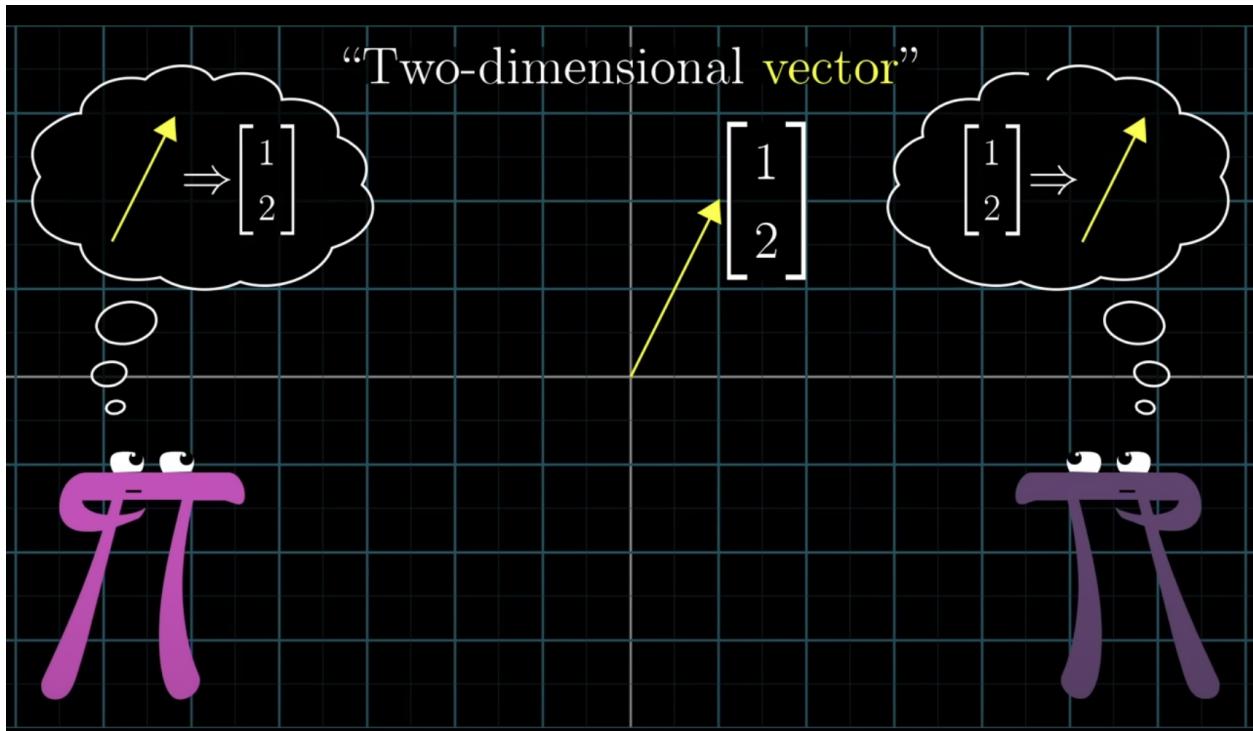
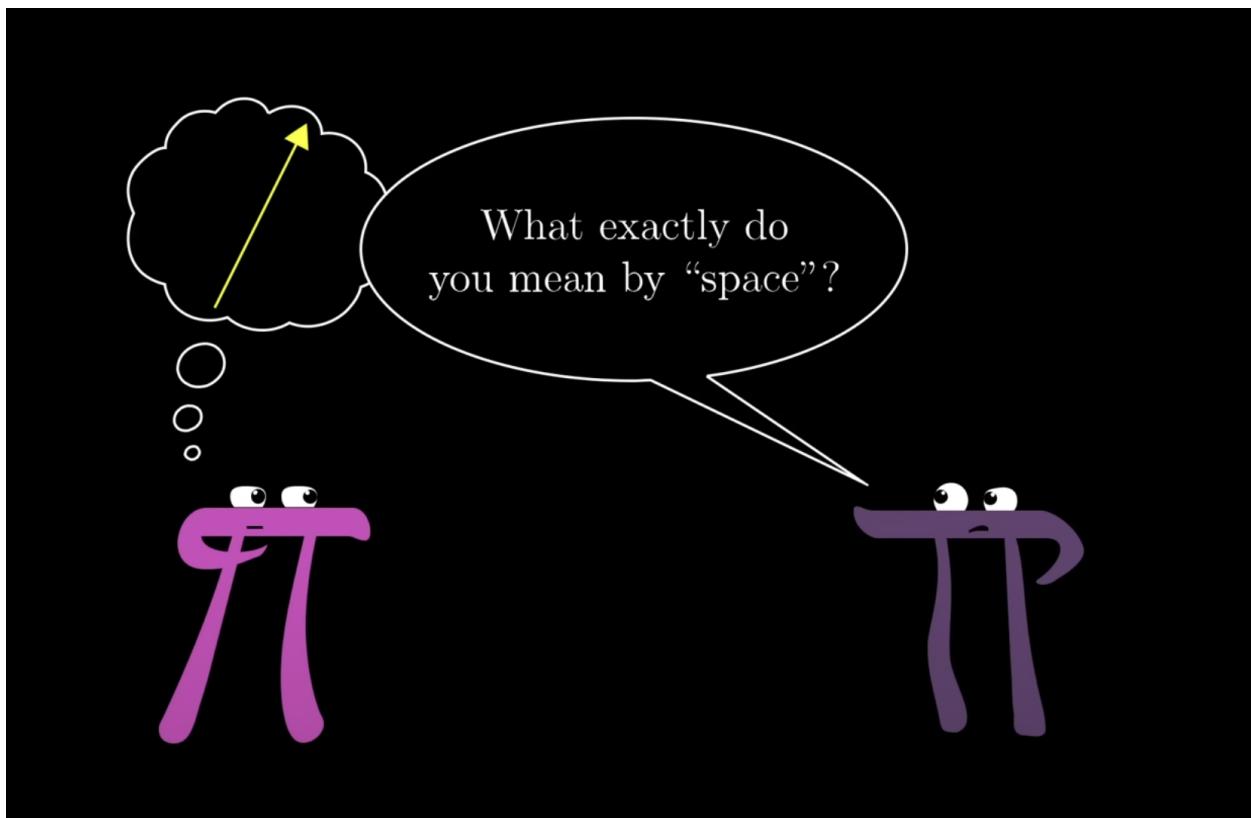


