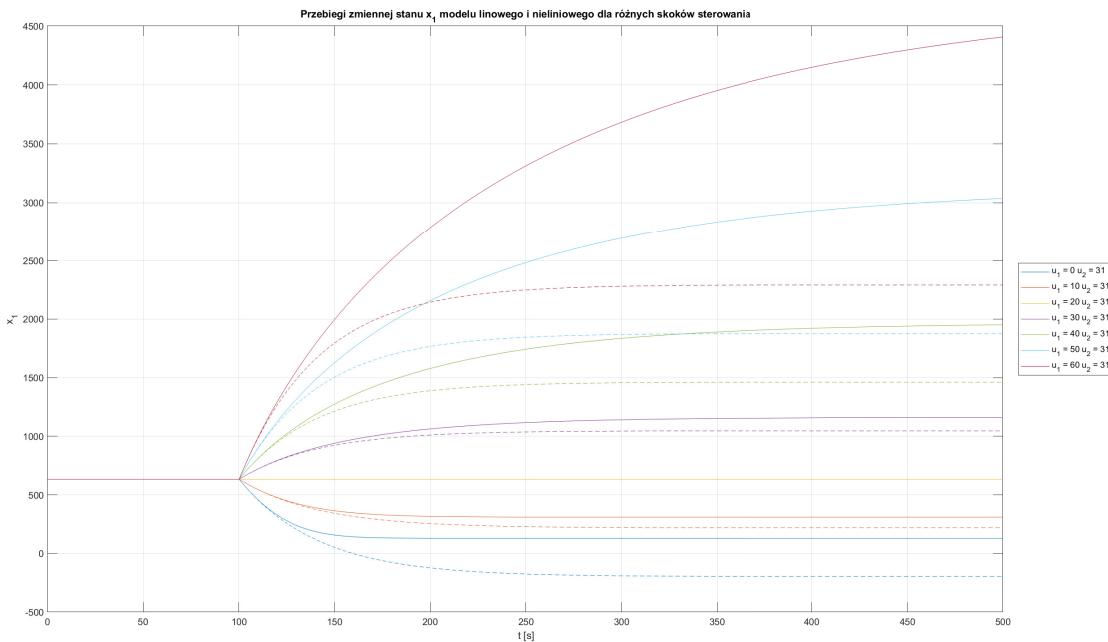
Po zapisaniu macierzy A, B, C, D najpierw w Matlabie stworzono obiekt reprezentujący model za pomocą komendy *ss()* a następnie wyznaczono transmitancje za pomocą komendy *tf()*. Wyliczono następujące transmitancje:

$$\begin{aligned}\frac{U_1}{Y_1} &= \frac{0.04}{s + 0.02409} \\ \frac{U_1}{Y_2} &= e^{-40*s} \cdot \frac{0.04519s + 0.001088}{s^2 + 0.03372s + 0.0002321} \\ \frac{U_2}{Y_1} &= e^{-40*s} \frac{0.04}{s + 0.02409} \\ \frac{U_2}{Y_2} &= e^{-140*s} \cdot \frac{-0.02589s - 0.000624}{s^2 + 0.03372s + 0.0002321} \\ \frac{V_1}{Y_1} &= \frac{0.04}{s + 0.02409} \\ \frac{V_1}{Y_2} &= e^{-40*s} \cdot \frac{-0.01009s - 0.0002436}{s^2 + 0.03372s + 0.0002321}\end{aligned}$$

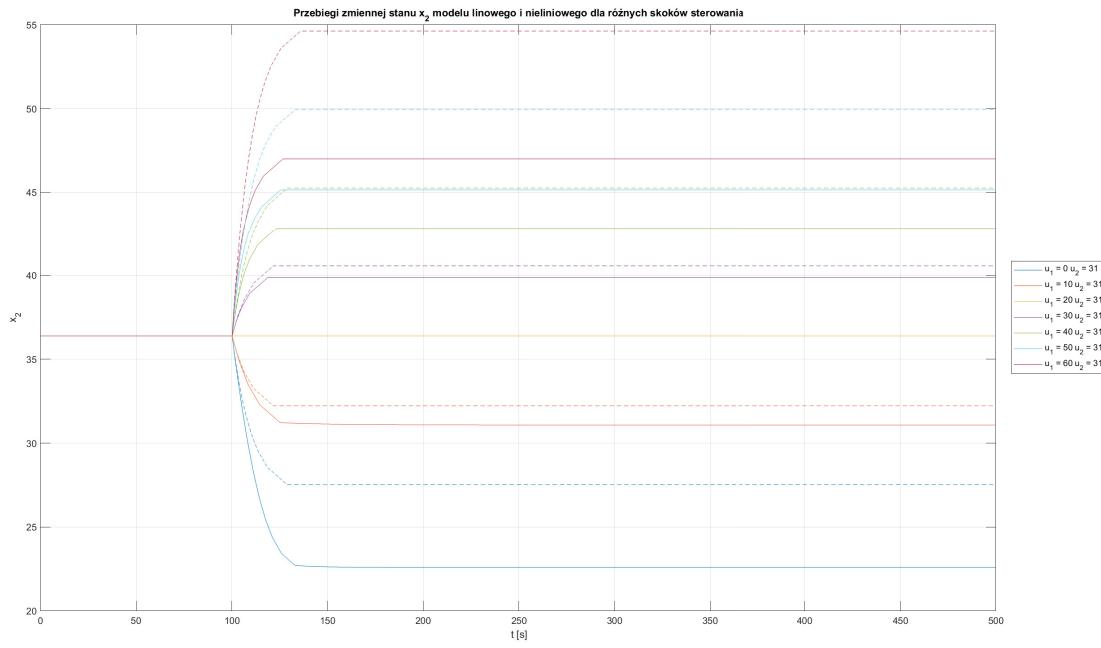
3 Porównanie działania modeli linowych z działaniem modelu nieliniowego

Poniżej przedstawione wykresy są rezultatem wprowadzenia wyprowadzonych równań stanu do Matlaba

