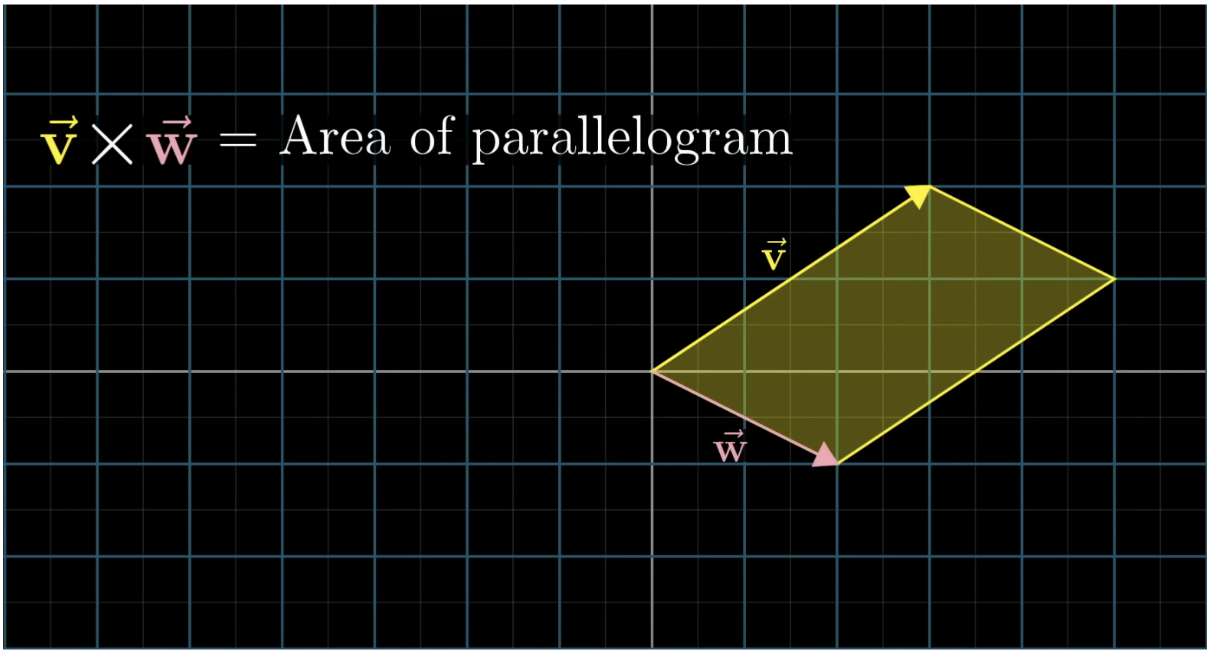
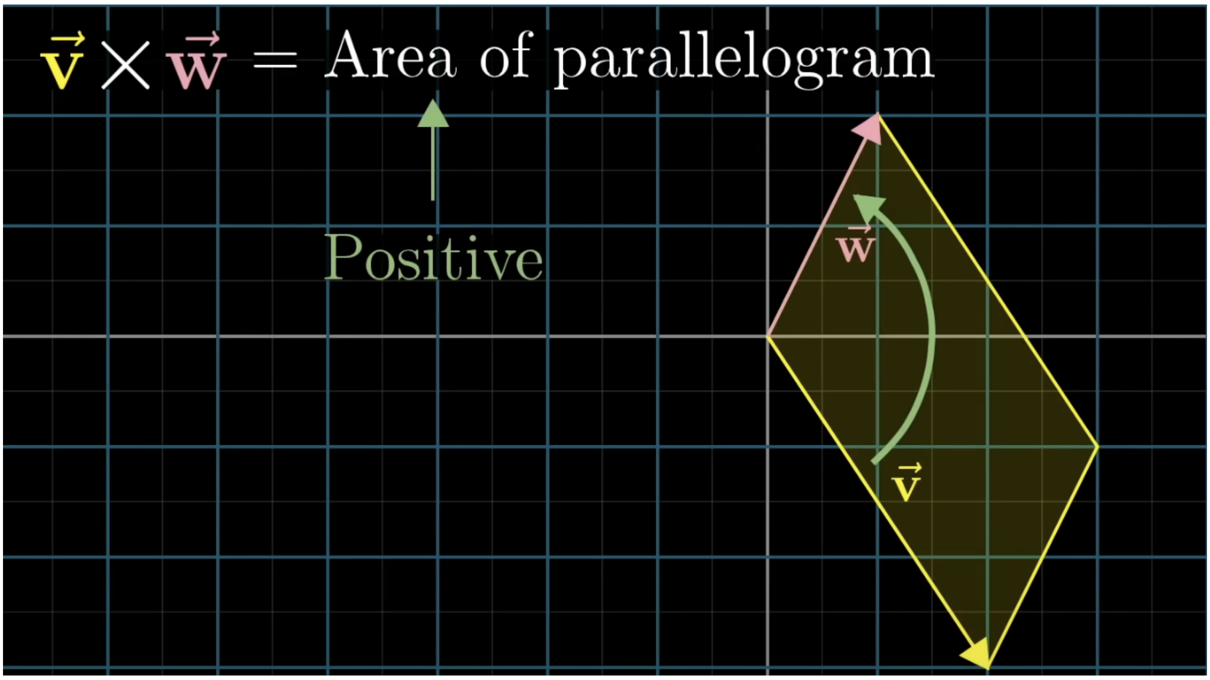
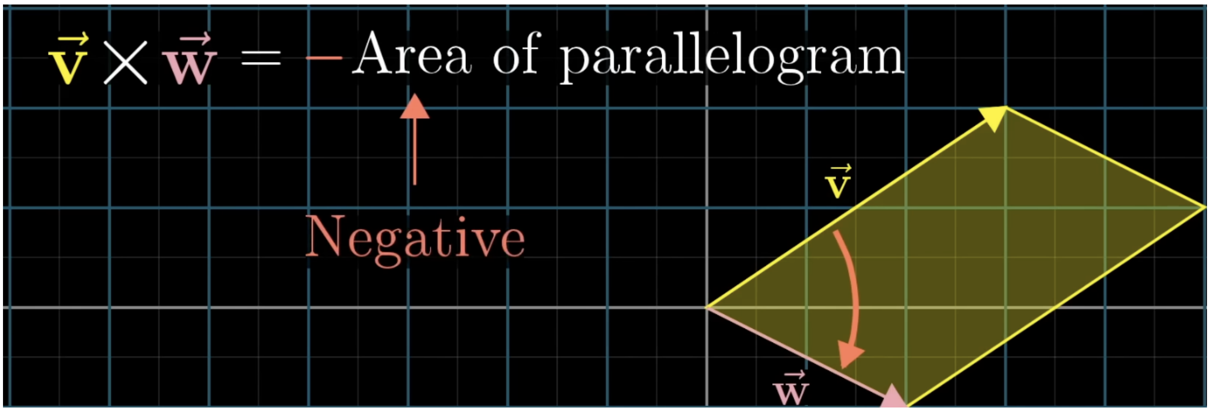
Cross Product

