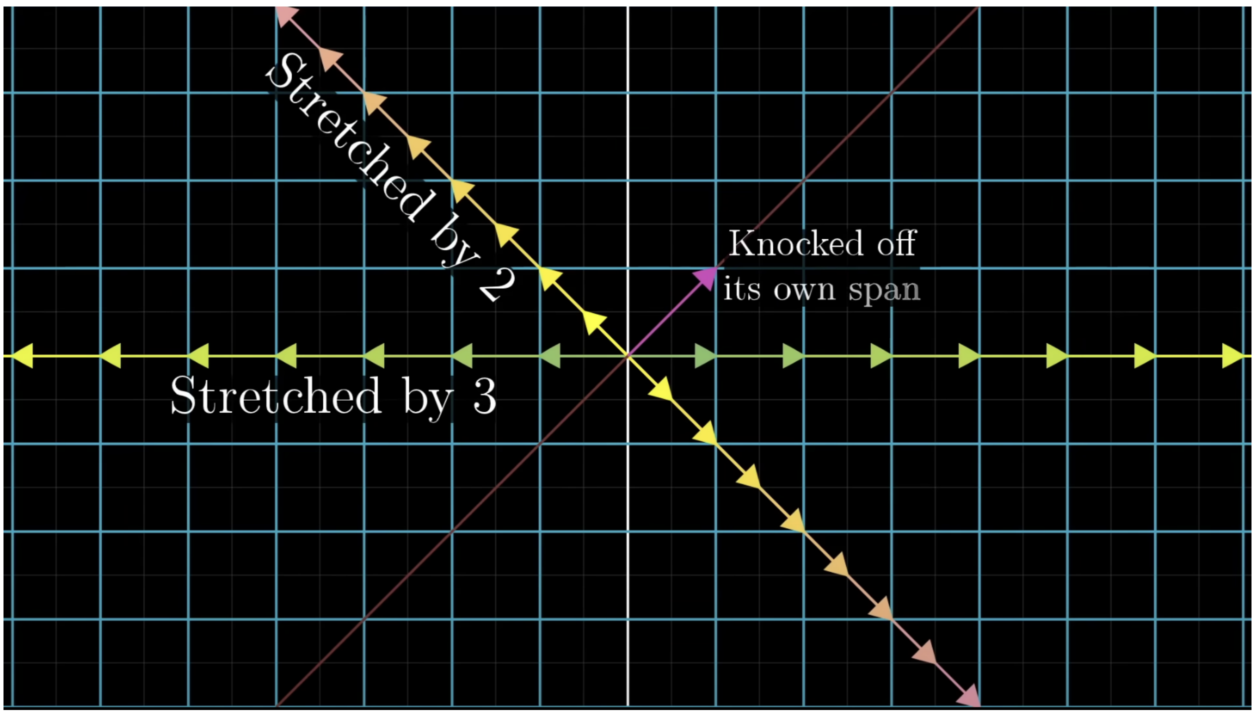
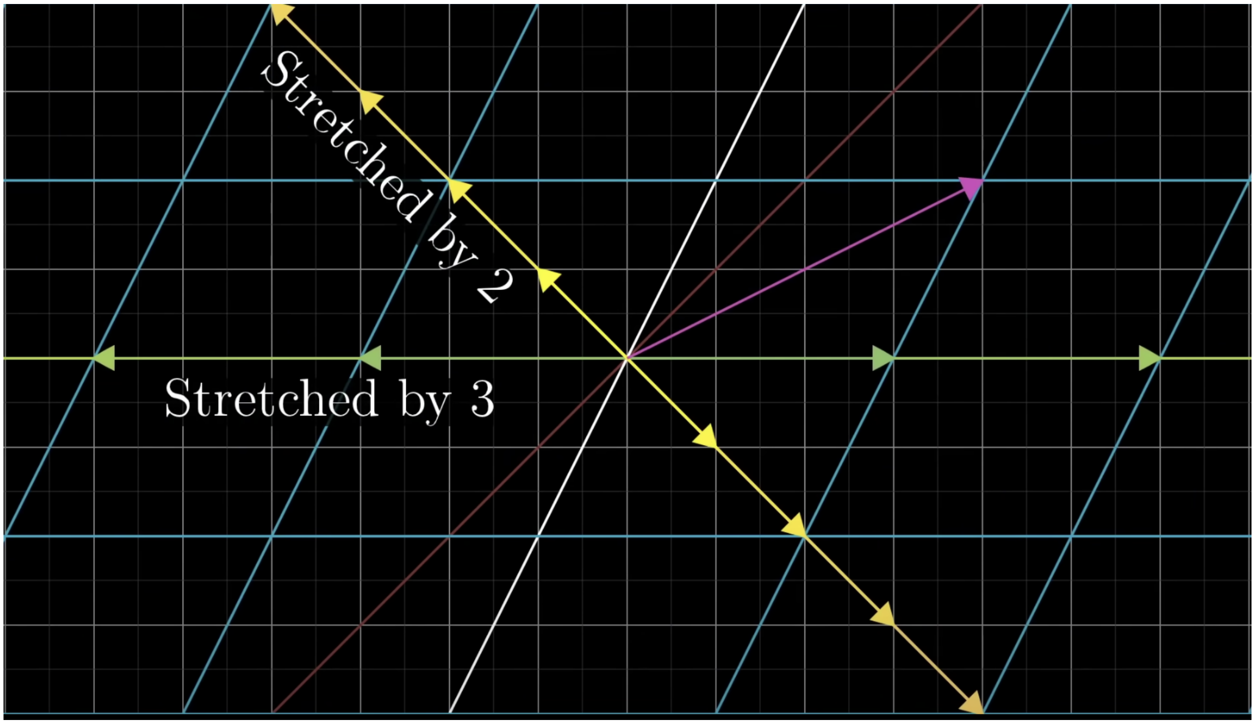
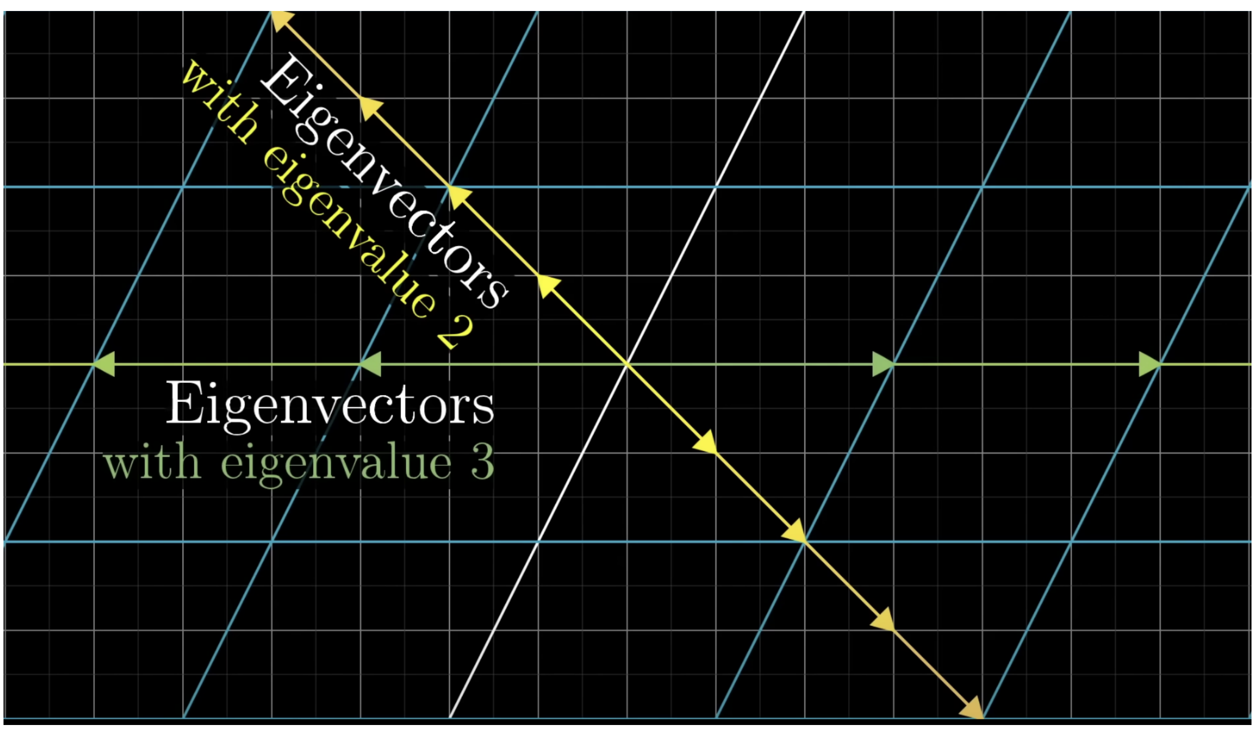
Eigenvectors,Eigenvalues and Eigenbasis