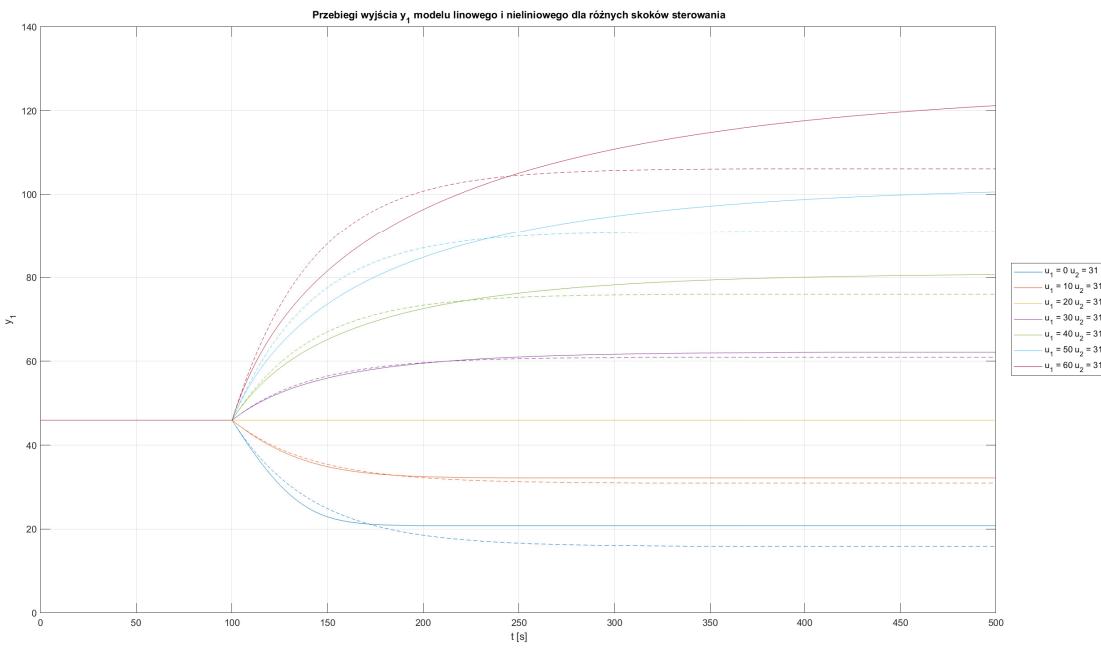
W pierwszym eksperymencie sprawdzono działanie modelu dla różnych wartości wejścia u_1 pozostawiając wartości u_2 i v_1 stałe w punkcie pracy.



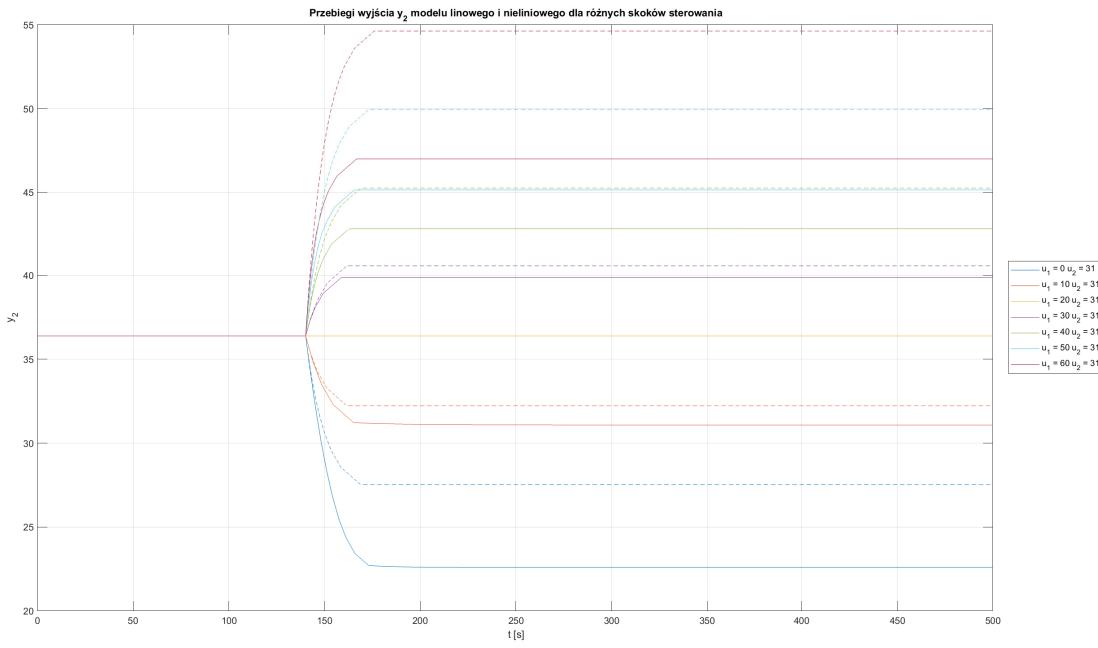
Rysunek 1: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych



