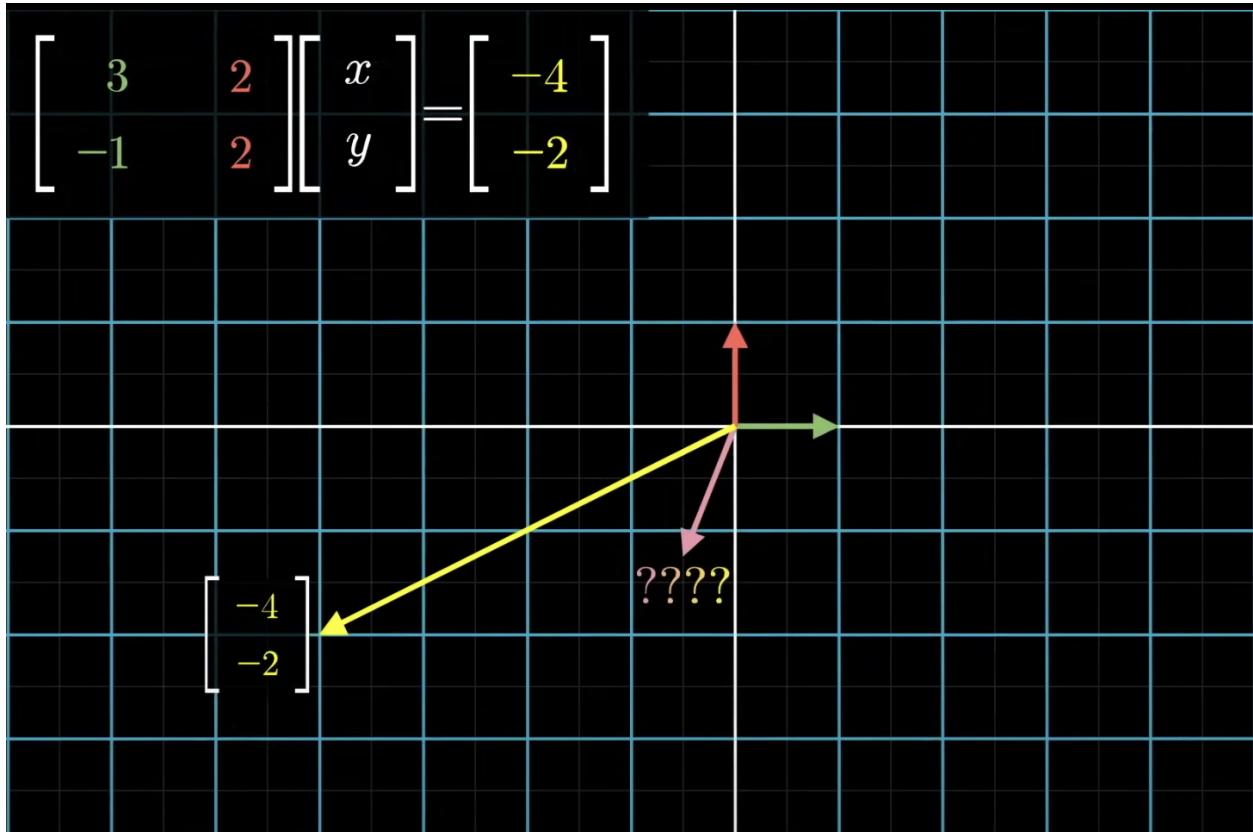
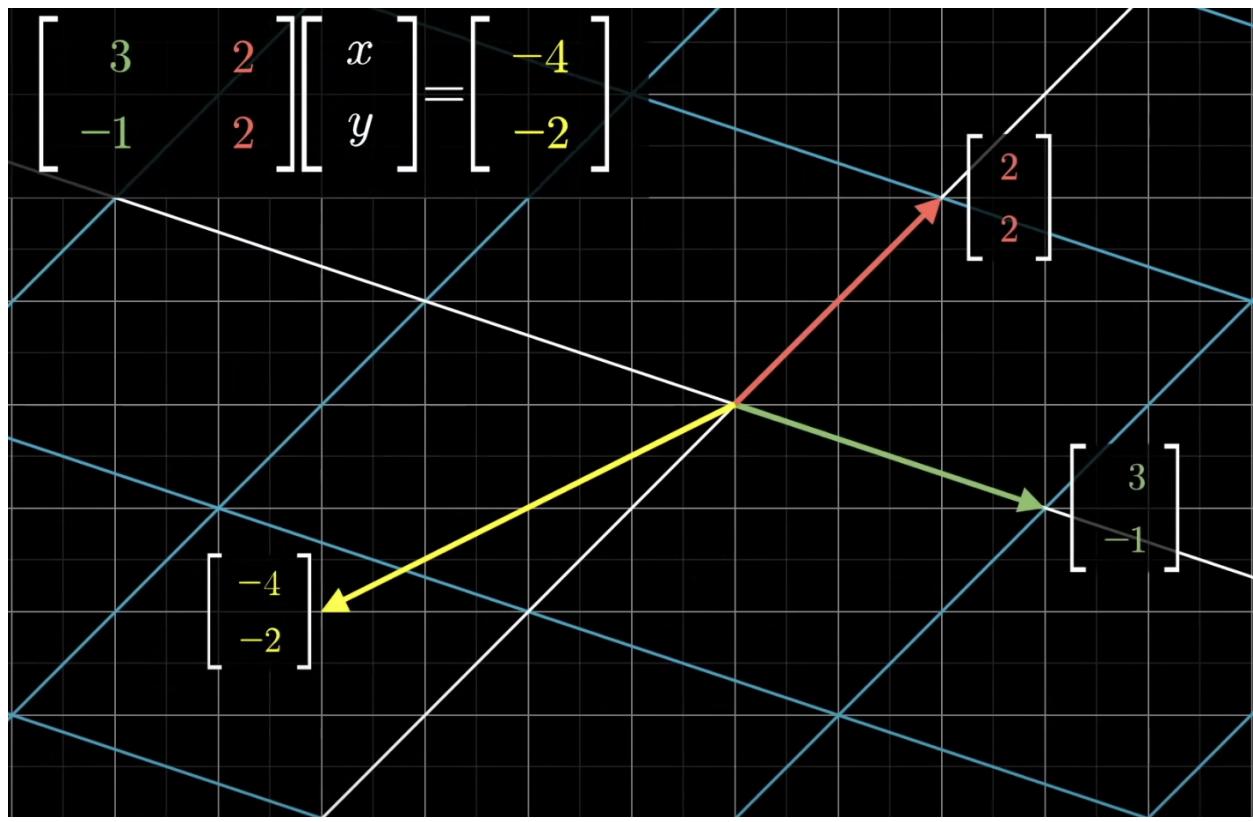


