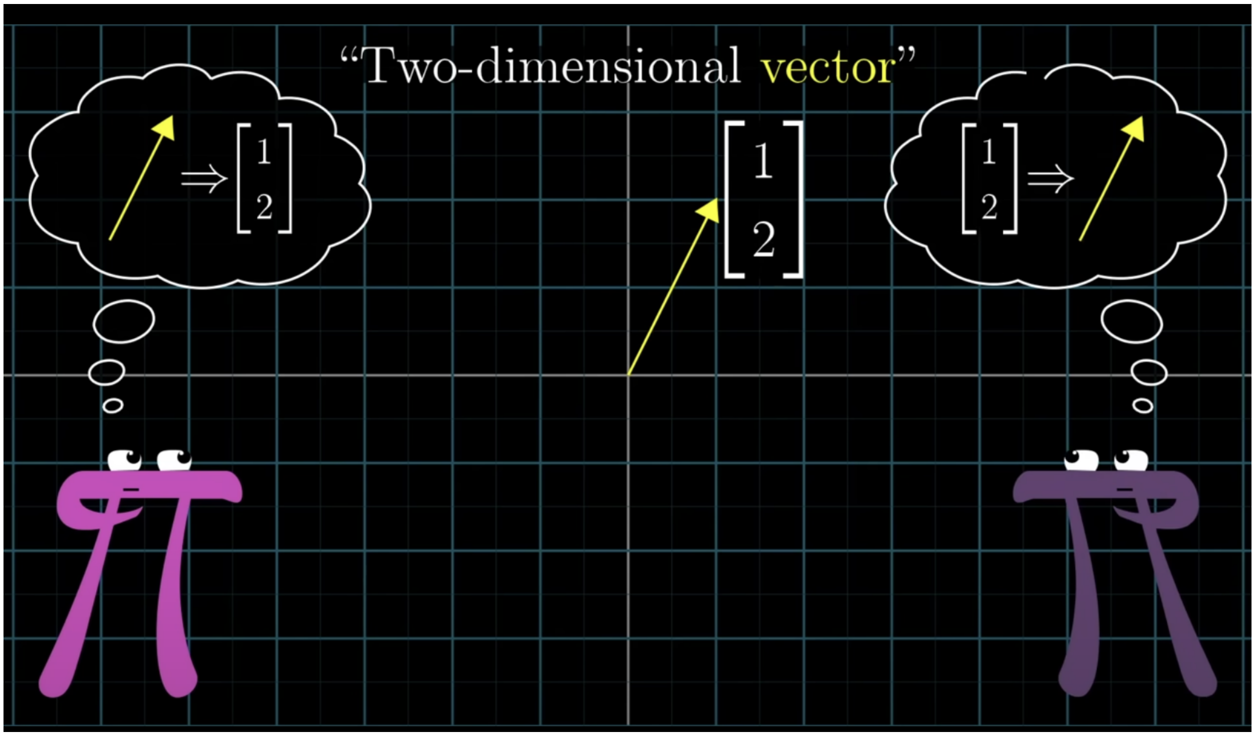
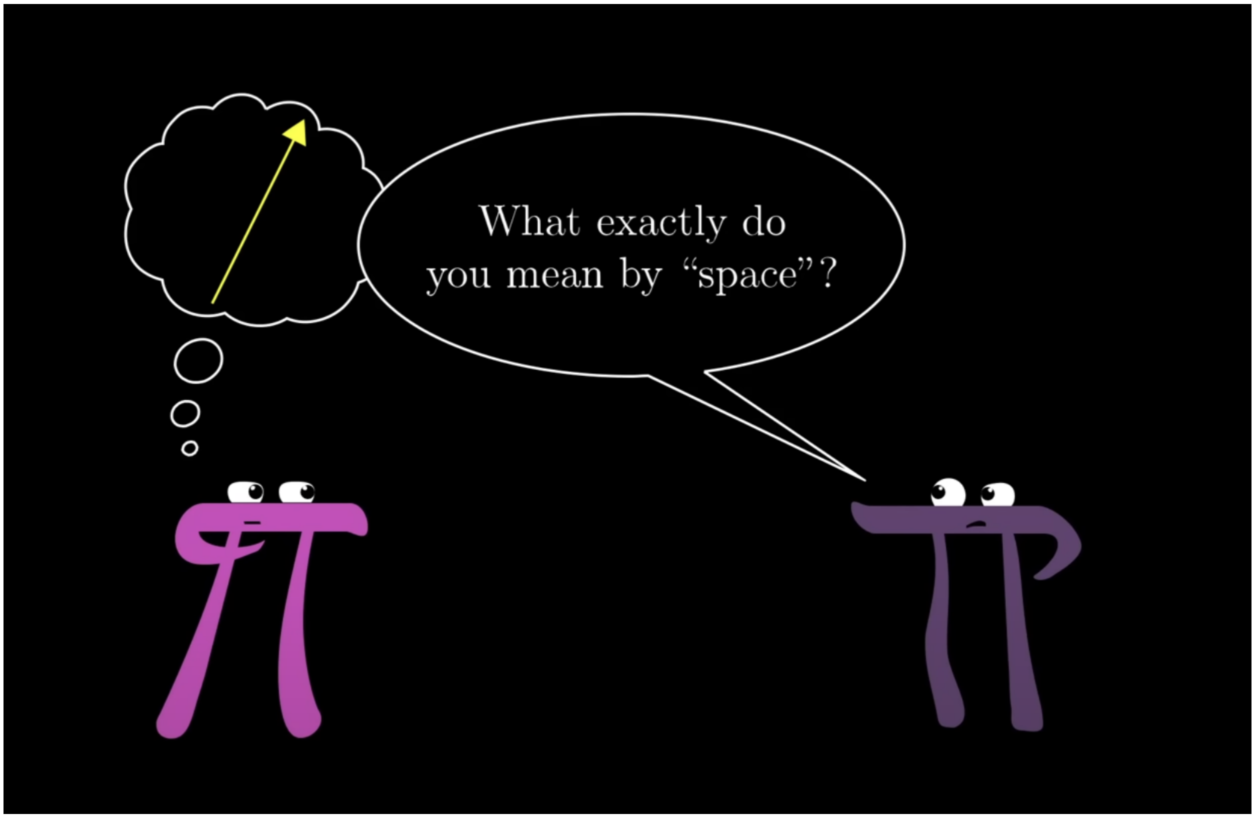
Abstract Vector Space

