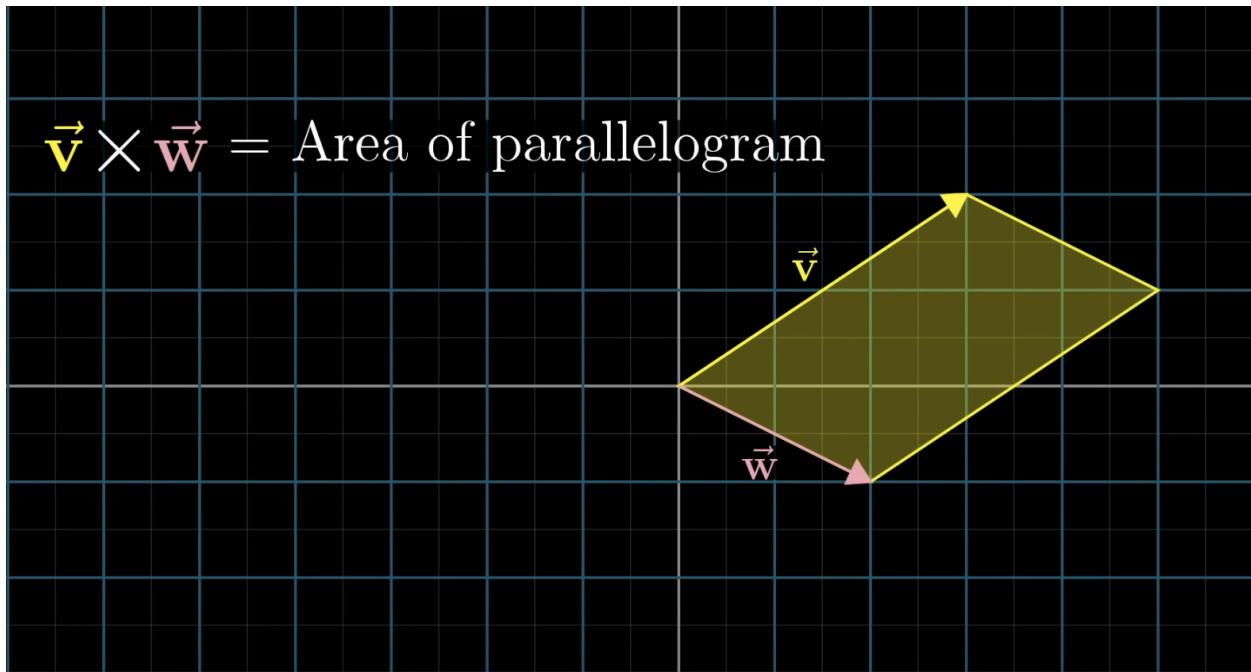
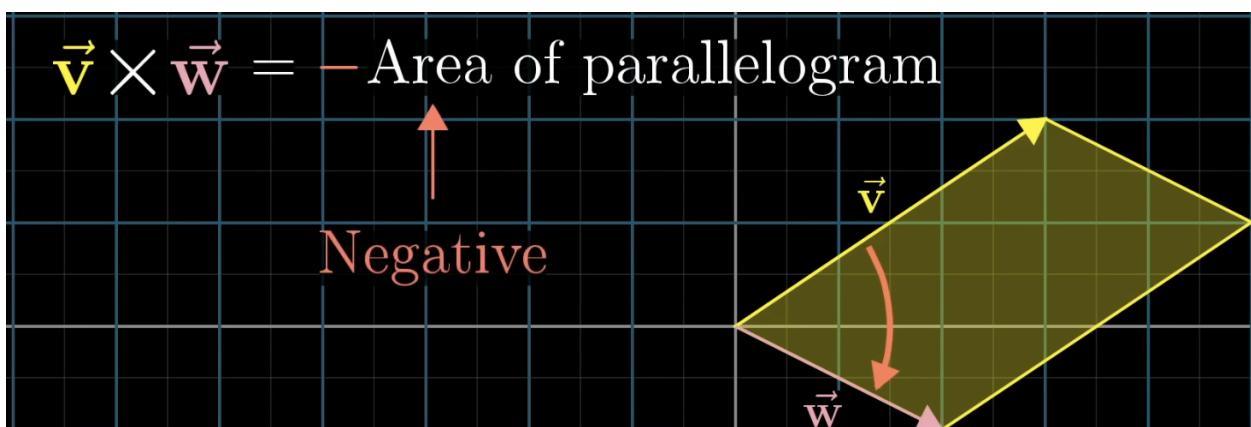
