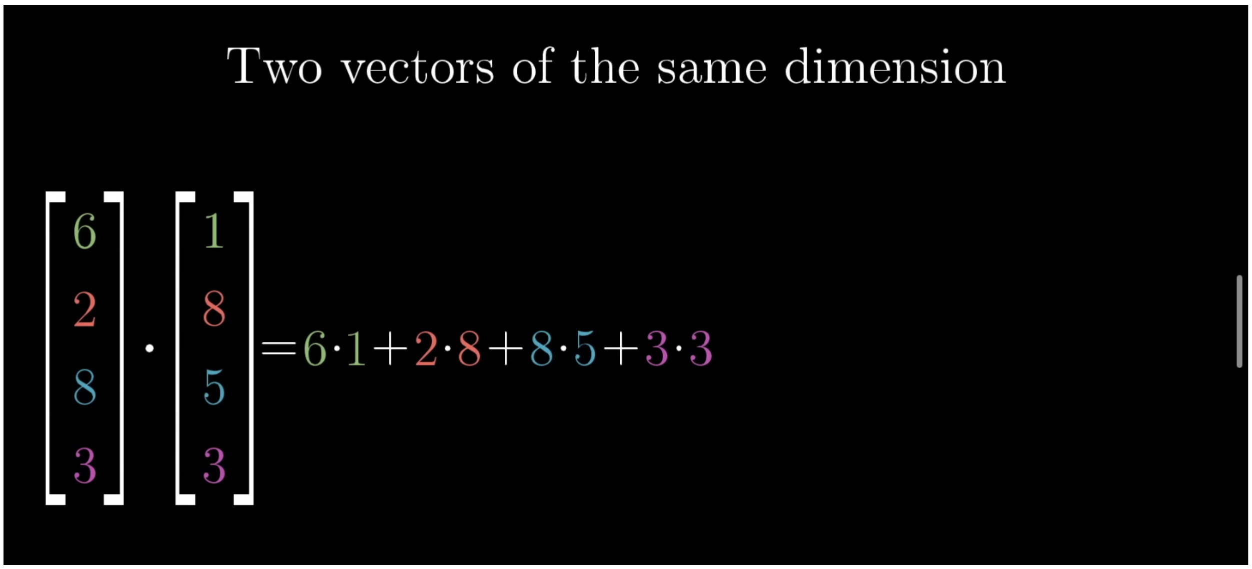
Dot Product

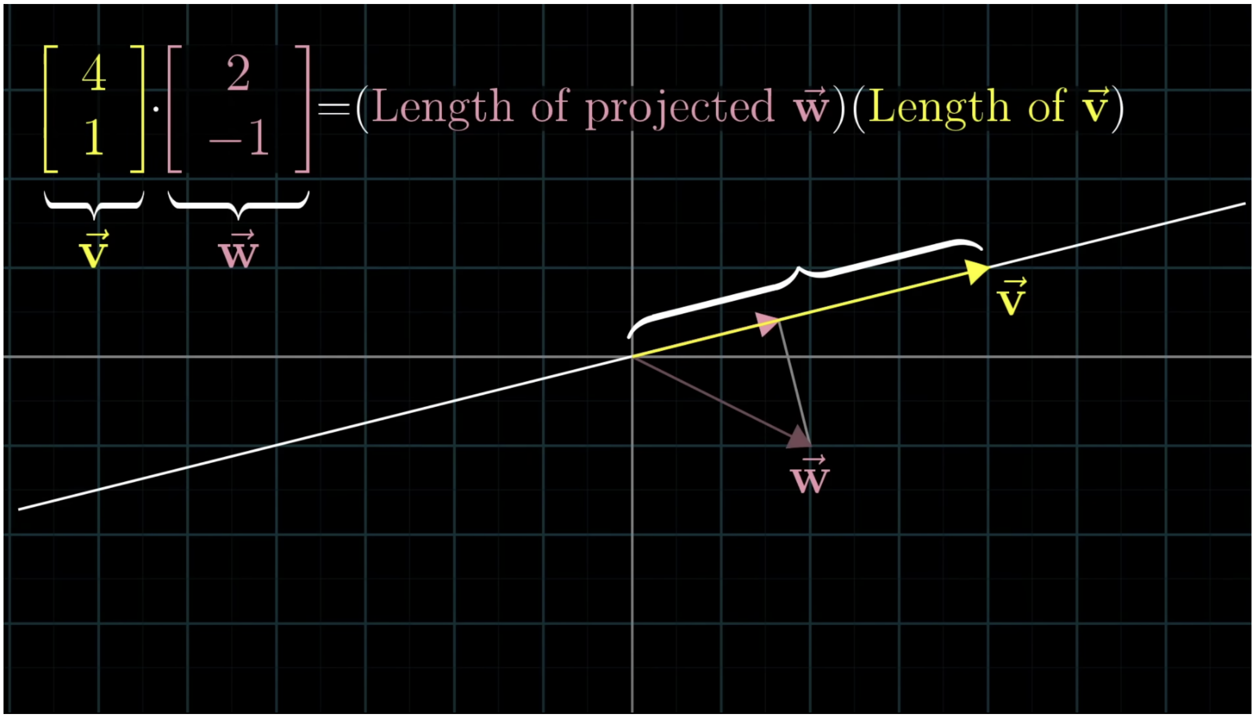
Definitions

Numerical



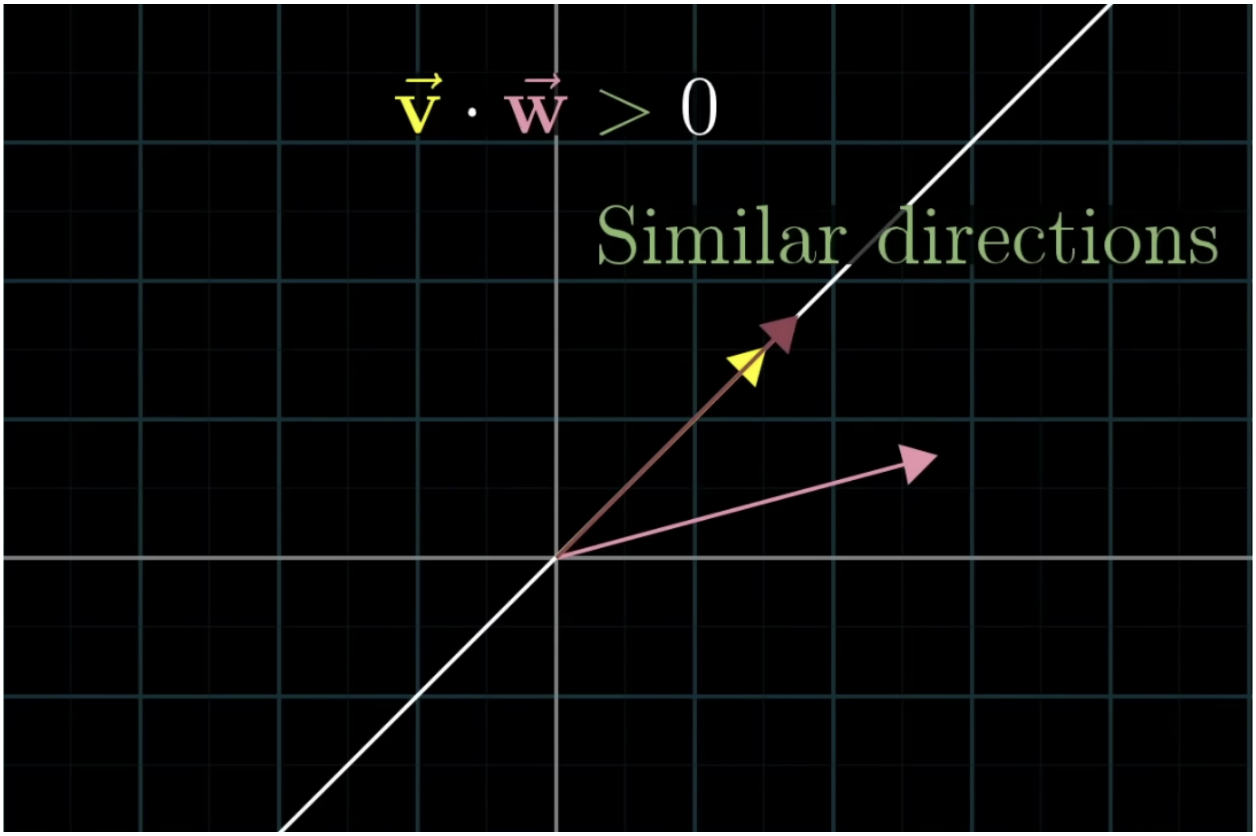
수치적으로 내적(dot product)은 같은 좌표값의 쌍을 곱하고 모두 더하는 것이다.

Geometrical

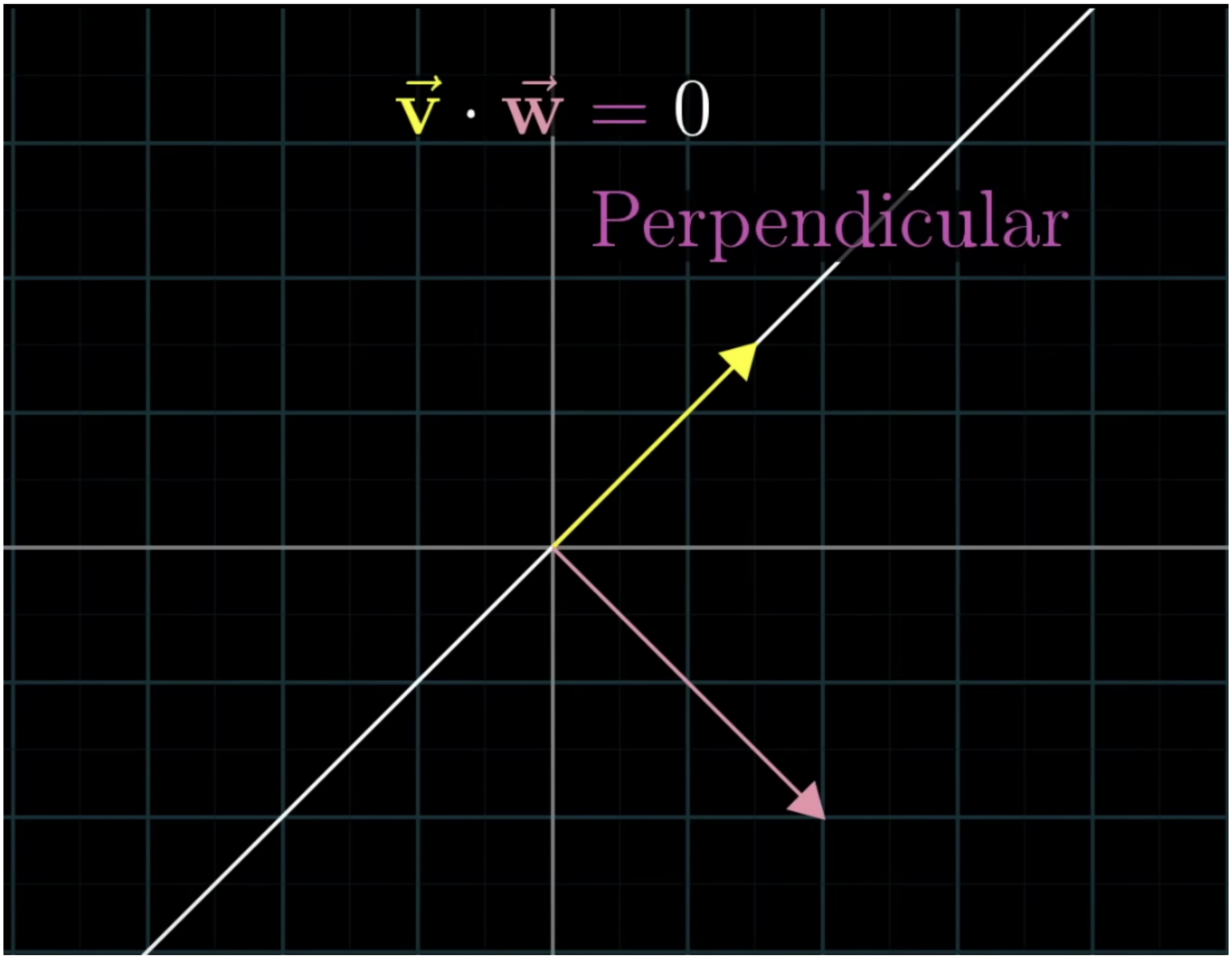


기하학적으로 내적은 하나의 벡터를 다른 벡터에 투영(projection)하는 것이다. (벡터의 순서는 관계없다.)