# Abstract Vector Space

## Vector



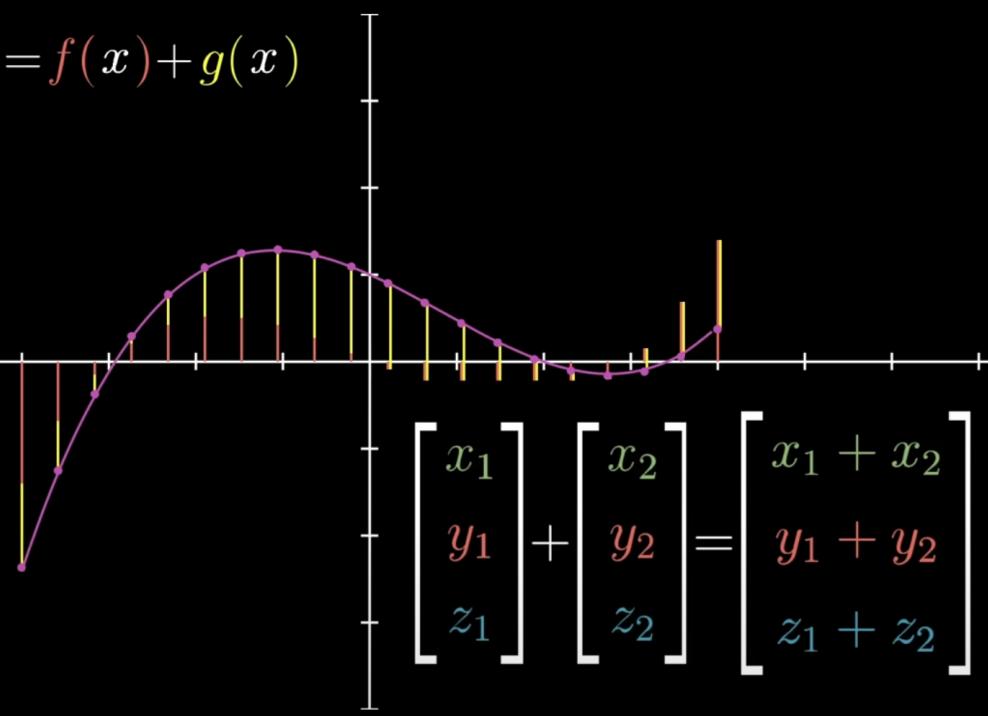
벡터는 어떻게 정의할 수 있을까? 수의 리스트인가 아니면 화살표인가?

