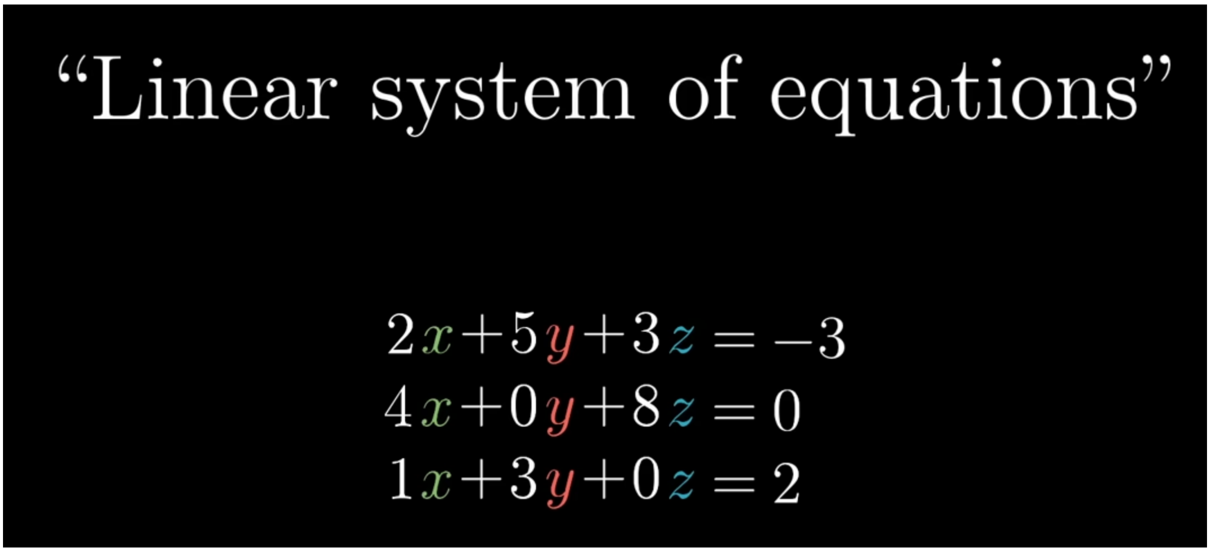
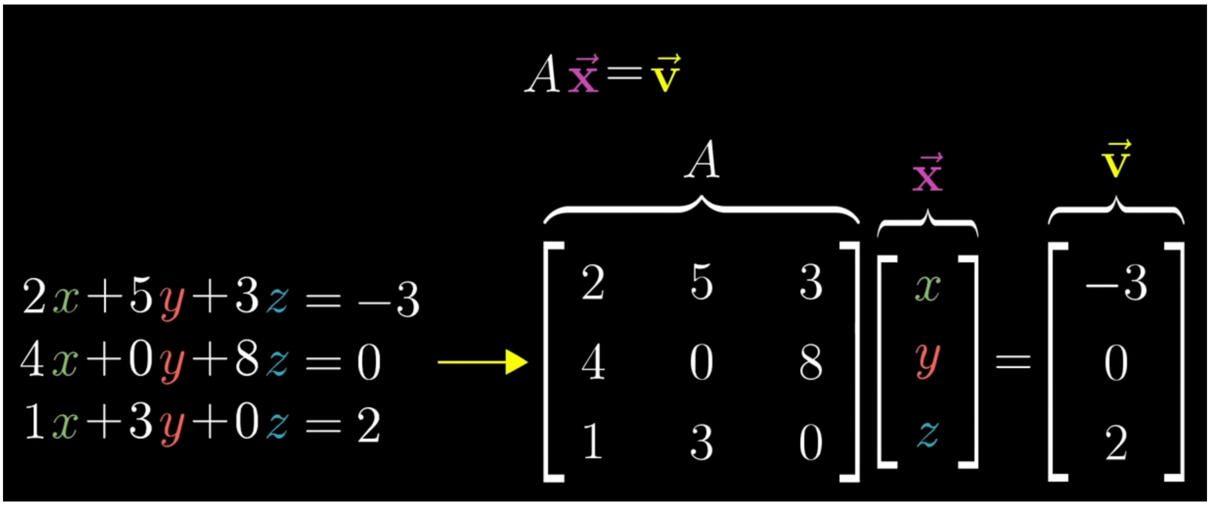
Inverse Matrix, Column Space and Null Space

Linear System of Equation



각 방정식은 변수를 스케일링 하고 더하는 것외에 다른 연산은 없다.
또한 모든 변수는 좌항에 있고 상수는 우항에 위치한다.



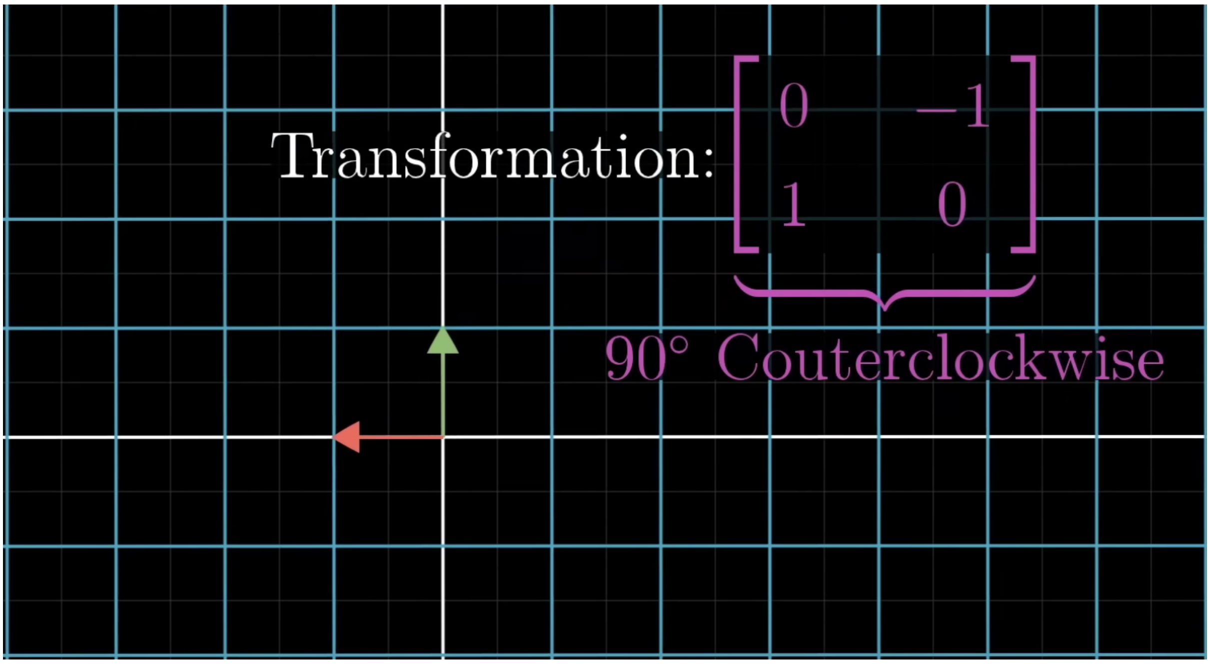
그리고 위 방정식은 상수계수만 모은 행렬(coefficients), 변수만 모은 벡터, 상수항으로 벡타 방정식으로 나타낼 수 있다. 이는 Ax=v 라는 방정식으로 나타낼 수 있는데, 이를 해석하면 A 라는 선형 변환을 거친 후 v 라는 벡터가 되는 x를 찾는 것을 의미한다. 즉 공간을 변형시켜서 x 벡터가 어디로 이동(v)하는 지만 찾으면 된다.