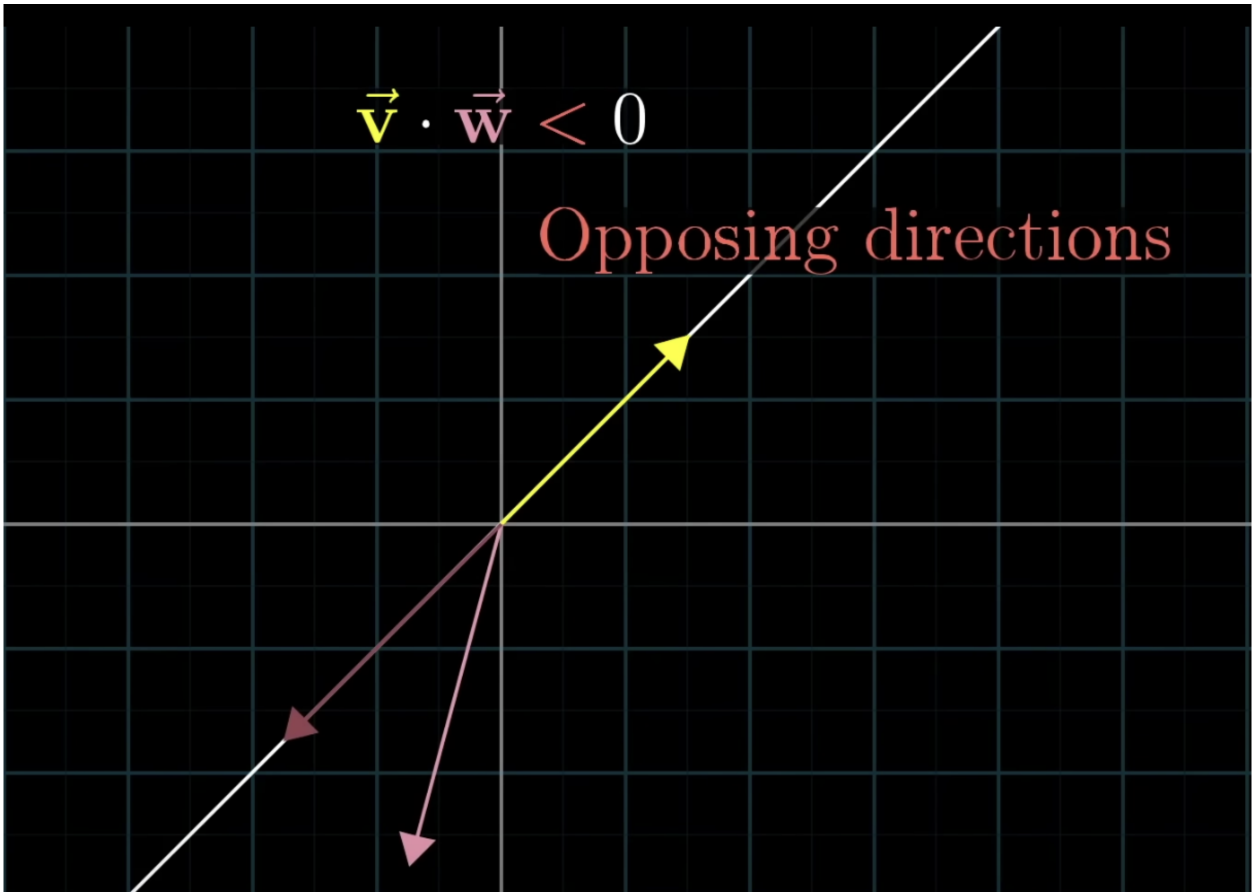
즉 내적은 v벡터의 길이와 w벡터의 길이를 곱하는 것이다.



만약 두 벡터가 같은 방향을 가리키면 내적은 양수,

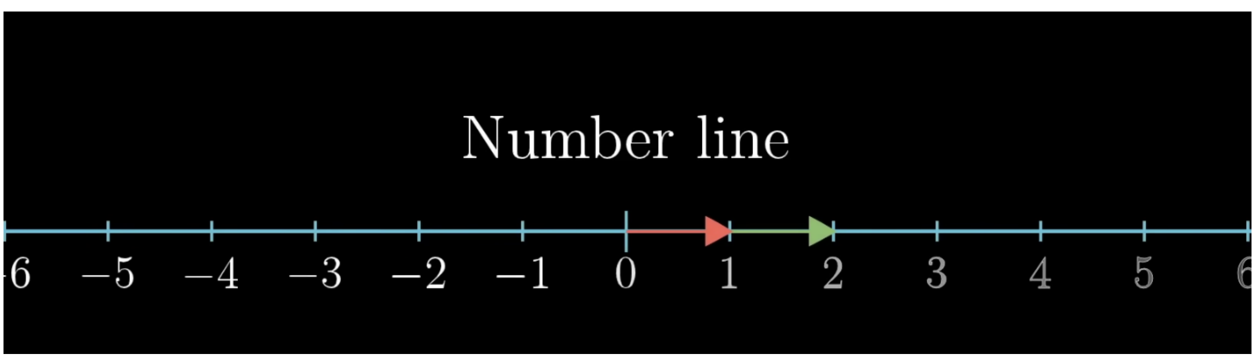


두 벡터의 방향이 직각이라 두 벡터의 길이를 곱하면 0이 되서 내적이 0,

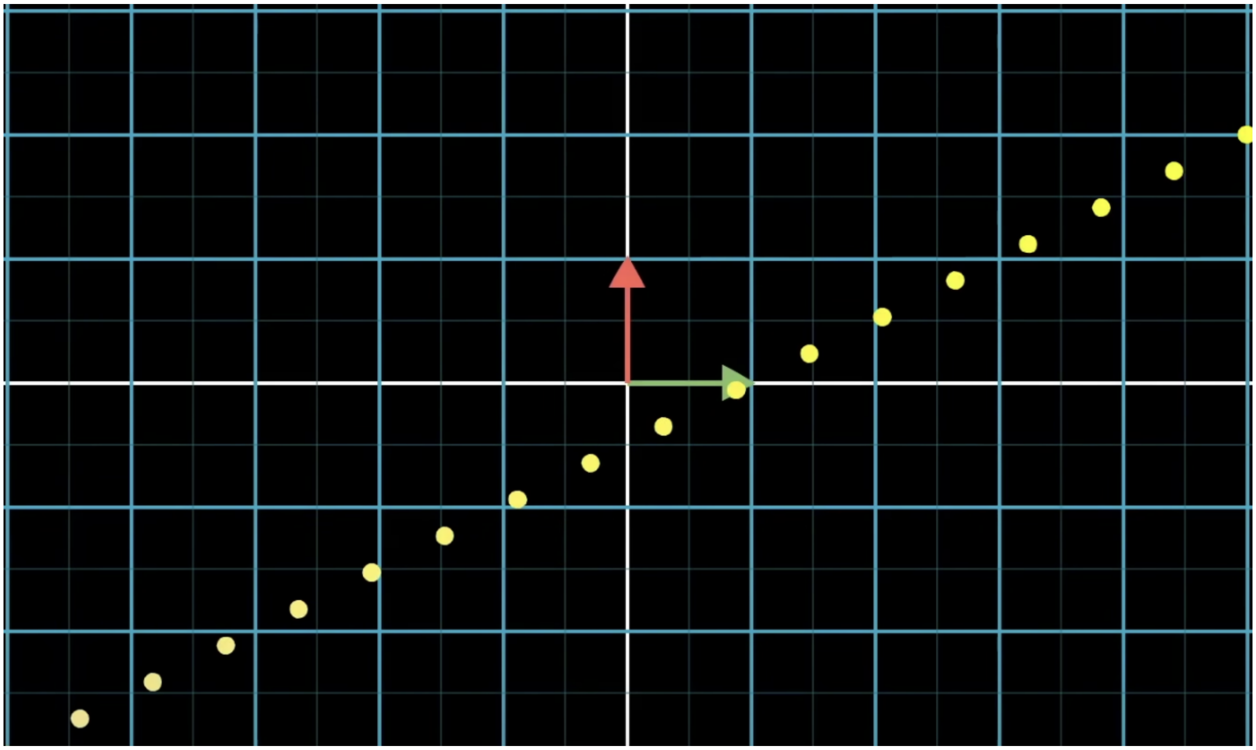


서로 다른 방향을 벡터가 가지면 내적은 음수가 된다.

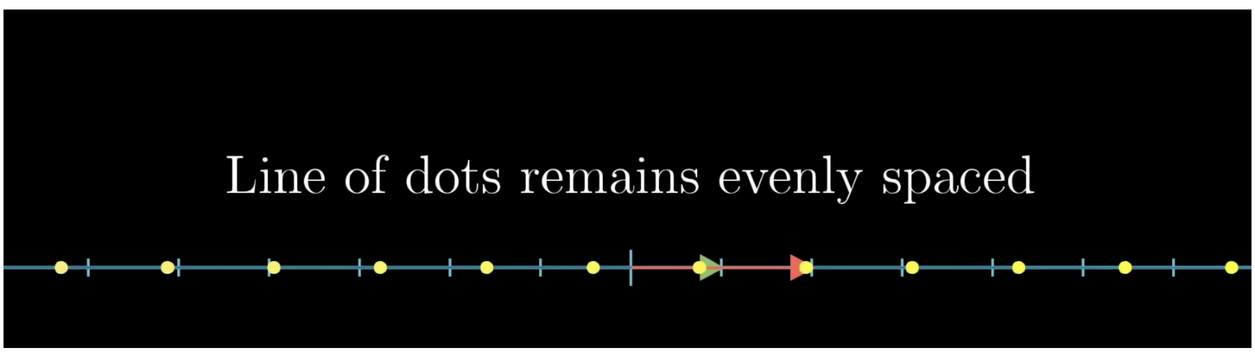
Multi Dimension to One Dimension Linear Transformation(다차원에서 1차원으로의 선형변환)



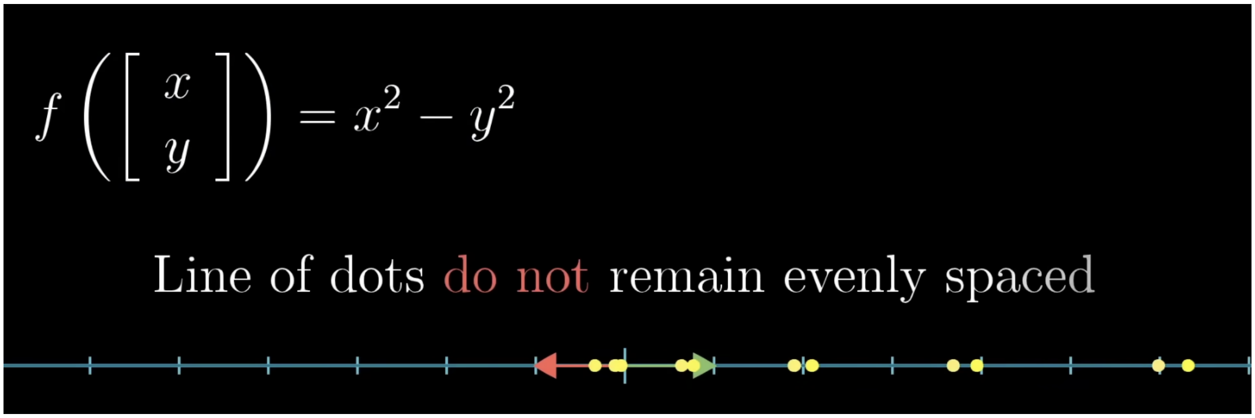
다차원이 1차원으로 즉 1차원 수선이 되는 선형변환을 생각해보자.



