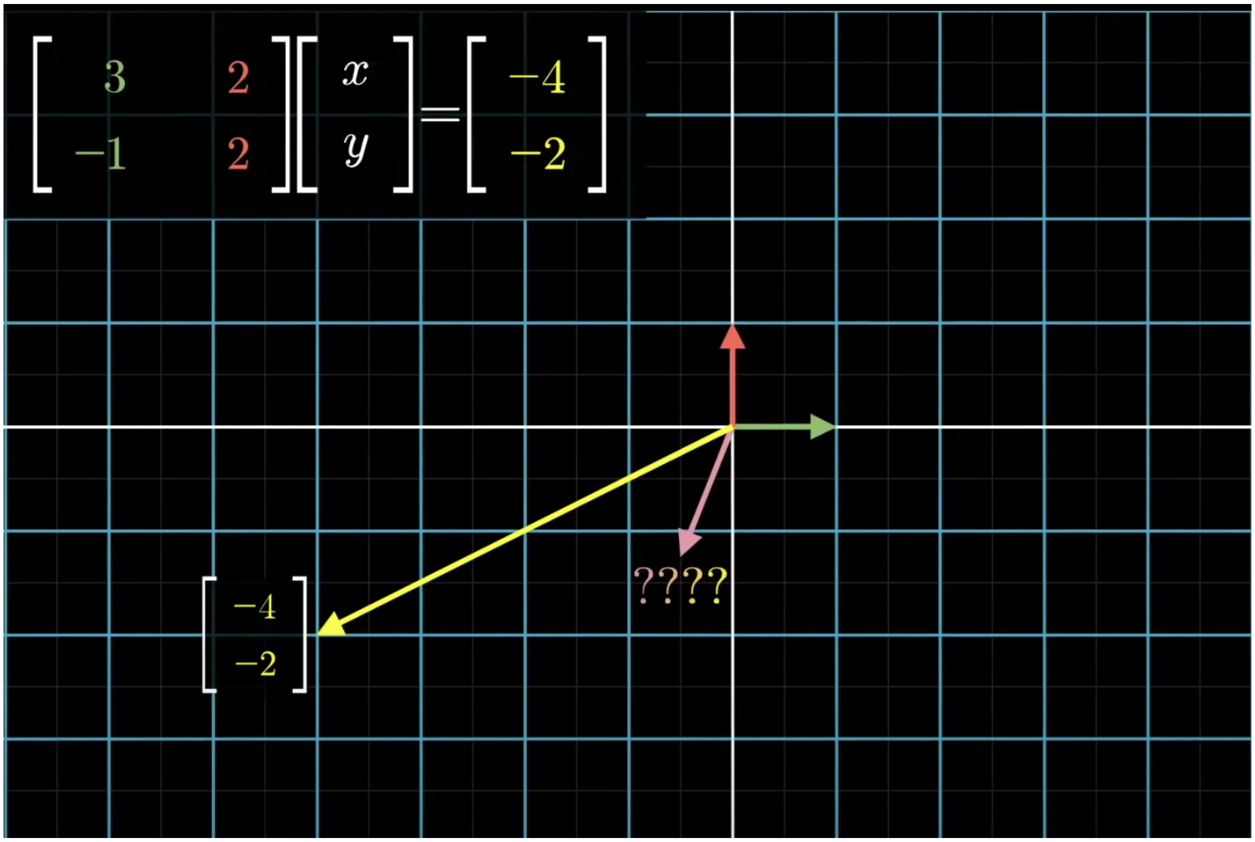
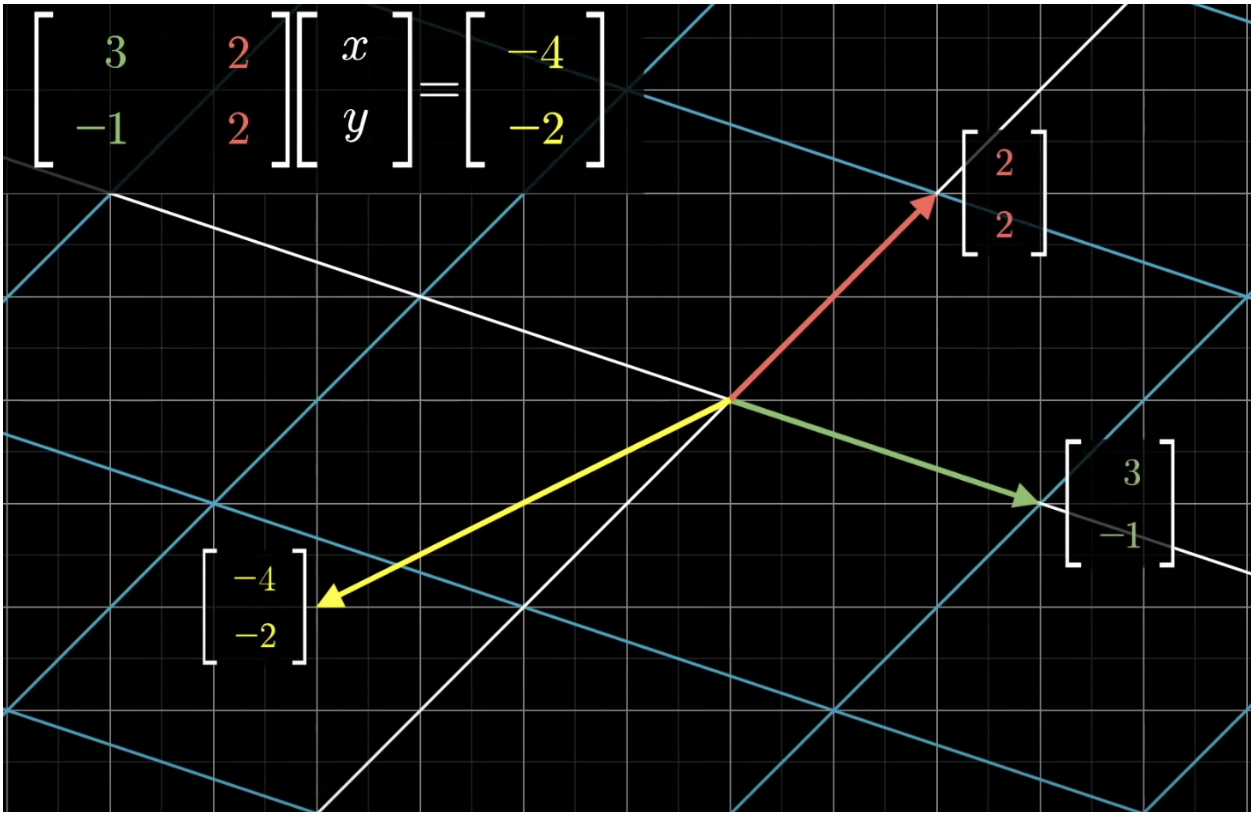
Cramer's rule

