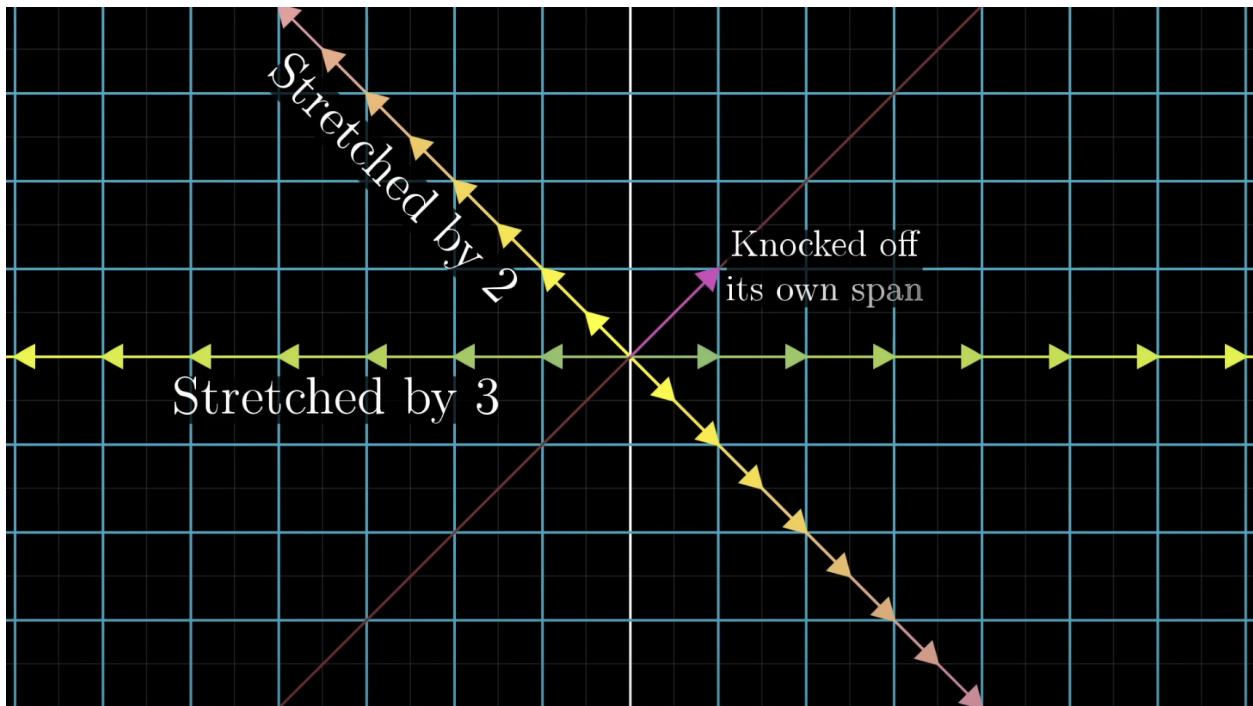
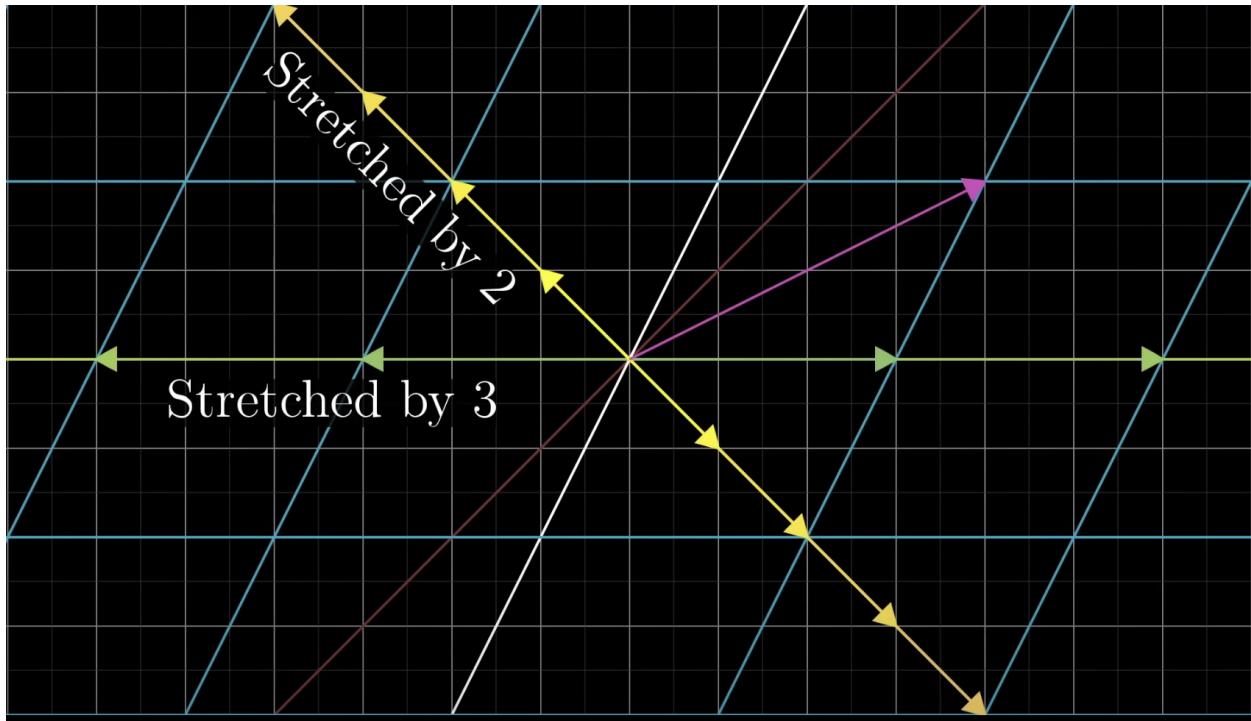