Cramer's rule

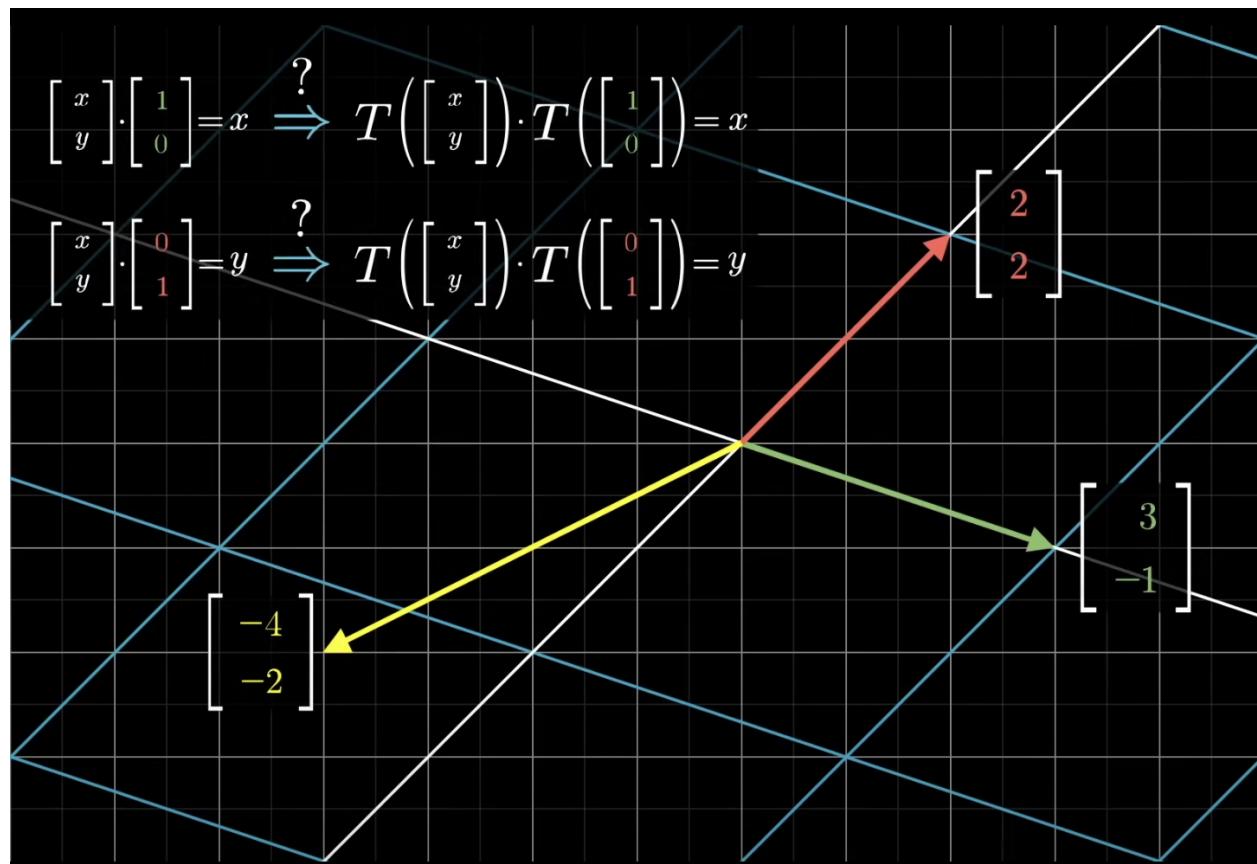
Recap





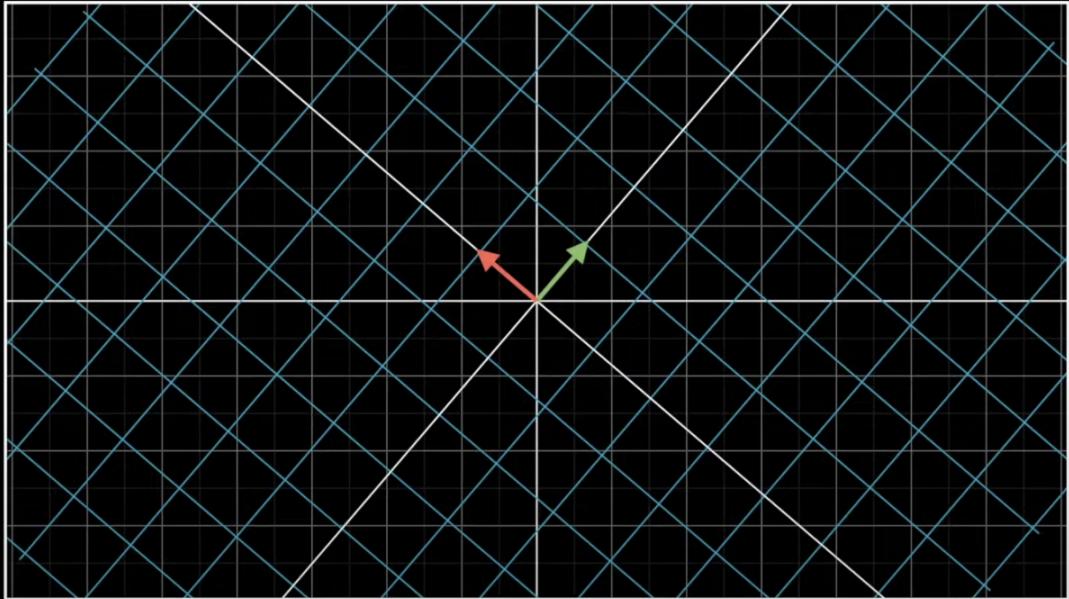
행렬의 열의 쌍은 기저벡터 $i\text{-hat}$, $j\text{-hat}$ 이 변환후 놓이는 좌표를 의미한다. 즉 $i\text{-hat}$ (녹색)은 변환 이후 $[3, -1]$, $j\text{-hat}$ (적색)은 변환 이후 $[2, 2]$ 에 위치하는 것이다. 이때 행렬의 선형 변환을 거치면 $[-4, -2]$ 에 위치하는 $[x, y]$ 좌표는 어떻게 구하는가? (단 행렬식은 0이 아니다 = 즉 차원이 줄어들지 않는다)

Cramer's Rule

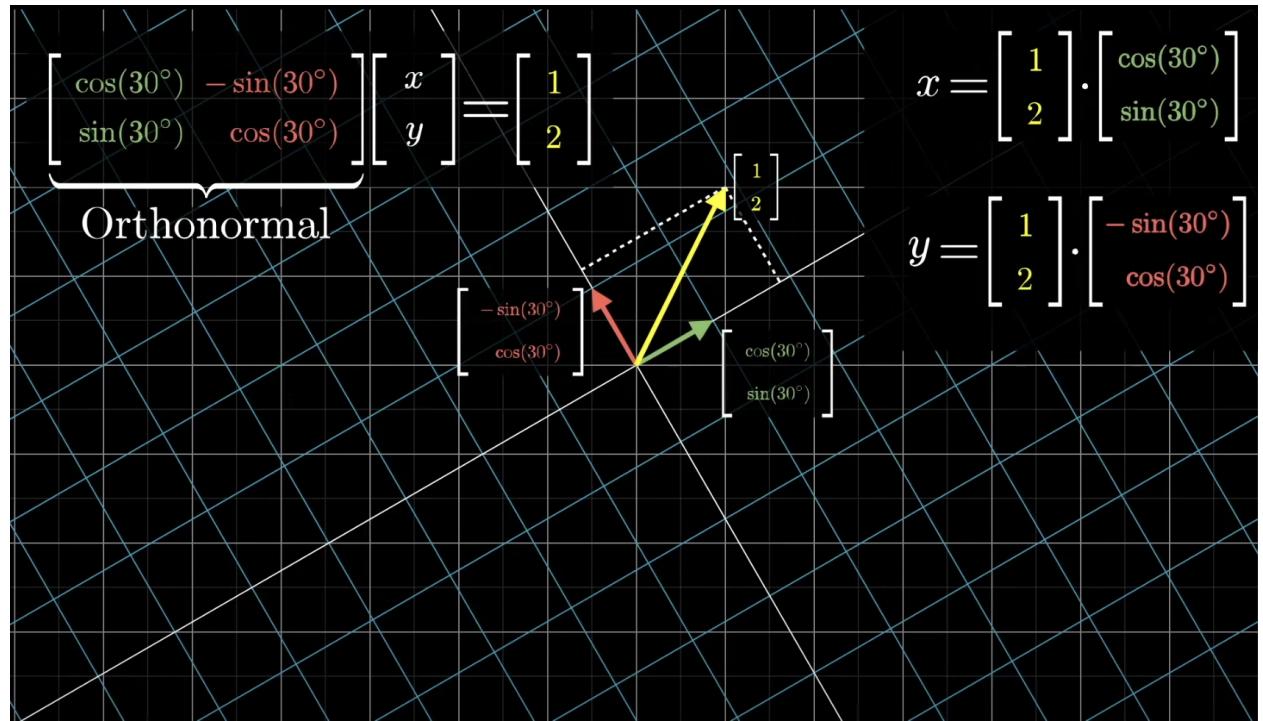


If $T(\vec{\mathbf{v}}) \cdot T(\vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$ for all $\vec{\mathbf{v}}$ and $\vec{\mathbf{w}}$