Definition

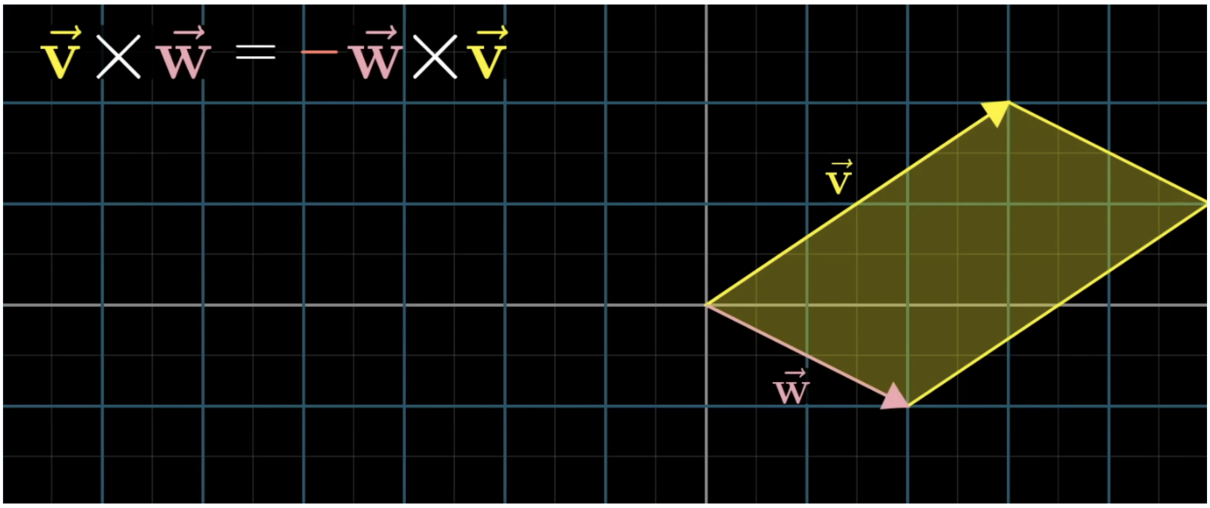


v-, w-의 외적(cross product)는 v-*w-로 표현하고 각 벡터를 평행이동해서 만들어 지는 평행 사변형의 넓이를 의미한다.



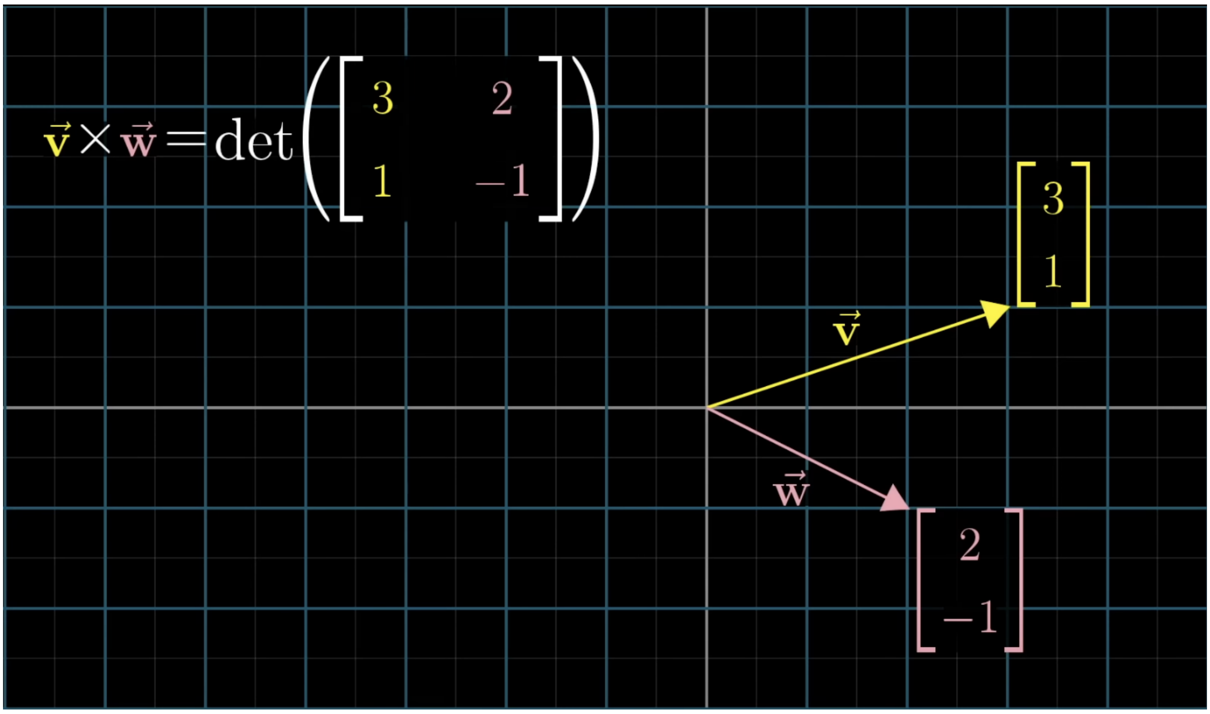


v와 w의 위치에 따라 넓이의 기호도 정해진다. v가 w의 오른쪽에 위치하면 양수, 왼쪽에 위치하면 음수이다.

