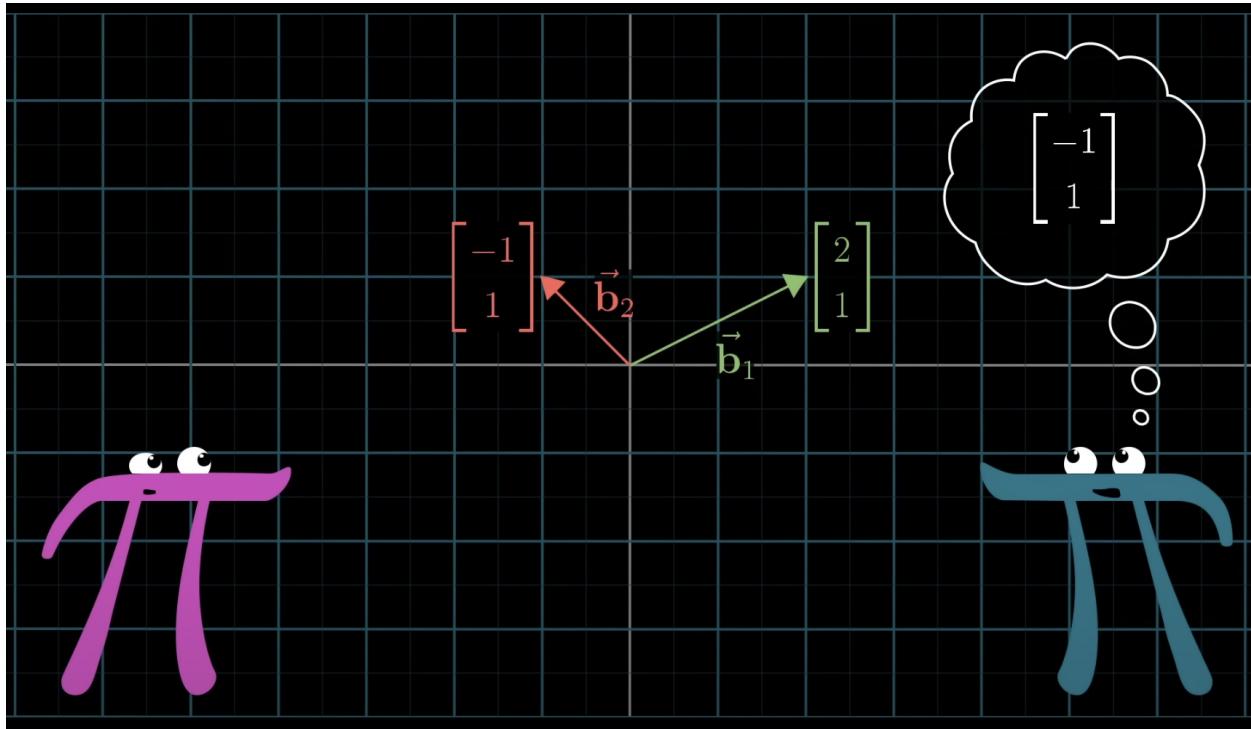
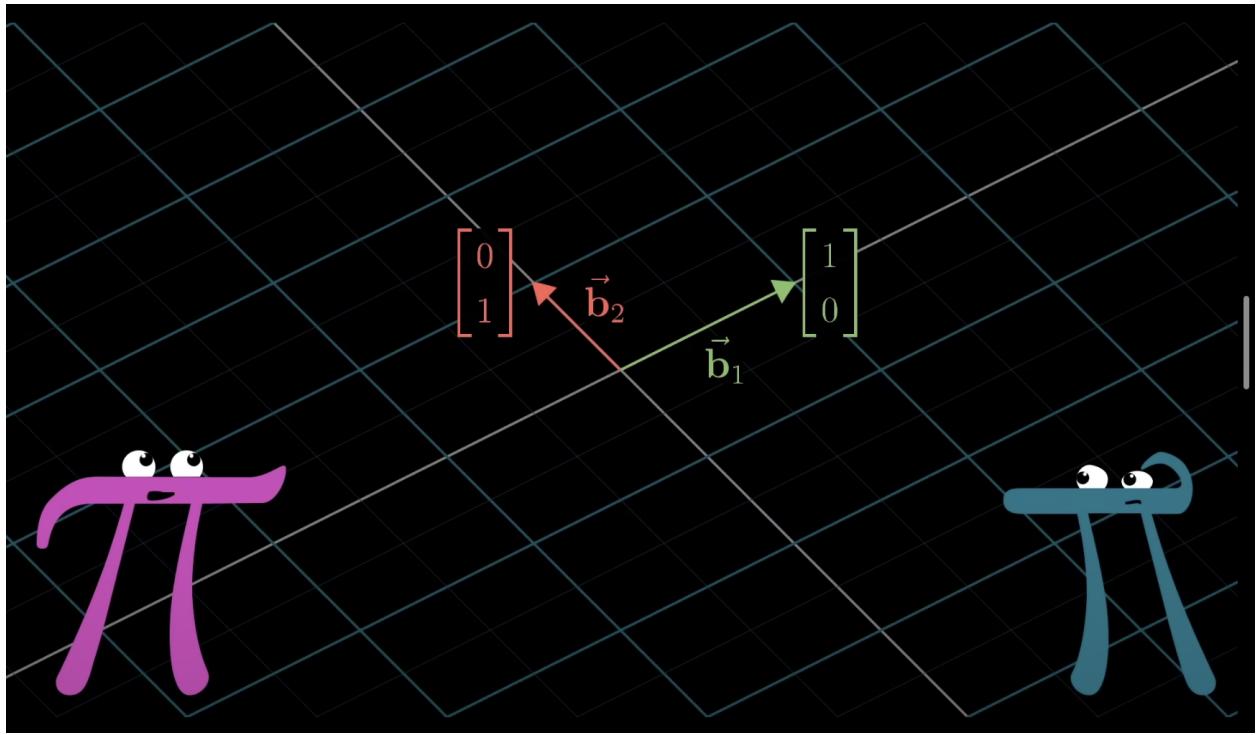


