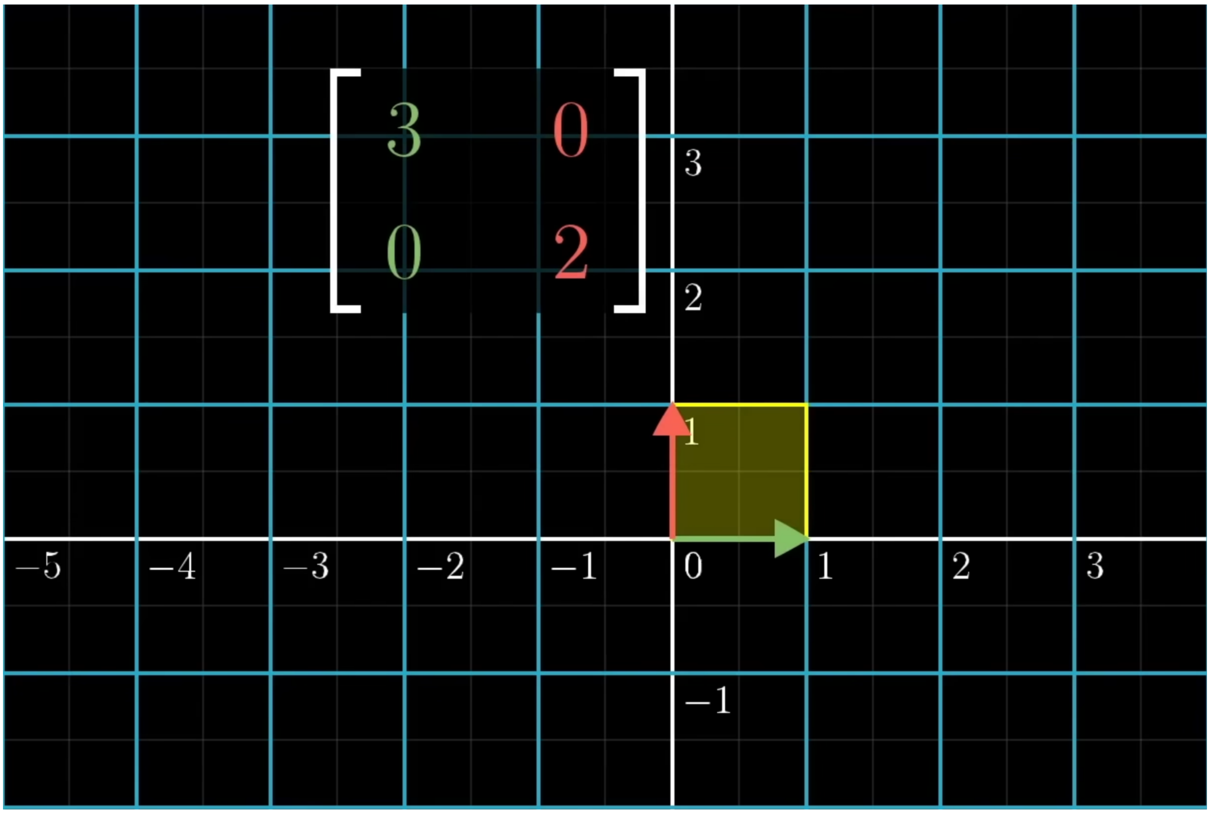
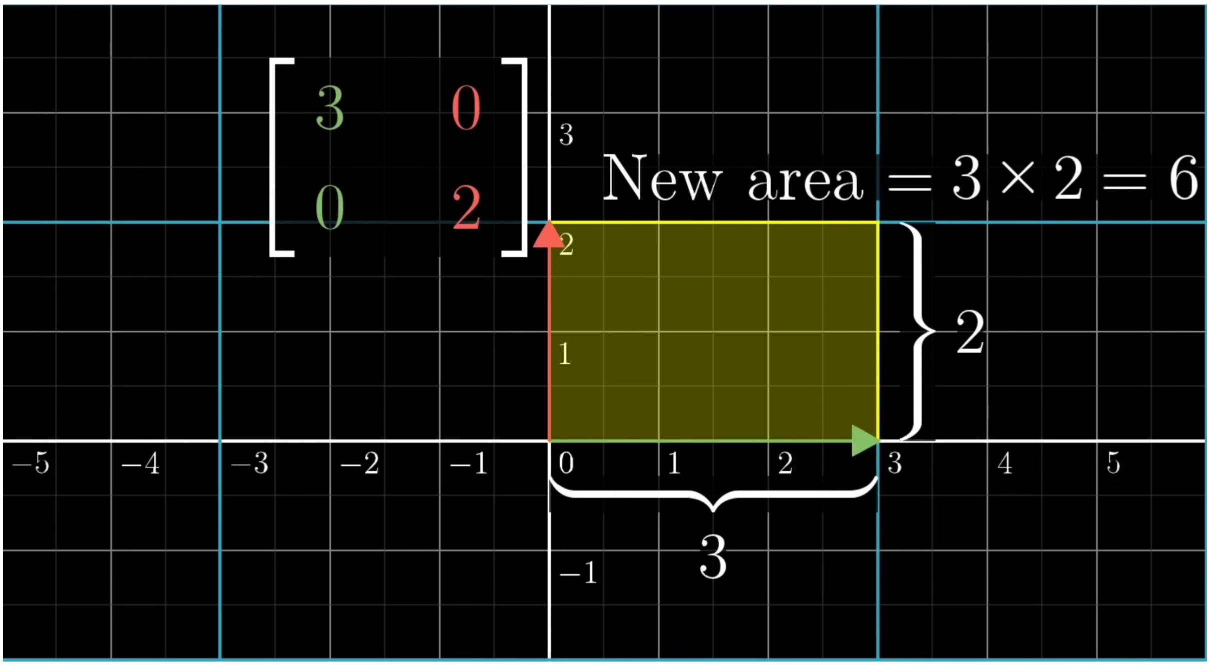
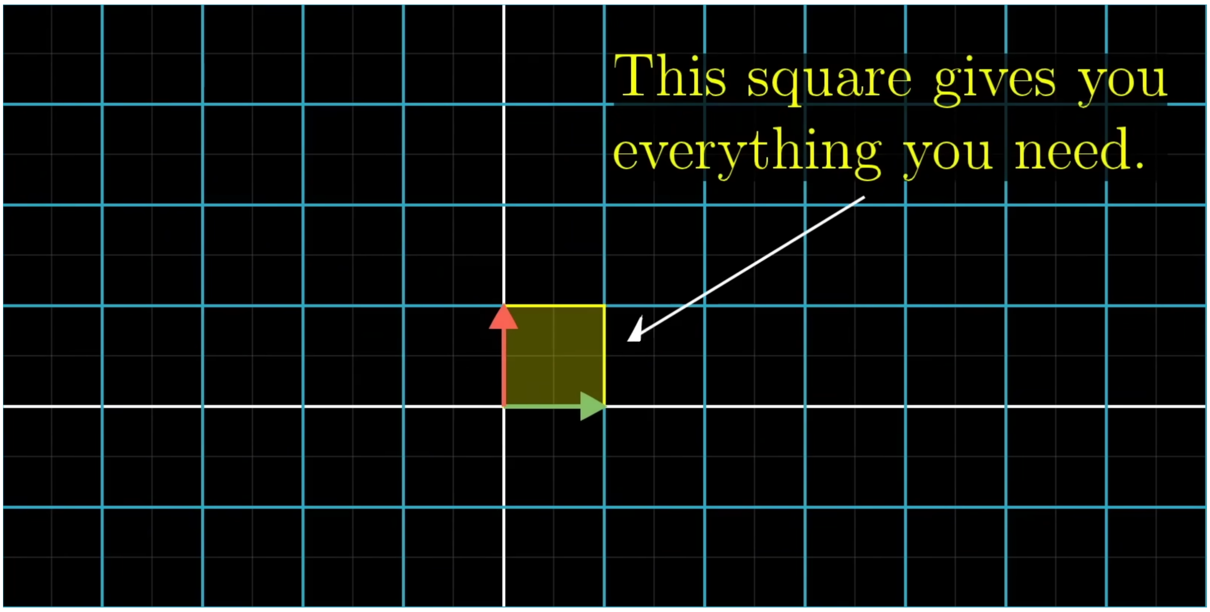
Determinant