Rysunek 2: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych

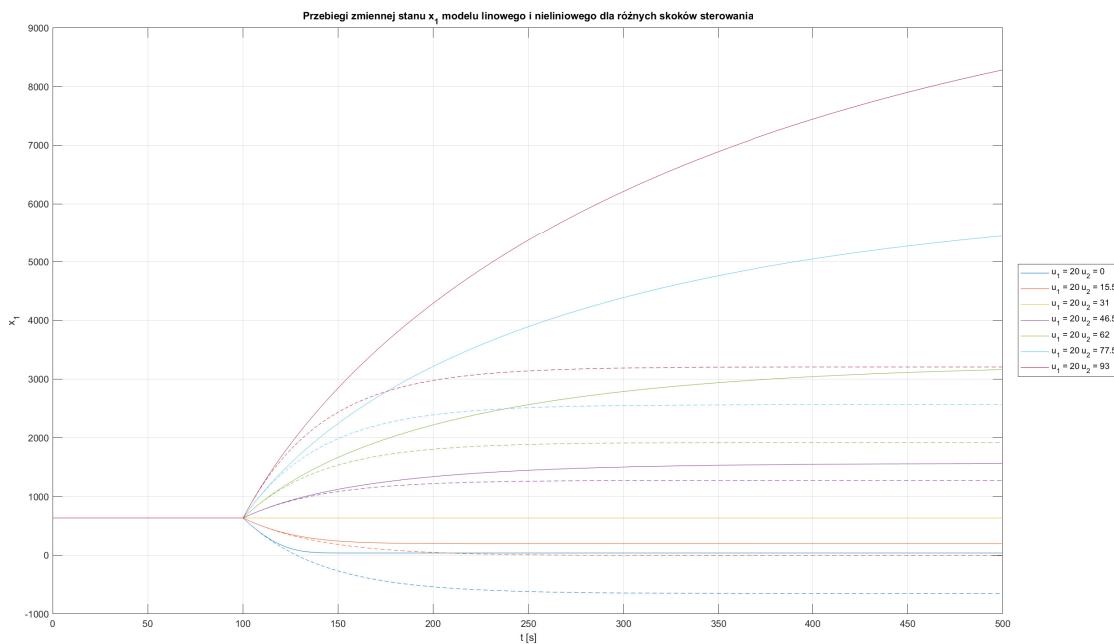


Rysunek 3: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych

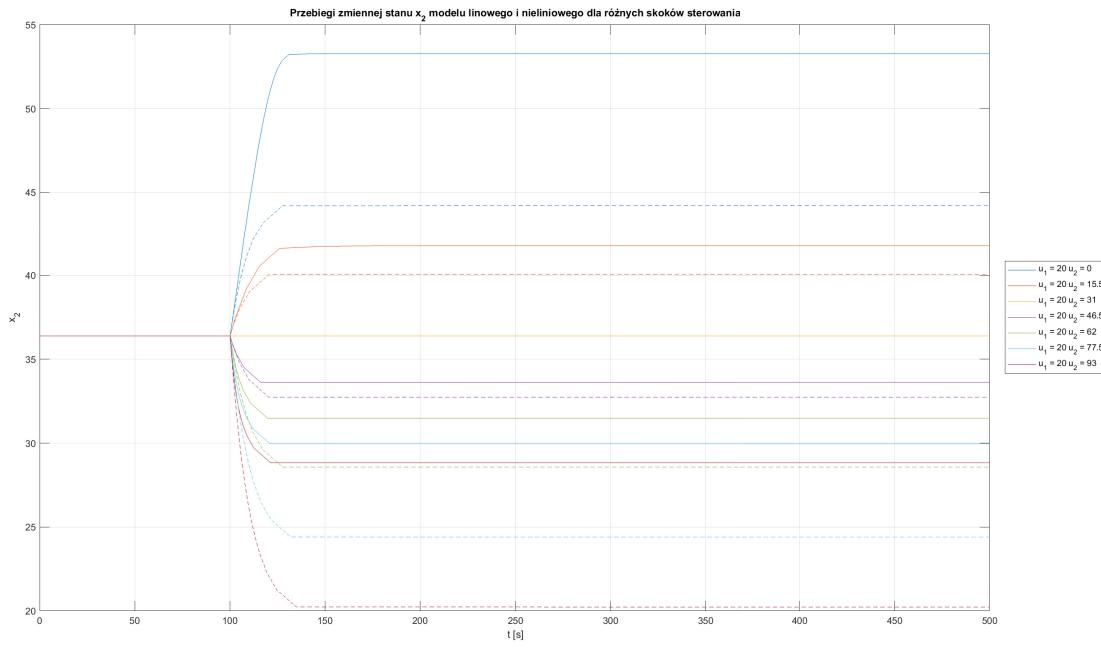


Rysunek 4: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych

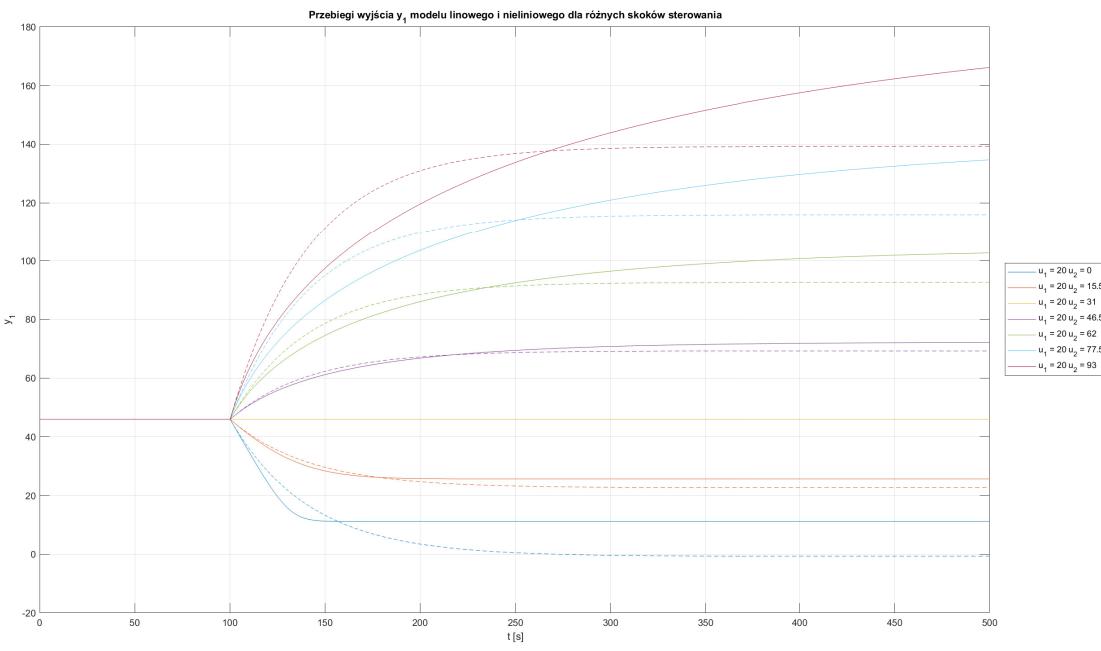
W kolejnym sprawdzano zachowanie układu dla różnych wartości u_2 , resztę pozostawiając bez zmian.



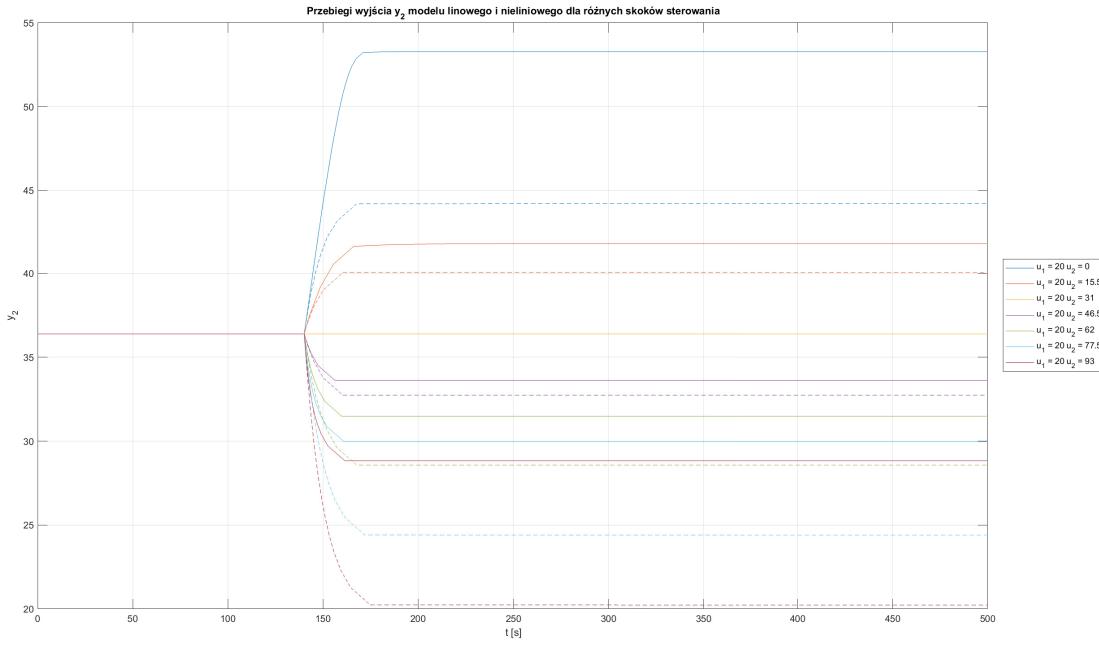
Rysunek 5: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych