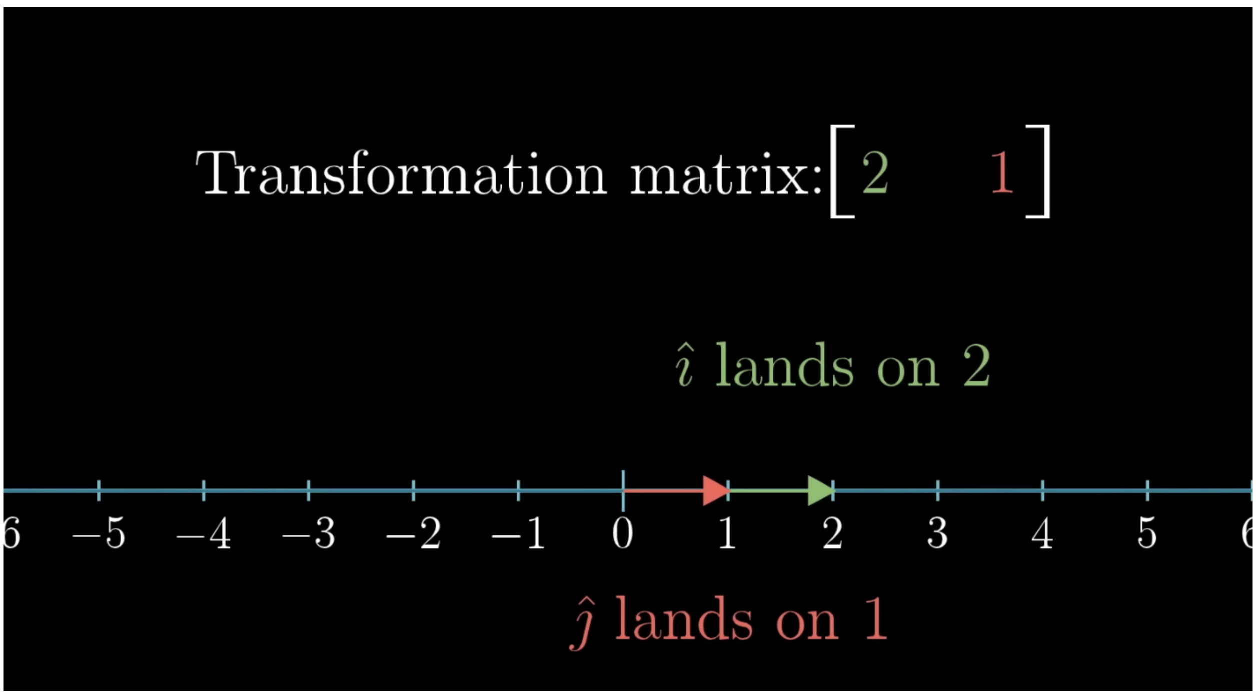
여기서 선형변환이 되었다는 것의 의미는,



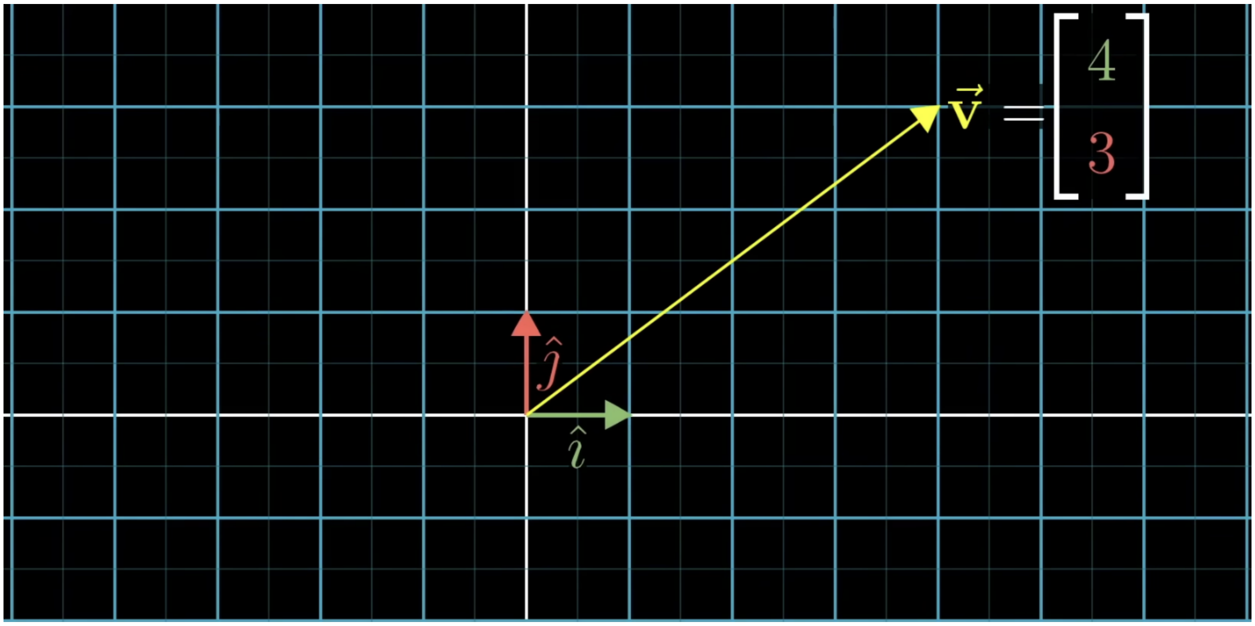
결과 공간의 벡터, 즉 수선이 일정한 간격으로 균등하게 배치되어 있는 것이다.

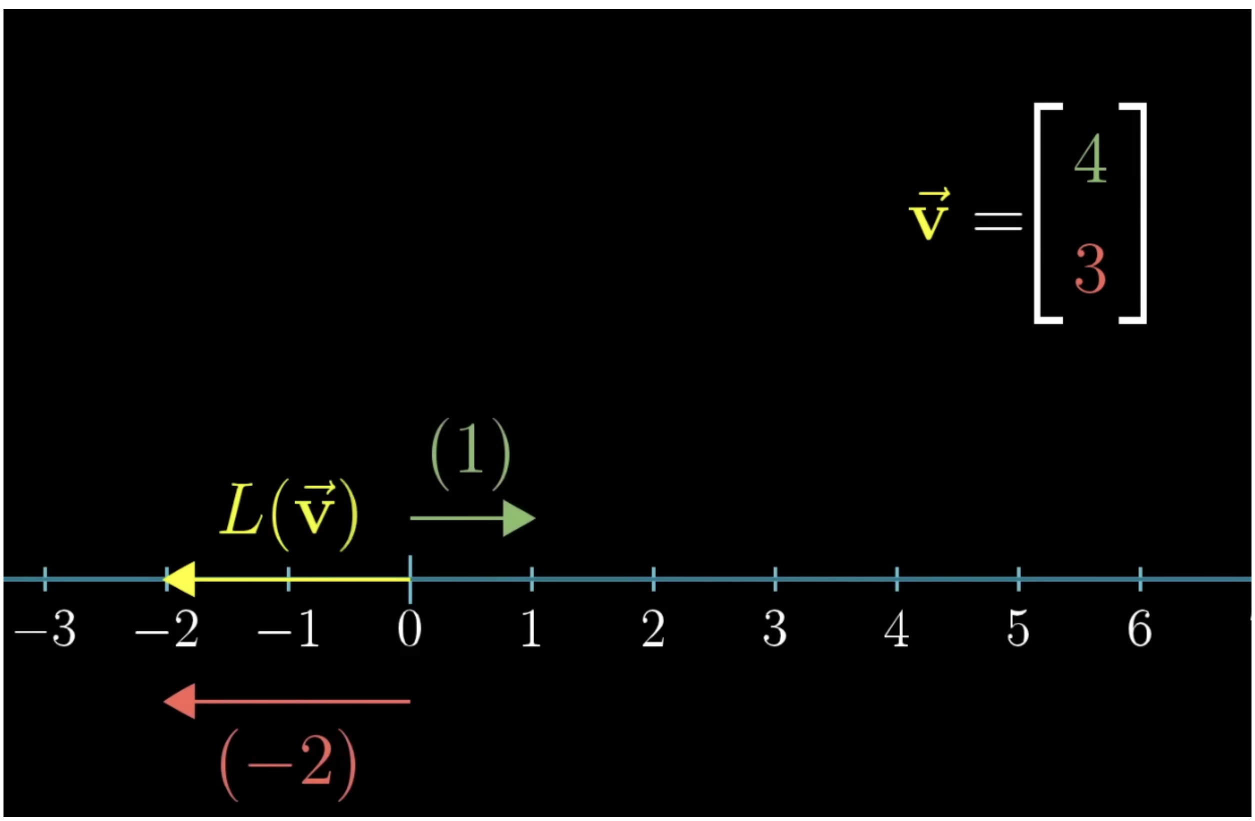


만약 그렇지 않다면 비선형적 변환일 것이다.

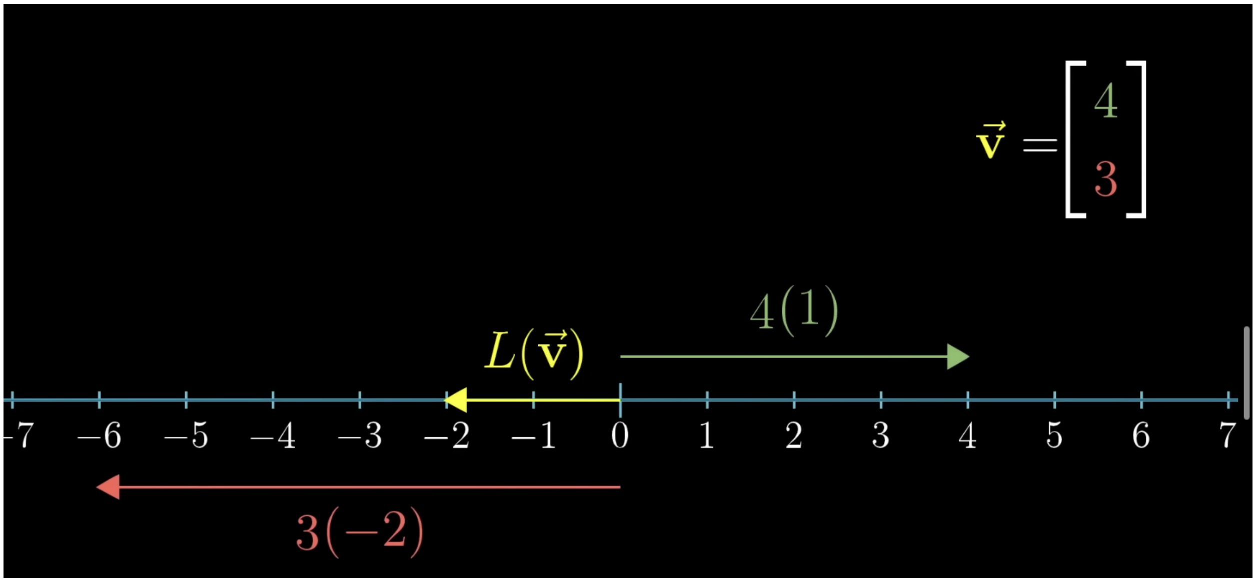


일반적으로 선형변환은 i-hat, j-hat(기저 벡터)의 도착 위치에 의해 결정된다. 결과 공간이 1차원일 경우 수선의 숫자로 표현된다.