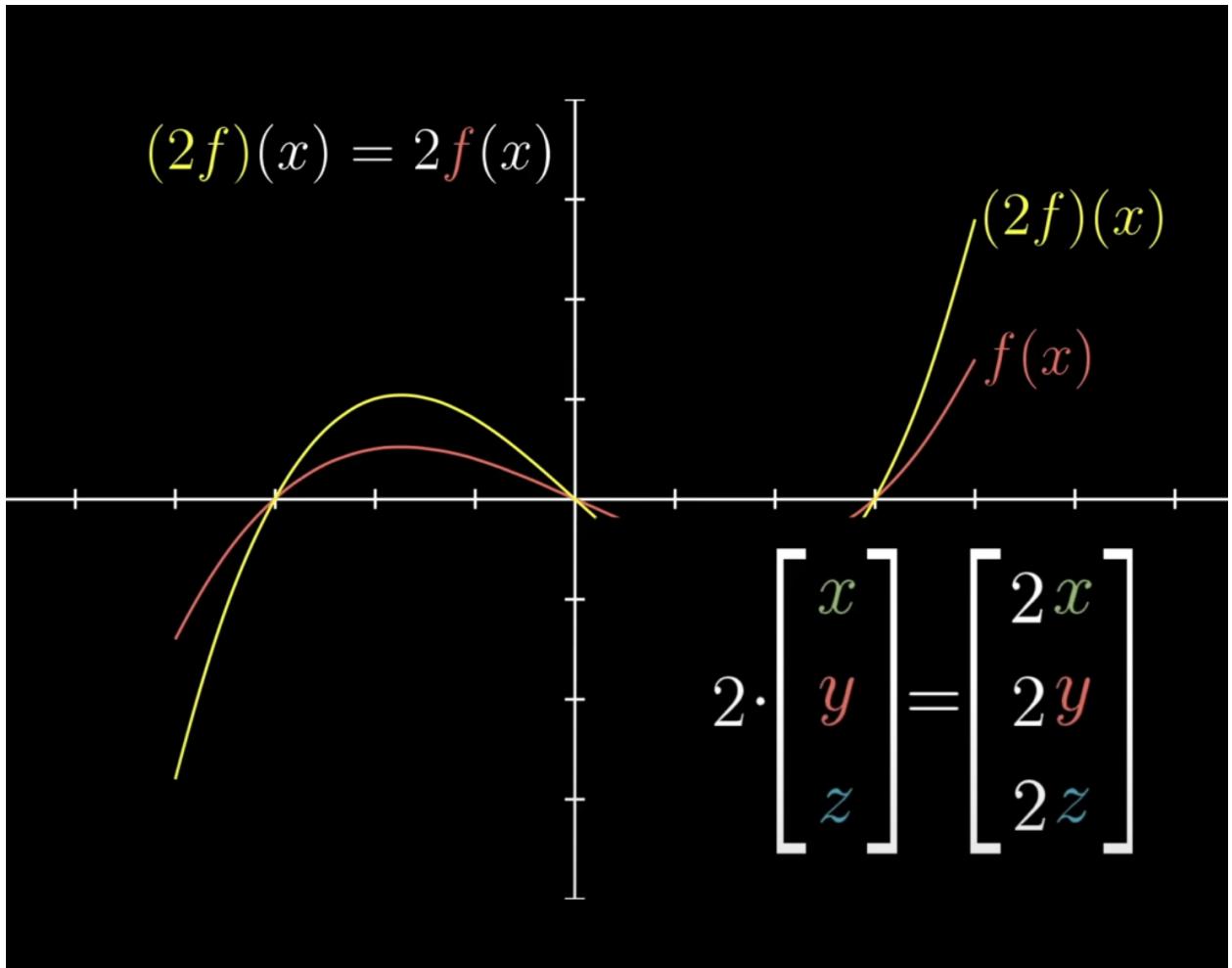


벡터는 공간적인 본질을 가지고 있는데, 이 ‘공간’(space or vector space)은 어떻게 정의할 수 있을까?