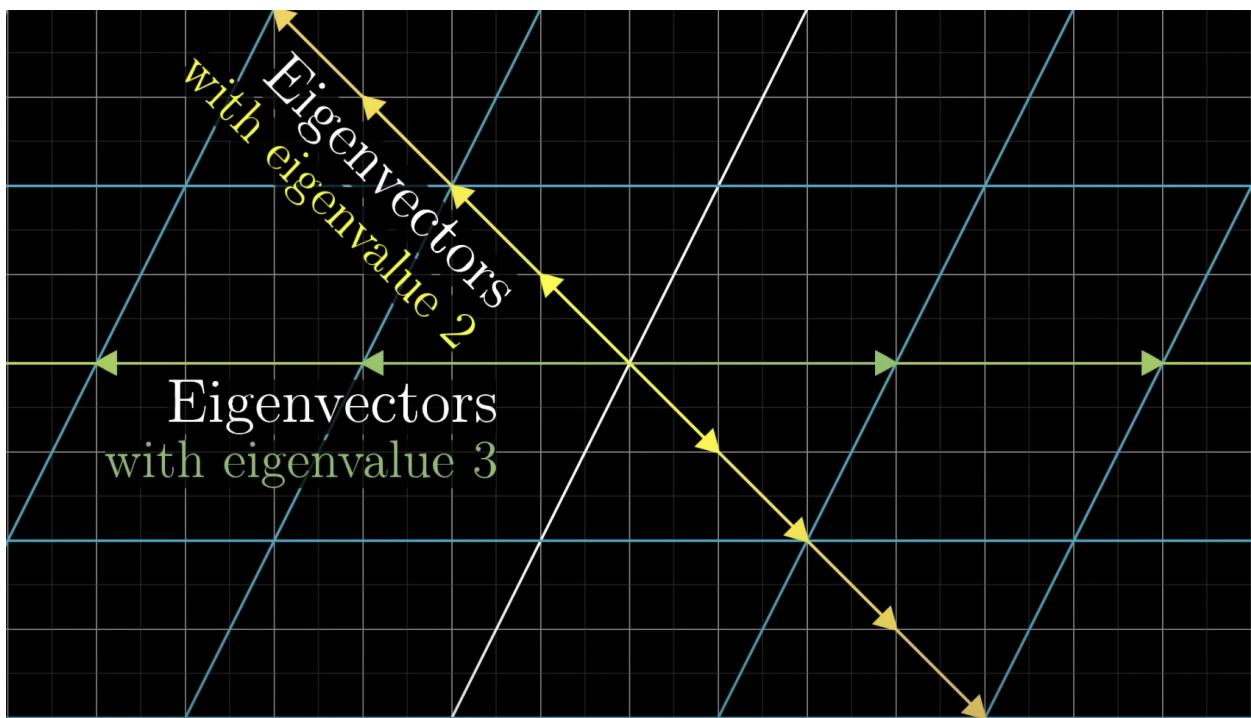
Eigenvectors,Eigenvalues and Eigenbasis

Basics

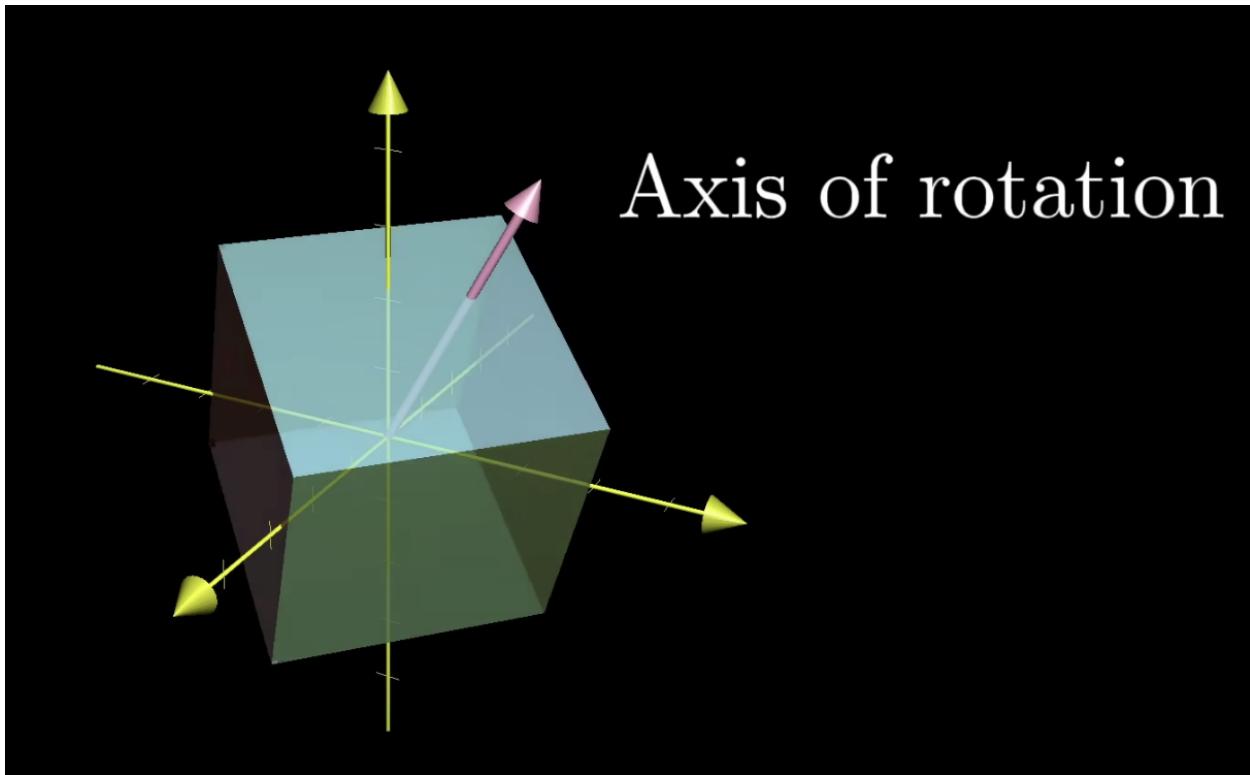




Eigenvectors(고유벡터)는 선형 변환의 일어난 이후에도 Span을 유지하는 벡터들이다. 위 그림의 경우 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 선형 변환의 일어났을 경우 Span이 유지되는 두 개의 벡터를 보여준다. 이 벡터 2개가 고유벡터이다.



이런 고유 벡터는 Eigenvalues라 불리는 고유값을 가지고 있고 이는 scalar 처럼 변환 도중 늘어나고 줄어드는 정도의 배수에 불과하다. (물론 음수도 가능하다)



3차원 회전을 생각해보자. 이때 고유 벡터를 찾을 수 있다면 고유벡터는 곧 회전축이다.

Definition

Transformation

matrix

Eigenvalue

$$\vec{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$$



Eigenvector

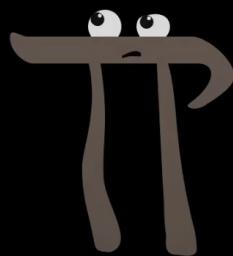
고유벡터의 개념은 위와 같다.