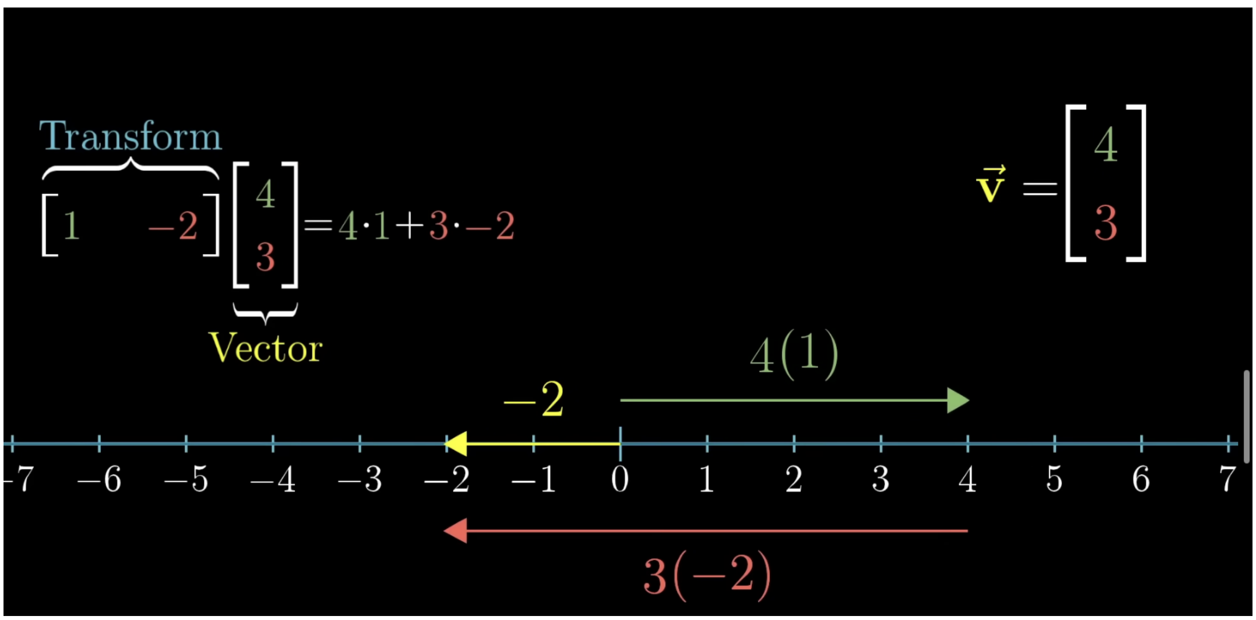




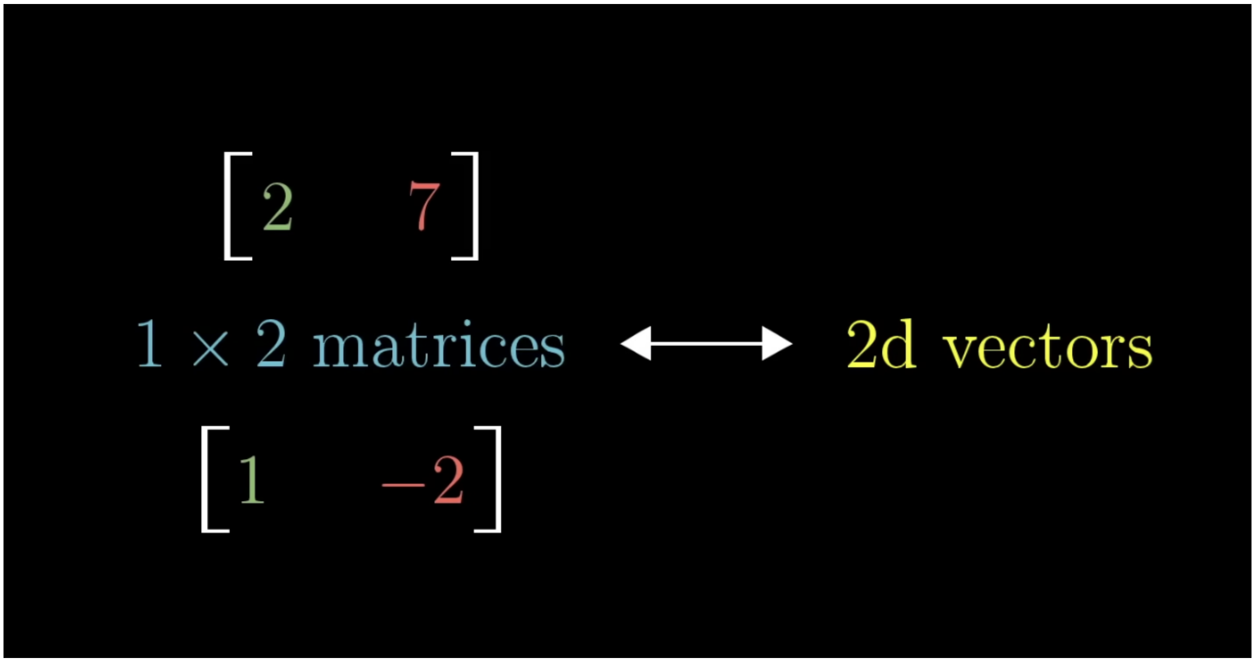
가령 i-hat=1, j-hat=-2로 변환시키는 선형변환이 있다고 해보자. 이를 [4,3] 벡터에 적용하면 어떻게 될까?

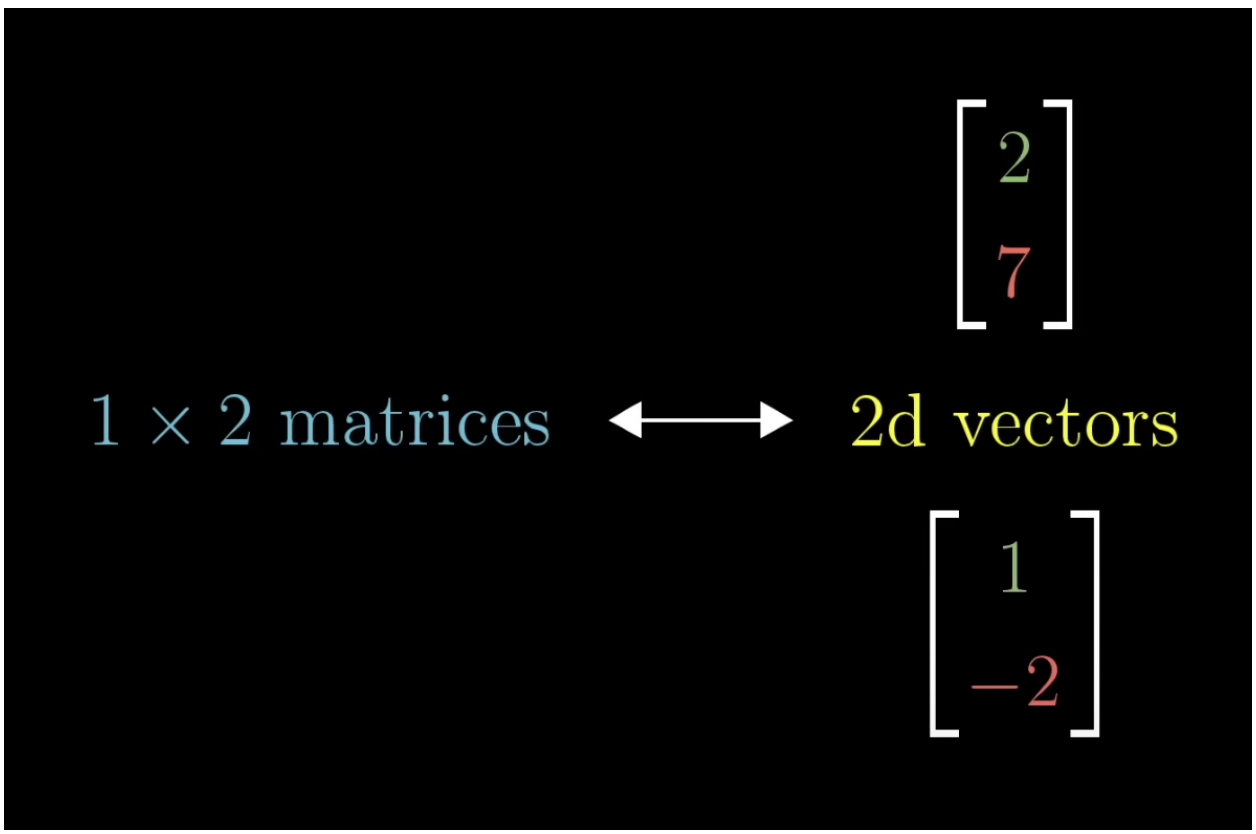


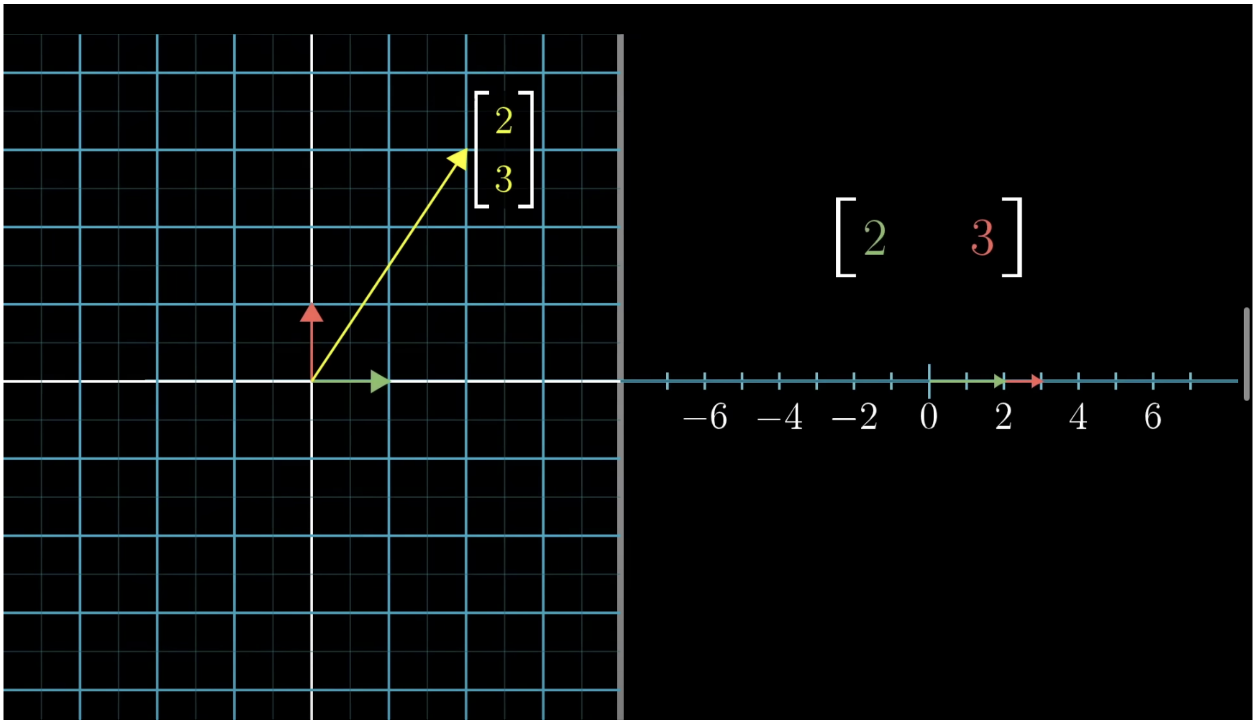
i-hat이 4배로 스케일링, j-hat이 3배로 스케일링 됨으로 결과는 -2에 도착하게 된다.



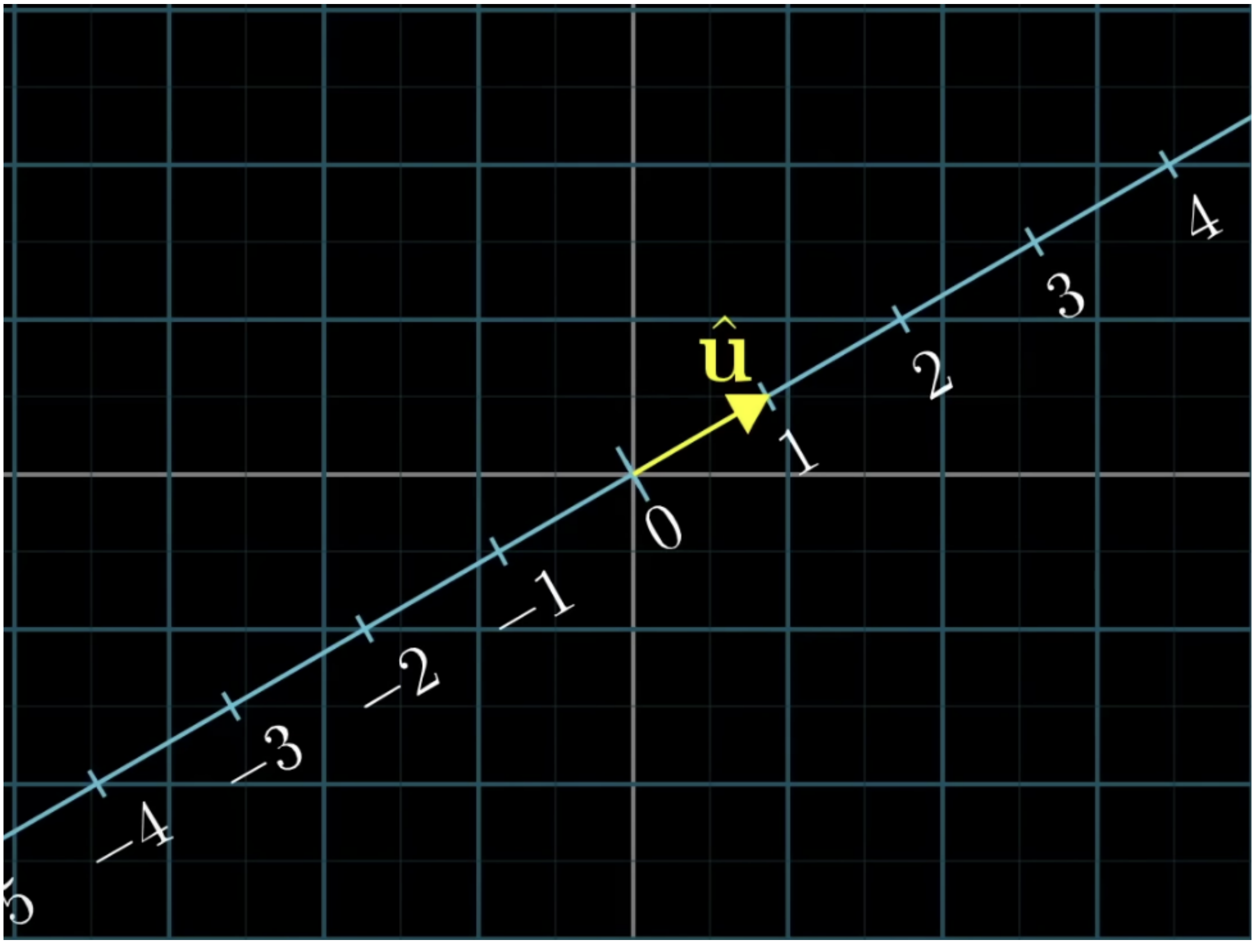
이는 수치적으로 봤을 때 행렬-벡터 곱셈이랑 같다. [1 -2] 행렬을 누워있는 벡터 [1 -2] 라고 생각하면 내적과 같아 보이지 않는가?


