Вычисление неопределенных интегралов методом введения новой переменной.

Определение. Дифференцируемая функция F(x) называется первообразной функции f(x) на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка справедливо равенство: F'(x)=f(x).

Теорема. Если функция F(x) является первообразной функции f(x) на некотором промежутке, то множество всех первообразных этой функции имеет вид F(x)+C, где C – любое действительное число.

Определение. Совокупность всех первообразных F(x)+C функции f(x) на рассматриваемом промежутке называется неопределенным интегралом и обозначается символом $\int f(x)dx$, где f(x) – подынтегральная функция, f(x)dx - подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Таким образом, если F(x) – какая-нибудь первообразная функции f(x) на некотором промежутке, то $\int f(x)dx$ = F(x)+C, где C – любое действительное число.

Замечание. Наличие постоянной C делает задачу нахождения функции по ее производной не вполне определенной: отсюда происходит и само название «неопределенный интеграл».

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int mf(x)dx = m\int f(x)dx$, m – любое действительное число, не равное 0.
2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
3. $\int dF(x) = F(x) + C$

Во многих случаях для вычисления интеграла требуется введение новой переменной интегрирования, которое позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, т.е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется *методом подстановки* или *методом замены переменной*.

Формула замены переменной имеет вид:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$
.

Примеры

1. $\int \cos 2x\,dx$;

$$\int \cos 2x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x \\ du = (2x)'\,dx = 2dx \\ dx = \dfrac{du}{2} \end{array} \right| = \int \cos u \cdot \frac{du}{2} \overset{(4)}{=} \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u + c = \frac{1}{2}\sin 2x + c.$$

2. $\int e^{-x}\,dx$;

$$\int e^{-x}\,dx = \left| \begin{array}{l} u = -x \\ du = -1\,dx \\ dx = -du \end{array} \right| = \int e^{u}(-du) = -\int e^{u}\,du = -e^{u} + c = -e^{-x} + c$$

.

3. $\int \left(x^2+5\right)^7 x\,dx$;

$$\int \left(x^2+5\right)^7 x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2+5 \\ du = 2x\,dx \\ x\,dx = \dfrac{du}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int u^7\,du = \frac{1}{2}\frac{u^8}{2} + c = \frac{\left(x^2+5\right)^8}{16} + c$$

.

4. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \dfrac{dx}{x} \end{array} \right| = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

.

5. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \dfrac{dx}{x} \end{array} \right| = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

.

Алгоритм интегрирования методом замены переменной:

1. Определить, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл.
2. Определить, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записать эту замену.

3. Найти дифференциалы обеих частей замены и выразить дифференциал старой переменной через дифференциал новой переменной.
4. Произвести замену под интегралом.
5. Найти полученный интеграл по таблице.
6. В результате произвести обратную замену, т.е. перейти к старой переменной. Результат полезно проверить дифференцированием.

В простых случаях введение новой переменной u рекомендуется выполнять применяя следующие преобразования дифференциала dx:

$dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$; $2x\, dx=(dx^2)$;

$\cos x\, dx=d(\sin x)$; $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$и. т. п.

<u>Найти интегралы:</u>

1. . $\int e^{-3x}dx$. 2. $\int\sqrt{4x-1}\,dx$. 3. $\int(3-2x)^4dx$. 4. $\int\sqrt[3]{5-6x}\,dx$.

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$. 6. $\int\sin(\pi-2x)dx$. 7. $\int\frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx$. 8. $\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$.

Указание. Если числитель подынтегральный дроби есть производная от знаменателя, то интеграл равен <u>логарифму</u> знаменателя.

9. $\int\frac{dx}{1-10x}$. 10. $\int\frac{e^{2x}dx}{1-3e^{2x}}$. 11. $\int ctg\, x\, dx$. 12. $\int tg\, x\, dx$.

13. $\int\frac{\cos 2x}{\sin x \cos x}dx$. 14. $\int\frac{\sin x\, dx}{1+3\cos x}$. 15. $\int\frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$. 16. $\int\frac{dx}{x(1+Inx)}$.

17. $\int\sin^2x \cos x\, dx$. 18. $\int\cos^3x \sin x\, dx$.

Указание. Примеры можно решить подстановкой sinx=u или непосредственно, заменив cosx dx через d(sinx).

19. $\int\frac{\cos x\, dx}{\sin^4x}$ 20. $\int\frac{\sin x dx}{\cos^3x}$ 21. $\int\frac{2\cos x}{4+\sin^2x}dx$ 22. $\int \sin x \cos x\, dx$

23. $\int e^{\cos x}\sin x\, dx$ 24. $\int e^{x^3}x^2dx$ 25. $\int(7-2x)^3dx$ 26. $\int\cos^3x dx$

27. $\int(1+x^5)^7x^4dx$ 28. $\int x^2\cos(4-x^3)dx$ 29. $\int\sqrt[3]{(3x+1)^2}dx$

30. $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ 31. $\int\sqrt{2x^2+1}dx$ 32 $\int\sin 3x dx$

33. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ 34. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^3-1)^3}}$ 35. $\int\frac{xdx}{x^2+1}$

Оформить решение примеров в тетради.