Matrix-vector multiplication

$$\overbrace{A}^{\text{Matrix}} \vec{v} = \underbrace{\lambda}_{\text{Scalar}} \vec{v}$$

Scalar multiplication

Fix different
multiplication types



즉, 행렬로 인해 선형 변환한 벡터는 결국 스케일링 된 된 벡터라는 것이다. 한편, 왼쪽은 행렬*벡터 인데 오른쪽은 스칼라*벡터이니 조금 이상하게 느껴질 수 있다.

Scaling by λ



Matrix multiplication by

$$A \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Scaling by λ
 \Updownarrow
 Matrix multiplication by

$$A\vec{v} = (\lambda I)\vec{v}$$

$$\lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_I$$

그렇다면 이 람다(스칼라)를 행렬로 나타내보자.

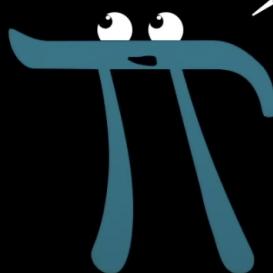
We want a nonzero solution for \vec{v}

$$\underbrace{(A - \lambda I)}_{\text{This matrix looks like}} \vec{v} = \vec{0}$$

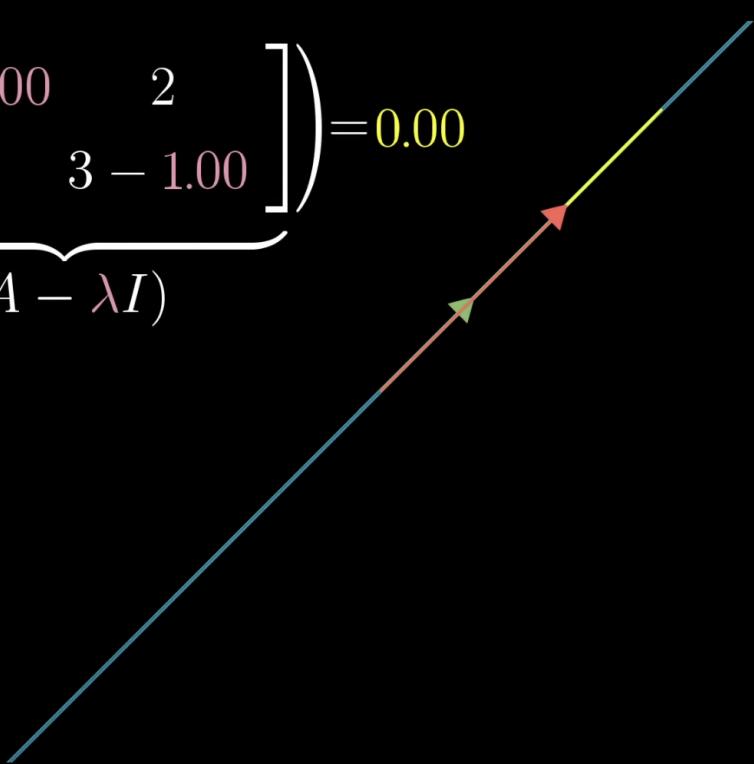
We need
 $\det(A - \lambda I) = 0$

This matrix looks like

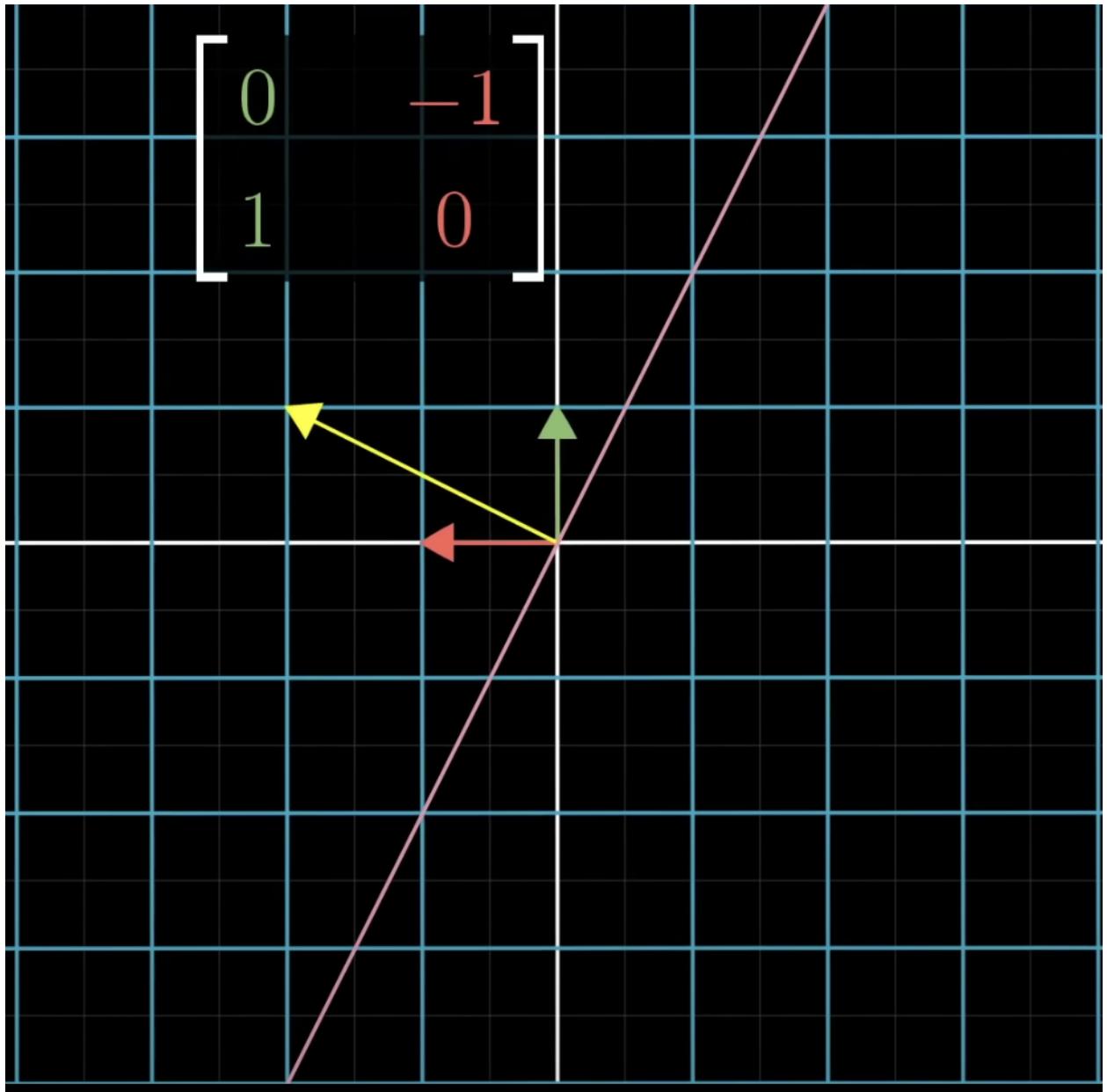
$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 5 - \lambda & 9 \\ 2 & 6 & 5 - \lambda \end{bmatrix}$$