Vector

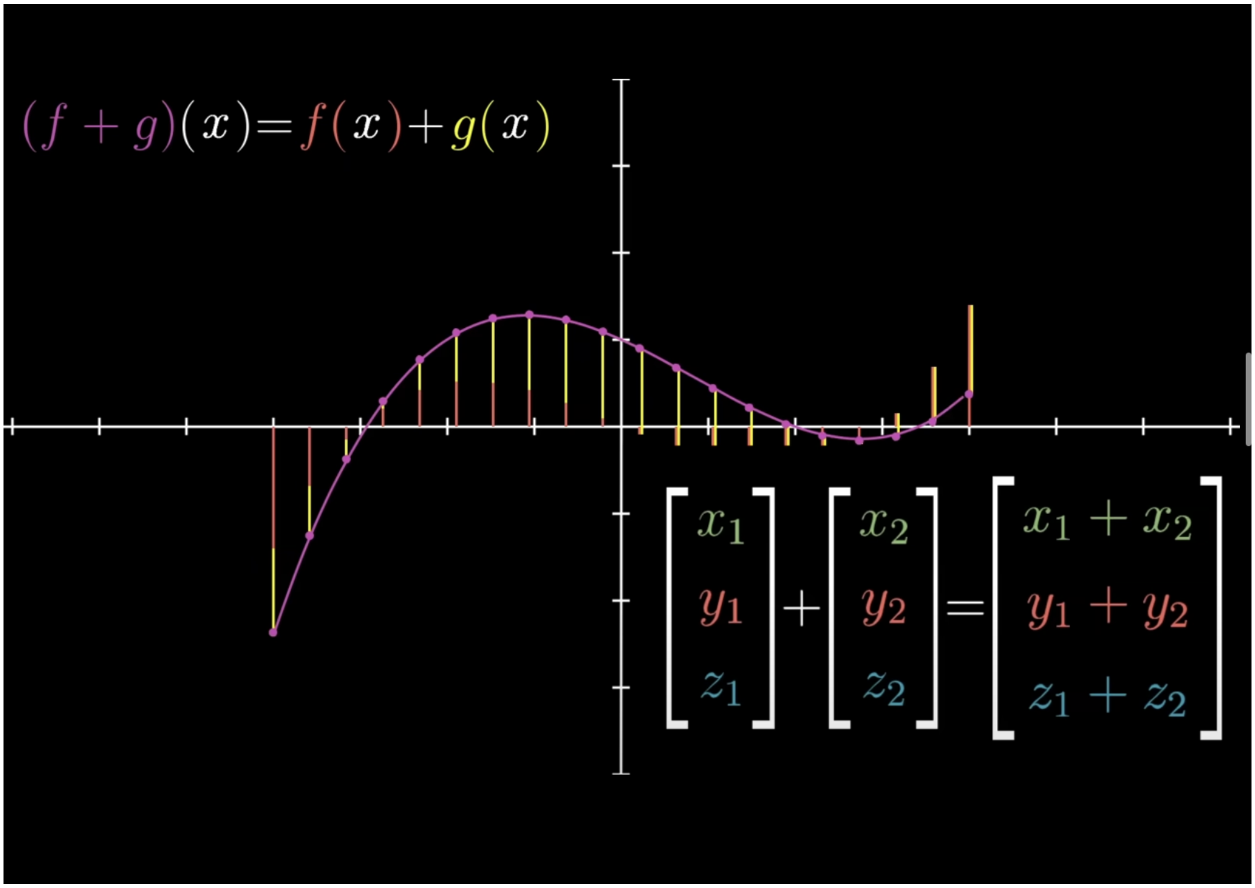


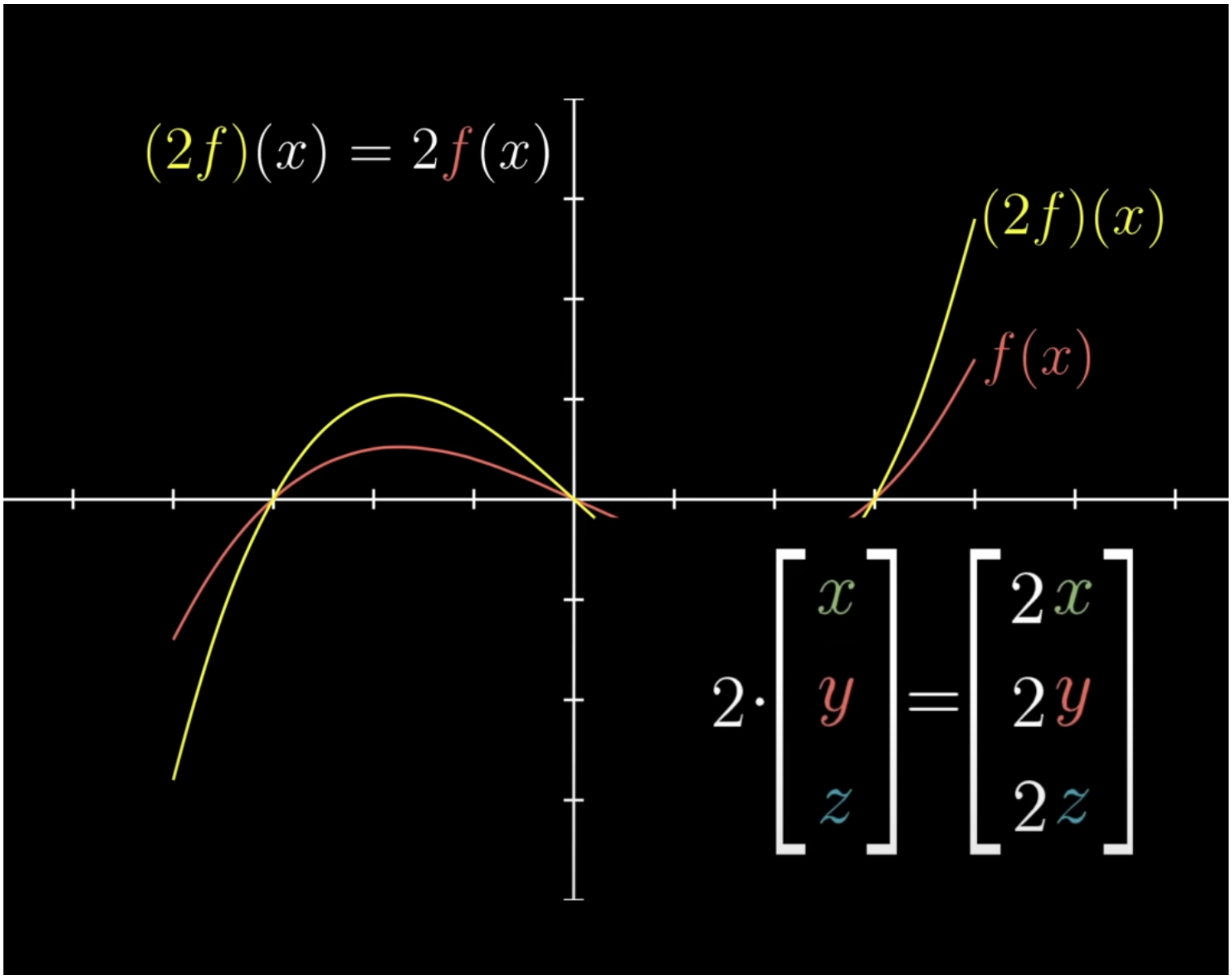
벡터는 어떻게 정의할 수 있을까? 수의 리스트인가 아니면 화살표인가?



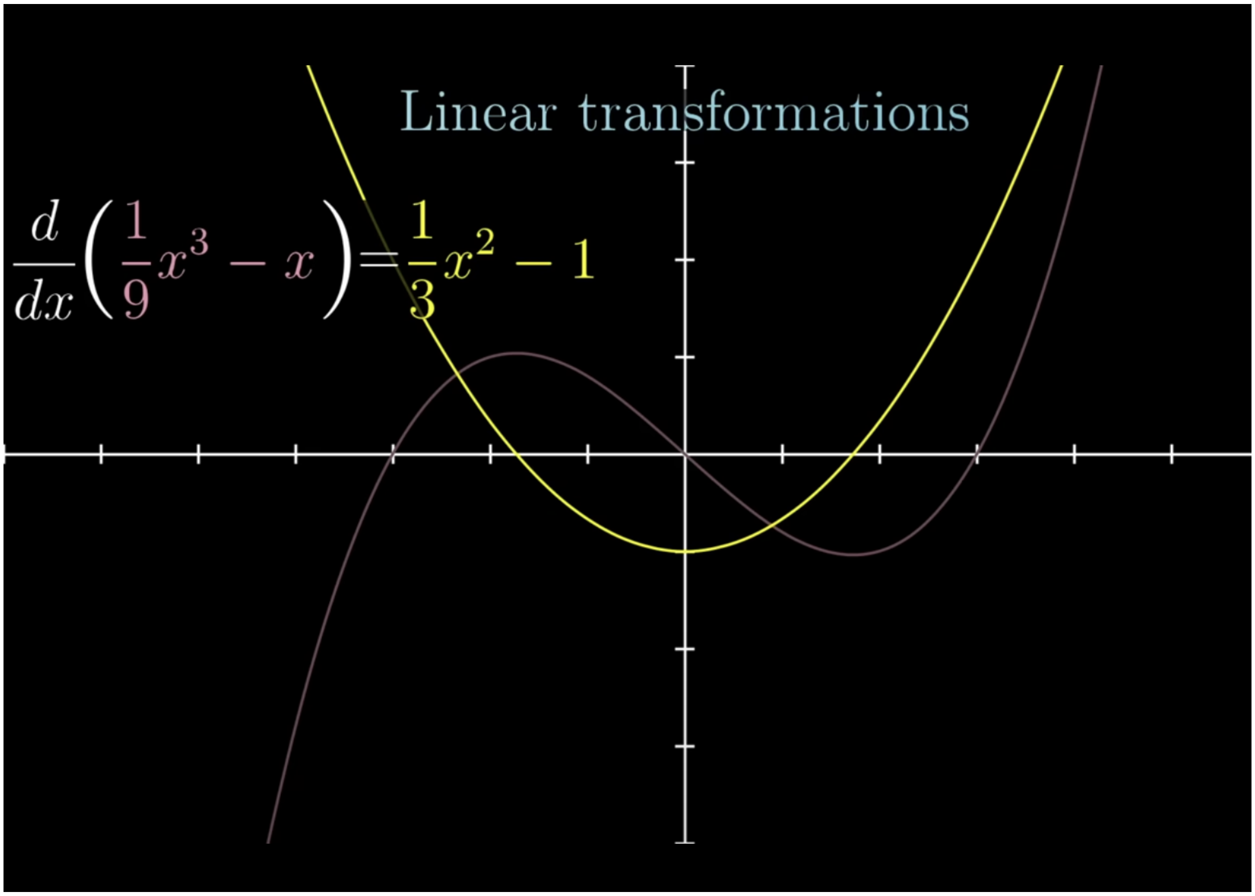
벡터는 공간적인 본질을 가지고 있는데, 이 '공간'(space or vector space)는 어떻게 정의할 수 있을까?