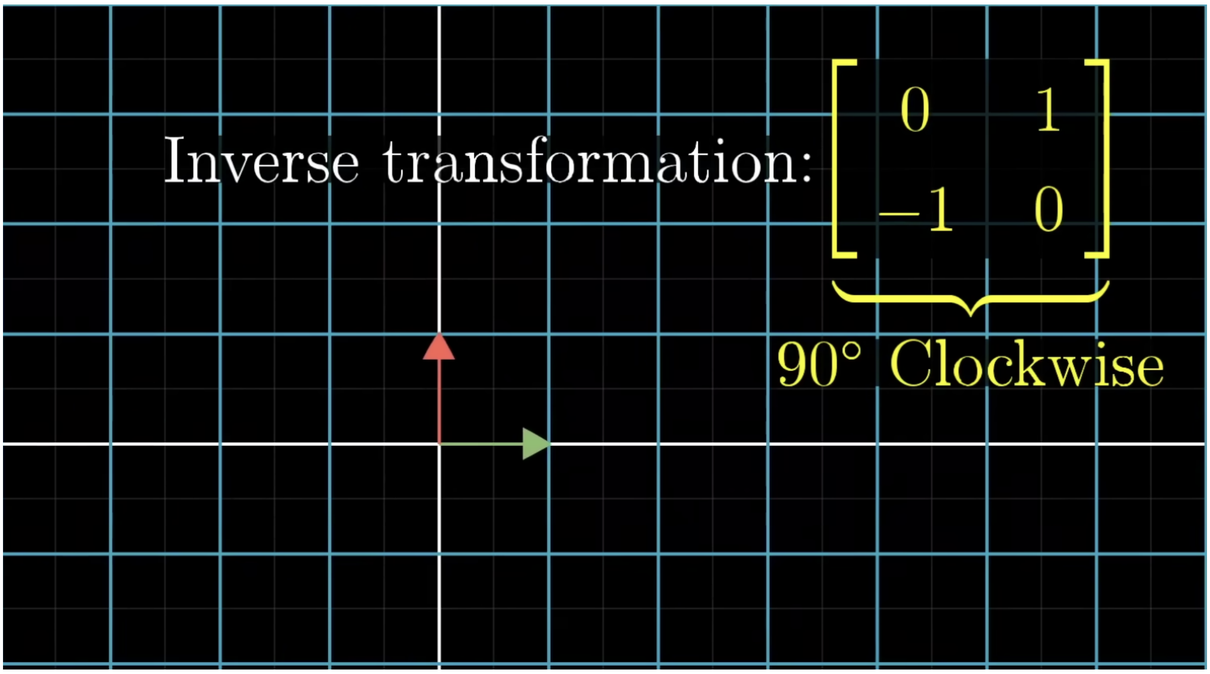
방정식 계산

선형 변환(linear transformation)이 벡터를 더 낮은 차원으로 (선, 점) 축소 시키는지 확인해야 한다. 즉 determinant가 0 인지 아닌지를 확인하는 것이 중요하다.

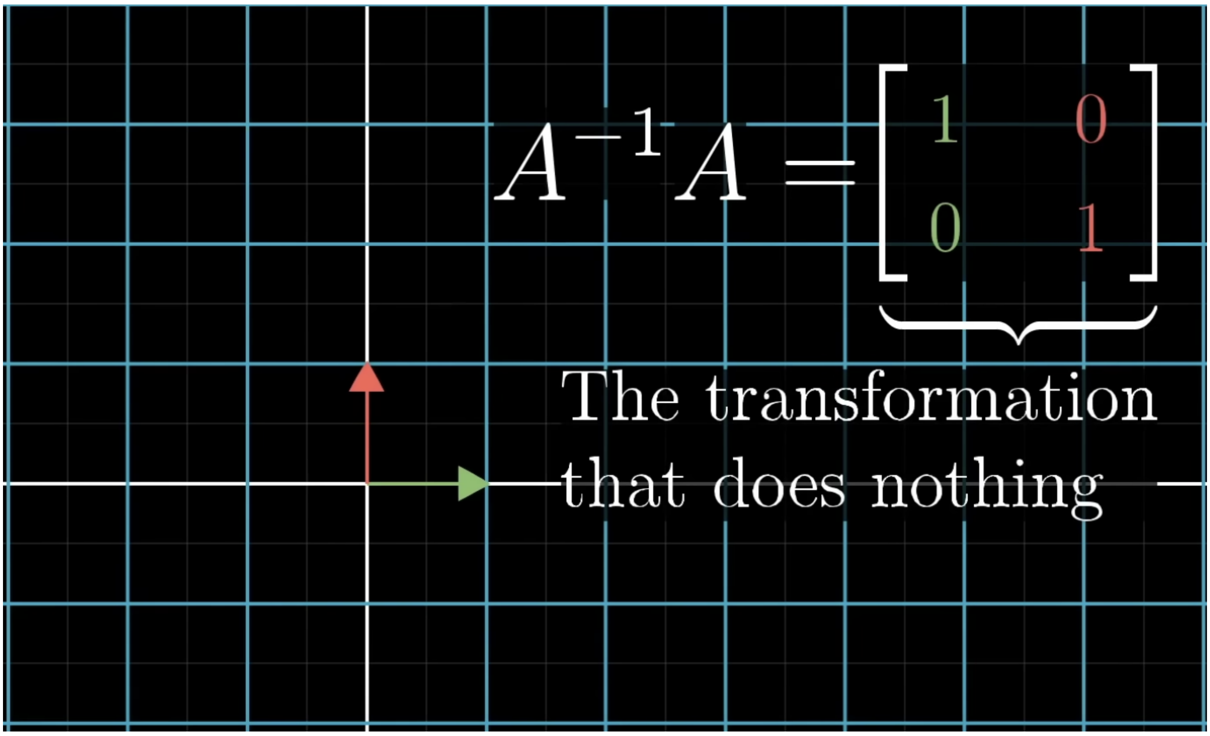
det(A) ≠ 0 (inverse matrix)