영벡터가 아닌 벡터와 행렬을 곱해서 0이 되게 하려면, 행렬의 변환이 낮은 차원으로 내리는 것 이어야 한다. 즉 행렬식이 0이어야 한다.

$$\det\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix}}_{(A - \lambda I)}\right) = 0.00$$


즉 위 행렬 식에서 람다가 1이면 행렬 (A-람다*I)는 선이 된다는 것이다.



2D 변환은 고유 벡터를 꼭 가지지 않을 수도 있다. 가령 위와 같은 90도 회전의 경우 모든 벡터가 자신들의 Span을 벗어날 것이다.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

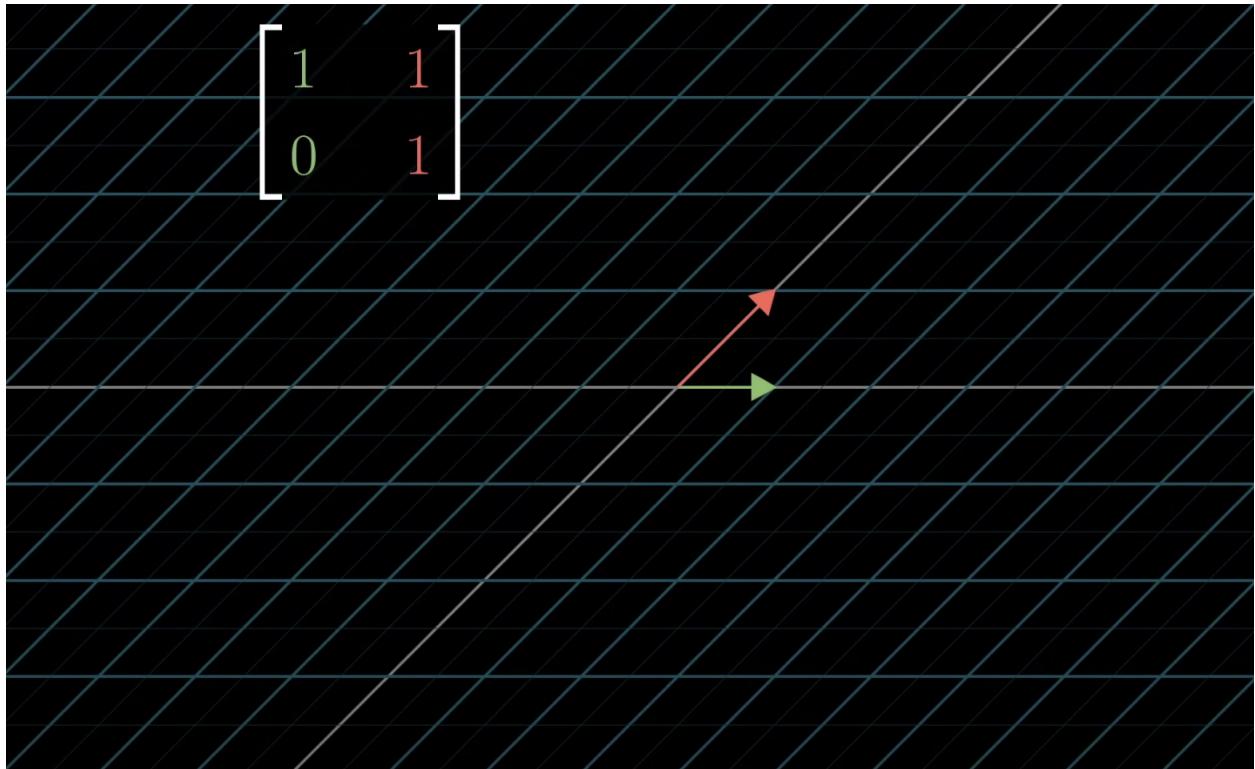


$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = (-\lambda)(-\lambda) - (-1)(1) = \lambda^2 + 1 = 0$$



$$\lambda = i \text{ or } \lambda = -i$$

가령 반시계로 90도 회전하는 위 행렬의 고유 벡터를 구하려면 람다는 하수가 되어야 하므로 실수해가 없다는 것을 알 수 있다.