## Function

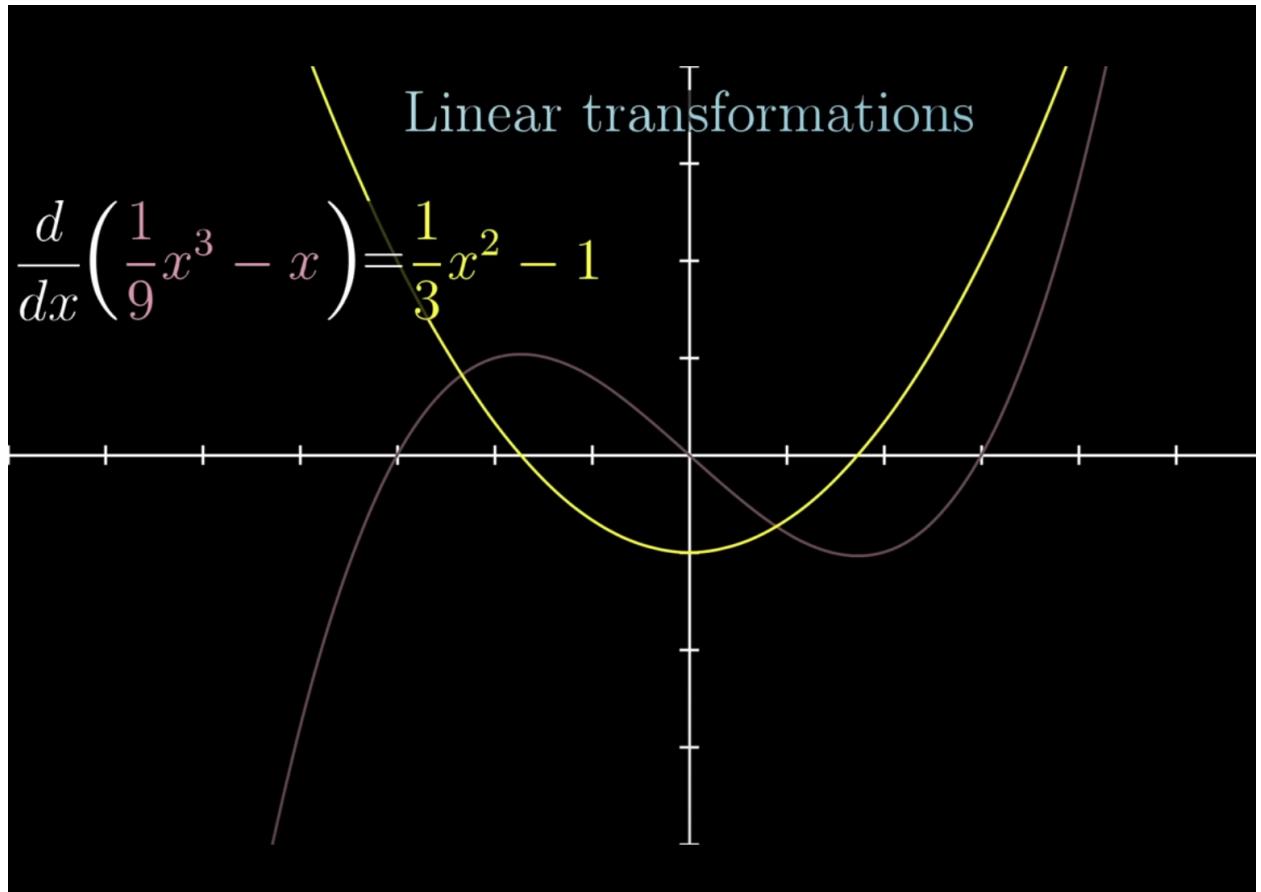
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$