$\begin{bmatrix} 2 & 7 \end{bmatrix}$
1×2 matrices
2d vectors
$\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$

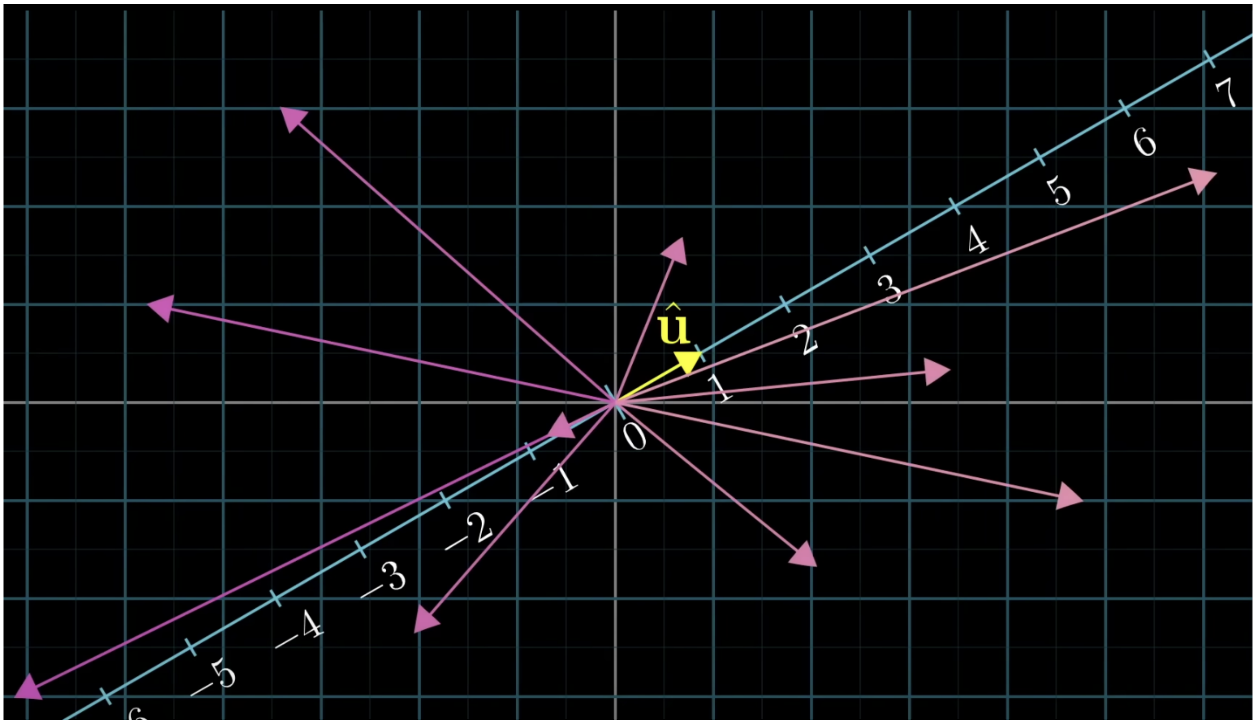

$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$
1×2 matrices
2d vectors
$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

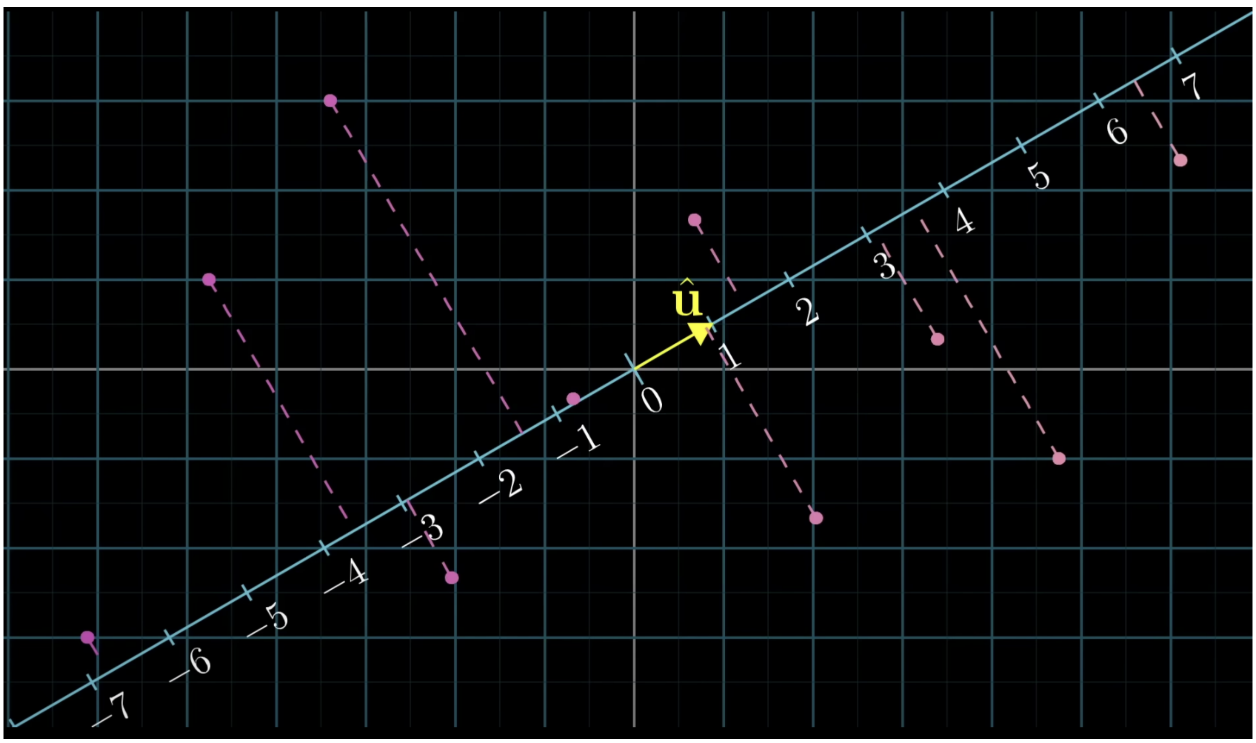


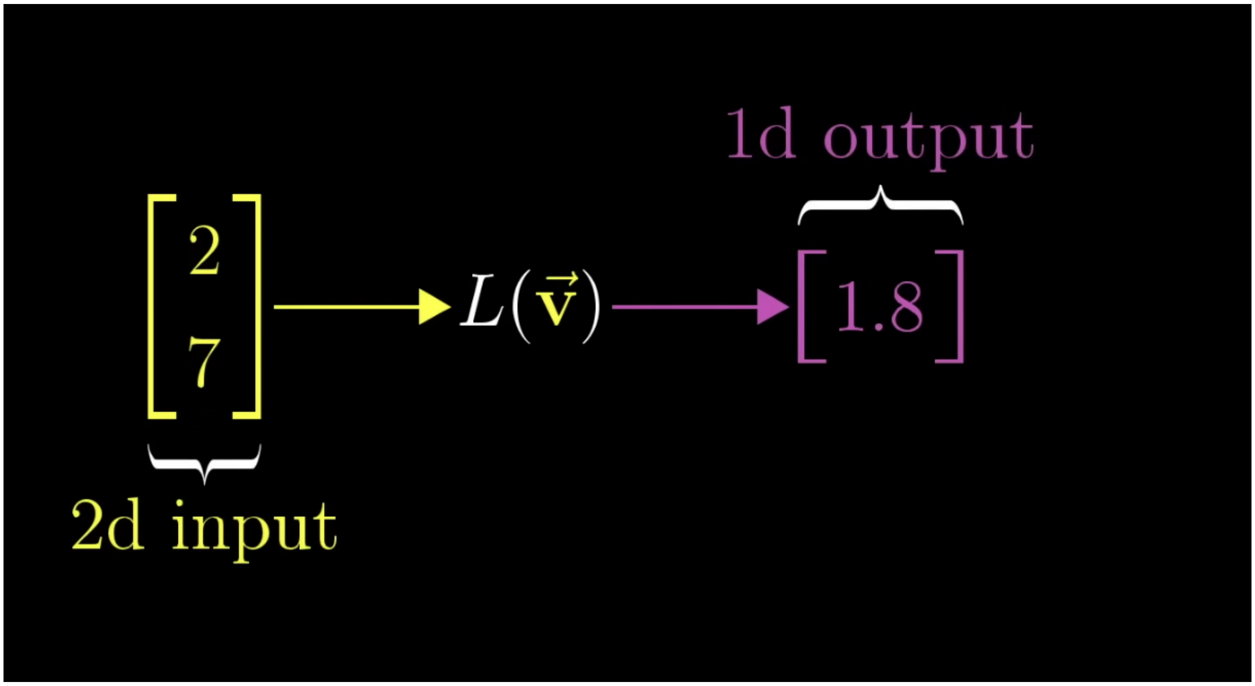
사실 1*2 행렬과 2차원 벡터는 서로 변환이 가능한 연관성이 있다.



수선과 비스듬히 또 하나의 수선을 긋고(원점은 겹친다) 여기의 기저 백터 u-hat 을 생각해보자.