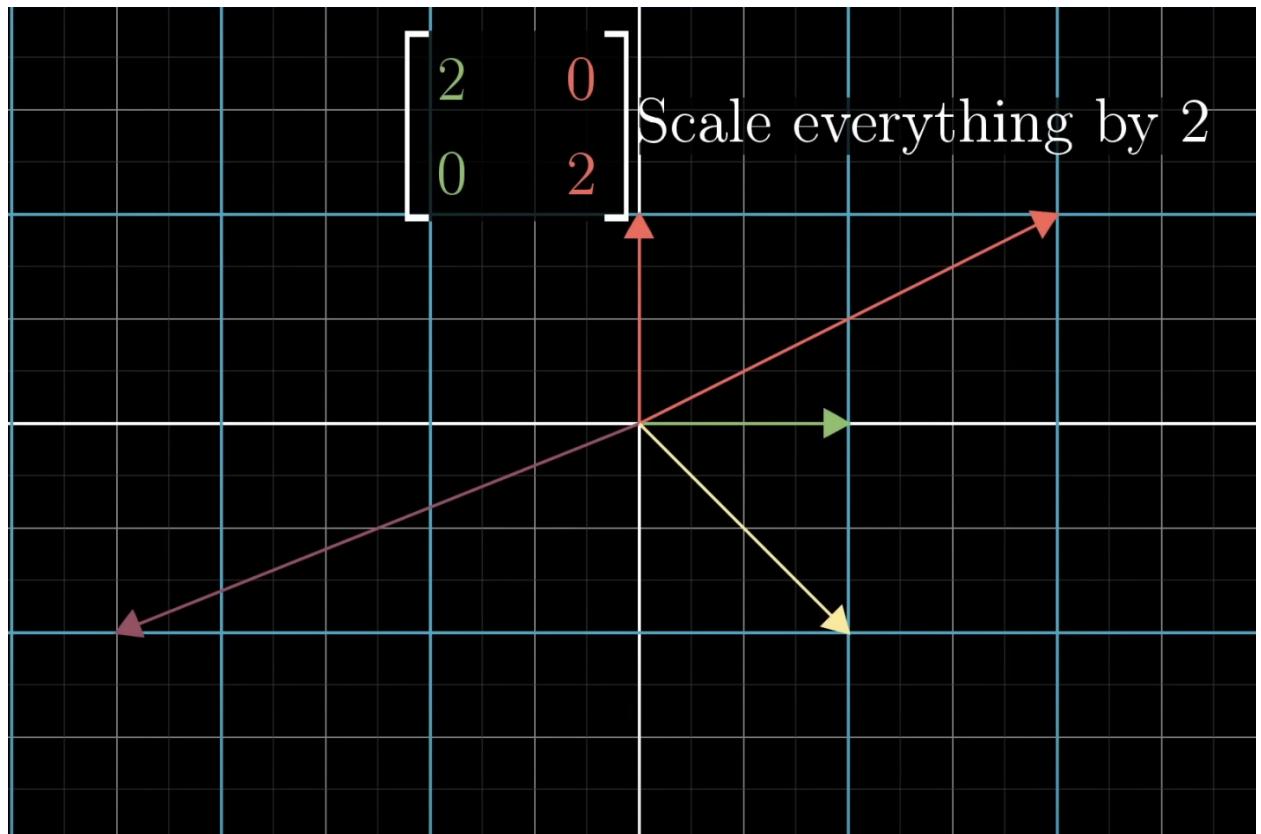


sheer(옆으로 미는) 선형 변환을 생각해보자. $i\text{-hat}$ 은 그대로 있고 $(1,0)$, $j\text{-hat}$ 은 x 축으로 1만큼 움직어 $(1,1)$ 인 행렬이다.

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \underbrace{(1-\lambda)(1-\lambda)}_{\lambda = 1} = 0$$

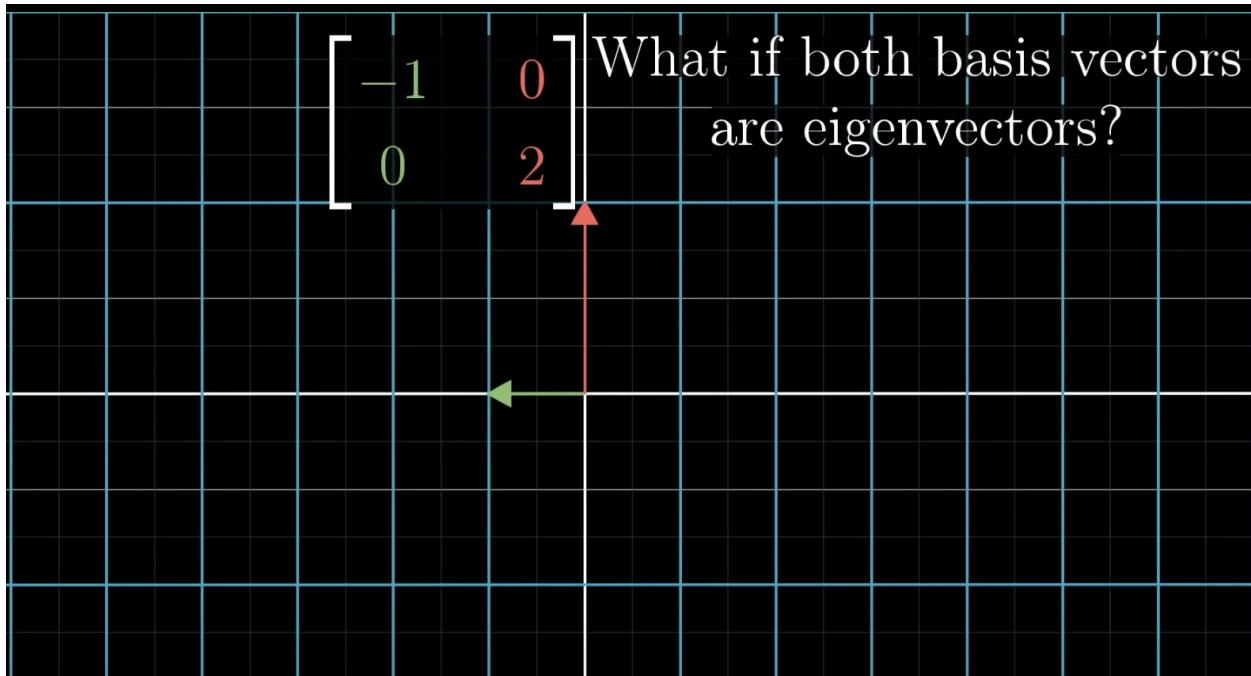
Eigenvalues
with eigenvalue 1

이 경우에 고유 벡터는 x축이고 고유 값 1을 가지는 데, 수식을 계산해 봄도 알 수 있다.



모든 벡터를 2배로 스케일링 하는 선형변환(2I)의 경우 고유 값은 2이지만 고유 벡터는 무한히 많을 수 있다. 즉 고유값이 하나라고 고유벡터가 하나인 것은 아니다.

Eigenbasis



기저 벡터(basis)가 고유 벡터(eigenvectors)인 경우를 생각해보자. 위 행렬은 $i\text{-hat} \rightarrow -1$, $j\text{-hat} \rightarrow 2$ 만큼 스케일링 되는 행렬이다.