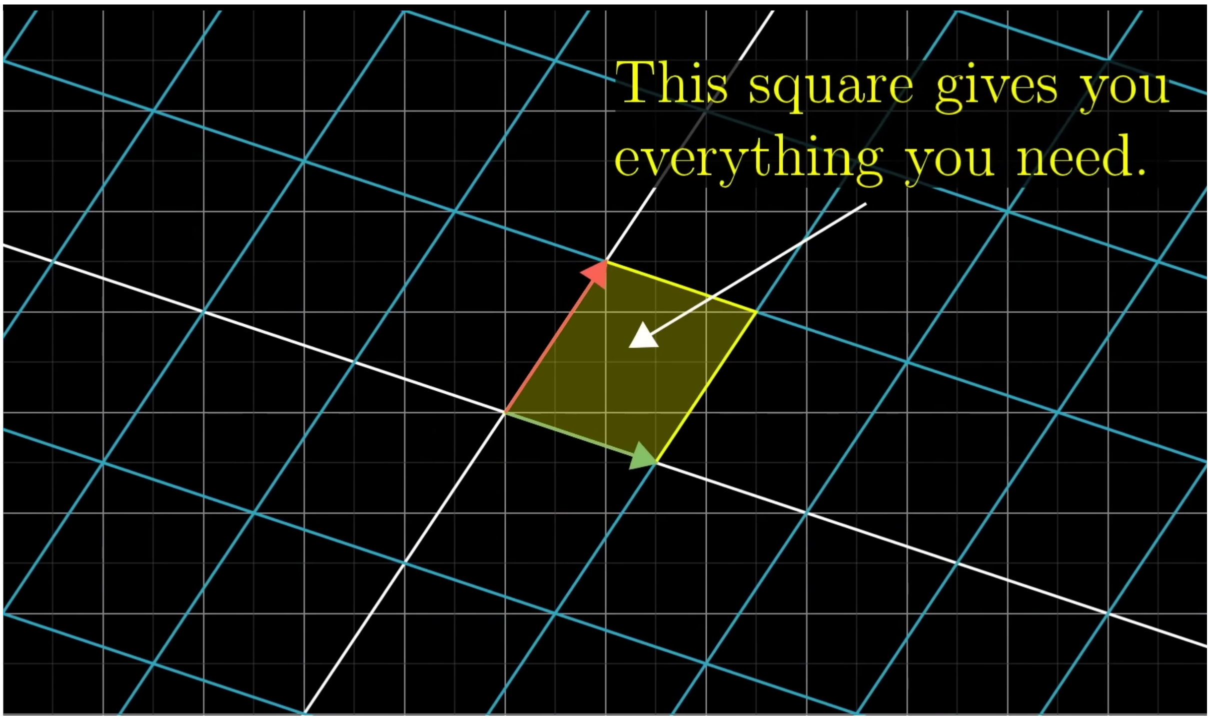
정의

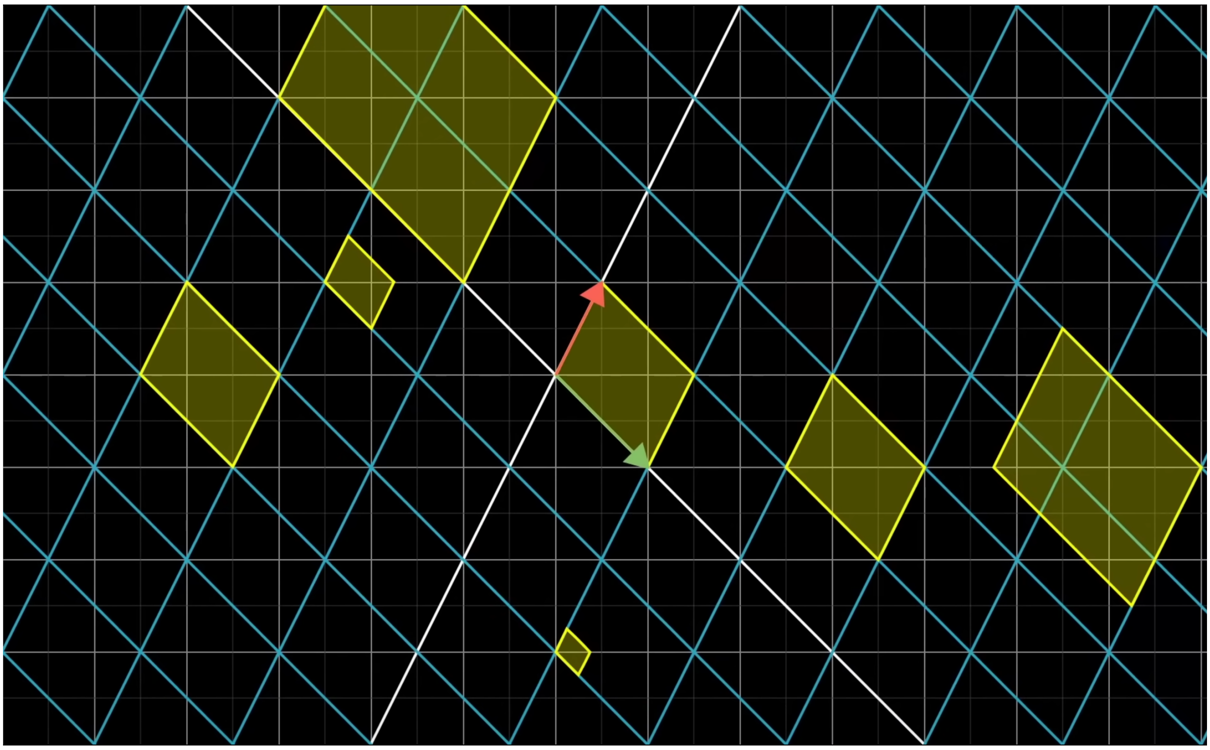




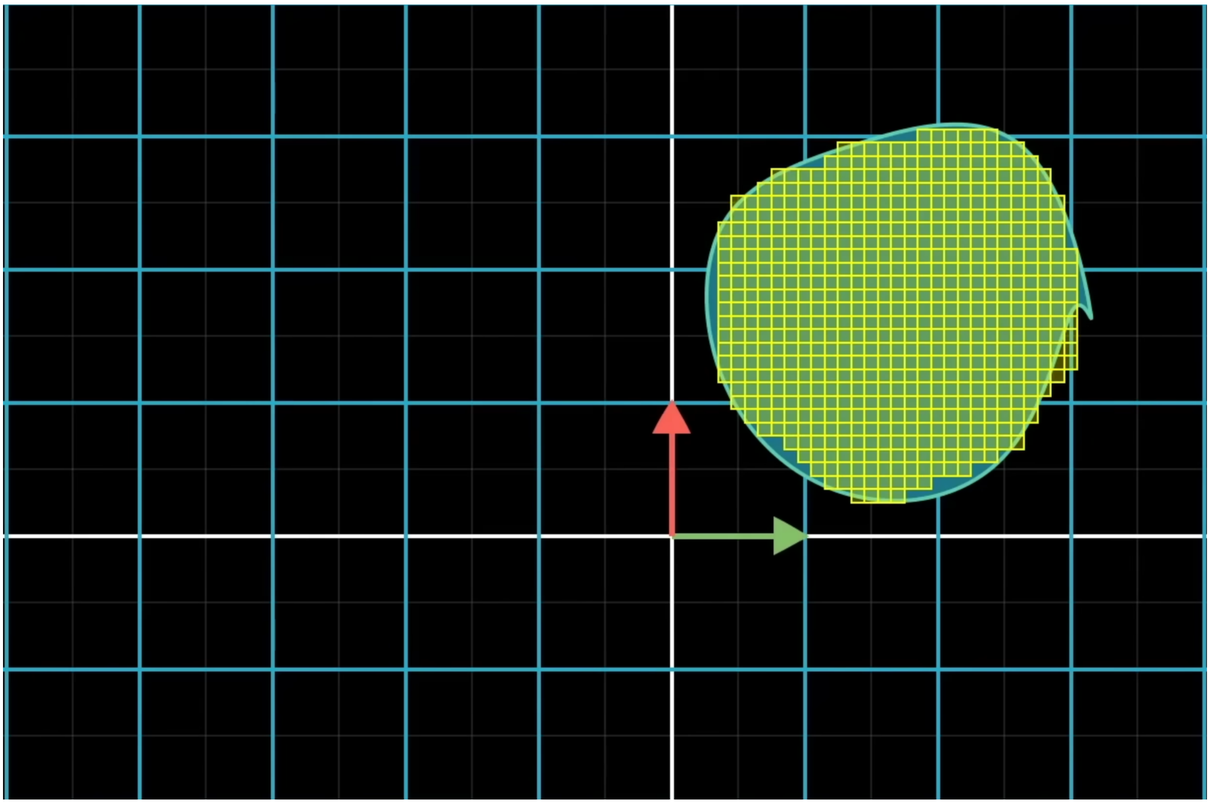
행렬을 이용한 선형변환이 일어나면 영역이 확장되거나 축소될 수 있다.