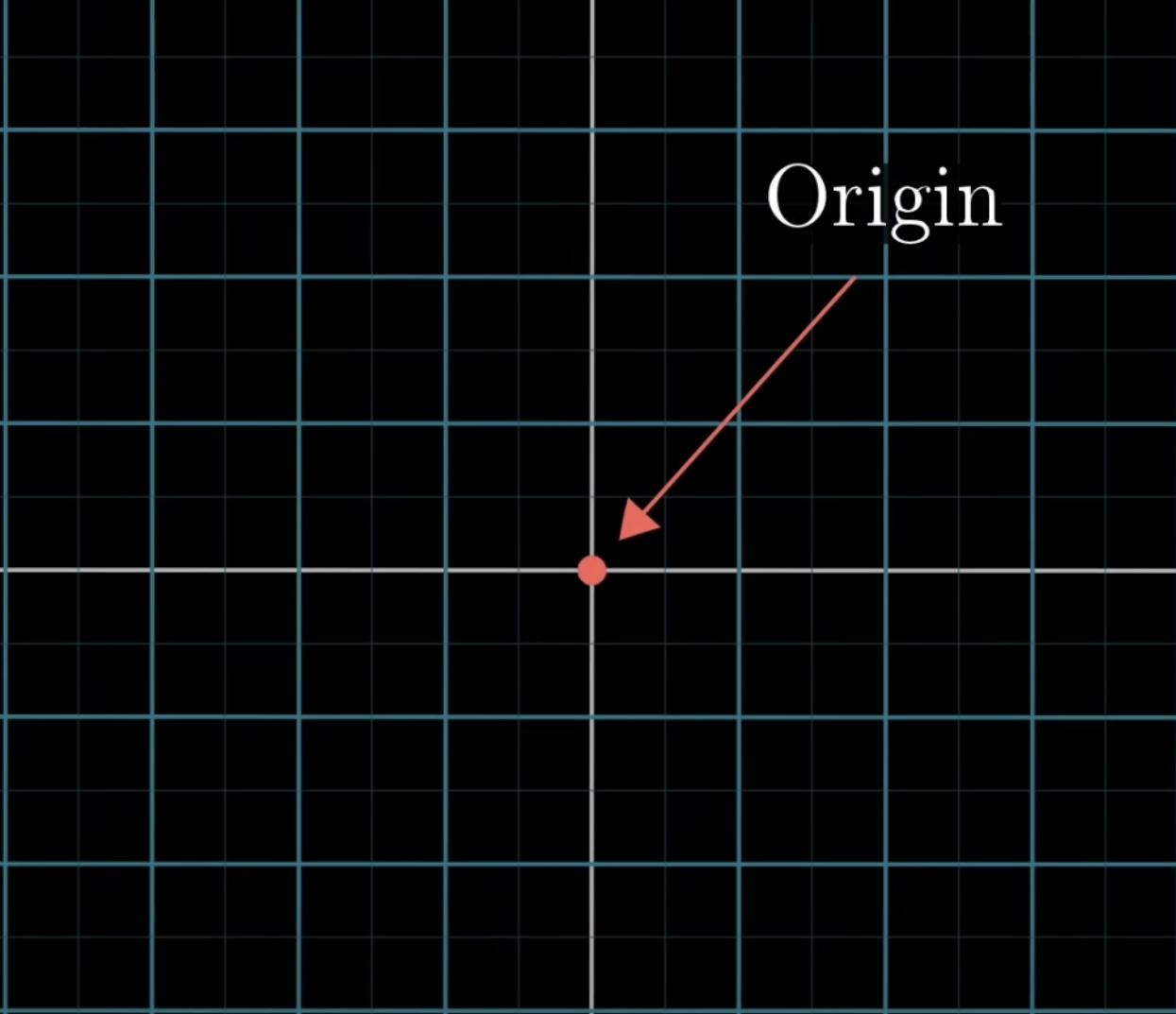
# Change Of Basis

## Basic Concept

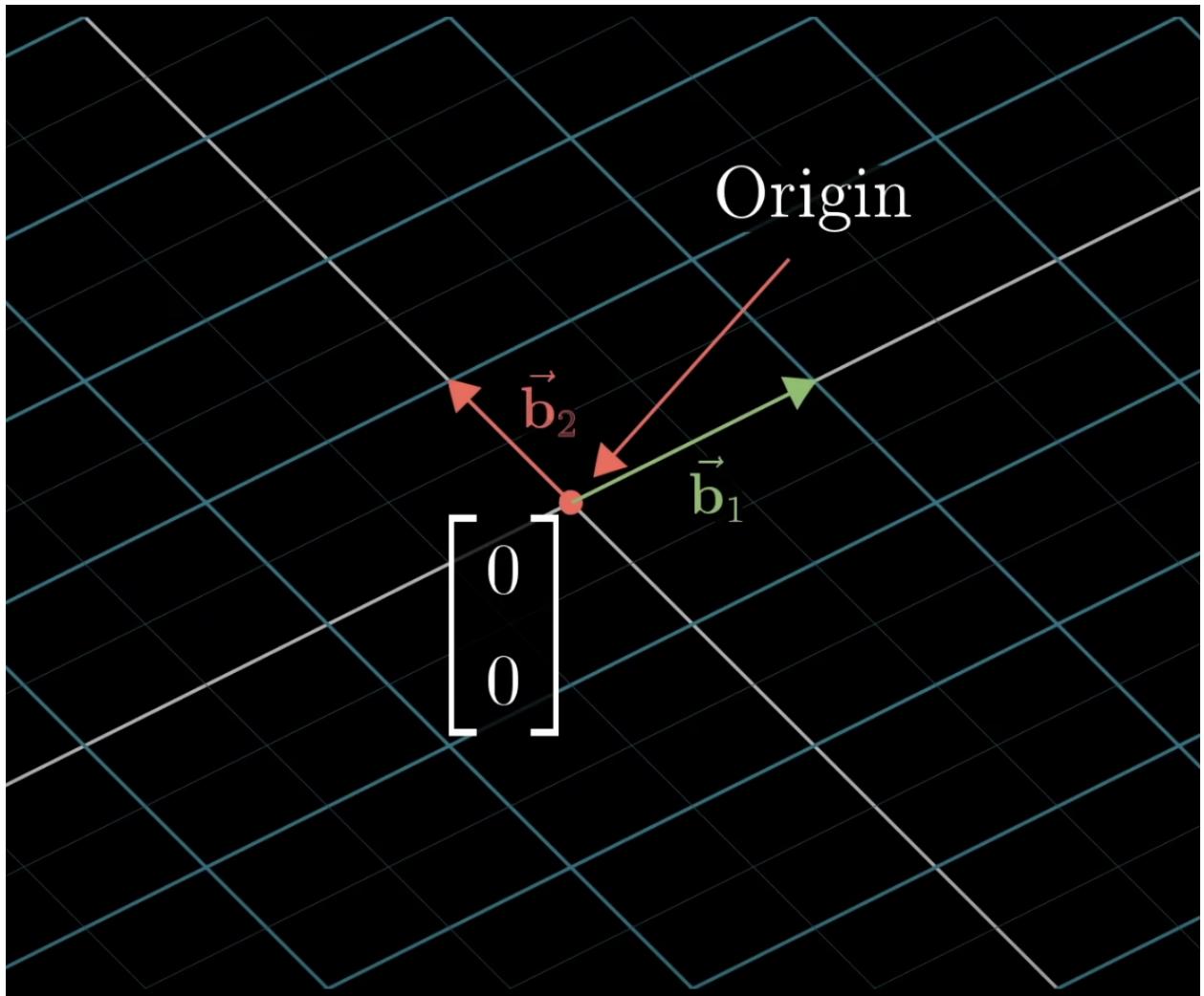




두 좌표계가 다르면 기저 벡터(basis)도 달라진다. 즉 아래 사진처럼 A가 정의한  $[1,0]$   $[0,1]$  i-hat, j-hat 기저 벡터 두개가 위 사진 처럼 B의 좌표계에서는  $[2,1]$   $[-1,1]$ 이라고 생각 할 수 있는 것이다.

