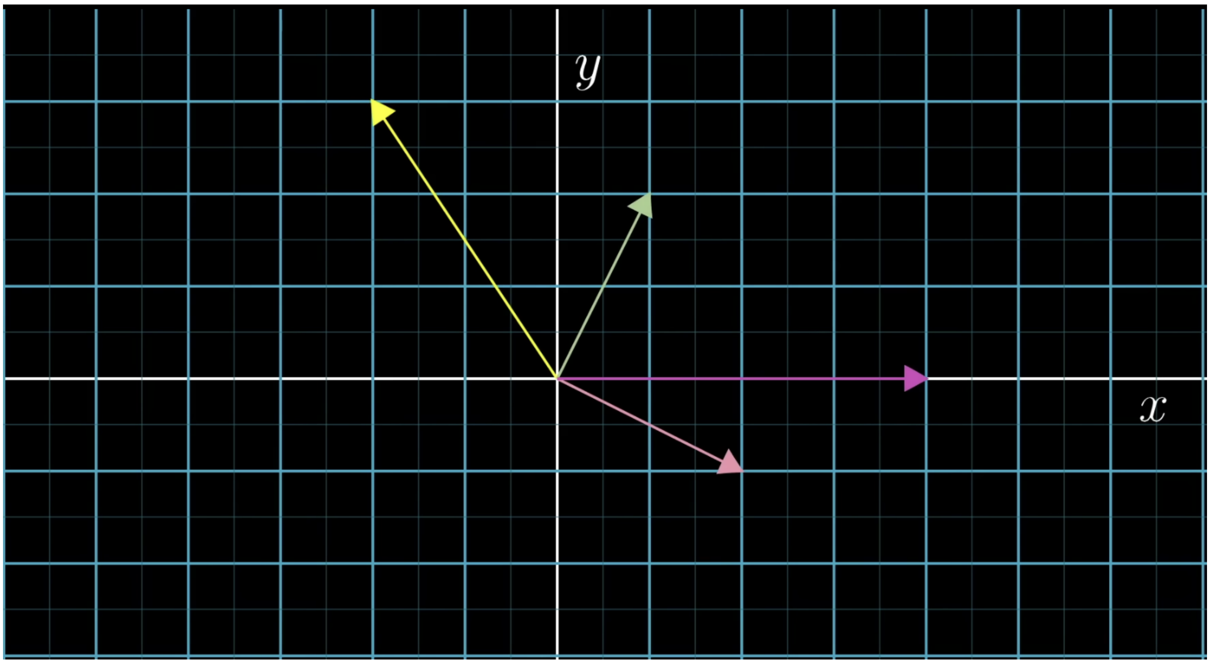
Basic

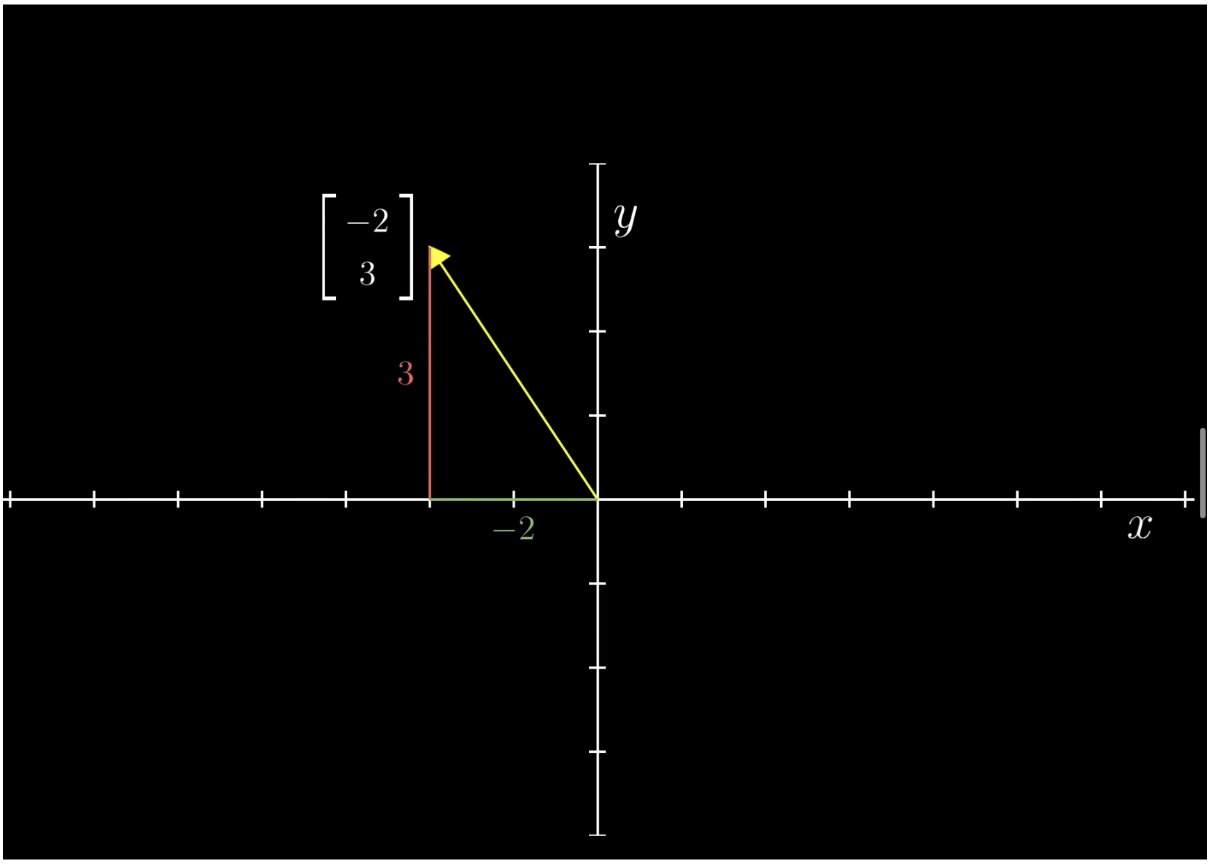
벡터

선형대수의 기본은 벡터, 그럼 벡터는 무엇인가?

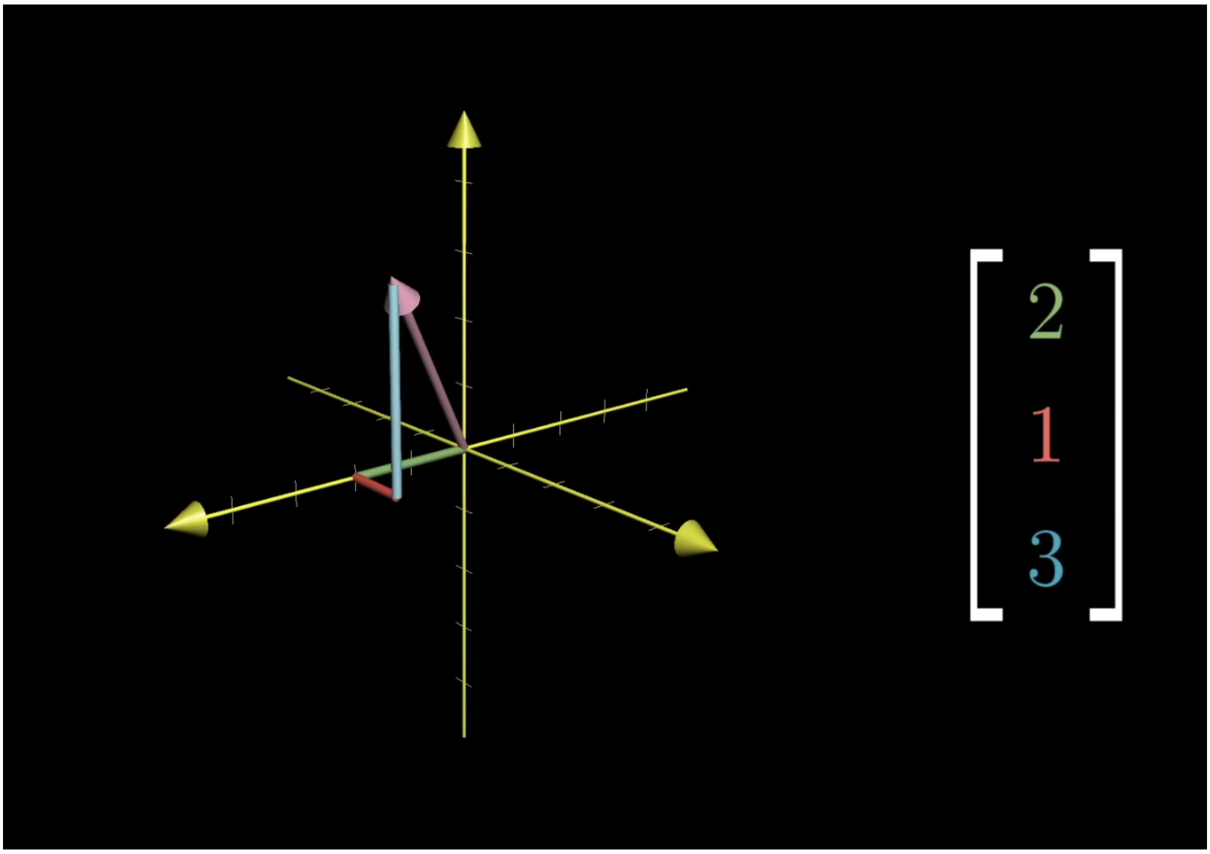
1. 물리학 : 공간의 화살표. 벡터는 {길이, 방향} 을 가진다. 2D, 3D 어디든 존재 할 수 있다.
2. 컴퓨터 : 순차적 숫자의 리스트. (== 리스트)
3. 수학 : 복잡해서 생략



일반적으로 벡터는 XY 좌표계 위의 (0,0)을 꼬리로 하는 화살표를 상상하는게 좋다.