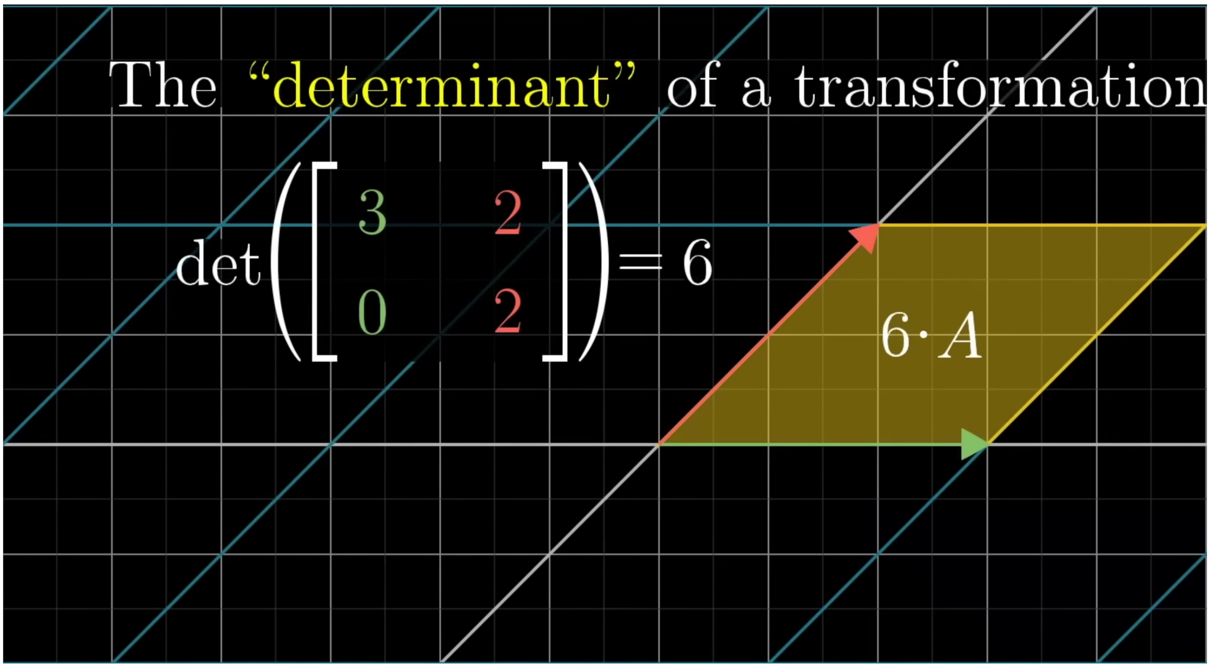




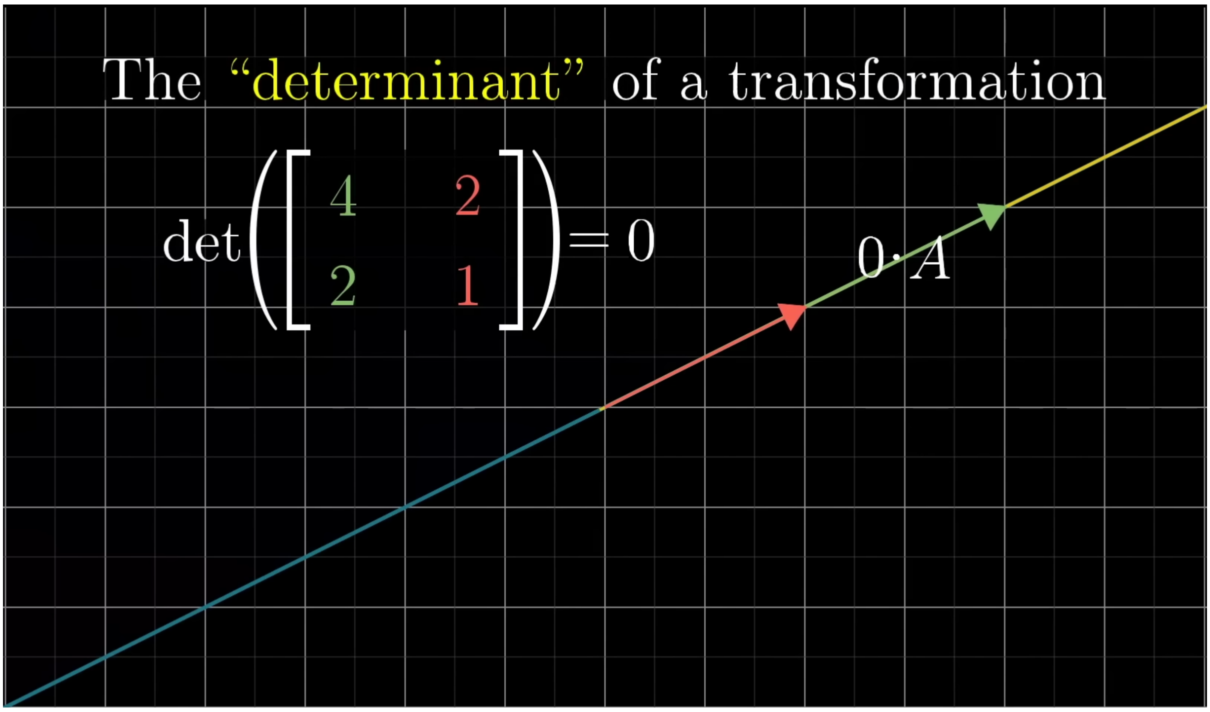
하나의 단위 사각형의 영역의 변화만 알면 공간의 어느 지역이 변할 지도 예측 할 수 있다. 왜냐면 격자선이 평행하고 균등한 거리를 유지한 채 변화하기 때문이다.



사각형이 아닌 영역이라 할 지라도 사각형의 집합으로 근사할 수 있기 때문에, 동일하게 스케일링 된다.



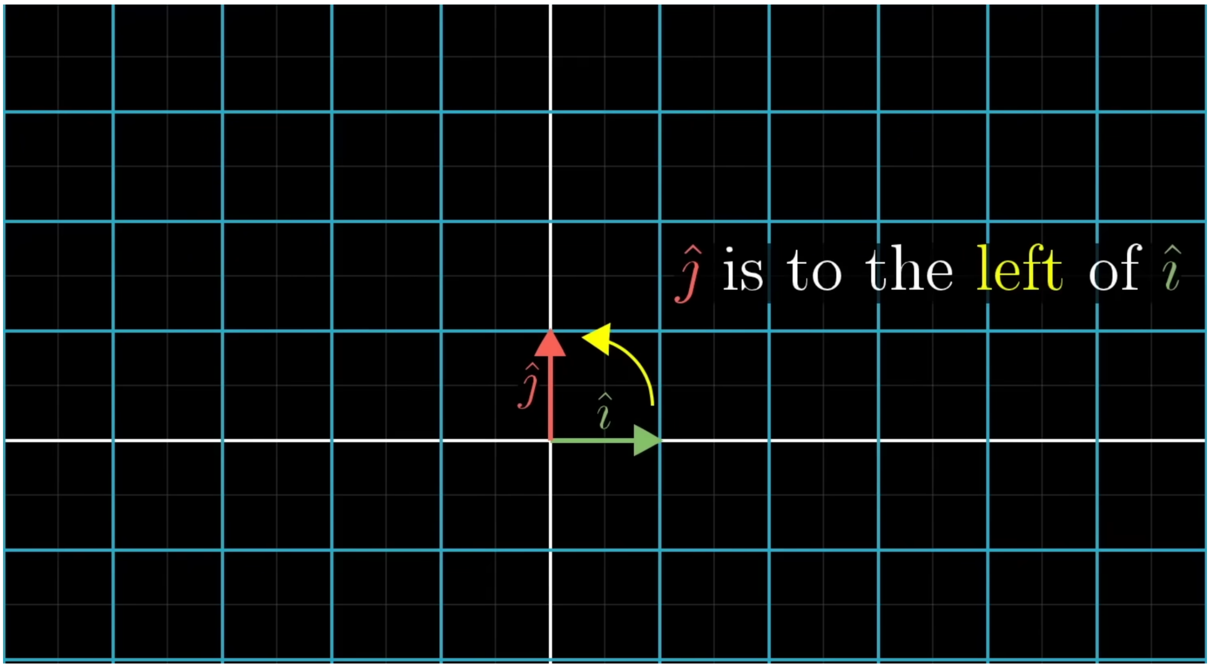
선형 변화에 의한 영역의 변화를 나타내는 요인(factor)를 determinant(행렬식) 이라고 한다. 가령 한 행렬의 determinant가 3이라면, 좌표계에서 특정 지역의 크기는 3팩터 만큼 증가한다. 반대로 determinant가 0.5 라면, 모든 영역의 크기가 1/2로 축소되는 것을 의미한다.

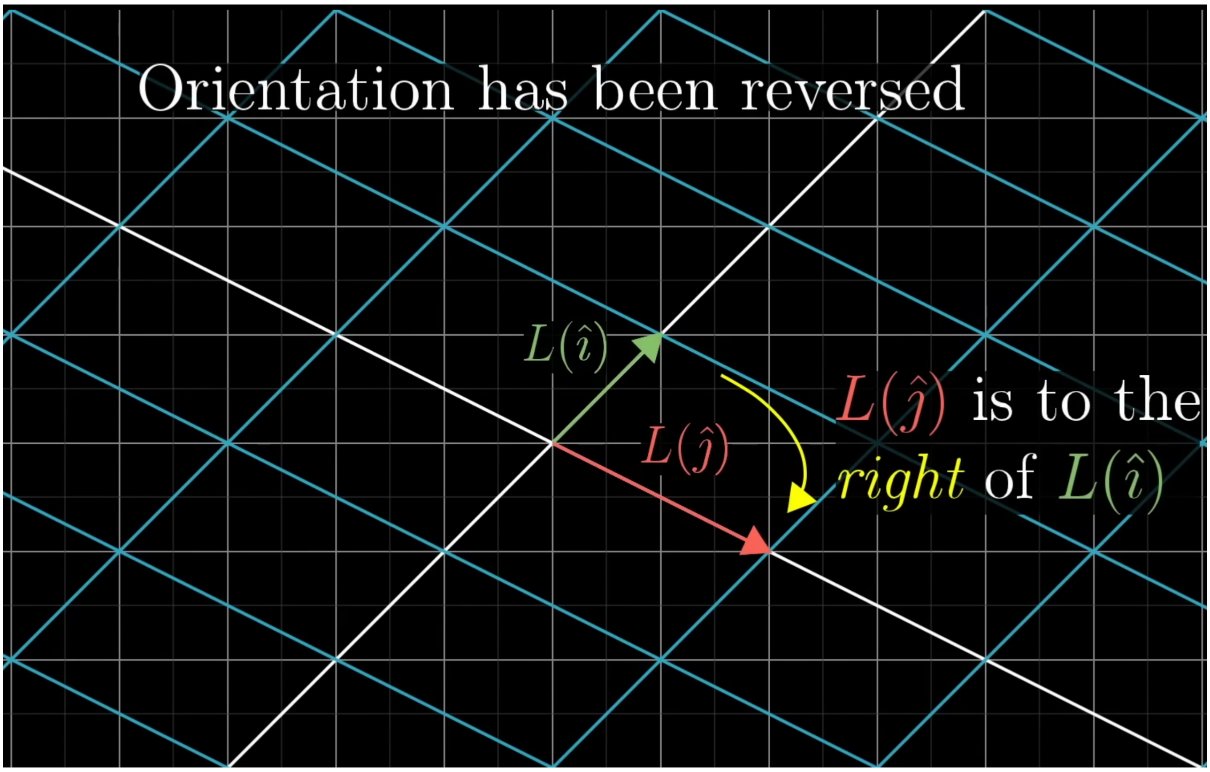


matrix의 determinant가 0인 경우 선이 되어서 모든 공간이 하나의 선으로 축소되어서 어떤 지역의 공간도 0이 된다.

