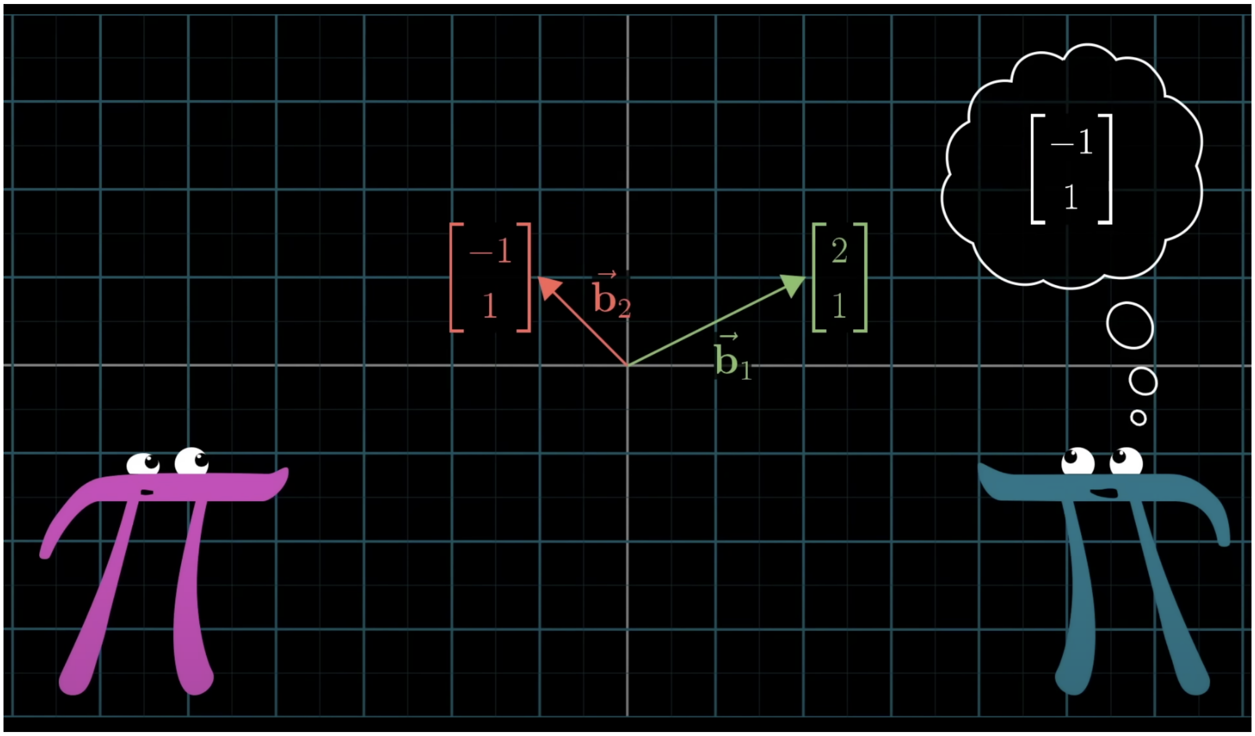
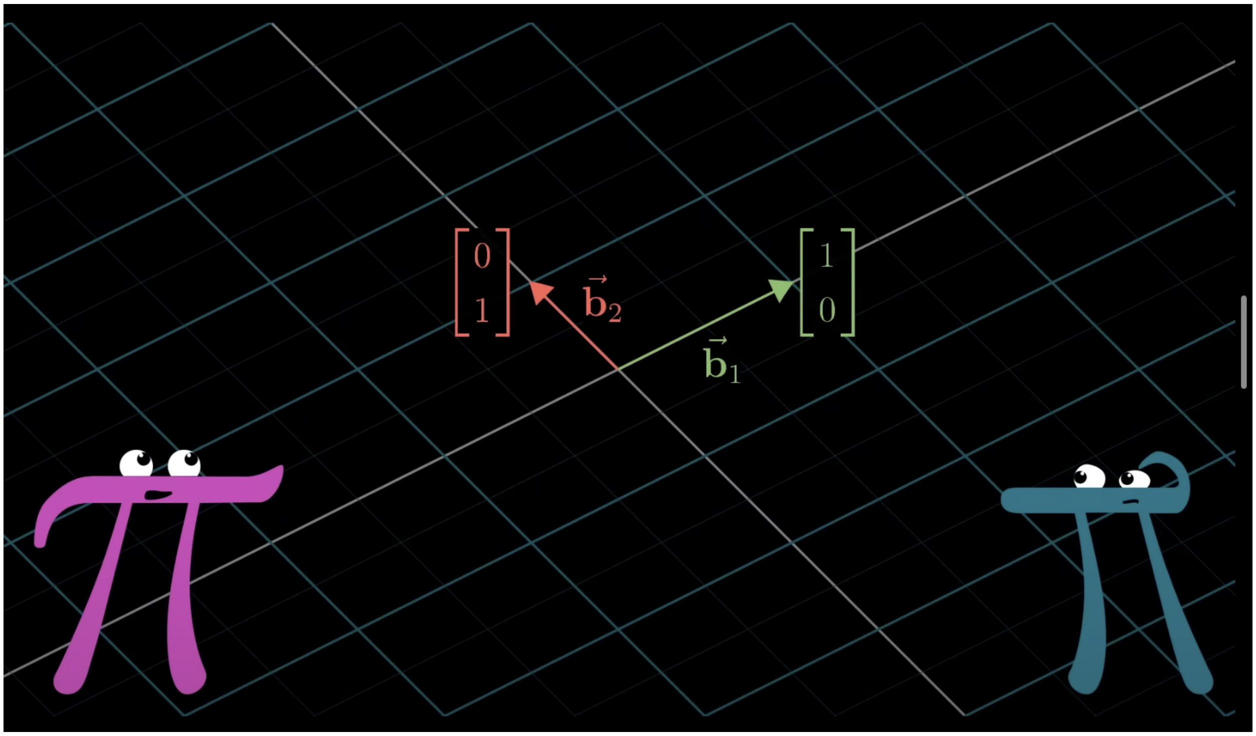
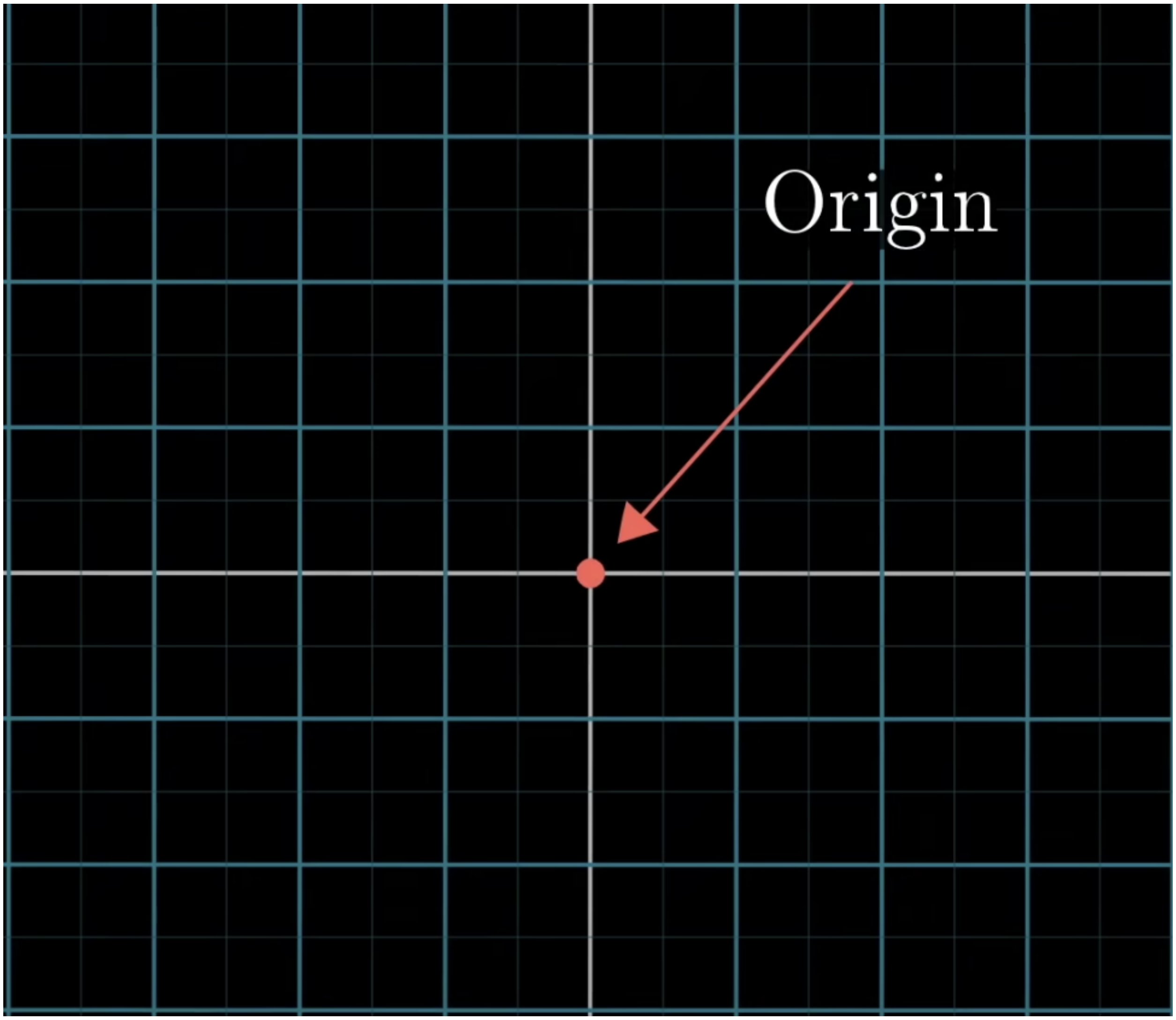
Change Of Basis