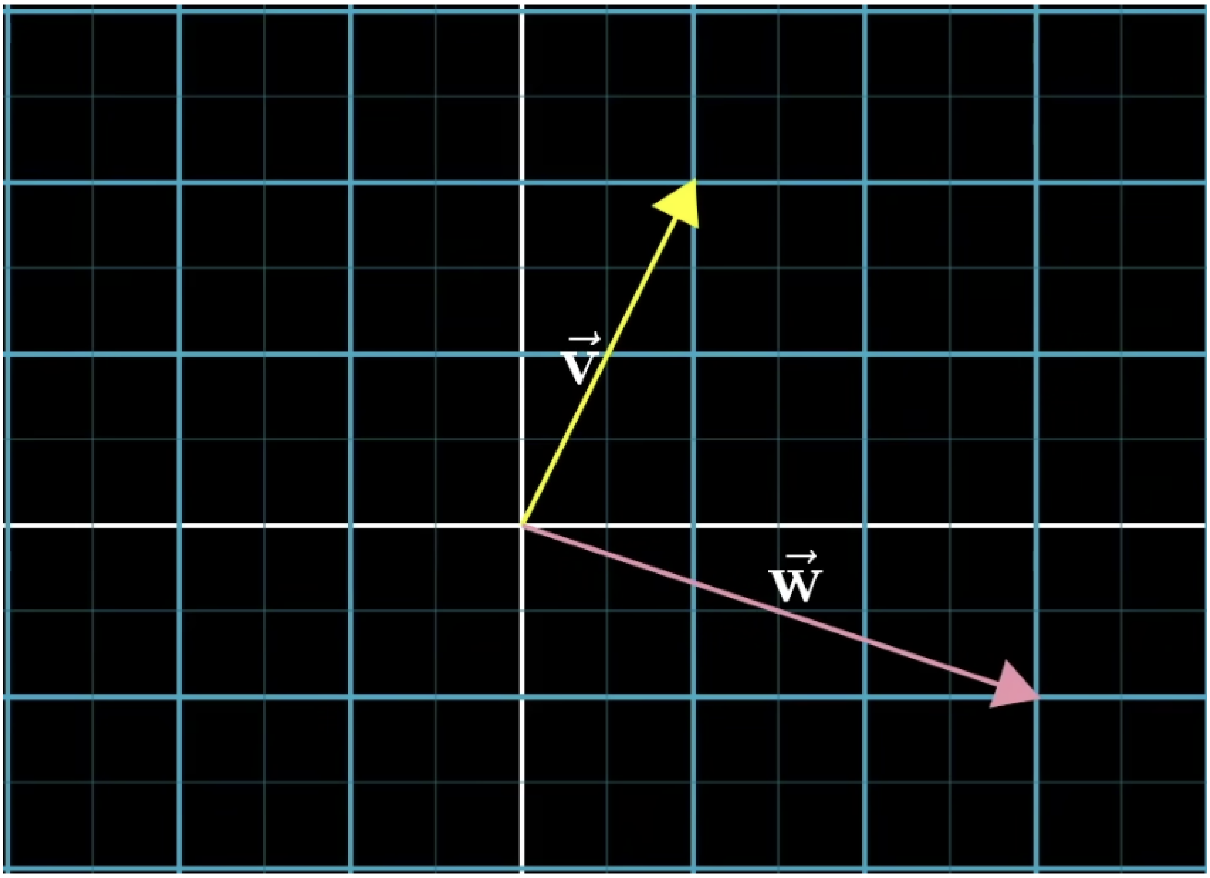


2차원의 벡터의 경우 위와 같이 축 하나에 대응하는 숫자를 가진 이중 숫자쌍으로 나타난다.

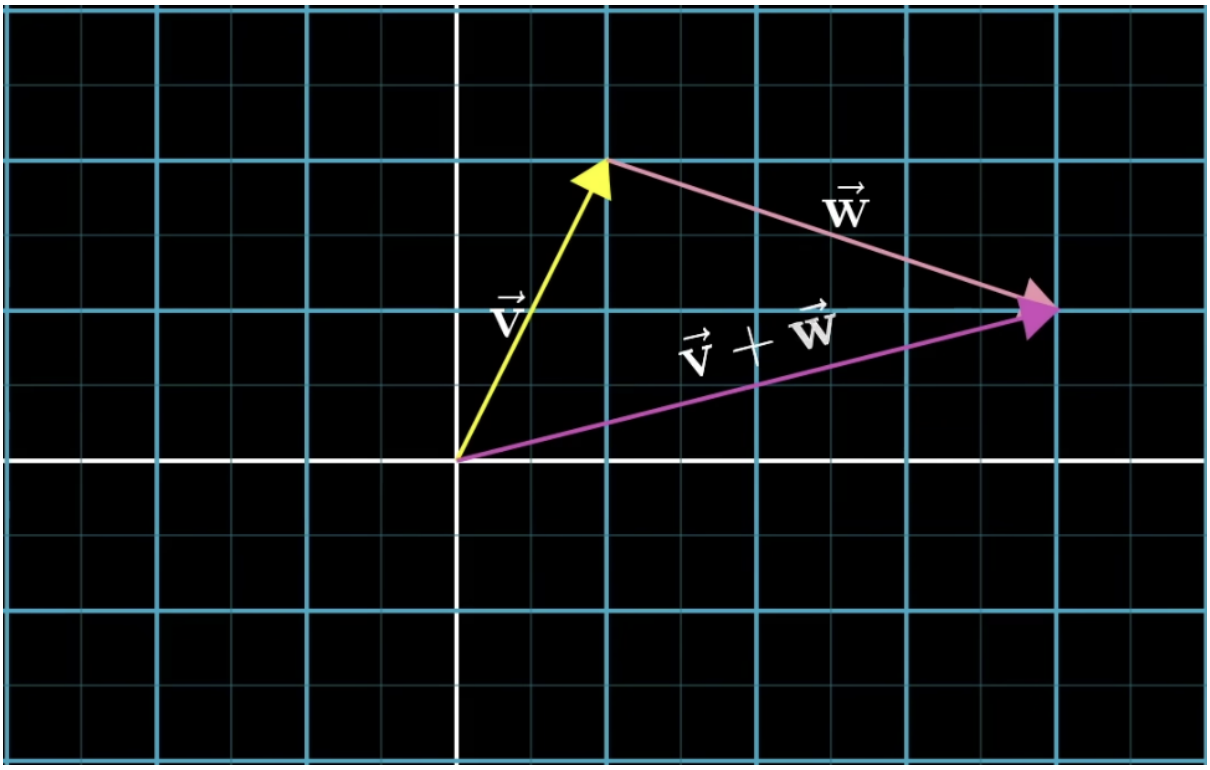


같은 방식으로 3차원의 경우 위와 같이 3중 숫자 쌍이 된다.

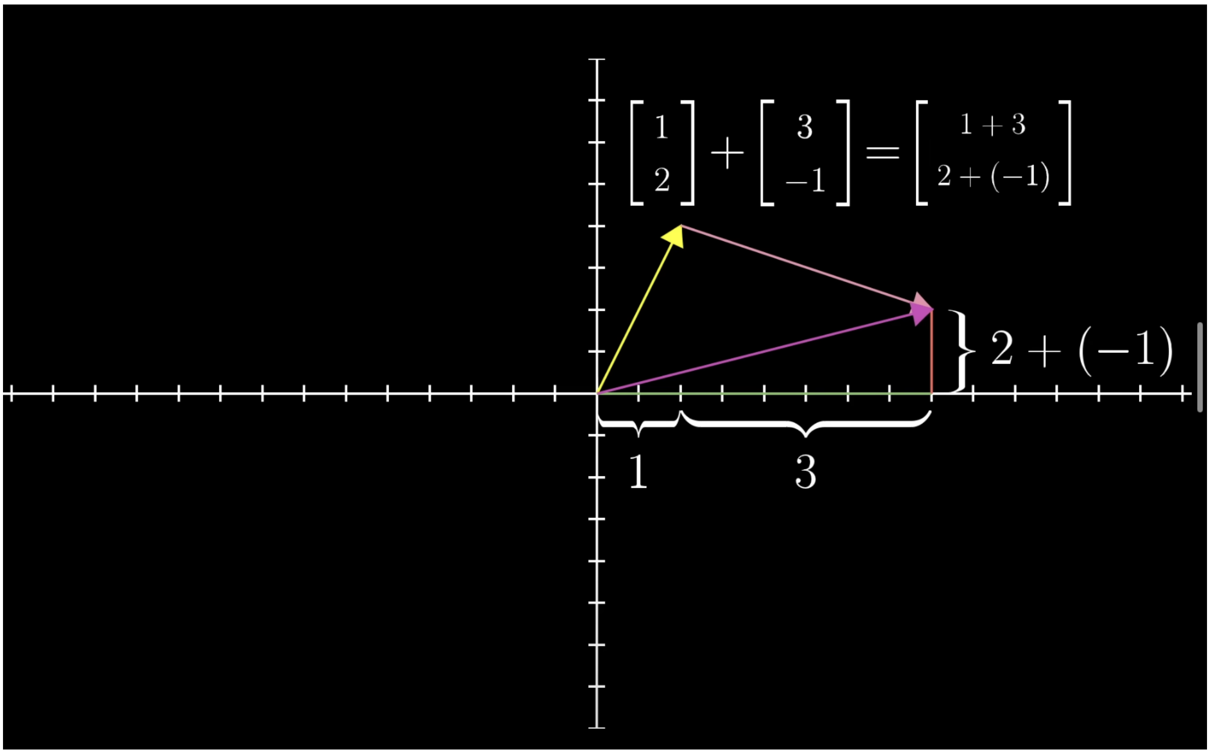
벡터의 합



두 벡터의 합은 첫번째 벡터의 머리 부분에 두번째 벡터의 꼬리를 위치시킨 후 다시 첫번째 벡터의 꼬리 부분에서 두번째 벡터의 머리를 가리키는 새 벡터로 나타낼 수 있다.