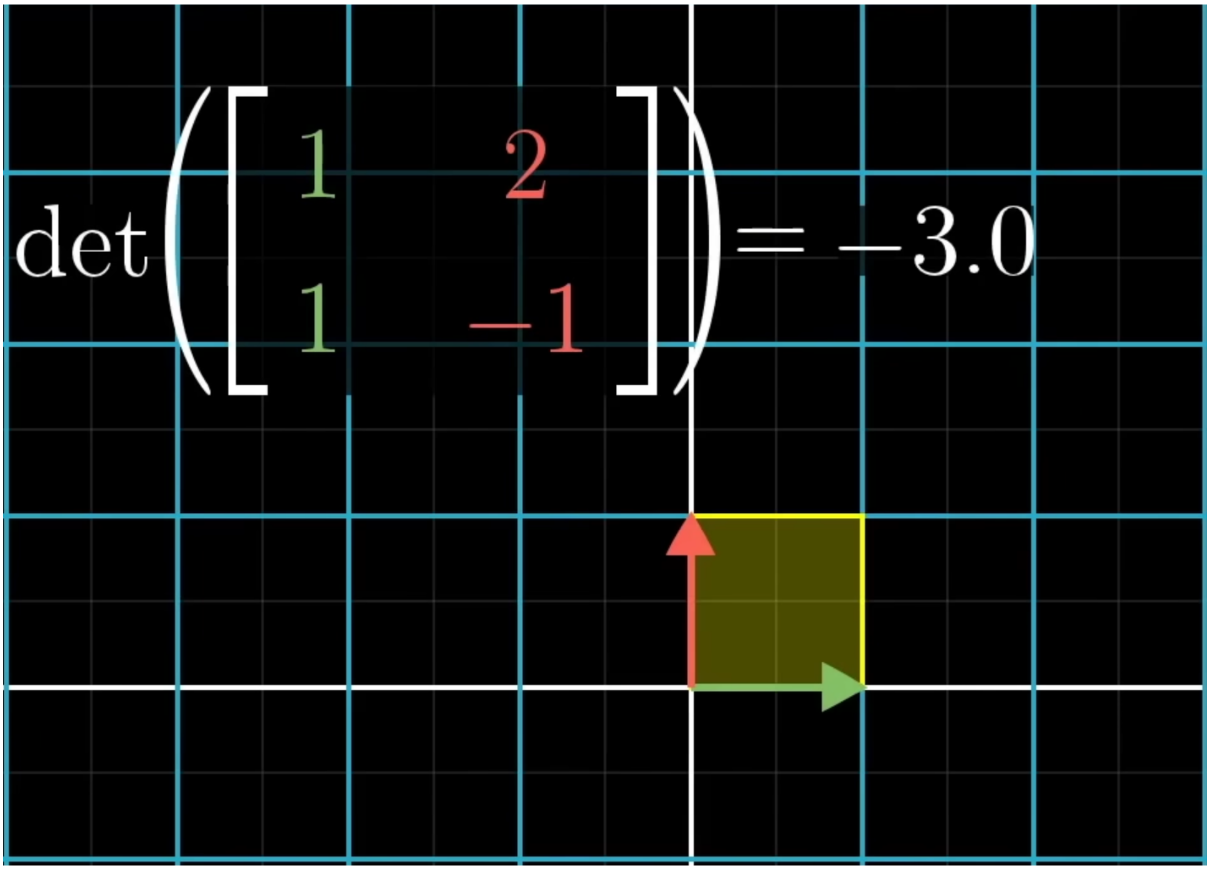
Orientation(방향)

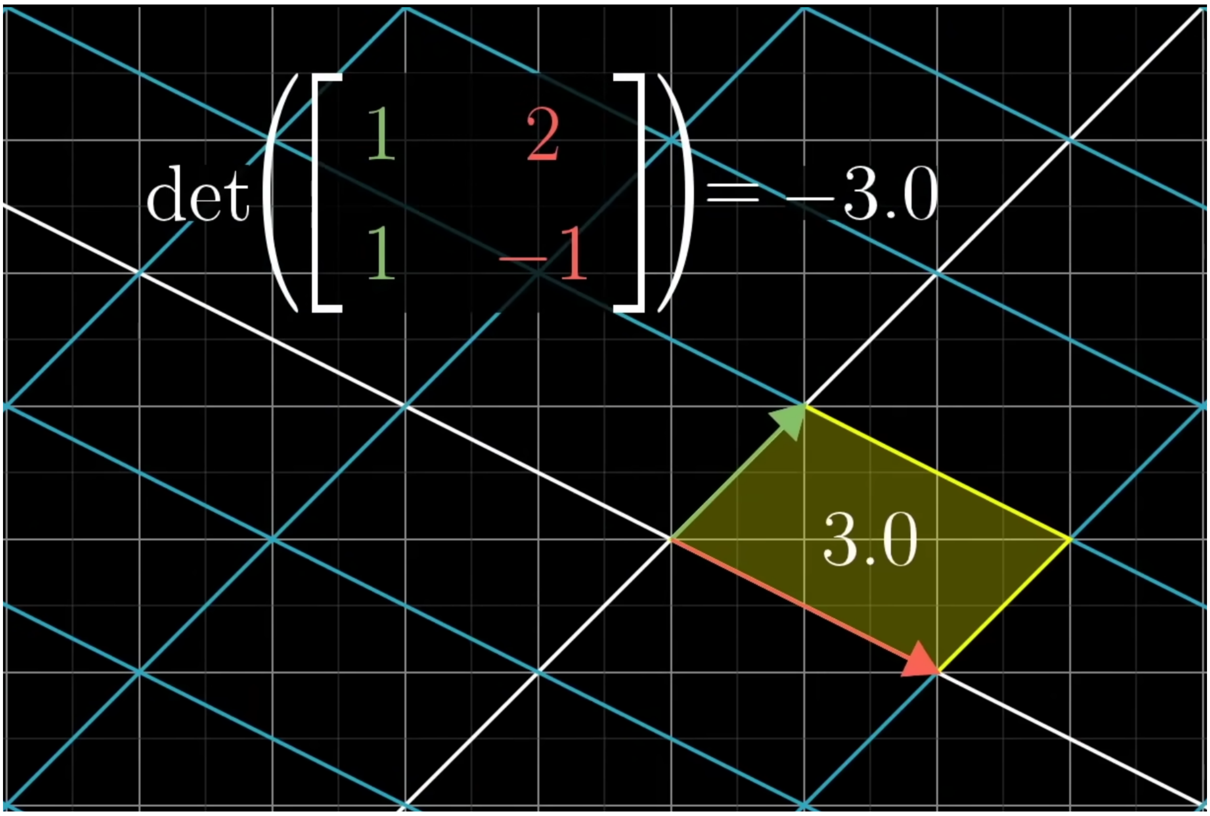
그런데 determinant는 음수도 될 수 있다. 음수의 determinant는 무엇을 뜻하는 것일까?