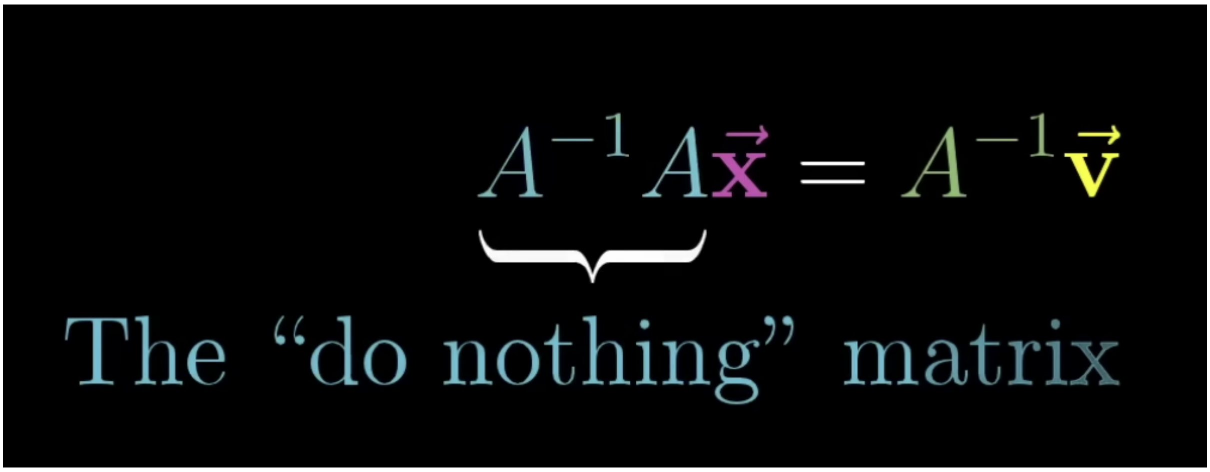
이 경우에는 특정 벡터 v 로 변할 수 있는 벡터는 항상 하나만 존재 한다.



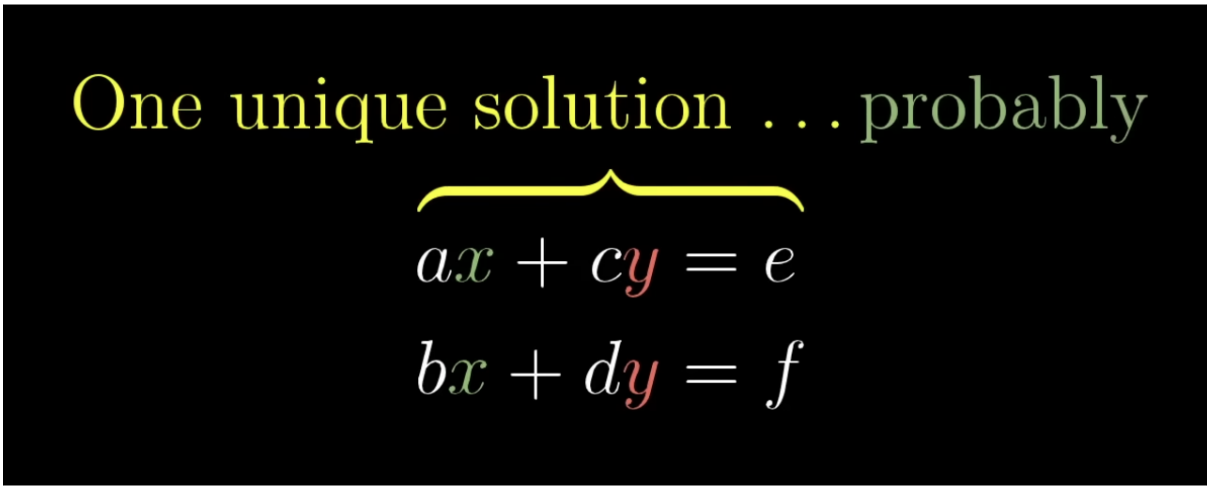


이 경우 역행렬을 사용하는데, 역행렬은 원래 행렬의 역의 변환을 한다. 만약 A가 오른쪽으로 sheer하는 행렬이면, A-1 는 왼쪽으로 sheer 하는 행렬일 것이다.