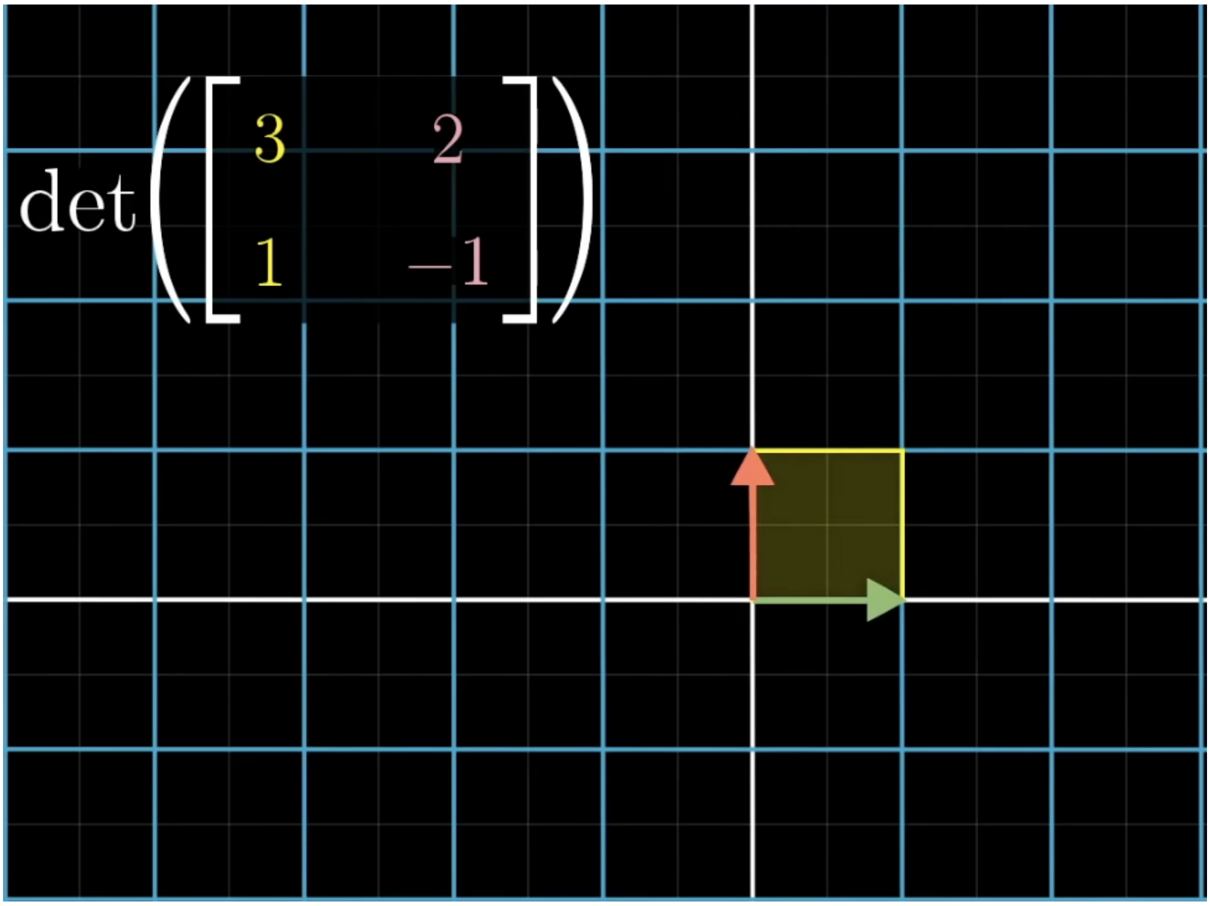


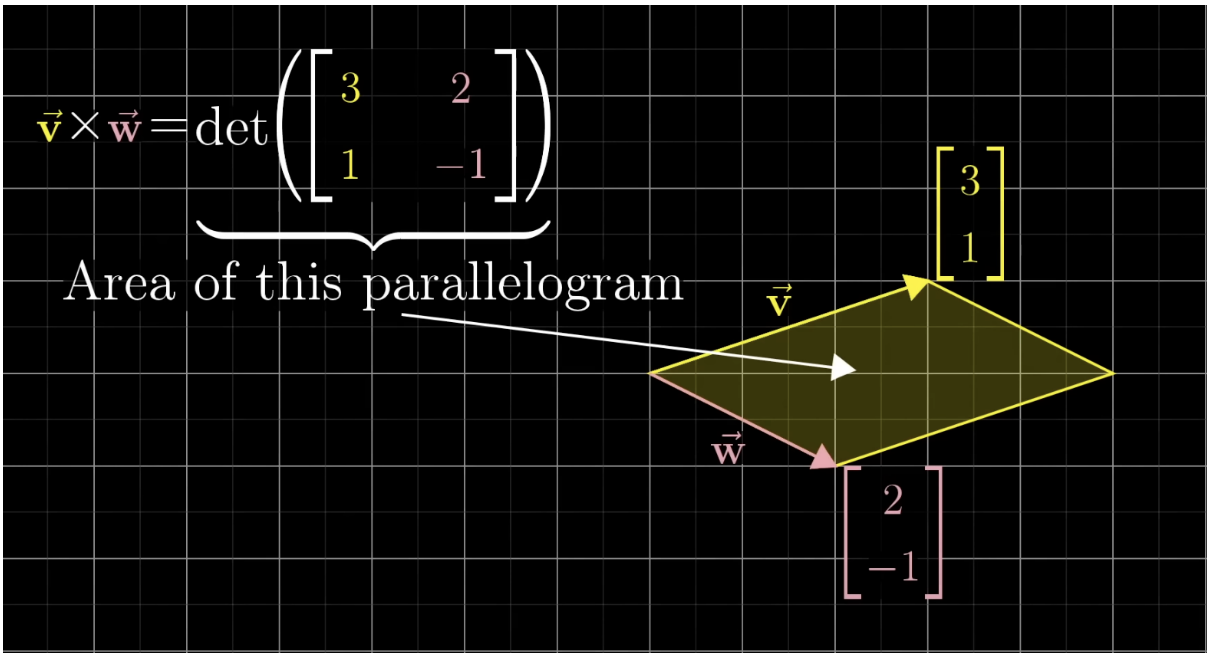
벡터의 곱의 순서를 바꾸면 외적의 값도 변경된다.

Calculation

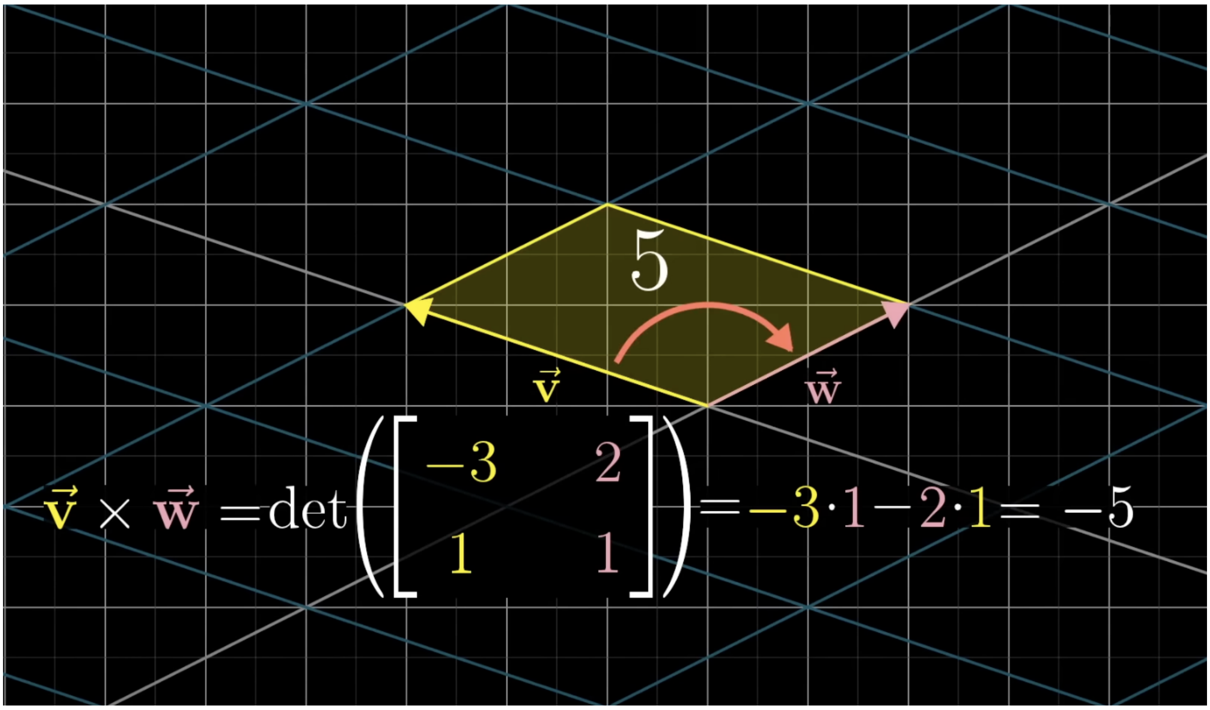


외적의 계산은 벡터의 좌표가 열이 되는 행렬의 행렬식(determinant)를 구하면 된다.