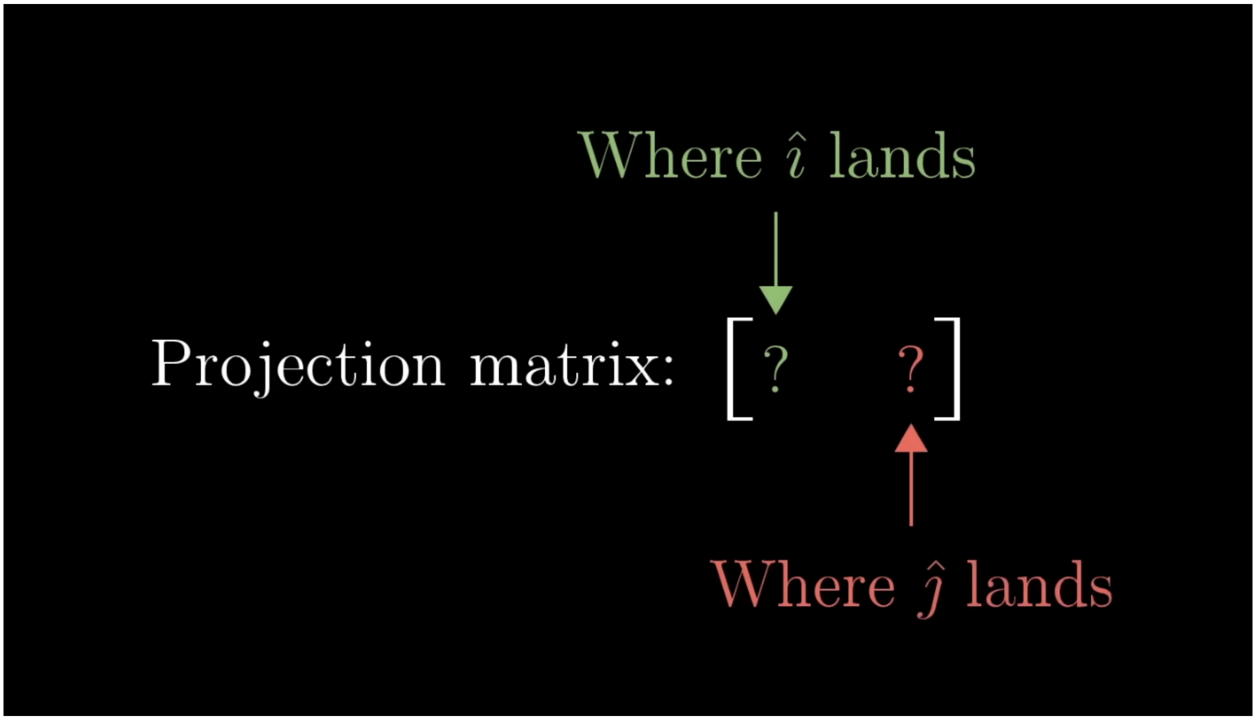

û
0
1
2
3
4
5
6
7
−1
−2
−3
−4
−5


û
0
1
2
3
4
5
6
7
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7

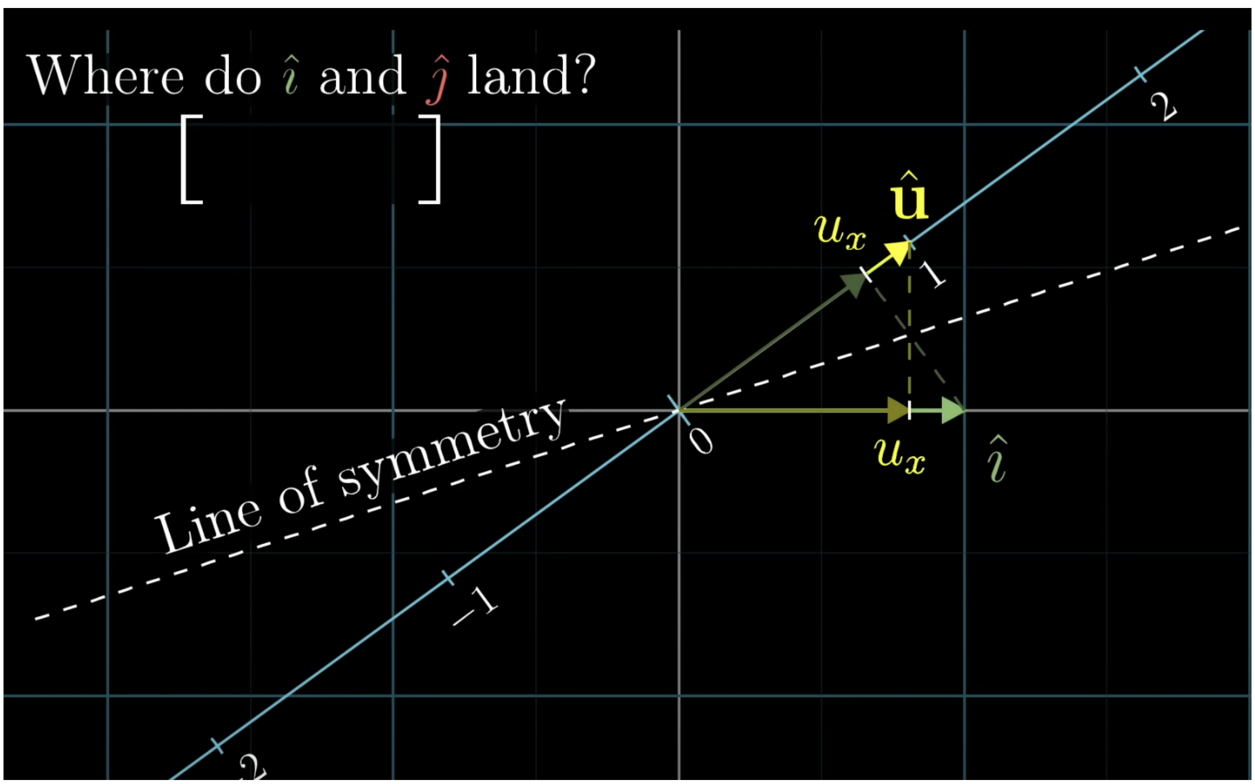


기존 좌표의 벡터를 비스듬한 수선에 투영하면 이는 2차원 벡터를 입력으로 숫자를 출력으로 내놓는 선형변환을 정의하는 것과 같다. (비스듬한 수선에 투영하는 것도 선형적이기 때문 선형변환)

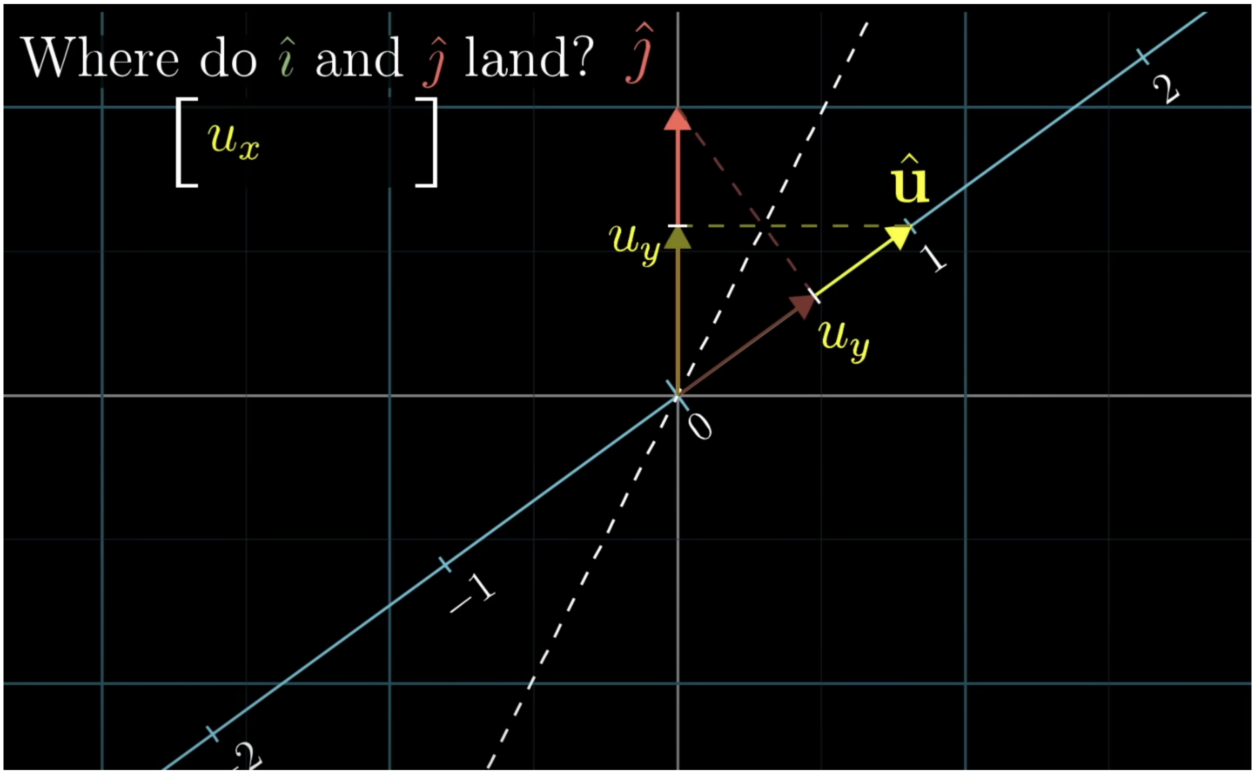
> (non-squre matrix 강의에서 배운 점 : 2차원을 1차원으로 변환 하는 경우(2*1 행렬)는 2차원 벡터 입력을 받아서 하나의 숫자를 출력하는 것이다.



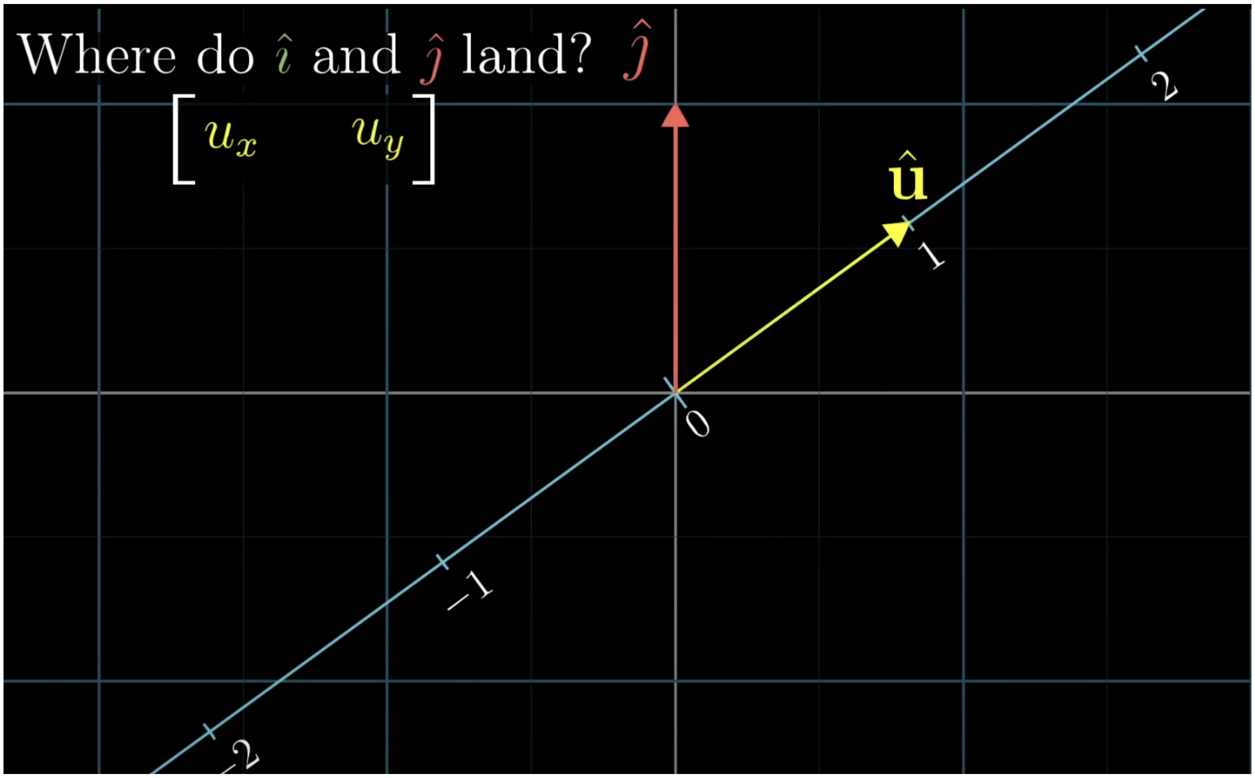
복기) 선형 변환은 행렬로 표현 가능하다.



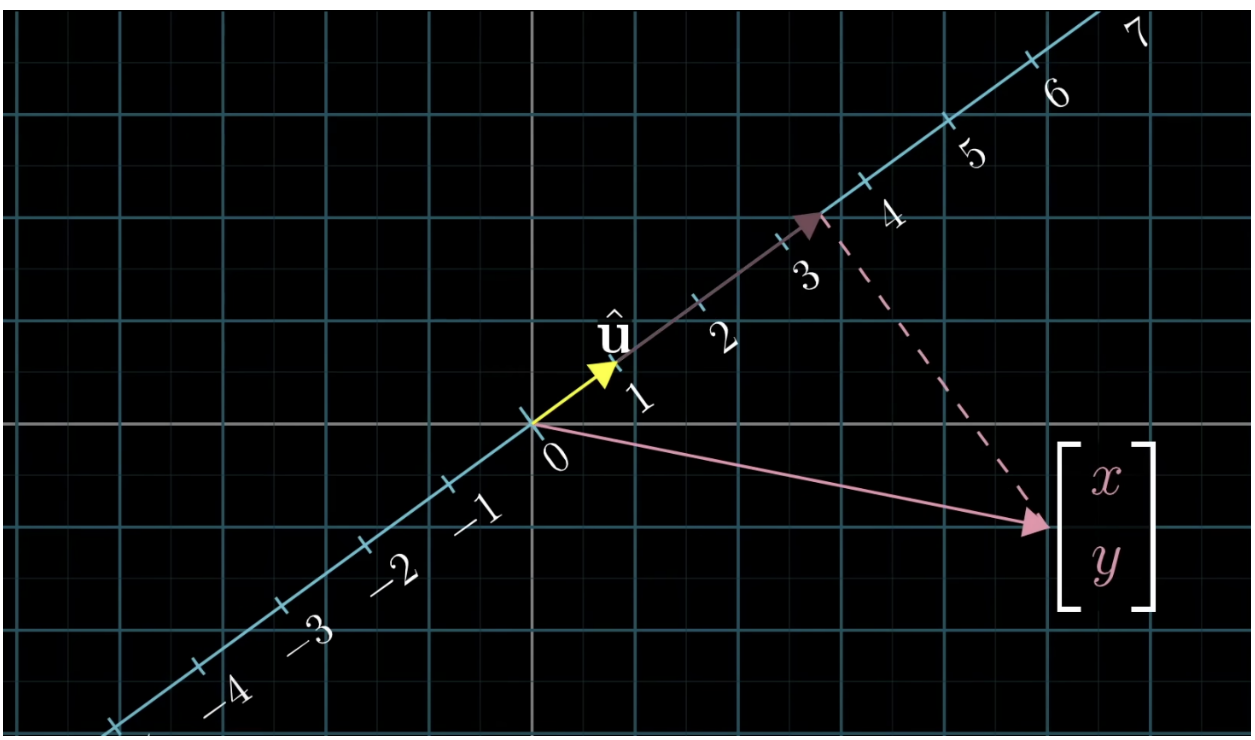
i-hat과 u-hat은 모두 단위 벡터(길이 1) 이기 때문에 i→u 로 투영하는 것은 u→i로 투영하는 것과 완전 대칭이다. 따라서 i-hat이 u-hat으로 투영된 위치를 구하는 건 u-hat이 i-hat(x축) 으로 투영된 위치를 구하는 것과 같다. 그런데 u-hat의 x축 투영된 위치는 u-hat의 x좌표와 같다.