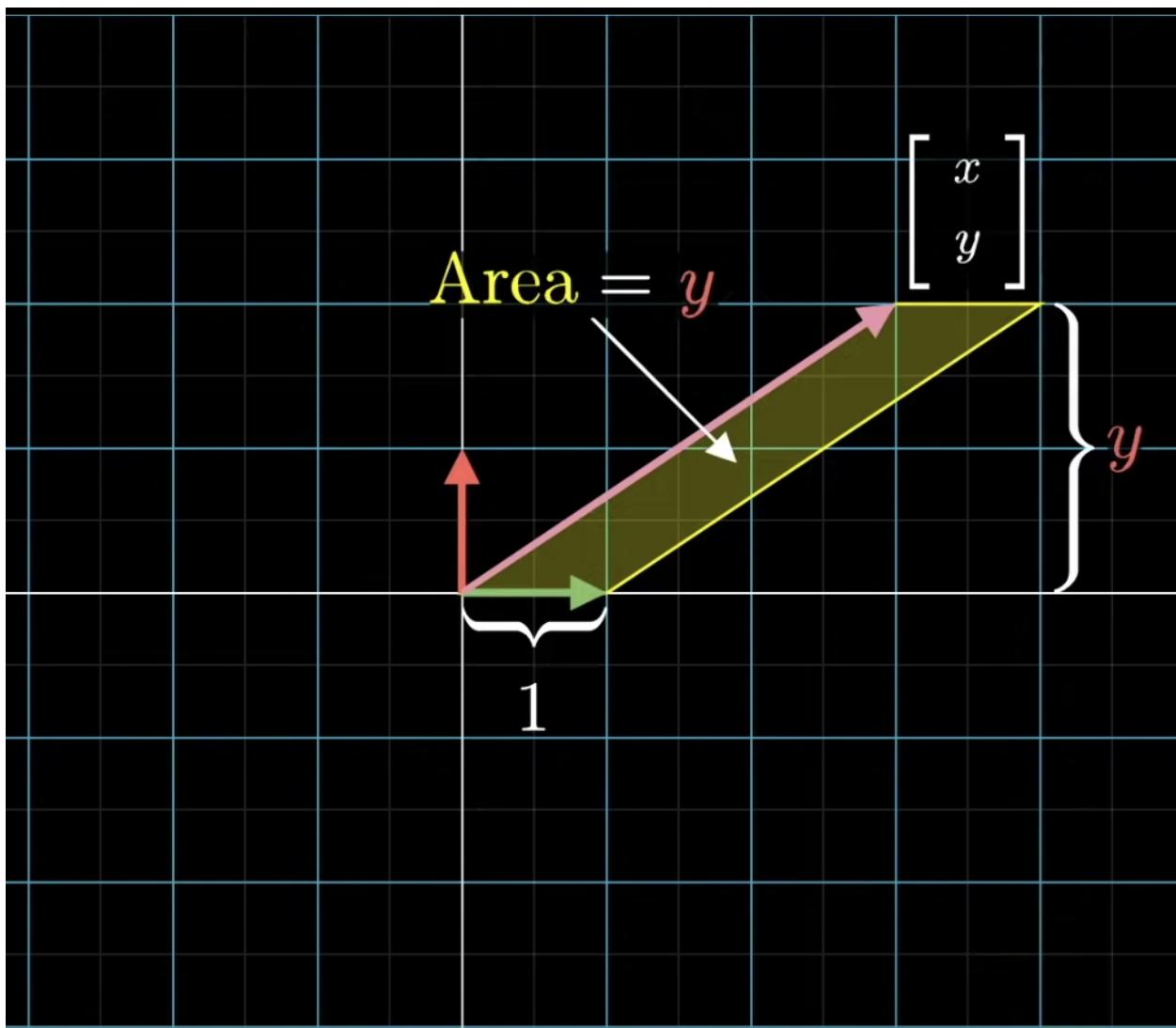
T is “Orthonormal”