공간을 설명하기 위해서는 벡터 같은(vectorish) 값, 즉 함수를 설명해야 한다. 함수는 다른 종류의 벡터이다. 두 함수  $f, g$ 를 합쳐서 새로운 함수를 만드는 것은  $f, g$  함수의 합과 같다. 이는 벡터에서 같은 좌표계들을 더하는 것과 같다. 단지 무한한 좌표계를 더할 뿐이다.

마찬가지로 함수에 실수배를 하는 것도 벡터에 실수배를 하는 것과 같다. 단지 무한한 좌표계에 실수배를 곱할 뿐이다.



함수에도 선형 변환이 있는데, 대표적으로 도함수(미분)이다.

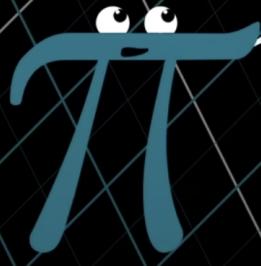
## Formal Definition Of Linearity

## Formal definition of linearity

Additivity:  $L(\vec{v} + \vec{w}) = L(\vec{v}) + L(\vec{w})$

Scaling:  $L(c\vec{v}) = cL(\vec{v})$

Linear transformations  
preserve addition and  
scalar multiplication



선형이라는 것의 의미를 살펴보면, 한 변환이 선형이면 합과 실수배의 성질을 만족한다.  
즉  $v, w$ 를 더하고 변환을 한 것이랑  $v$ 를 변환한 값이랑  $w$ 를 변환한 값을 더한 거랑 같은 것이다.  
마찬가지로 실수배를 한 값을 변환한 값은 변환후 실수배를 한 값이랑 같다.

Derivative is linear

$$L(\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = L(\vec{\mathbf{v}}) + L(\vec{\mathbf{w}})$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 + x^2) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x^2)$$

# Derivative is linear

$$L(c\vec{\mathbf{v}}) = cL(\vec{\mathbf{v}})$$

$$\frac{d}{dx}(4x^3) = 4\frac{d}{dx}(x^3)$$

도함수가 선형변환이기 때문에 위 원칙이 적용된다.

그러면 미분을 행렬로 나타내면 어떻게 될까?

Our current space: All polynomials

$$5 \cdot 1 + 3x + 1x^2 + 0x^3 + 0x^4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Basis functions} \\ b_0(x) = 1 \\ b_1(x) = x \\ b_2(x) = x^2 \\ b_3(x) = x^3 \\ \vdots \end{array}$$

위와 같이  $x$ 의 다항식을  $x$ 의 제곱들로 기저 함수를 정해보자. 이  $x$ 제곱들로 이루어진 기저함수들은 벡터에서  $i\text{-hat}$ ,  $j\text{-hat}$ ,  $k\text{-hat}$ 과 역할이 같다.

Our current space: All polynomials

$$\begin{array}{l} \text{Basis functions} \\ \hline \\ \begin{matrix} x^{300} + 9x^2 \\ 4x^{4,000,000,000} + 1 \\ 3x^{(10^{100})} \\ \vdots \end{matrix} \Rightarrow \text{Infinitely many} \left\{ \begin{matrix} b_0(x) = 1 \\ b_1(x) = x \\ b_2(x) = x^2 \\ b_3(x) = x^3 \\ \vdots \end{matrix} \right. \end{array}$$

다항식이 임의의 최고차항을 가지므로 이런 기저 함수는 무한히 많다.