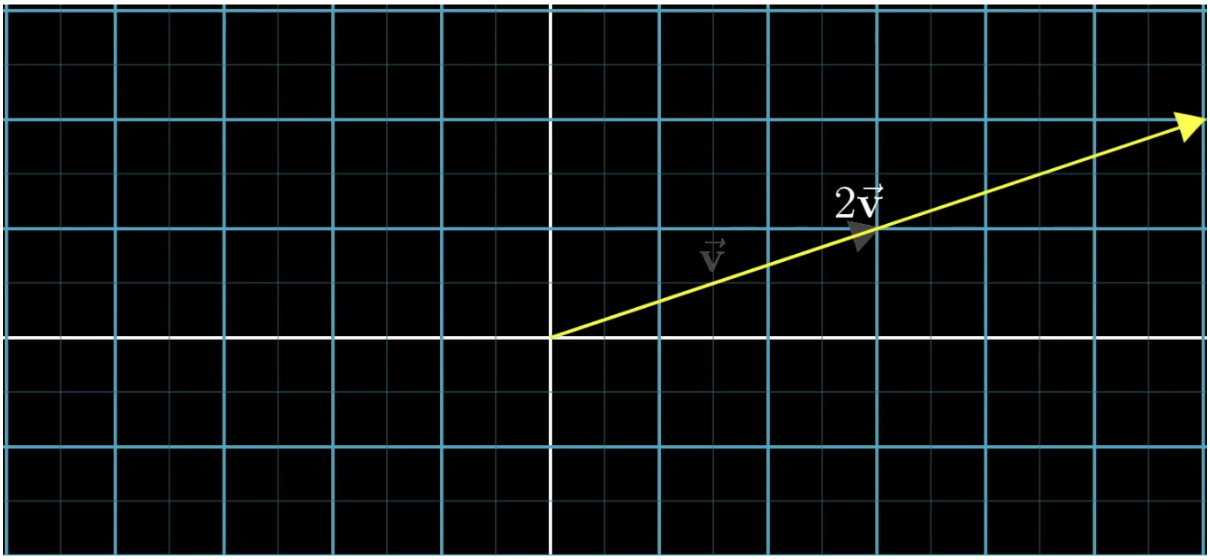
위와 같이 나타난다. 왜 이렇게 정의하는 것이 합리적인 것일까?

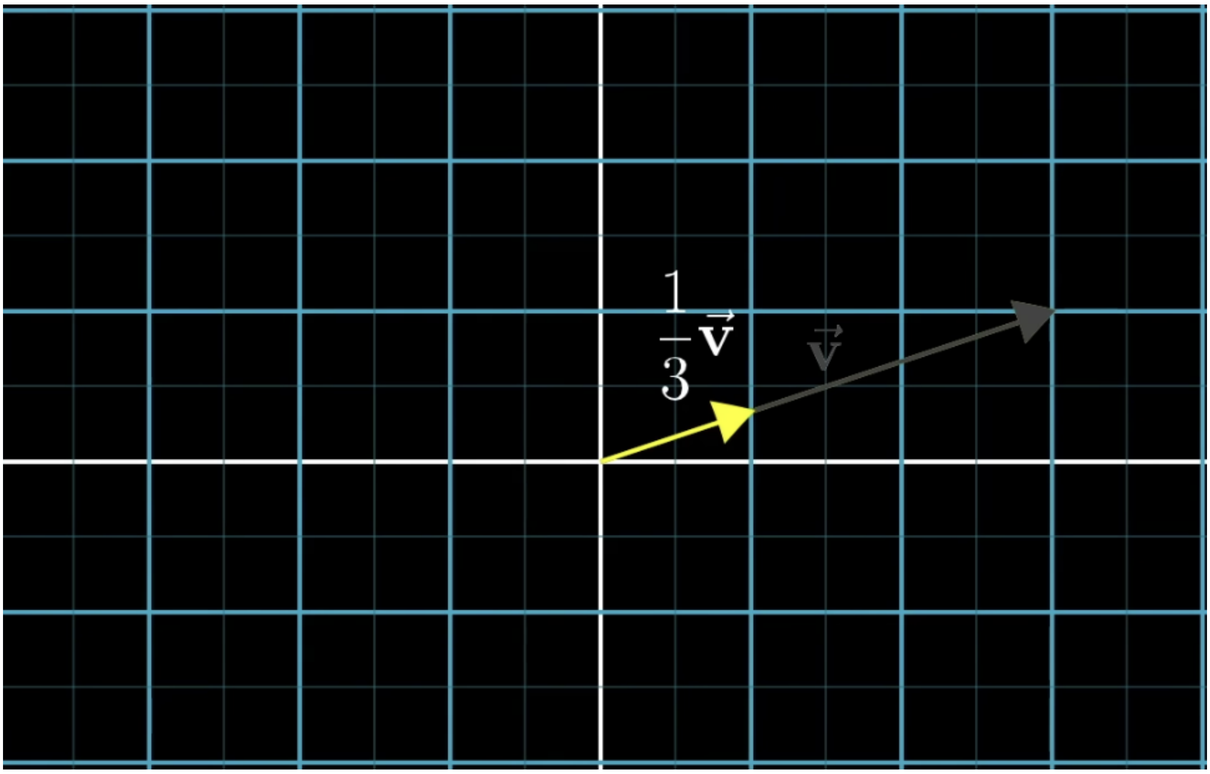


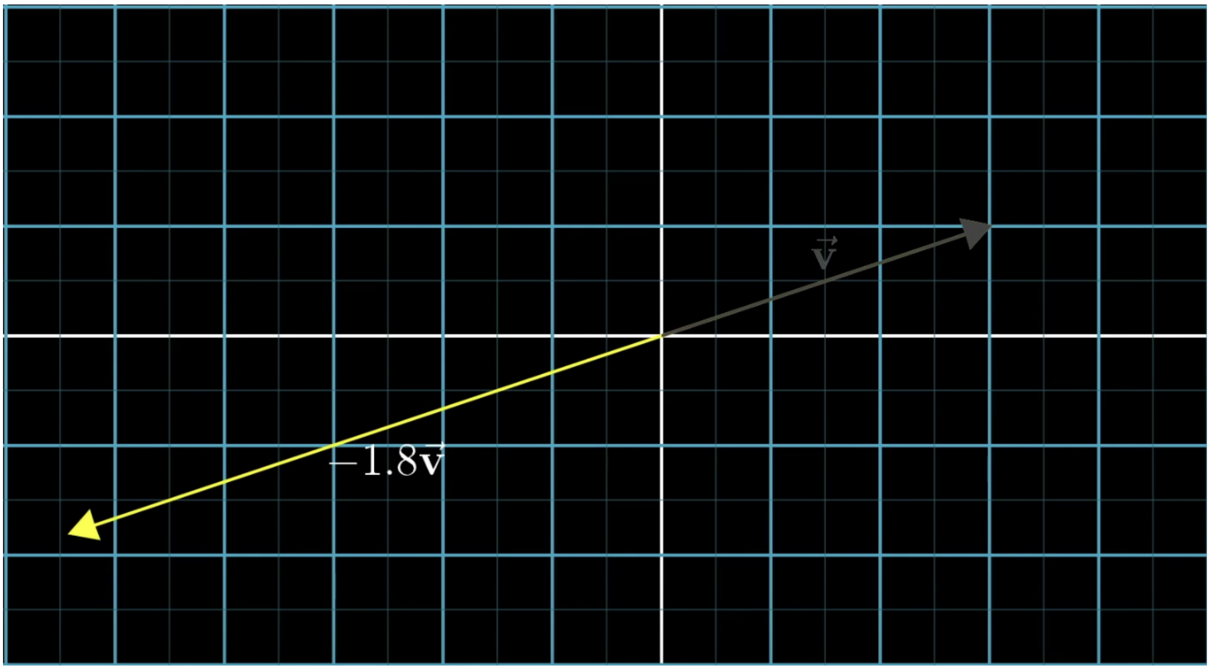
벡터를 하나의 공간 상에서 특정한 {길이, 방향}을 가진 움직임-단계라고 생각을 해보자. 그래서 첫번째 벡터를 따라 이동한 후 두번째 벡터로 이동한다고 생각하면 결과적으로 위 그림과 같이 이동한 셈이 되는 것이다.