Basics

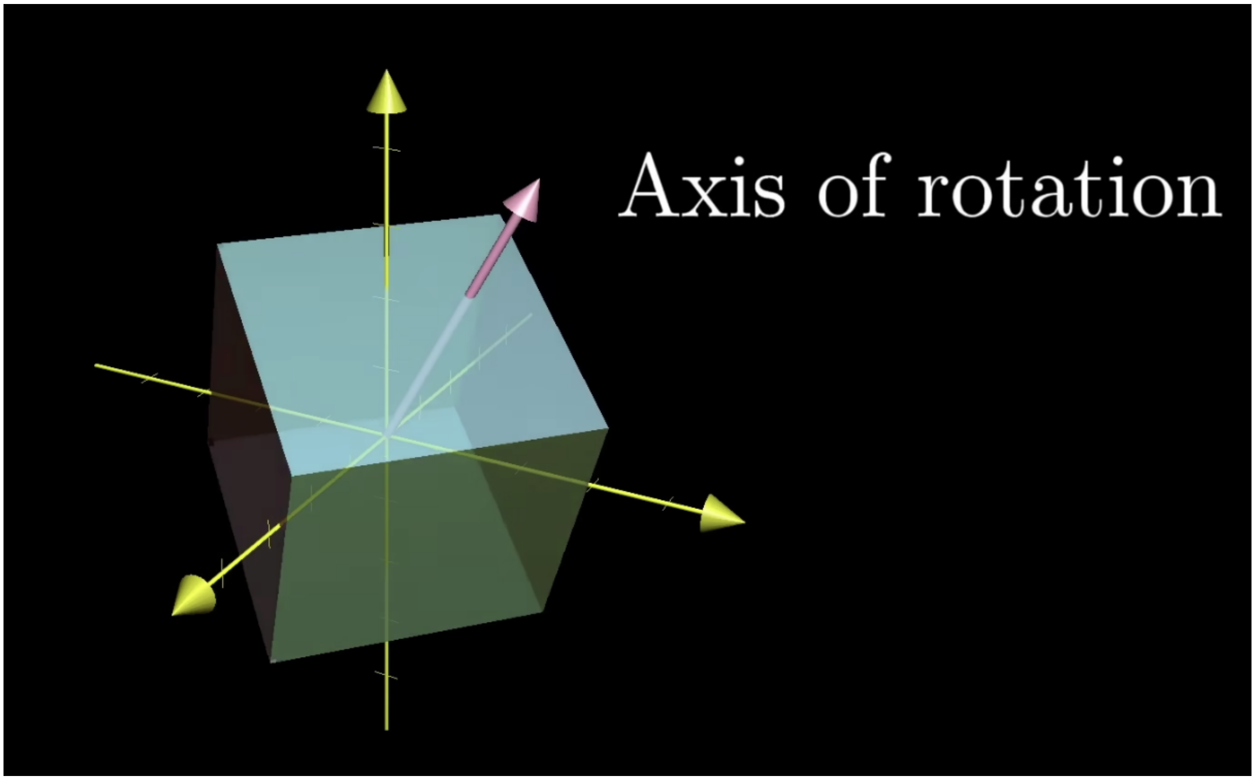




Eigenvectors(고유벡터)는 선형 변환이 일어난 이후에도 Span을 유지하는 벡터들이다. 위 그림의 경우 [[3,0][2,1]] 선형 변환이 일어났을 경우 Span이 유지되는 두 개의 벡터를 보여준다. 이 벡터 2개가 고유벡터이다.

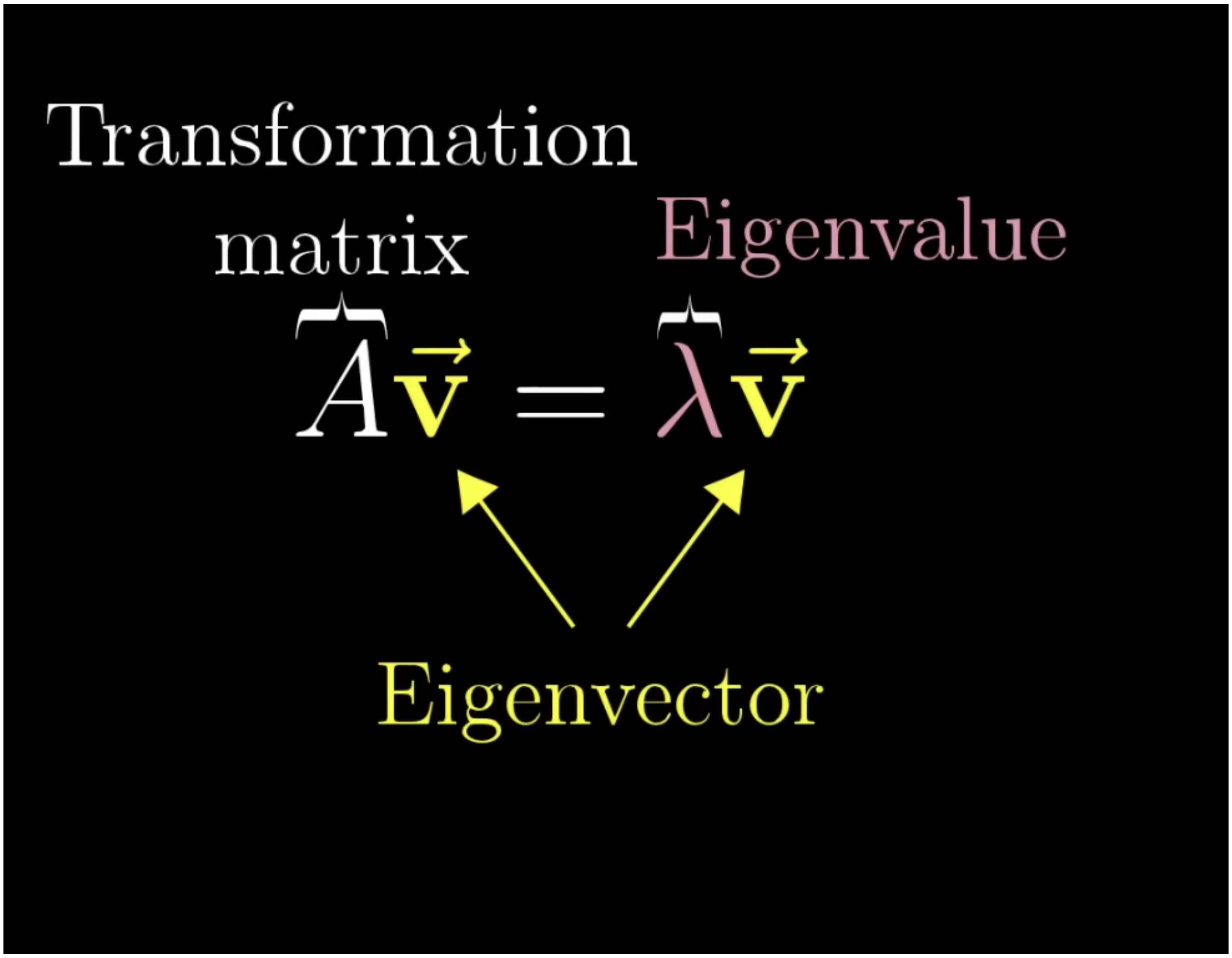


이런 고유 벡터는 Eigenvalues라 불리는 고유값을 가지고 있고 이는 scalar 처럼 변환 도중 늘어나고 줄어드는 정도의 배수에 불과하다. (물론 음수도 가능하다)

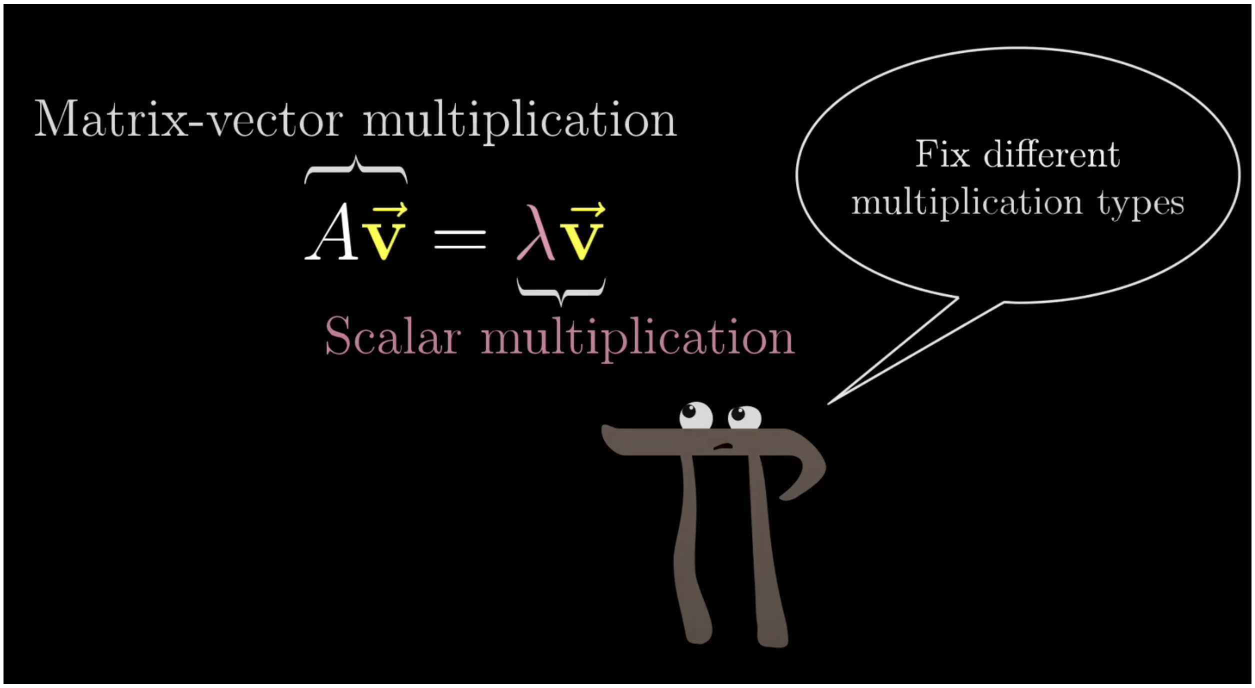


3차원 회전을 생각해보자. 이때 고유 벡터를 찾을 수 있다면 고유벡터는 곧 회전축이다.