Rysunek 6: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych

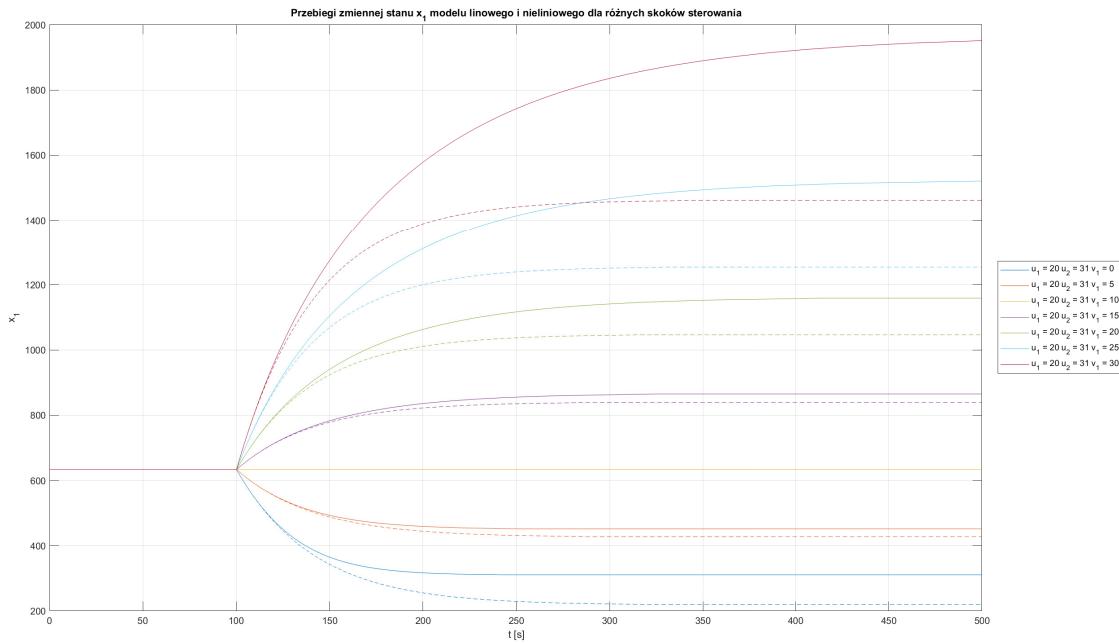


Rysunek 7: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych

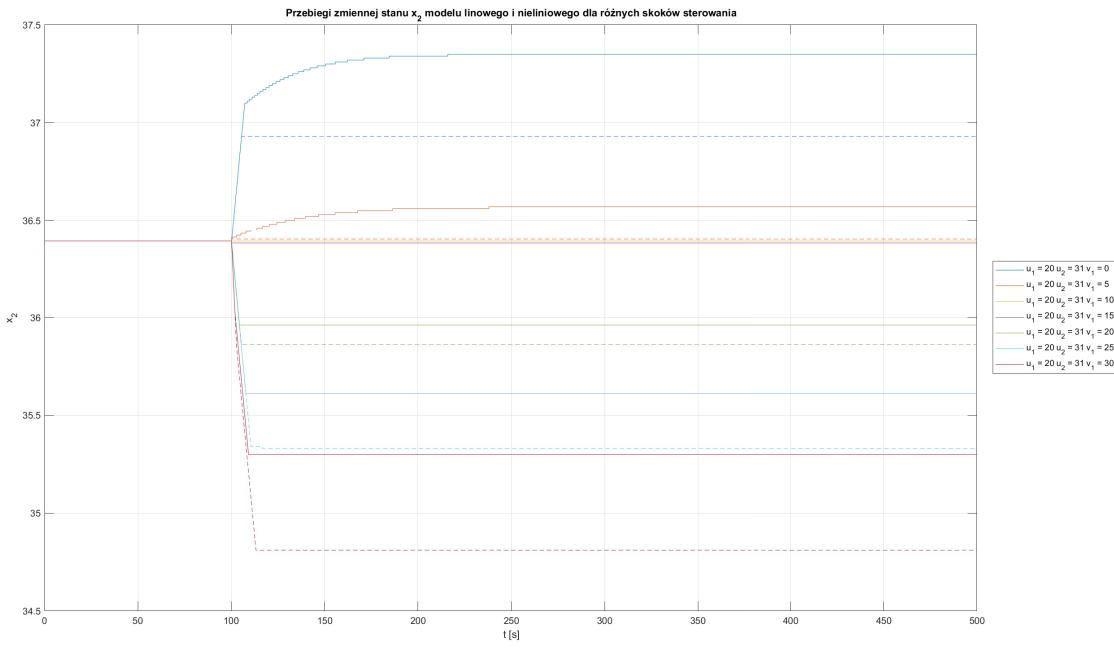


Rysunek 8: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych

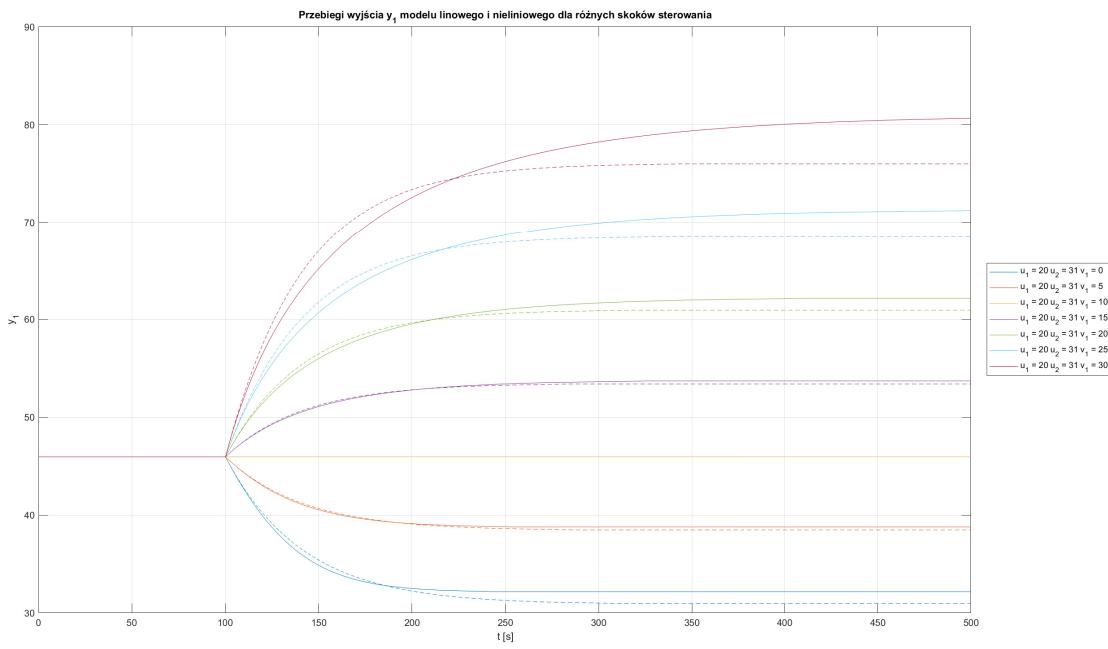
Dalej sprawdzono zachowanie układu przy zmianach wejścia zakłócającego v_1 .



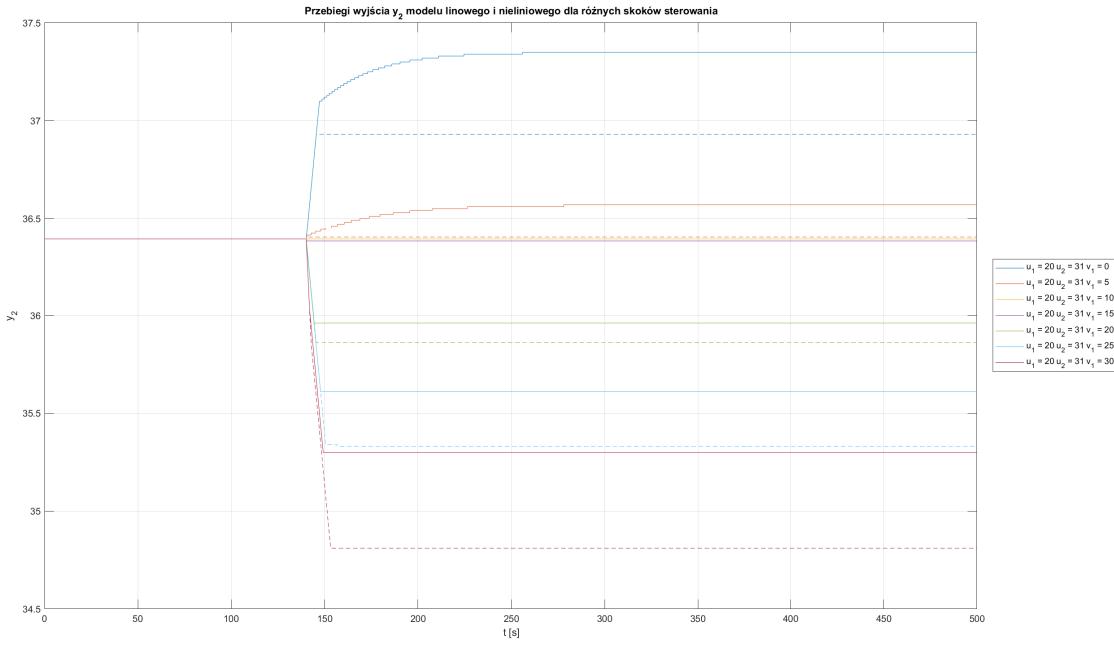
Rysunek 9: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych