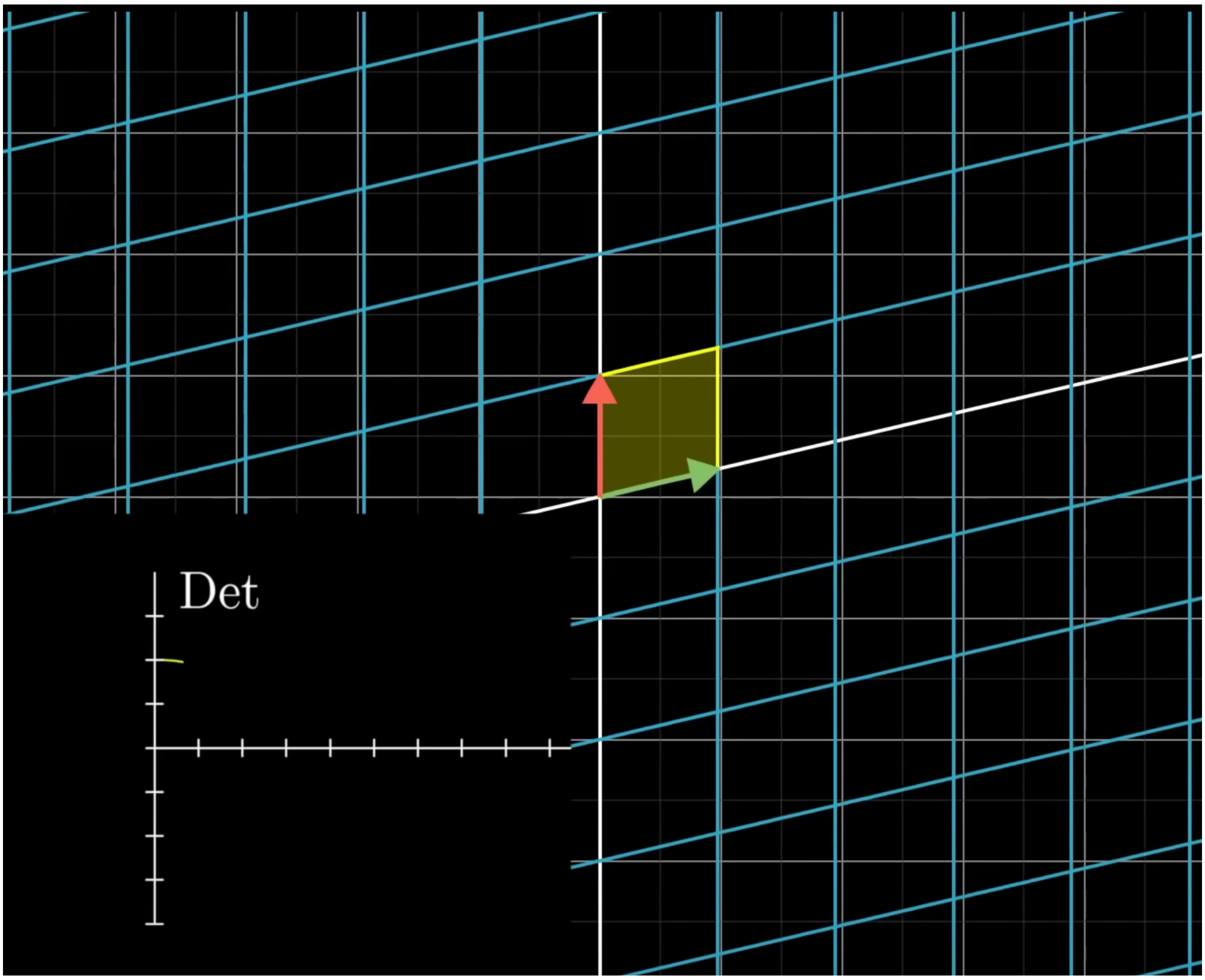


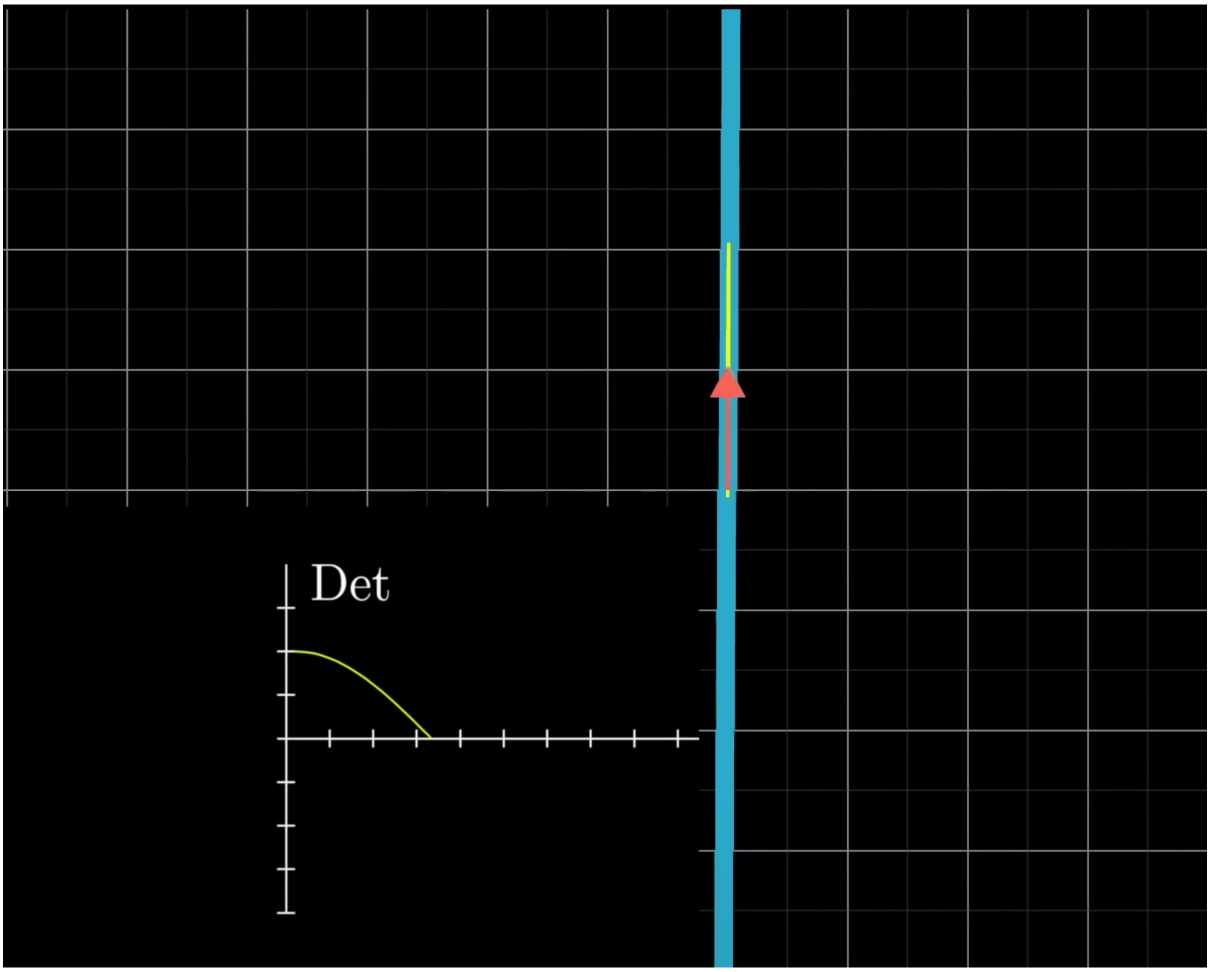
음수의 determinant의 경우 공간의 orientation이 뒤집(invert)어 진다고 표현한다. i-hat, 과 j-hat이 음수의 선형변환 이후에는 orientation이 inverted 된 것을 확인 할 수 있다. 즉 이런 방향의 뒤집어짐이 일어날때 determinant는 항상 음수가 된다.

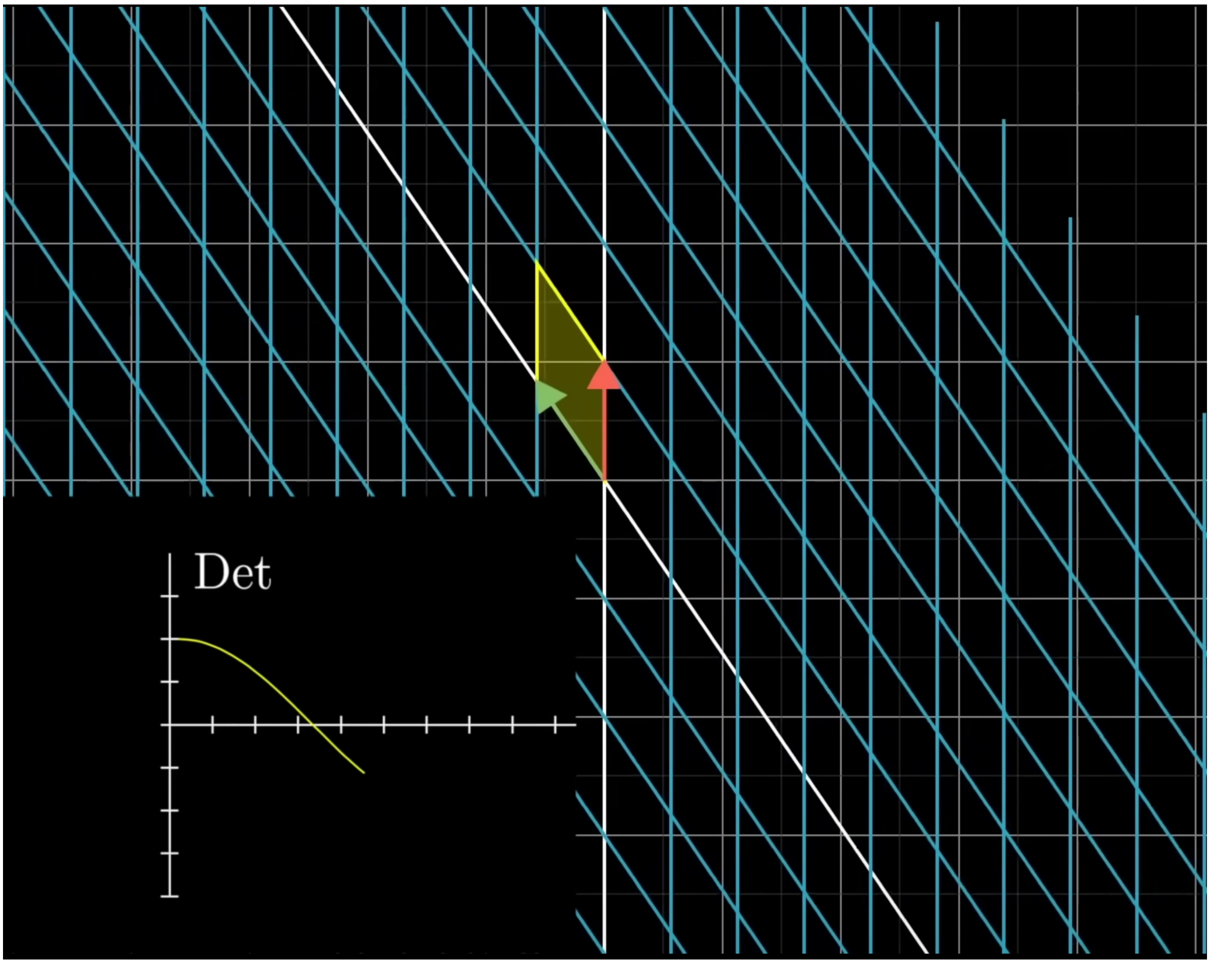




그리고 숫자는 여전히 스케일링에 관한 팩터를 나타낸다. 즉 -3의 det는 공간을 뒤집은 후 3 팩터만큼 스케일링 하는 것이다.