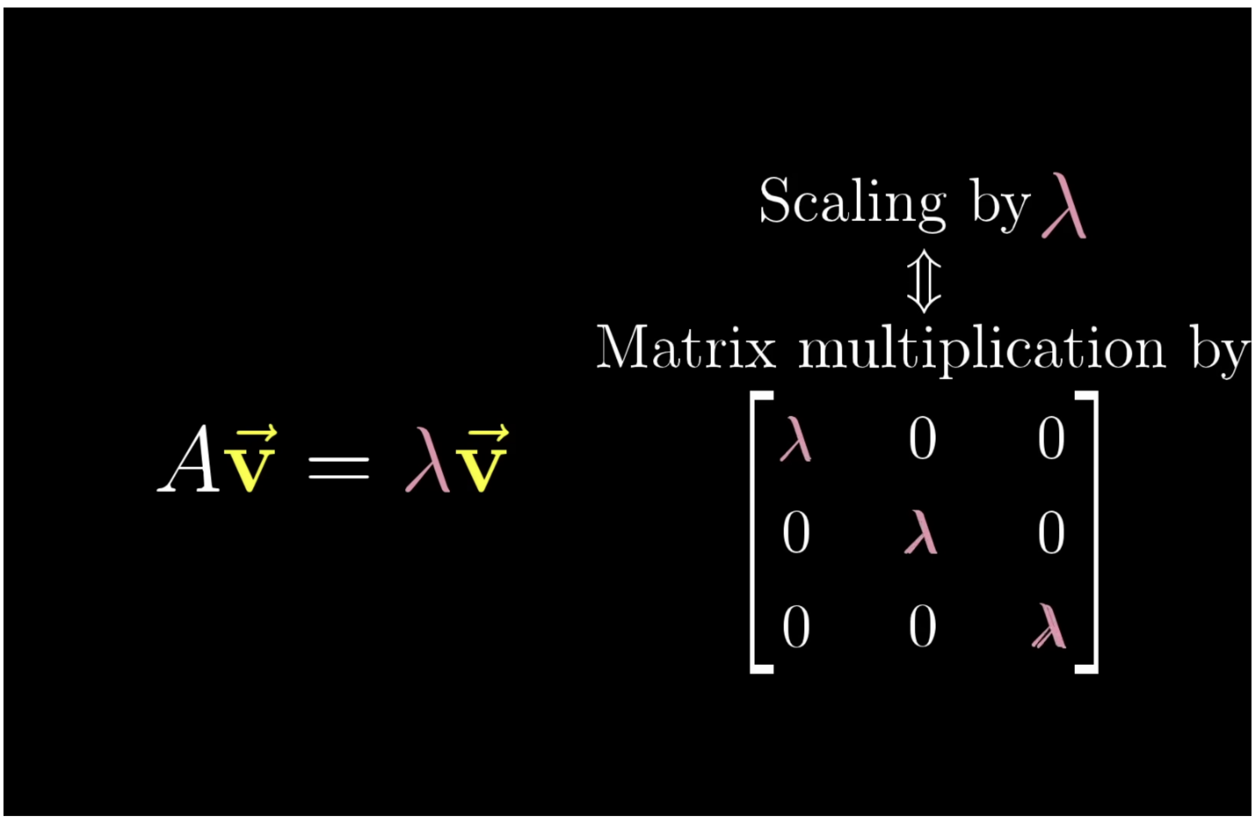
Definition

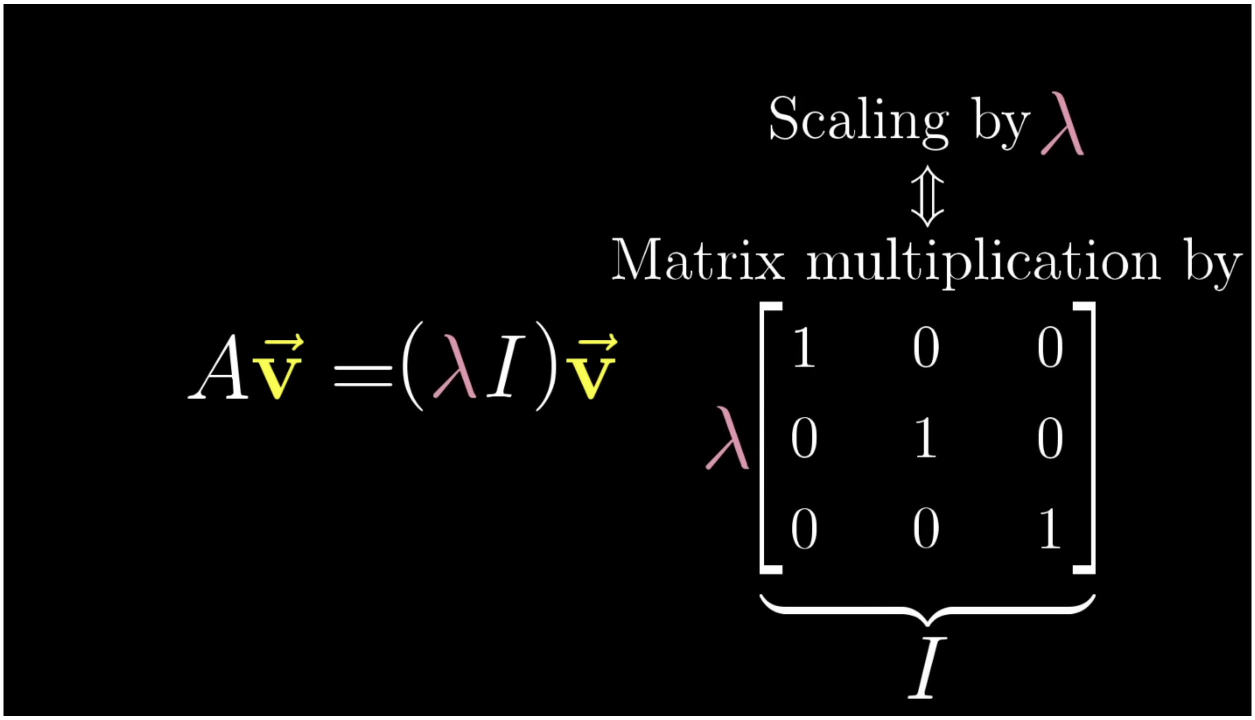


고유벡터의 개념은 위와 같다.

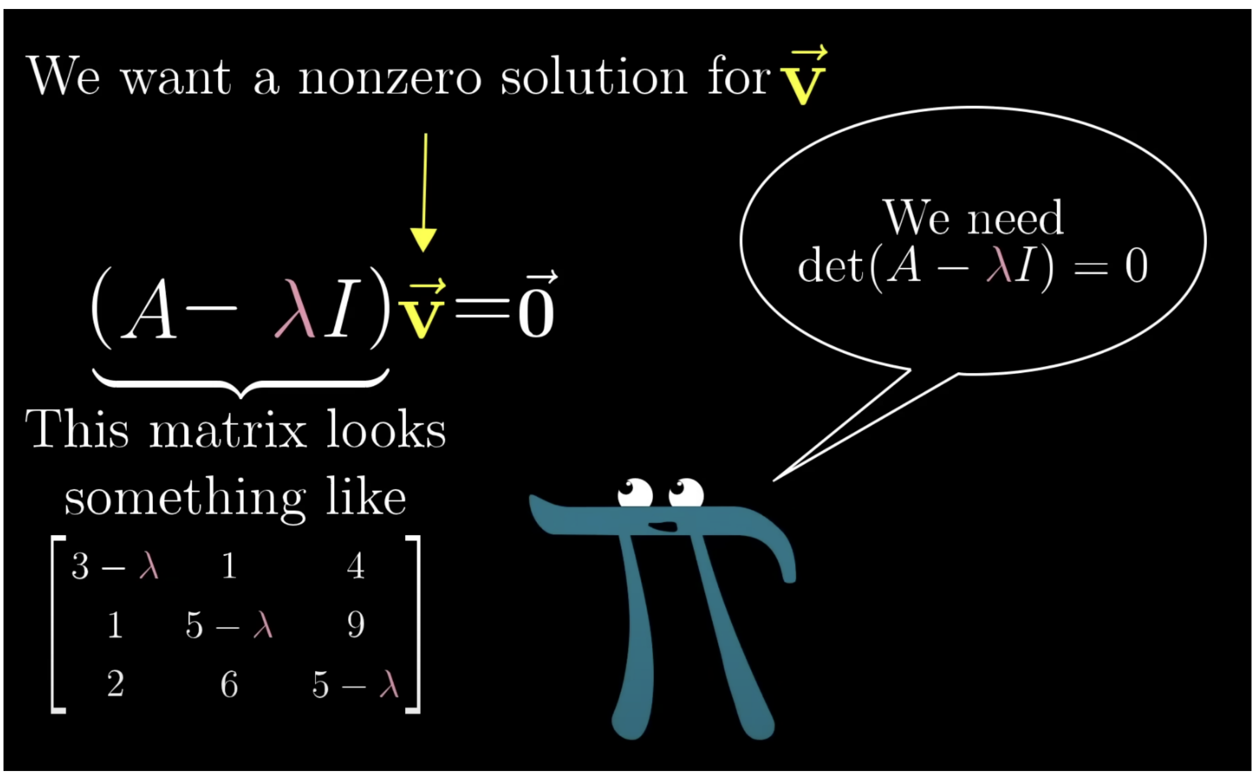


왼쪽은 행렬*벡터 인데 오른쪽은 스칼라*벡터이니 조금 이상하게 느껴질 수 있다.