Function


$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$

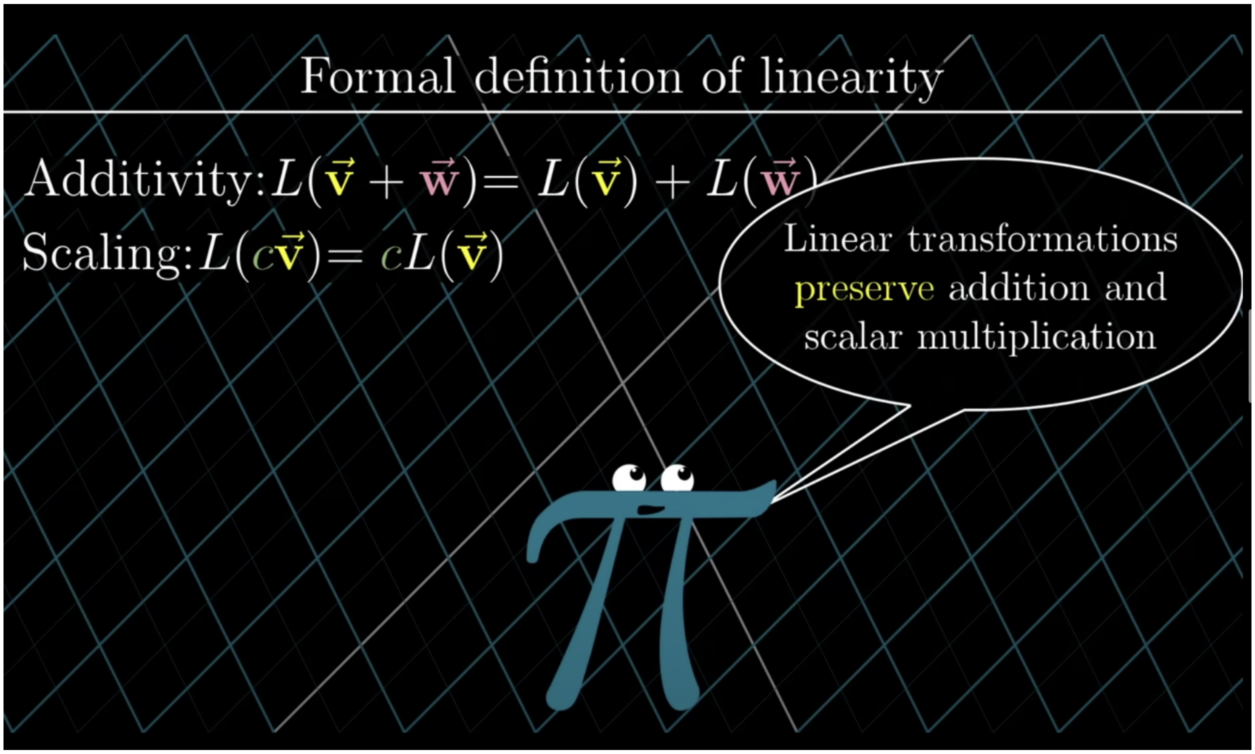


공간을 설명하기 위해서는 벡터 같은(vectorish) 값, 즉 함수를 설명해야 한다. 함수는 다른 종류의 벡터이다. 두 함수 f,g를 합쳐서 새로운 함수를 만드는 것은 f,g 함수의 합과 같다. 이는 벡터에서 같은 좌표계들을 더하는 것과 같다. 단지 무한한 좌표계를 더할 뿐이다.
마찬가지로 함수에 실수배를 하는 것도 벡터에 실수배를 하는것 과 같다. 단지 무한한 좌표계에 실수배를 곱할 뿐이다.

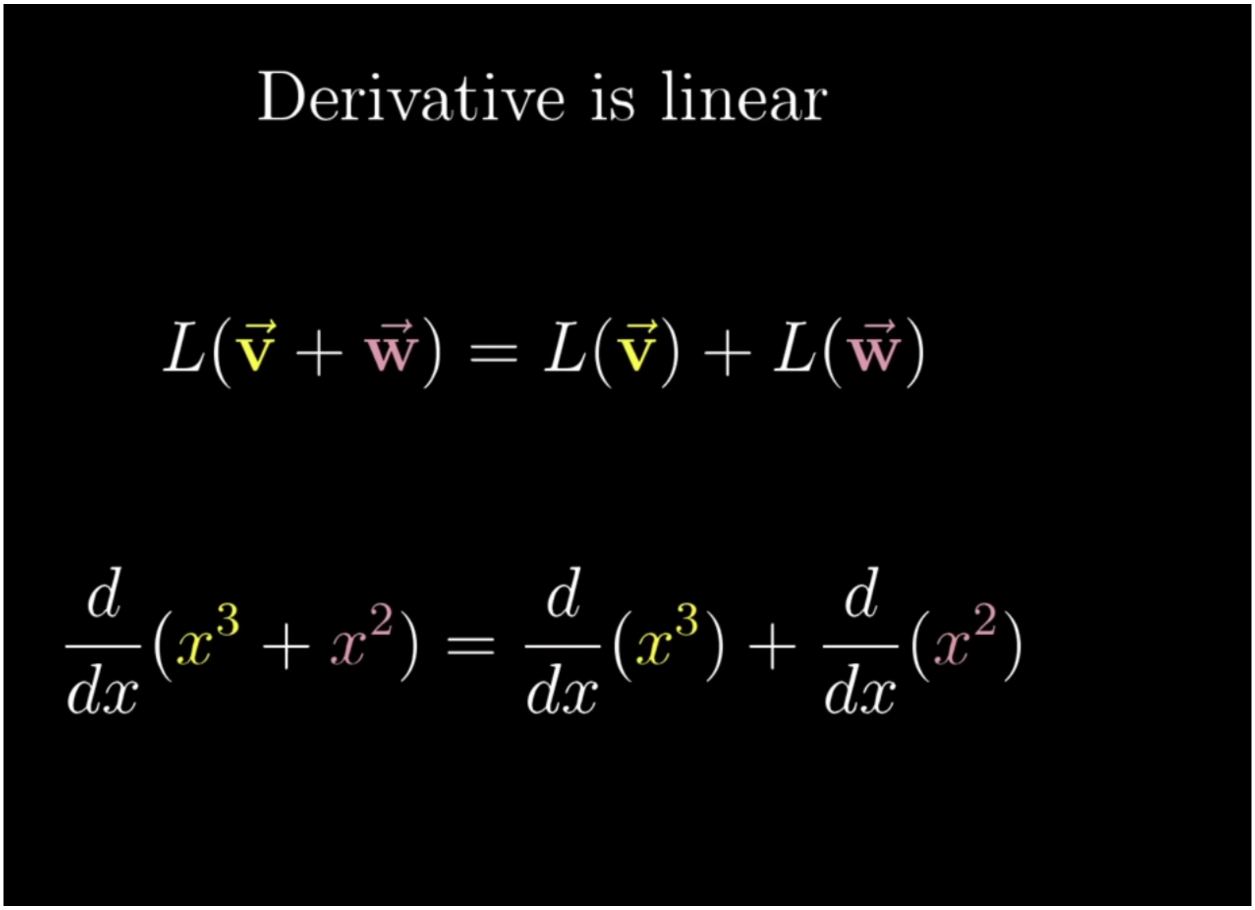


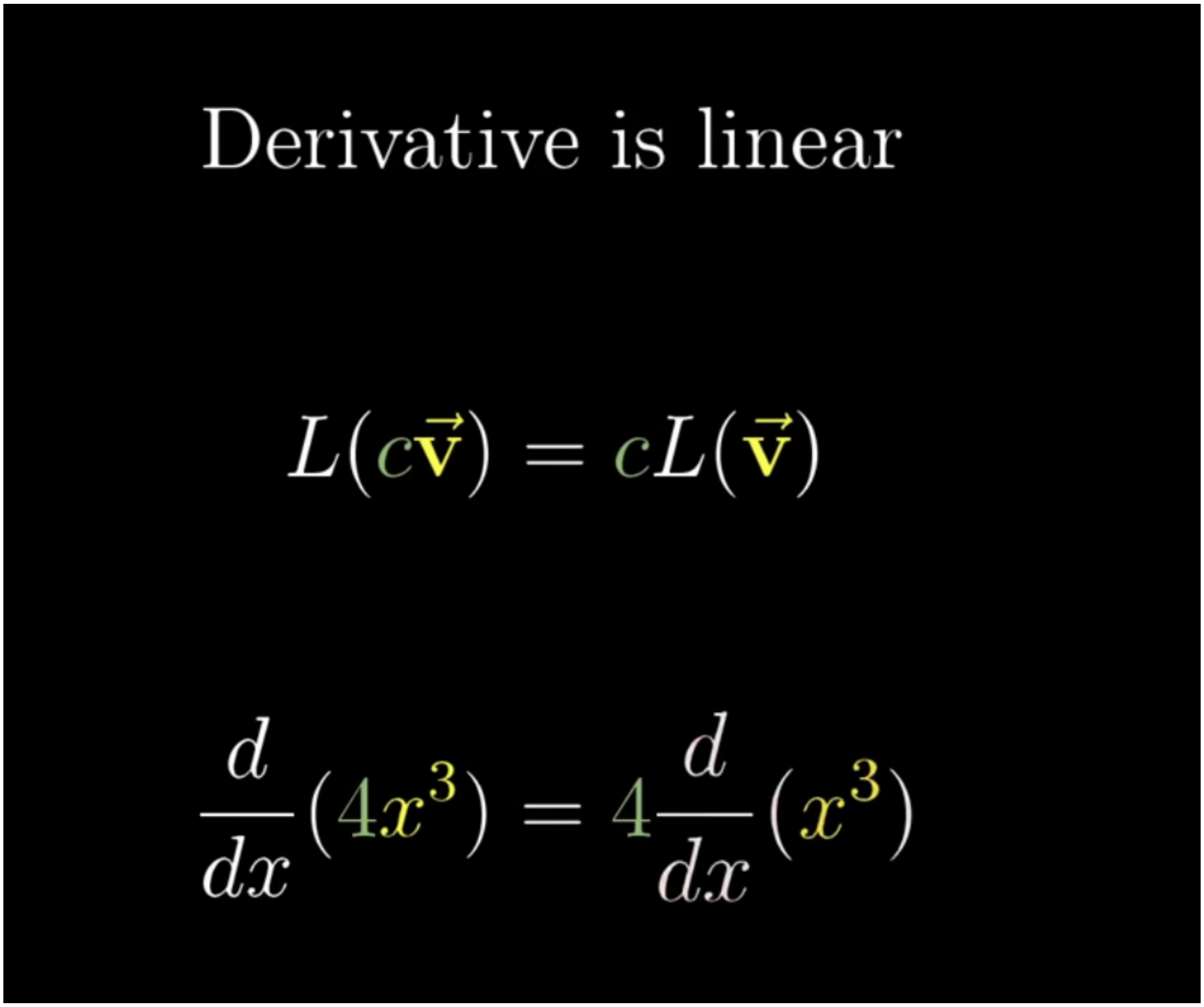
함수에도 선형 변환이 있는데, 대표적으로 도함수(미분)이다.