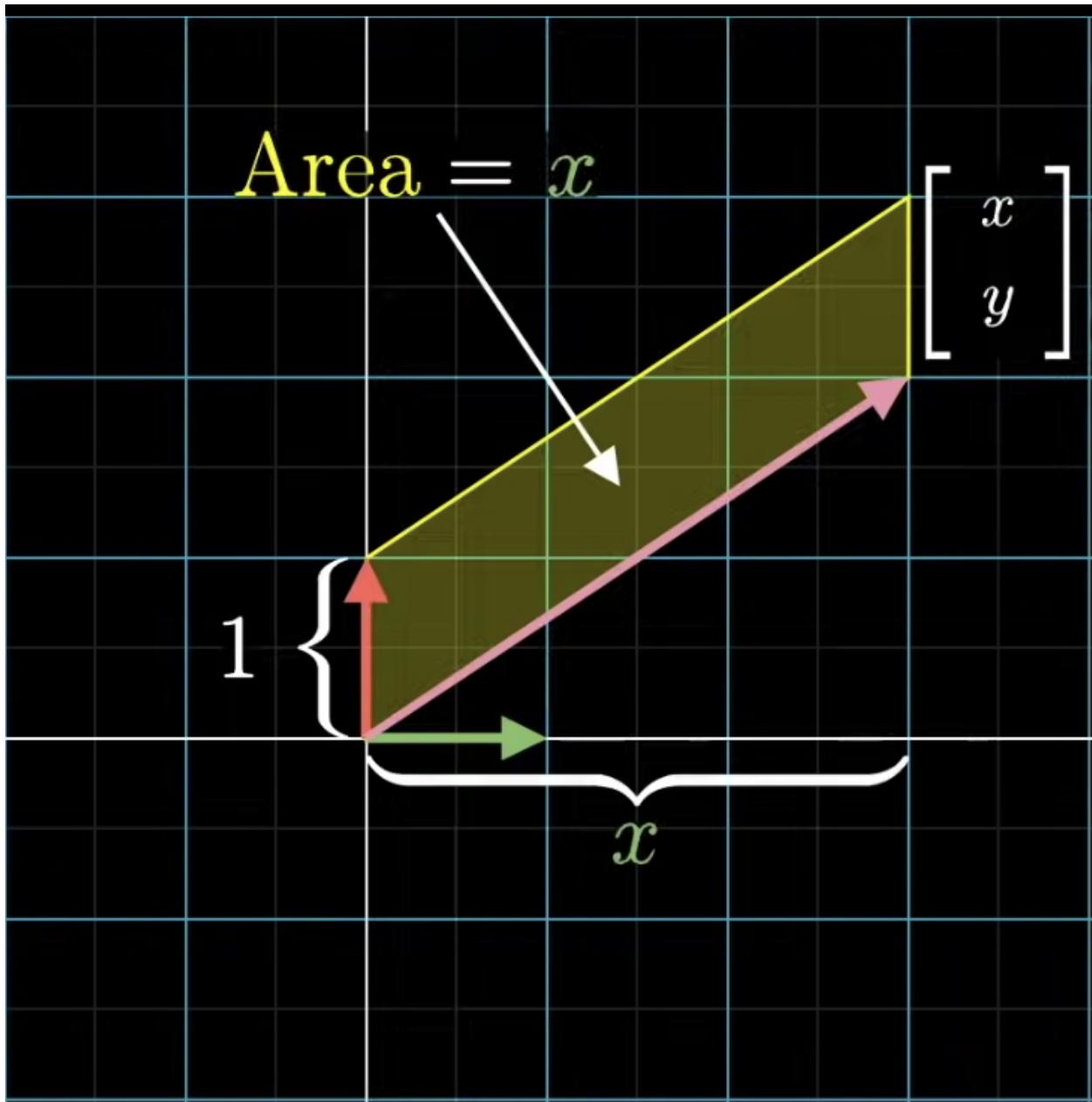


[x,y]를 각각 [1,0], [0,1]과 내적하면 x,y를 구할 수 있을 것이다. 만약 이 때 각각의 항에 선형변환을 위한 행렬을 곱해도 값이 같으면 변환이 orthonormal(직교) 한다고 한다. 좌표계를 돌리는 행렬(선형 변환)을 생각하면 쉽다.