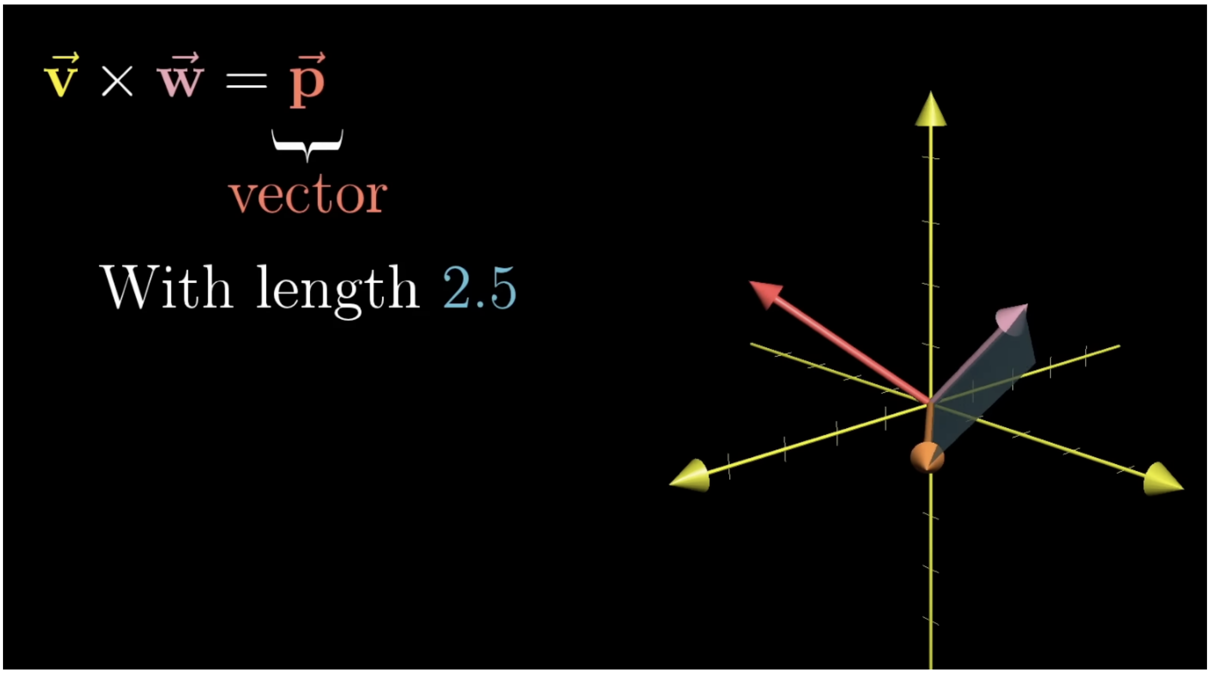




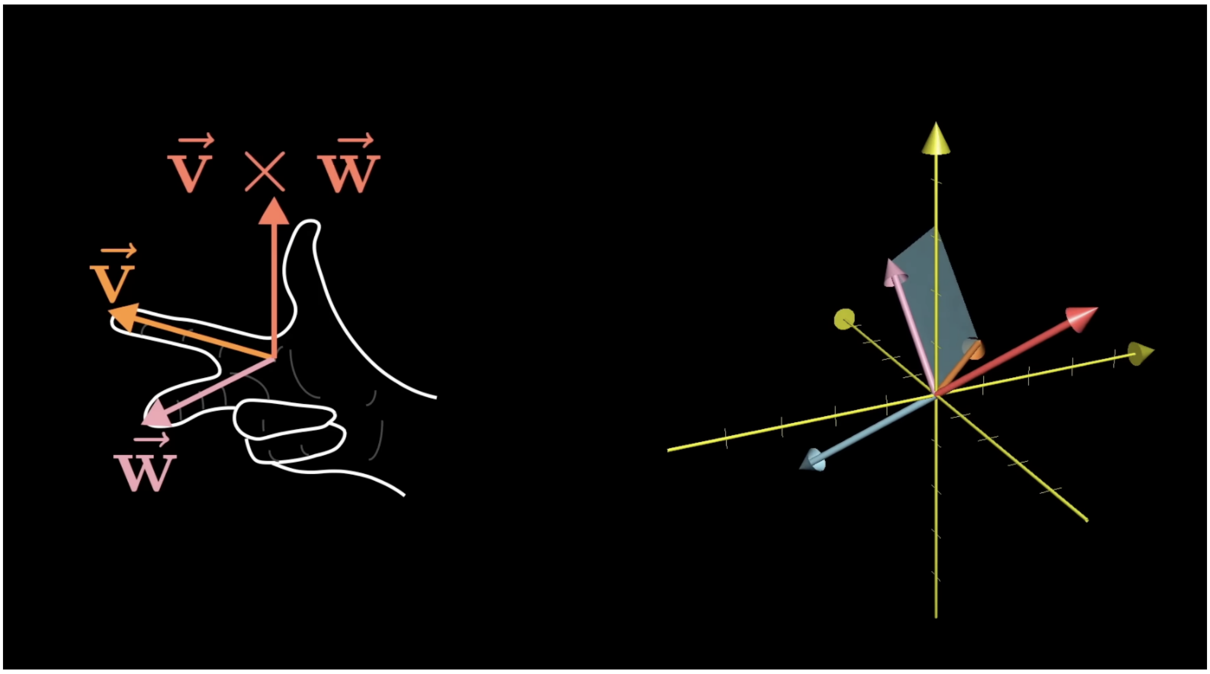
행렬식은 변환에 의해 면적이 얼마나 변하는지 알려준다. 즉 1의 기저벡터로 이루어진 영역이 변환되어서 나온 면적의 영역을 구하는 것이다. 만약 과정에서 v가 w의 왼쪽에 위치하면 방향이 변환에 의해서 뒤집힌 것이므로 영역의 넓이가 음수가 된다.



Cross Product in 3D

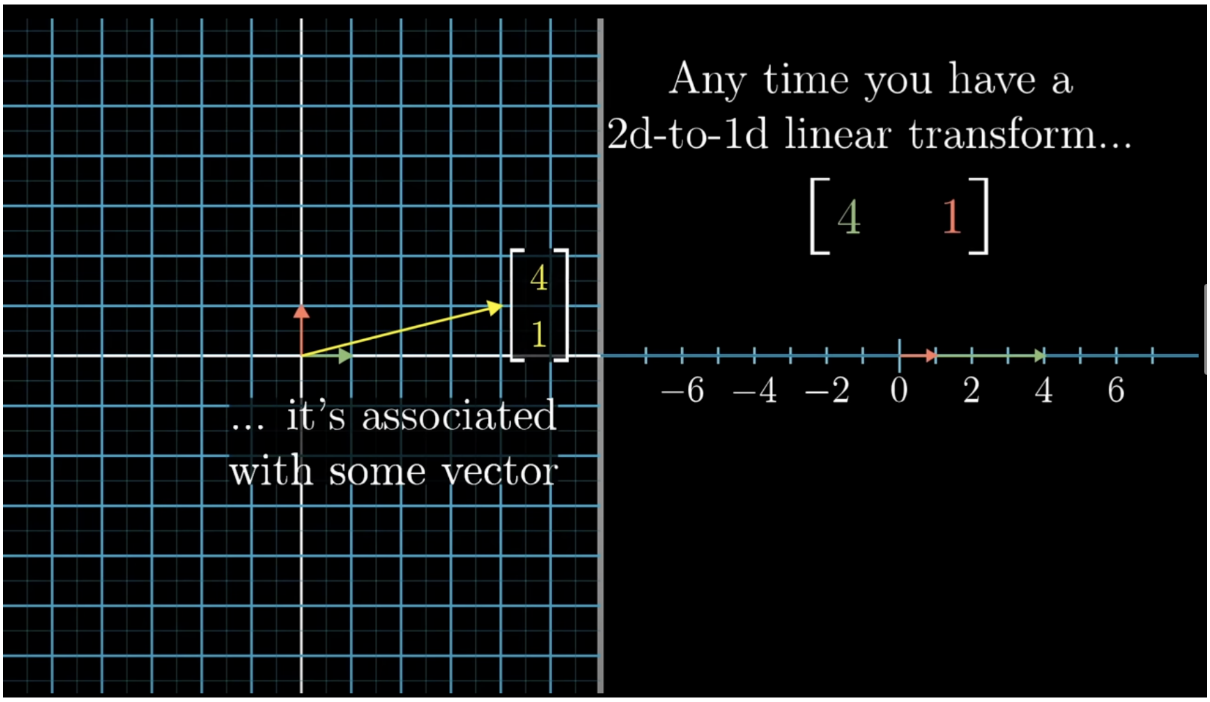


원론적으로 외적은 3차원의 두 벡터를 이용해서 새로운 3차원 벡터를 만들어 내는 것이다. 그리고 두 벡터의 행렬식으로 나온 값(면적)은 벡터의 길이가 된다. 그리고 벡터의 방향은 두 벡터가 만든 평행사변형의 수직한 방향이다.