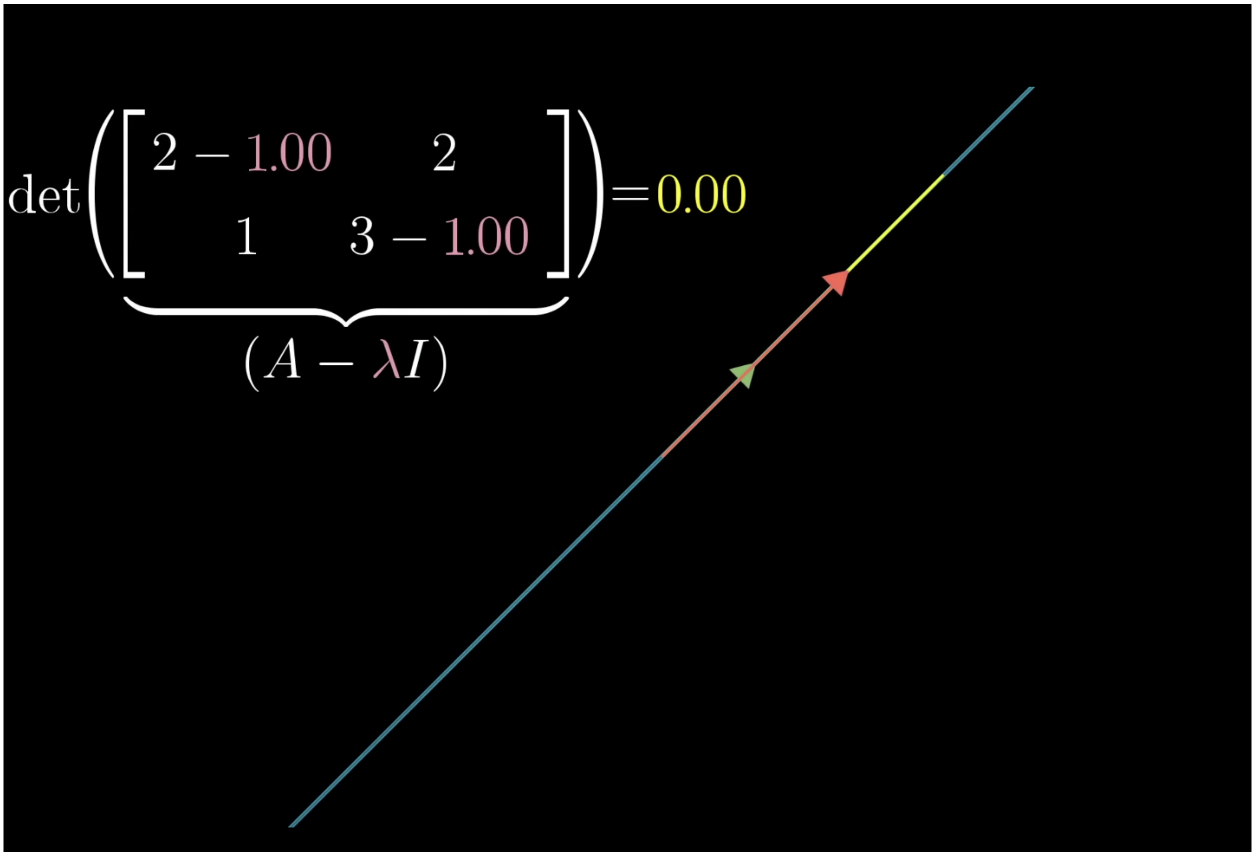




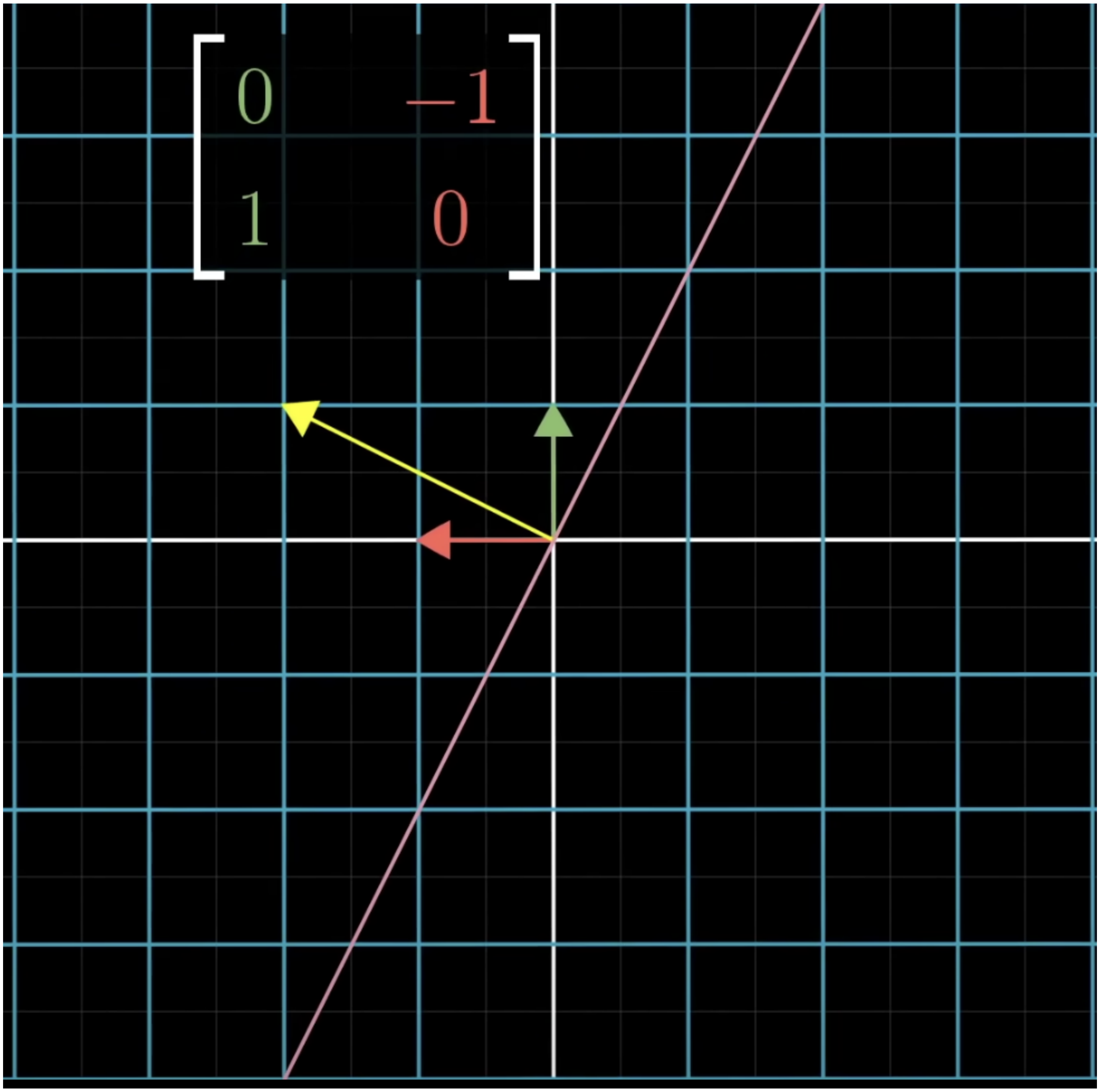
그렇다면 이 람다(스칼라)를 행렬로 나타내보자.



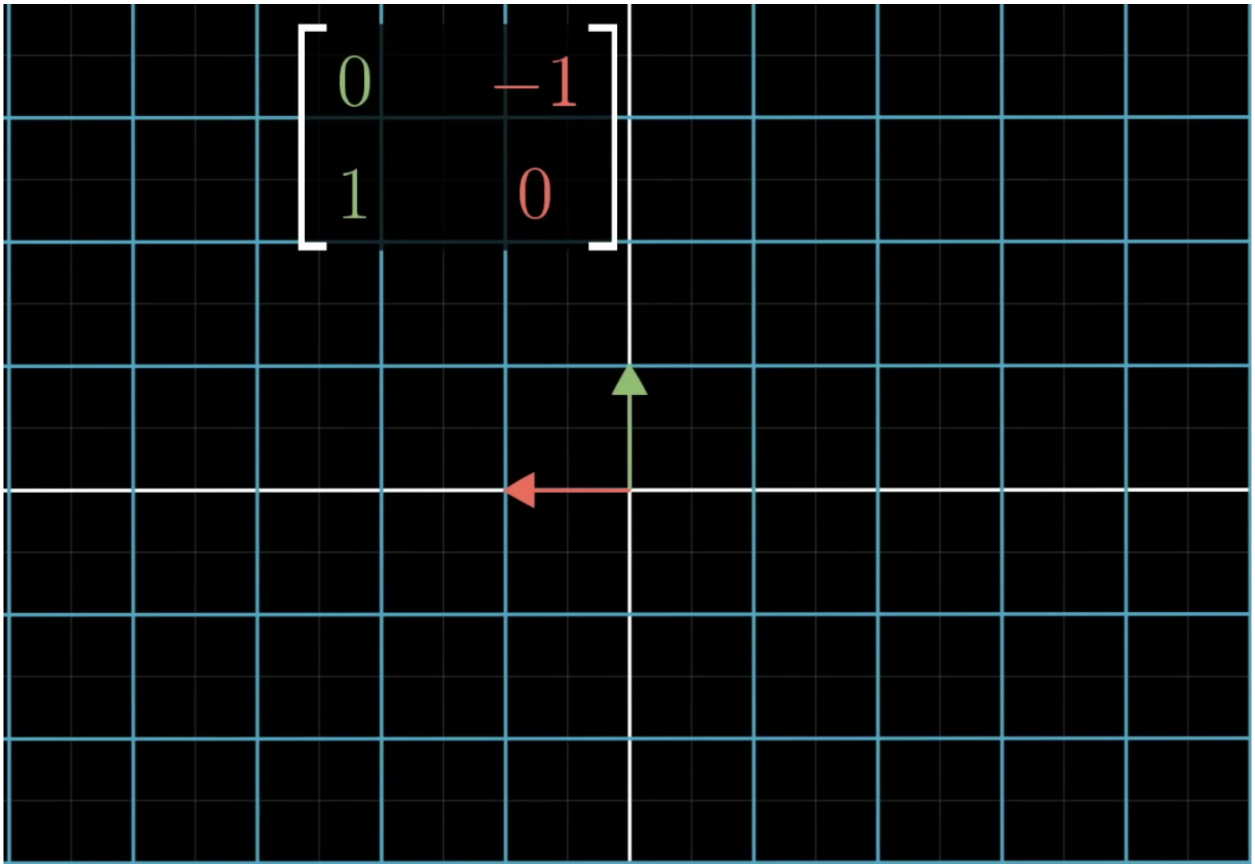
영벡터가 아닌 벡터와 행렬을 곱해서 0이 되게 하려면, 행렬의 변환이 낮은 차원으로 내리는 것이어야 한다. 즉 행렬식이 0이어야 한다.