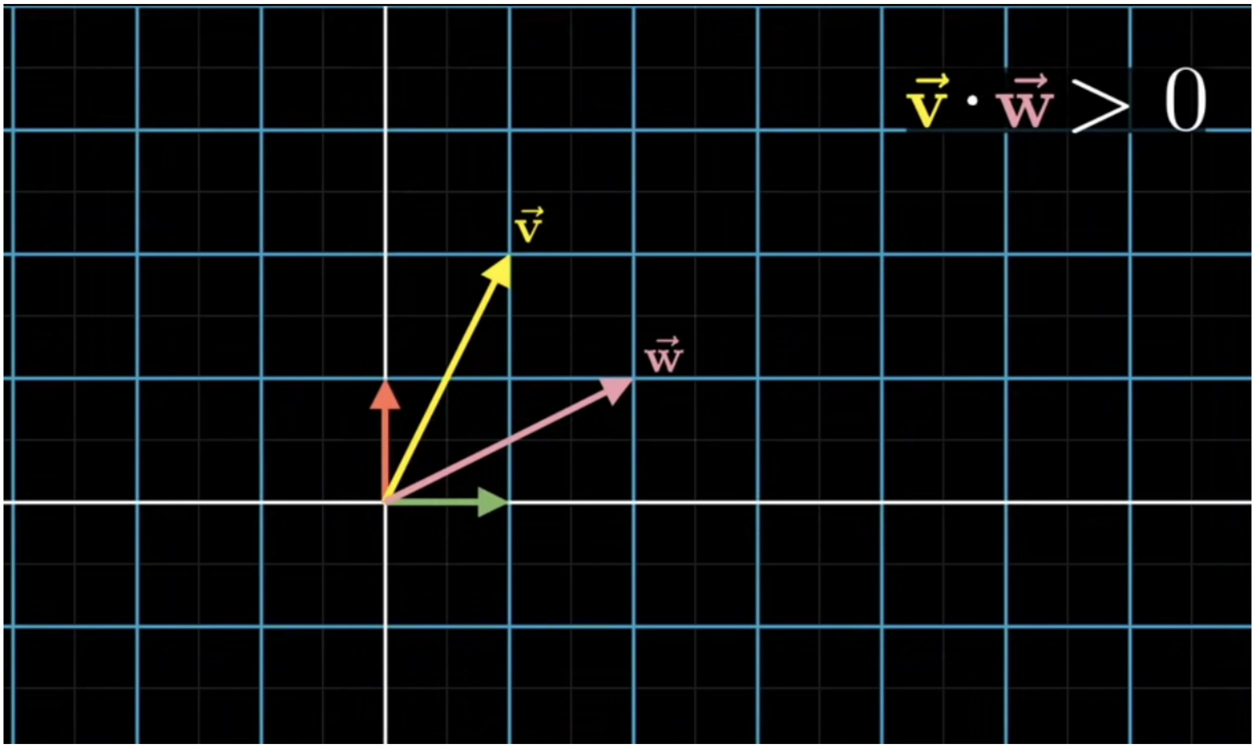
Recap

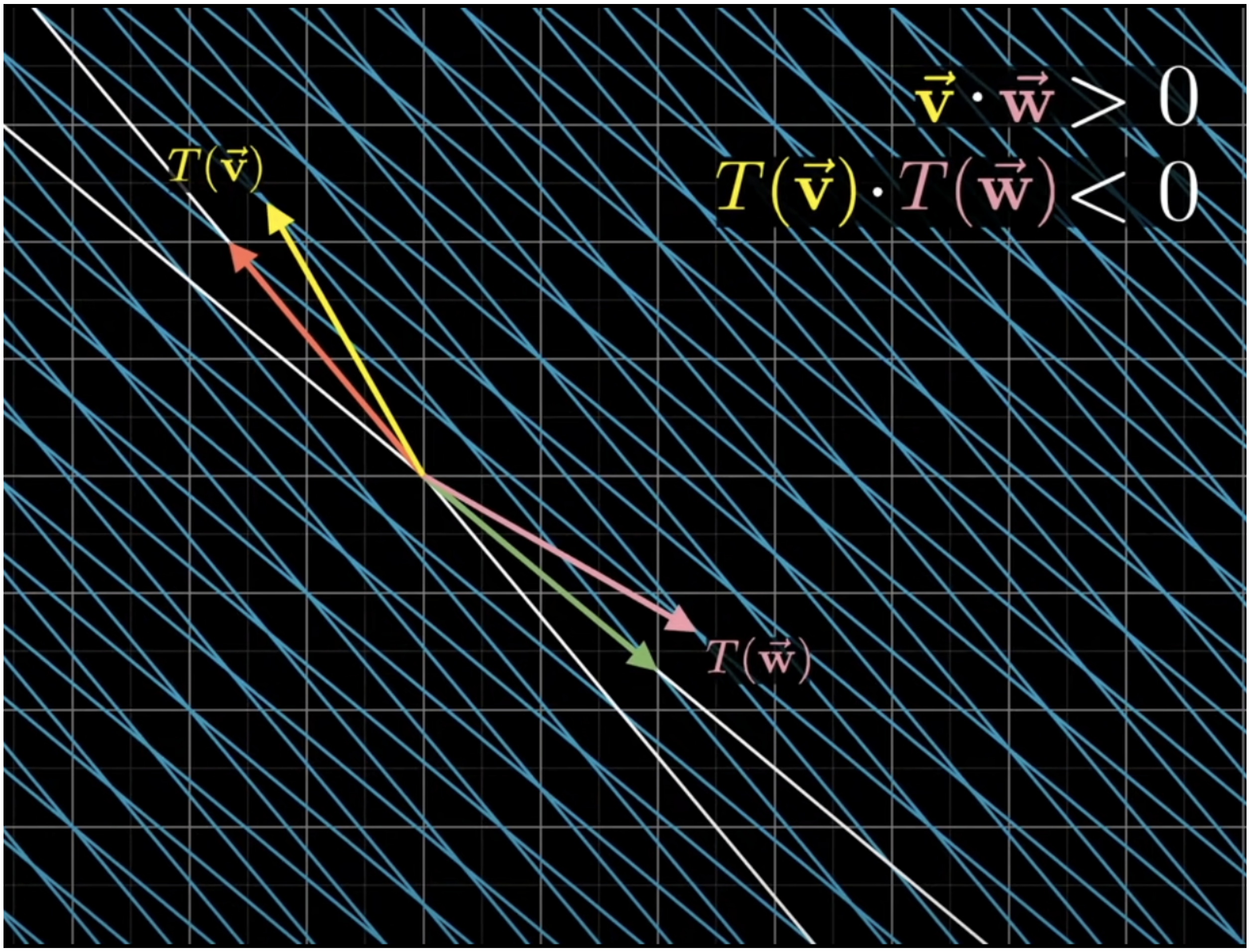




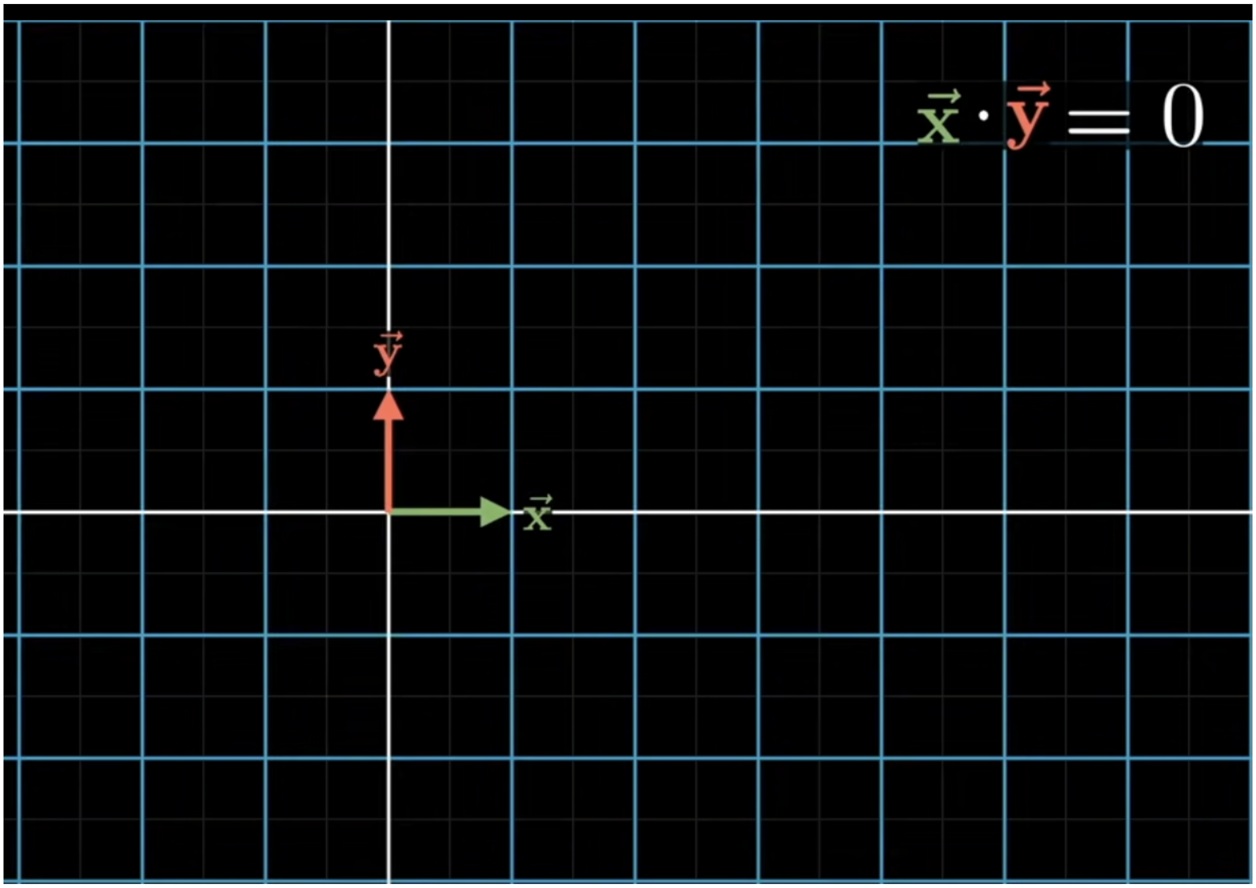
행렬의 열의 쌍은 기저백터 i-hat, j-hat이 변환후 놓이는 좌표를 의미한다. 즉 i-hat(녹색)은 변환 이후 [3,-1], j-hat(적색)은 변환 이후 [2,2]에 위치하는 것이다. 이때 행렬의 선형 변환을 거치면 [-4,-2]에 위치하는 [x,y]좌표는 어떻게 구하는가? (단 행렬식은 0이 아니다 = 즉 차원이 줄어들지 않는다)