Formal Definition Of Linearity



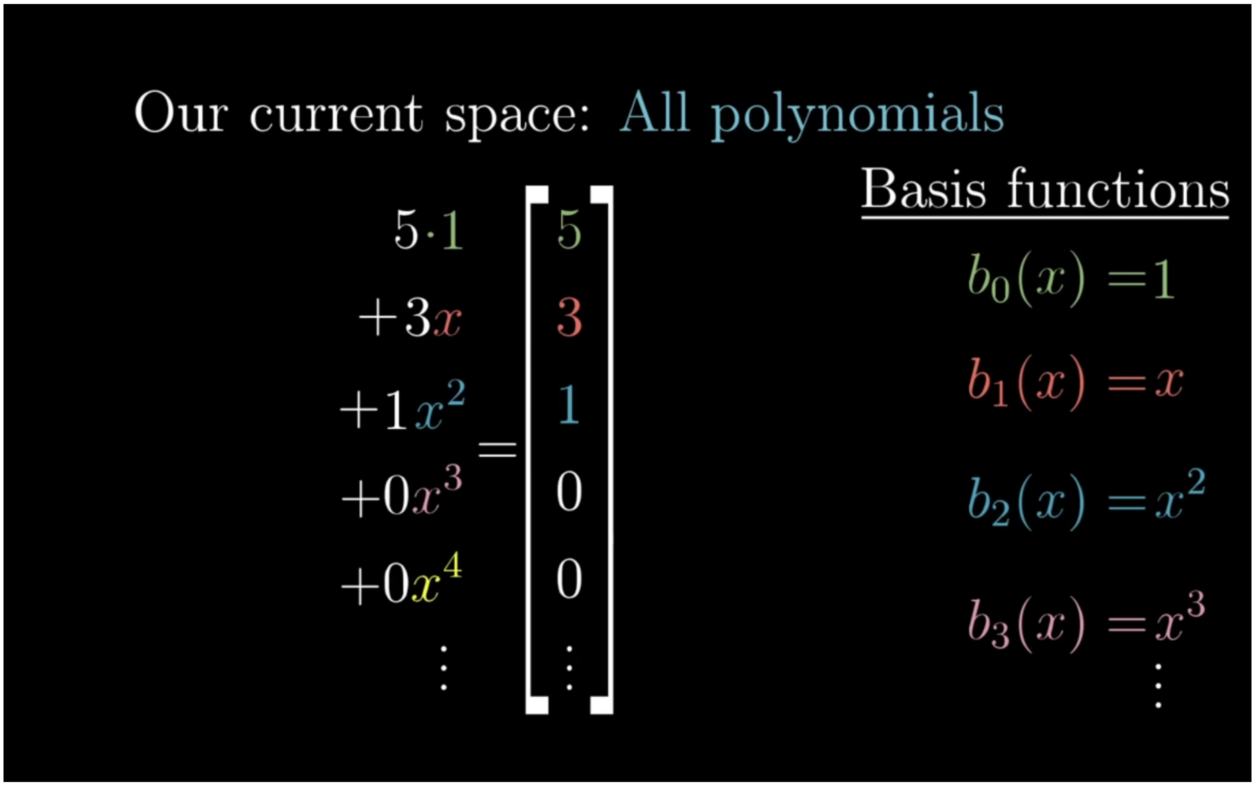
선형이라는 것의 의미를 살펴보면, 한 변환이 선형이면 합과 실수배의 성질을 만족한다.
즉 v,w를 더하고 변환을 한 것이랑 v를 변환한 값이랑 w를 변환한 값을 더한 거랑 같은 것이다.
마찬가지로 실수배를 한 값을 변환한 값은 변환후 실수배를 한 값이랑 같다.


Derivative is linear
$L(\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = L(\vec{\mathbf{v}}) + L(\vec{\mathbf{w}})$
$\frac{d}{dx}(x^3 + x^2) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x^2)$

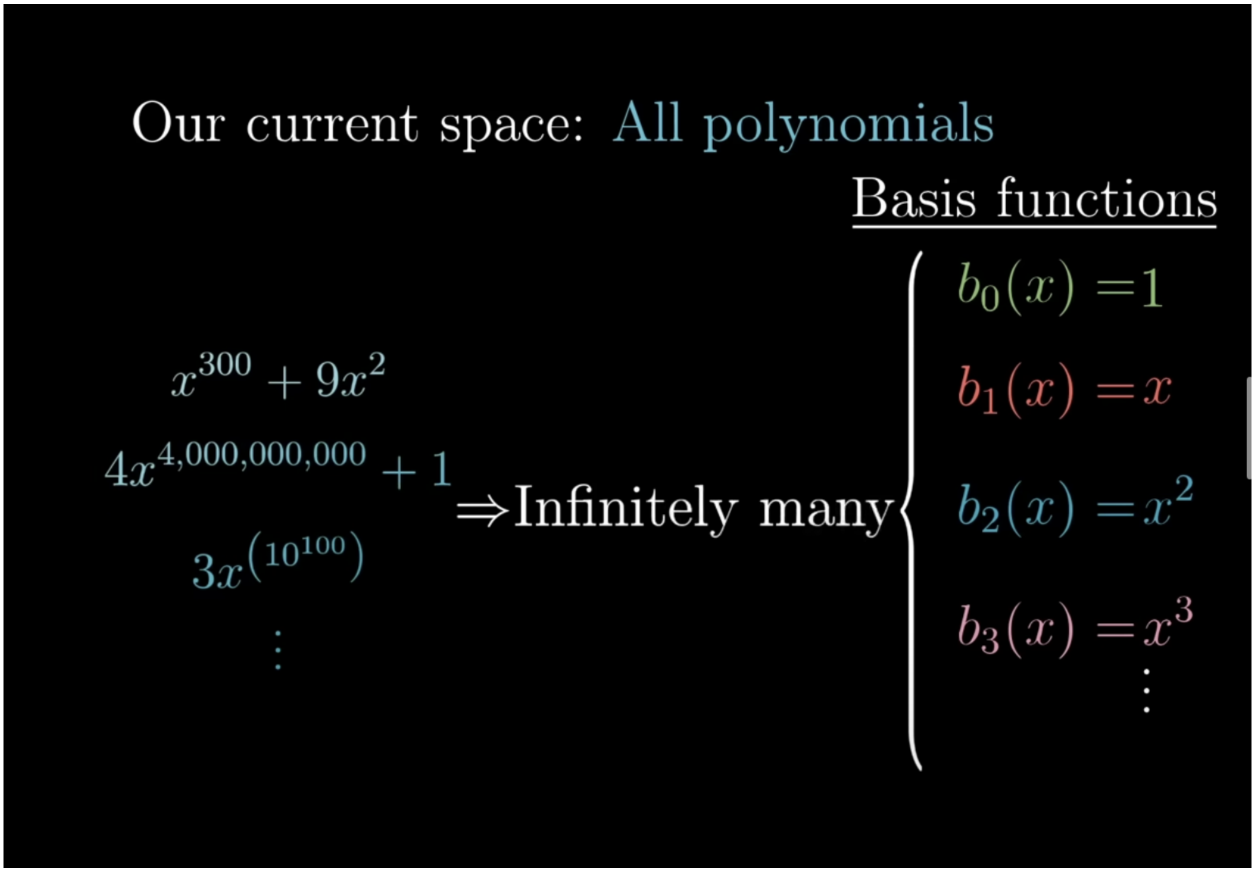


도함수가 선형변환이기 때문에 위 원칙이 적용된다.

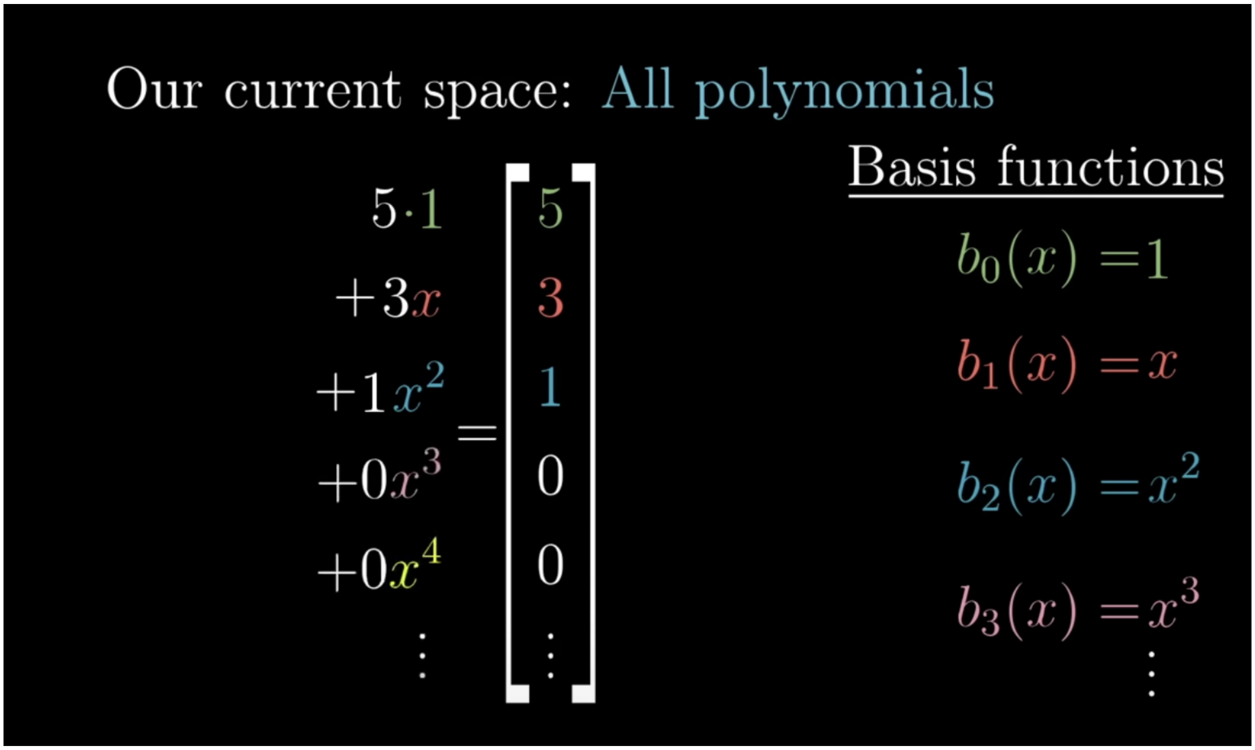
그러면 미분을 행렬로 나타내면 어떻게 될까?