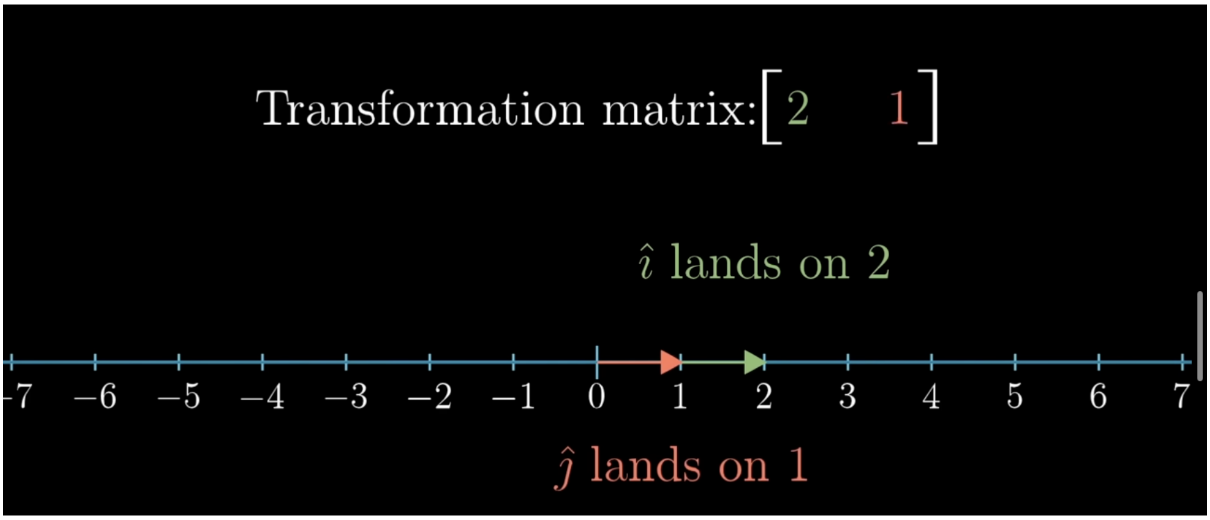


두 가지 수직의 방향이 있는데 오른쪽 법칙을 이용해서 외적의 방향을 결정한다.

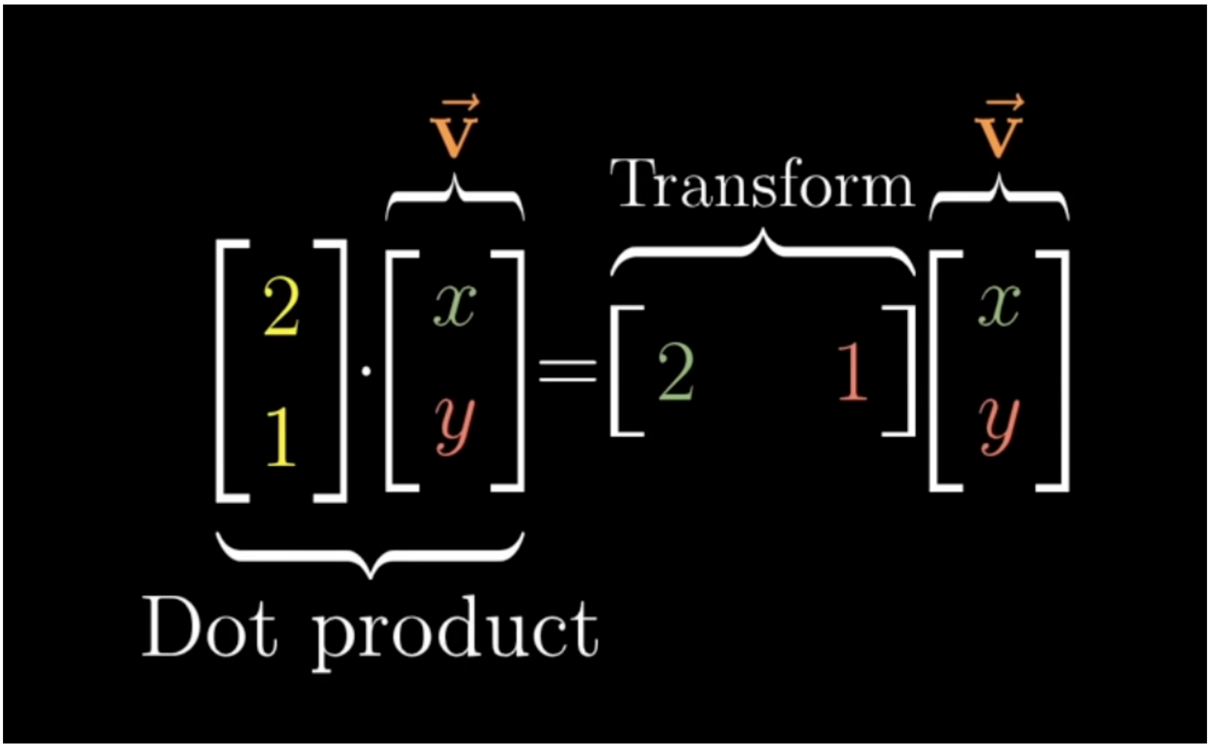
Duality(이중성)



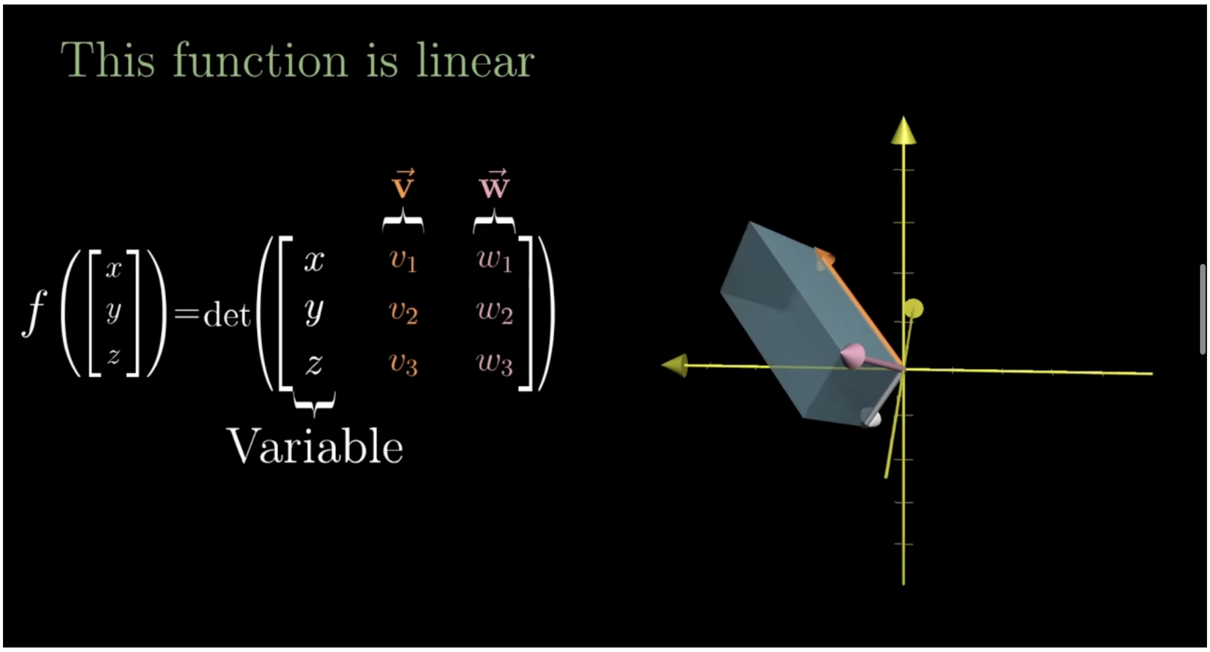
이중성은 어떤 차원을 1차원 수선으로 선형변환 할 때 벡터와 연관을 가지고 있다.