Det

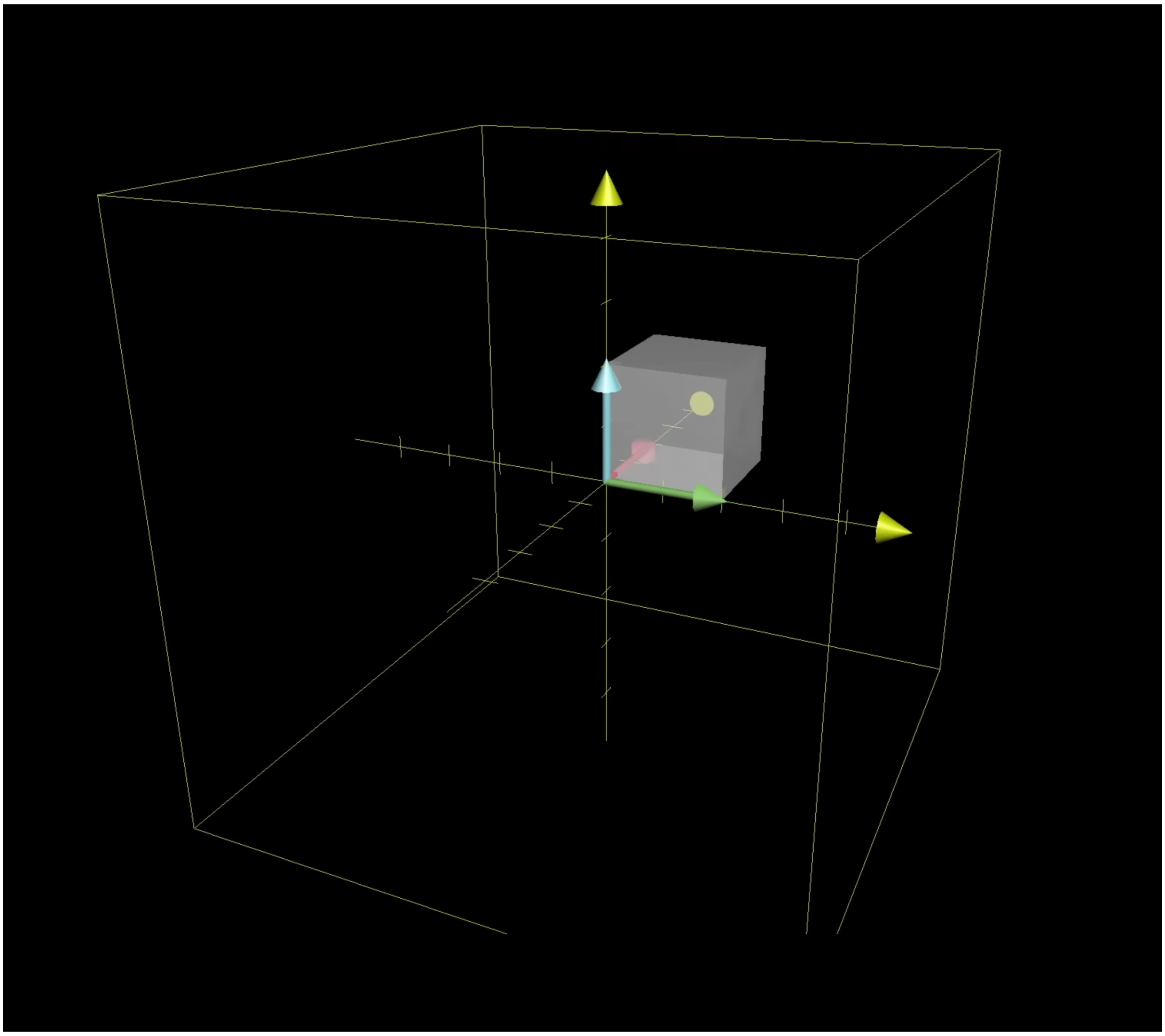

Det

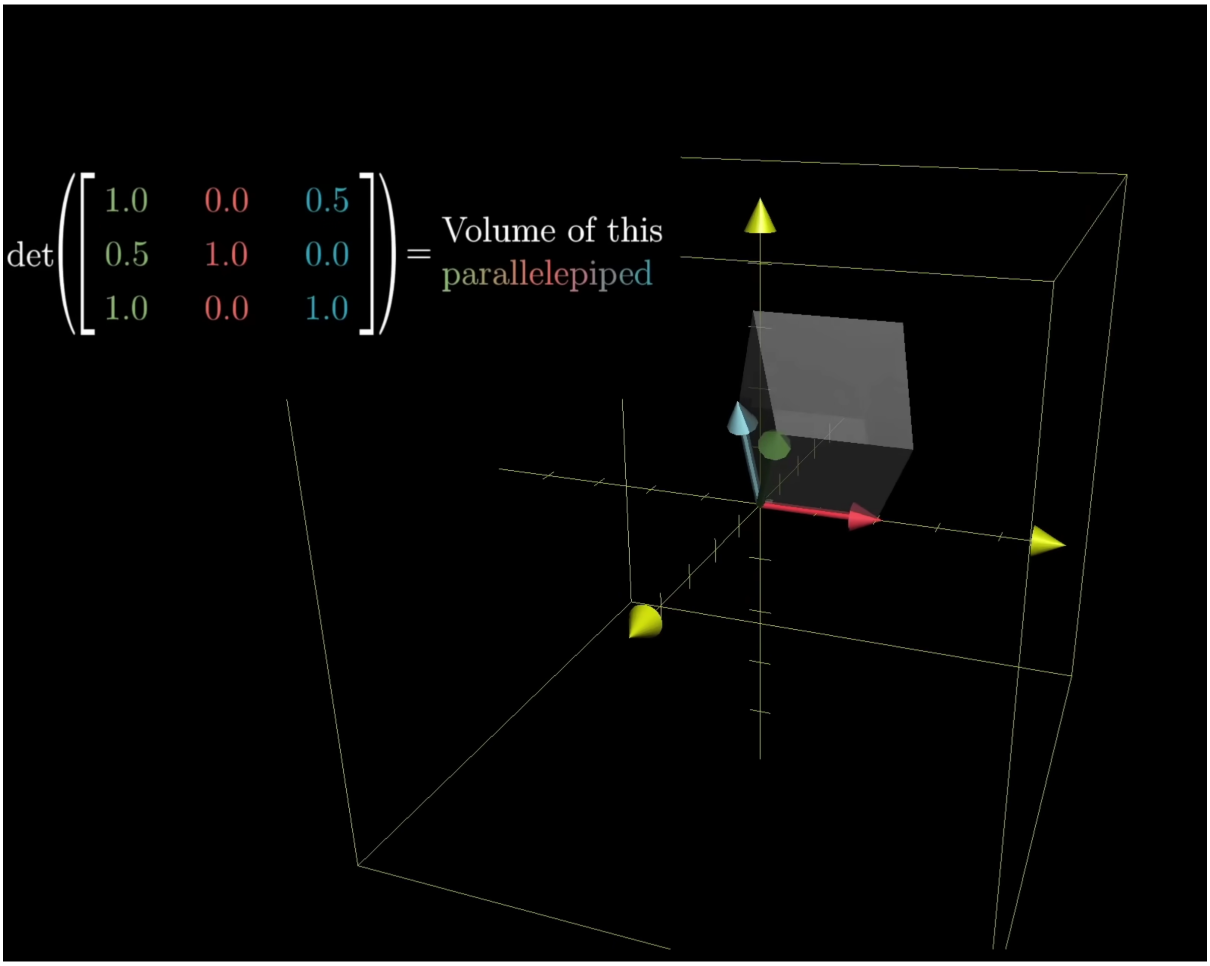


i-hat이 j-hat쪽으로 가까워지는 변환을 생각해 볼때, 점점 가까워지면서 determinant는 계속 감소하다가 결국 두 기저벡터는 하나의 선이 되어서 determinant는 0이 된다. 이후에도 계속 진행되면 뒤집어진 모습으로 determinant가 음수로 계속 커지는 것으로 생각할 수 있다.

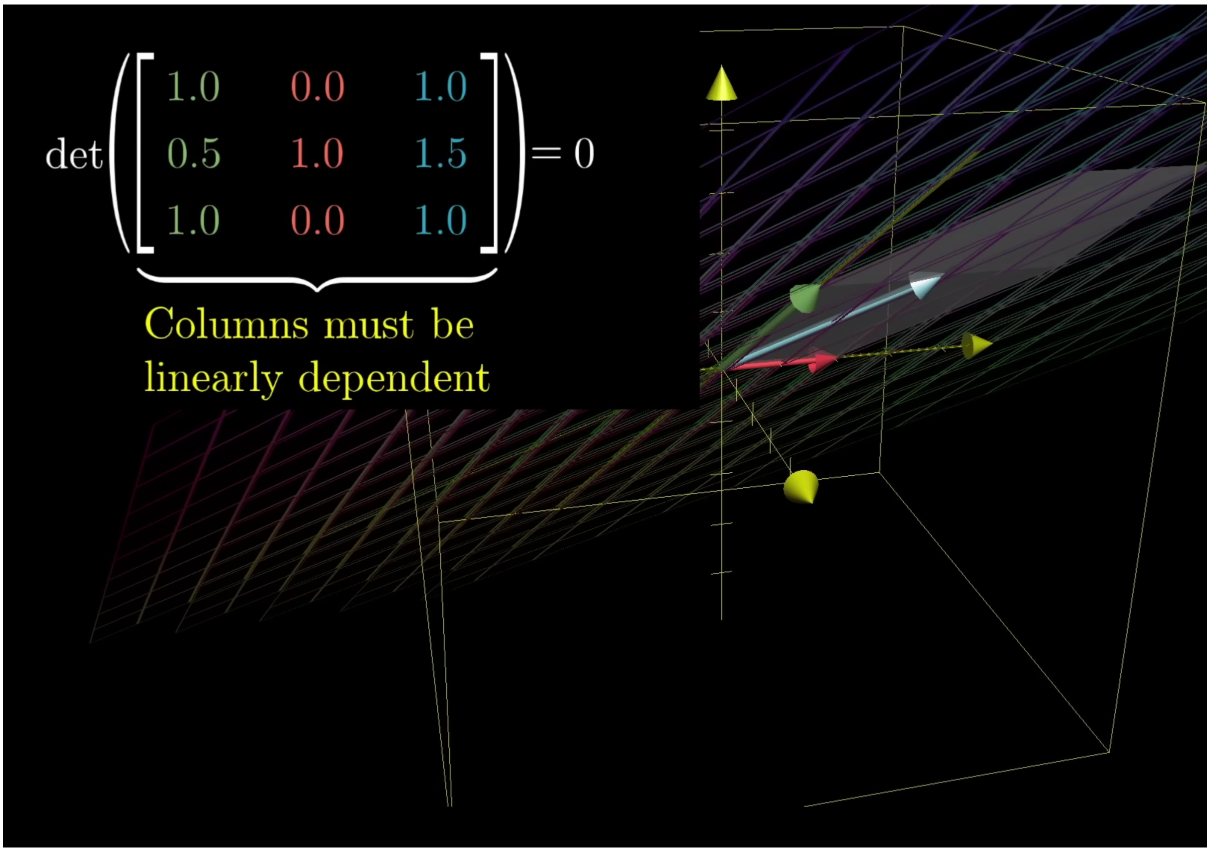
3차원의 Determinant

3차원의 determinant 역시 스케일링을 알려주는데, 3차원에서는 부피의 스케일링이다.



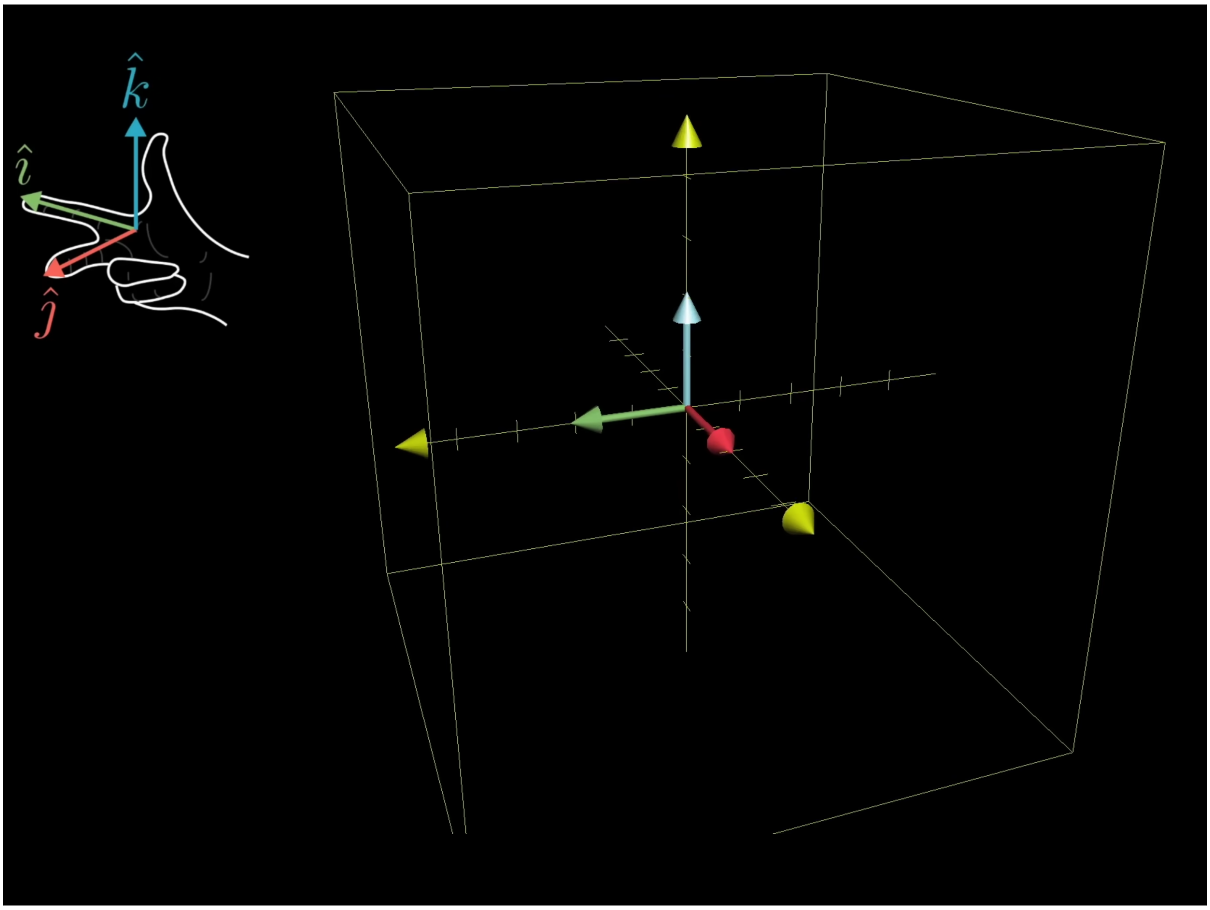


3차원 행렬의 determinant는 변형된 정육면체(영역)의 부피값으로 생각할 수 있다.