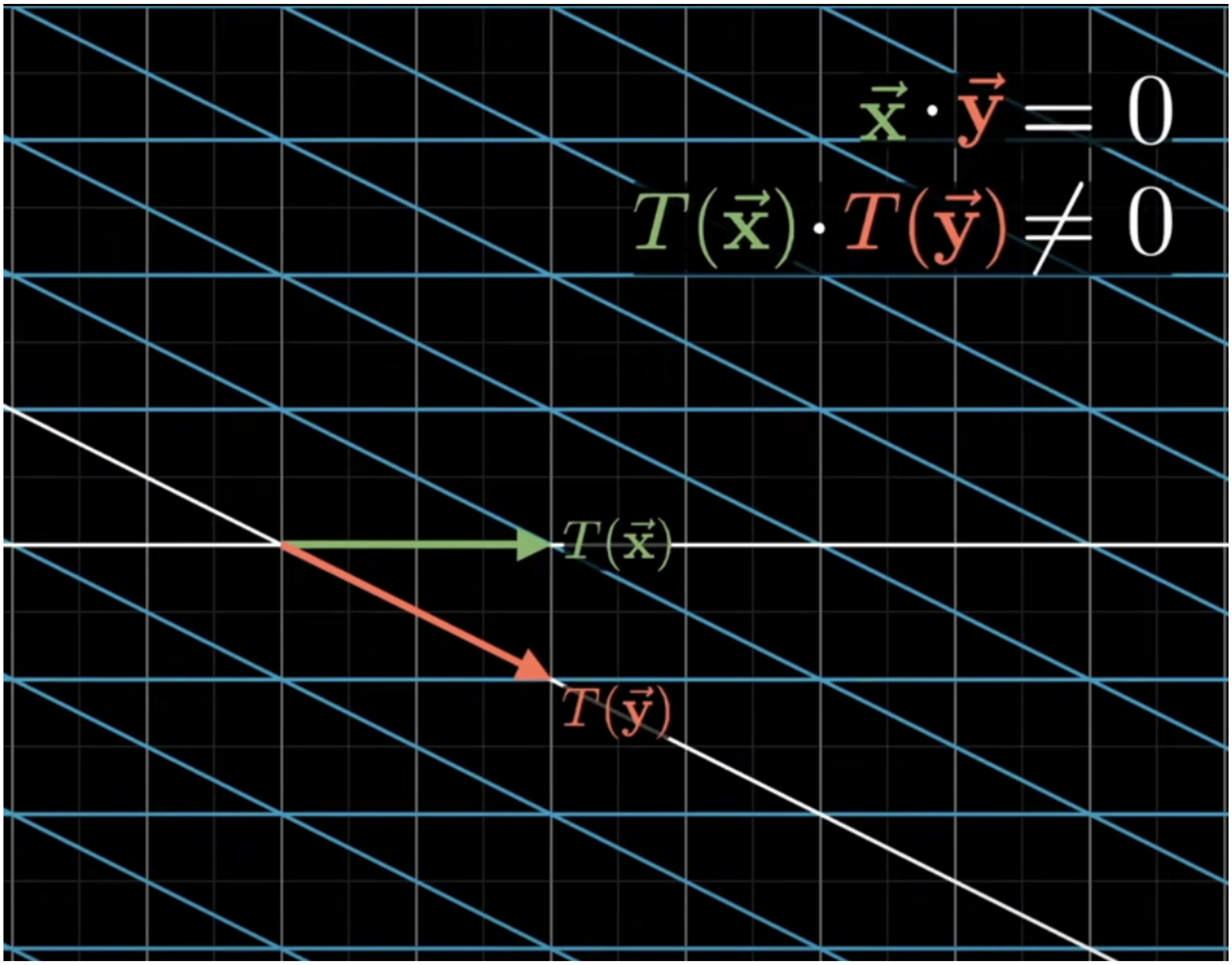
Cramer’s Rule


$\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$
$\vec{v}$
$\vec{w}$

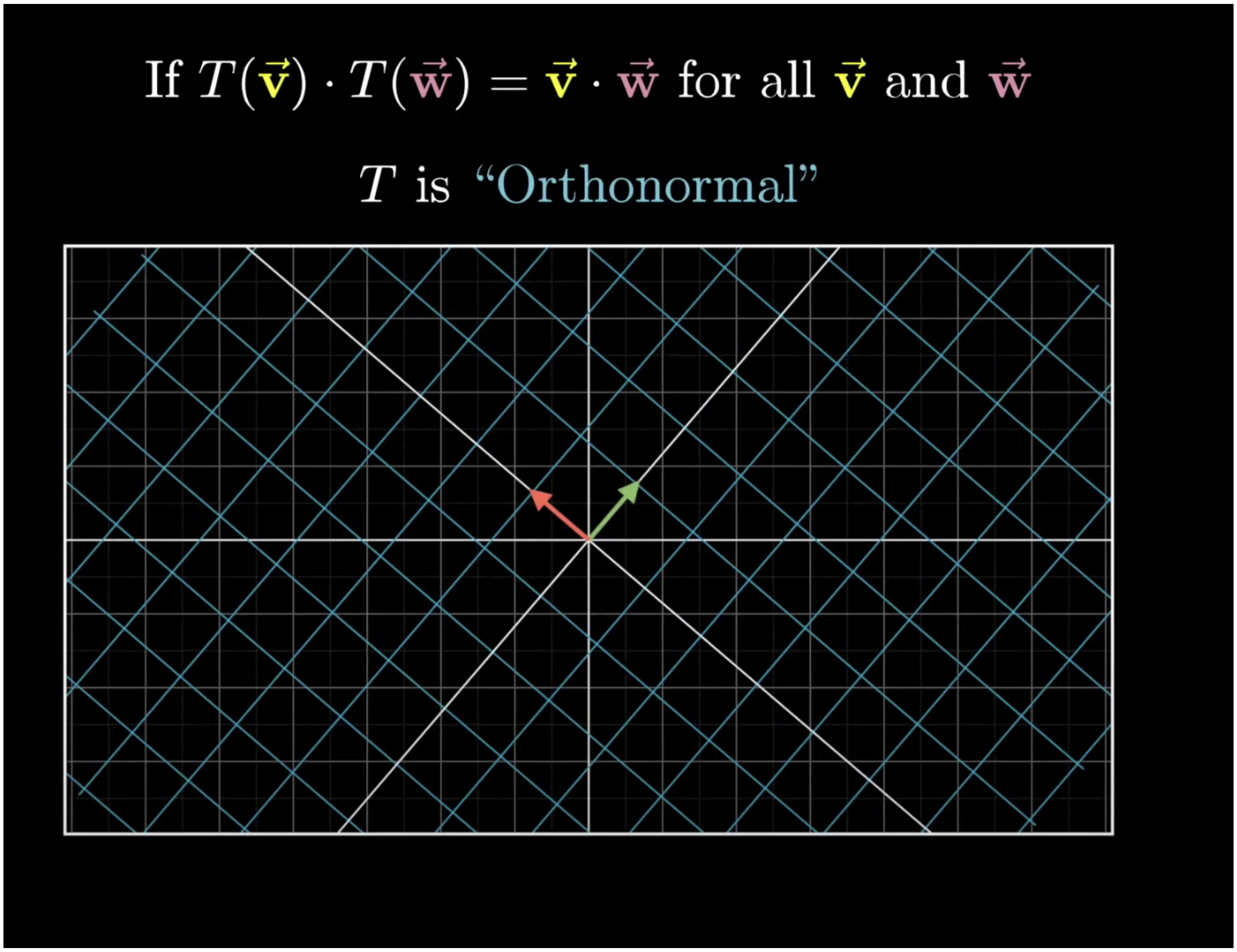