Rysunek 10: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych

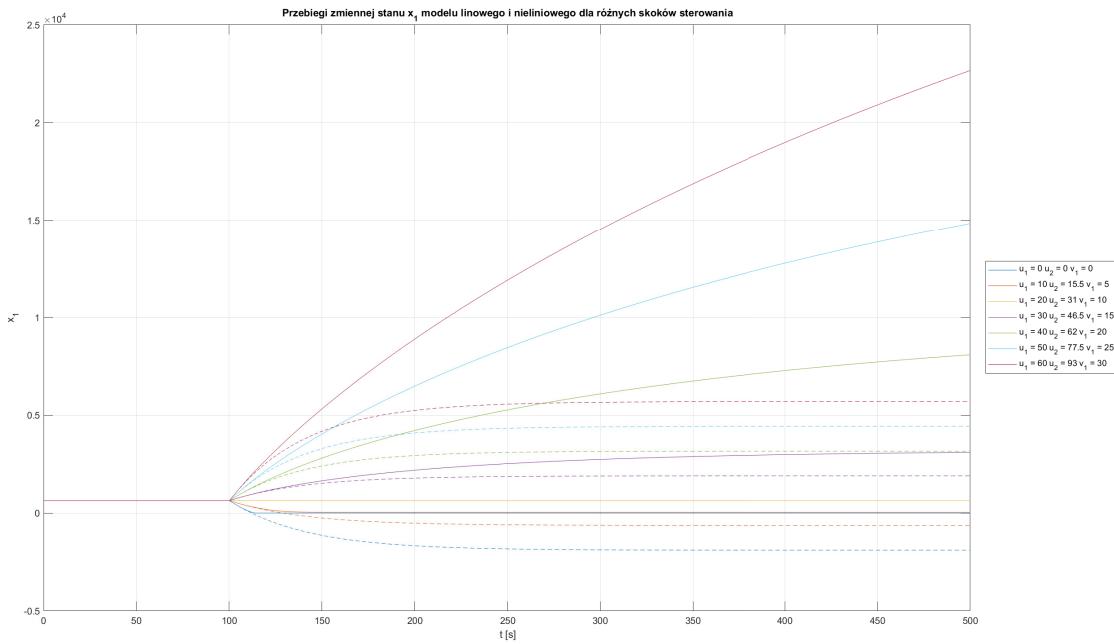


Rysunek 11: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych

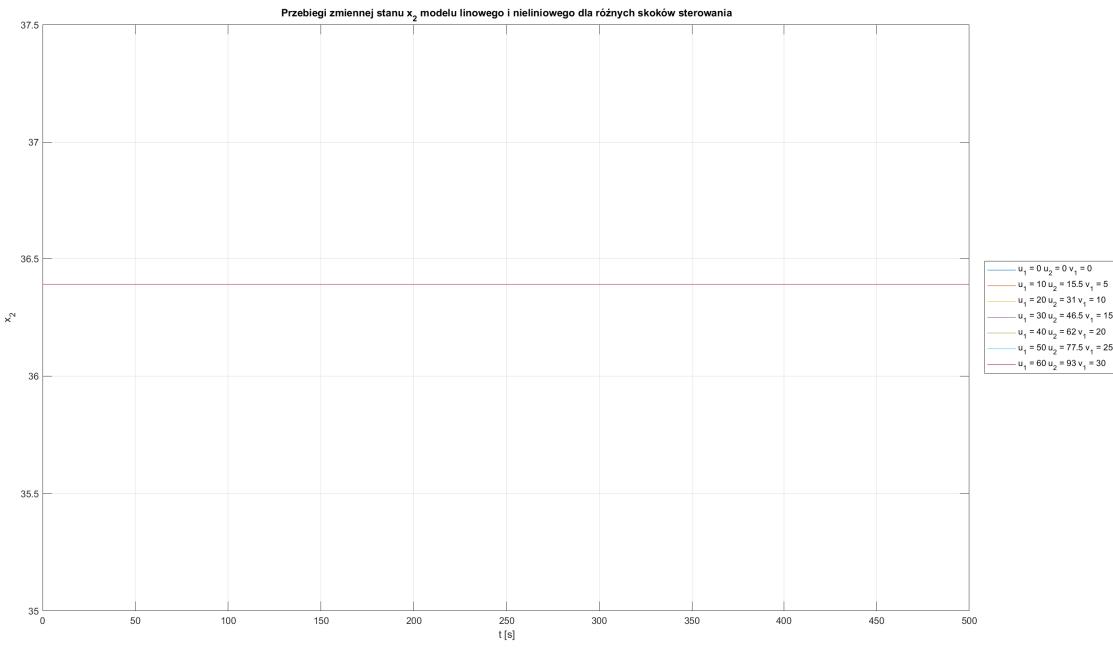


Rysunek 12: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych

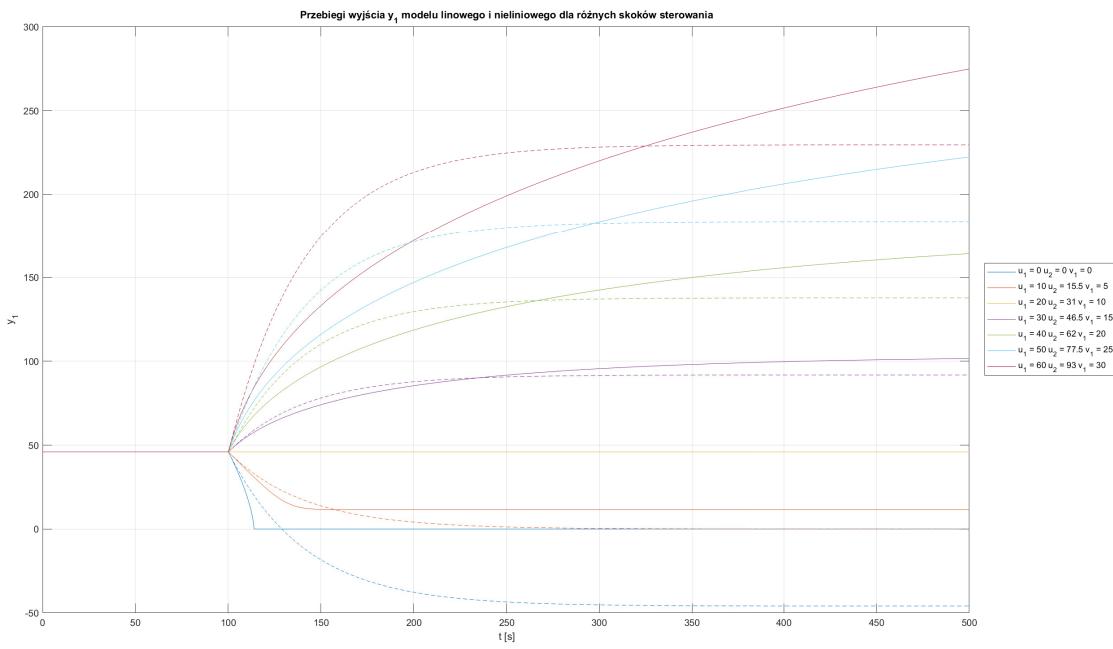
W ostatnim eksperymencie zmieniano wszystkie wejścia naraz.



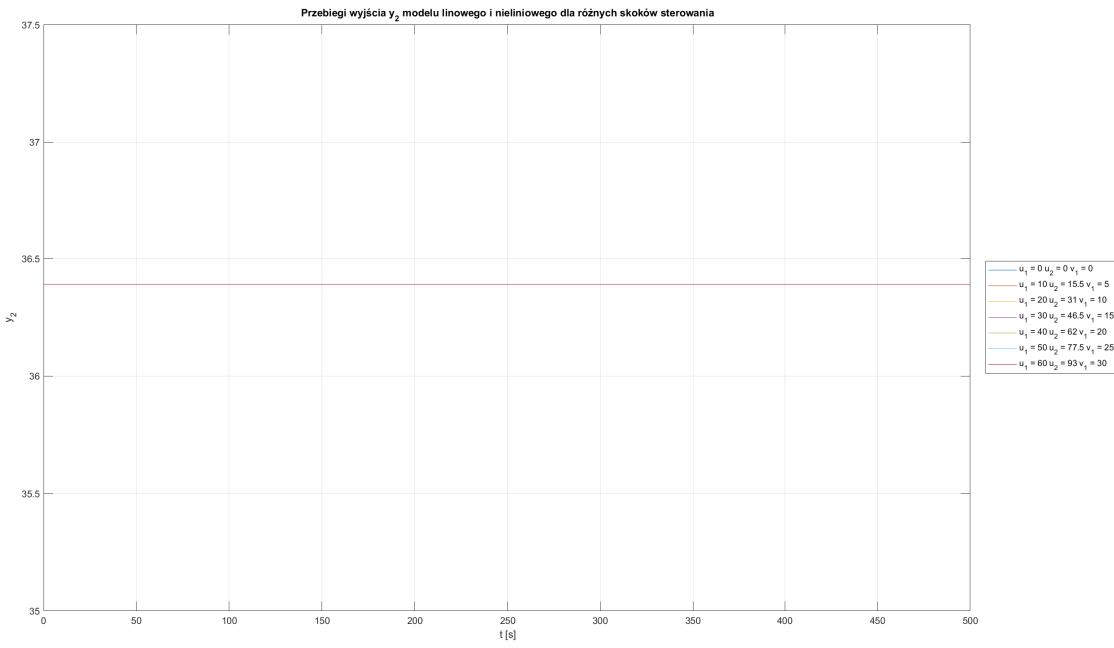
Rysunek 13: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych



Rysunek 14: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych



Rysunek 15: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych



Rysunek 16: Porównanie modeli liniowych i nieliniowych

Wniosek: Wraz z oddaleniem się wejścia oraz zakłócenia od parametrów zadanych przybliżenie modelu modelem liniowym stopniowo traci sens, gdyż wyniki zbyt znaczająco się rozbiegają.