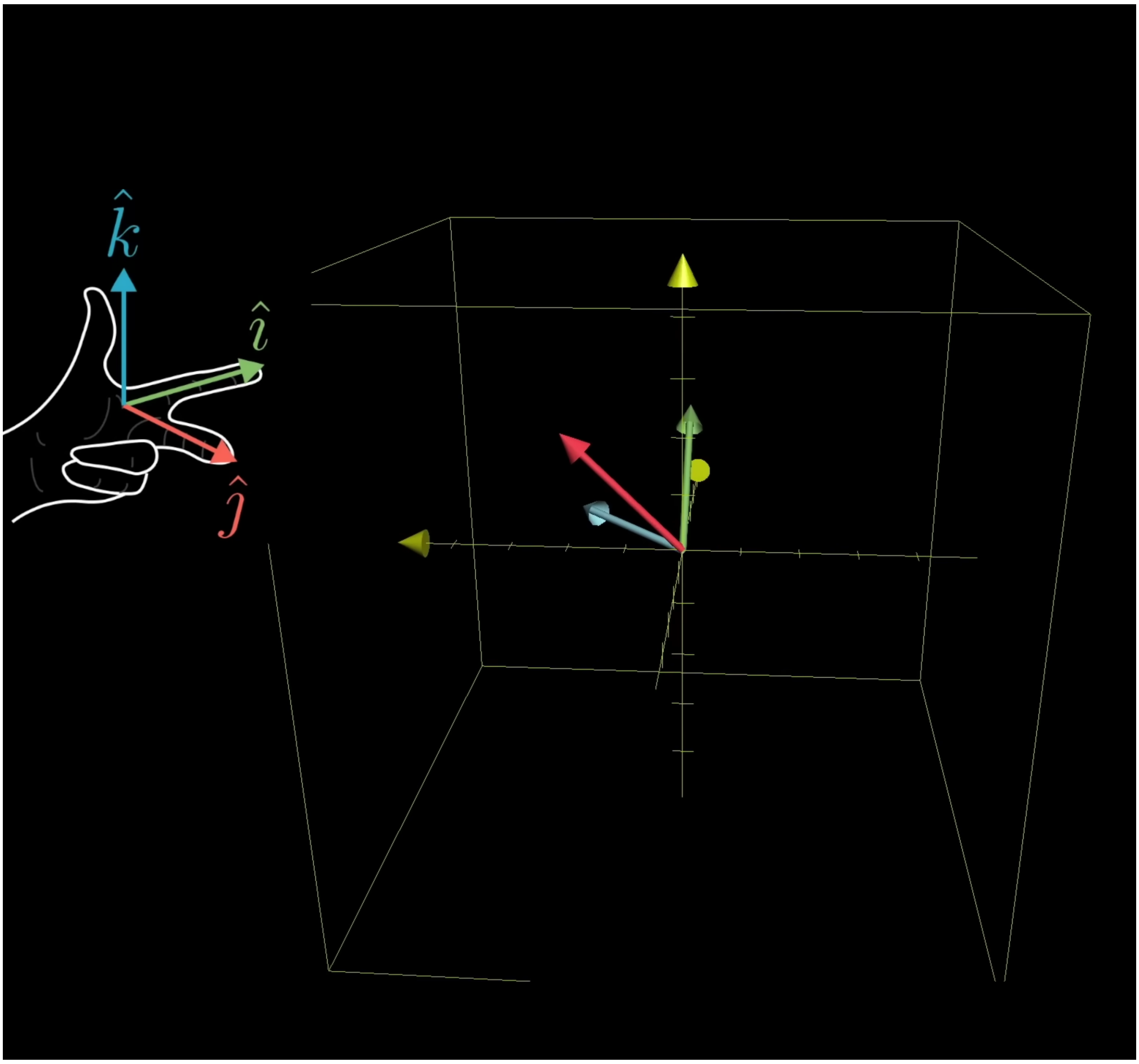


3차원에서도 determinant는 0이 될 수 있으며 이는 부피가 0인 평면이나 선 심지어는 점이 되었다는 의미이다. 이 때 matrix의 각 column은 linear dependent(선형 종속) 적인 관계이다.

그러면 3차원 공간에서 determinant가 음수인 것은 어떤 의미인가?



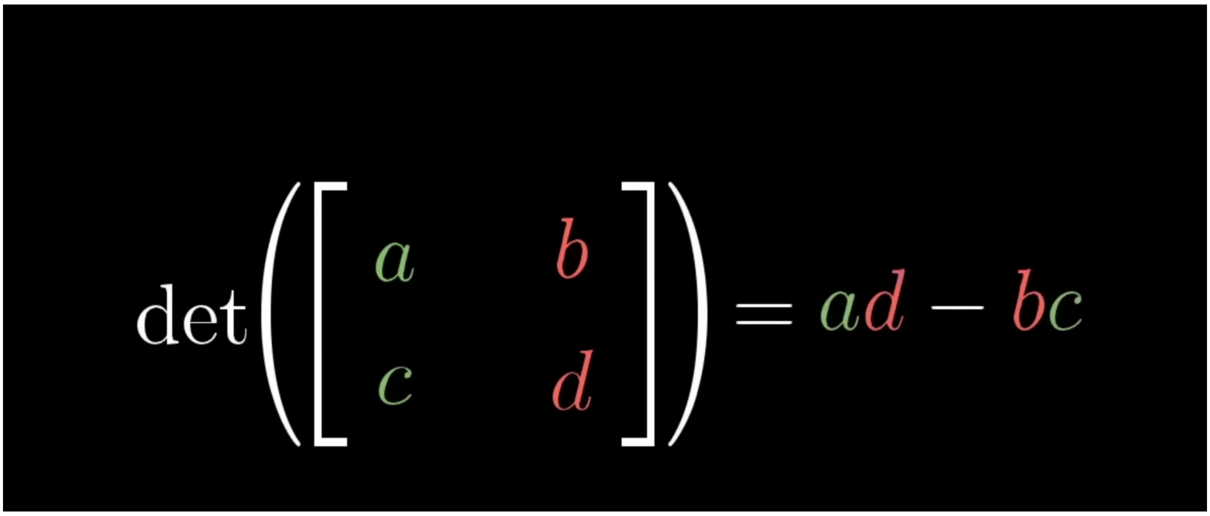
오른손 법칙을 이용해서 변환을 해보면 쉽게 생각 할 수 있다. 변환 이후에도 각 hat들의 orientation이 유지되려면 determinant가 양수이어야 한다.



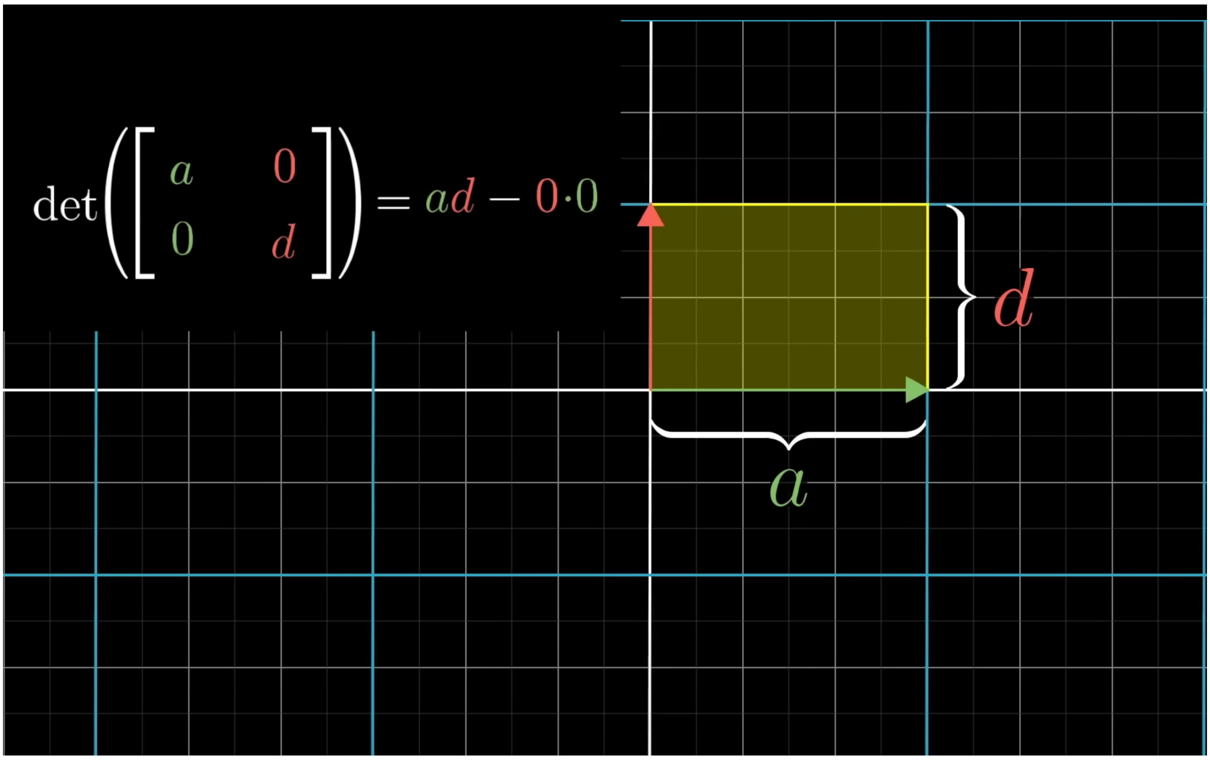
오른손이 아닌 왼손으로 해야 orientation을 설명할 수 있는 경우 determinant가 음수인 것이다.