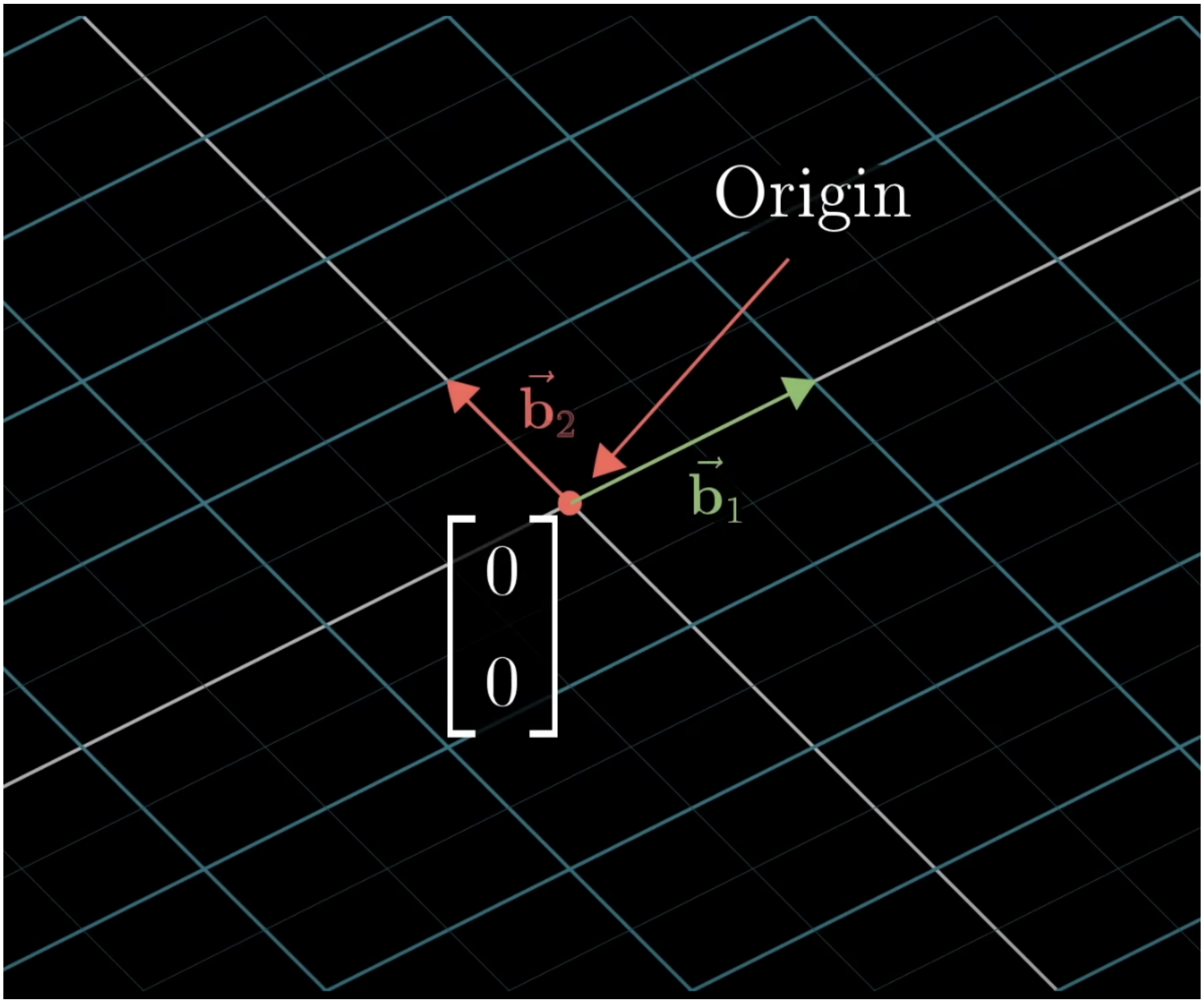
Basic Concept



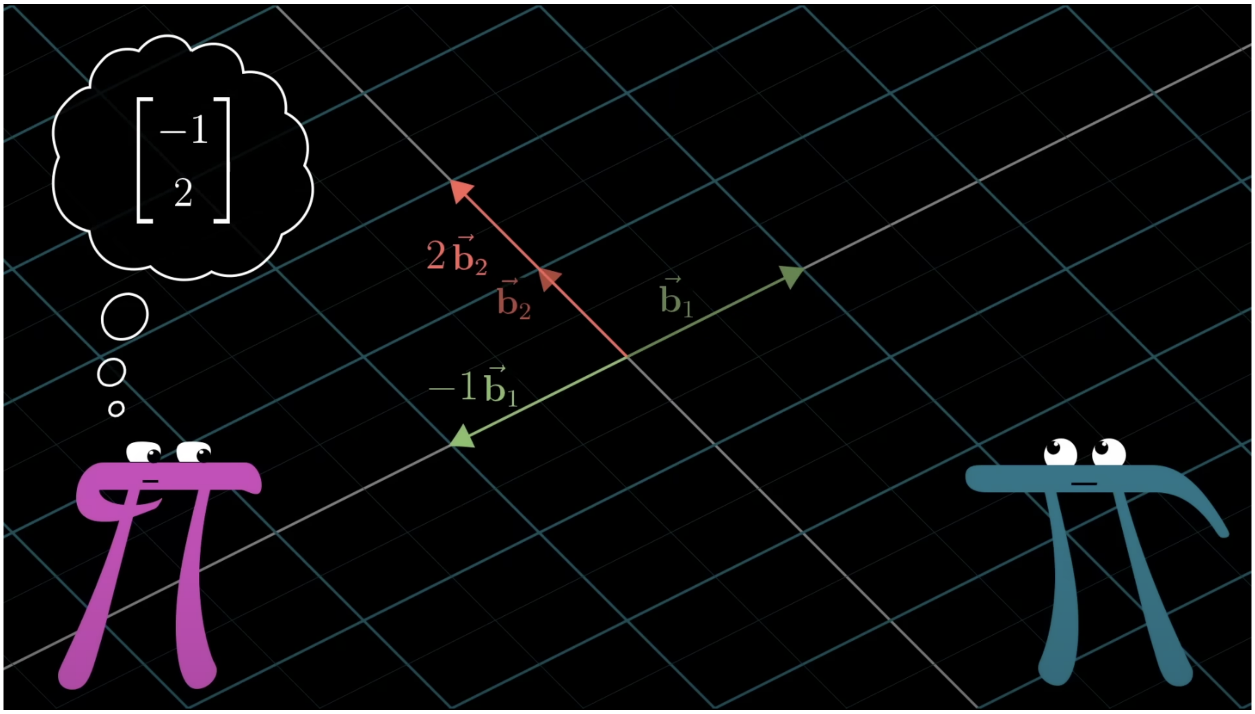


두 좌표계가 다르면 기저 벡터(basis)도 달라진다. 즉 아래 사진처럼 A가 정의한 [1,0] [0,1] i-hat, j-hat 기저 벡터 두개가 위 사진 처럼 B의 좌표계에서는 [2,1] [-1,1]이라고 생각 할 수 있는 것이다.

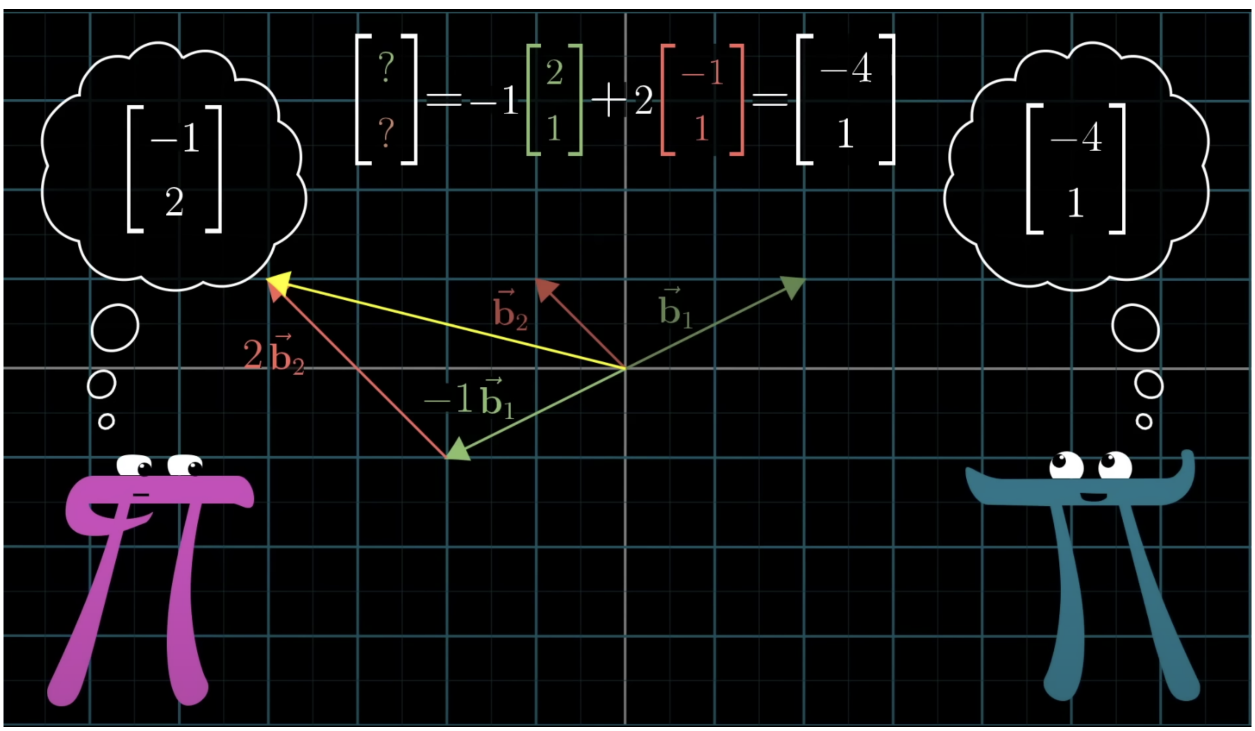

Origin



원점은 모두에게 같지만, 축의 방향이나 격자의 간격은 개인이 선택하는 기저 벡터에 따라서 달라진다.
그러면 서로 다른 좌표계 사이를 어떻게 해석해야 하는걸까?