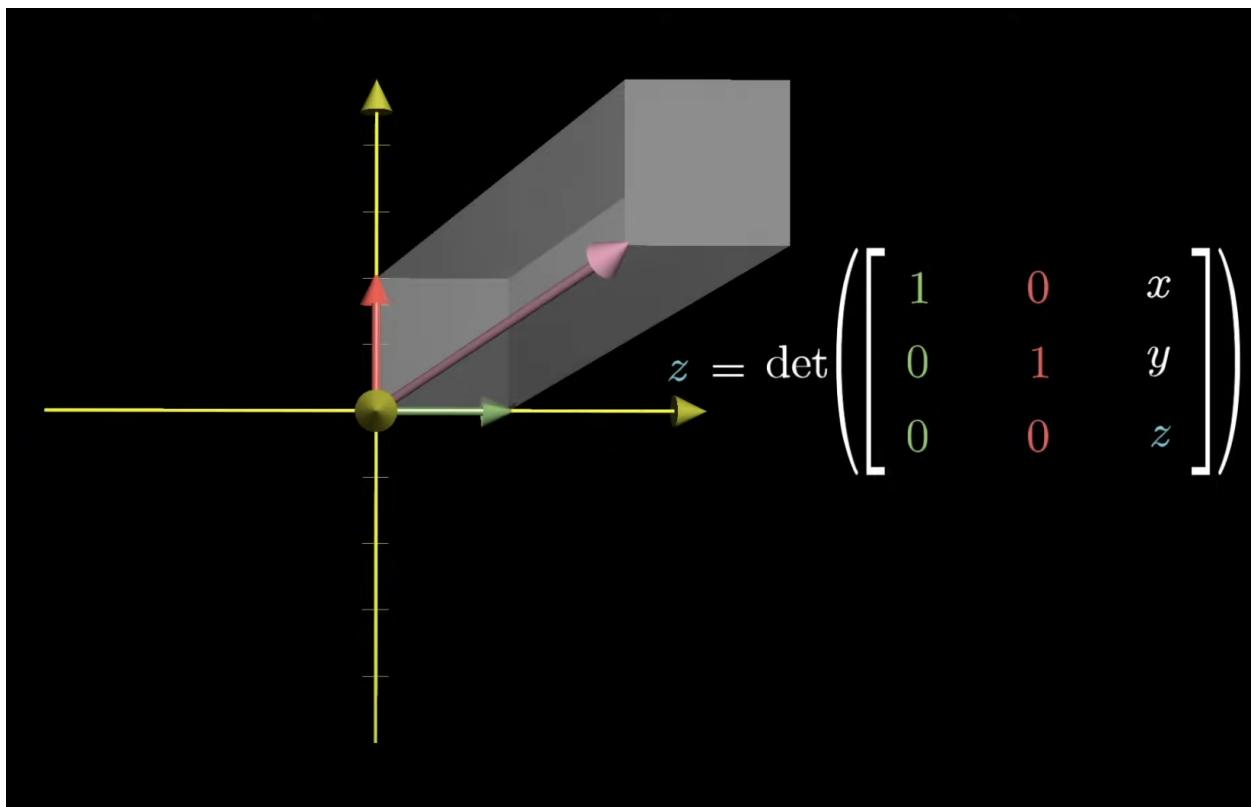


행렬이 직교 할 경우, 입력 벡터 $[x,y]$ 행렬의 컬럼과 결과 벡터 $[1,2]$ 와 각 행렬의 각 열의 내적을 구해서 알아낼 수 있다. 왜냐면 내적이 보존될 경우 (행렬이 직교할 경우), 입력벡터와 행렬의 각 열의 내적을 구하는 것은 결과 벡터와 행렬의 각 열의 내적을 구하는 것과 같기 때문이다 (?)