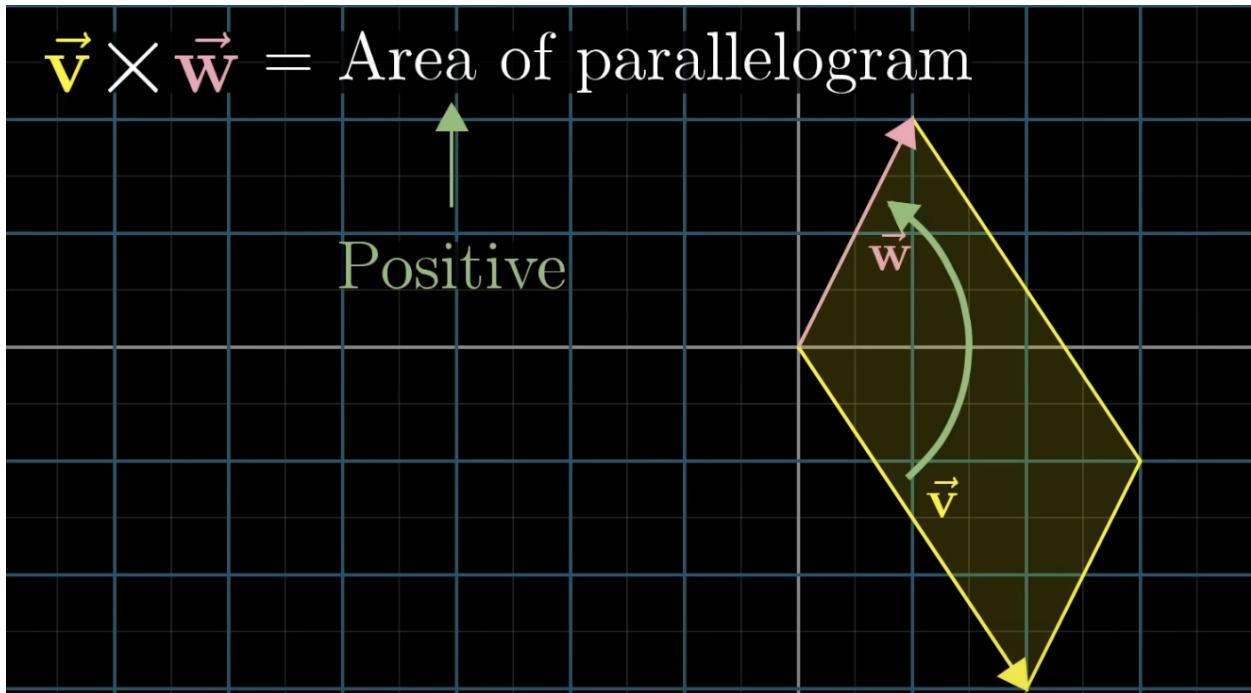