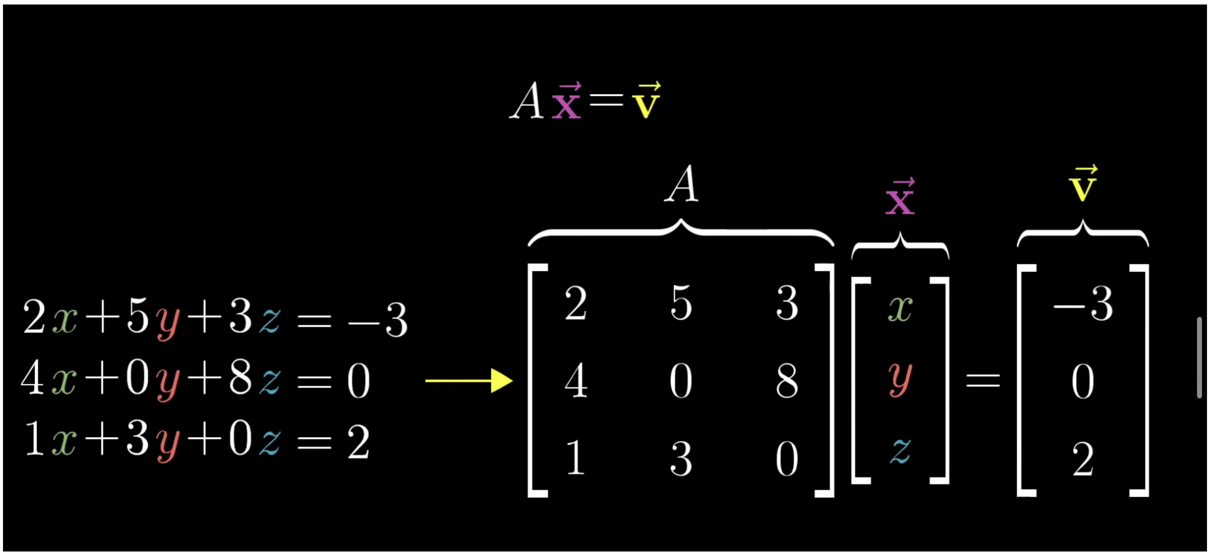




역행렬의 속성은 원 행렬을 적용 후 적용하면 다시 원점으로 돌아온다는 것이다.
이렇게 A * A-1 은 아무것도 하지 않는 행렬과 같다. 이는 항등 변환 (identity transformation)이라고 한다. 즉 i-hat, j-hat 이 움직이지 않고 원래 자리에 있는 것이다.
[1,0][0,1]



det(A) ≠ 0 인 경우는 미지수 2개를 가진 2개의 방정식과 같은 문제이다.

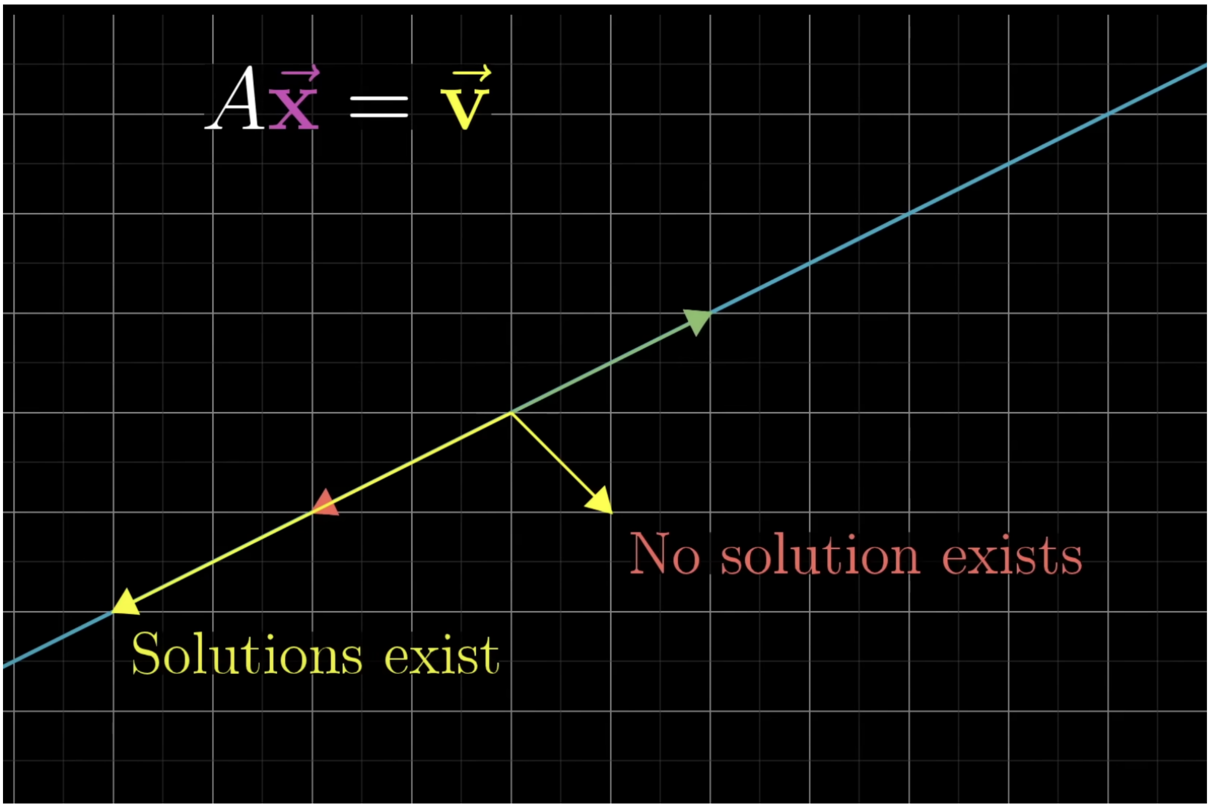


3차원일 경우도 같다. 미지수3개 + 방정식3개 로 벡터 v가 되는벡터 x를 찾는 것이다.

변환 A가 차원을 축소시키지 않는 이상, 즉 det(A) ≠ 0 인 이상, 역행렬 A-1는 무조건 존재하는 것이다.

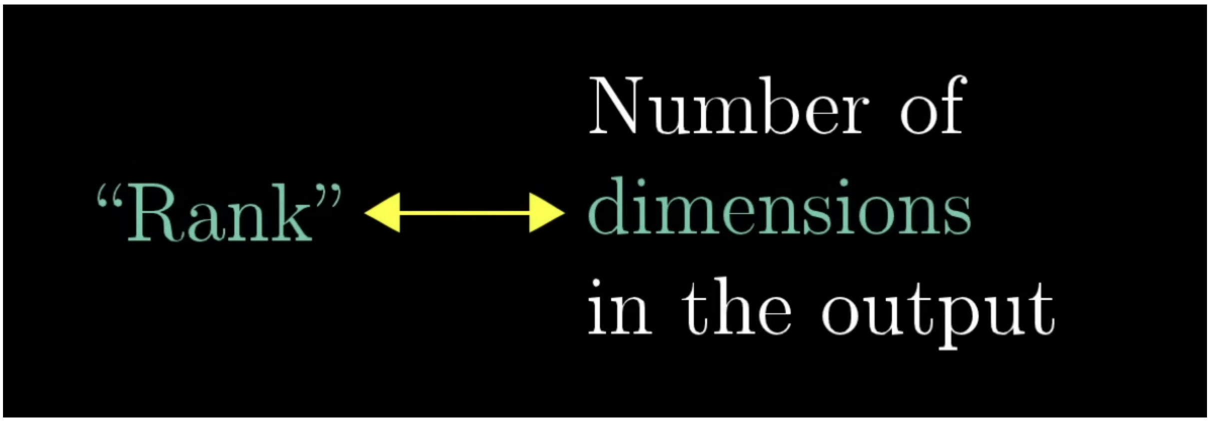
det = 0

determinant가 0인 경우 행렬의 변환은 차원을 축소한다. 2차원이든 3차원이든 det=0인 경우에는 모든 지역의 부피를 영부피로 만들기 때문에 역행렬을 나타내는 변환을 만들 수 없으므로 역행렬이 존재 하지 않는다.