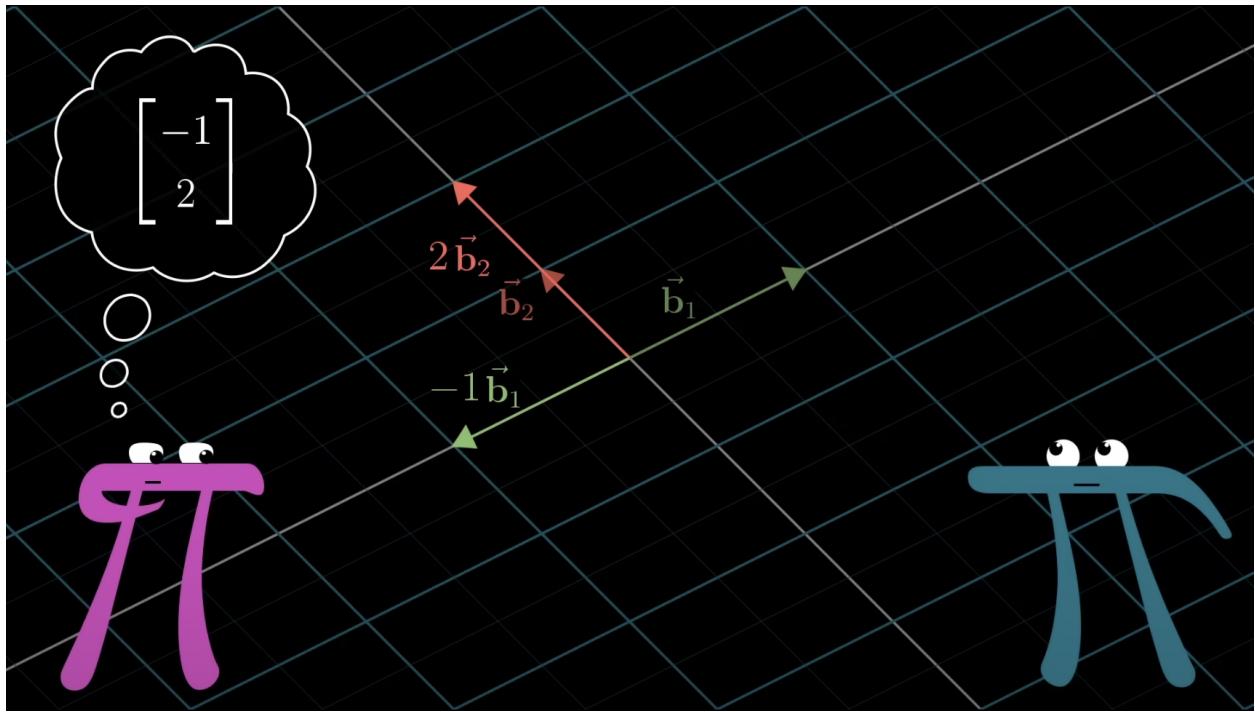


Origin

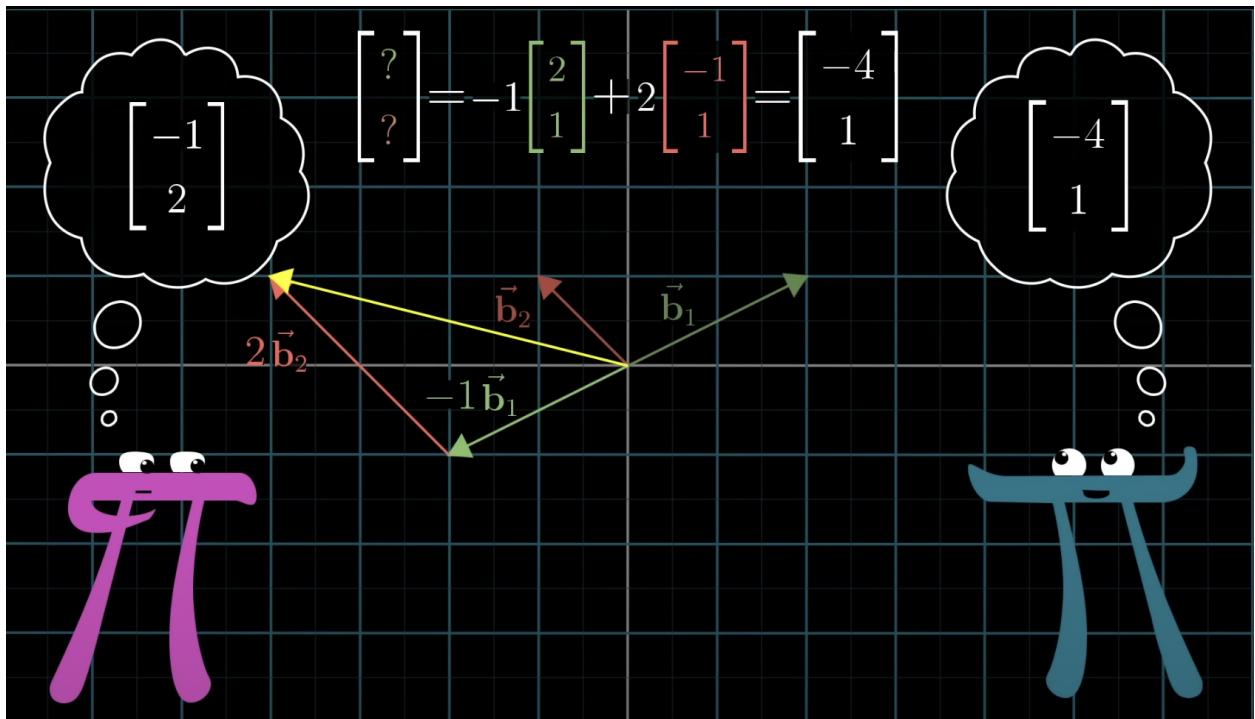


원점은 모두에게 같지만, 축의 방향이나 격자의 간격은 개인이 선택하는 기저 벡터에 따라서 달라진다.

그러면 서로 다른 좌표계 사이를 어떻게 해석해야 하는걸까?

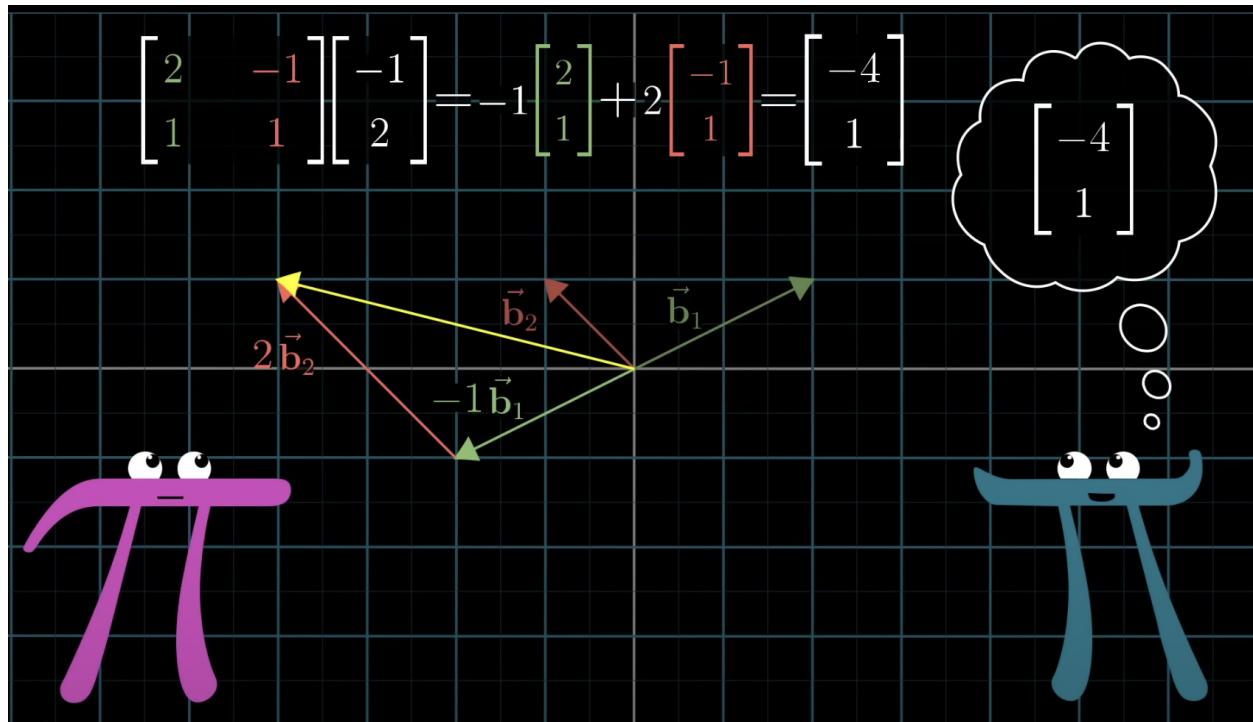


가령 좌표계 A에서  $[-1, 2]$ 는  $i\text{-hat}$ 을  $-1$ 로  $j\text{-hat}$ 을  $2$ 로 스케일링 하는 것이다.



이걸 좌표계 B에서 보면, A 좌표계의 기저 벡터  $i\text{-hat}$ ,  $j\text{-hat}$ 은 각각  $[2, 1]$   $[-1, 1]$ 에 위치한 것으로 해석된다. 따라서  $[-1, 2]$ 와  $[2, 1]$ ,  $[-1, 1]$ 을 각각 기저 벡터별로 곱해서 나온  $[-4, 1]$ 을 A 좌표계의

$[-1, 2]$ 를 B 좌표계에서 해석한 값으로 이해할 수 있다.



이는 A 좌표계의 기저 벡터를 열로 가지고 있는 행렬을 벡터  $[-1, 2]$ 와 곱한 것으로 이해할 수 있다! 생각해보면 행렬은 곧 선형변환을 뜻하므로 이에 대한 직관을 가질 수 있을 것이다. 즉 A 좌표계의 기저 벡터를 열로 가지는 행렬을 B 좌표계의 기저 벡터를 선형 변환 해서 A 좌표계의 기저 벡터로 변환하는 선형 변환을 표현한 것으로 생각 할 수 있는 것이다.