벡터의 곱

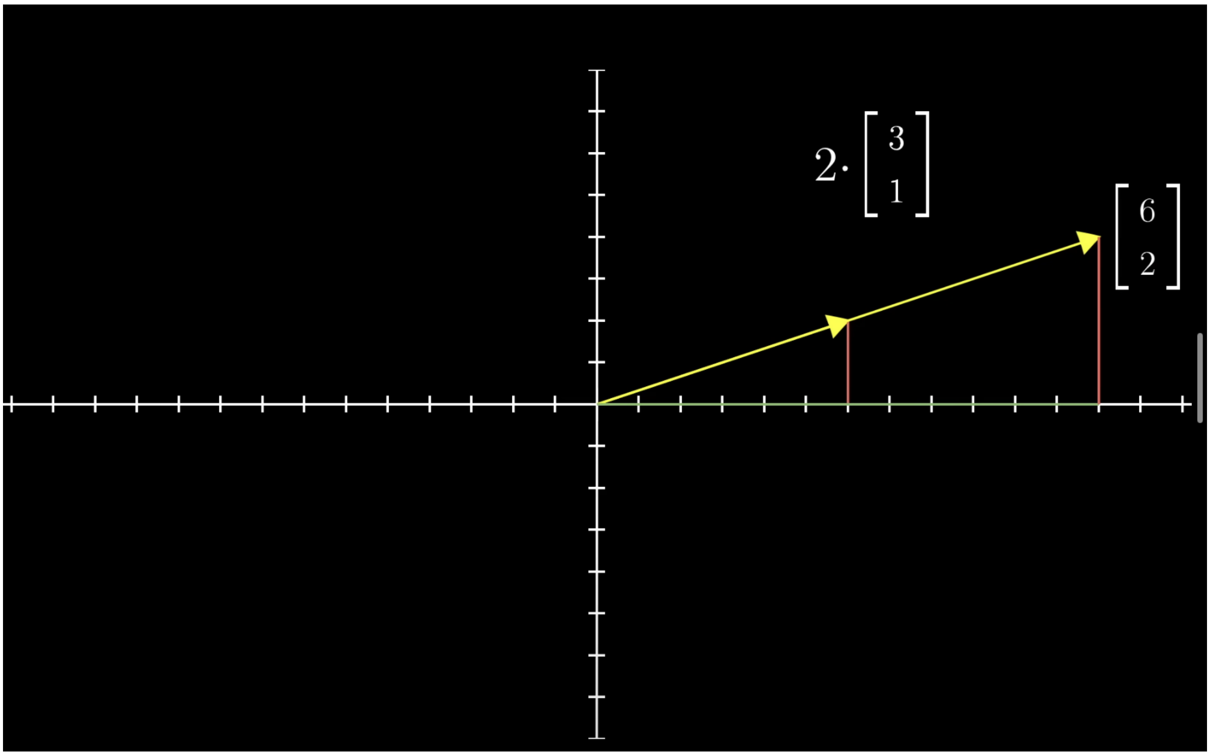
벡터의 곱은 벡터의 길이를 늘이거나(줄이거나), 방향을 뒤집는 것을 의미한다. 이는 다른 말로 스케일링(Scaling) 이라고도 한다.



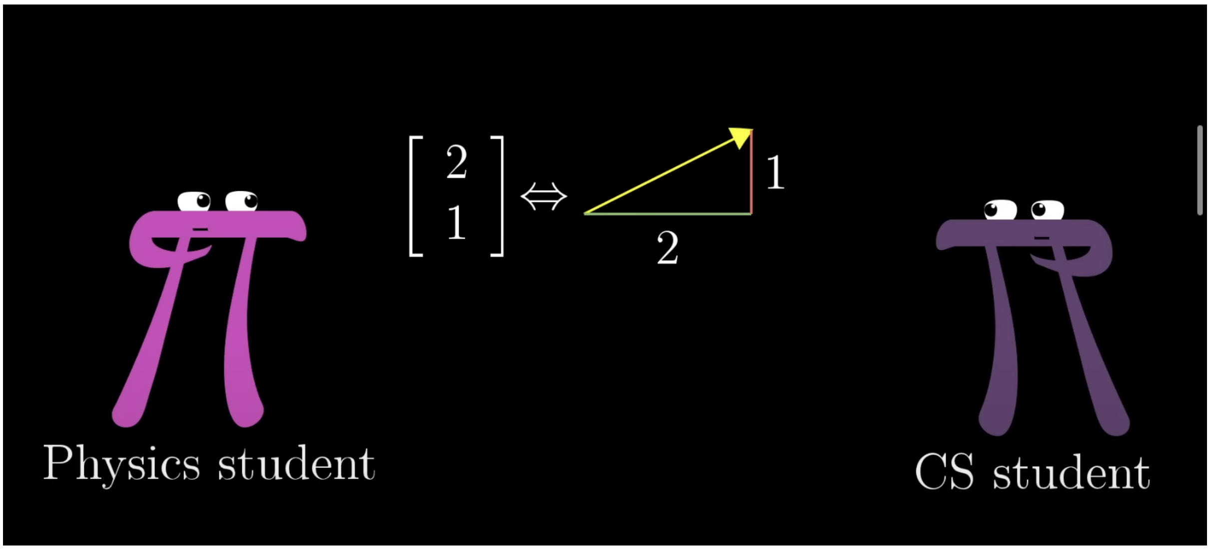




이 때 벡터의 스케일링에 사용하는 숫자를 스칼라(scalar)라고 한다. 쉽게 숫자(number)로 생각해도 된다.



벡터에 스칼라를 곱한다는 것은 벡터의 각 원소에 스칼라를 곱하는 것 과 같다.

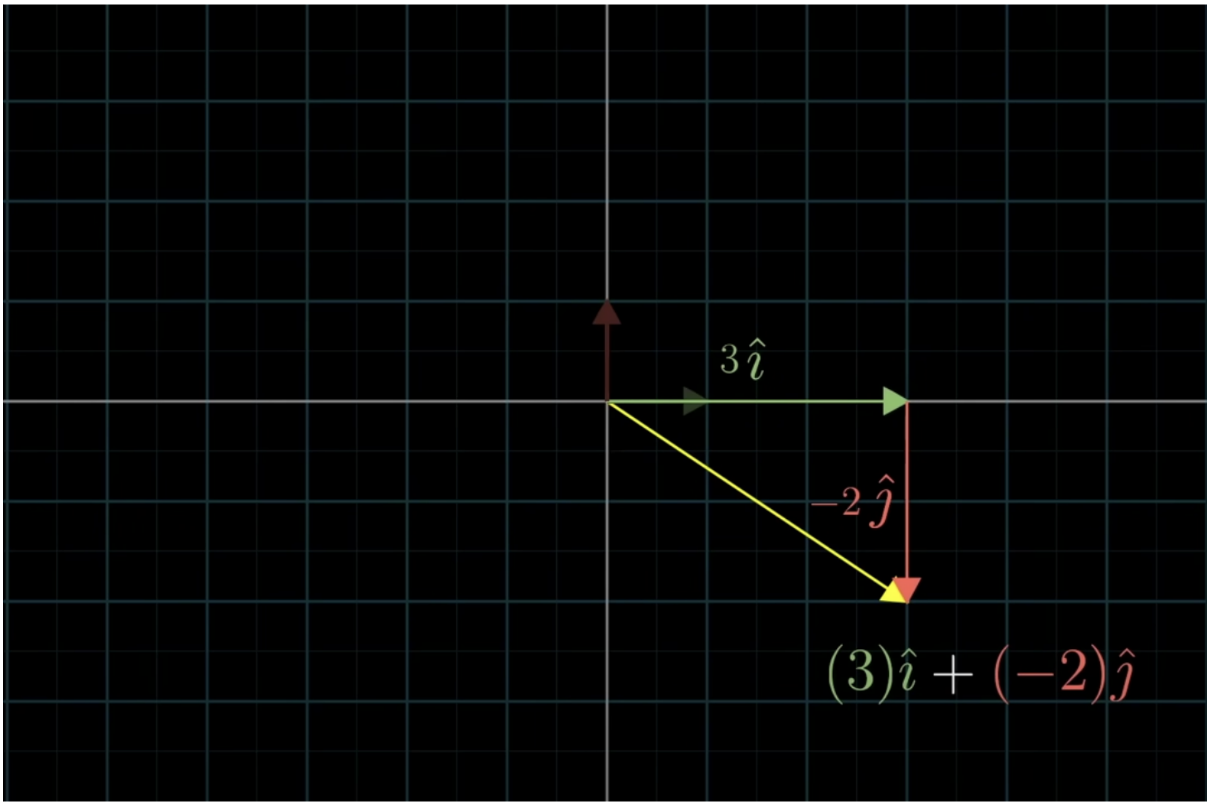


물리학의 벡터의 정의와 컴퓨터과학의 벡터의 정의는 이렇게 상호 변환이 가능한 개념이다.