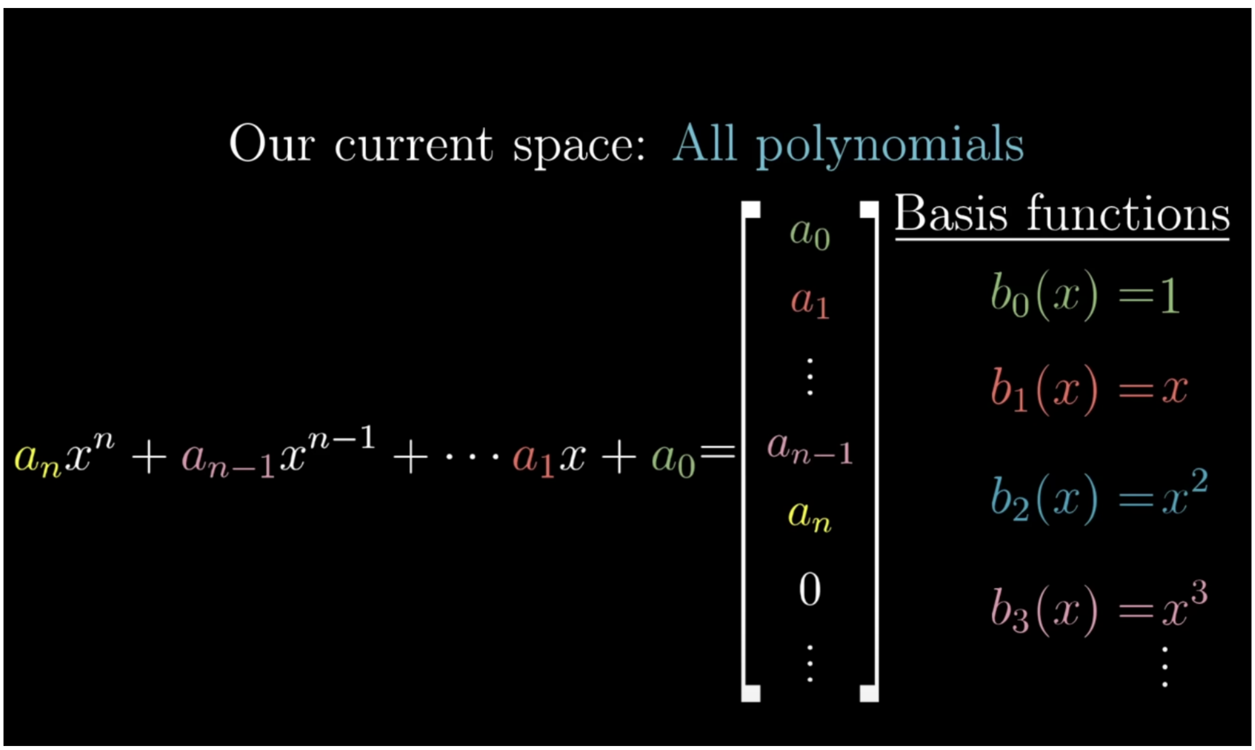


위와 같이 x의 다항식을 x의 제곱들로 기저 함수를 정해보자. 이 x제곱들로 이루어진 기저함수들은 벡터에서 i-hat, j-hat, k-hat과 역할 이 같다.

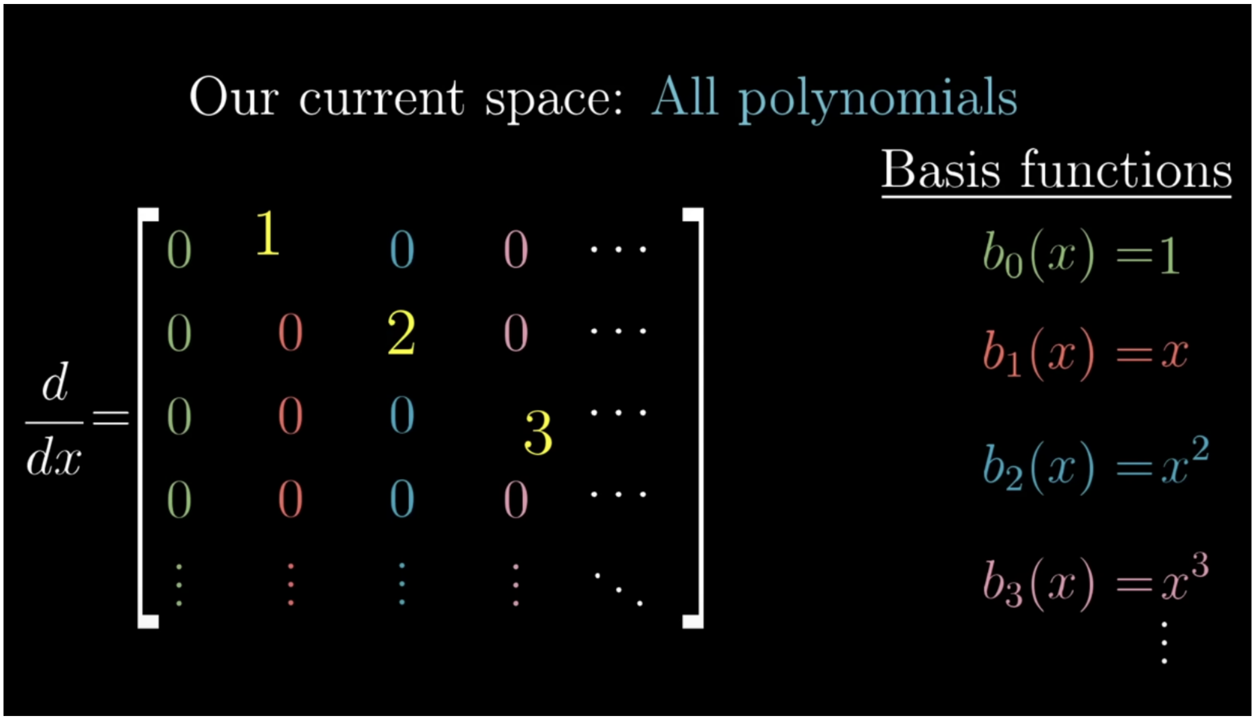


다항식이 임의의 최고차항을 가지므로 이런 기저 함수는 무한히 많다.