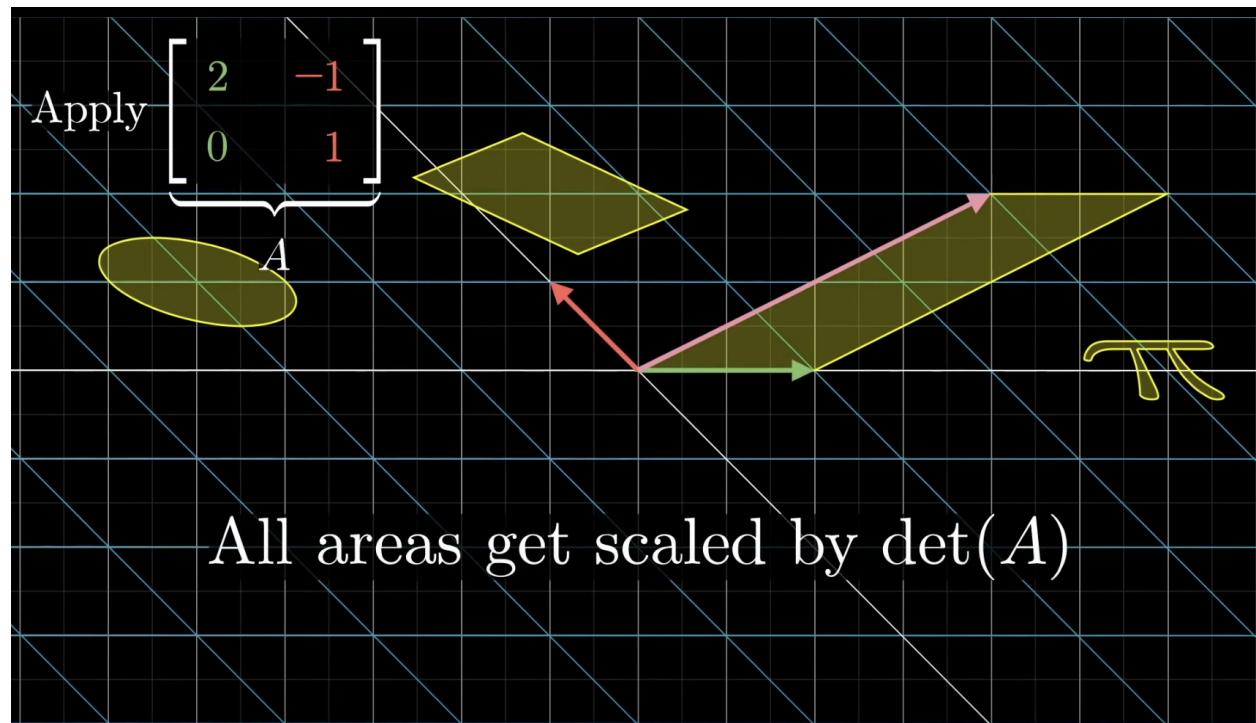


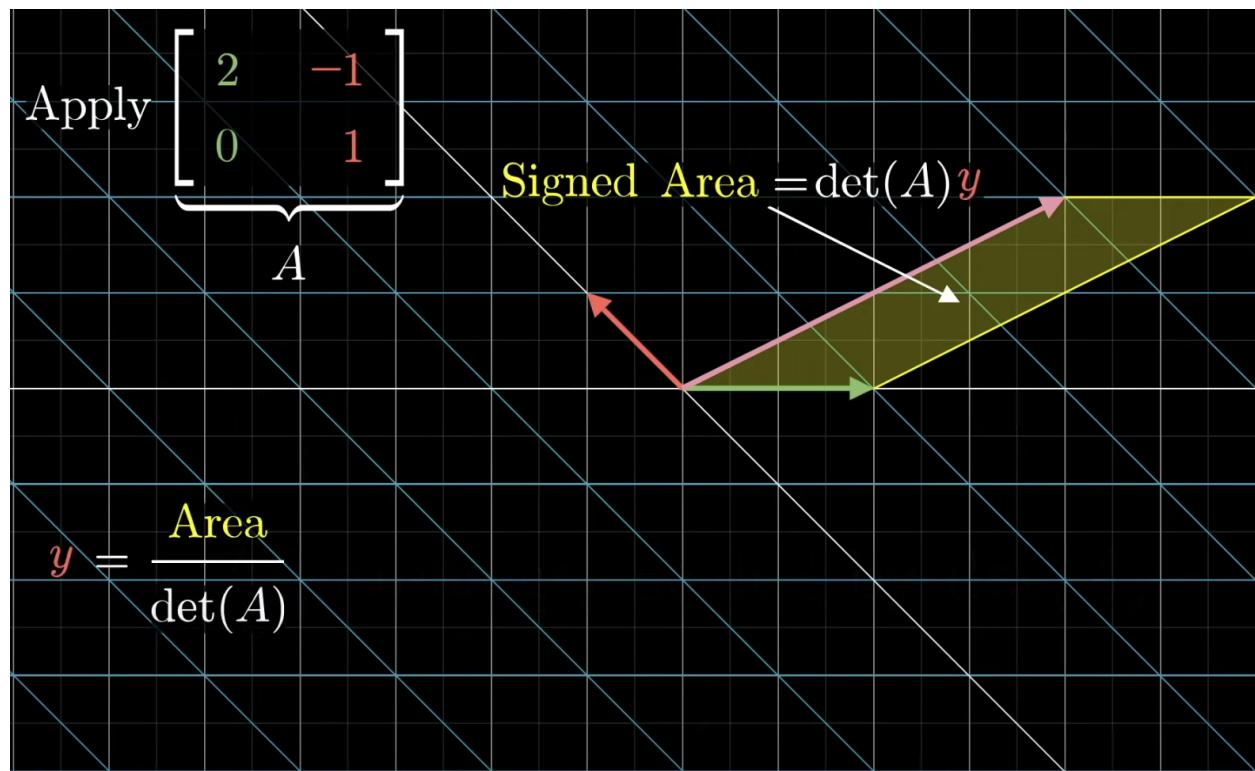


위 아이디어를 가지고 이 좌표를 보면, $[x,y]$ 벡터를 y 