“Diagonal matrix”

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

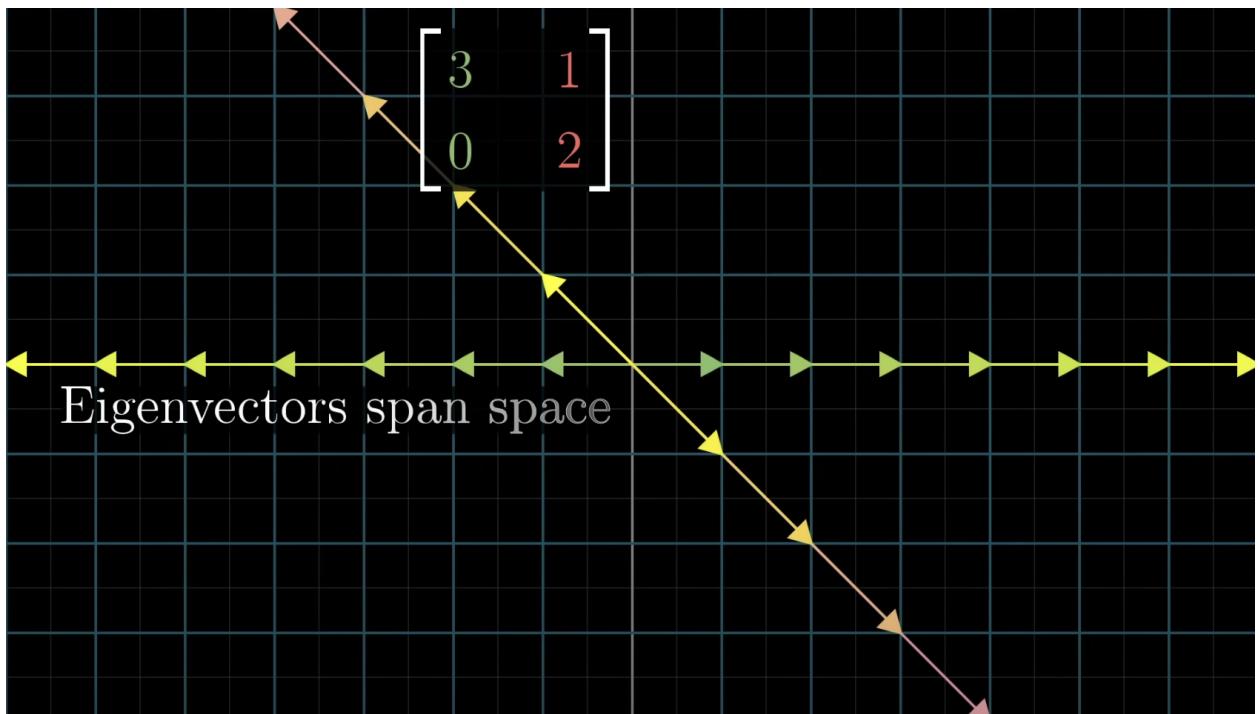
이런 경우 대각선 행렬이 되며 모든 기저 벡터는 고유 벡터이며 대각선 값은 각 좌표의 고유 값이 된다.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdots \cdots \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{100 \text{ times}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

즉 이러한 대각선 행렬을 여러번 곱하는 것은

$$\begin{bmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

기저 벡터를 그만큼 스케일링 하는 것 뿐인 것이다.



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Change of basis matrix

Use eigenvectors as basis

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

위 그림과 같이 $[1,0]$, $[-1,1]$ 이 고유 벡터일 때 이 고유 벡터들을 기저 벡터로 변환 할 수 있다. 그러면 변환된 고유 벡터를 기저 벡터로 쓰는 좌표계에서는 위 새로운 행렬은 대각선 행렬이 될 수 밖에 없을 것이다.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

“Eigenbasis”

기저 벡터이면서 고유벡터인 쌍은 Eigenbasis(고유 기저)라고 부른다.

Compute $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{100}$

“Eigenbasis”

π

때문에 만약 어떤 행렬의 100제곱을 계산해야 한다면 그 행렬의 고유 기저로 바꾼 다음 100제곱을 구하고(대각선 행렬) 원래 좌표계로 바꾸는 것이 훨씬 빠를 것이다.

Computing Trick For Finding Eigenvalue

Find the eigenvalues of $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{bmatrix}\right) &= (3 - \lambda)(1 - \lambda) - (1)(4) \\ &= (3 - 4\lambda + \lambda^2) - 4 \\ &= \underbrace{\lambda^2 - 4\lambda - 1}_{= 0} = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 &= \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}\end{aligned}$$

고유값을 구하는 데는 보통 위와 같은 연산이 필요하다.

$$1) \quad \frac{1}{2} \text{tr} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \frac{a+d}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = m \quad (\text{mean})$$

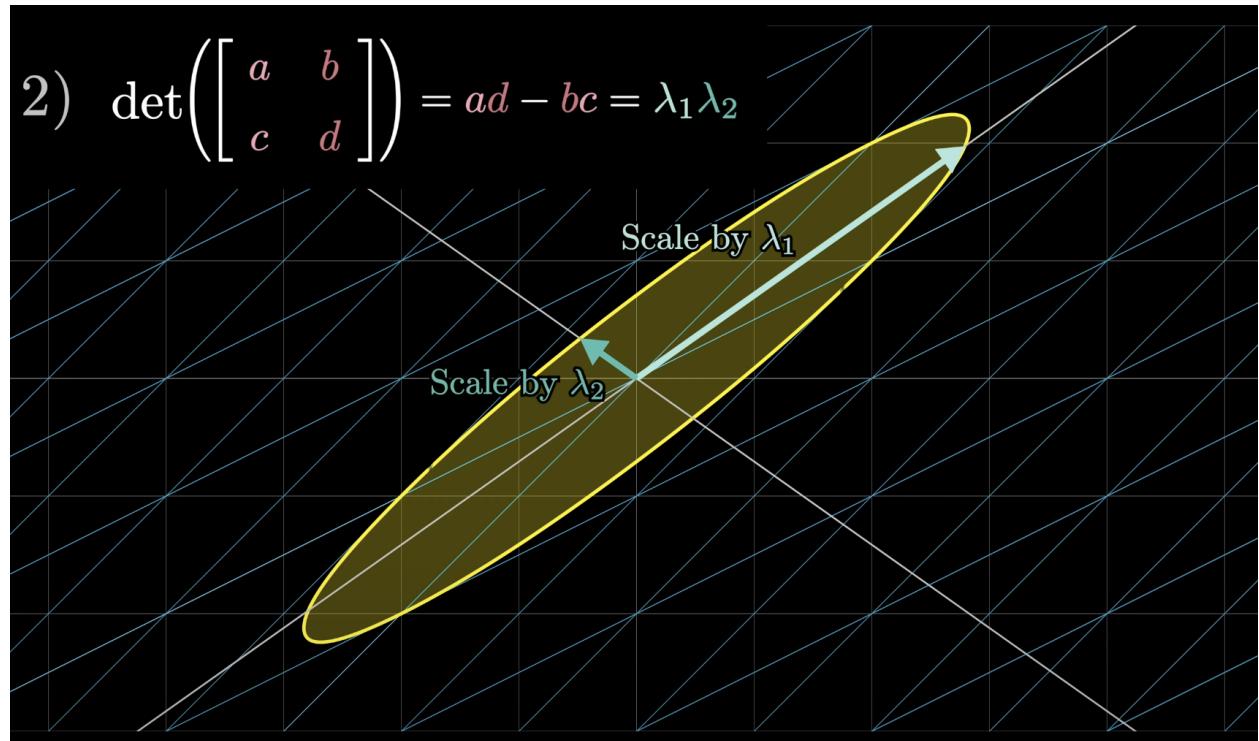
$$2) \quad \det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad - bc = \lambda_1 \lambda_2 = p \quad (\text{product})$$