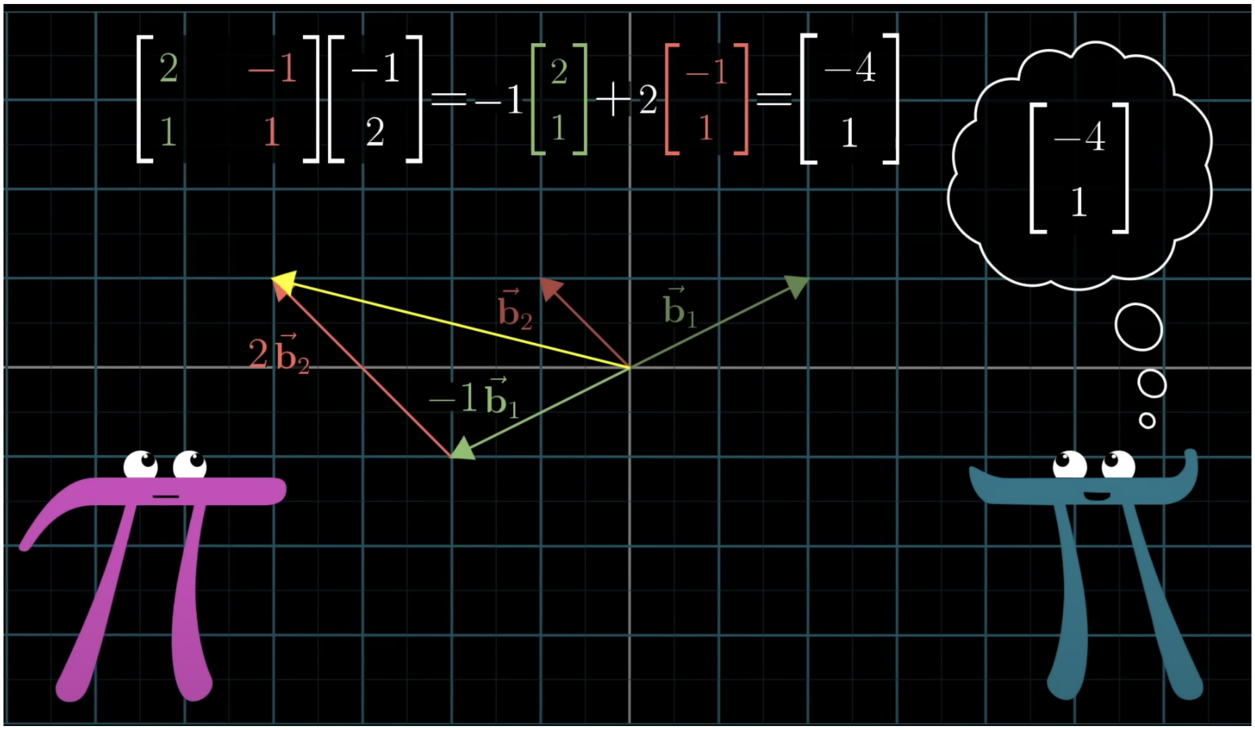


가령 좌표계 A에서 [-1,2]는 i-hat을 -1로 j-hat을 2로 스케일링 하는 것이다.

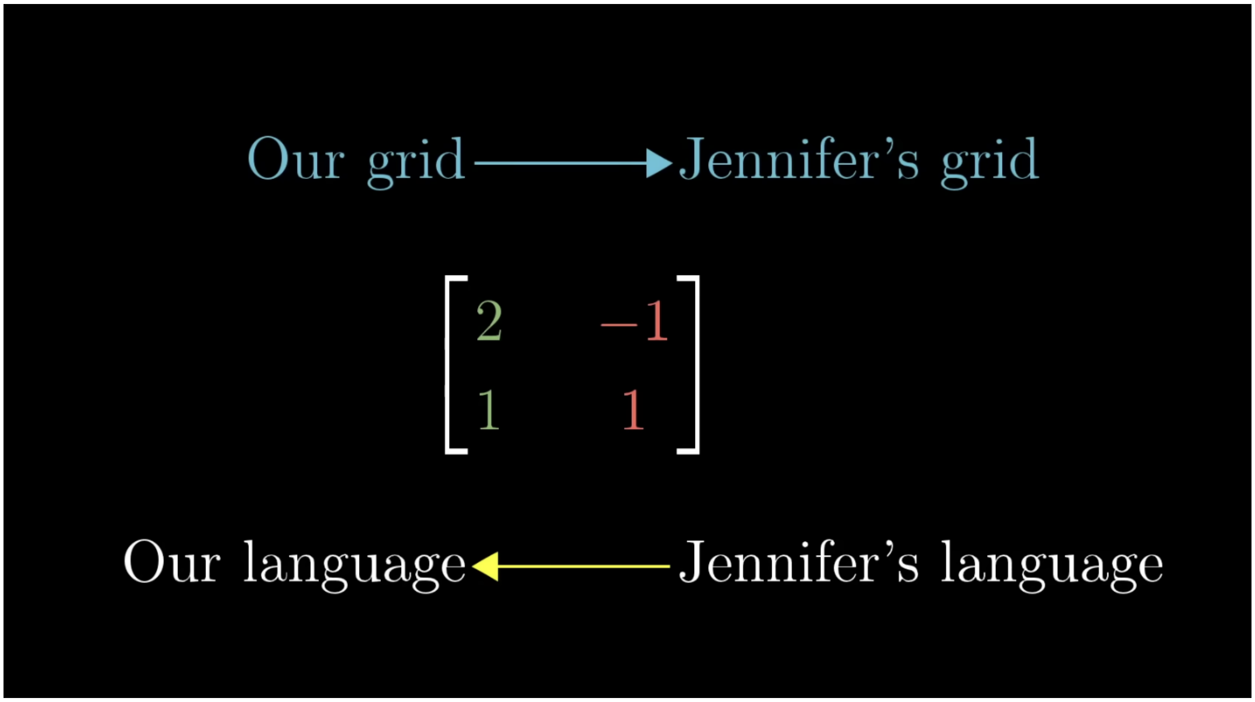


이걸 좌표계 B에서 보면, A 좌표계의 기저 벡터 i-hat, j-hat은 각각 [2,1] [-1,1]에 위치한 것으로 해석된다. 따라서 [-1,2]와 [2,1], [-1,1]을 각각 기저 벡터별로 곱해서 나온 [-4,1]을 A 좌표계의

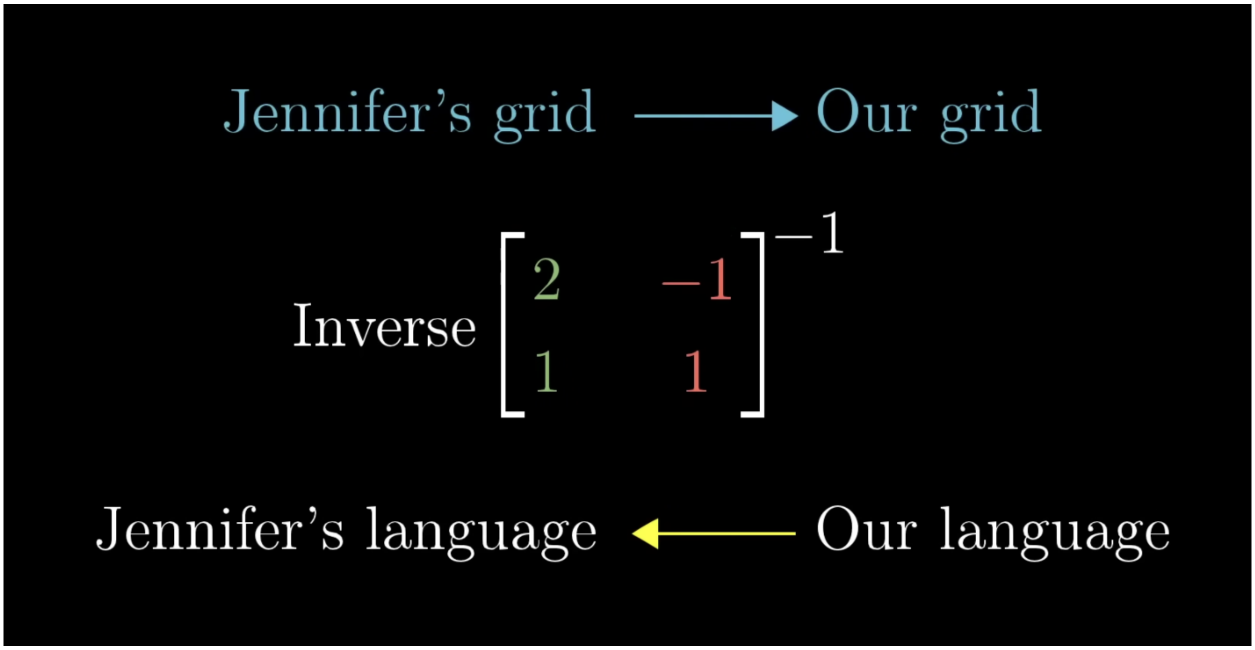
[-1.,2]를 B 좌표계에서 해석한 값으로 이해할 수 있다.