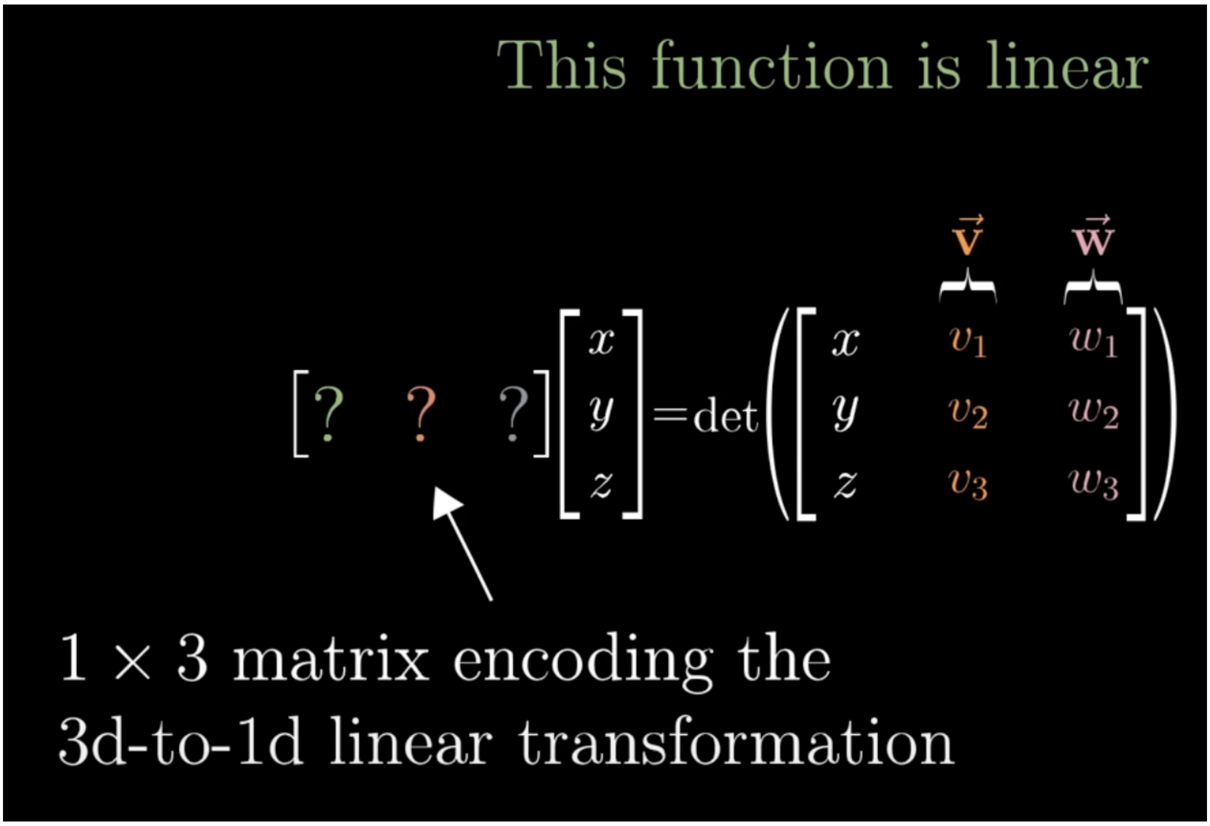
선형 변환이 하나의 행과 기저벡터가 변환된 숫자로 열이 된 행렬로 표현될 수 있다.



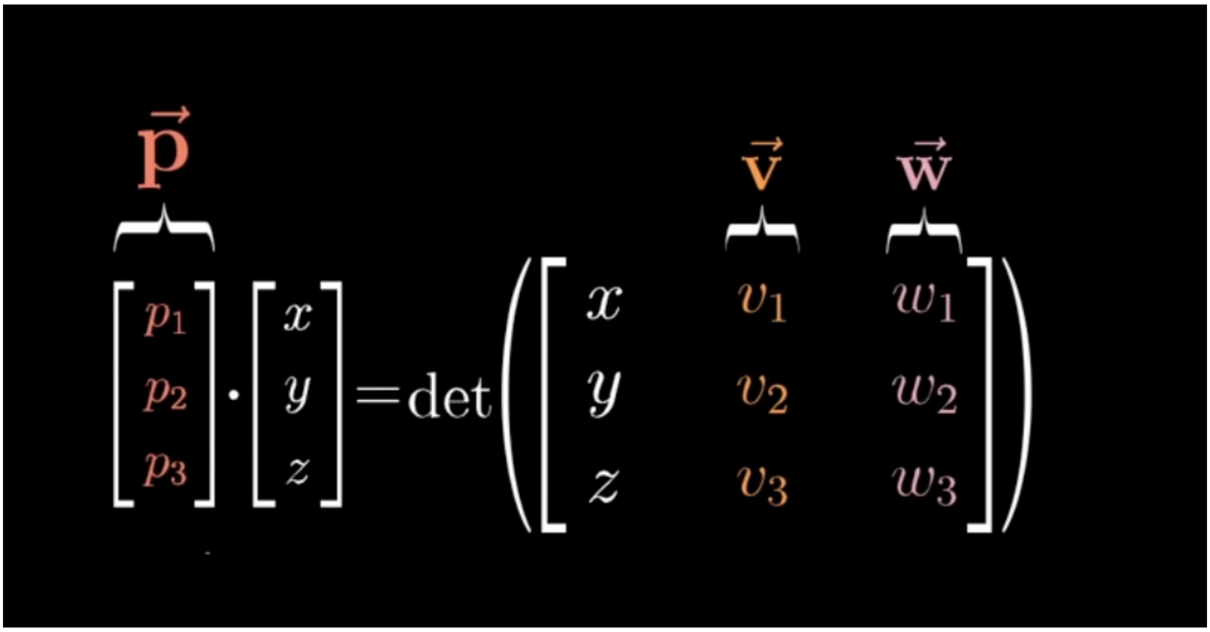
계산적으로 어떤 벡터에 이 선형변환을 적용하는 것은 이 행렬을 벡터로 바꾼다음 내적을 구하는 것과 동일하다. 이 벡터는 이중 벡터(Dual Vector)라고 한다.