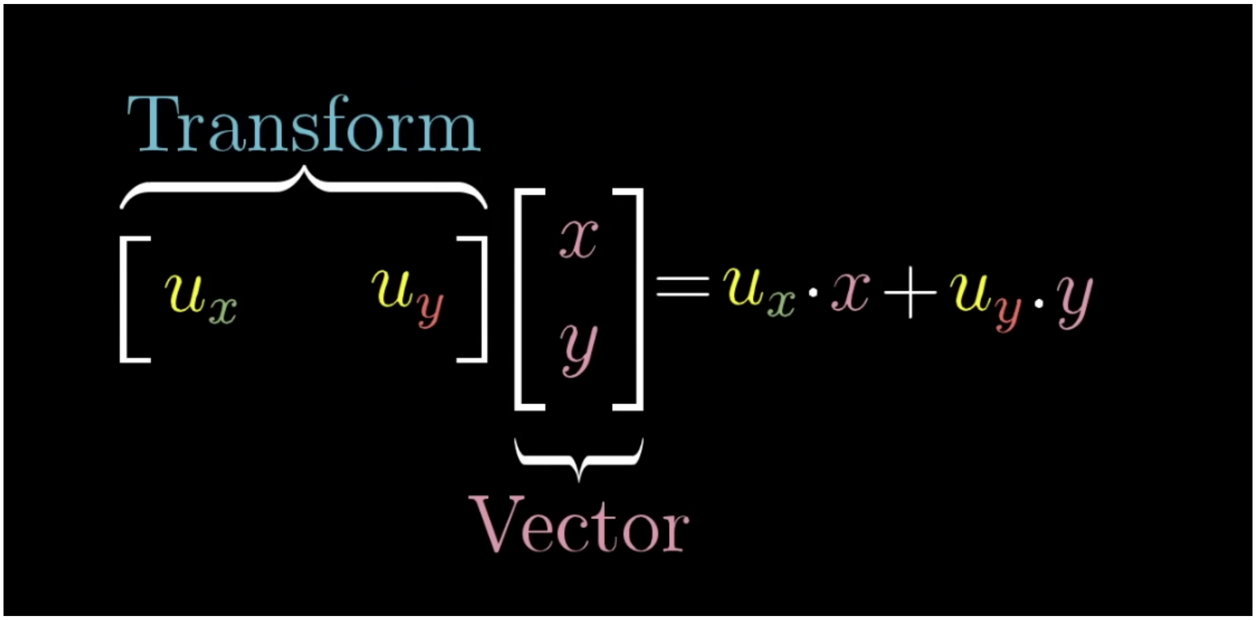


마찬가지 원리로 u-hat의 y좌표가 j-hat을 비스듬한 수선으로 투영한 위치와 같다.

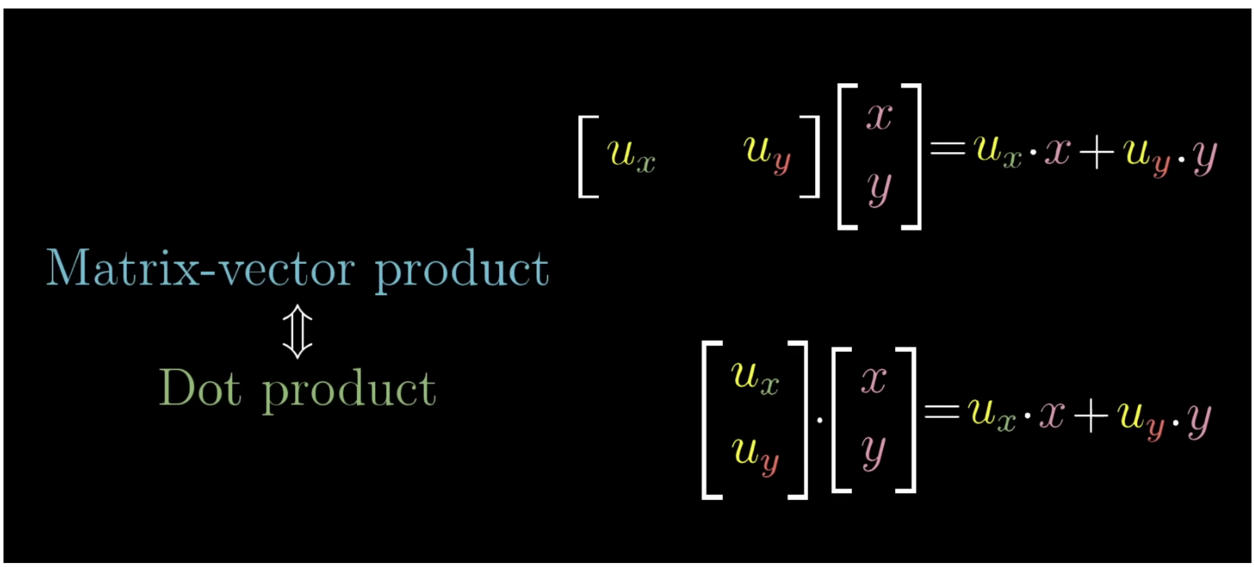


즉 이 투영 선형 변환을 나타내는 1*2 행렬은 u-hat의 좌표가 되는 것이다.



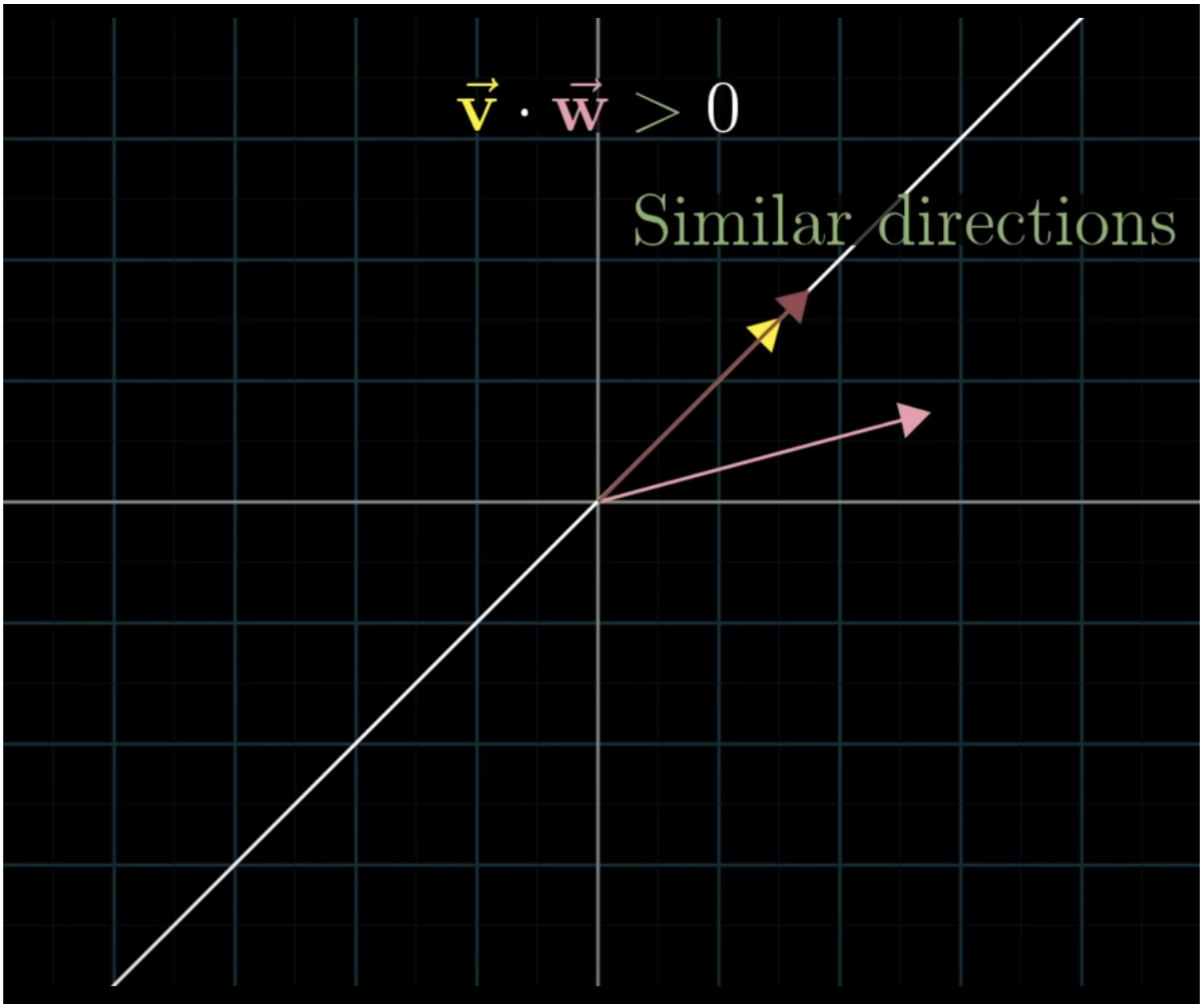


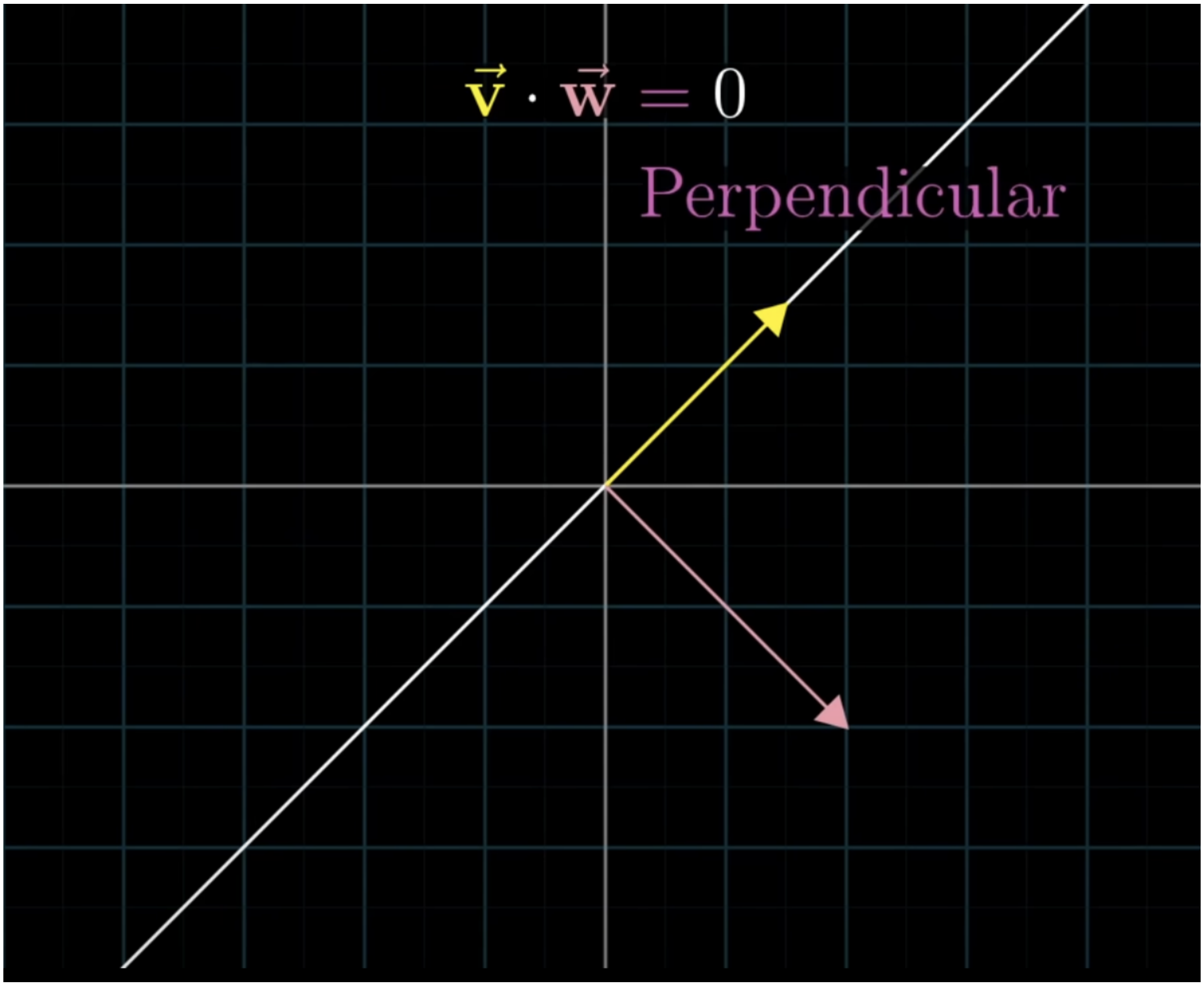
그러므로 임의의 벡터를 투영 선형 변환을 하는 것은 벡터를 행렬에 곱하는 것 과 같은 것이고 이는 계산적으로 내적(dot product)를 구하는 것과 같은 것이다.