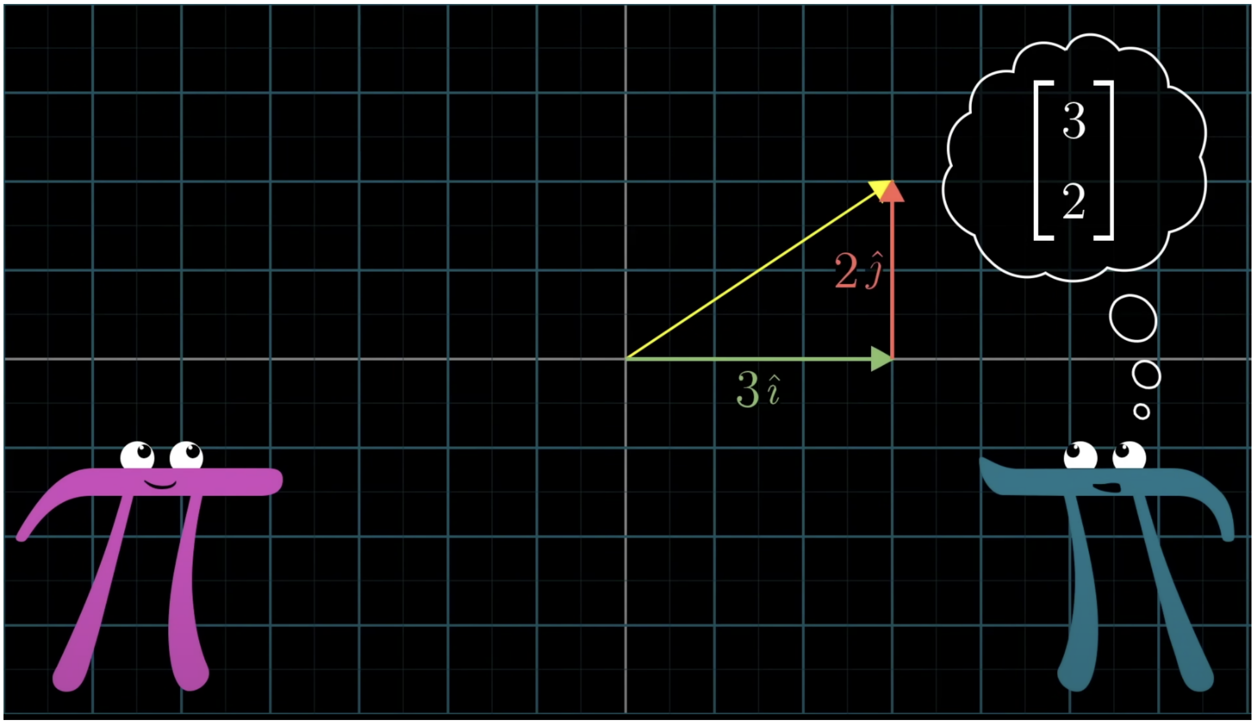
이는 A 좌표계의 기저 벡터를 열로 가지고 있는 행렬을 벡터 [-1,2]와 곱한 것으로 이해할 수 있다! 생각해보면 행렬은 곧 선형변환을 뜻하므로 이에 대한 직관을 가질 수 있을 것이다.
즉 A 좌표계의 기저 벡터를 열로 가지는 행렬을 B 좌표계의 기저 벡터를 선형 변환 해서 A 좌표계의 기저 벡터로 변환하는 선형 변환을 표현한 것으로 생각 할 수 있는 것이다.

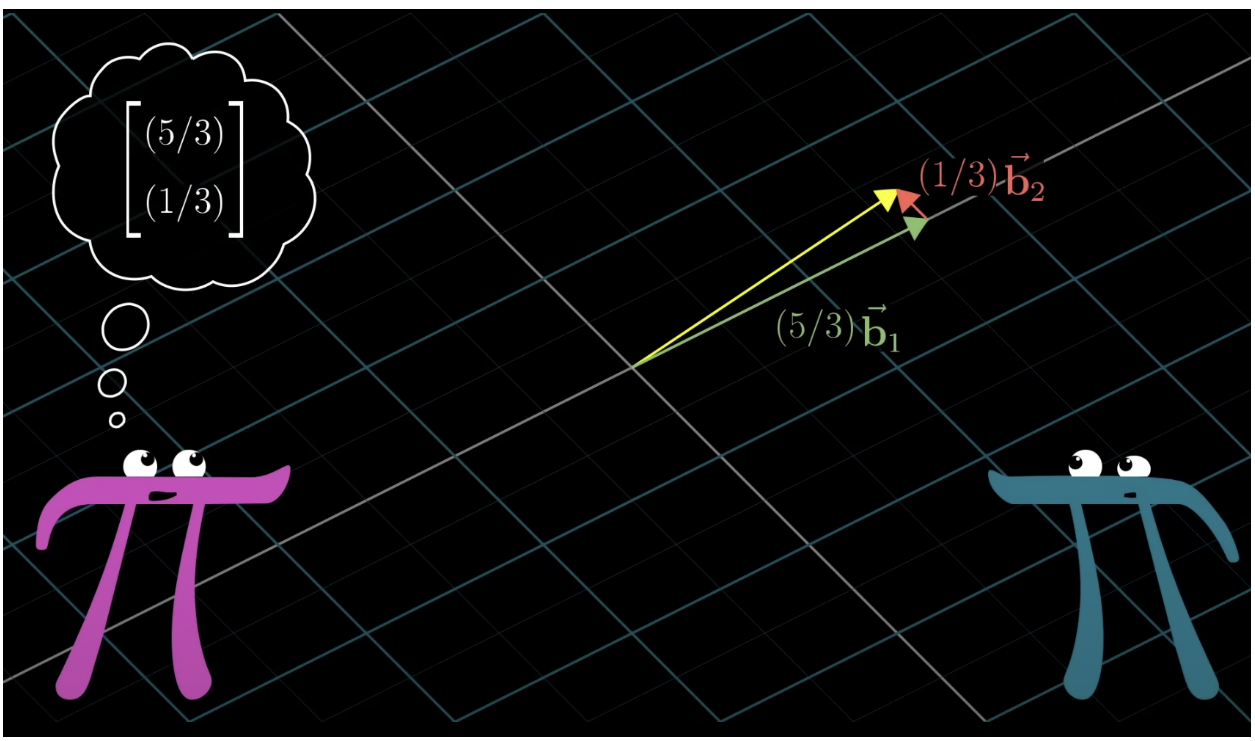


재밌는 것은 기하학적으로 이 행렬은 B→A 좌표계 로 변환하는 것이지만 수치적으로는 A→B 좌표계가 변환하는 것이다.

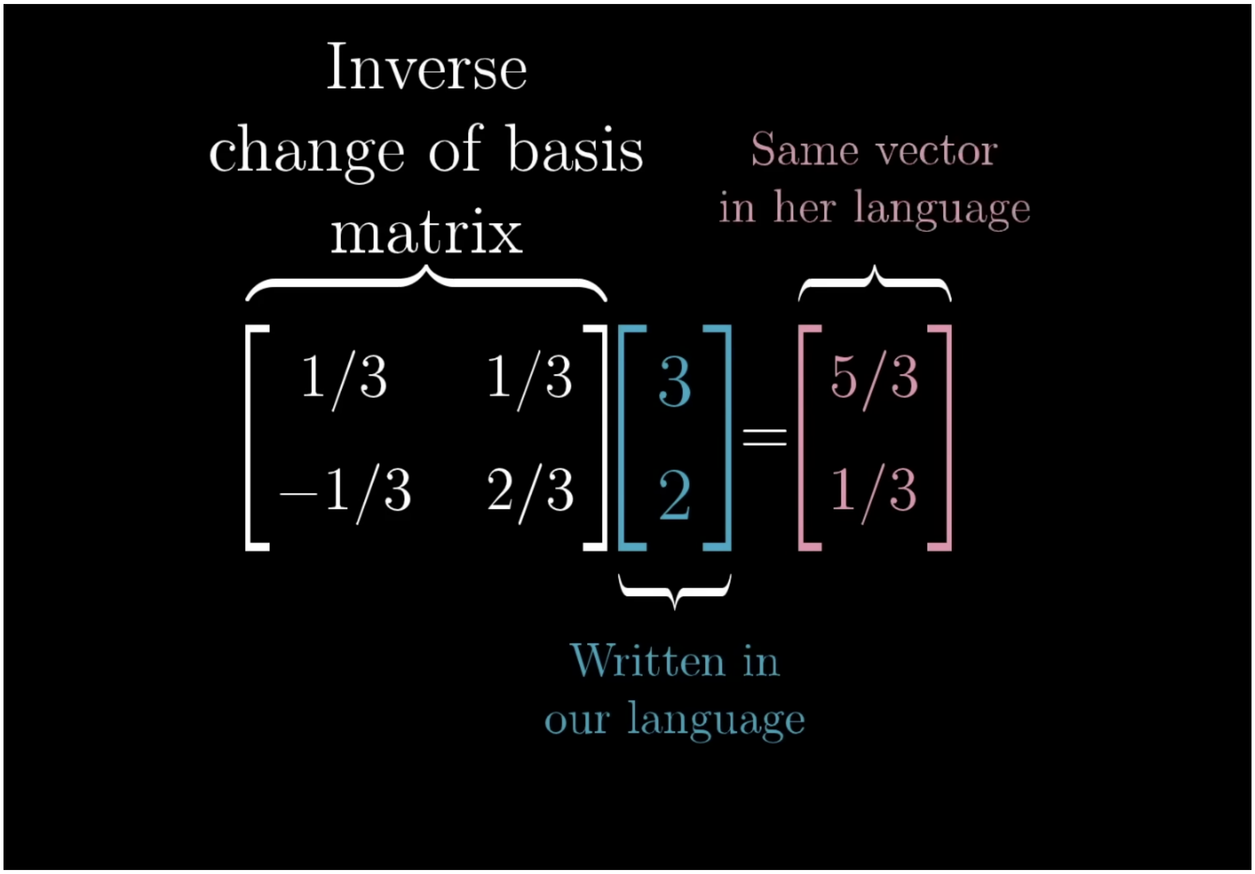


반대의 경우(B→A)에는 역 행렬을 이용한다. 역 행렬은 행렬의 선형 변환을 원래대로 되돌리는 새로운 변환이다.