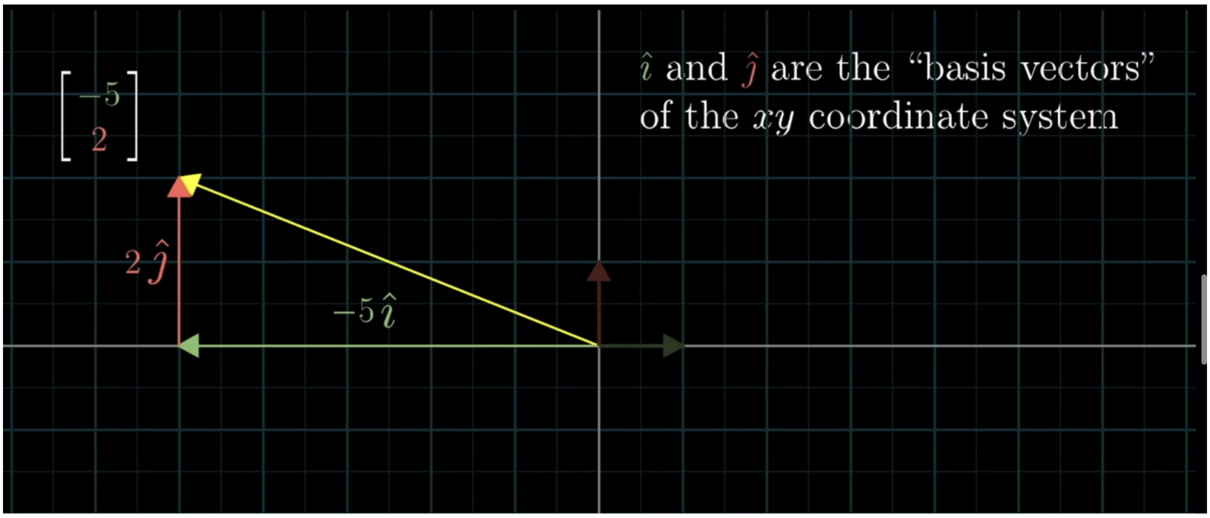
선형대수는 벡터합과 스칼라곱으로 이루어진다.

기저(Basis)

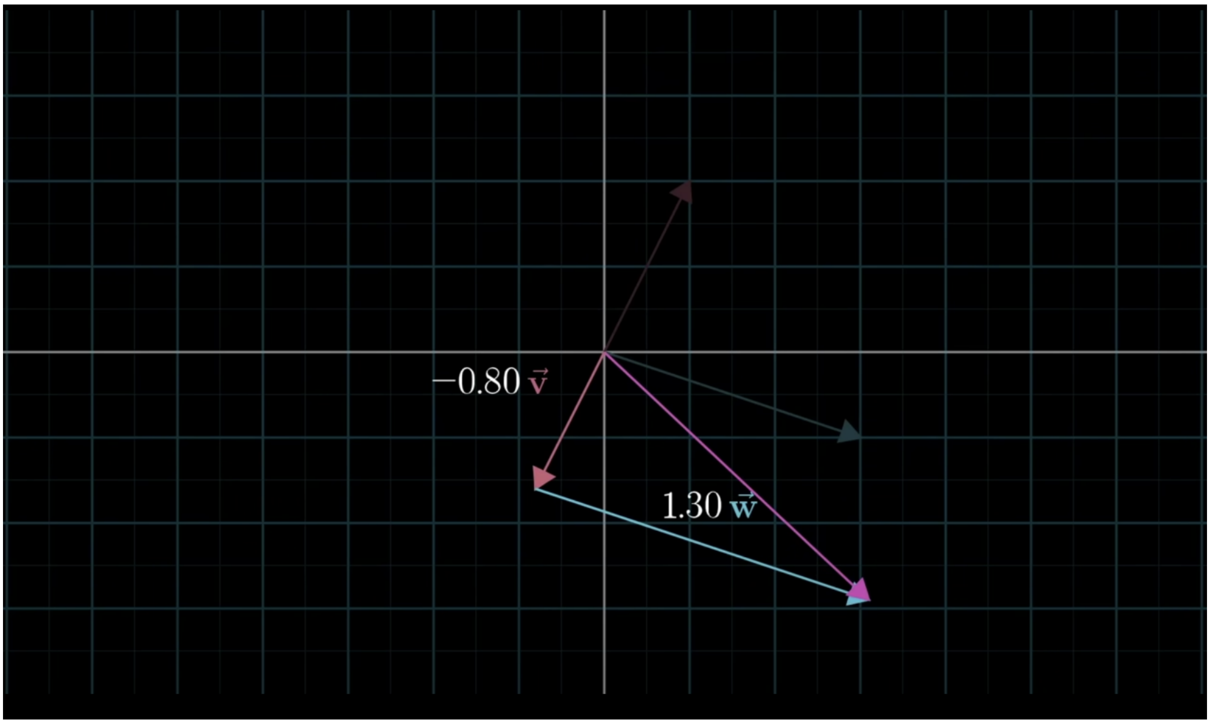
벡터의 각 좌표값(coordinate)을 각각의 축에 대한 unit vector라고도 하며 hat 이라고도 하는데, 이 단위벡터를 스칼라로 생각해 볼 수 있다.



벡터를 x축 유닛벡터(i-hat)를 스케일링 하는 스칼라와 y축 유닛벡터(j-hat)을 스케일링 하는 스칼라로 구성된 것이라고 생각할 수 있다. 그러면 [3,-2]라는 벡터는 두 유닛벡터를 x축으로 3, y축으로 -2 스케일링한 두 벡터의 합으로 생각 할 수 있다. 즉 벡터를 스케일링한 벡터들의 합으로 생각하는 것이다.

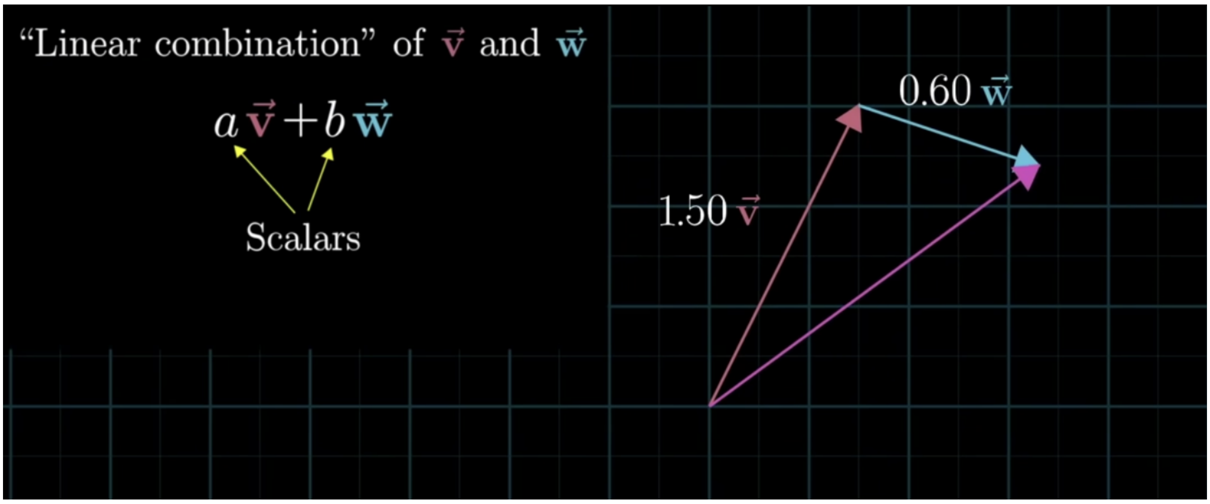


이 i-hat, j-hat 두 벡터들을 기저(basis) 라고 한다. 이 기저 벡터들은 각각의 좌표 축의 스칼라(좌표값)이 스케일링하는 대상이된다.



두 기저벡터를 구성(framing)으로 XY 2차원 좌표 축에서 새로운 좌표계를 만들 수 있다. 수치를 벡터로 표현할 때 암묵적으로 어떠한 기저 벡터들을 선택한 것이라고 보면 된다.