영역이라고, 또는 x 영역이라고 생각해볼 수 있다.

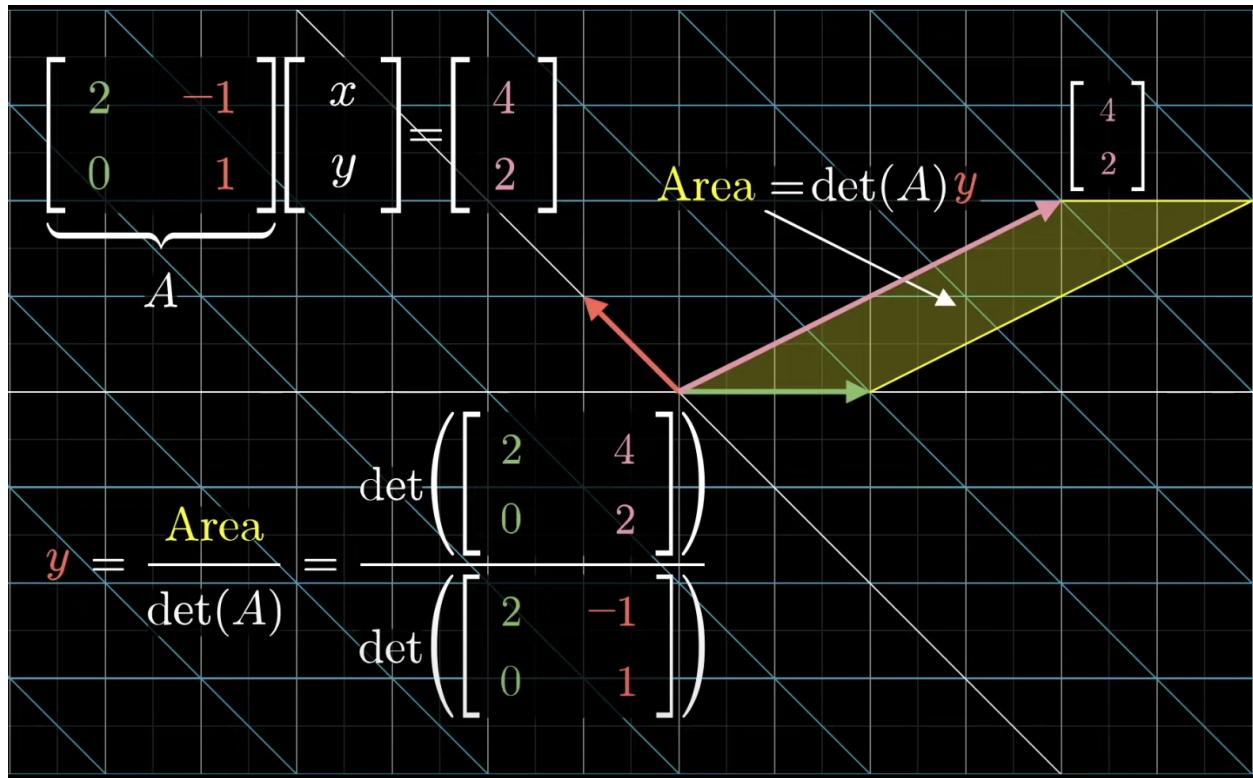


3차원에서라면 이렇게 표현할 수 있다. (1,1,z)인 영역 z는 $\det(M)$ 와 같다.