Cross Product

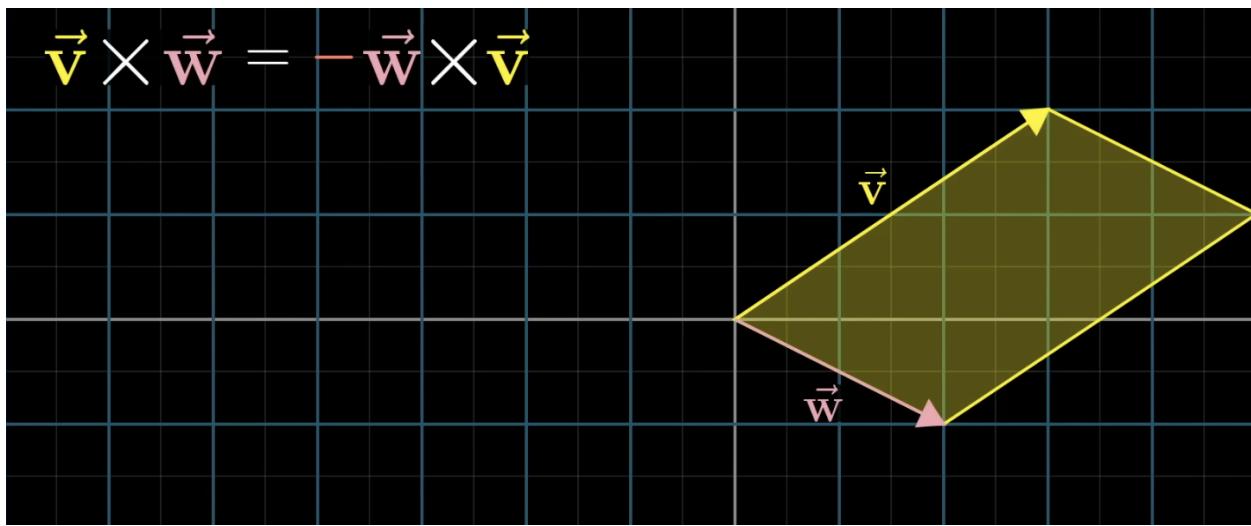
Definition



v-, w-의 외적(cross product)는 v*w-로 표현하고 각 벡터를 평행이동해서 만들어 지는 평행사변형의 넓이를 의미한다.