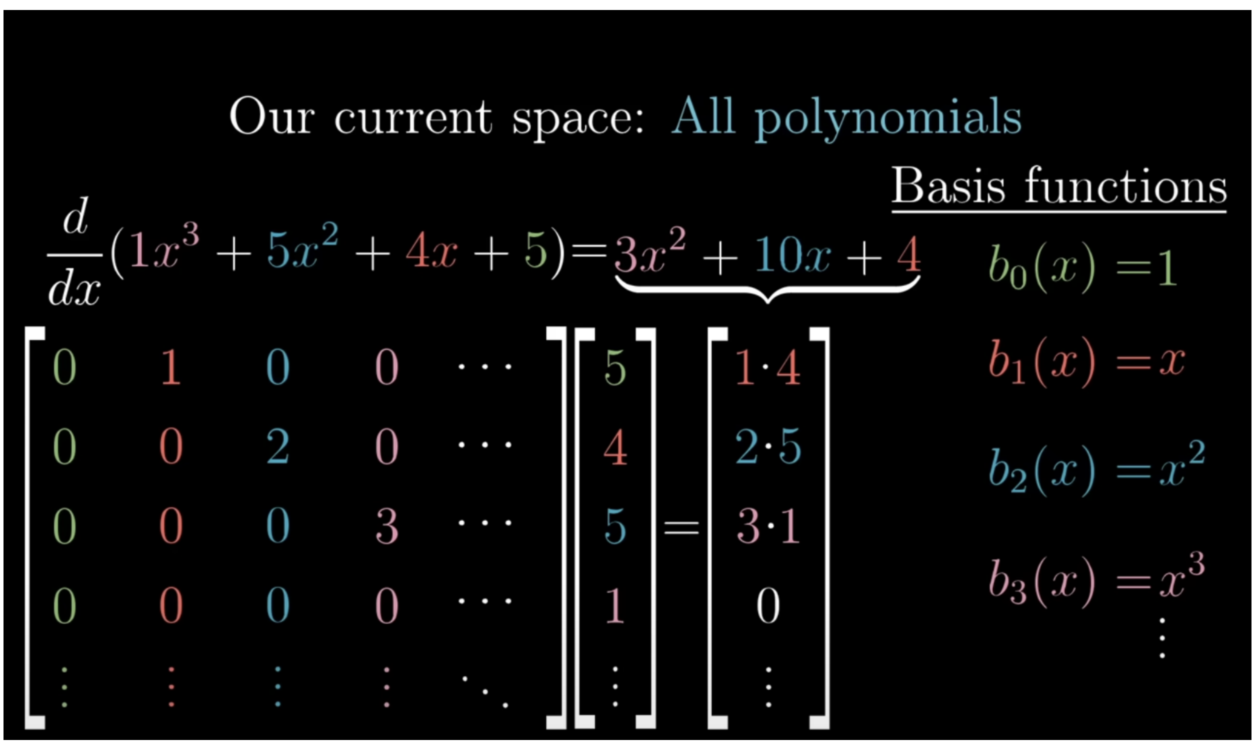




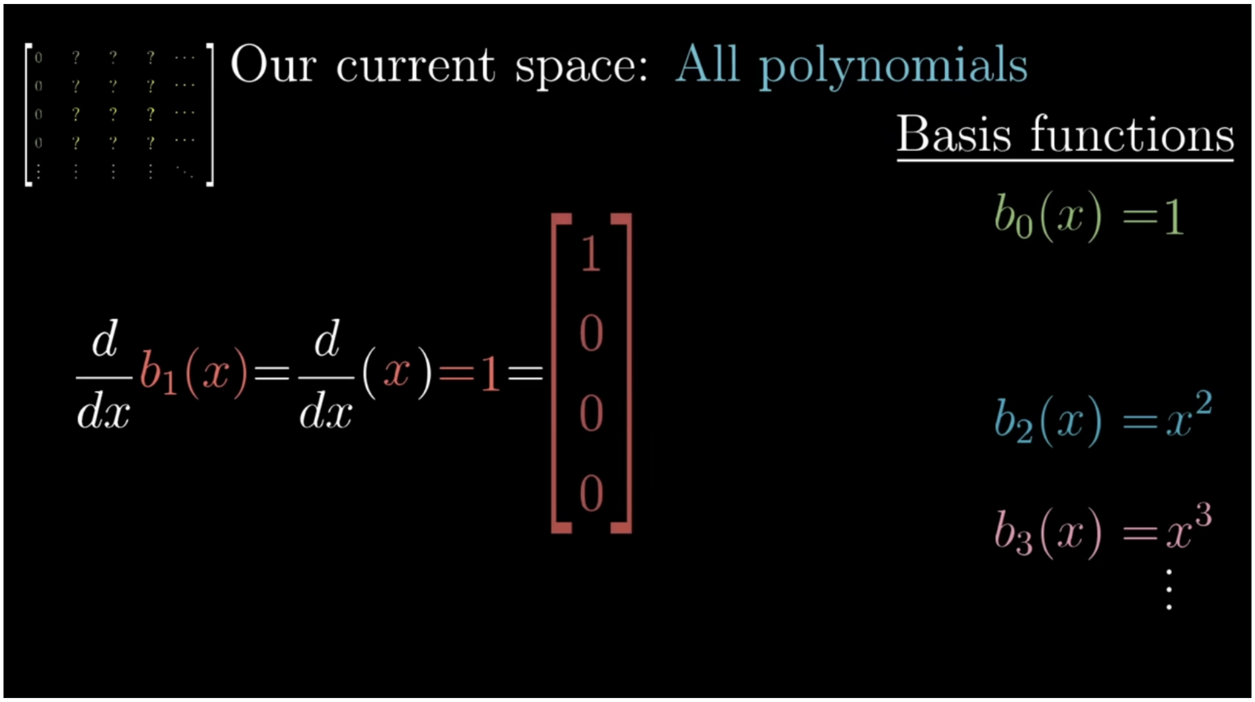
즉 다항식을 무한한 좌표를 가진 벡터로 생각해 보는 것이다.

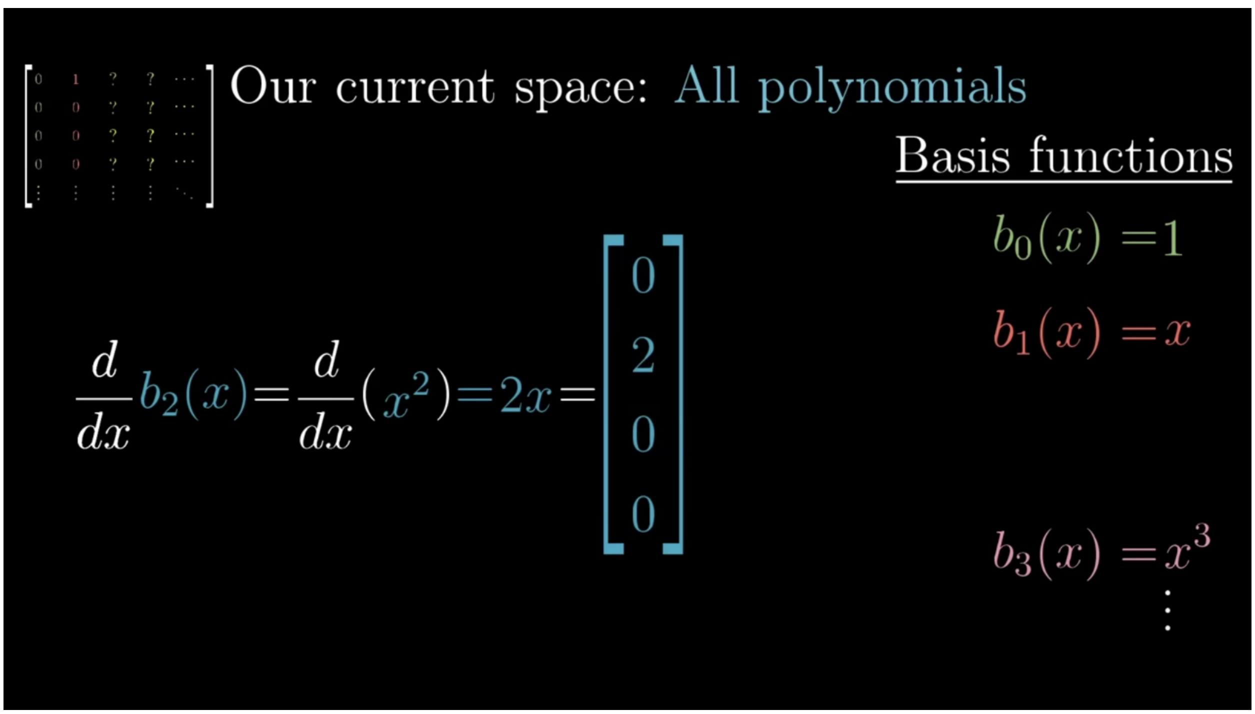


이런 좌표계에서 미분은 0이 무한히 많지만 대각선으로 양수가 위치한 행렬로 나타낼 수 있다.

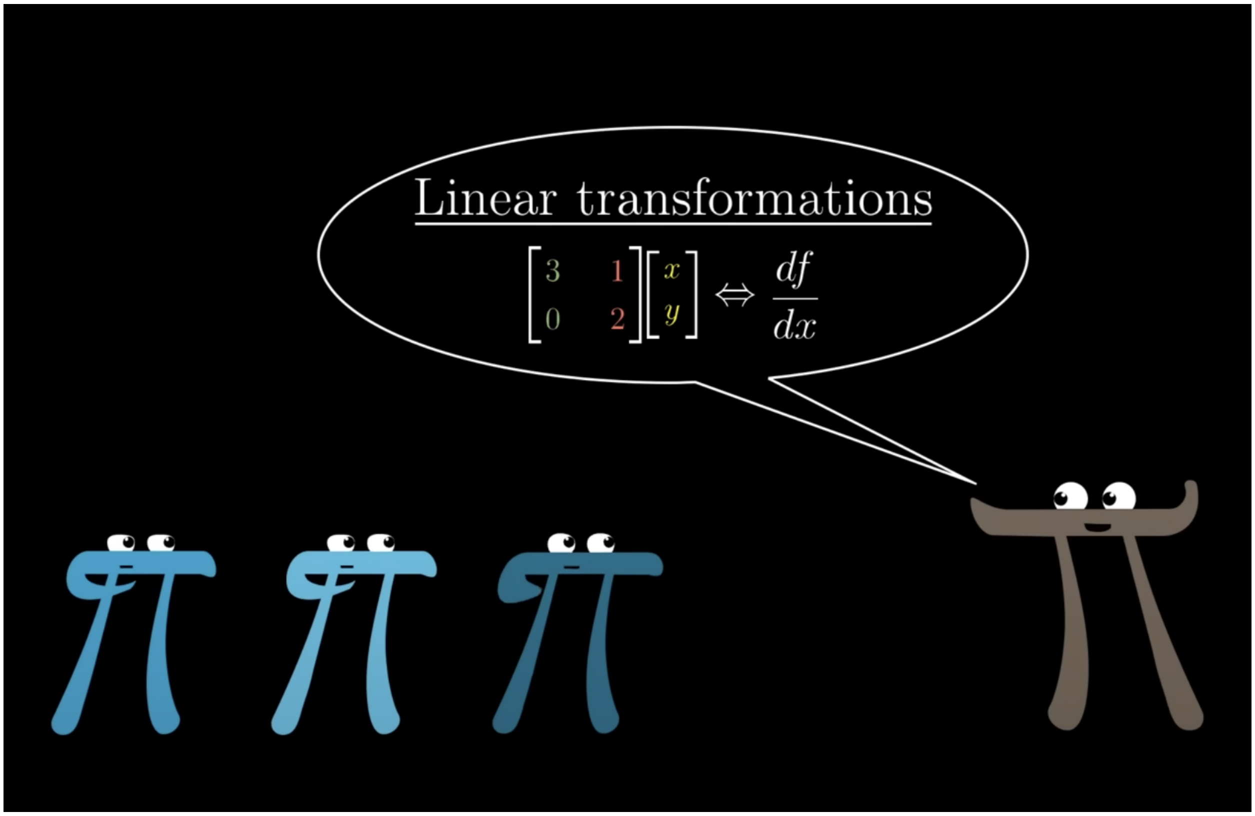


이 미분 행렬을 이용해서 실제 다항식을 미분하면 위와 같이 정답을 얻을 수 있다.