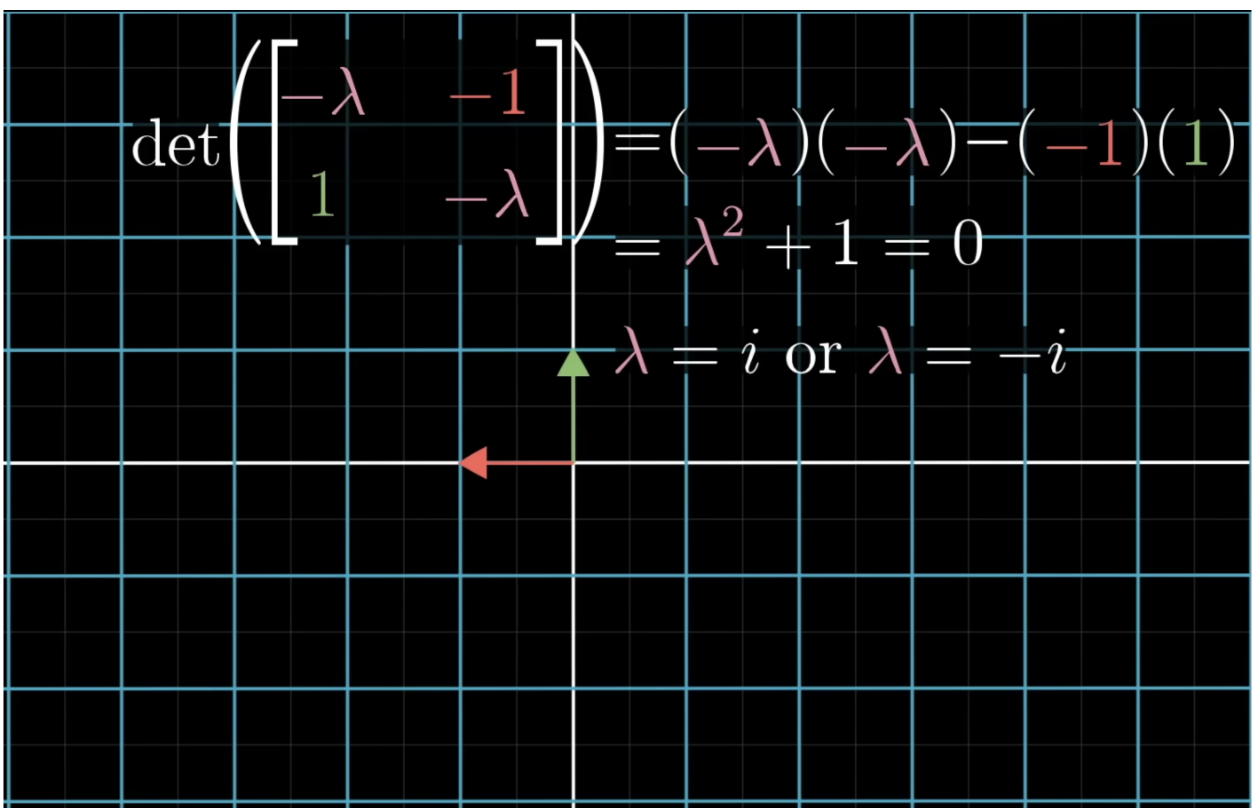


즉 위 행렬 식에서 람다가 1이면 행렬 (A-람다*I)는 선이 된다는 것이다.

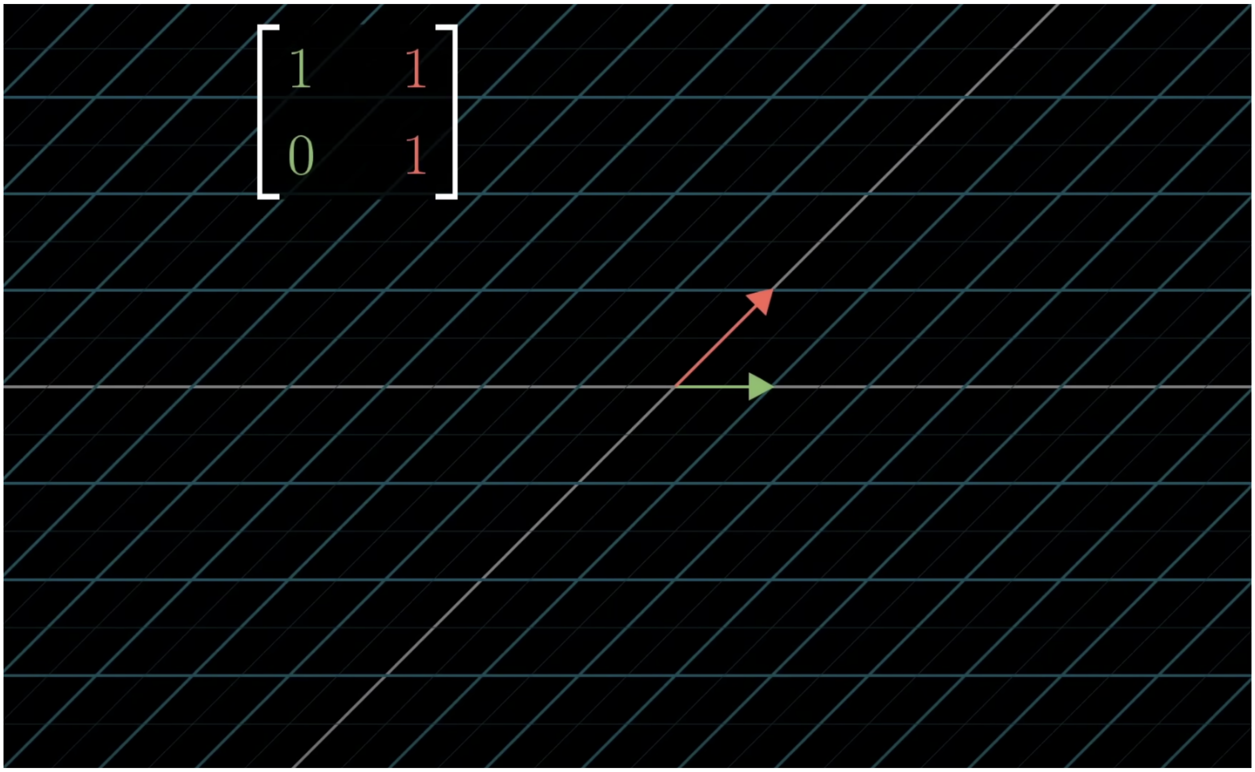


2D 변환은 고유 벡터를 꼭 가지지 않을 수도 있다. 가령 위와 같은 90도 회전의 경우 모든 벡터가 자신들의 Span을 벗어날 것이다.

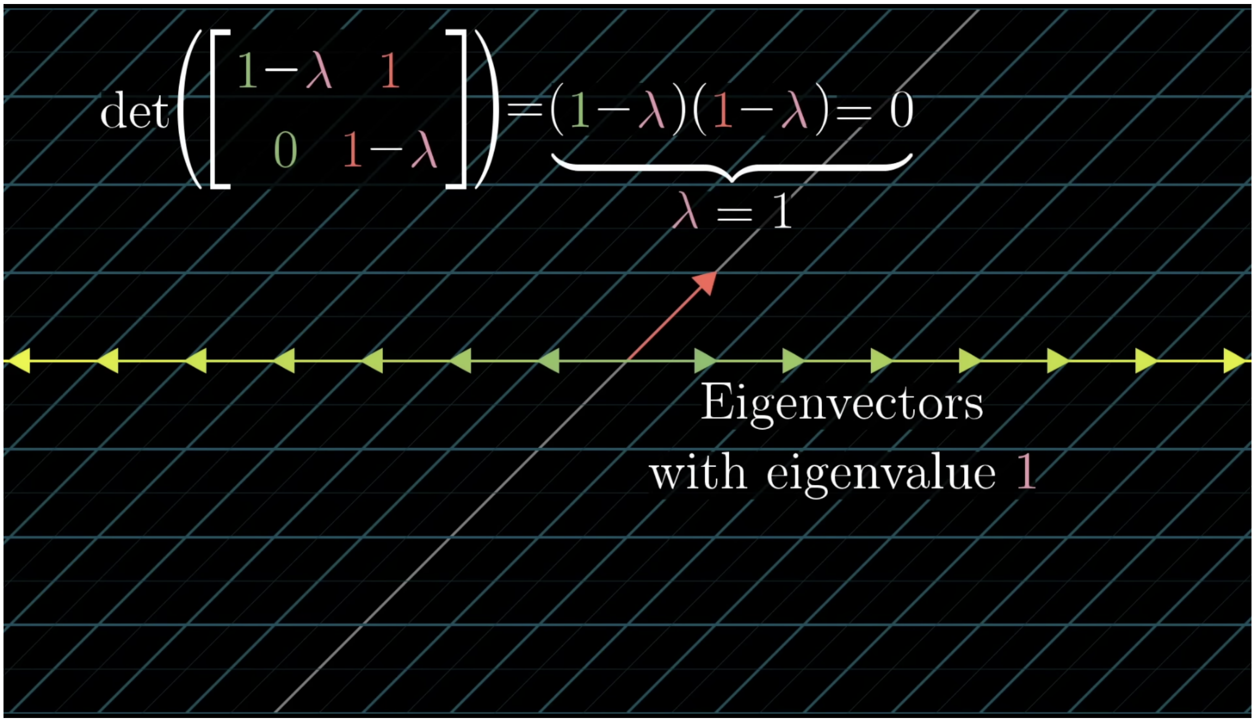

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$


$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = (-\lambda)(-\lambda) - (-1)(1)$
$= \lambda^2 + 1 = 0$
$\lambda = i$ or $\lambda = -i$

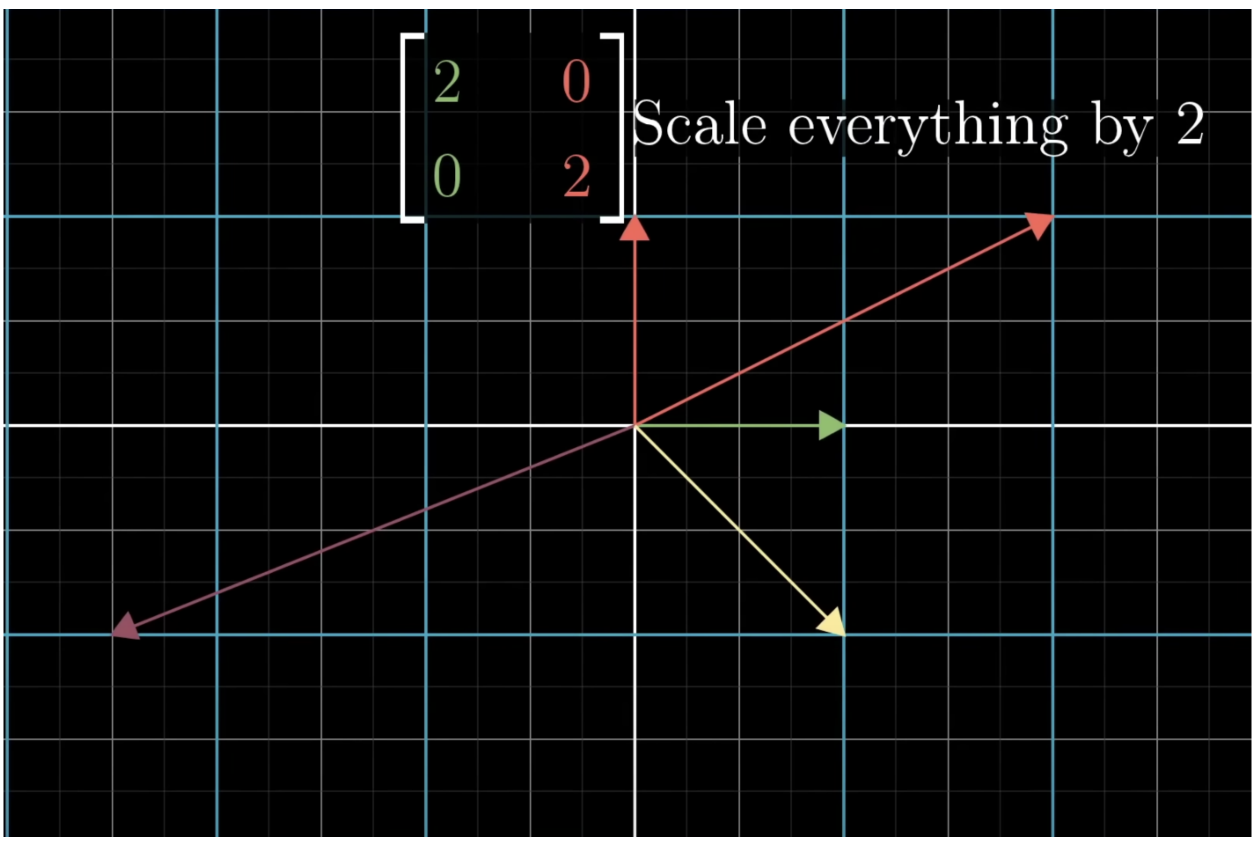
가령 반시계로 90도 회전하는 위 행렬의 고유 벡터를 구하려면 람다는 허수가 되어야 하므로 실수해가 없다는 것을 알 수 있다.