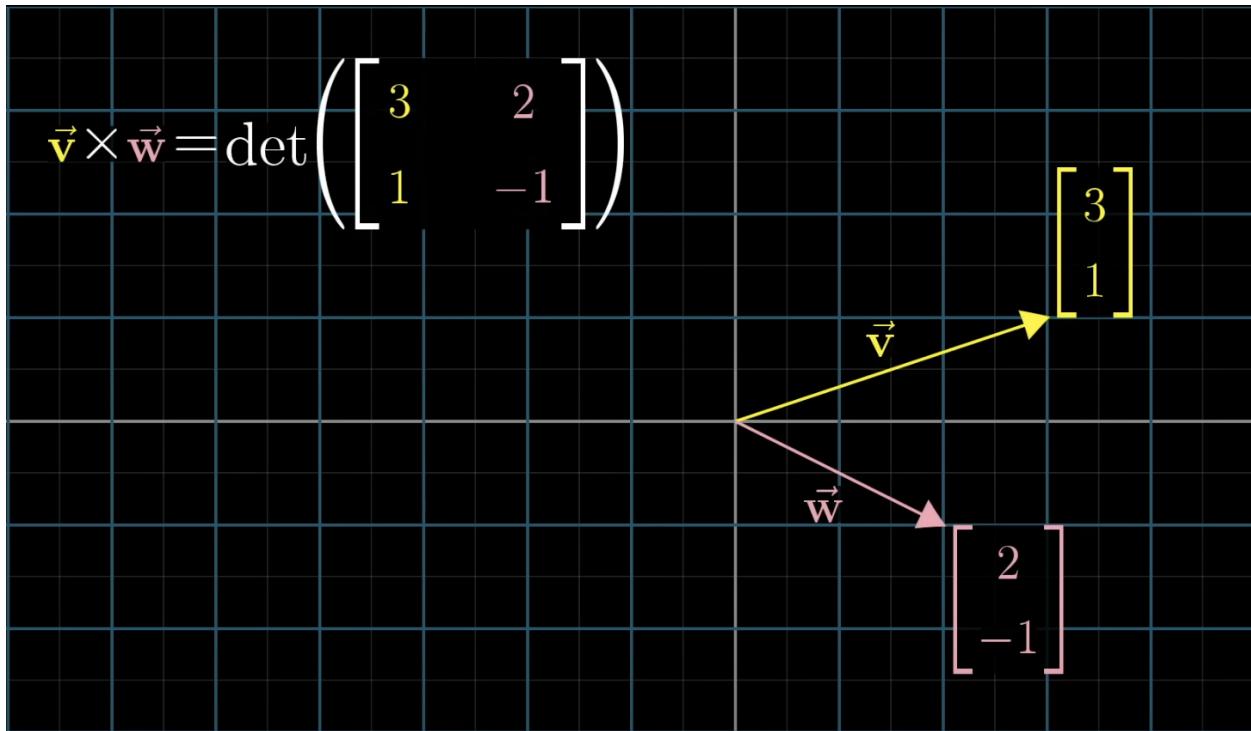


v 와 w 의 위치에 따라 넓이의 기호도 정해진다. v 가 w 의 오른쪽에 위치하면 양수, 왼쪽에 위치하면 음수이다.



벡터의 곱의 순서를 바꾸면 외적의 값도 변경된다.

Calculation

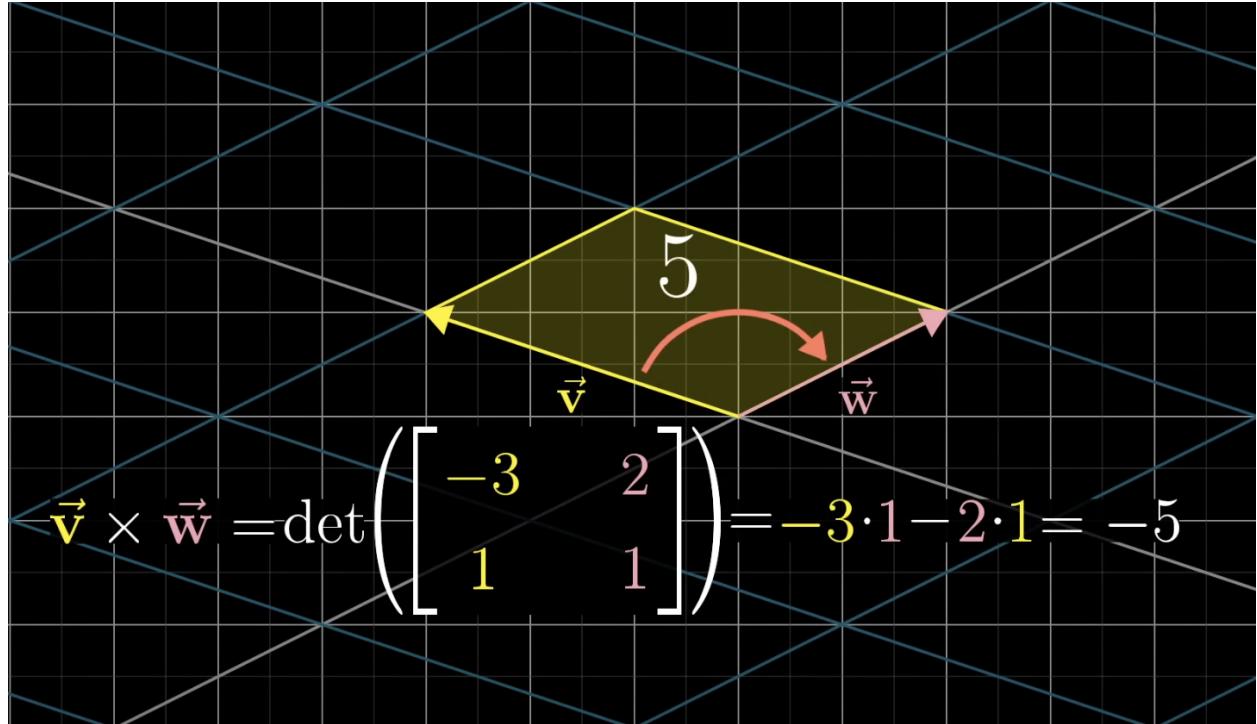


외적의 계산은 벡터의 좌표가 열이 되는 행렬의 행렬식(determinant)를 구하면 된다.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\vec{v} \times \vec{w}}_{\text{Area of this parallelogram}} = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