Our current space: All polynomials

$$\begin{array}{ll}
 5 \cdot 1 & \left[ \begin{array}{c} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{array} \right] \\
 + 3x & \\
 + 1x^2 & \\
 + 0x^3 = & \\
 + 0x^4 & \\
 \vdots & \left[ \begin{array}{c} \vdots \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{Basis functions} \\
 b_0(x) = 1 \\
 b_1(x) = x \\
 b_2(x) = x^2 \\
 b_3(x) = x^3 \\
 \vdots
 \end{array}$$

Our current space: All polynomials

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \left[ \begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \\ 0 \\ \vdots \end{array} \right] \quad \begin{array}{l}
 \text{Basis functions} \\
 b_0(x) = 1 \\
 b_1(x) = x \\
 b_2(x) = x^2 \\
 b_3(x) = x^3 \\
 \vdots
 \end{array}$$

즉 다항식을 무한한 좌표를 가진 벡터로 생각해 보는 것이다.

Our current space: All polynomials

Basis functions

$$\frac{d}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$b_0(x) = 1$   
 $b_1(x) = x$   
 $b_2(x) = x^2$   
 $b_3(x) = x^3$   
 $\vdots$

이런 좌표계에서 미분은 0이 무한히 많지만 대각선으로 양수가 위치한 행렬로 나타낼 수 있다.

Our current space: All polynomials

Basis functions

$$\frac{d}{dx}(1x^3 + 5x^2 + 4x + 5) = \underbrace{3x^2 + 10x + 4}_{b_0(x) = 1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 4 \\ 2\cdot 5 \\ 3\cdot 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$b_1(x) = x$   
 $b_2(x) = x^2$   
 $b_3(x) = x^3$   
 $\vdots$

이 미분 행렬을 이용해서 실제 다항식을 미분하면 위와 같이 정답을 얻을 수 있다.

$\begin{bmatrix} 0 & ? & ? & ? & \dots \\ 0 & ? & ? & ? & \dots \\ 0 & ? & ? & ? & \dots \\ 0 & ? & ? & ? & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$  Our current space: All polynomials  
Basis functions

$$\frac{d}{dx} b_1(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad b_0(x) = 1$$

$$b_2(x) = x^2$$

$$b_3(x) = x^3$$

$$\vdots$$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & ? & ? & \dots \\ 0 & 0 & ? & ? & \dots \\ 0 & 0 & ? & ? & \dots \\ 0 & 0 & ? & ? & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$  Our current space: All polynomials  
Basis functions

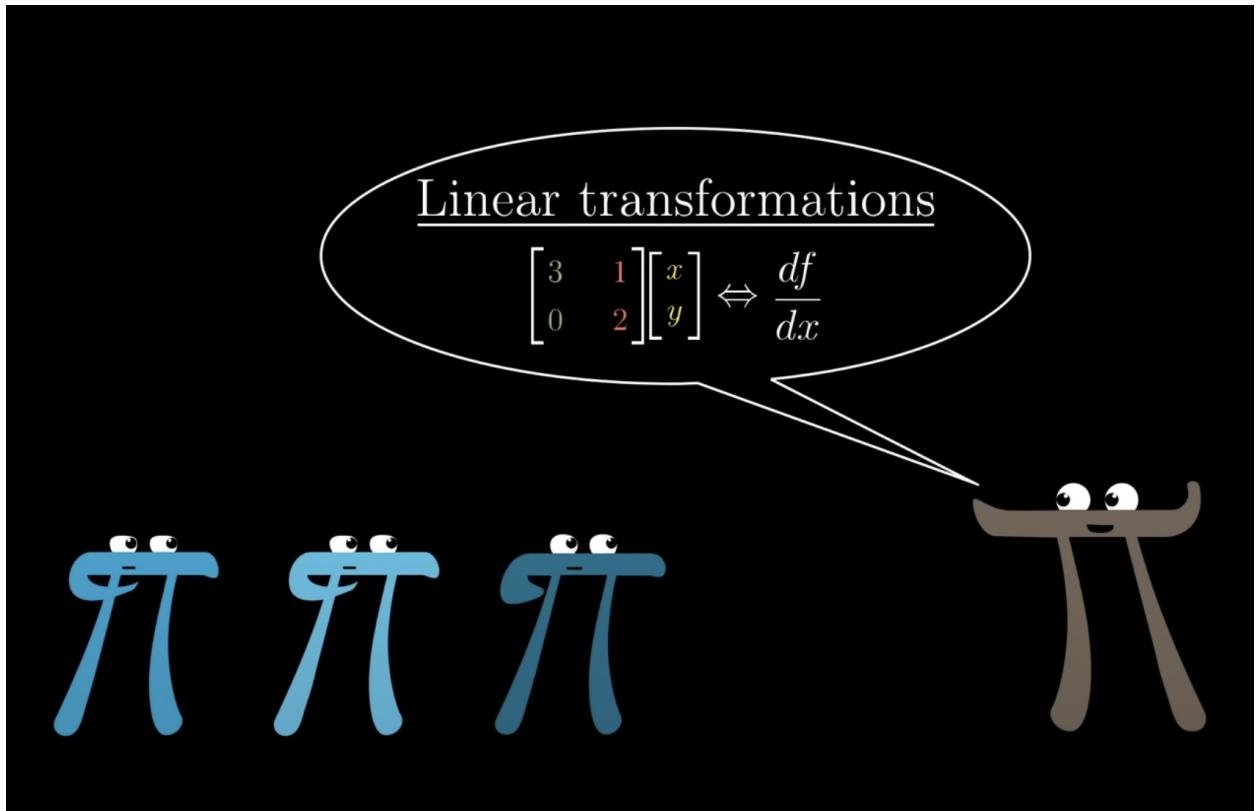
$$\frac{d}{dx} b_2(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad b_0(x) = 1$$