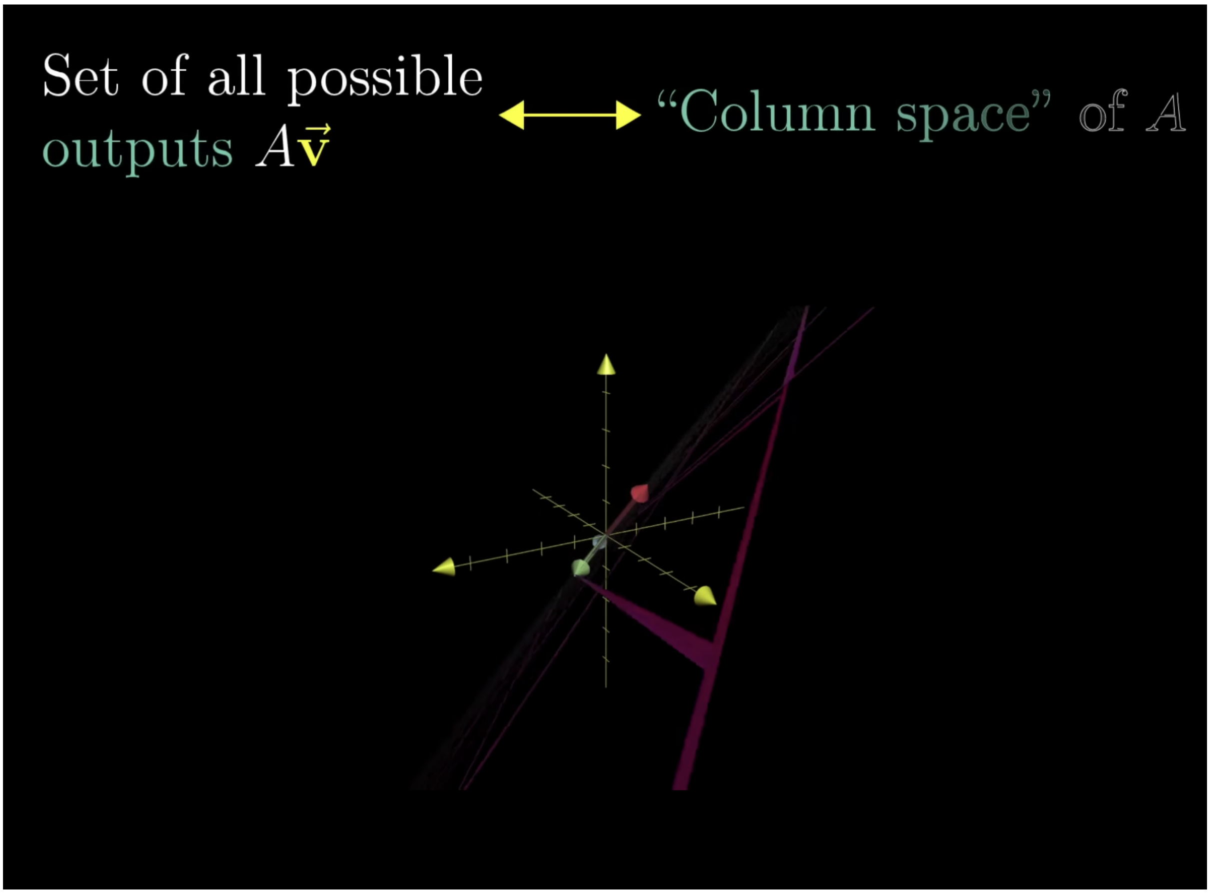


다만 역행렬이 없어도 해가 존재하는 경우가 있는데, 축소된 차원이 선일 때 벡터가 해당 선 위에 존재하는 경우이다.