$$3) \quad \lambda_1, \lambda_2 = m \pm \sqrt{m^2 - p}$$

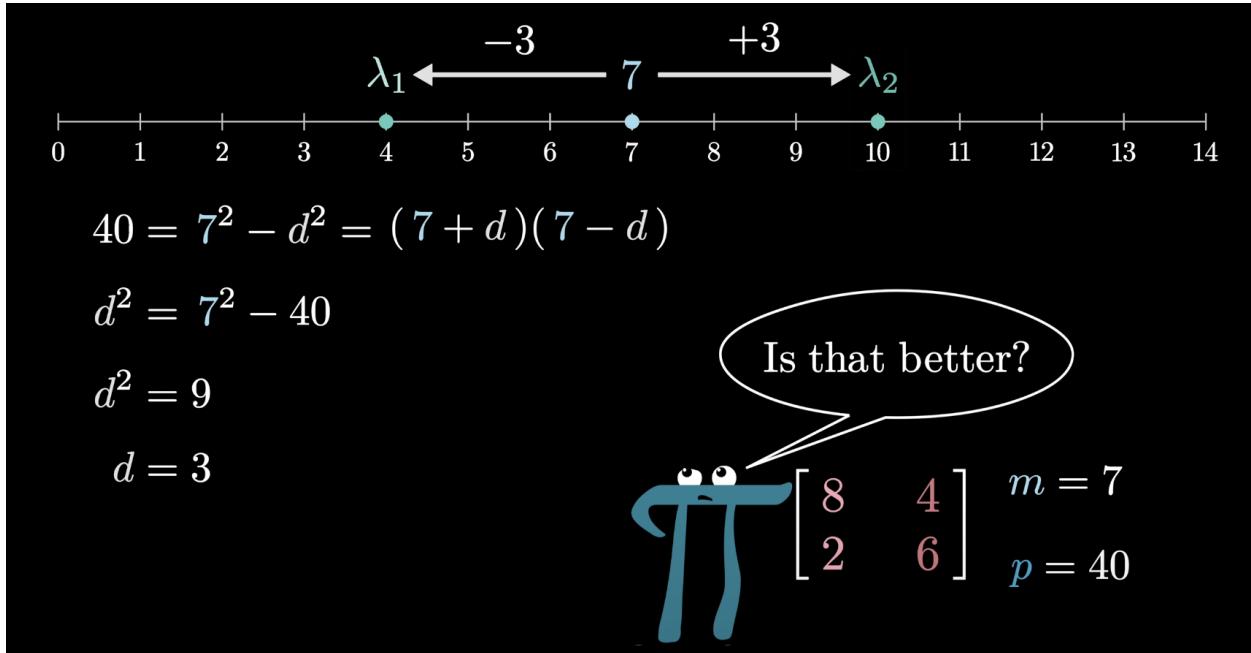
$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} m=7 \\ p=40 \end{array}$$

2차원 행렬이 있을 때 고유값에 필요한 람다 값은 위의 성질을 뛴다.

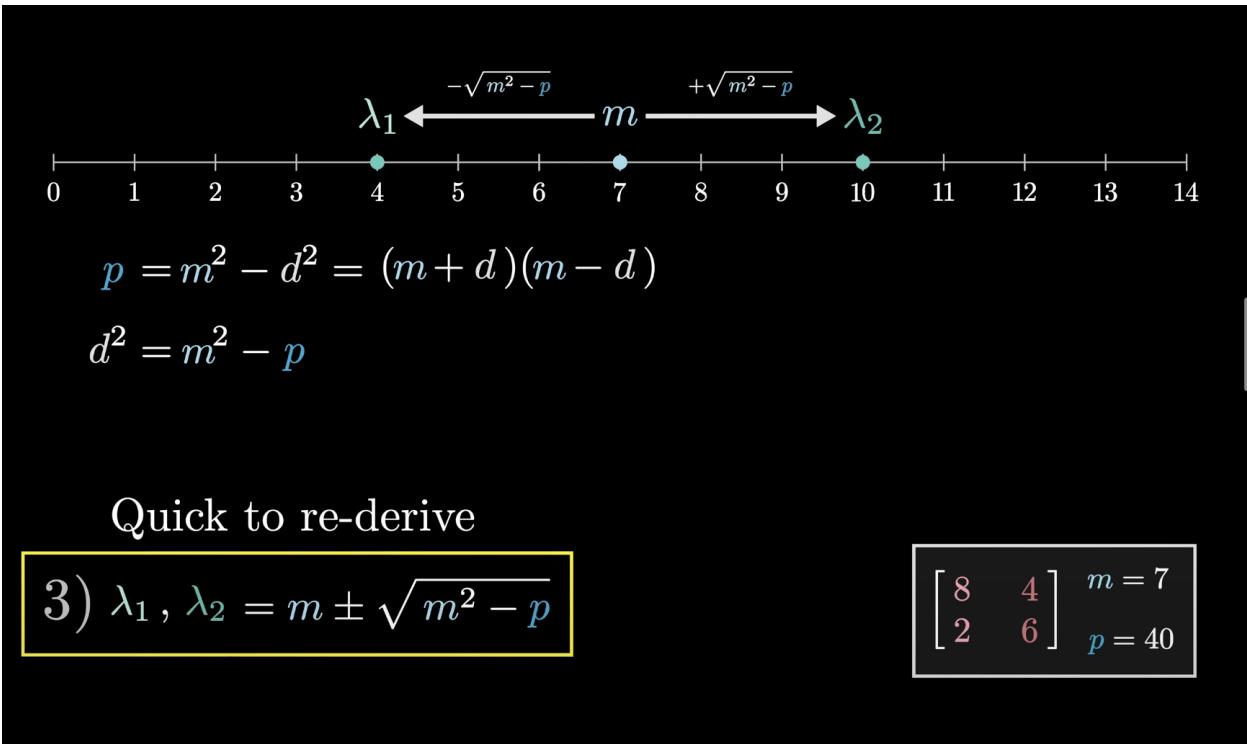
1번째로 행렬의 $\text{trace}(a+d)$ 의 평균은 고유값의 평균과 같다.