$$b_1(x) = x$$

$$b_3(x) = x^3$$

$$\vdots$$

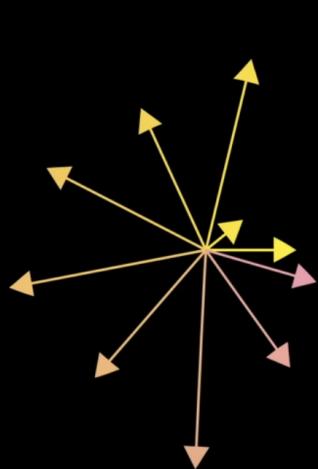
저 미분행렬을 구하고 싶다면 각 기저함수의 항을 미분해서 나타난 벡터를 행렬의 각 컬럼에 위치시키면 된다.



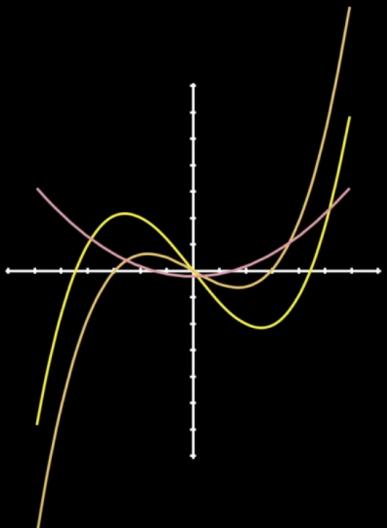
즉 도함수로 미분을 하는 것과 행렬\*벡터 연산은 전혀 다른 것으로 생각되었지만, 사실 같은 가족인 것이다.

## Axioms Of Vector Space

## Vector spaces



$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -1 \\ -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix}$$



화살표나 숫자의 리스트나 함수 같은 ‘벡터스러운’(vector-ish)한 것들을 모두 vector spaces (벡터 공간) 이라고 부른다.