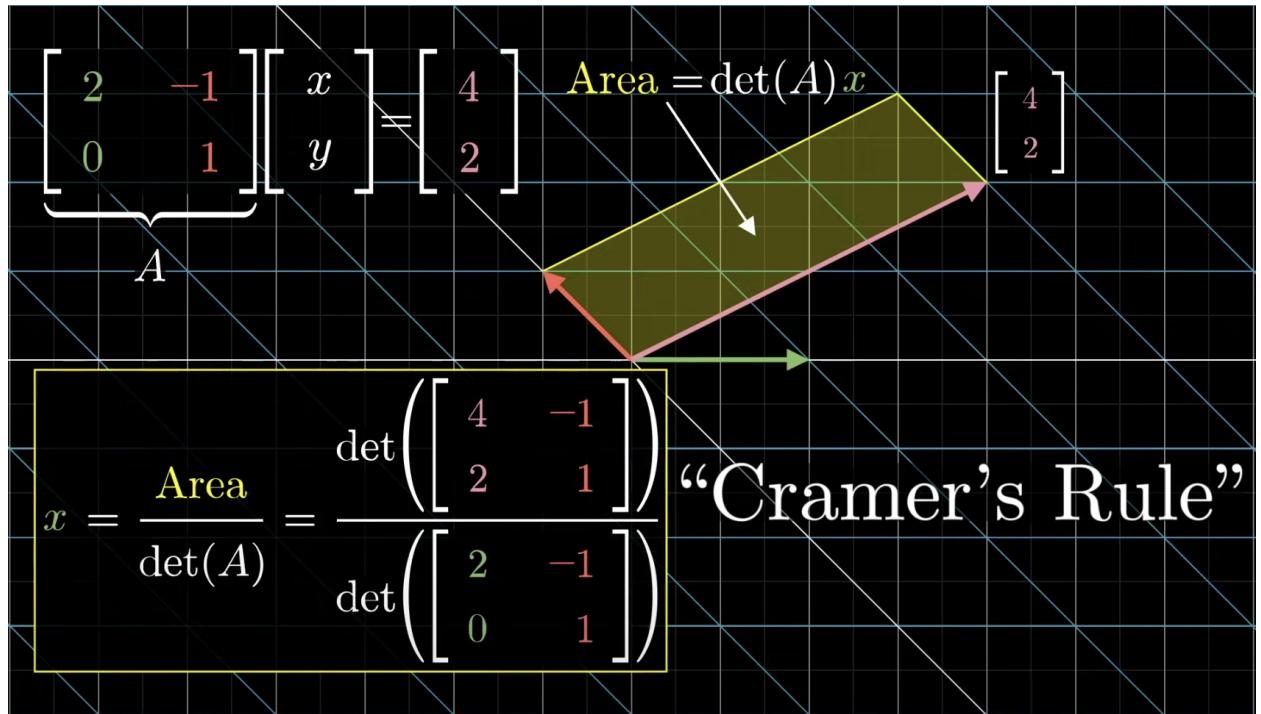




선형 변환시 모든 영역은 $\det(A)$ 행렬 식만큼 스케일링 된다. 즉 아까 y 영역은 선형 변환(A 행렬 곱) 후 $\det(A)*y$ 영역이 될 것이고, y 는 변환 후 Area를 행렬식으로 나눈 값으로 구할 수 있게 될 것이다.



그럼 이 변환 후 Area의 넓이는 어떻게 구하는가? 2차원 좌표계에서 넓이는 행렬식으로 구할 수 있고, 위 그림에서 볼 수 있듯, $[4, 2]$ 벡터를 이미 알고 있고 변환한 $i\text{-hat}$, $j\text{-hat}$ 의 좌표도 행렬의 컬럼으로 표시되므로 변환한 $i\text{-hat}$ 의 좌표 $[2, 0]$ 와 결과 벡터 $[4, 2]$ 로 이루어진 행렬의 행렬식을 구함으로써 알 수 있다.



j-hat을 이용해도 마찬가지이다. 이를 크라메르의 법칙이라고 한다.

Apply Cramer’s Rule to N-dimension

$$3x + 2y - 7z = 4$$

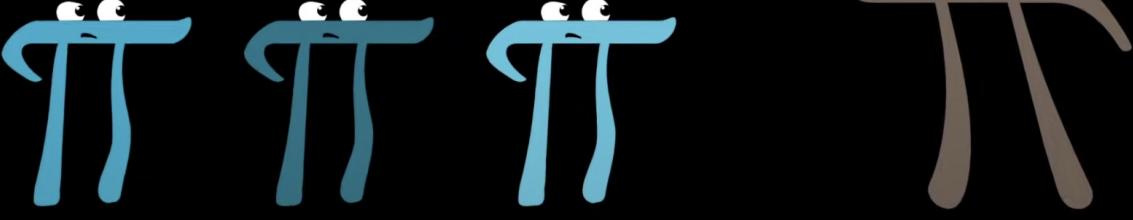
$$1x + 2y - 4z = 2$$

$$4x + 0y + 1z = 5$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{Mystery input}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Mystery input

$$\left[\begin{array}{ccc} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & -9 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 7 \\ -8 \\ 3 \end{array} \right]$$

$$x = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix} \right)}{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & -9 \end{bmatrix} \right)}$$


크라메르의 법칙을 다차원으로 적용하는 것을 직접 해보면 이해에 더 도움이 될 것이다.