선형 결합(Linear Combination)

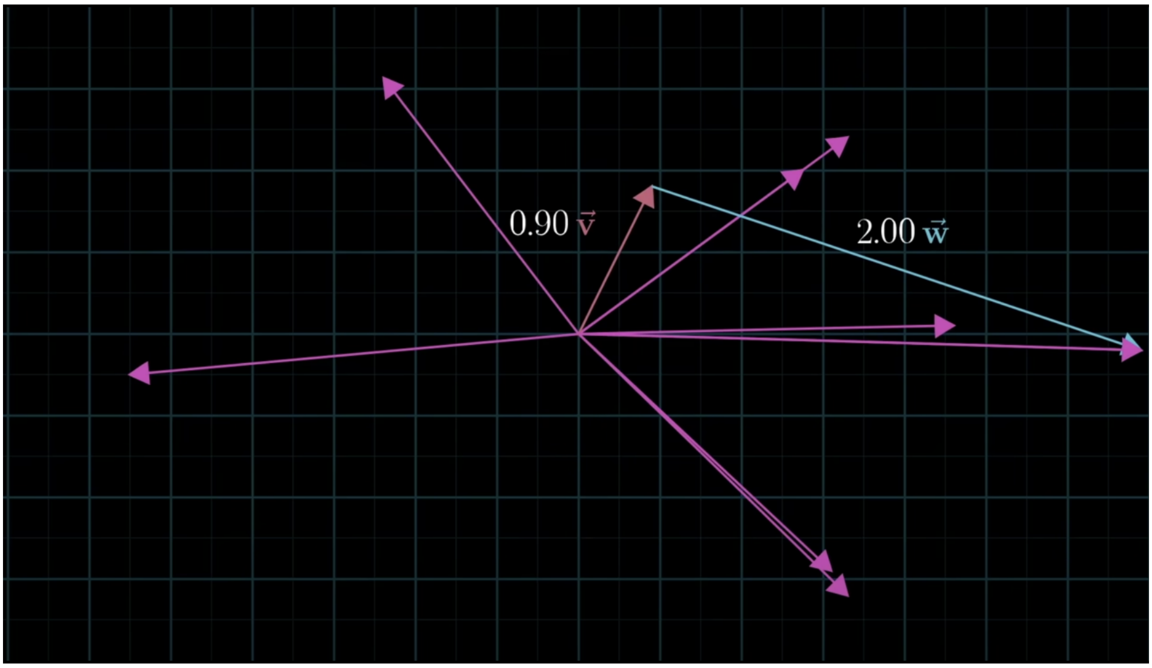


두 벡터를 스케일링 한 후 합한 것을 선형 결합 이라고 한다. 하나의 벡터를 고정하고 다른 벡터를 움직이면 직선상으로 움직인다. 그래서 선형 결합이라고 하는 것 아닐까?

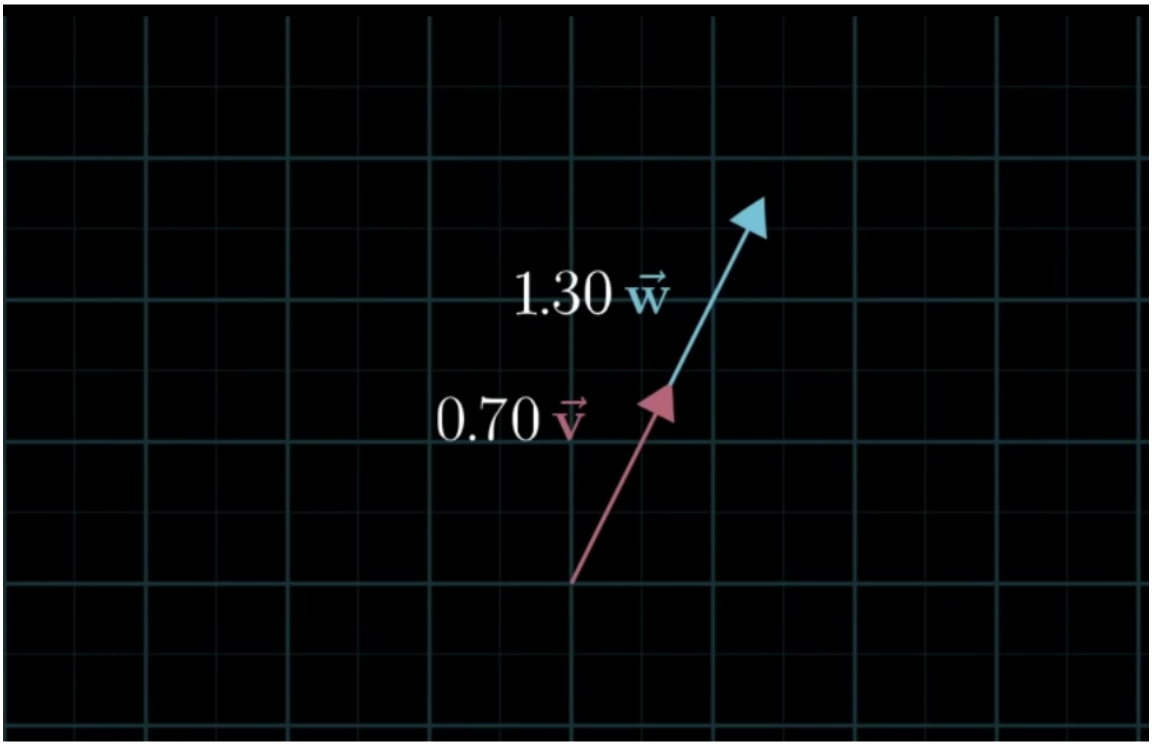
스팬(Span)

XY 좌표계에서 두 벡터 쌍으로 자유롭게 각각의 벡터의 스칼라를 스케일링한 후 더 한 경우(선형 결합) 선형결크게 3가지 경우가 있다.

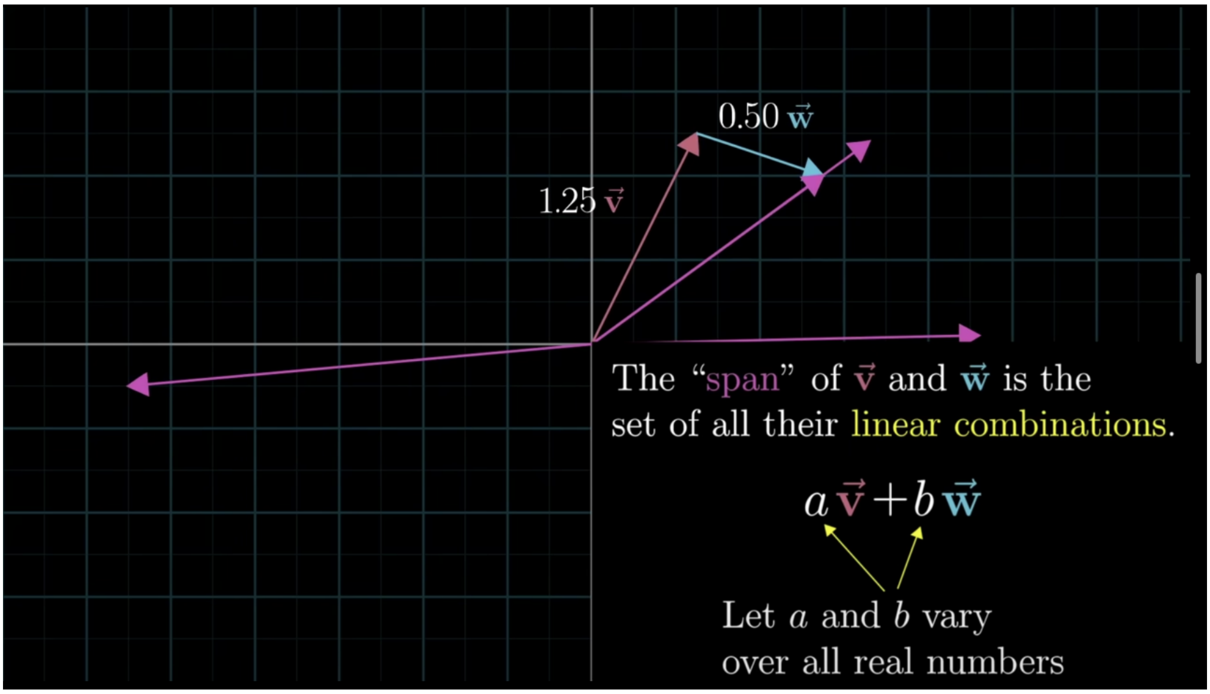
1. 대부분의 경우 : 좌표계의 모든 점에 도달 가능하다. 즉 모든 2차원 벡터를 만들어 낼 수 있다.ㄷ