4 Dyskusja na temat jakości przybliżenia liniowego

W przedstawionych w poprzednim podpunkcie wykresach można łatwo zauważyc, że jakość przybliżenia liniowego jest zależna od odległości od punktu pracy. Gdy odległość ta nie jest zbyt duża przybliżenie dostarcza w miarę sensowne rezultaty, mogące mieć późniejsze zastosowania. Jednakże, jeśli zadane wejście oddali się znaczco od punktu pracy wyniki bardzo rozbiegają się od modelu nieliniowego, można stwierdzić, że model liniowy nie nadaje się do ich sensownego przybliżania.

5 Modele dyskretne

5.1 Równania stanu

Na podstawie modelu ciągłego opracowano następujący model dyskretny:

$$x_1(k) = \left[u_1(k-1) + u_2(k-1 - \frac{\tau_c}{T_p}) + v_1(k-1) - \alpha \left(\frac{x_1(k-1)}{C} \right)^{0.25} \right] T_p + x_1(k-1)$$

$$x_2(k) = \left[T_H \cdot u_1(k-1) + T_C \cdot u_2(k-1 - \frac{\tau_c}{T_p}) + T_D \cdot v_1(k-1) + \right.$$

$$\left. - \left(u_1(k-1) + u_2(k-1 - \frac{\tau_c}{T_p}) + v_1(k-1) \right) \cdot x_2(k-1) \right] T_p \cdot x_1^{-1}(k-1) + x_2(k-1)$$

$$y_1(k) = \sqrt{\frac{x_1}{C}}$$

$$y_2(k) = x_2(k-\tau)$$

Dokonano linearyzacji w punkcie pracy $p = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$:

$$x_1(k) = \left[\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{v}_1 - \alpha \left(\frac{\bar{x}_1}{C} \right)^{0.25} \right] T_p + \bar{x}_1 + T_p (u_1(k-1) - \bar{u}_1) + T_p \left(u_2(k-1 - \frac{\tau_c}{T_p}) - \bar{u}_2 \right) +$$

$$+ \left(-\alpha T_p \frac{\bar{x}_1^{0.25}}{4C^{0.25}x_1} + 1 \right) (x_1(k-1) - \bar{x}_1)$$

$$x_2(k) = \left(T_H \bar{u}_1 + T_C \bar{u}_2 + T_D \bar{v}_1 - (\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{v}_1) \bar{x}_2 \right) \bar{x}_1^{-1} T_p + \bar{x}_2 + \frac{T_p(T_H - \bar{x}_2)}{\bar{x}_1} (u_1(k-1) - \bar{u}_1) +$$

$$+ \frac{T_p(T_C - \bar{x}_2)}{\bar{x}_1} \left(u_2(k-1 - \frac{\tau_c}{T_p}) - \bar{u}_2 \right) + \frac{T_p(T_D - \bar{v}_1)}{\bar{v}_1} (v_1(k-1) - \bar{v}_1) +$$

$$- \frac{T_p}{\bar{x}_1^2} (T_H \bar{u}_1 + T_C \bar{u}_2 + T_D \bar{v}_1 - (\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{v}_1) \bar{x}_2) (x_1(k-1) - \bar{x}_1) +$$

$$+ \left(\frac{-T_p}{\bar{x}_1} (\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{v}_1) + 1 \right) (x_2(k-1) - \bar{x}_2)$$

$$y_1(k) = \sqrt{\frac{\bar{x}_1}{C}} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}_1 C}} (x_1(k) - \bar{x}_1)$$

$$y_2(k) = x_2(k-\tau)$$

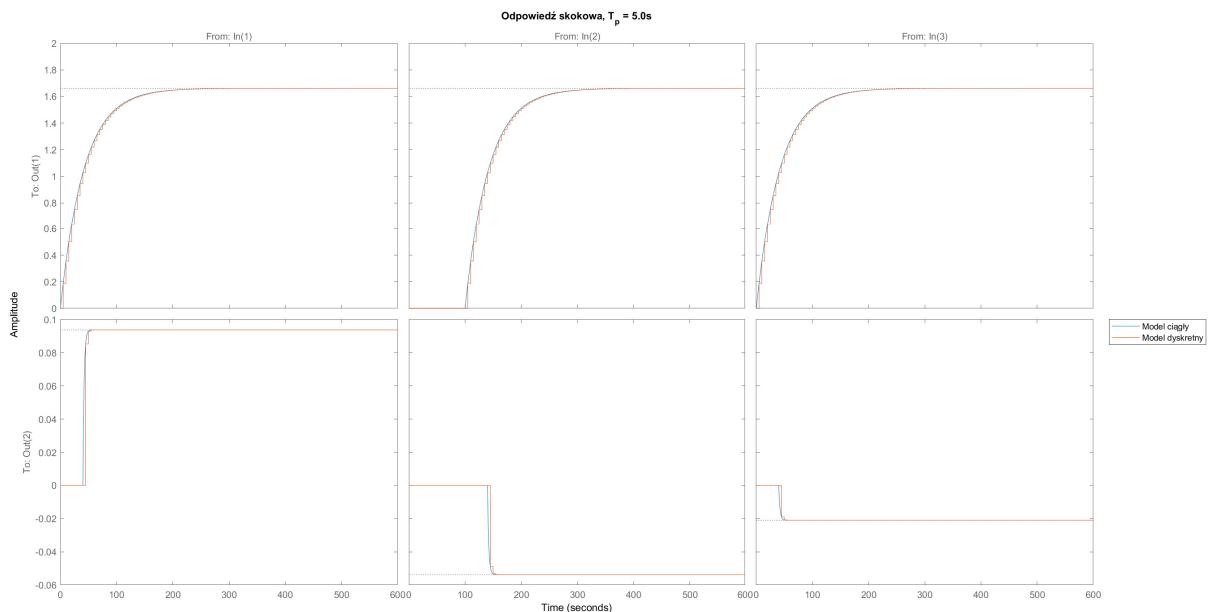
5.2 Transmitancje

Przyjęto czas próbkowania $T_p = 0.1s$, korzystając z uprzednio wyliczonego w Matlabie modelu ciągłego a także polecenia $c2d()$ wyliczono następujące transmitancje:

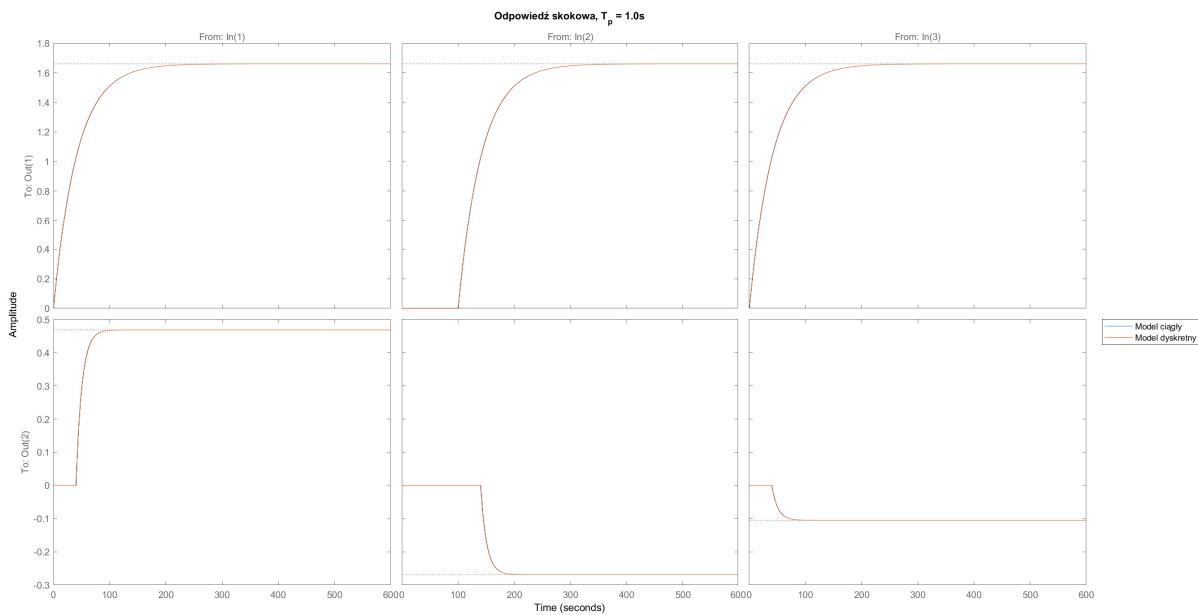
$$\begin{aligned}\frac{U_1}{Y_1} &= \frac{0.003995}{z - 0.9976} \\ \frac{U_1}{Y_2} &= z^{-400} \cdot \frac{0.004516z - 0.004506}{z^2 - 1.997z + 0.9966} \\ \frac{U_2}{Y_1} &= z^{-1000} \frac{0.003995}{z - 0.9976} \\ \frac{U_2}{Y_2} &= z^{-1400} \cdot \frac{-0.002587z + 0.002581}{z^2 - 1.997z + 0.9966} \\ \frac{V_1}{Y_1} &= \frac{0.003995}{z - 0.9976} \\ \frac{V_1}{Y_2} &= z^{-400} \cdot \frac{-0.001009z + 0.001006}{z^2 - 1.997z + 0.9966}\end{aligned}$$

5.3 Porównanie modelu ciągłego z dyskretnym

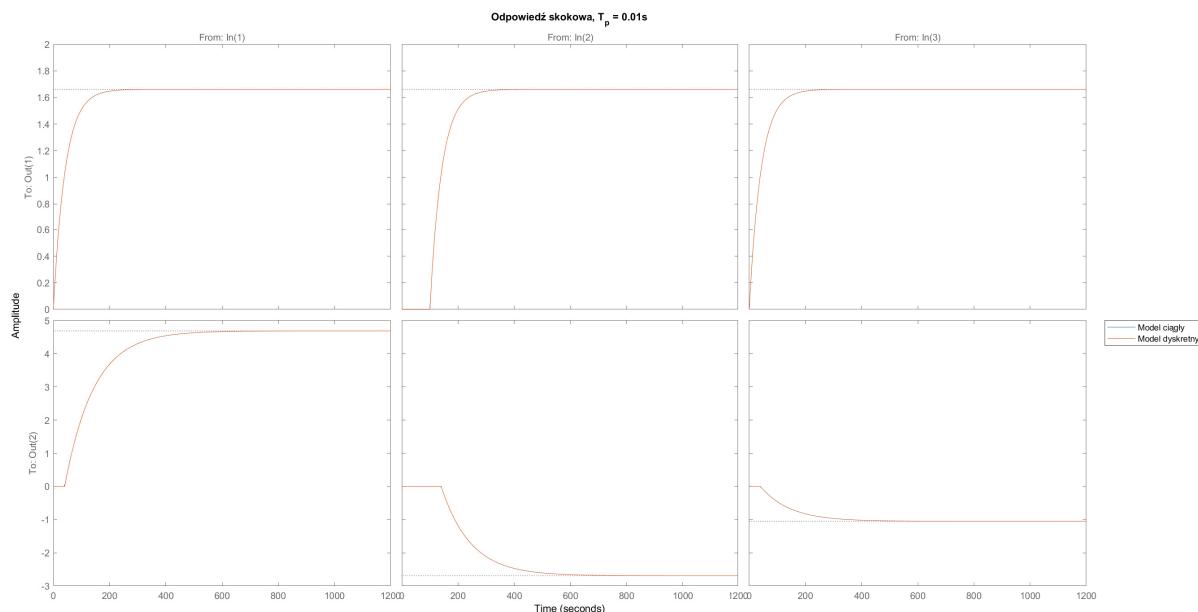
Zarejestrowano odpowiedzi skokowe modelu ciągłego i modeli dyskretnych o różnym czasie próbkowania. Wyniki tych doświadczeń przedstawiono na poniższych wykresach.



Rysunek 17: Odpowiedzi skokowe modeli



Rysunek 18: Odpowiedzi skokowe modeli



Rysunek 19: Odpowiedzi skokowe modeli

Z wykresów wyraźnie wynika, że jest konieczny odpowiedni mały krok dyskretyzacji ze względu na szybkie tempo zmian w procesie, stąd też zdecydowano się na krok dyskretyzacji $T_p = 0.1s$.