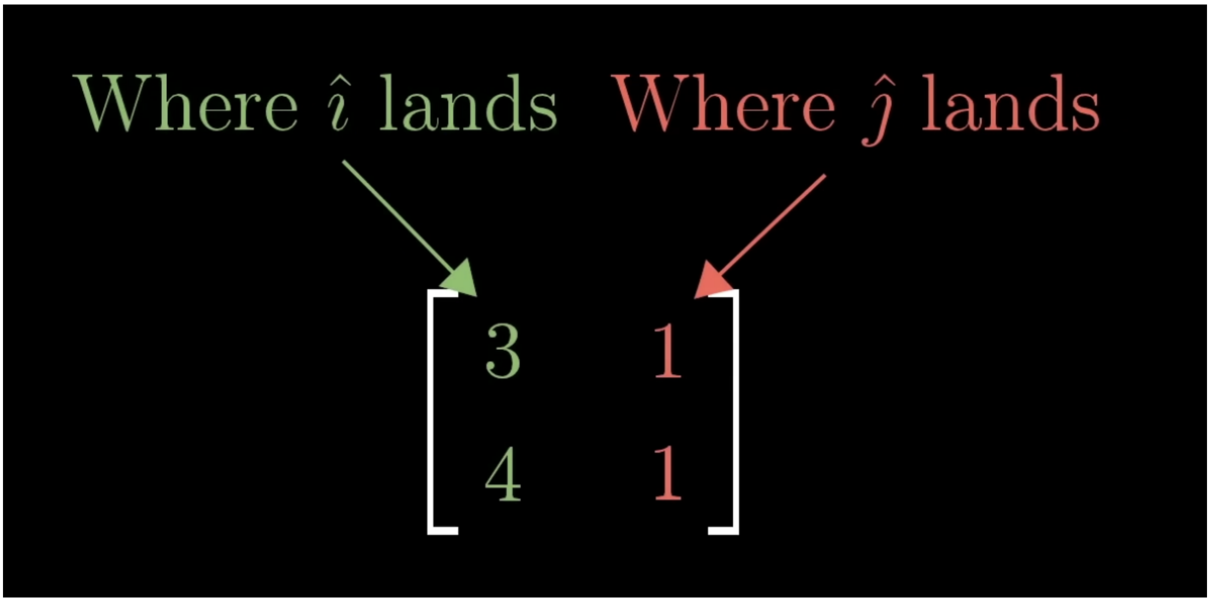
Rank & Column Space & Null Space

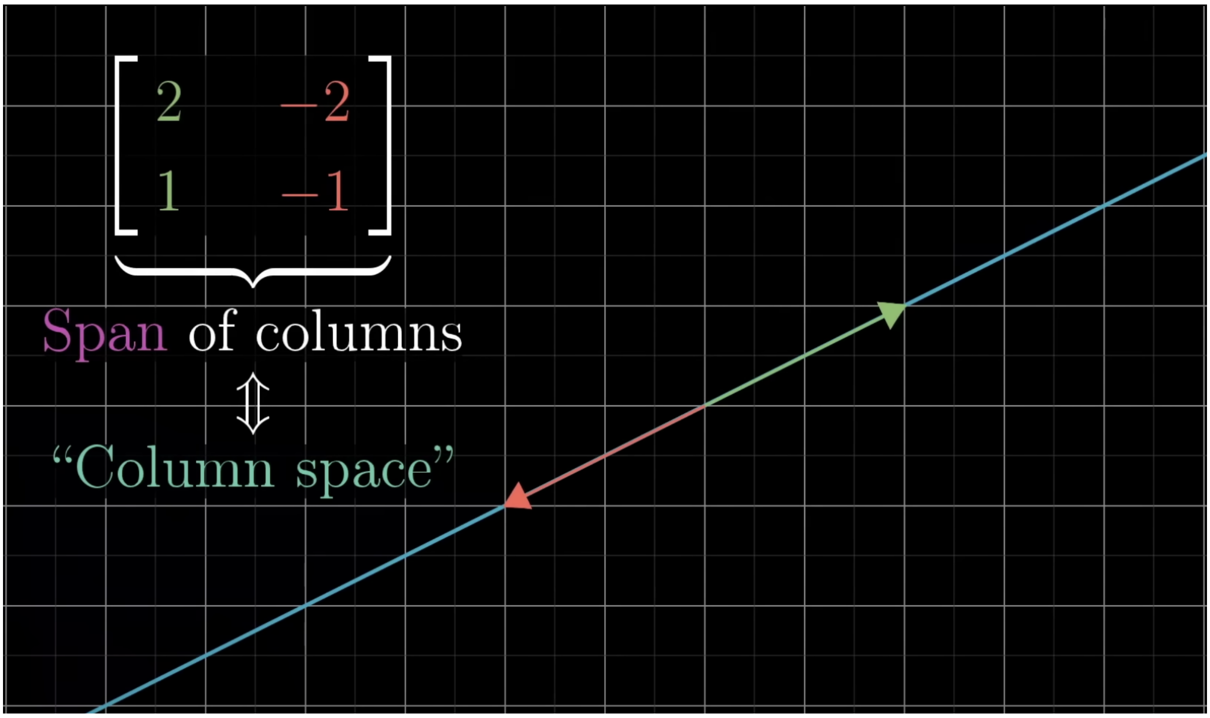


랭크는 변환한 결과의 차원의 수를 의미한다. 즉 변환 한 결과가 선이라면 rank=1, 2차원이라면 rank=2로 표현할 수 있다.



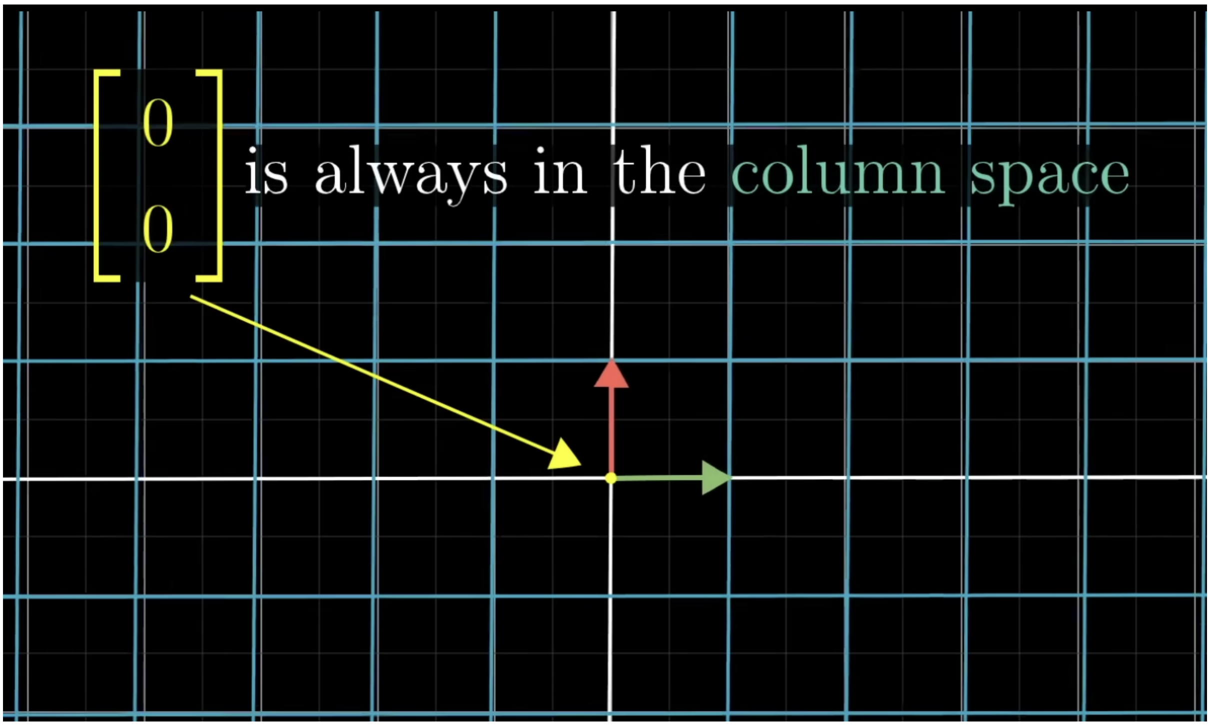
행렬 A의 모든 가능한 결과(선, 점, 평면, 3차원..)를 열 공간이라고 부른다. 따라서 행렬이 변환 이후 차원이 축소된다면 해가 존재하지 않을 것이다.