위 사진처럼 두 벡터가 같은 방향을 가지고 내적도 양수인 경우, 선형변환을 거쳐도 아래 사진에서 보듯 그 성질이 유지된다는 보장은 없다.


$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$
$\vec{y}$
$\vec{x}$

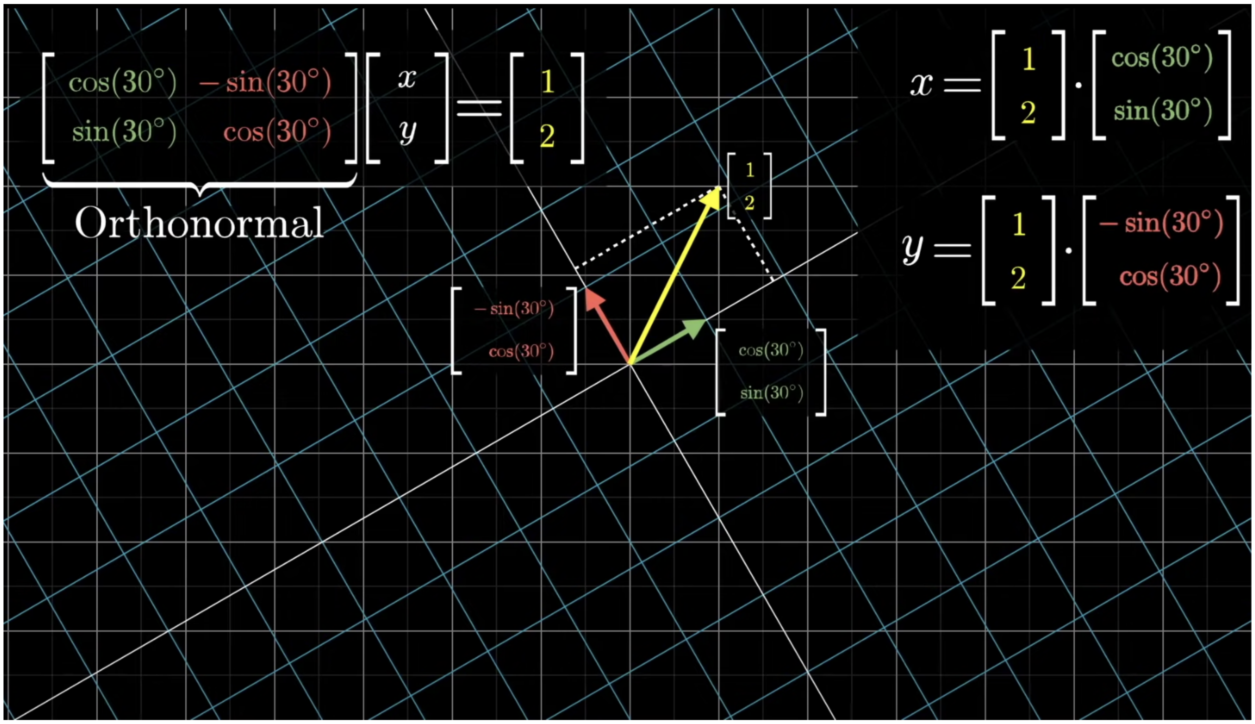


위 처럼 두 벡터가 직교하는 경우에도 마찬가지이다.