Our grid → Jennifer's grid

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Our language ← Jennifer's language

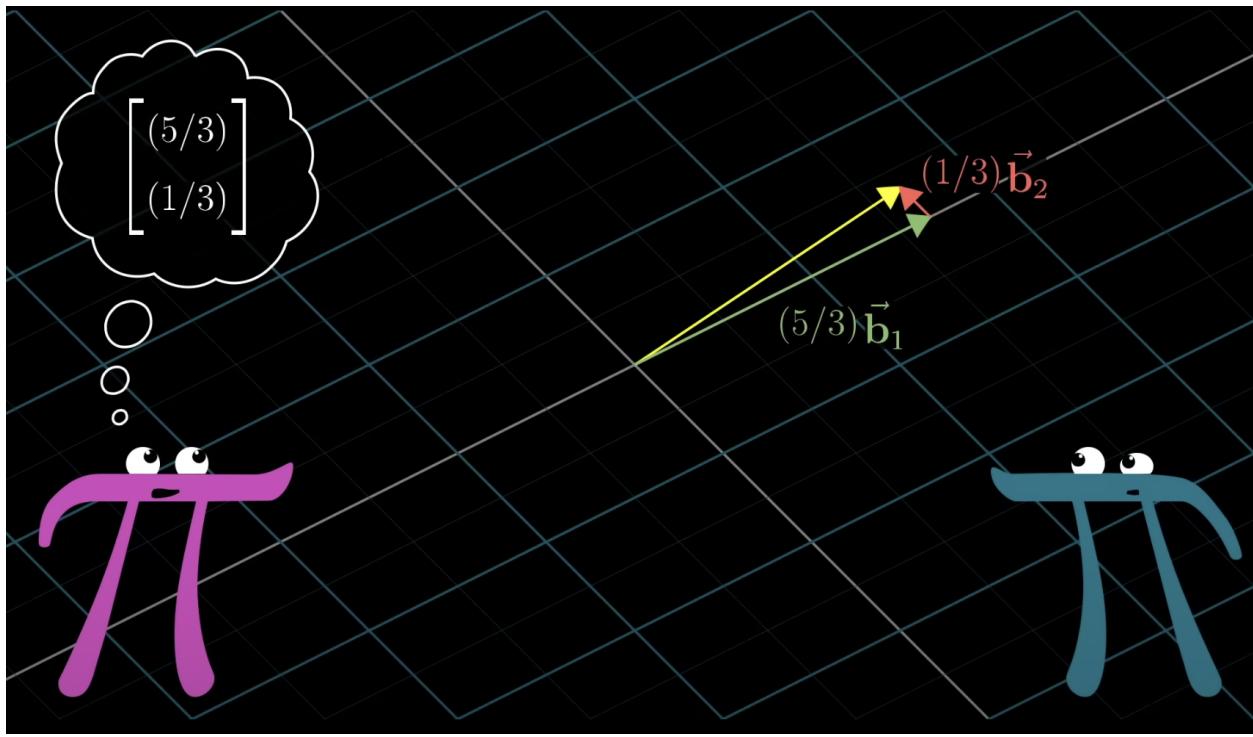
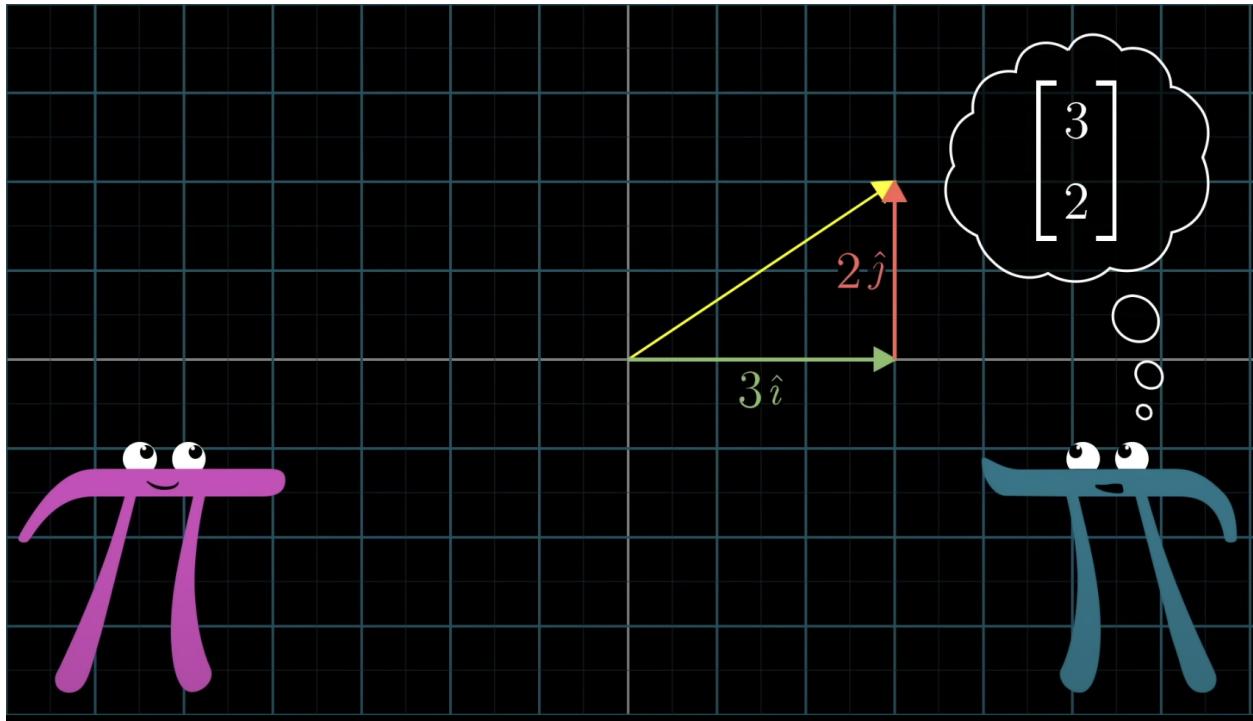
재밌는 것은 기하학적으로 이 행렬은  $B \rightarrow A$  좌표계로 변환하는 것이지만 수치적으로는  $A \rightarrow B$  좌표계가 변환하는 것이다.