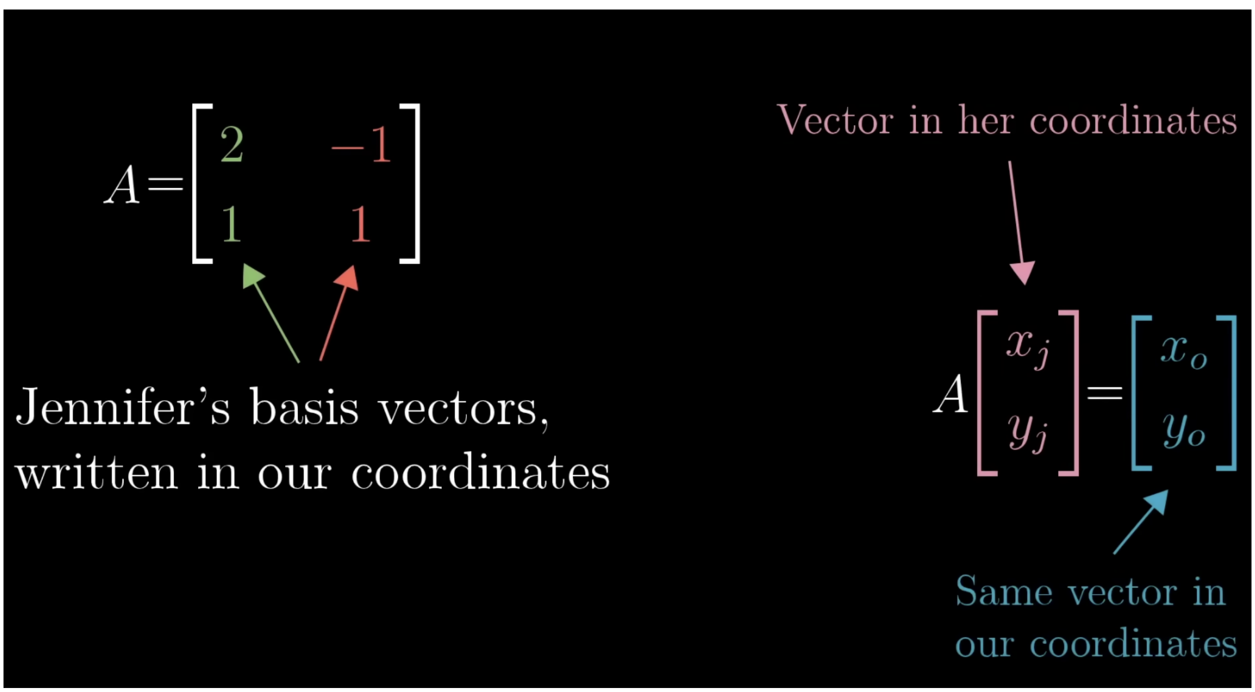




위와 같이 B에서의 [3,2] 벡터가 A 좌표계에서는 [5/3, 1/3]로 표현된다고 하자.

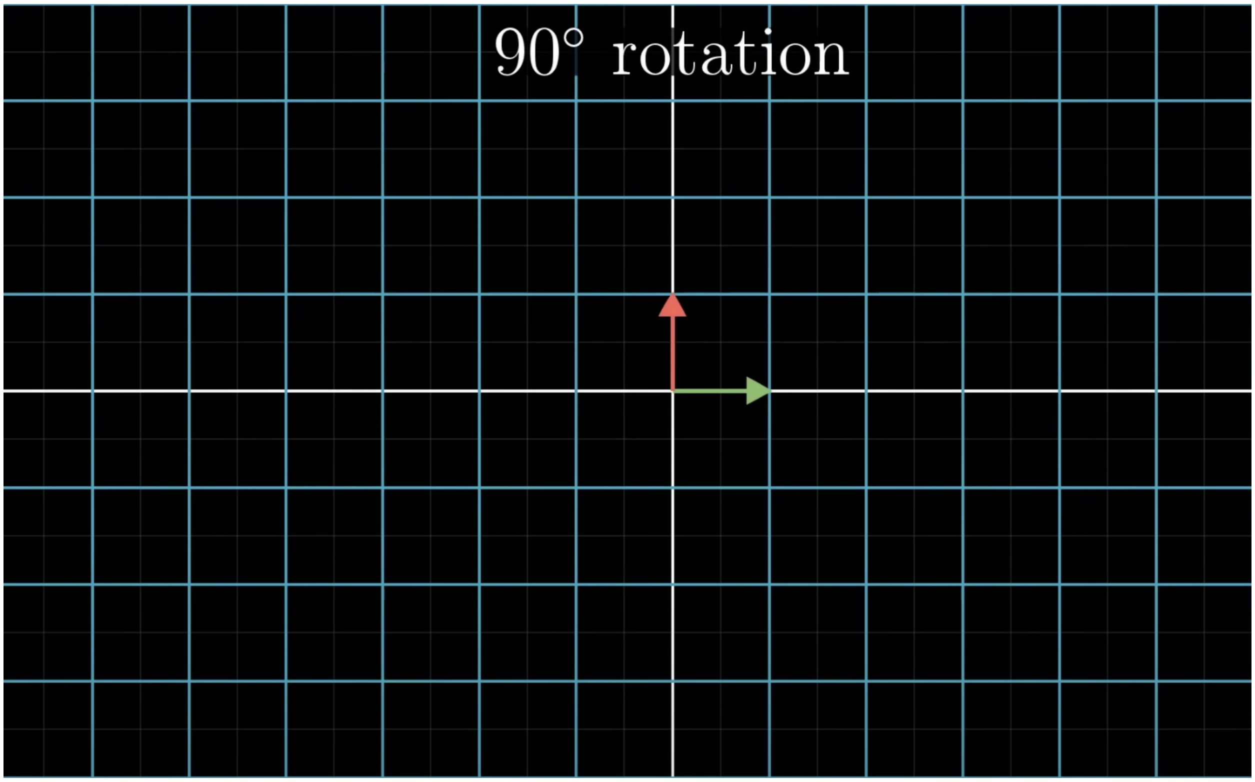


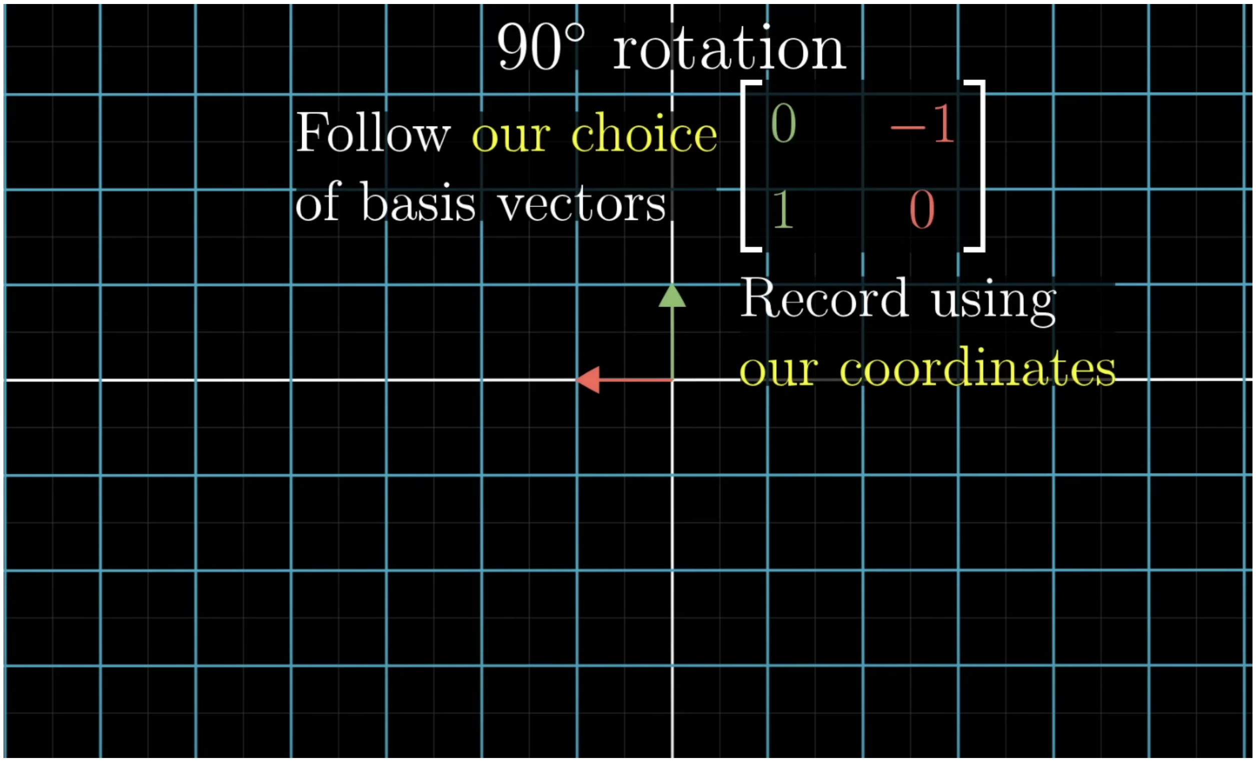
역행렬을 이용해서 구할 수 있다.



정리하면 위와 같다. 기하학적으로는 B→A 이지만 수치적으로는 A→B 라는 말의 이해에 도움이 될 것이다.