sheer(옆으로 미는) 선형 변환을 생각해보자. i-hat은 그대로 있고 (1,0), j-hat은 x 축으로 1만큼 움직이어 (1,1)인 행렬이다.

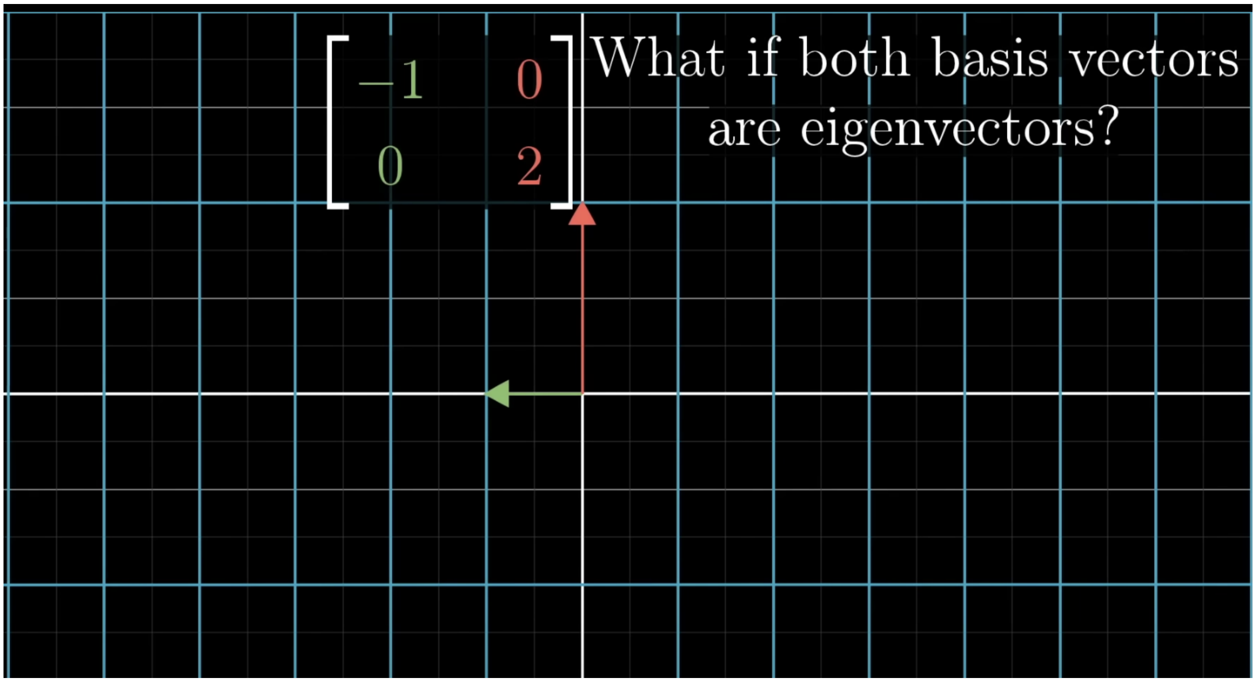


이 경우에 고유 벡터는 x축이 고유 값 1을 가지는 데, 수식을 계산해 봐도 알 수 있다.

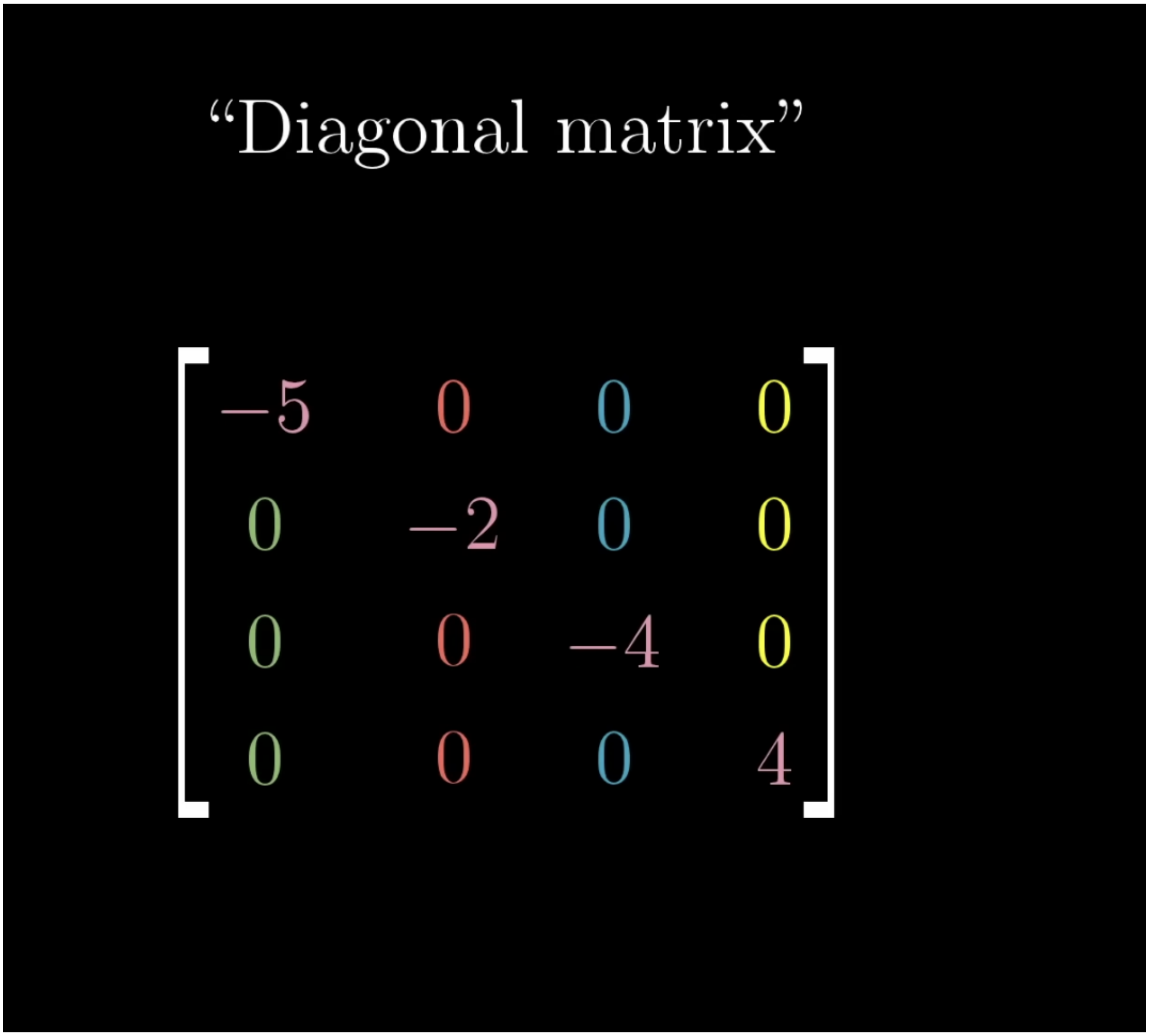


모든 벡터를 2배로 스케일링 하는 선형변환(2I)의 경우 고유 값은 2이지만 고유 벡터는 무한히 많을 수 있다.

Eigenbasis



기저 벡터(basis)가 고유 벡터(eigenvectors)인 경우를 생각해보자. 위 행렬은 i-hat이 -1, j-hat이 2만큼 스케일링 되는 행렬이다.