2. 하나의 선 : 두 벡터의 선형 결합한 벡터가 원점을 지나는 직선이 된 경우



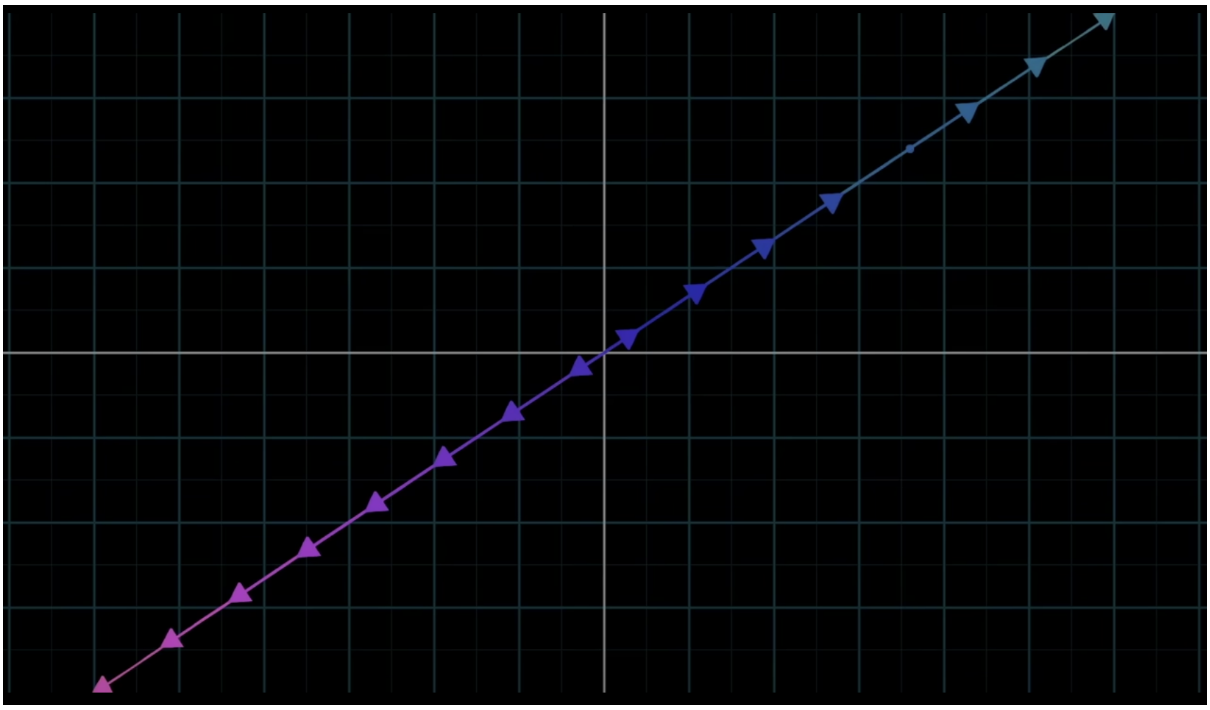
3. 원점 : 두 벡터가 모두 0인 경우



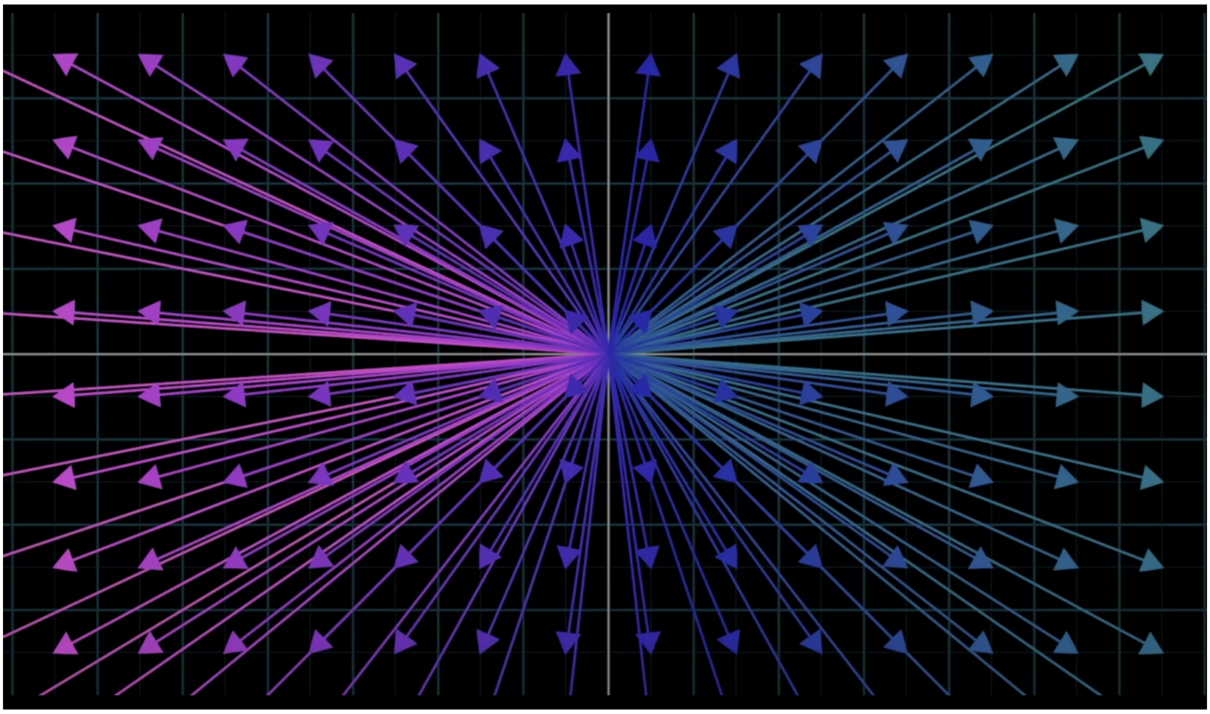
주어진 벡터 쌍(pair)의 선형 결합으로 도달 할 수 있는 벡터 쌍들을 Span이라고 한다. 2차원 벡터쌍의 span은 위에서 정리했듯이 대부분의 경우 2차원 공간 전체이나, 특정 선이 될 경우도 있다.

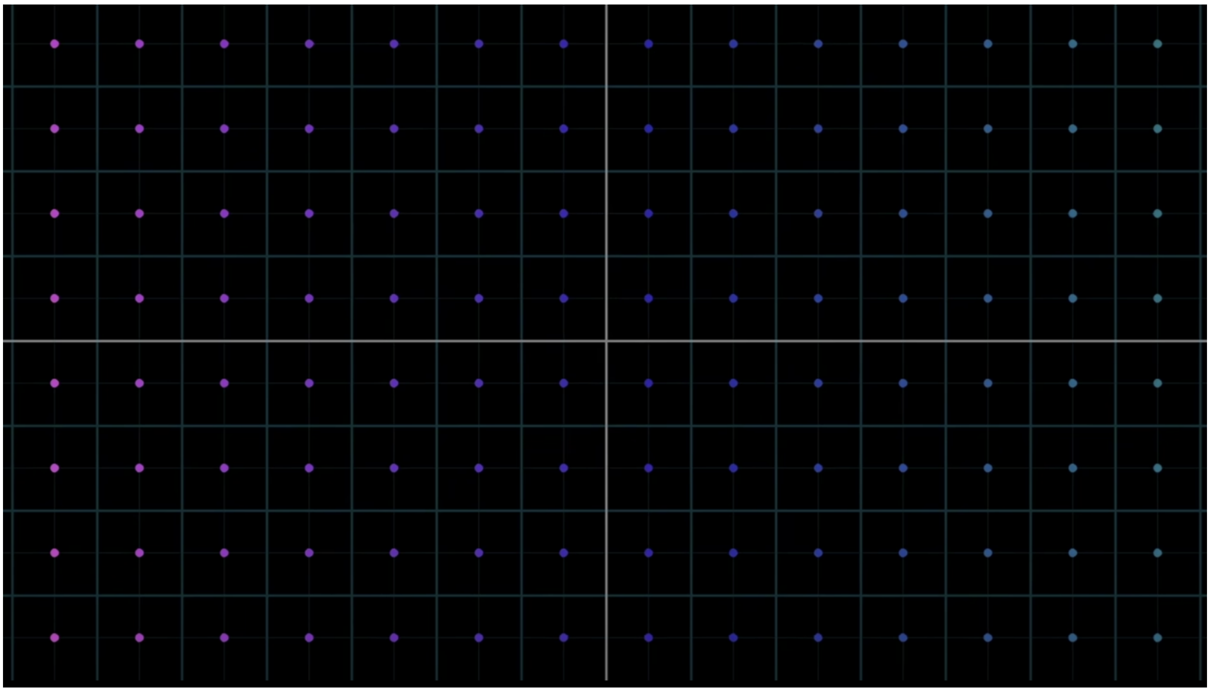
선형대수가 벡터합과 스칼라곱으로 이루어진다고 할때, 스팬은 합,곱 두 기본 연산을 이용해서 벡터 쌍이 도달 가능한 벡터들의 집합이라고 할 수 있다.