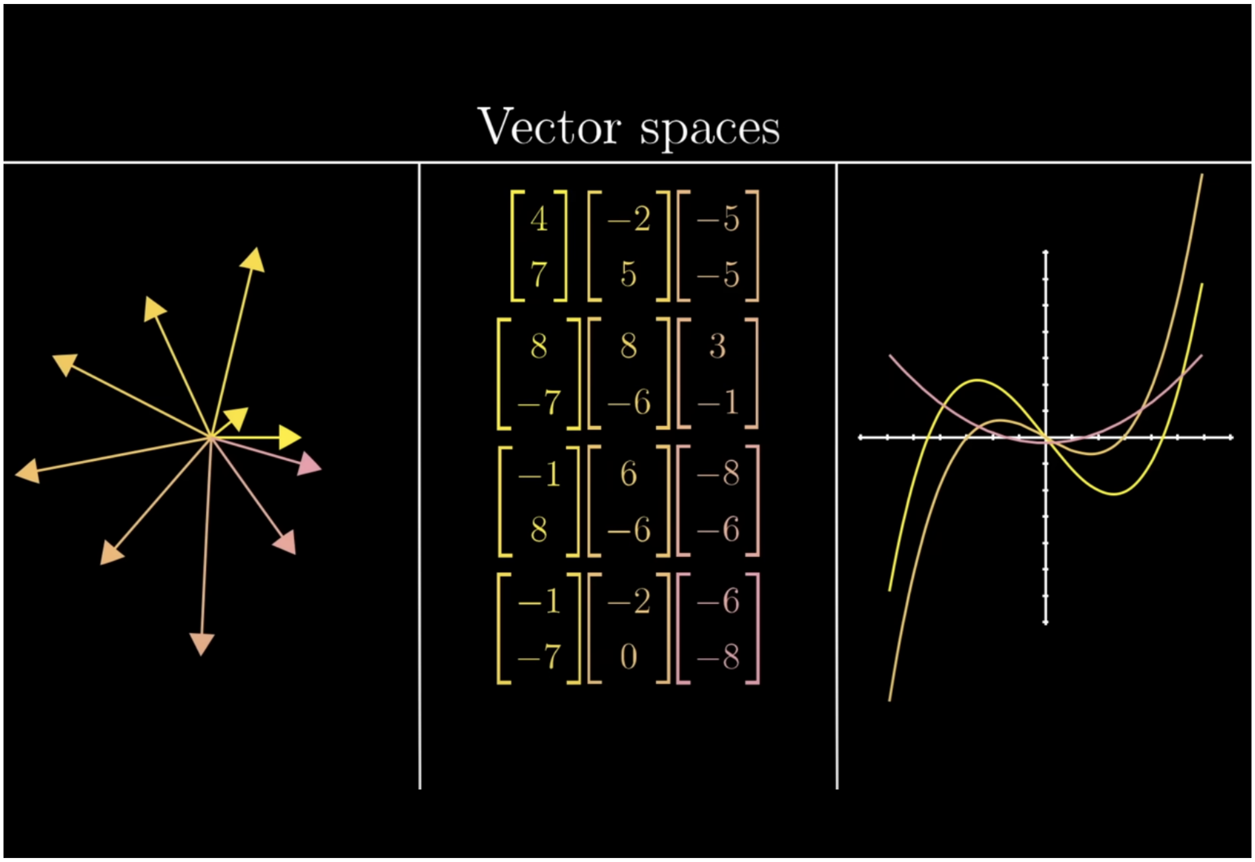


저 미분행렬을 구하고 싶다면 각 기저함수의 항을 미분해서 나타난 벡터를 행렬의 각 컬럼에 위치시키면 된다.

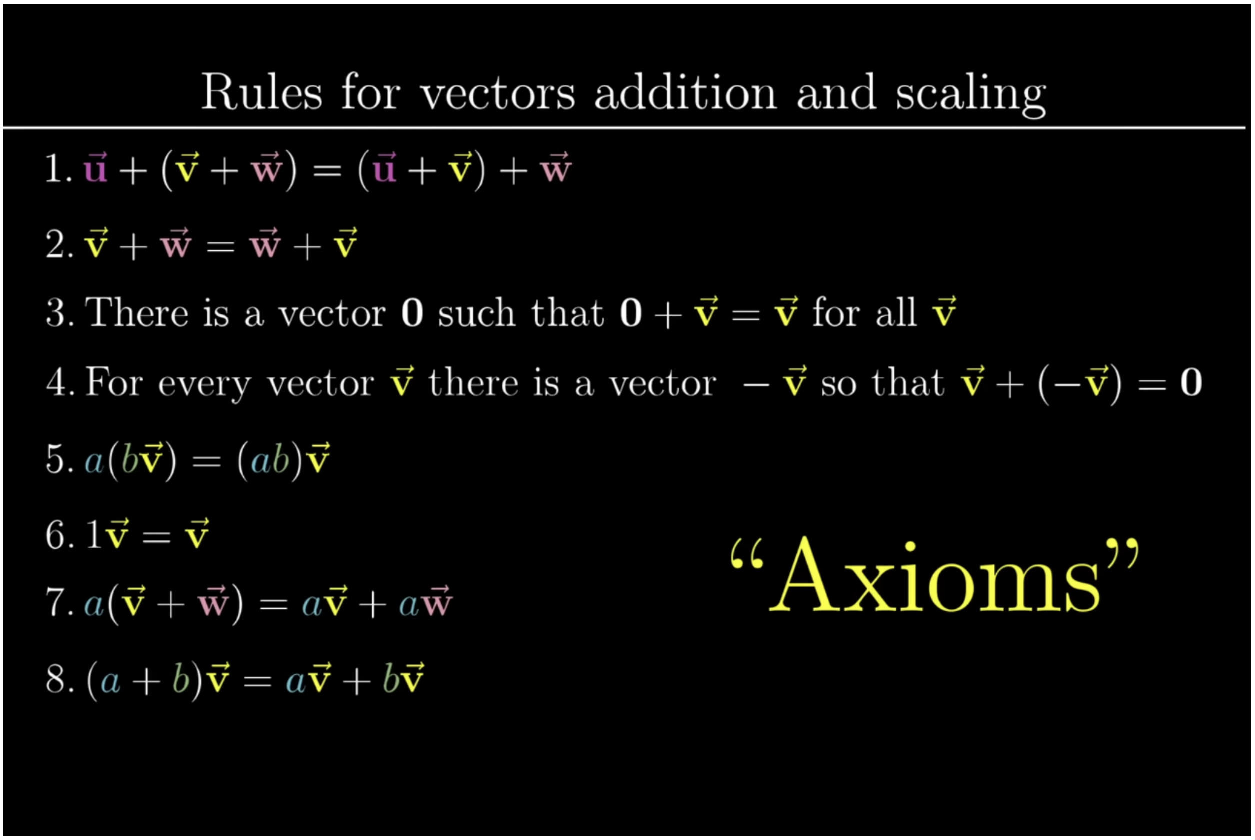


즉 도함수로 미분을 하는 것과 행렬*벡터 연산은 전혀 다른 것으로 생각되었지만, 사실 같은 가족인 것이다.