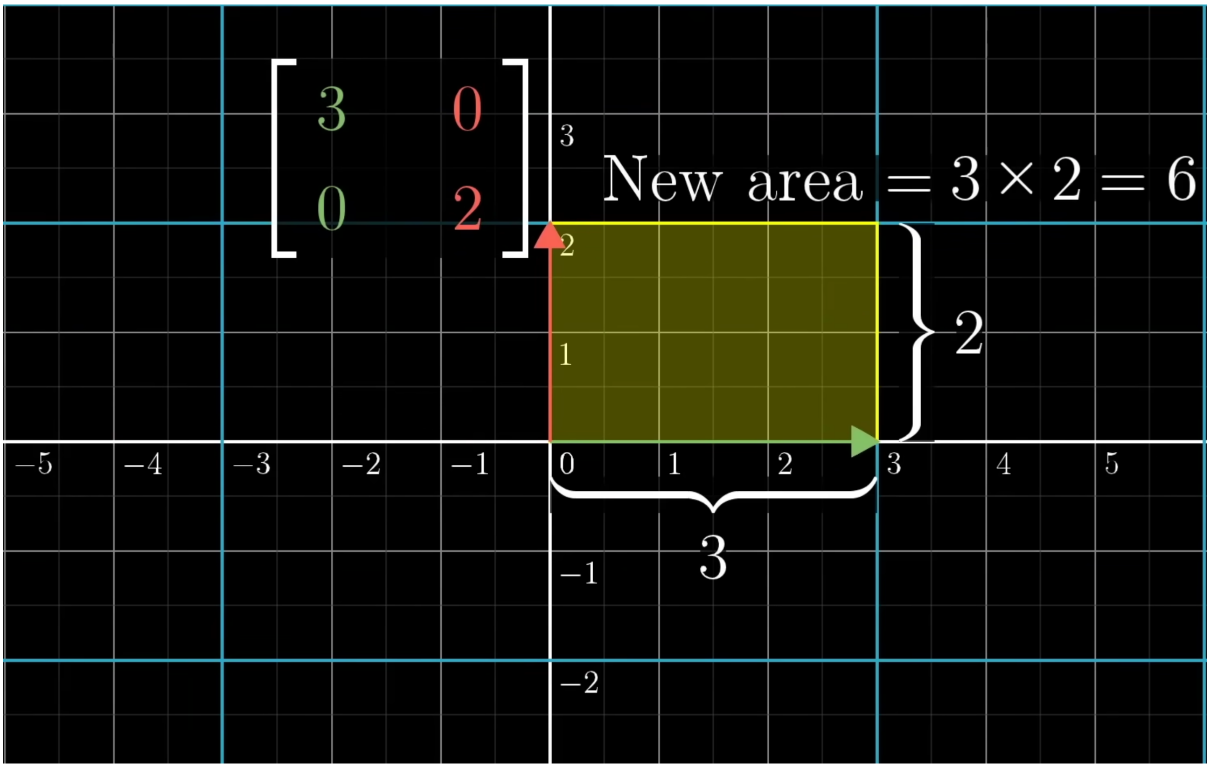
Compute Determinant

그러면 이 determinant는 어떻게 계산하는가?

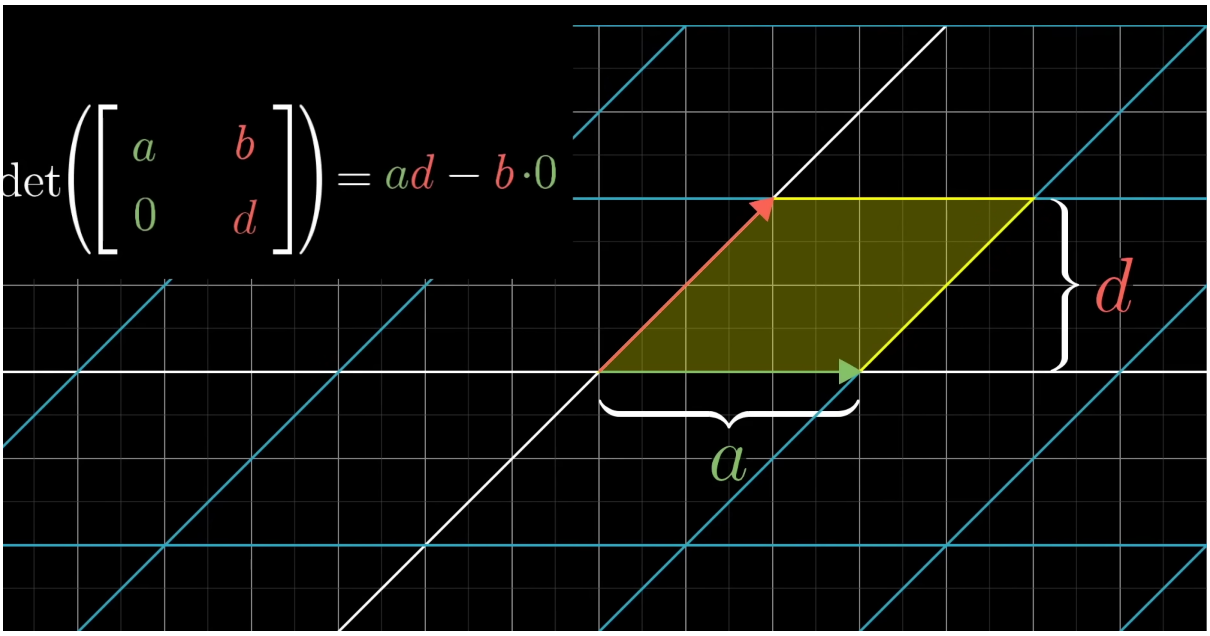


2*2 행렬의 경우 위와 같다. (ad-bc)

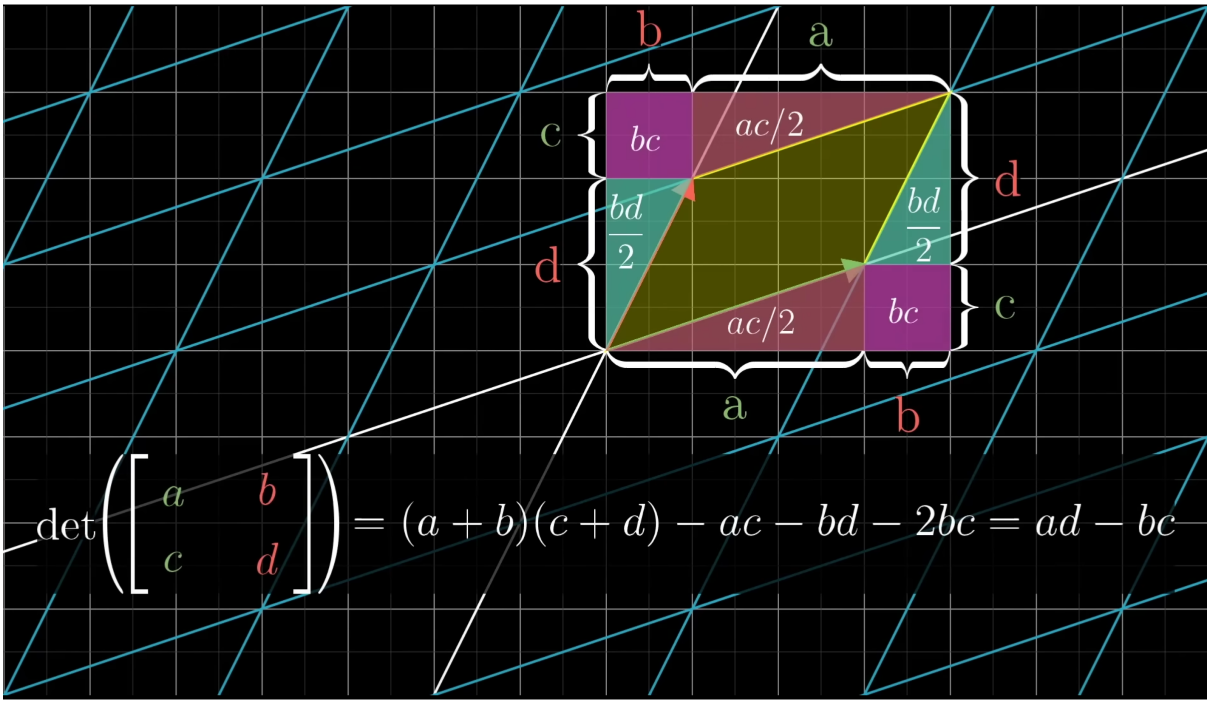




이 계산식이 어떻게 나왔는지 이해하려면 [a,0][0,d]인 행렬을 생각해보자. 이 경우 i-hat은 x축으로 a 만큼 스케일링 되고 j-hat은 y축으로 d 만큼 스케일링되어서 단위 정사각형이 직사각형으로 변환될 것이다.



만약 이때 b,c 둘 중 하나만 0이 아니일 경우 sheering 되지만 영역의 넓이는 여전히 ad 이기 때문에 크기는 변하지 않는다. 만약 b,c 둘다 0이 아닌 경우 이 b*c의 값이 이 도형을 얼마나 대각선으로 늘리거나 찌그러트릴 지를 결정한다.



b와 c에 대한 자세한 설명은 위 다이어그램을 참고하자. 이 행렬식을 익히는 방법은 여러번 직접 계산해 보는 수 밖에 없다.

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = a \det\left(\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix}\right) - b \det\left(\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix}\right) + c \det\left(\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}\right)$$

3차원 행렬의 경우에도 계산할 수 있는 공식이 있다. 마찬가지로 익히려면 직접 행렬들의 예들로 연습하는 수 뿐이다. (다만 강의자는 이런 계산식은 선형대수의 본질은 아니라고 한다.)