벡터 vs 점



하나의 벡터를 생각 할 때는 화살표 (좌표계에서는 직선)으로 생각하고,



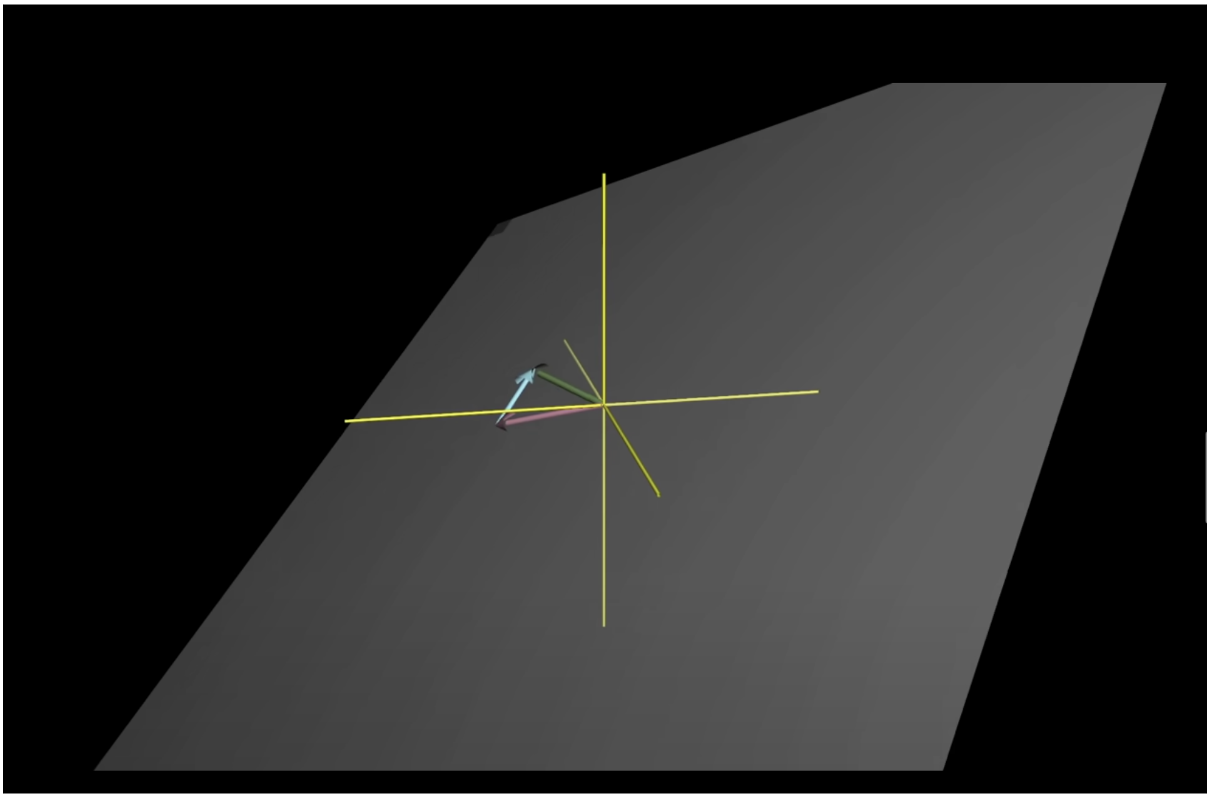


벡터의 집합을 다룰 때는 좌표계의 점으로 생각하는 것이 편하다.

그래서 스팬을 다시 생각하면 2차원 공간에서는 무한한 공간 그자체가 되거나, 하나의 직선이 된다.

3차원 공간에서의 벡터

3차원 공간에서 두 벡터를 선형결합 한 스팬의 결과는 어떨까?



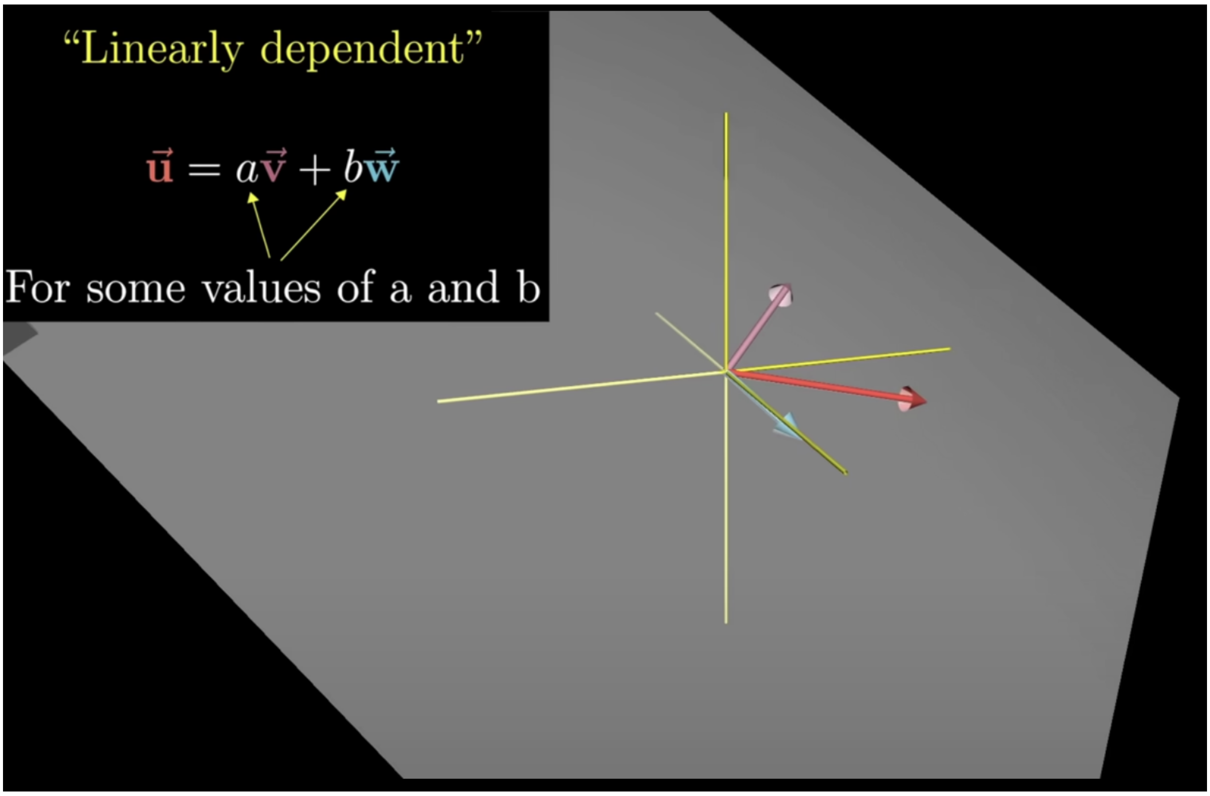
3차원 공간의 원점을 가로지르는 평평한 공간이 된다.

3차원에서 세 벡터를 선형결합한 스팬의 결과는 2차원때와 거의 유사하다. 즉 가능한 모든 선형 결합의 결과의 집합이다.

만약 추가된 벡터가 기존에 두 벡터가 만든 스팬 평면에 있다면, 아무리 선형 결합해도 기존 스팬이 유지되고 새로운 스팬이 만들어 지지 않는다.

하지만 세 벡터가 다른 두 벡터의 스팬 평면에 있지 않다면 모든 3차원 벡터에 접근이 가능하다.

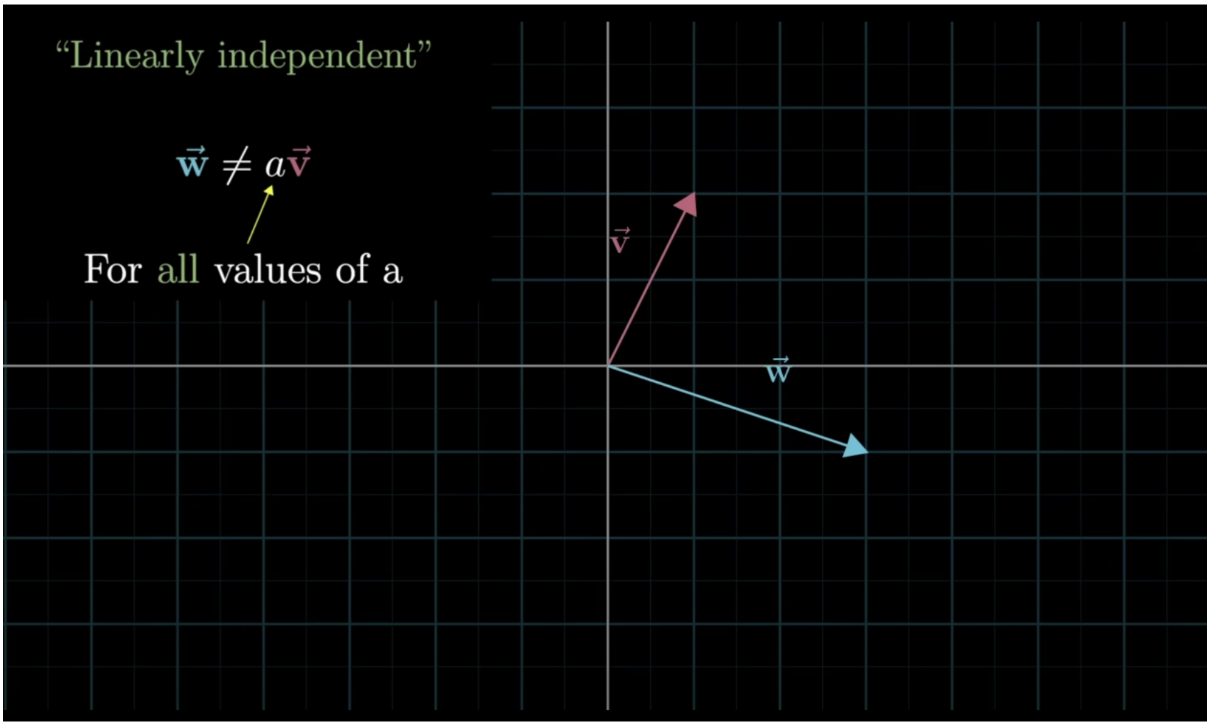
선형 종속(Linear Dependent) 과 선형 독립 (Linear Independent)



어떠한 벡터를 제거해도 스팬이 축소되지 않는 경우 선형 종속(linear dependent) 되어 있다고 한다.

세번째 벡터가 두 벡터의 스팬 평면에 놓여있거나, 두 벡터의 선형 결합이 이미 선인 경우 발생한다.

또는 벡터 집합 중 하나가 집합에 속한 다른 벡터들의 선형 결합으로 표현이 가능한 경우라고도 한다.



반대로 각각의 벡터가 기존 스팬에 다른 차원을 추가해주는게 가능하다면, 선형 독립적 (linear independent) 이라고 한다.

기저(Basis)의 정의는 아래와 같다.

> The basis of a vector space is a set of linearly independent vectors that span the full space.

즉 기저는 해당 공간에서 선형 독립적인 벡터들의 집합으로 span 하면 해당 공간이 된다는 것이다.