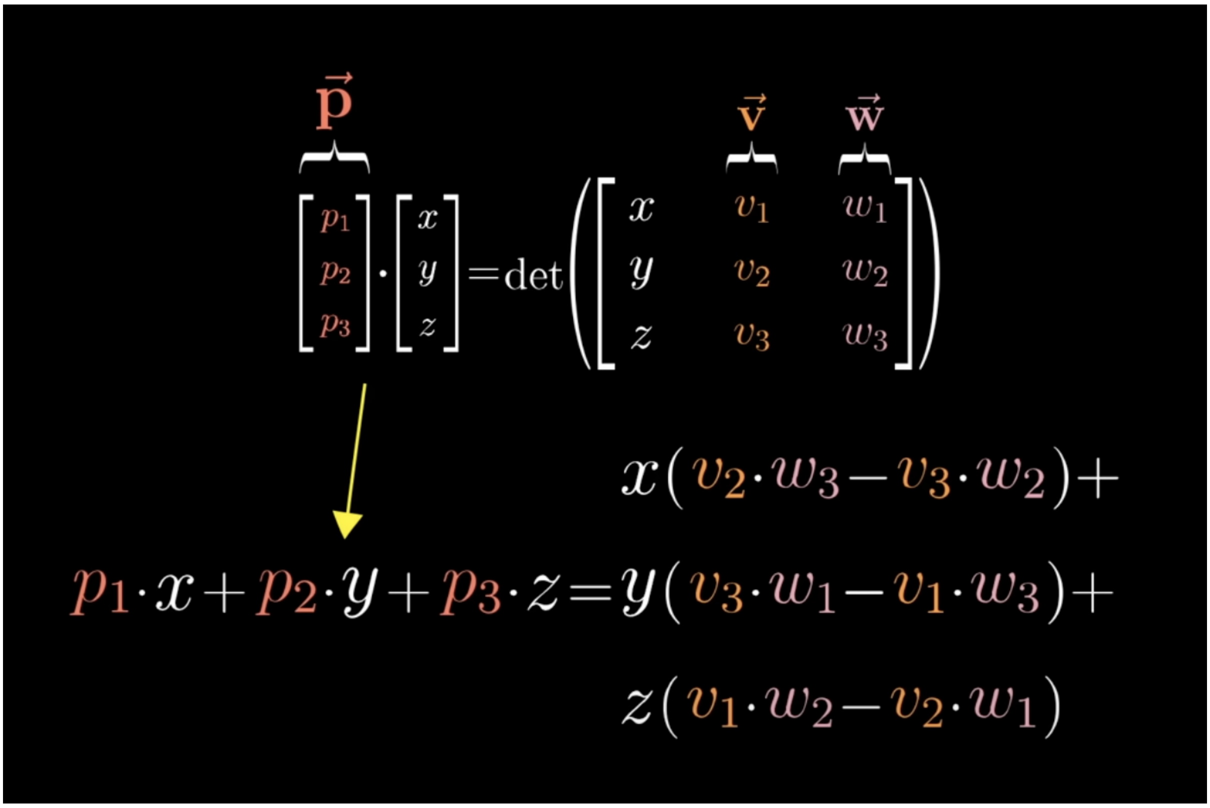
3차원 행렬에서 두 벡터 값(열)은 정해져 있고 한 열 함수 값을 입력값으로 받은 후 완성된 3차원 행렬의 행렬식을 계산하는 함수를 생각해보자. 이 경우 행렬식의 결과 값은 3 벡터로 이루어진 평행 육면체의 부피가 될 것이다.

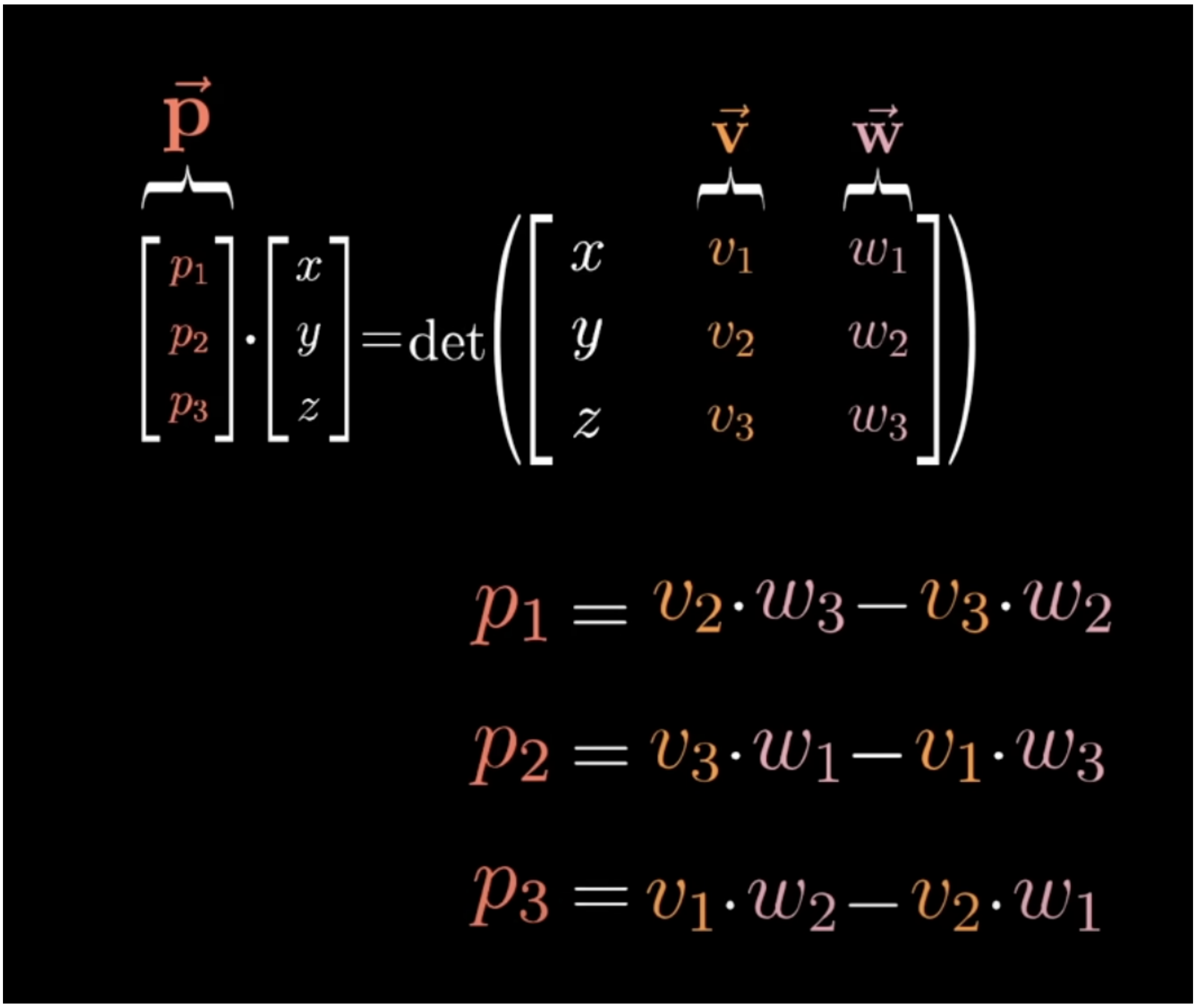


위에서 정의한 함수가 선형이기 때문에 이중성을 생각 할 수 있다. 즉 이 선형 함수를 행렬의 곱으로 나타낼 수 있다. (3차원 → 1차원)