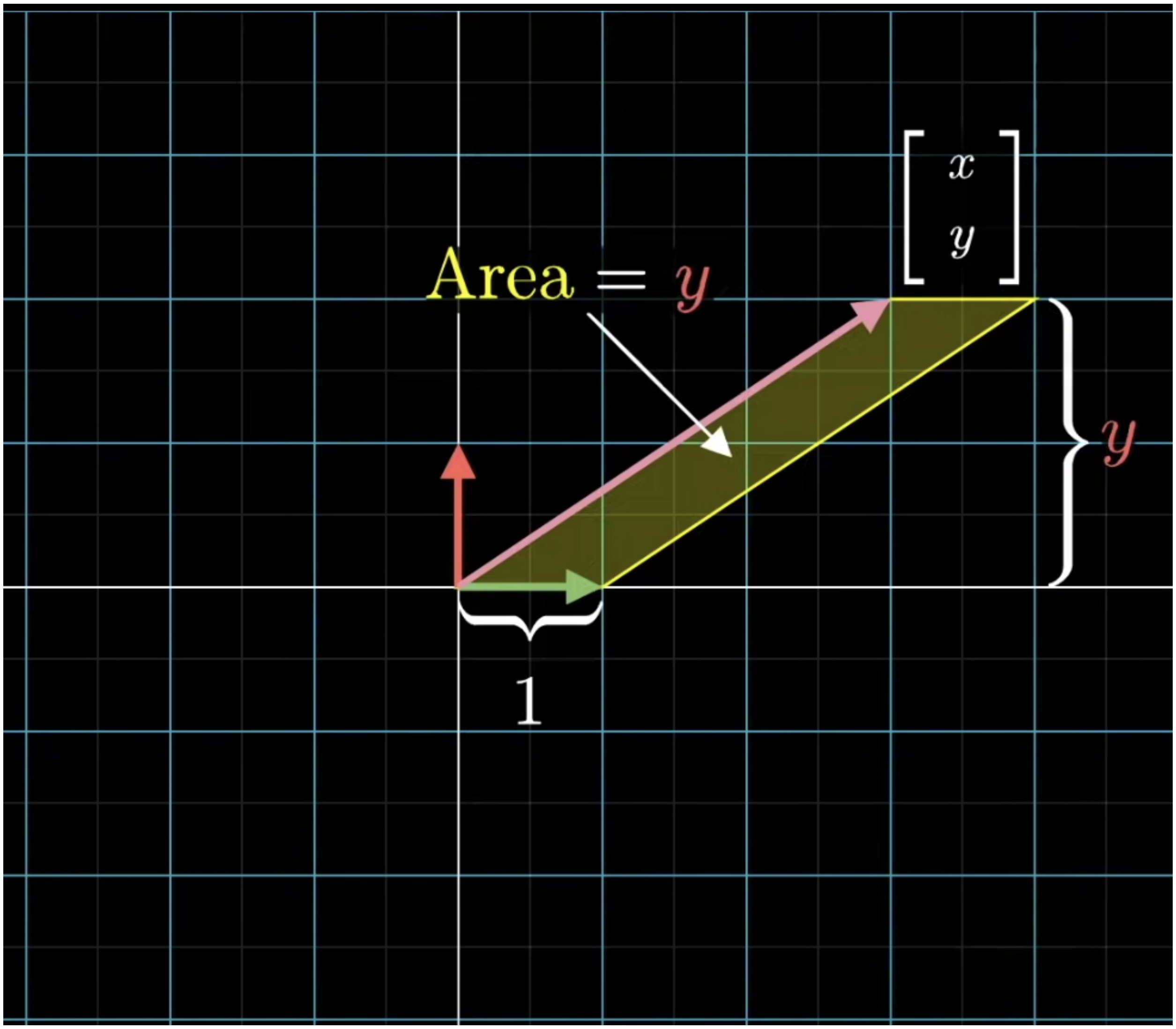


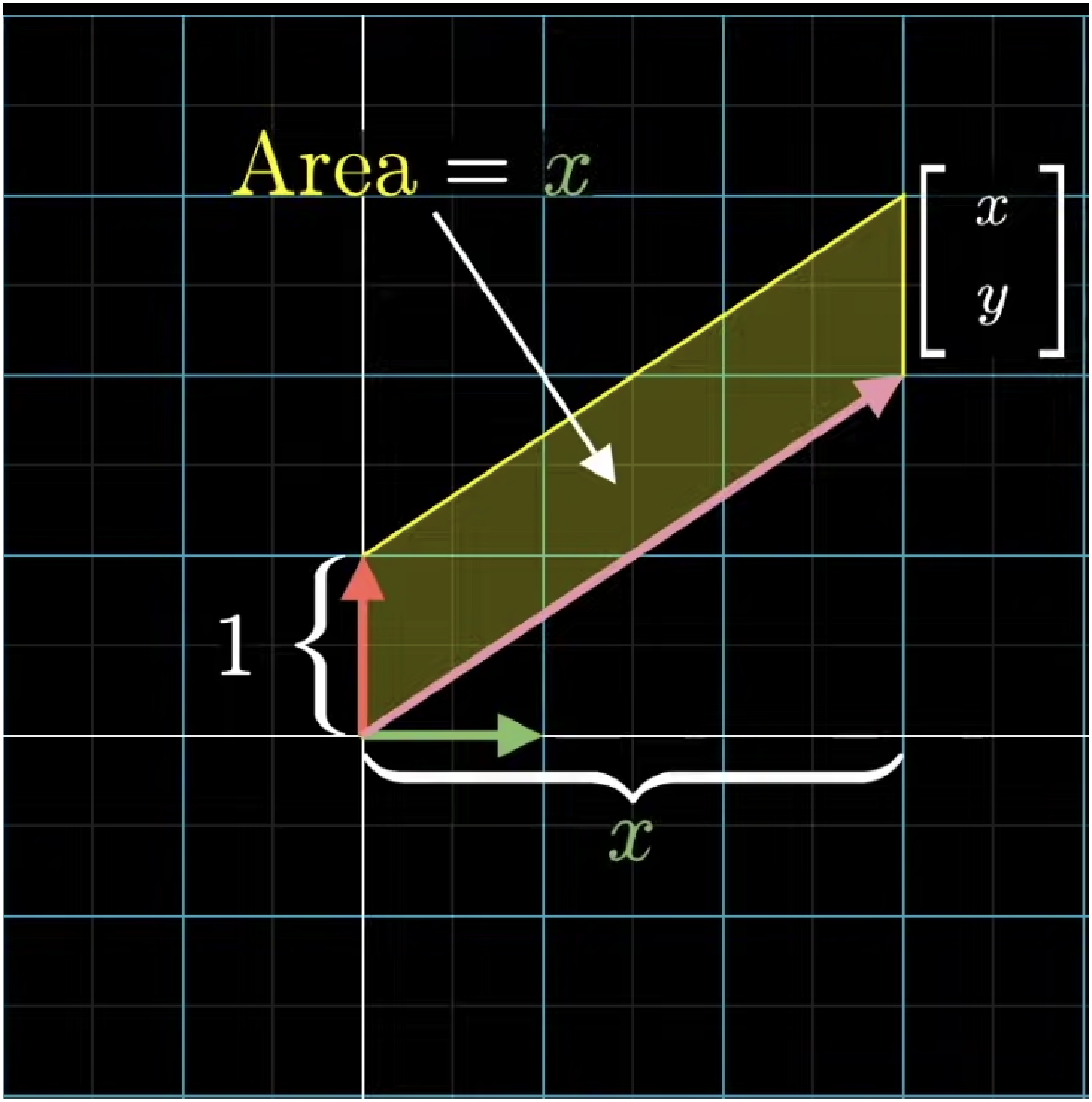
두 벡터의 내적과 선형 변환을 한 이후의 두 벡터의 내적이 같으면 그 변환은 orthonormal 한 변환이라고 한다.