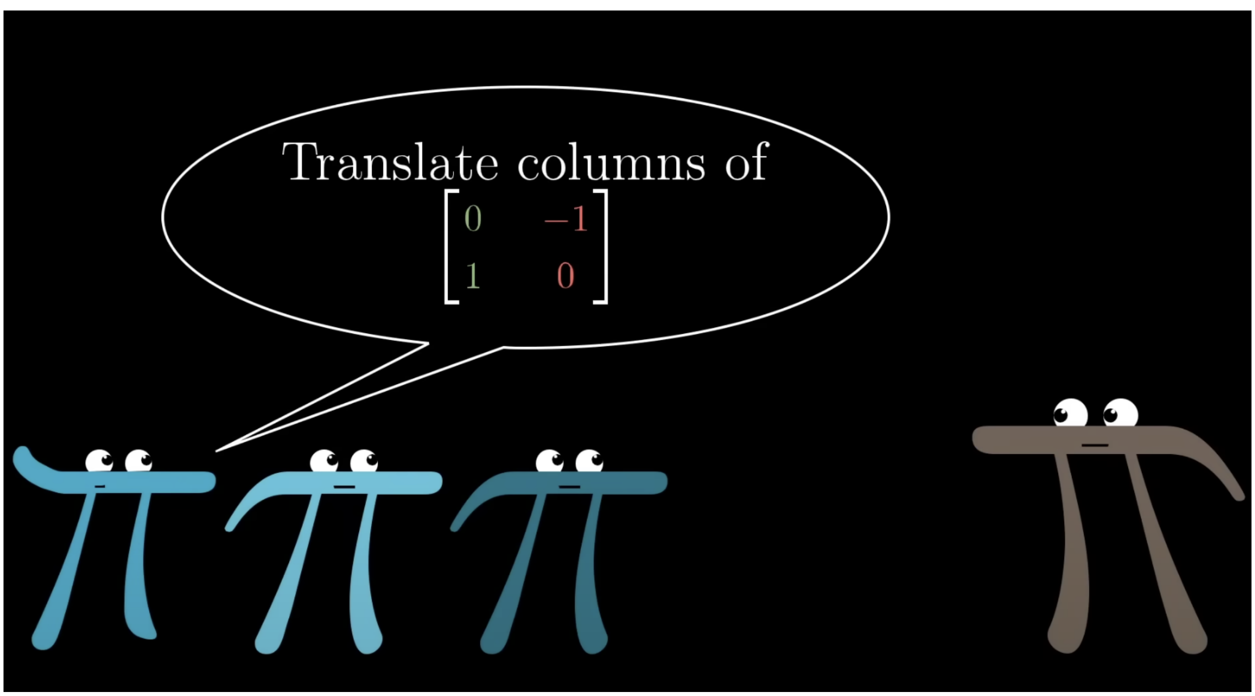
Apply To Matrix



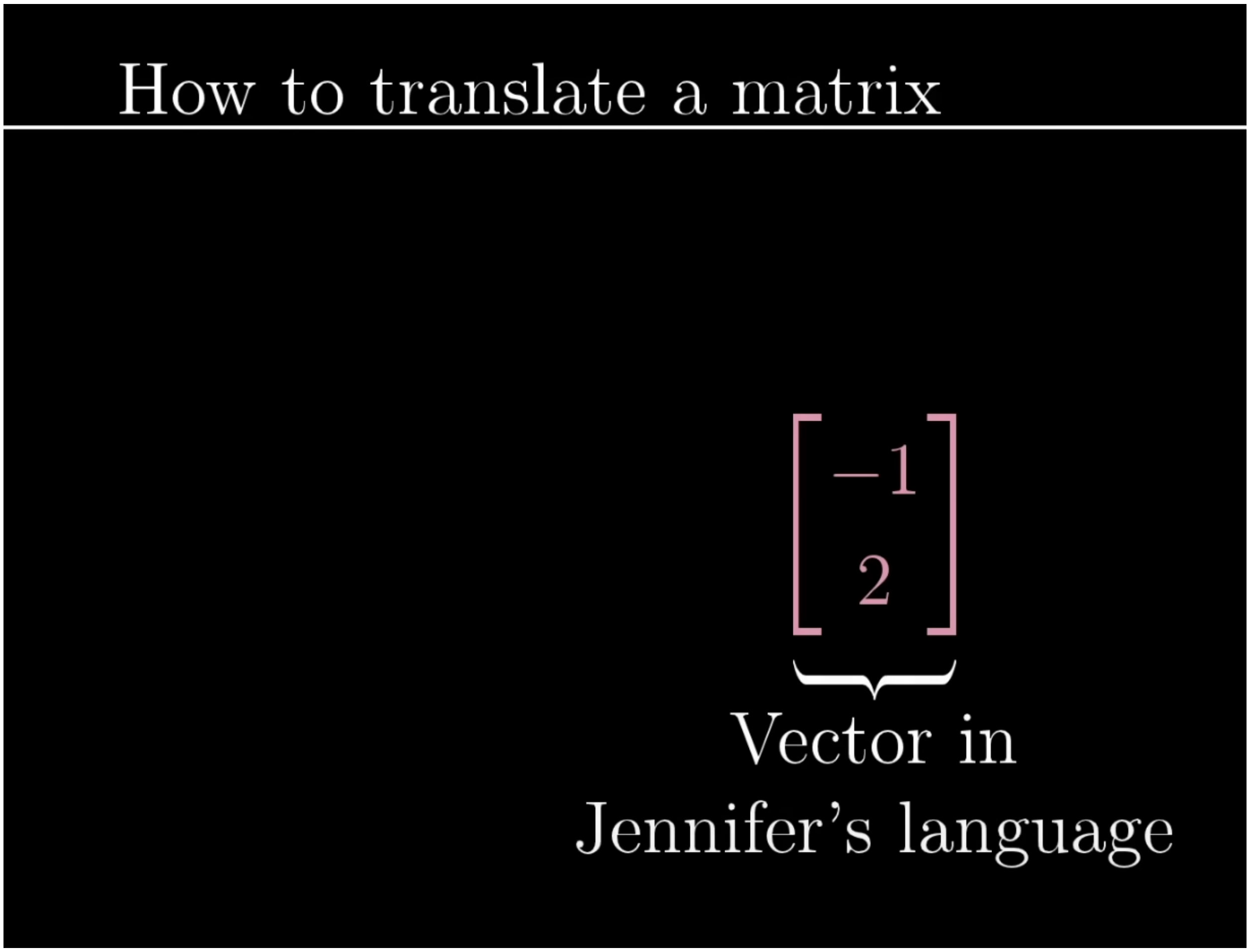


90도 회전 하는 선형 변환을 생각해보자. [1,0] i-hat은 [0,1]로, [0,1] j-hat은 [-1,0]으로 옮겨지게 되고 옮겨진 후의 좌표를 행렬의 열로 표현해서 90도 선형변환을 행렬로 나타낼 수 있다.

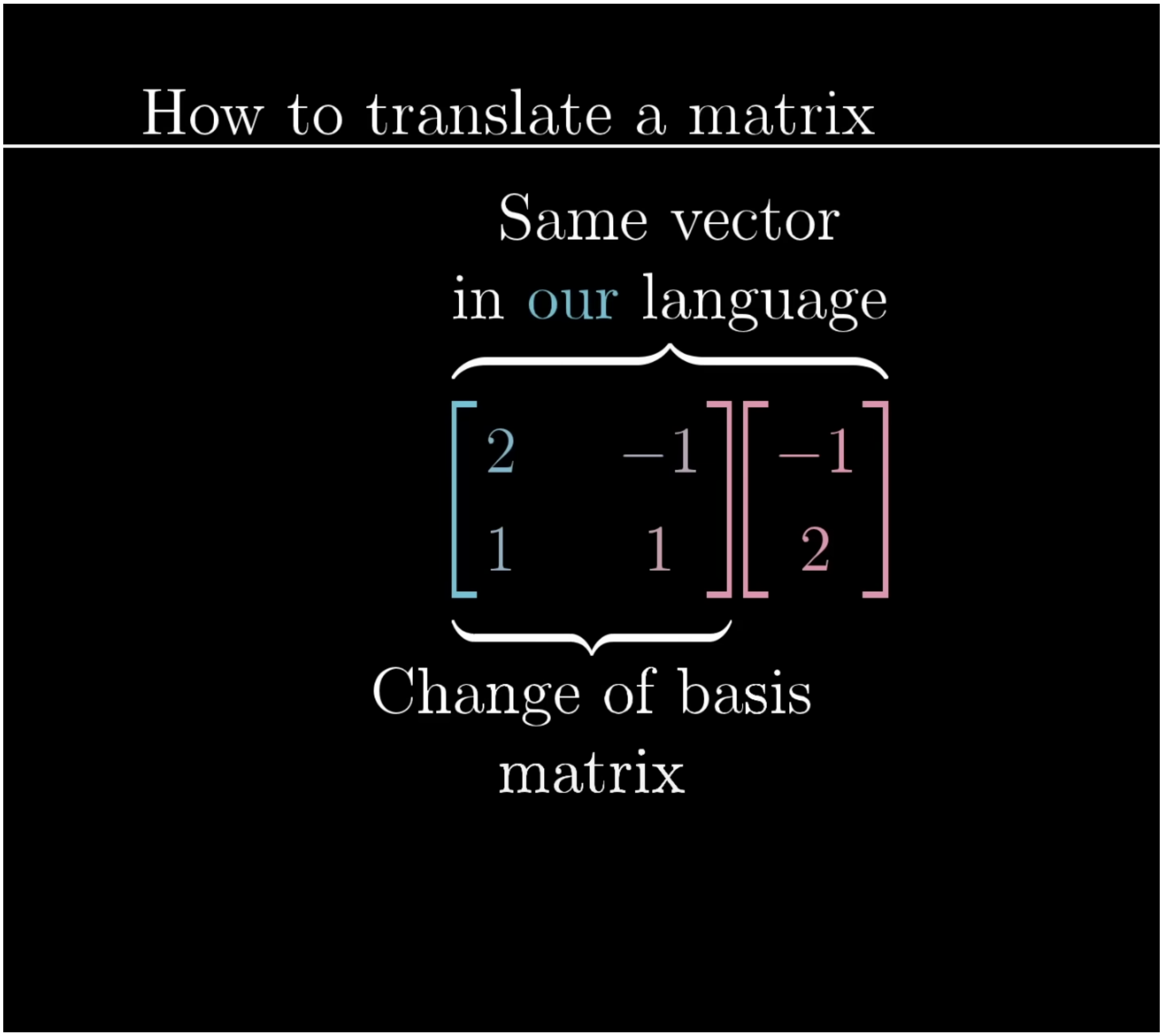
그럼 A 좌표계에서는 어떻게 이 90도 변환을 표현할 수 있을까?