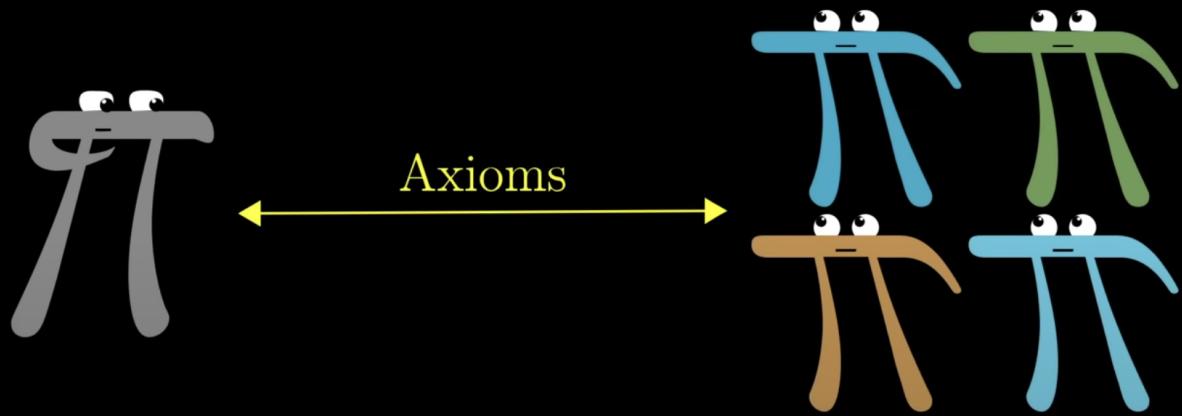
## Rules for vectors addition and scaling

1.  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
2.  $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
3. There is a vector  $\mathbf{0}$  such that  $\mathbf{0} + \vec{v} = \vec{v}$  for all  $\vec{v}$
4. For every vector  $\vec{v}$  there is a vector  $-\vec{v}$  so that  $\vec{v} + (-\vec{v}) = \mathbf{0}$
5.  $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$
6.  $1\vec{v} = \vec{v}$
7.  $a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$
8.  $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

“Axioms”

현대 선형대수 이론에서는 어떤 벡터 공간에서든 적용되어야 하는 8개의 공리가 있다. 이는 위의 합과 실수배에서 파생된 체크리스트에 불과하긴 하다.

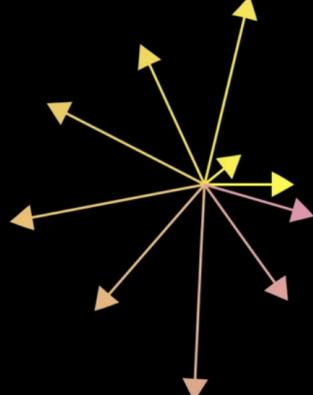
Axioms are rules of nature  
an interface



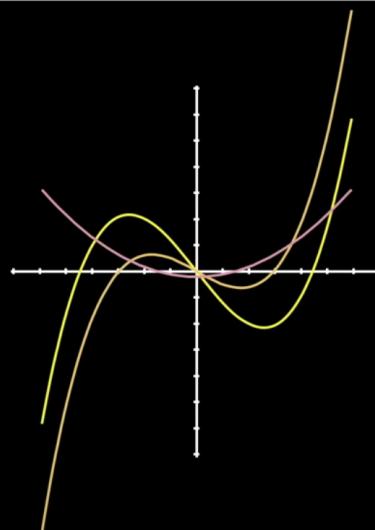
즉 이 공리들은 자연의 진리라기 보다는 같은 벡터공간에서 소통해야하는 수학자들간의 인터페이스와 같은 것이다. 따라서 어떤 수학자의 정의가 공리를 만족한다면 선형대수의 결론을 적용할 수 있는 것이다. 다시 말해 모든 결론은 상당히 추상적으로, 공리를 만족하는 지의 기준에서 살펴보는 것이다.

## Conclusion

## Vector spaces

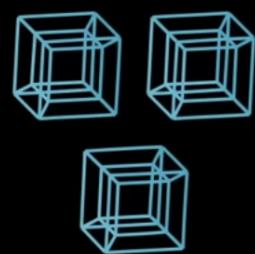


$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -1 \\ -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix}$$



위의 결론으로 현대의 선형대수학에서 수학자들은 벡터가 무엇인지에 대한 정의를 하지 않는다. 즉 합과 실수배의 공리만 만족하게 정의되어 있다면 벡터의 형태가 화살표이든 함수이든 숫자의 리스트이든 신경 쓰지 않는 것이다.

$\pi \pi \pi$



3



$$\left\{ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\} \right\}$$

즉 벡터가 무엇인가라는 질문은 숫자 3이 무엇인지를 물어보는 것과 같다. 모든 3과 관련된 추상적인 개념의 집합인 것이다.