[x,y]를 각각 [1,0], [0,1]과 내적하면 x,y를 구할 수 있을 것이다. 만약 이 때 각각의 항에 선형변환을 위한 행렬을 곱해도 값이 같으면 변환이 orthonormal(직교) 한다고 한다. 좌표계를 돌리는 행렬(선형 변환)을 생각하면 쉽다.

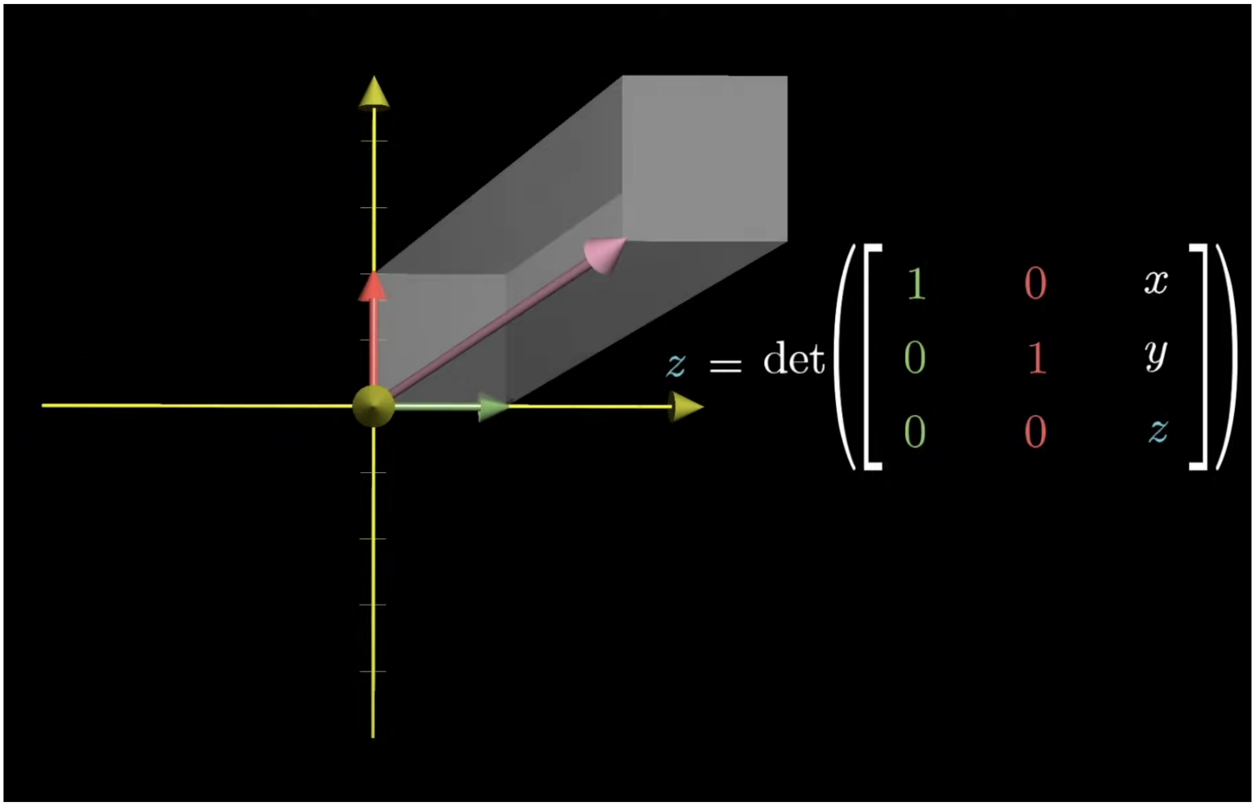


행렬이 직교 할 경우, 입력 벡터 [x,y] 행렬의 컬럼과 결과 벡터[1,2]와 각 행렬의 각 열의 내적을 구해서 알아낼 수 있다. 왜냐면 내적이 보존될 경우 (행렬이 직교할 경우), 입력벡터와 행렬의 각 열의 내적을 구하는 것은 결과 벡터와 행렬의 각 열의 내적을 구하는 것과 같기 때문이다 (?)