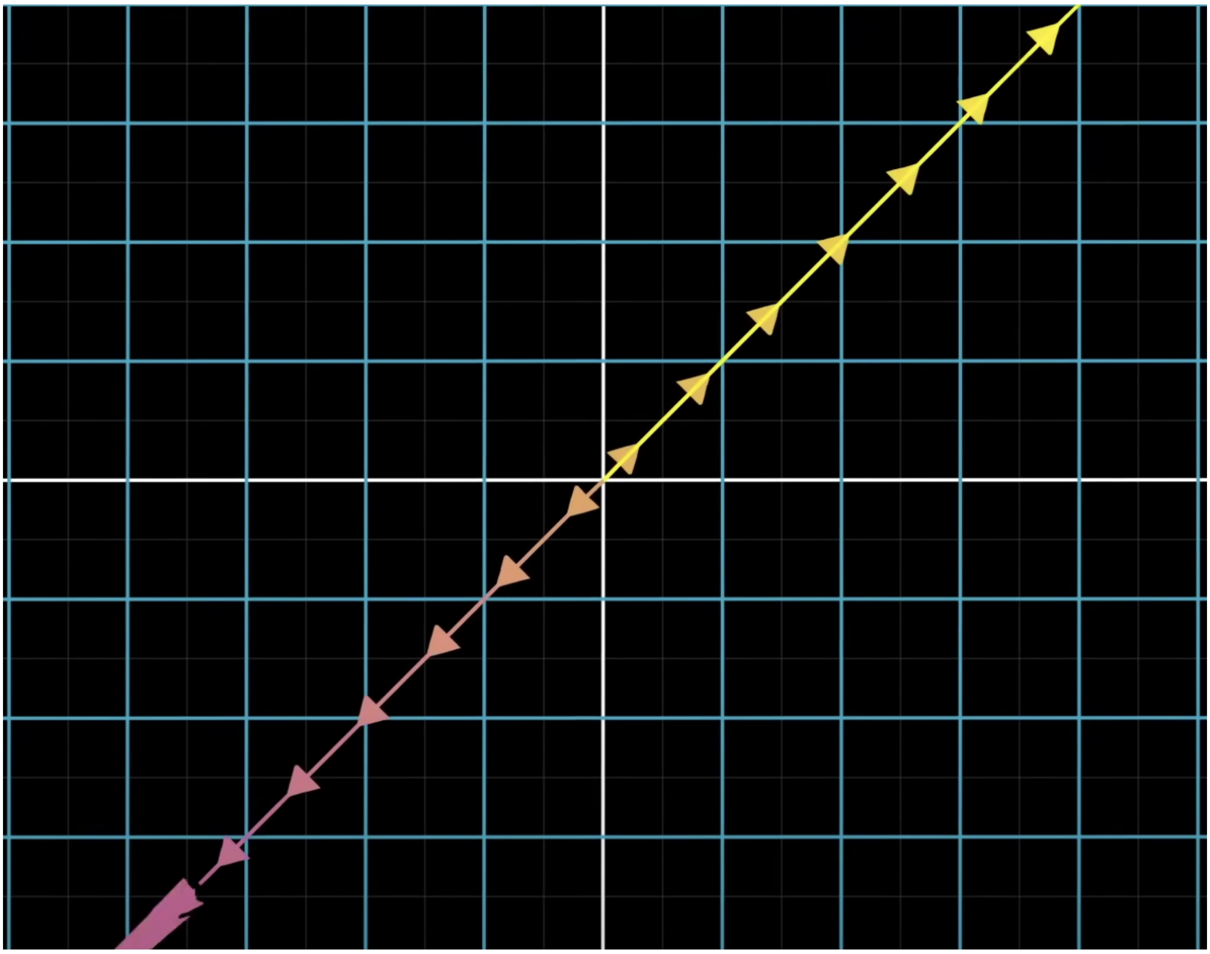


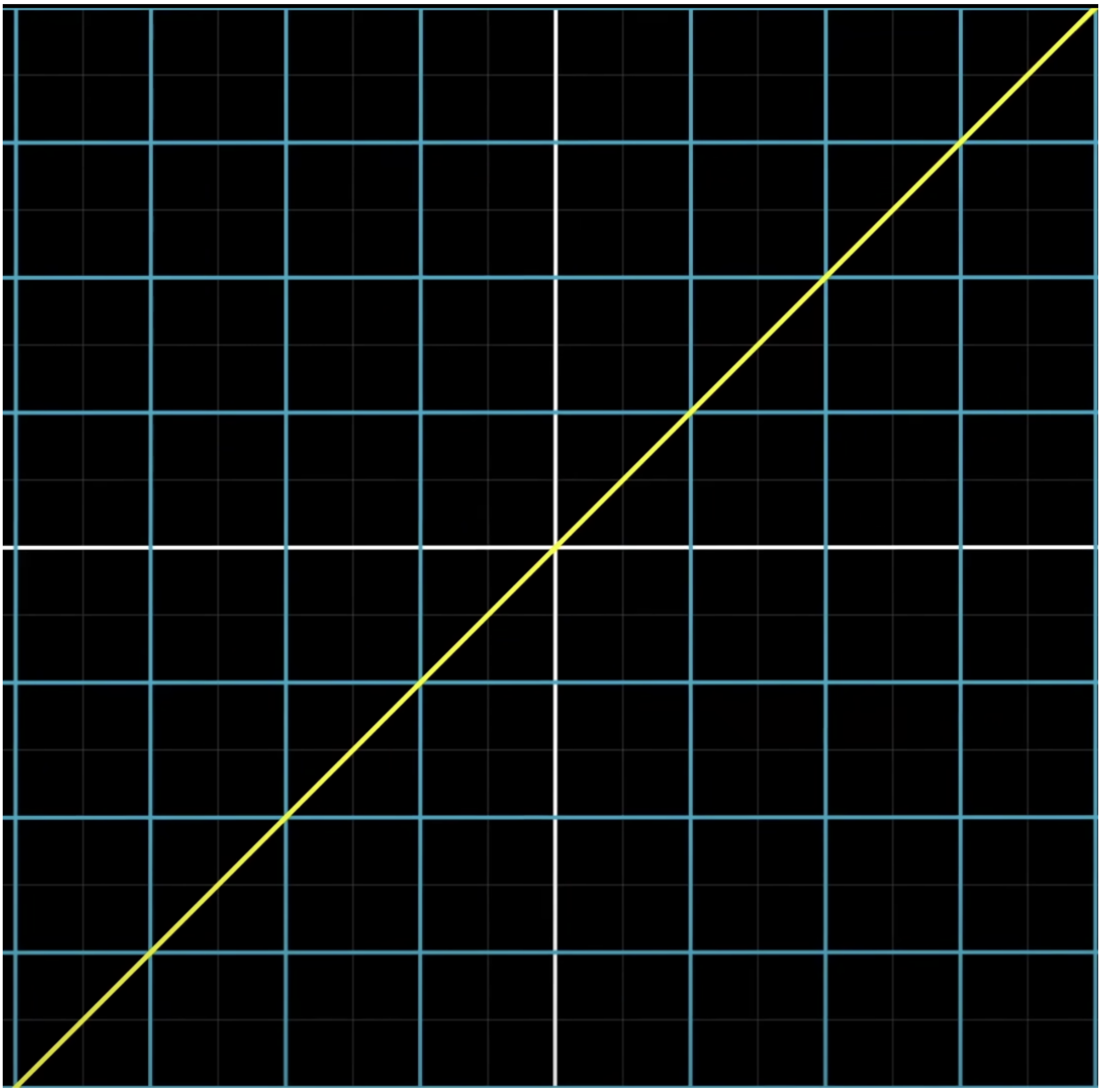
열은 행렬의 기저 벡터 쌍들을 의미하는데, 따라서 열 공간은 행렬의 열(기저 벡터)들의 span(확장공간) 이라고 할 수 있다. (1차원 으로 축소 후 벡터가 선 위에 존재하는 경우 제외)