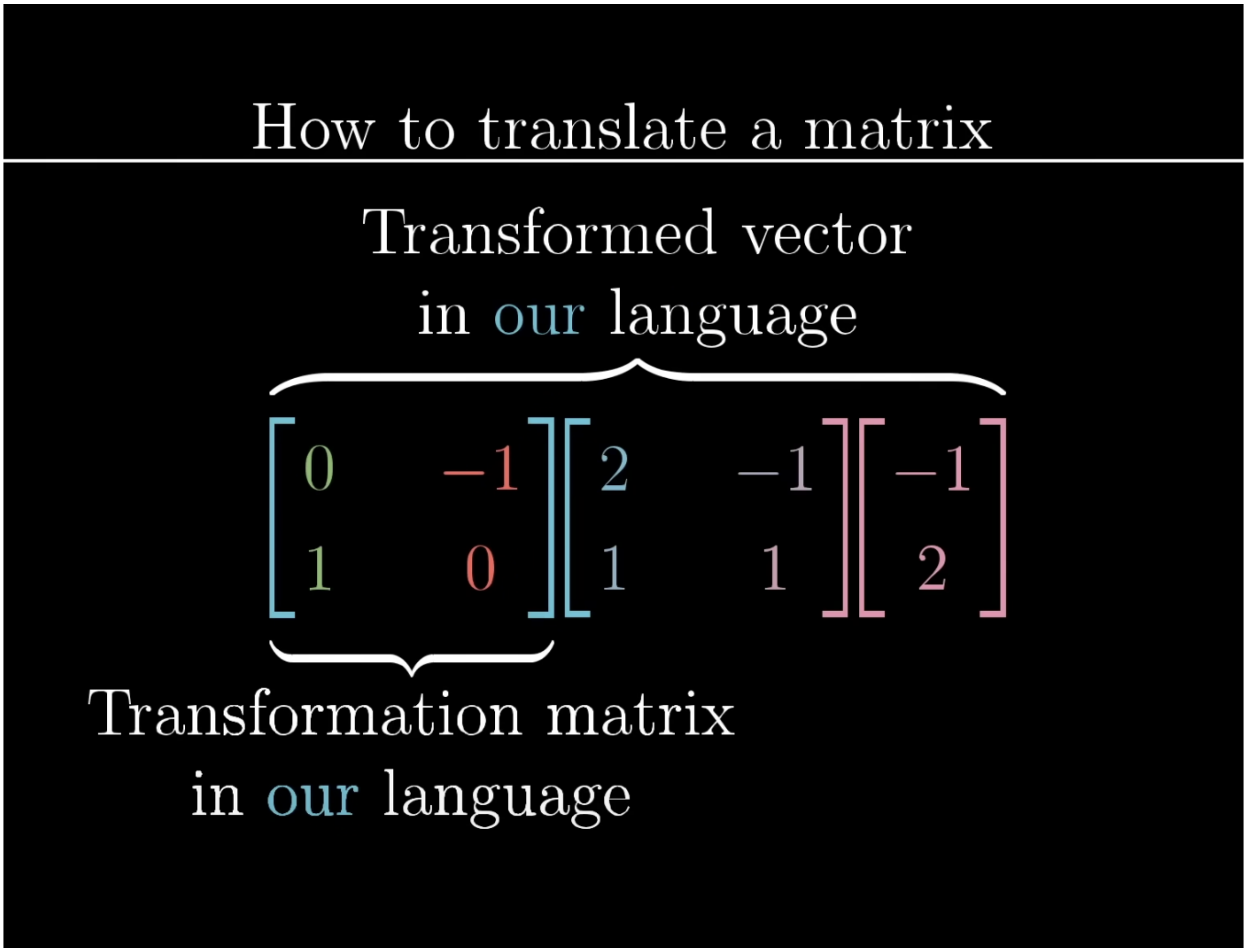
선형 변환 행렬을 변환하는 건 틀렸다. 왜냐하면 이 행렬의 컬럼의 좌표는 B좌표게에서 i-hat, j-hat이 어디에 위치할 지를 나타낸 것이지 A 좌표계의 기저 벡터를 나타내는 것이 아니기 때문이다. 즉 도착 지점을 A 좌표의 기저 벡터로 나타내야 하는 것이다.



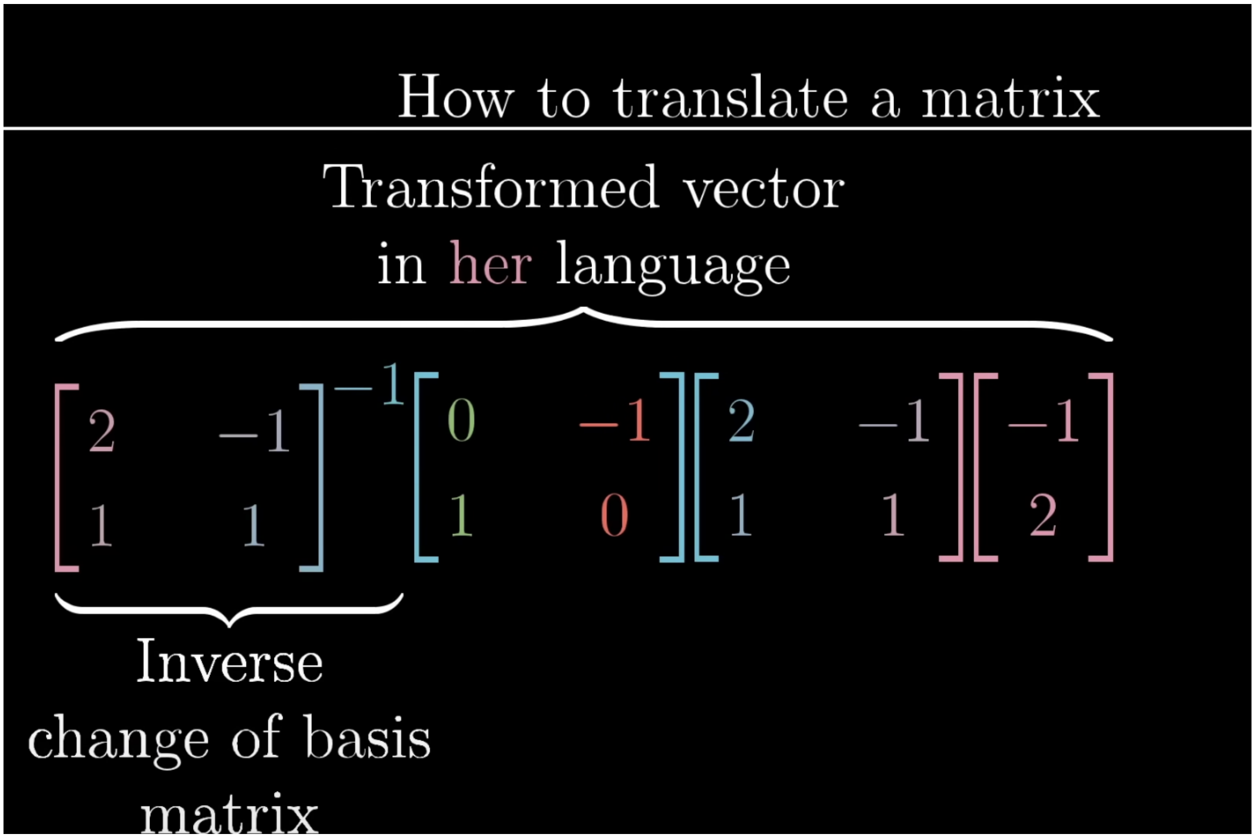
먼저 A 좌표계의 임의의 벡터를 준비한다.



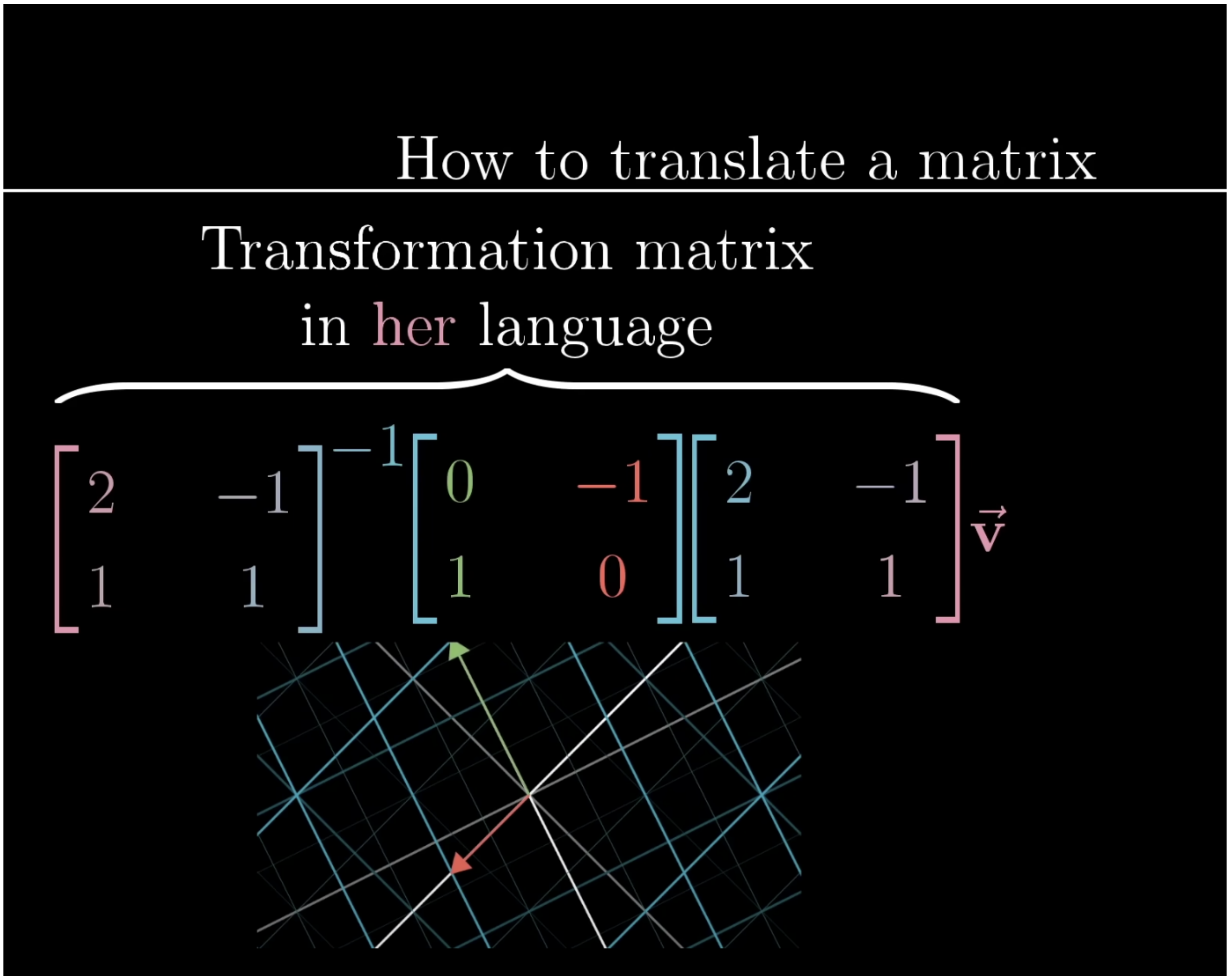
이 벡터에 기저 벡터를 변환하는 선형변환을 해서 A 좌표계의 임의의 벡터를 B 좌표계에서 나타내는 벡터로 변환한다.