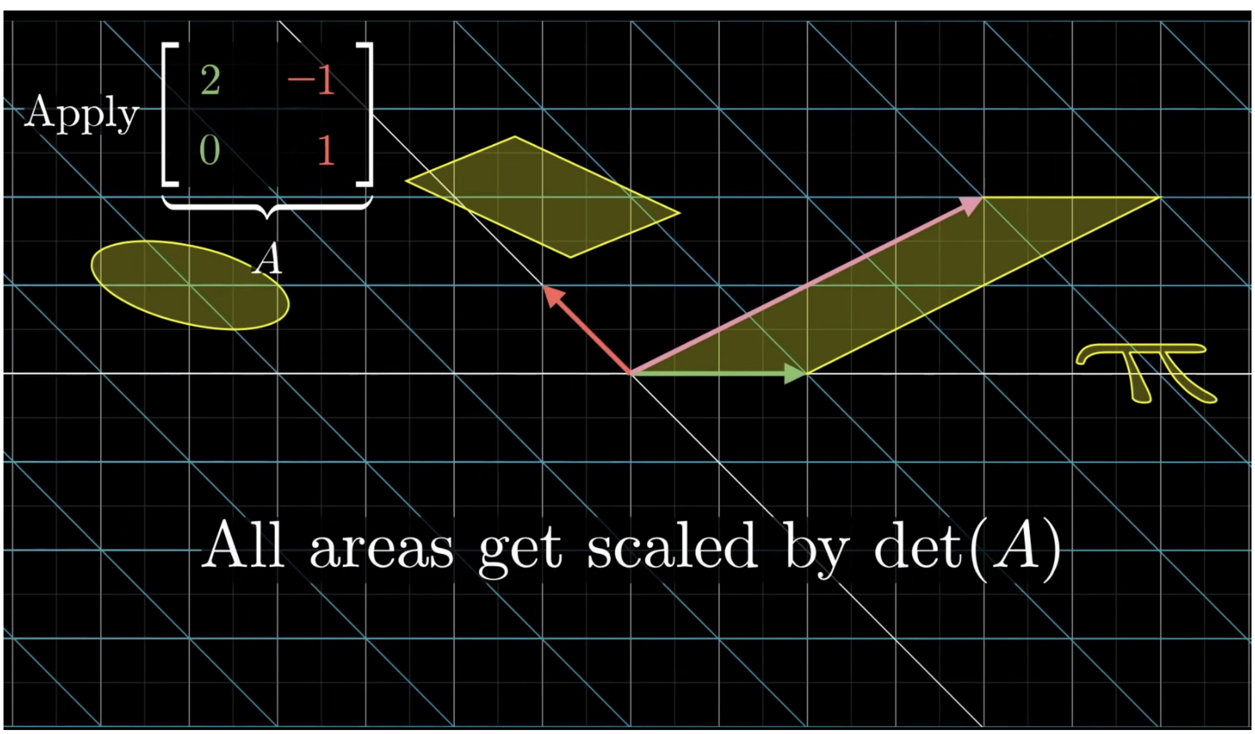

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
Area $= y$
y
1

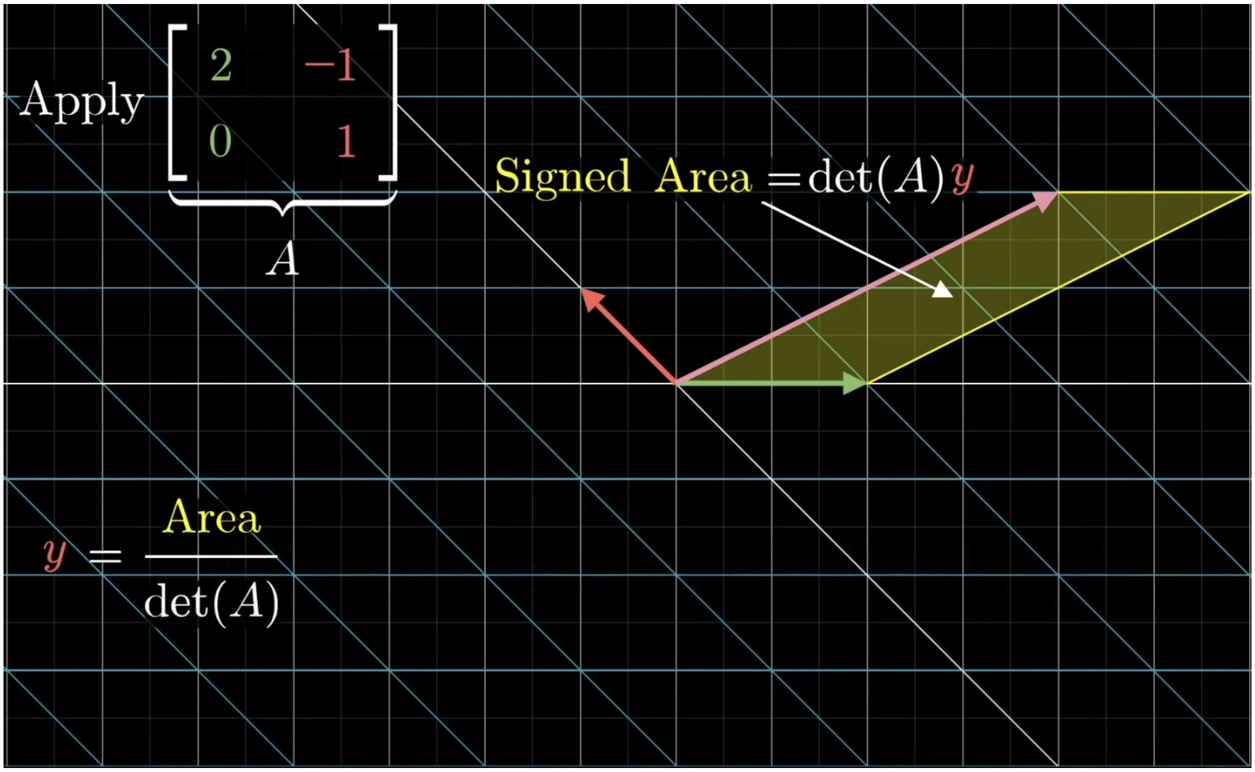


위 사진들 처럼 [x,y] 벡터를 y 영역이라고, 또는 x 영역이라고 생각해보자.

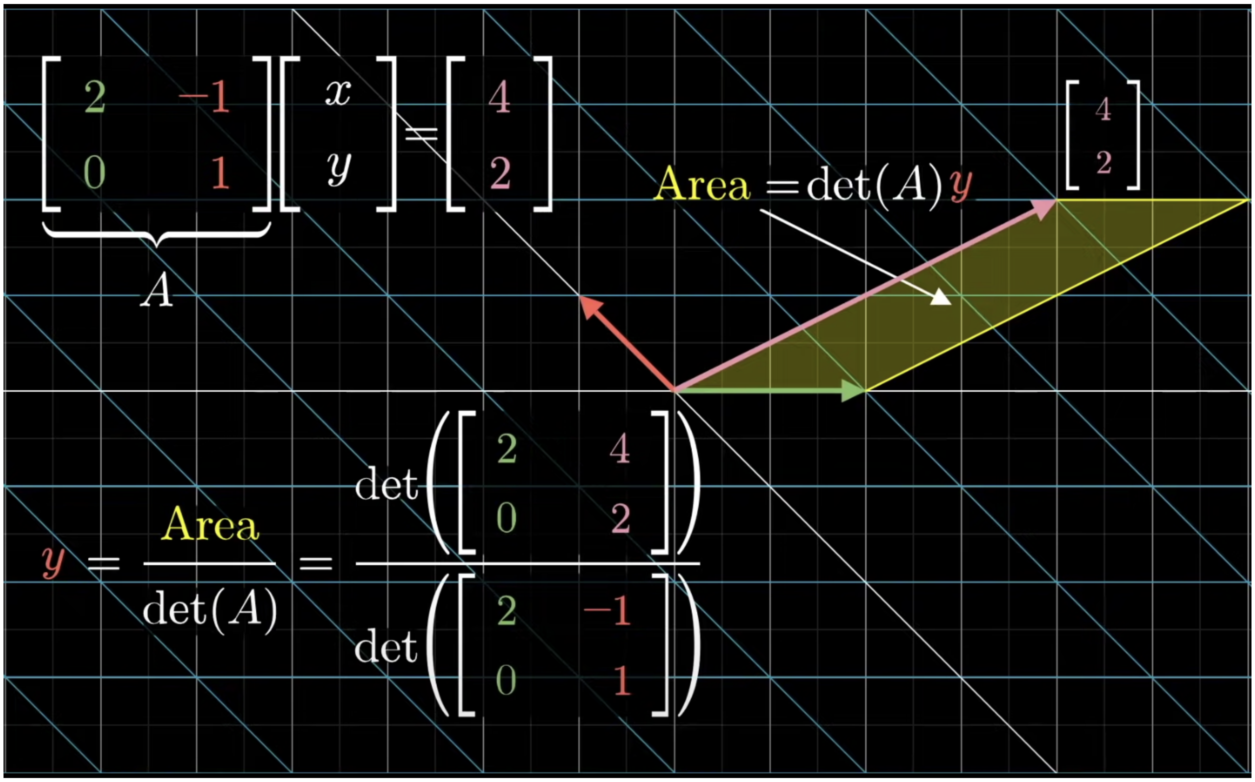


3차원에서라면 이렇게 표현할 수 있다. (1,1,z)인 영역 z는 det(M)와 같다.