2번의 경우 ad-bc(determinant) 는 람다1,2를 곱한 것 과 같은데, 행렬식과 람다가 모두 공간(영역, 부피)의 확장과 축소를 의미한다고 생각하면 이해가 쉬울 것이다.



3번도 살펴보자. 평균 m 이 7로 1번 공식에 의해 도출, 곱 p 는 40으로 2번 공식으로 도출 되었을 경우 3번 공식을 생각해보자. 두 람다 1,2는 평균 7에 $+a$ 된 값일 것이다. $7+a$, $7-a$ 가 각각의 람다일 텐데 이 두 람다를 곱하면 40인 걸 알고 있으므로 $d=3$ 이 되고, 두 람다는 10,4 인걸 알 수 있다.

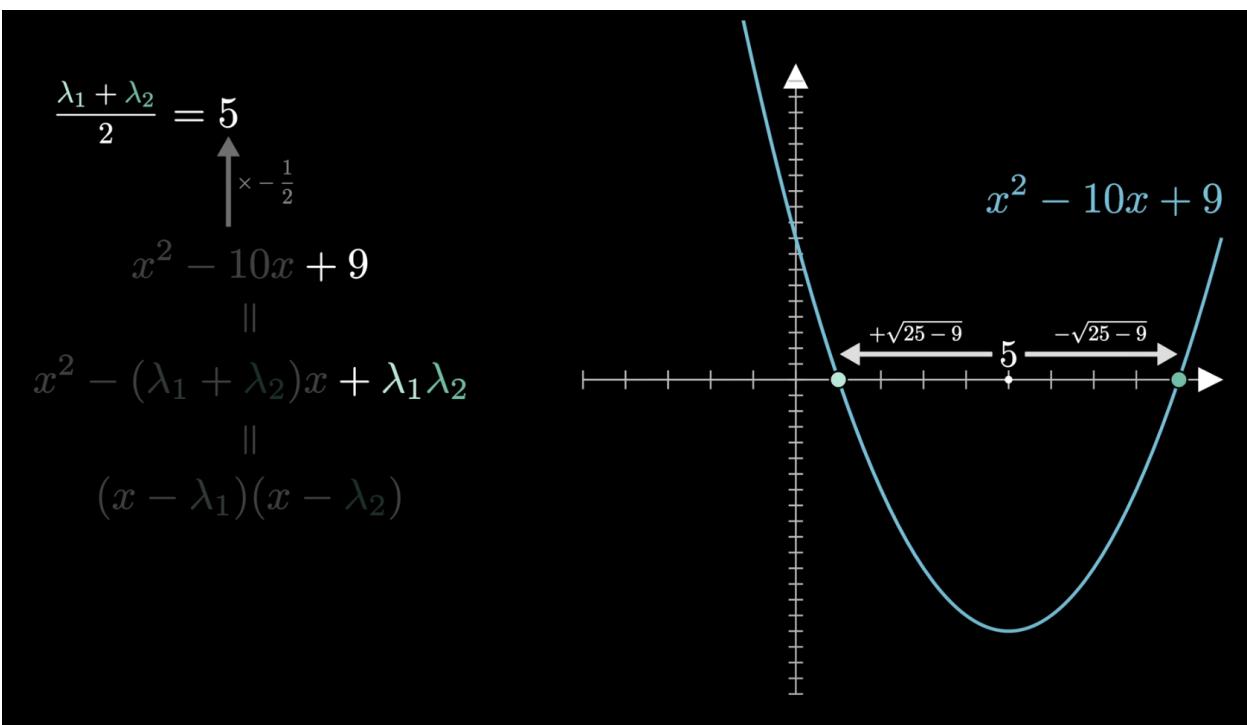


Quick to re-derive

$$3) \lambda_1, \lambda_2 = m \pm \sqrt{m^2 - p}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} m=7 \\ p=40 \end{array}$$

이를 일반적인 변수를 써서 공식화 하면 위의 3번 공식이 된다.

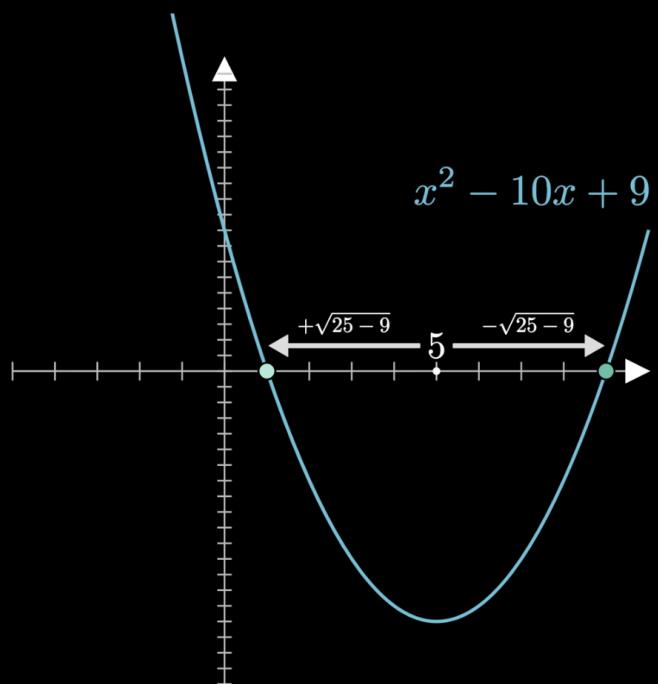


$$m \pm \sqrt{m^2 - p}$$

mean product

takes less to
remember than

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



위 공식을 구하는 방법은 2차 함수에서 근의 공식으로 근을 구하는 것과 같다. (이 경우 근이 람다)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \lambda^2 - 4\lambda - 1 \xrightarrow{\quad} 2 \pm \sqrt{2^2 - (-1)}$$

Matrix

Characteristic
polynomial

Eigenvalues

이 트릭의 요점은 행렬을 보면서 다항식을 설정하는 중간 과정을 생략할 수 있다는 점이다.