Jennifer's grid → Our grid

Inverse  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

Jennifer's language ← Our language

반대의 경우( $B \rightarrow A$ )에는 역 행렬을 이용한다. 역 행렬은 행렬의 선형 변환을 원래대로 되돌리는 새로운 변환이다.



위와 같이 B에서의  $[3, 2]$  벡터가 A 좌표계에서는  $[5/3, 1/3]$ 로 표현된다고 하자.

Inverse  
change of basis  
matrix

Same vector  
in her language

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}}_{\text{Written in our language}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}}_{\text{Same vector in her language}}$$

Written in  
our language

역행렬을 이용해서 구할 수 있다.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jennifer's basis vectors,  
written in our coordinates

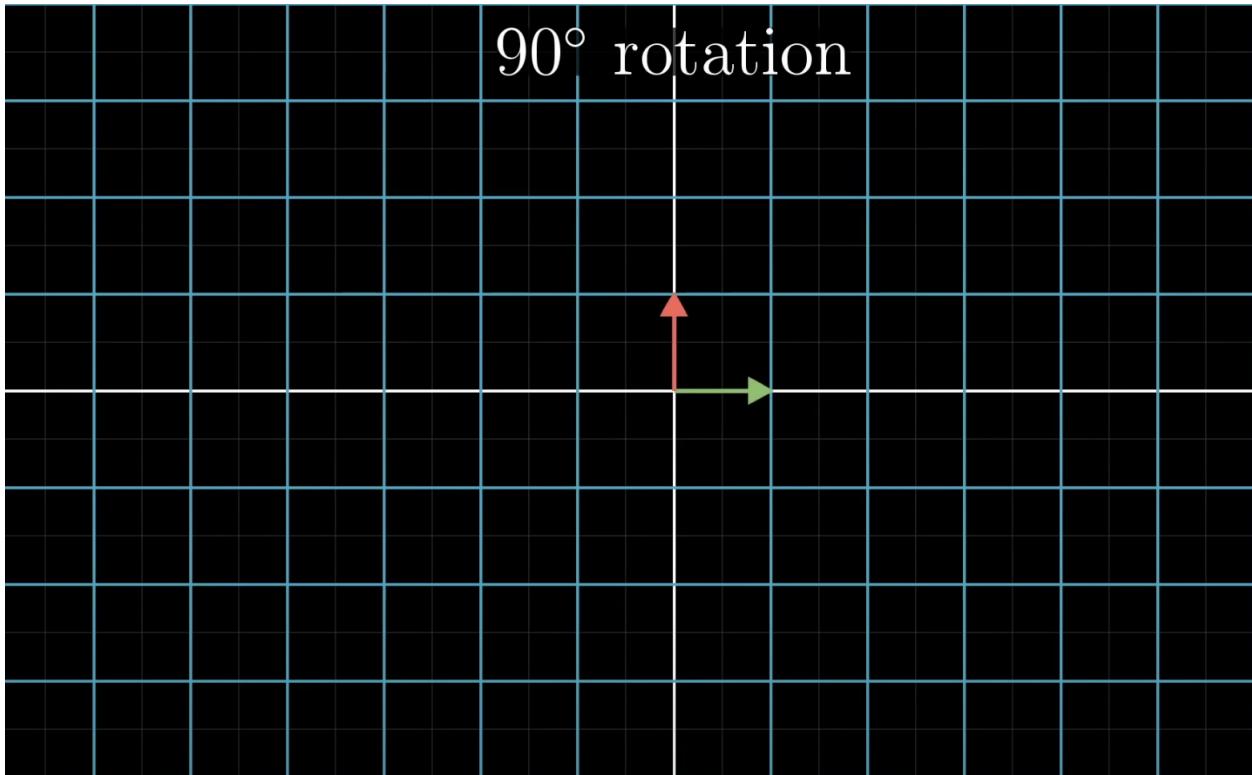
Vector in her coordinates

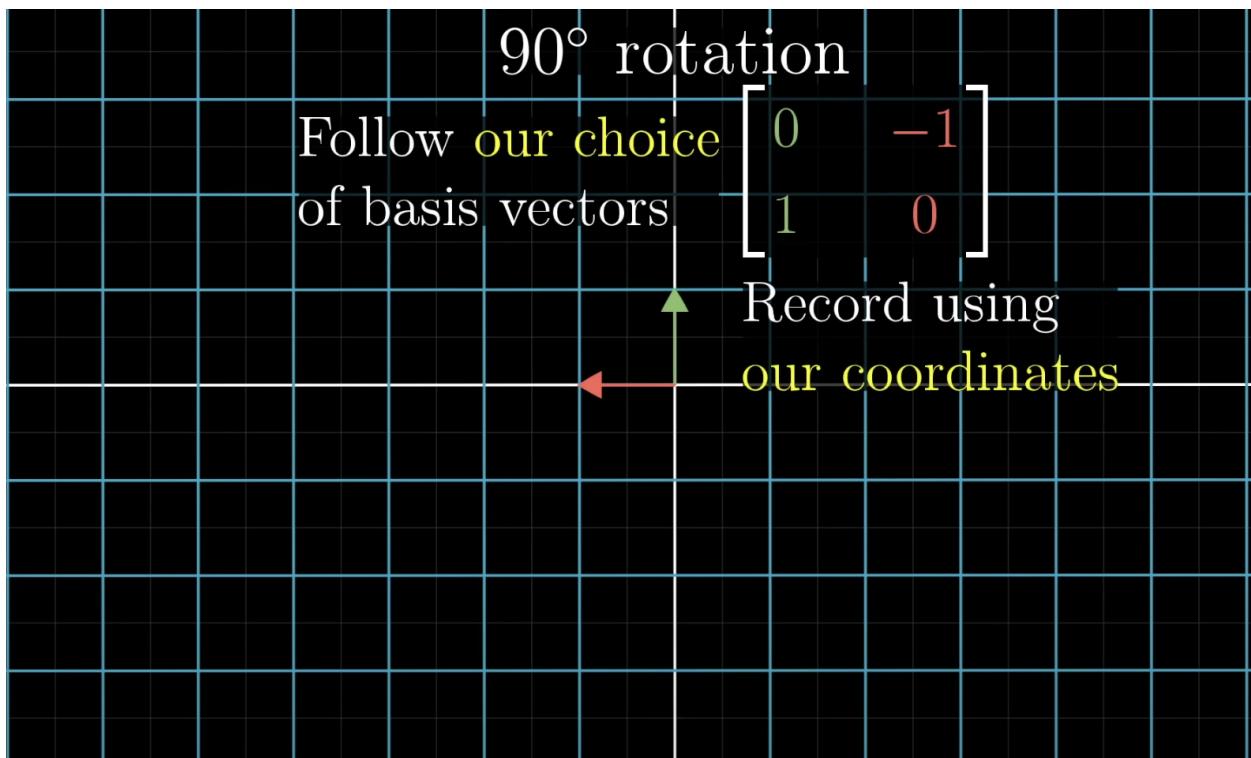
$$A \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix}$$