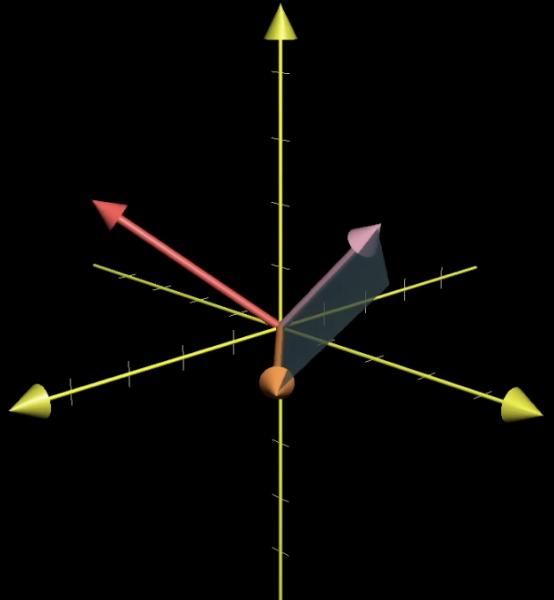
행렬식은 변환에 의해 면적이 얼마나 변하는지 알려준다. 즉 1의 기저벡터로 이루어진 영역이 변환되어서 나온 면적의 영역을 구하는 것이다. 만약 과정에서 v 가 w 의 왼쪽에 위치하면 방향이 변환에 의해서 뒤집힌 것이므로 영역의 넓이가 음수가 된다.



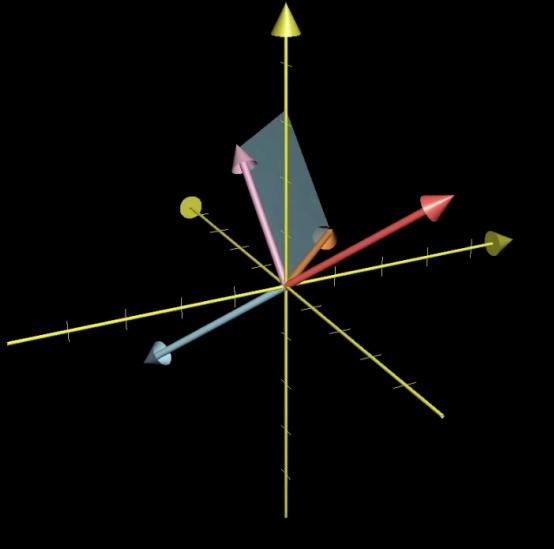
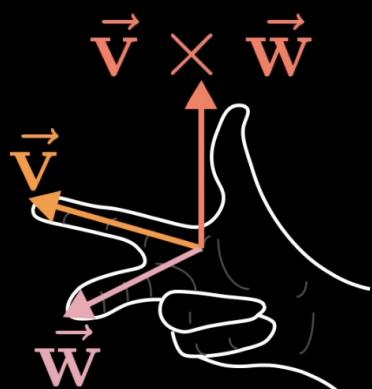
Cross Product in 3D

$$\vec{v} \times \vec{w} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{vector}}$$