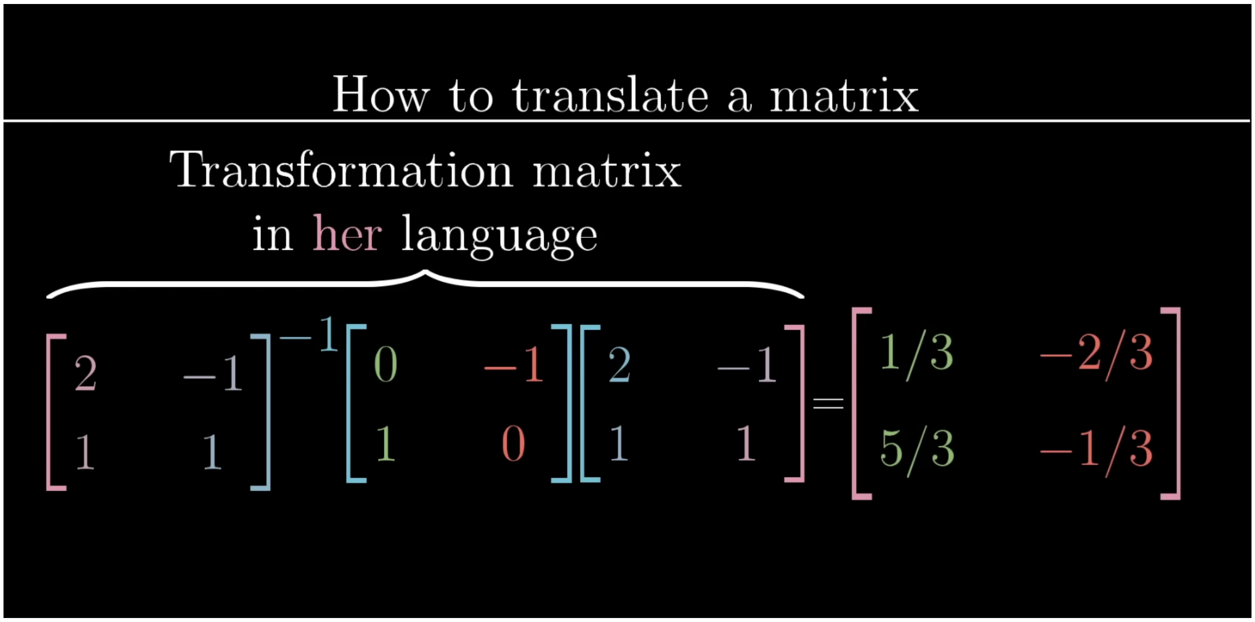
그리고 B 좌표계에서 표시되는 A 좌표계의 임의의 벡터를 의도한 선형변환 시킨다.

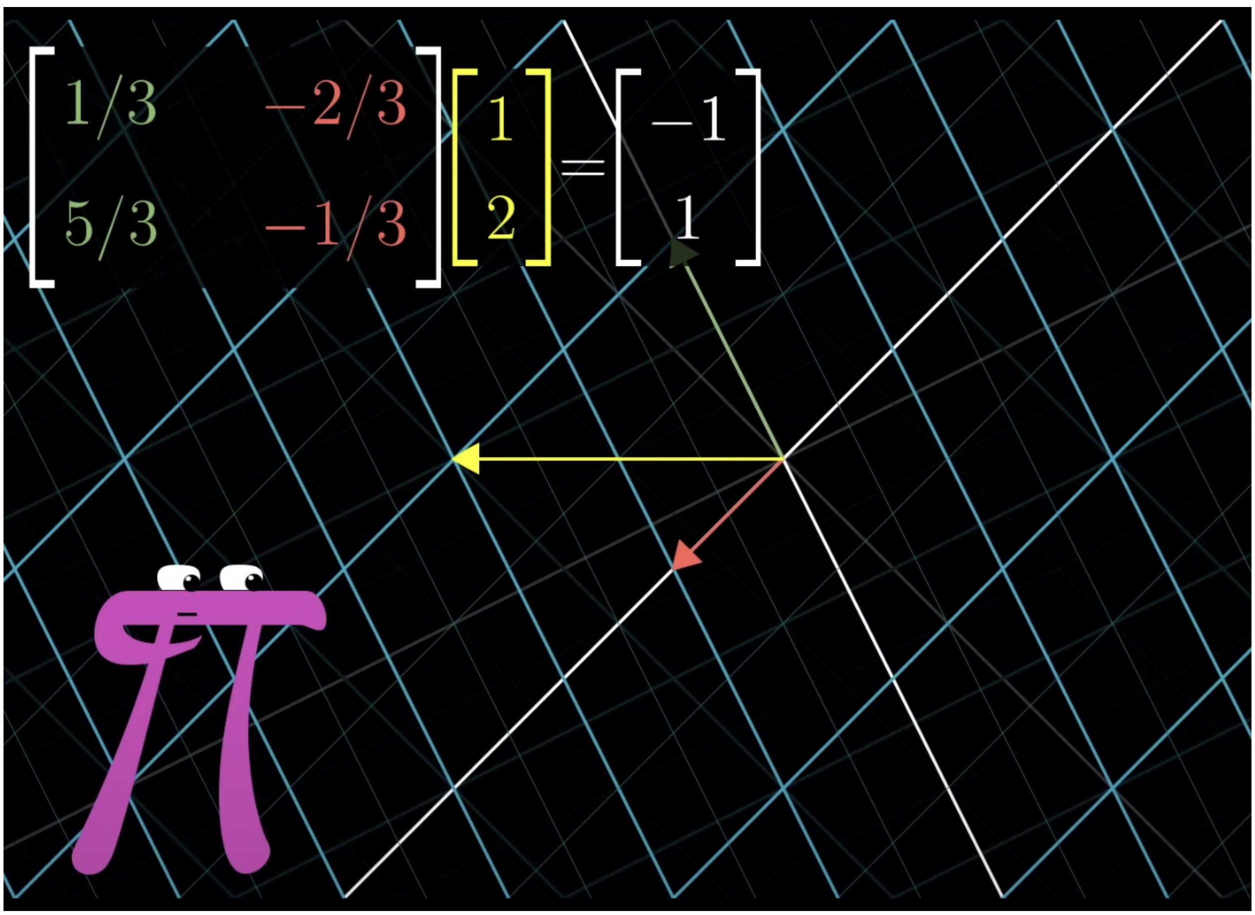


그리고 기저 벡터를 변환하는 선형변환의 역 변환을 해서 A 좌표계의 벡터로 변환시킨다.

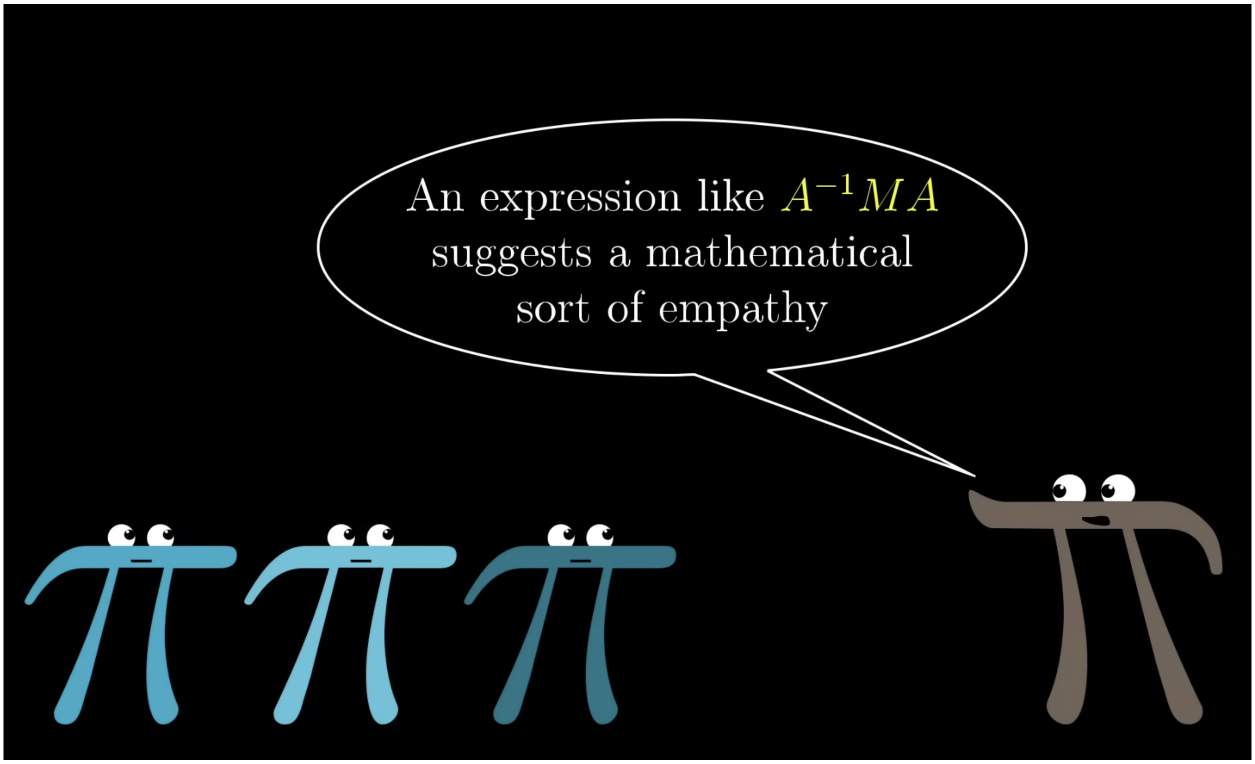


[-1,2]를 임의의 벡터 v-hat으로 표현하면 일반화 시킬 수 있다.





즉 위의 결과 행렬을 A 좌표계에 적용하면 90도 회전하는 변환이 되는 것이다.



A-MA 수식을 볼때 위와 같은 과정을 떠올리길 바란다. M은 선형 변환을, A-, A는 관점의 변환(기저벡터 변환)을 나타낸다.