Same vector in  
our coordinates

정리하면 위와 같다. 기하학적으로는  $B \rightarrow A$  이지만 수치적으로는  $A \rightarrow B$  라는 말의 이해에 도움이 될 것이다.

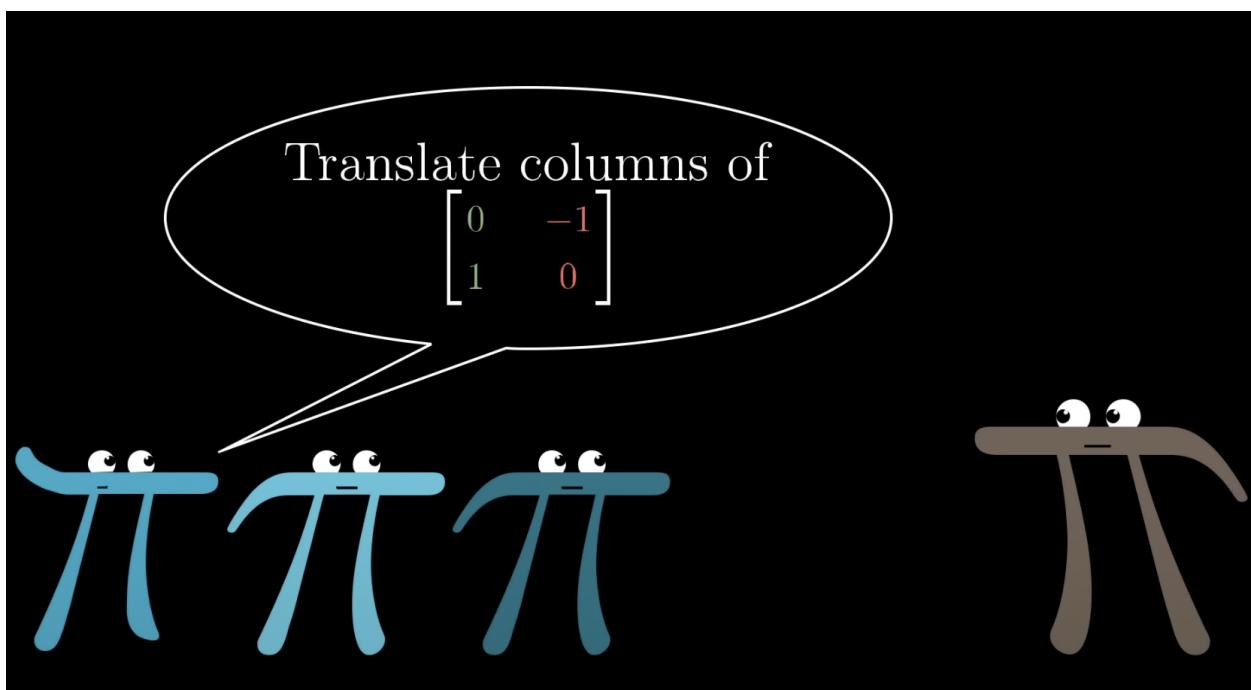
## Apply To Matrix





90도 회전 하는 선형 변환을 생각해보자.  $[1,0]$  i-hat은  $[0,1]$ 로,  $[0,1]$  j-hat은  $[-1,0]$ 으로 옮겨지게 되고 옮겨진 후의 좌표를 행렬의 열로 표현해서 90도 선형변환을 행렬로 나타낼 수 있다.

그럼 A 좌표계에서는 어떻게 이 90도 변환을 표현할 수 있을까?



선형 변환 행렬을 변환하는 건 틀렸다. 왜냐하면 이 행렬의 컬럼의 좌표는 B좌표계에서 i-hat, j-hat이 어디에 위치할지를 나타낸 것이지 A 좌표계의 기저 벡터를 나타내는 것이 아니기 때문이다. 즉 도착 지점을 A 좌표의 기저 벡터로 나타내야 하는 것이다.

## How to translate a matrix

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{Vector in Jennifer's language}}$$

먼저 A 좌표계의 임의의 벡터를 준비한다.

## How to translate a matrix

Same vector  
in our language

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{Change of basis matrix}} \overbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}^{\text{Same vector}}$$

이 벡터에 기저 벡터를 변환하는 선형변환을 해서 A 좌표계의 임의의 벡터를 B 좌표계에서 나타내는 벡터로 변환한다.

## How to translate a matrix

Transformed vector

in our language

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{\text{Transformation matrix in our language}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Transformation matrix

in our language

그리고 B 좌표계에서 표시되는 A 좌표계의 임의의 벡터를 의도한 선형변환 시킨다.