With length 2.5

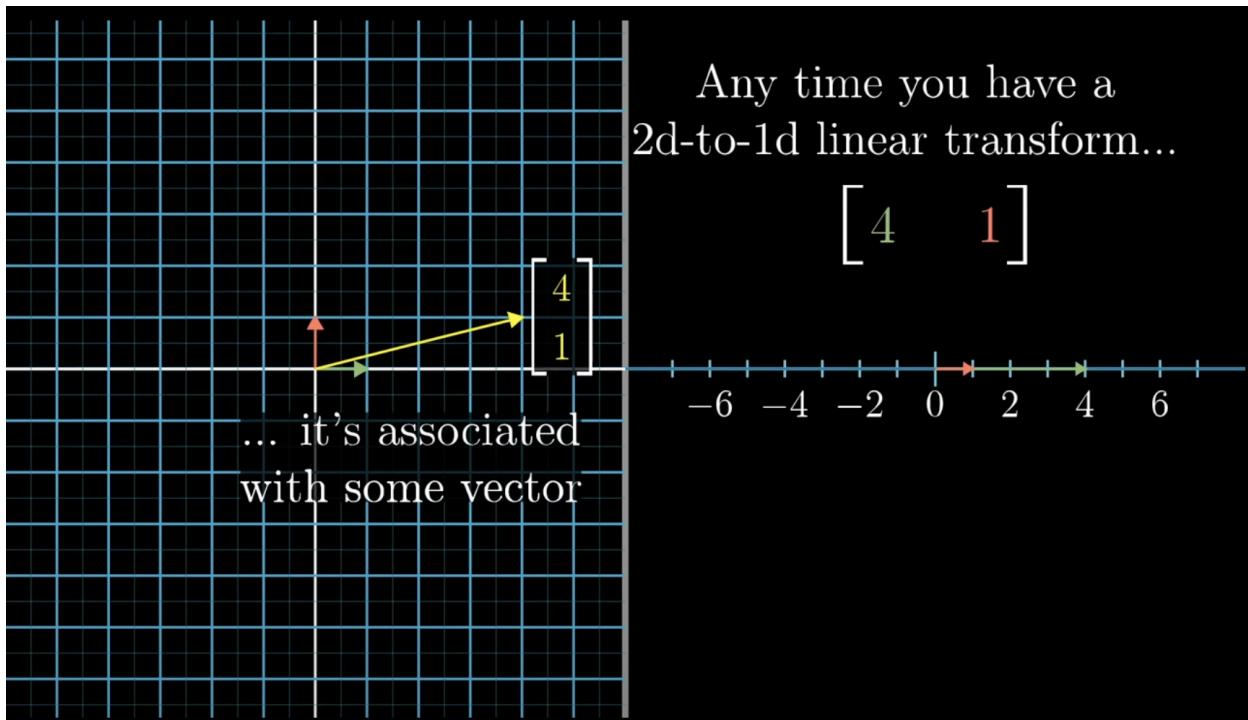


원론적으로 외적은 3차원의 두 벡터를 이용해서 새로운 3차원 벡터를 만들어 내는 것이다. 그리고 두 벡터의 행렬식으로 나온 값(면적)은 벡터의 길이가 된다. 그리고 벡터의 방향은 두 벡터가 만든 평행사변형의 수직한 방향이다.

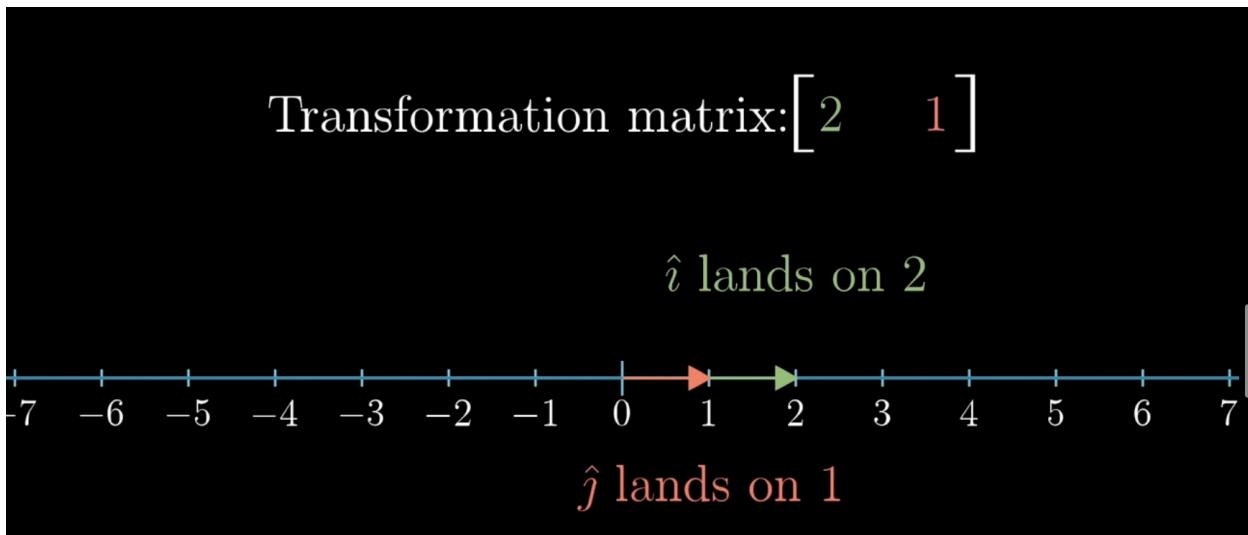


두 가지 수직의 방향이 있는데 오른쪽 법칙을 이용해서 외적의 방향을 결정한다.