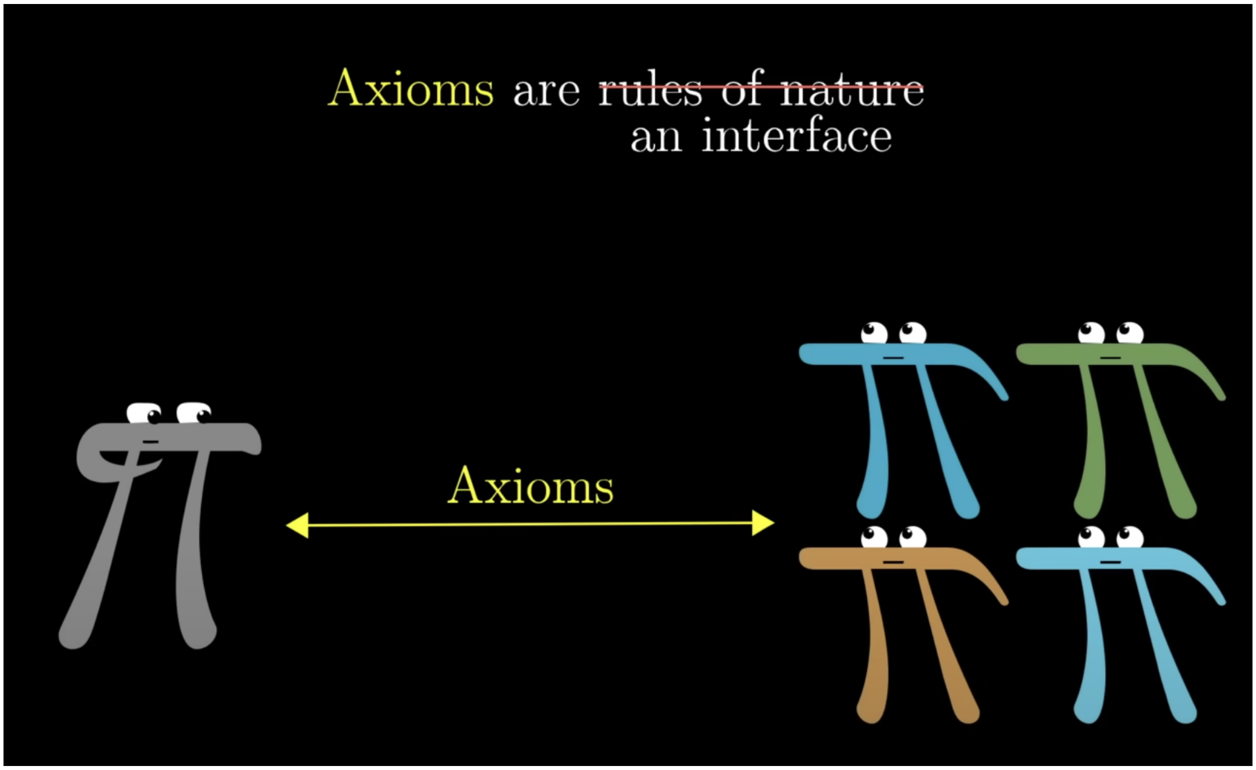
Axioms Of Vector Space



화살표나 숫자의 리스트나 함수 같은 ‘벡터스러운’(vector-ish)한 것들을 모두 vector spaces (벡터 공간) 이라고 부른다.

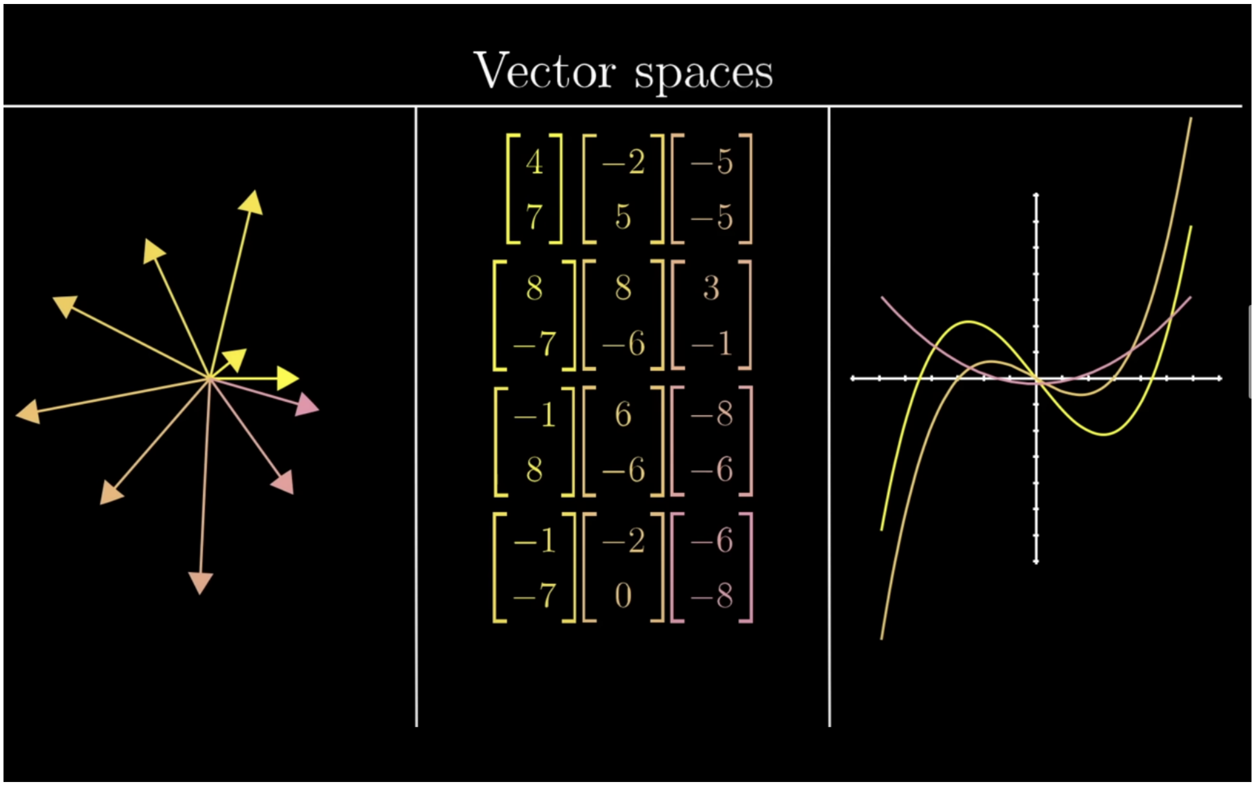


현대 선형대수 이론에서는 어떤 벡터 공간에서든 적용되어야 하는 8개의 공리가 있다. 이는 위의 합과 실수배에서 파생된 체크리스트에 불과하긴 하다.

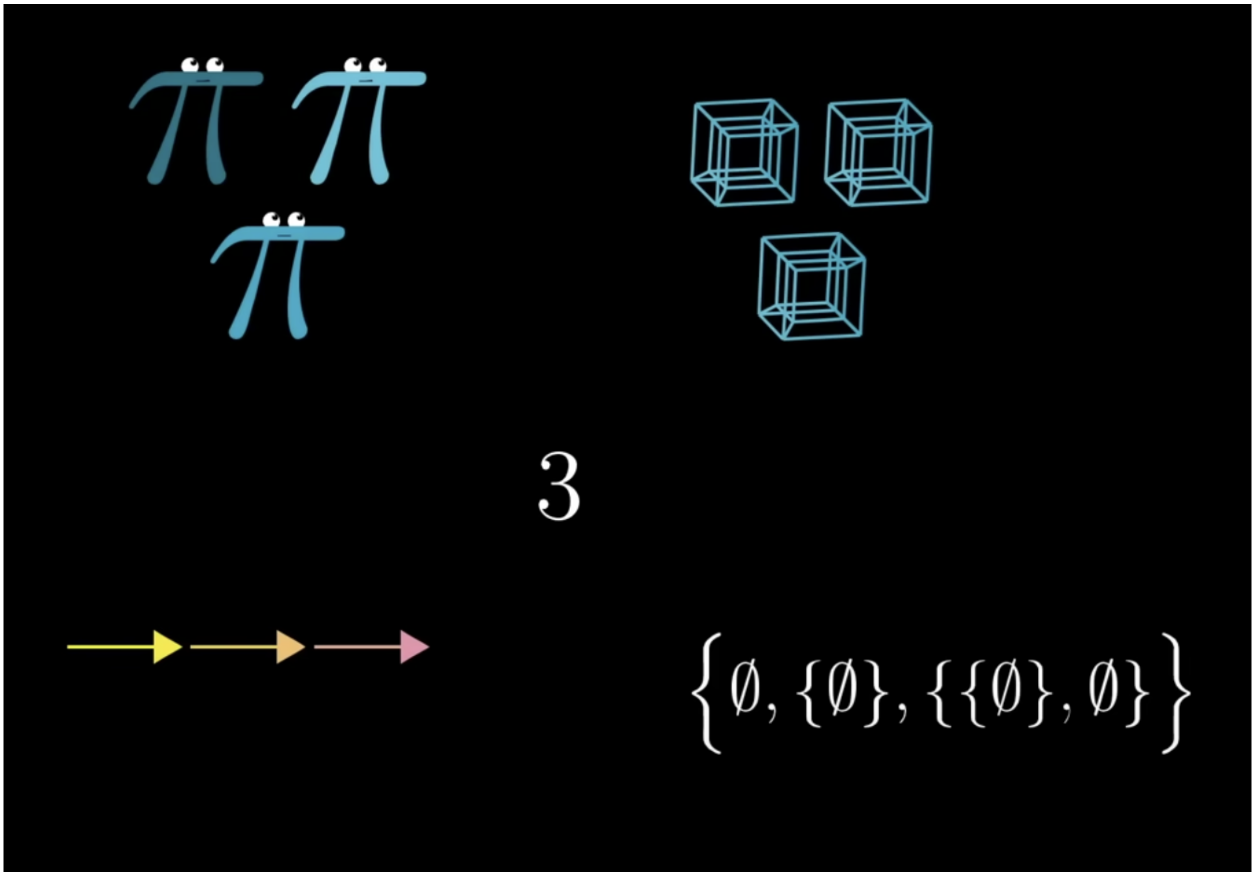


즉 이 공리들은 자연의 진리라기 보다는 같은 벡터공간에서 소통해야하는 수학자들간의 인터페이스와 같은 것이다. 따라서 어떤 수학자의 정의가 공리를 만족한다면 선형대수의 결론을 적용할 수 있는 것이다. 다시 말해 모든 결론은 상당히 추상적으로, 공리를 만족하는 지의 기준에서 살펴보는 것이다.

Conclusion



위의 결론으로 현대의 선형대수학에서 수학자들은 벡터가 무엇인지에 대한 정의를 하지 않는다. 즉 합과 실수배의 공리만 만족하게 정의되어 있다면 벡터의 형태가 화살표이든 함수이든 숫자의 리스트이든 신경 쓰지 않는 것이다.



즉 벡터가 무엇인가라는 질문은 숫자 3이 무엇인지를 물어보는 것과 같다. 모든 3과 관련된 추상적인 개념의 집합인 것이다.