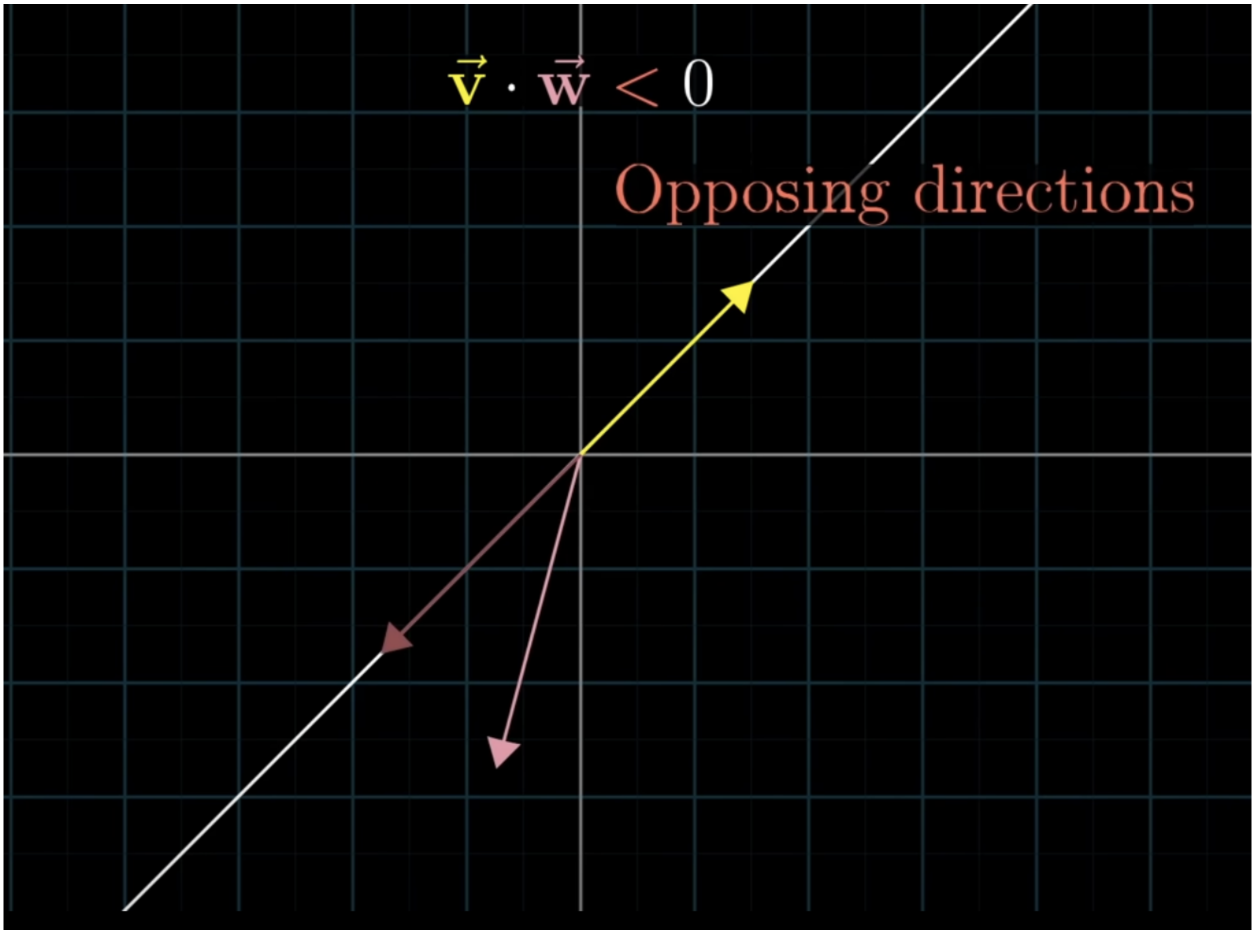


그래서 단위 벡터와의 내적이 벡터를 다른 벡터로 투영(투영 선현변환)하는 것과 같은 것이다.

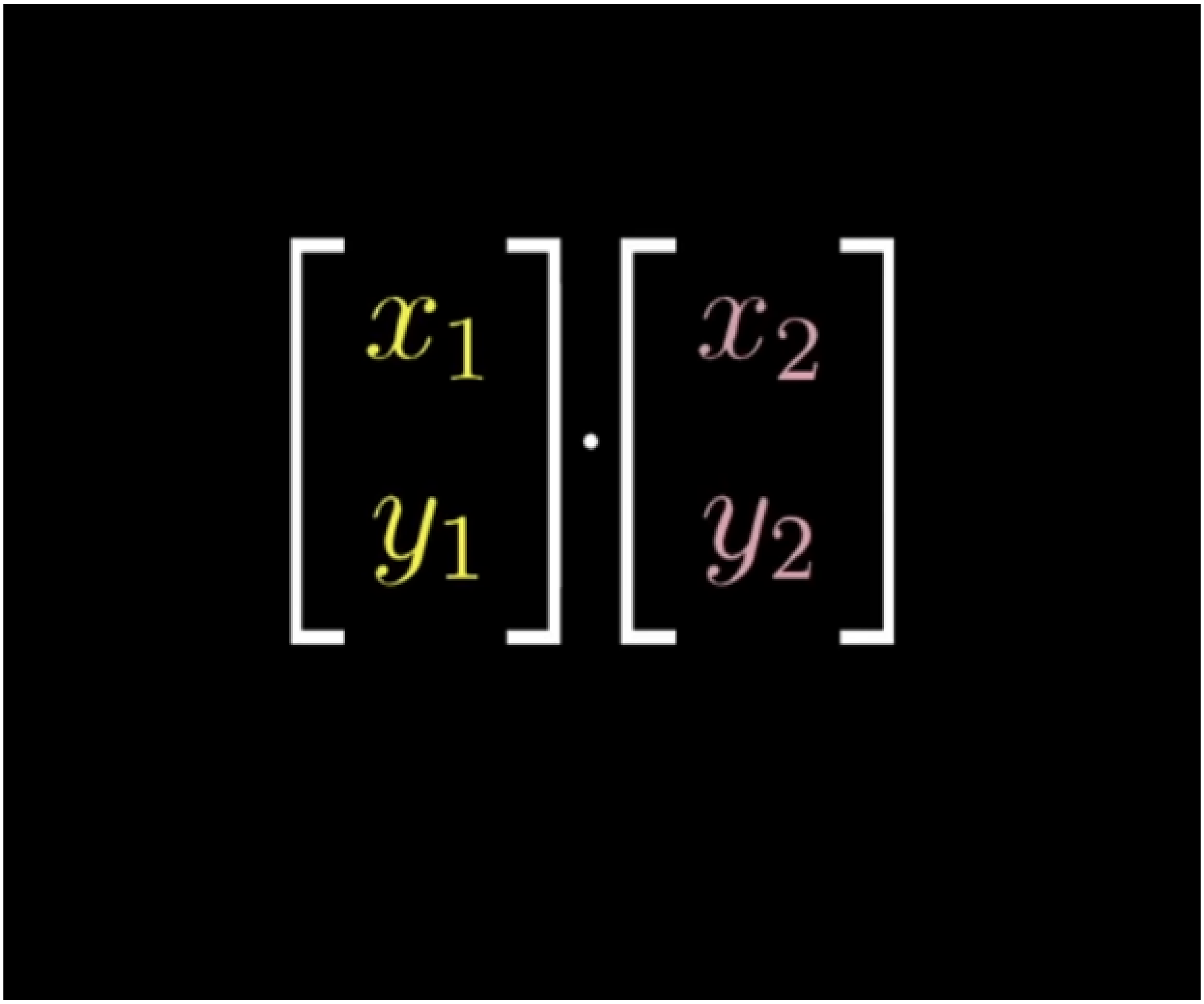
요약


$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} > 0$
Similar directions

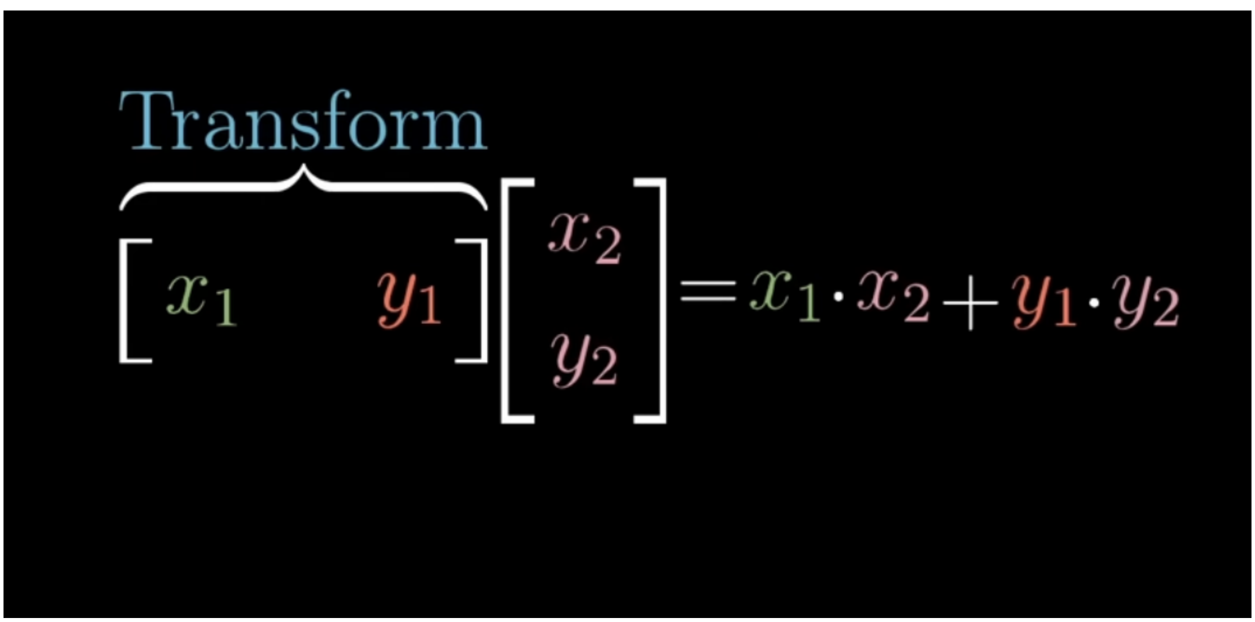

$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 0$
Perpendicular



내적은하나의 벡터를 다른 벡터에 투영(projection)하는 것으로 즉 v벡터의 길이와 w벡터의 길이를 곱하는 것이다. 그리고 이것은 두 벡터가 같은 방향을 가르키는 지 확인하는 유용한 방법이다. (그리고 가장 중요하고 기억해야 할 부분일 것이다.)



$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$



$\overbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}}^{\text{Transform}} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

하지만 더 깊이 들여다 보면 두 벡터를 내적 한다는 것은 하나의 벡터를 ‘변환’ 으로 이해하는 것과 같은 것이다. 왜냐하면 투영 하는 벡터를 새로운 축(기저벡터 u-hat)으로 하는 선형변환으로 생각해 볼 수 있기 때문이다.