Duality(이중성)



이중성은 어떤 차원을 1차원 수선으로 선형변환 할 때 벡터와 연관을 가지고 있다.



선형 변환이 하나의 행과 기저벡터가 변환된 숫자로 열이 된 행렬로 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{Dot product}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{Transform}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{Vector}}$$

계산적으로 어떤 벡터에 이 선형변환을 적용하는 것은 이 행렬을 벡터로 바꾼 다음 내적을 구하는 것과 동일하다. 이 벡터는 이중 벡터(Dual Vector)라고 한다.

The plan

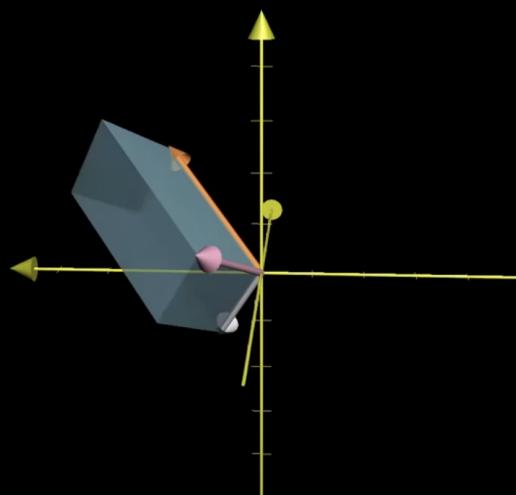
1. Define a 3d-to-1d linear transformation in terms of \vec{v} and \vec{w}
2. Find its dual vector
3. Show that this dual is $\vec{v} \times \vec{w}$

3차원에서 1차원 수선으로 수축하는 변환을 v, w 두 벡터로 정의할 것이다. 그리고 이 변환의 이중벡터를 구할 것이고 이 이중벡터는 v, w 의 외적(cross product)가 될 것이다.

This function is linear

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \vec{v} & \vec{w} \\ x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

Variable



3차원 행렬에서 두 벡터 값(열)은 정해져 있고 한 열 함수 값을 입력값으로 받은 후 완성된 3차원 행렬의 행렬식을 계산하는 함수를 생각해보자. 이 경우 행렬식의 결과 값은 3 벡터로 이루어진 평행 육면체의 부피가 될 것이다.

This function is linear

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \det \left(\begin{bmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \right)$$

1 × 3 matrix encoding the
3d-to-1d linear transformation

위에서 정의한 함수가 선형이기 때문에 이중성을 생각 할 수 있다. 즉 이 선형 함수를 행렬의 곱으로 나타낼 수 있다. (3차원 → 1차원으로 가야 하기 때문에 1*3 행렬을 사용)

$$\vec{p} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

그리고 다차원에서 1차원으로 변환하기 때문에 이 변환(행렬 곱)을 벡터의 내적으로도 해석할 수 있다.

$$\vec{p} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

↓

$$x(v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2) +$$

$$p_1 \cdot x + p_2 \cdot y + p_3 \cdot z = y(v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3) +$$

$$z(v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1)$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}}^{\vec{p}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \det \left(\begin{bmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$p_1 = v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2$$

$$p_2 = v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3$$

$$p_3 = v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1$$

좌항의 내적 계산의 구성을 우항의 행렬식의 계산의 구성에 매칭시켜서 생각해볼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & v_1 & w_1 \\ \hat{j} & v_2 & w_2 \\ \hat{k} & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