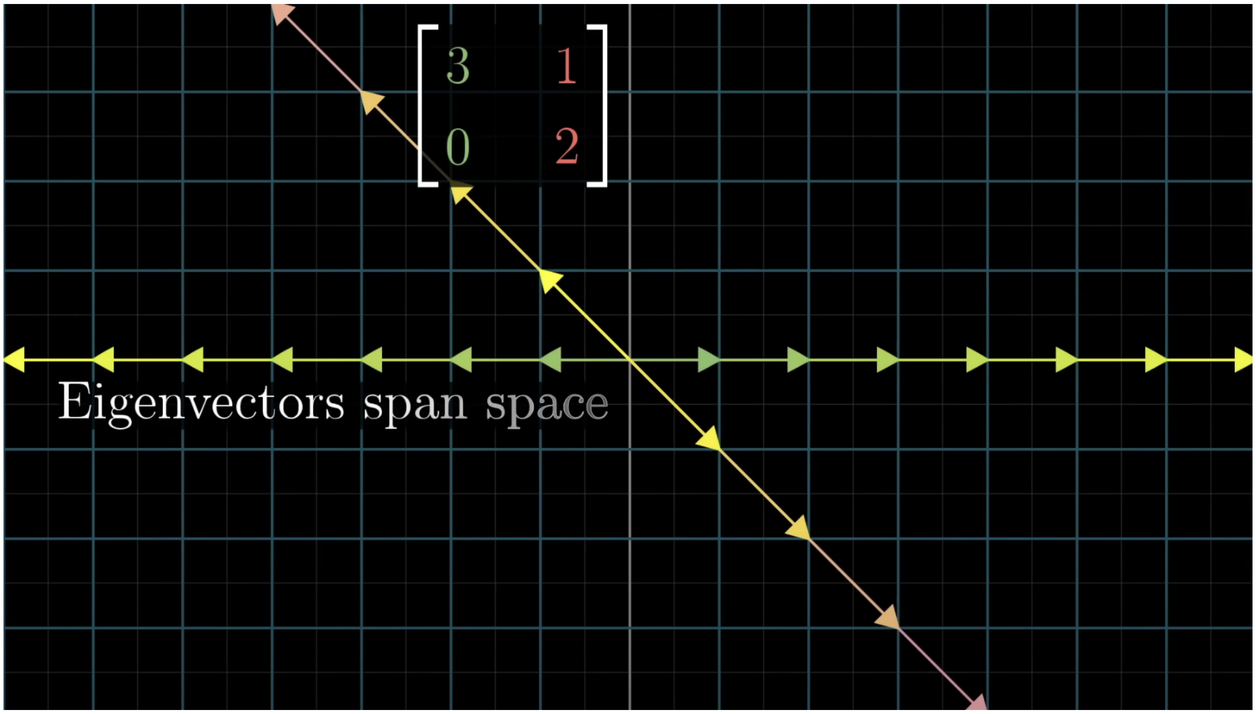
이런 경우 대각선 행렬이 되며 모든 기저 벡터는 고유 벡터이며 대각선 값은 각 좌표의 고유 값이 된다.

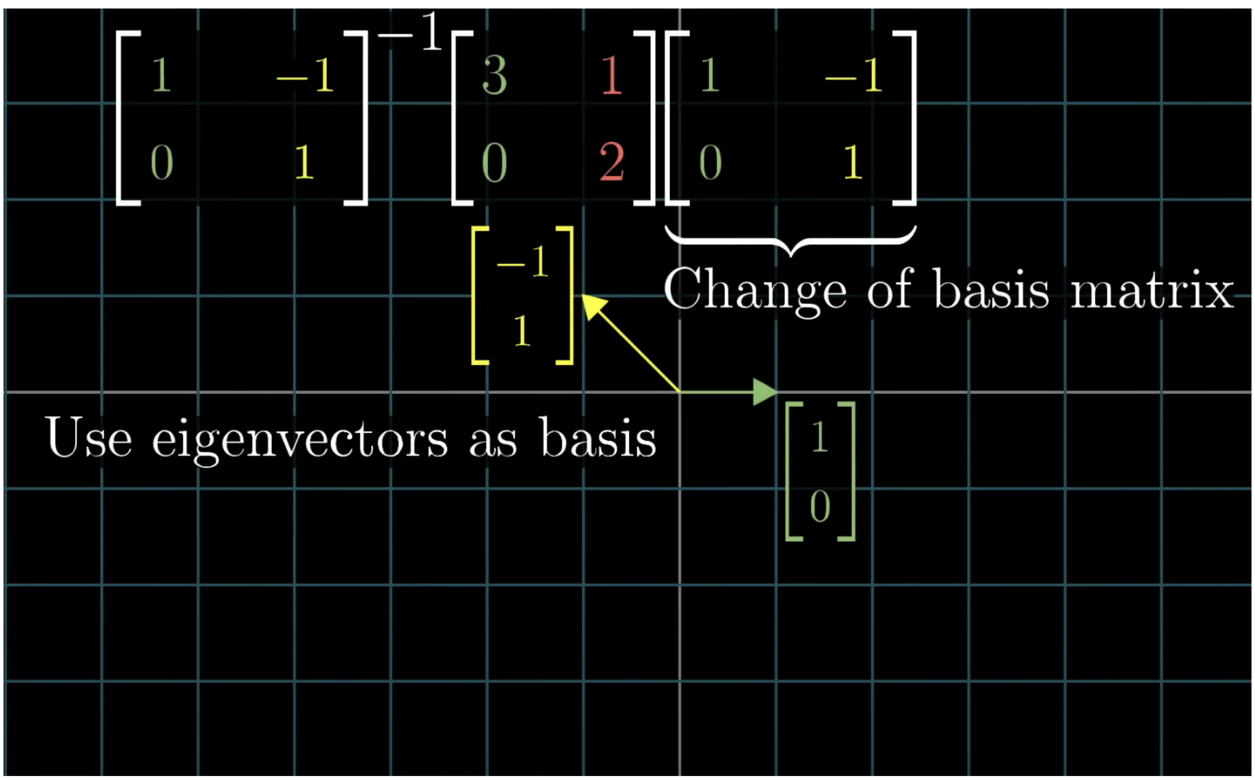
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{100 times}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

즉 이러한 대각선 행렬을 여러번 곱하는 것은

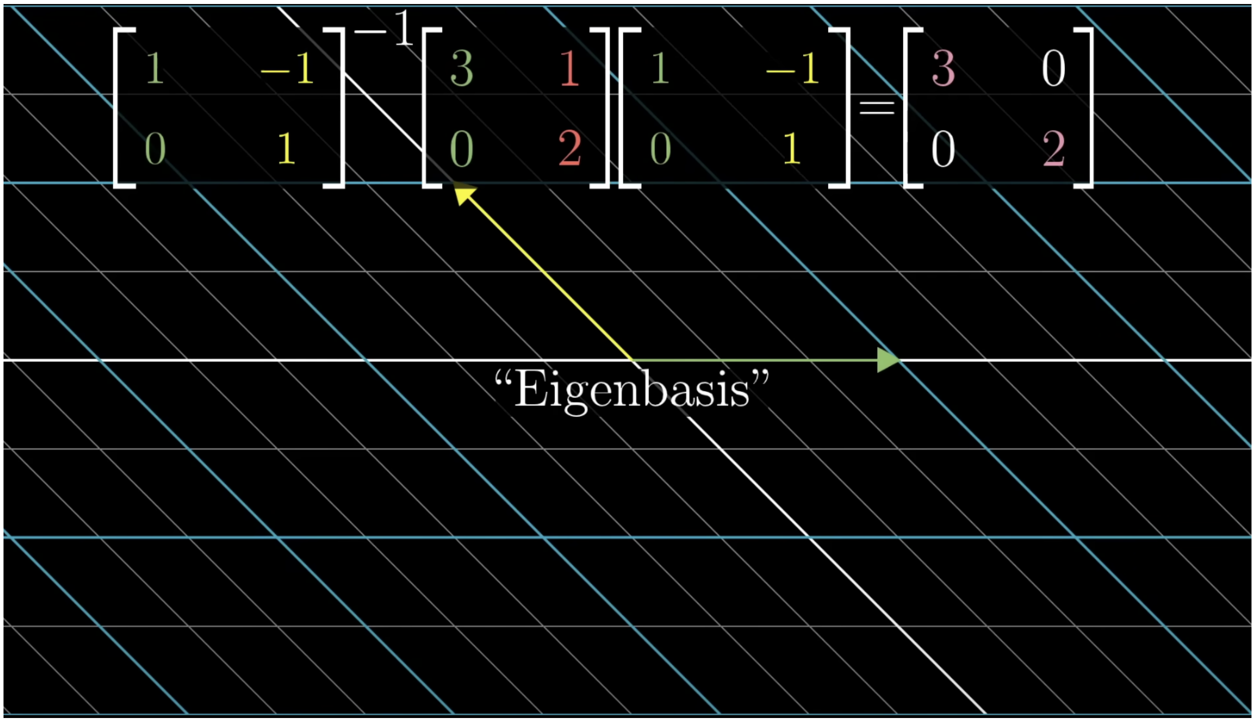
$$\begin{bmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

기저 벡터를 그만큼 스케일링 하는 것 뿐인 것이다.

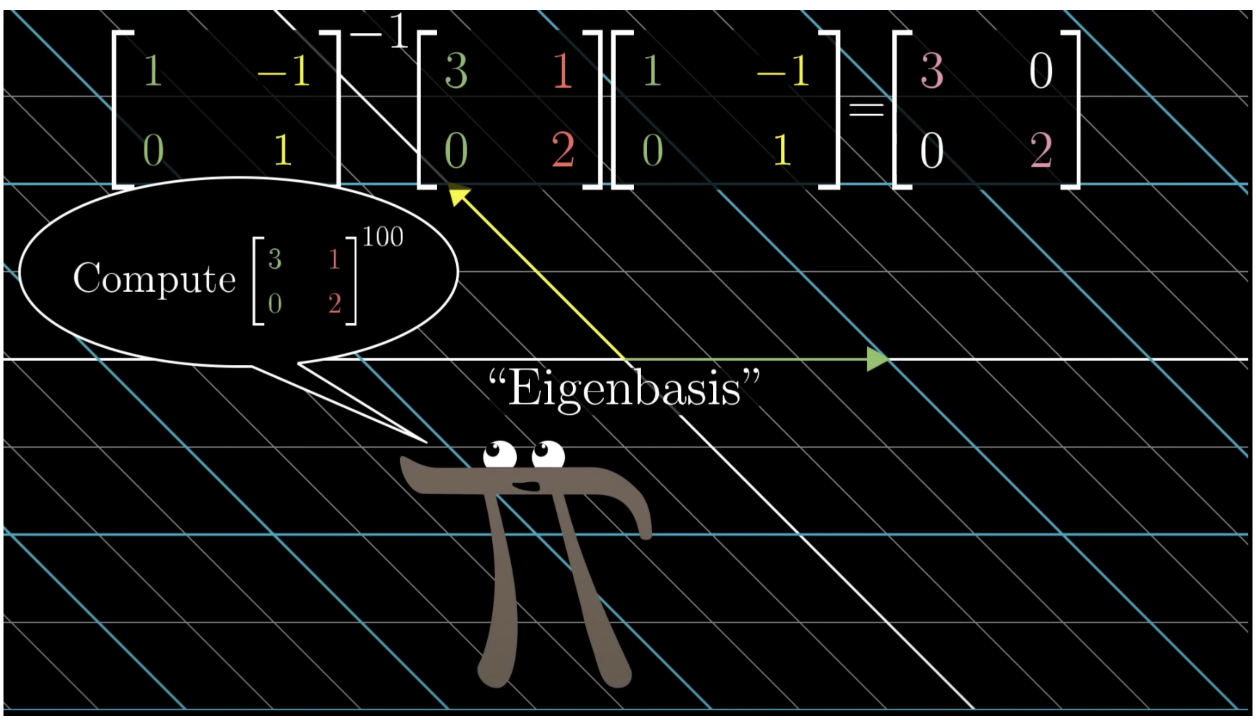




위 그림과 같이 [1,0], [-1,1]이 고유 벡터일때 이 고유벡터들을 기저벡터로 변환 할 수 있다. 그러면 변환된 고유벡터를 기저벡터로 쓰는 좌표계에서는 위 새로운 행렬은 대각선 행렬이 될 수 밖에 없을 것이다.