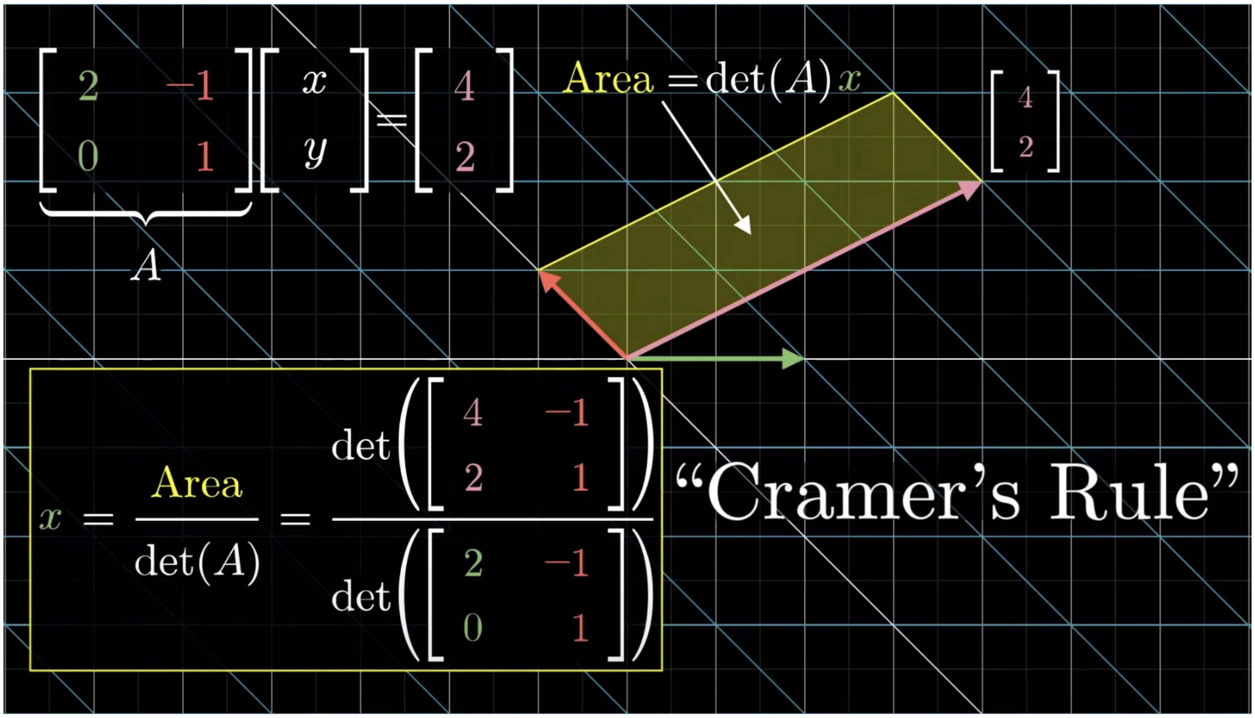




선형 변환시 모든 영역은 det(A) 행렬 식만큼 스케일링 된다. 즉 아까 y 영역은 선형 변환(A 행렬곱) 후 det(A)*y 영역이 될 것이고, y는 변환 후 Area를 행렬식으로 나눈 값으로 구할 수 있게 될 것이다.



그럼 이 변환 후 Area의 넓이는 어떻게 구하는가? 2차원 좌표계에서 넓이는 행렬식 만큼 스케일링 된다고 할 때, 위 그림에서 볼 수 있듯, [4,2] 벡터를 이미 알고 있고 변환한 i-hat, j-hat의 좌표도 행렬의 컬럼으로 표시되므로 변환한 i-hat의 좌표 [2,0] 와 결과 벡터 [4,2]로 이루어진 행렬의 행렬식을 구함으로써 알 수 있다. 왜냐하면 [1,0] [0,1]로 된 정사각형의 넓이가 1일 때 [2,0] [4.2] 로 선형변환 된 후의 넓이를 구할 수 있기 때문이다. (1*det(A))



j-hat을 이용해도 마찬가지이다. 이를 크라메르의 법칙이라고 한다.

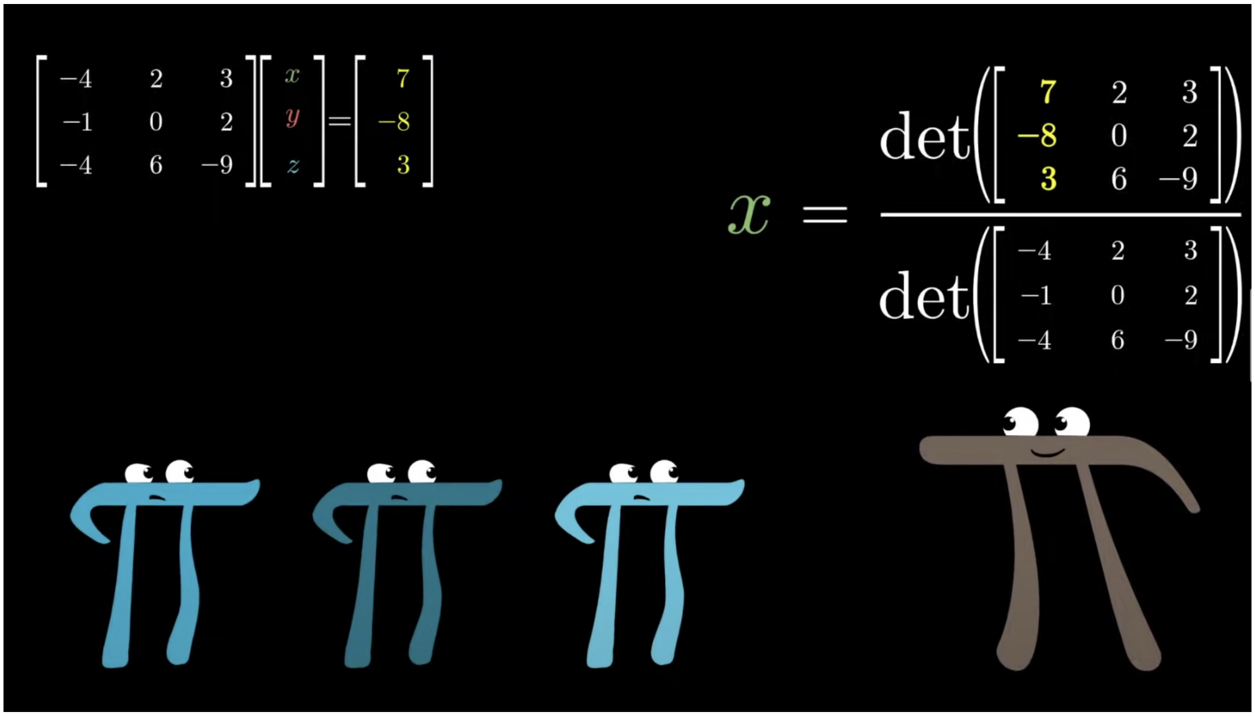
Apply Cramer’s Rule to N-dimension

$$3x + 2y - 7z = 4$$

$$1x + 2y - 4z = 2$$

$$4x + 0y + 1z = 5$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{Mystery input}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$



크라메르의 법칙을 다차원으로 적용하는 것을 직접 해보면 이해에 더 도움이 될 것이다.