## How to translate a matrix

Transformed vector  
in her language

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Inverse}}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

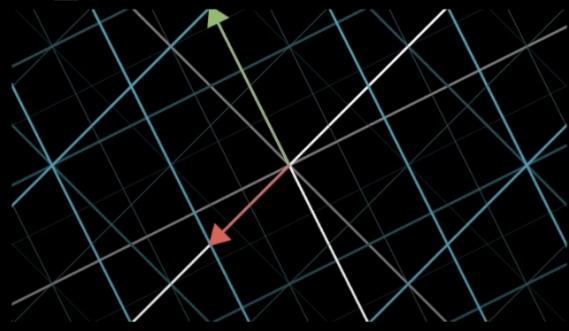
Inverse  
change of basis  
matrix

그리고 기저 벡터를 변환하는 선형변환의 역 변환을 해서 A 좌표계의 벡터로 변환시킨다.

## How to translate a matrix

Transformation matrix  
in her language

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{Transformation matrix}}^{-1} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{\text{Change of basis matrix}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}$$

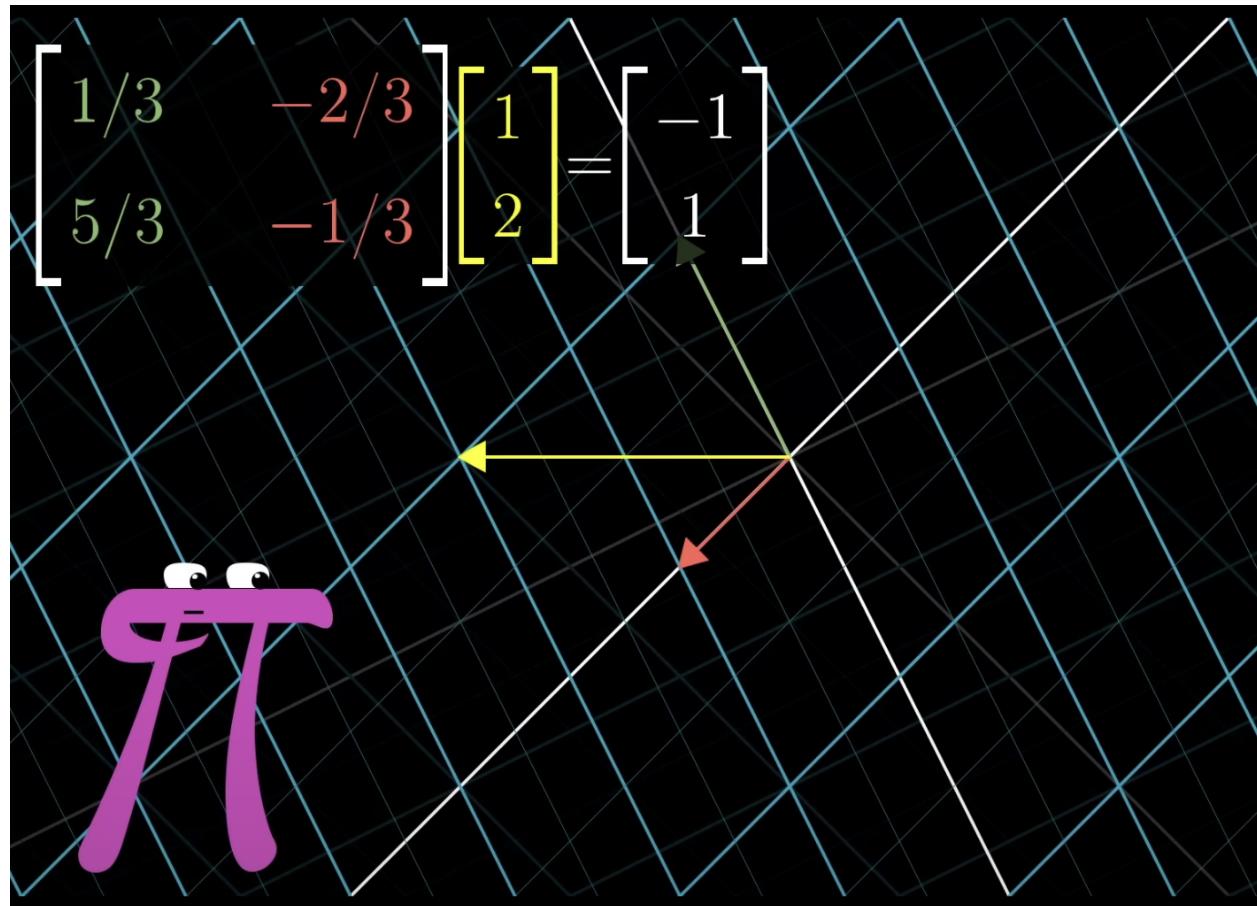


$[-1, 2]$ 를 임의의 벡터  $v\hat{}$ 으로 표현하면 일반화 시킬 수 있다.

## How to translate a matrix

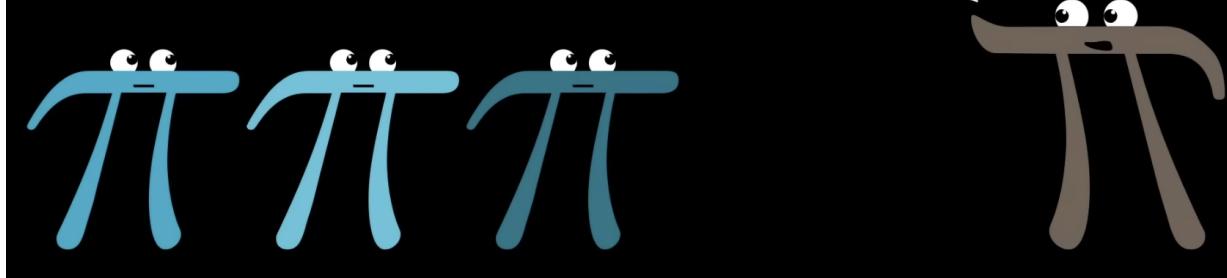
Transformation matrix  
in her language

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Transformation matrix in her language}} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 5/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$



즉 위의 결과 행렬을 A 좌표계에 적용하면 90도 회전하는 변환이 되는 것이다.

An expression like  $A^{-1}MA$   
suggests a mathematical  
sort of empathy



$A\text{-}MA$  수식을 볼때 위와 같은 과정을 떠올리길 바란다.  $M$ 은 선형 변환을,  $A\text{-}$ ,  $A$ 는 관점의 변환(기저벡터 변환)을 나타낸다.