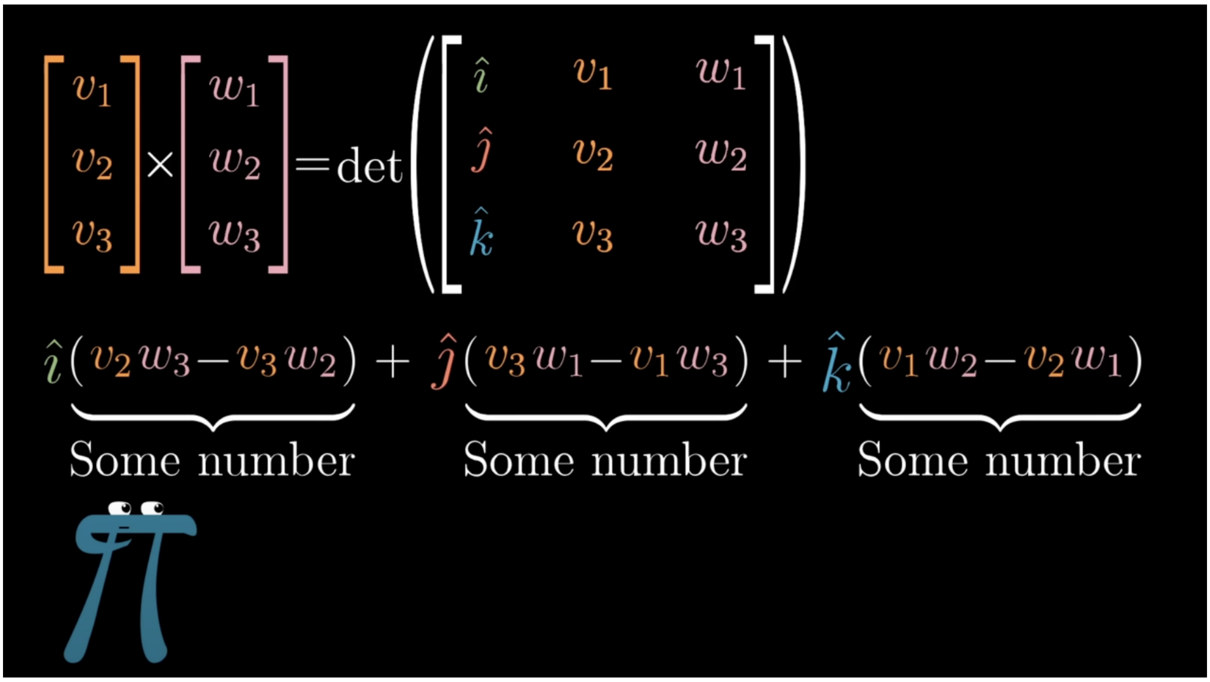


그리고 다차원에서 1차원으로 변환이기 때문에 이 변환(행렬 곱)을 벡터의 내적으로도 해석 할 수 있다.

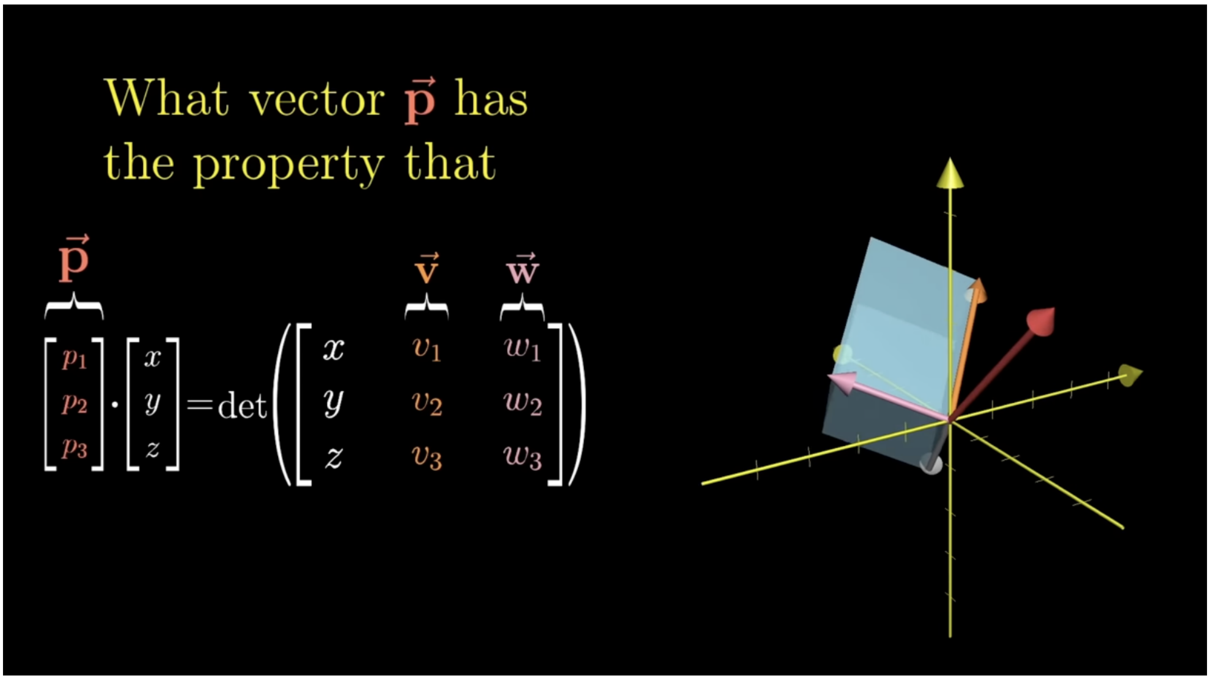

$\vec{\mathbf{p}}$ $\vec{\mathbf{v}}$ $\vec{\mathbf{w}}$
$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix}\right)$
$x(v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2) +$
$p_1 \cdot x + p_2 \cdot y + p_3 \cdot z = y(v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3) +$
$z(v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1)$


$\vec{\mathbf{p}}$ $\vec{\mathbf{v}}$ $\vec{\mathbf{w}}$
$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix}\right)$
$p_1 = v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2$
$p_2 = v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3$
$p_3 = v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1$

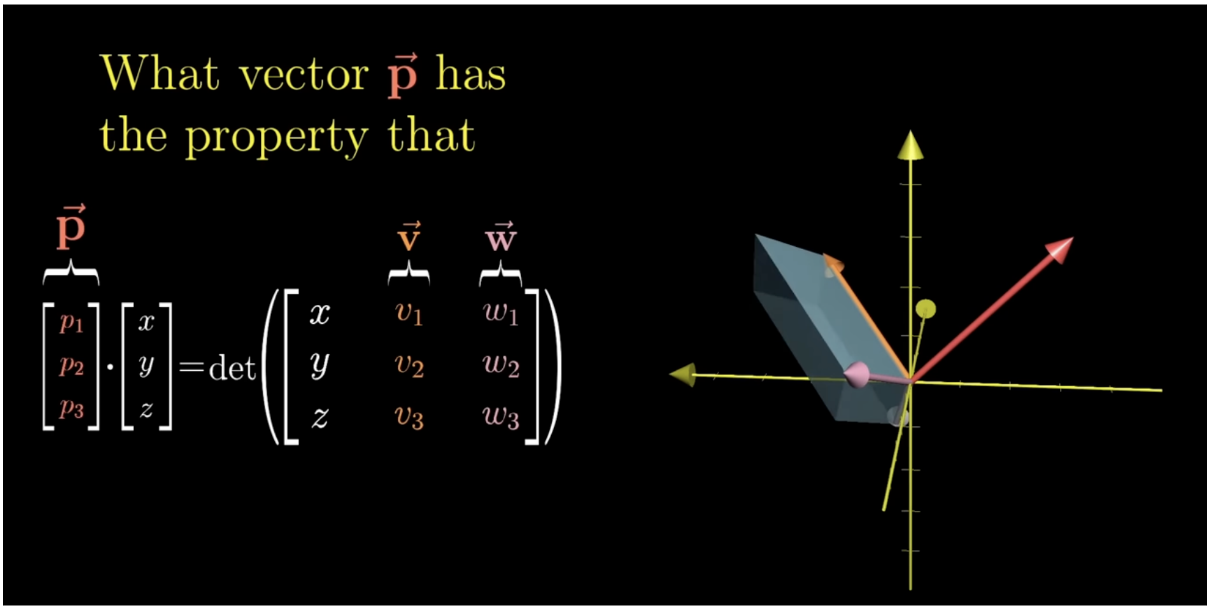
좌항의 내적 계산의 구성을 우항의 행렬식의 계산의 구성에 매칭시켜서 생각해볼 수 있다.



그러면 3차원 내적의 계산 식과 같은 걸 알 수 있다.



그럼 계속 나온 이 벡터 p는 무엇을 의미하는가?



벡터 p와 어떤 벡터[x,y,z]의 내적을 구하는 것은 벡터 [x,y,z], v, w를 이용해서 3*3 행렬식(부피)을 구하는 것과 같다. 만약 벡터 [x,y,z]가 z축(v,w에 수직하는)이라고 생각하면 부피가 될 것이기 때문이다.