rank도 다시 풀어서 보면 '열 공간의 차원 수' 라고 정의 할 수 있다.이 열 공간의 차원 수인 rank가 가장 높을 수 있는 만큼 높다면, 즉 열의 갯수와 같다면, full rank라고 부른다.



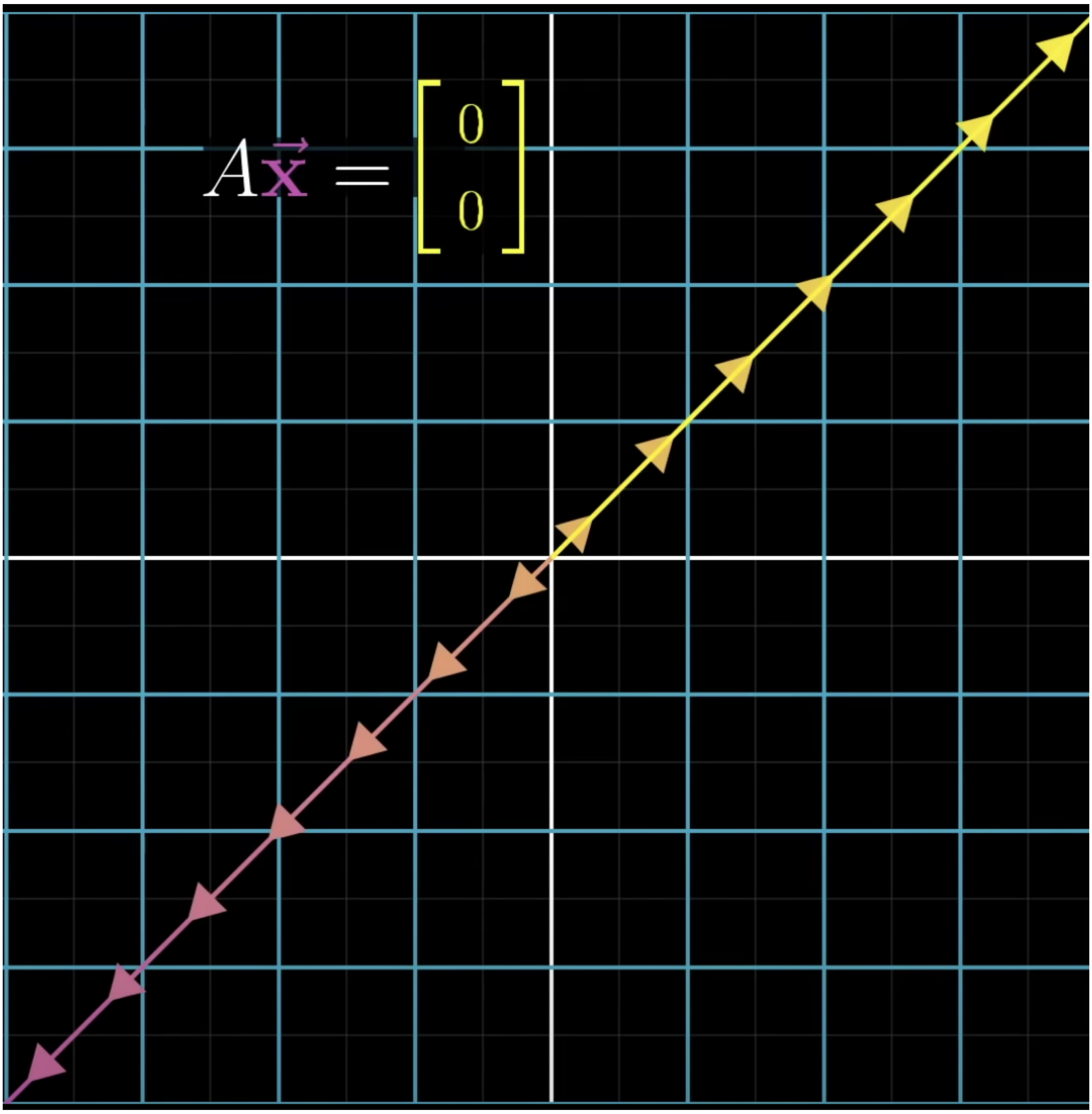
영 벡터(zero vector)는 어느 열 공간에든 존재한다. 선형 변환에서 원점은 언제나 고정되어야 하기 때문이다.





full rank인 변환에서 원점으로 벽하는 벡터는 영벡터 뿐이다. 하지만 full rank가 아니라면 수 많은 벡터가 제로 벡터가 될 수 있다. 가령 위와 같이 2차원 행렬이 1차원 선으로 축소 될 경우 수 많은 벡터가 원점으로 축소 될 수 있다. 3차원의 경우 1차원 선으로 축소된다면 한 평면의 모든 벡터가 원점으로 축소된다.

이렇게 원점으로 이동하는 벡터들의 집합을 행렬의 null space, kernel 이라고 부른다.



벡터 v가 영 벡터이면 null space(영 공간)의 모든 것이 해가 될 수 있다.