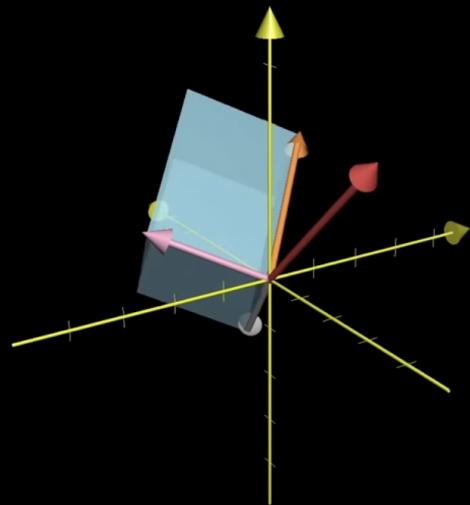
$\hat{i}(\underbrace{v_2w_3 - v_3w_2}_{\text{Some number}}) + \hat{j}(\underbrace{v_3w_1 - v_1w_3}_{\text{Some number}}) + \hat{k}(\underbrace{v_1w_2 - v_2w_1}_{\text{Some number}})$



그러면 3차원 내적의 계산 식과 같은 걸 알 수 있다.

What vector \vec{p} has
the property that

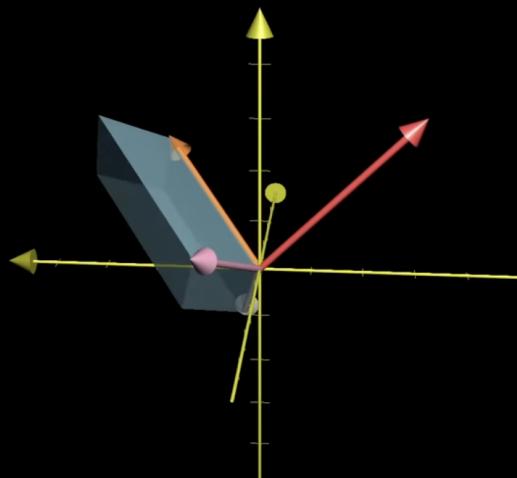
$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\vec{p}} = \det \begin{pmatrix} \vec{v} & \vec{w} \\ x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$



그럼 계속 나온 이 벡터 p는 무엇을 의미하는가?

What vector \vec{p} has
the property that

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vec{p} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}}_{\vec{p}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{v} & \vec{w} \\ v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$



벡터 p 와 어떤 벡터 $[x,y,z]$ 의 내적을 구하는 것은 벡터 $[x,y,z]$, v , w 를 이용해서 3×3 행렬식(부피)을 구하는 것과 같다. 만약 벡터 $[x,y,z]$ 가 z 축(v,w 에 수직하는)이라고 생각하면 부피가 될 것이다.

추가 설명

내적이 하나의 벡터를 다른 벡터에 투영(두 벡터의 길이를 곱하는 것)일 때, $[xyz]$ 벡터를 v^*w 면적에 수직인 벡터(u)에 투영한 후 v^*w 면적과 곱하는 것과 같다. $= (v^*w) * (u \text{dot} xyz)$

이것은 수직인 벡터 u 가 v^*w 의 면적을 길이로 가졌을 때 $[xyz]$ 벡터와 내적하는 것과 같다. $= p(\text{dot})xyz$ (while $p = v^*w$ 의 면적을 길이로 가진 u)

$$\begin{array}{c}
 \overrightarrow{\mathbf{p}} \\
 \left[\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] = \det \left(\begin{bmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \right) \\
 \downarrow \\
 x(v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2) + \\
 p_1 \cdot x + p_2 \cdot y + p_3 \cdot z = y(v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3) + \\
 z(v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1)
 \end{array}$$

따라서 위 계산적인 측면에서 봤을 때의 공식을 다시 보면 벡터 \mathbf{p} 와 벡터 $[xyz]$ 의 내적이 벡터 $[xyz]$, 벡터 \mathbf{v} , 벡터 \mathbf{w} 를 열로 가지는 행렬의 행렬식을 구하는 것과 같은 것을 다시 이해할 수 있다.