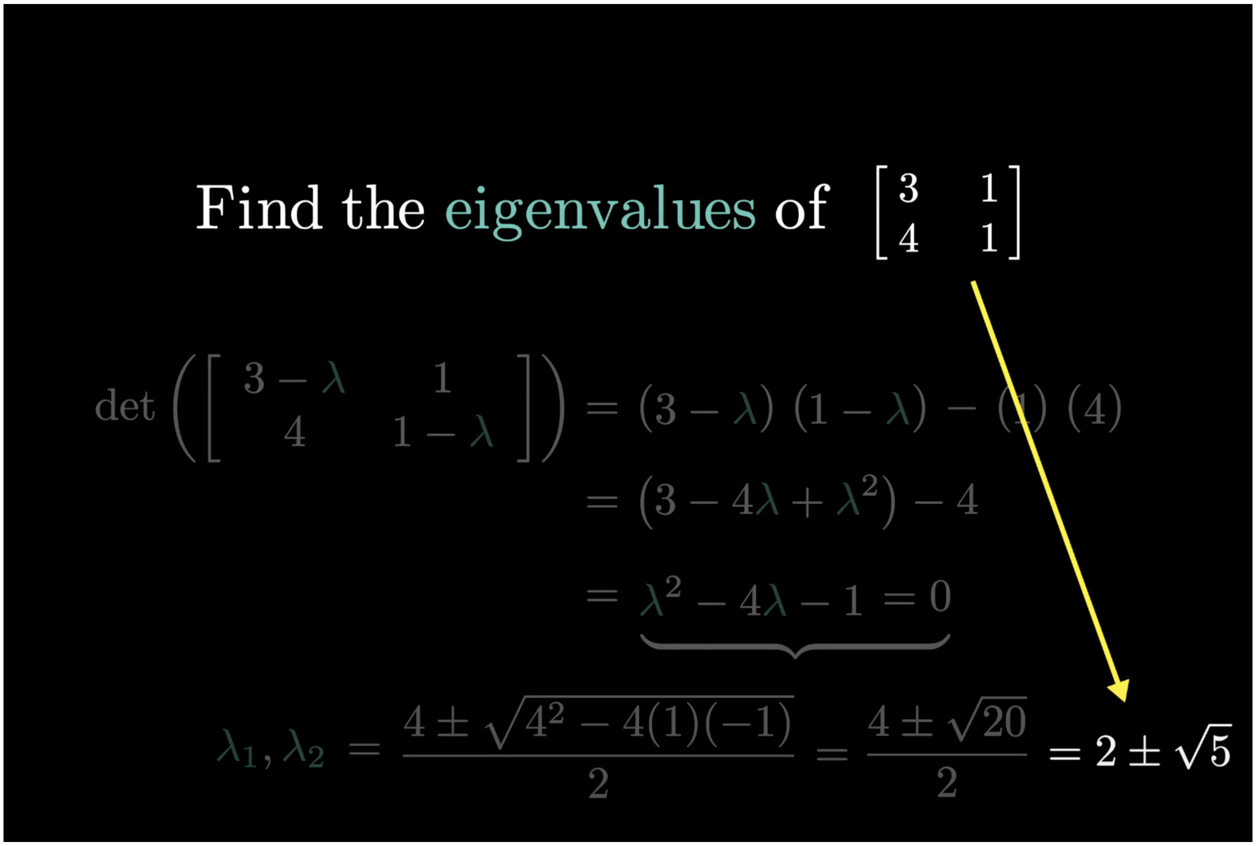


기저 벡터이면서 고유벡터인 쌍은 Eigenbasis(고유 기저) 라고 부른다.

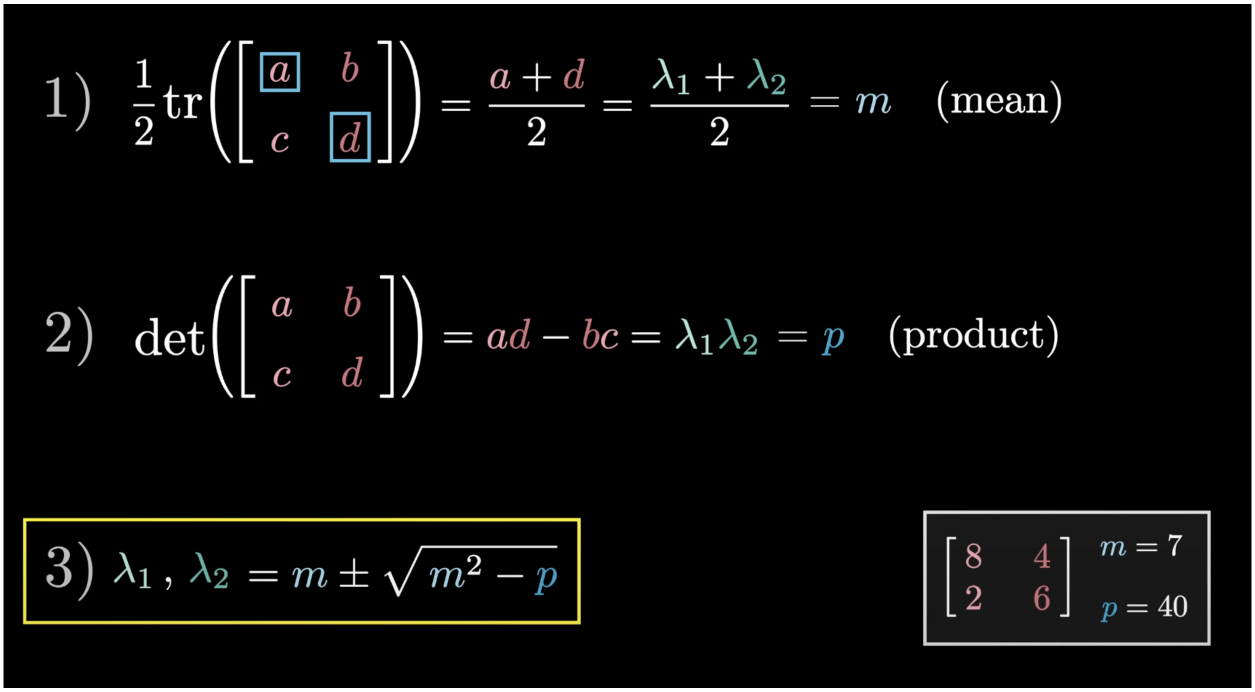


때문에 만약 어떤 행렬의 100제곱을 계산해야 한다면 그 행렬의 고유 기저로 바꾼 다음 100제곱을 구하고(대각선 행렬) 원래 좌표계로 바꾸는 것이 훨씬 빠를 것이다.

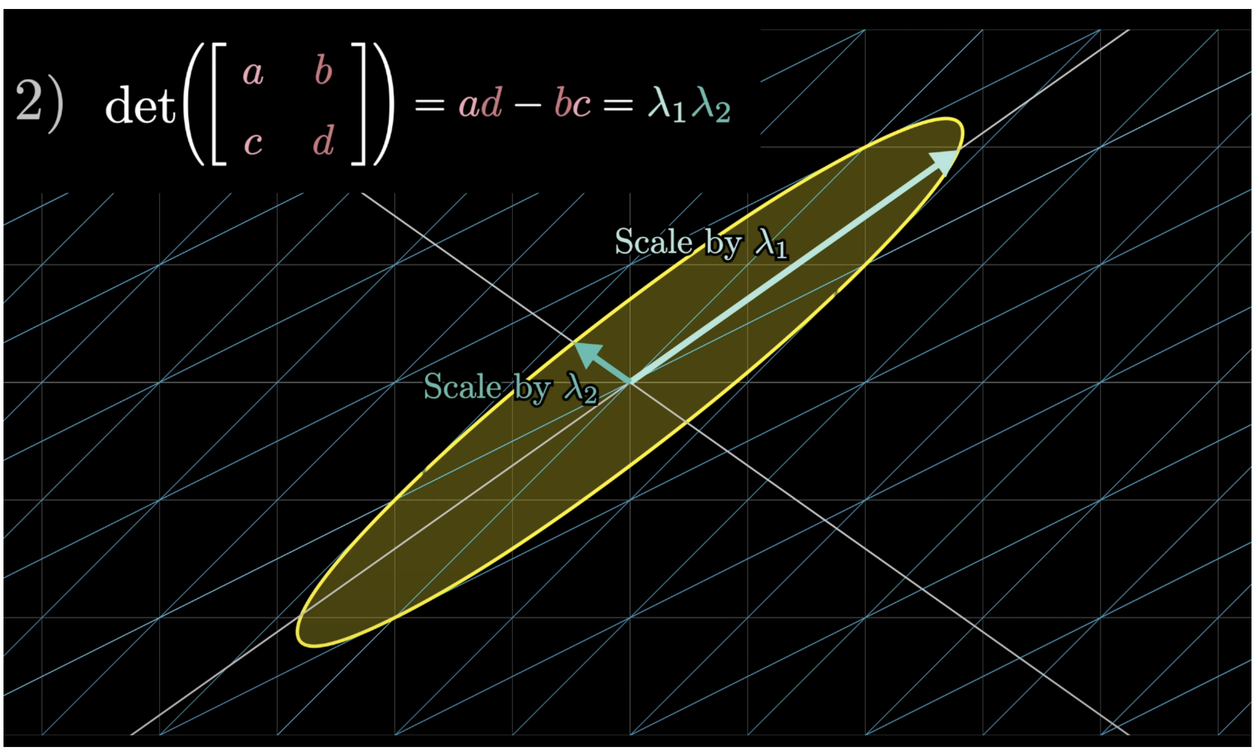
Computing Trick For Finding Eigenvalue



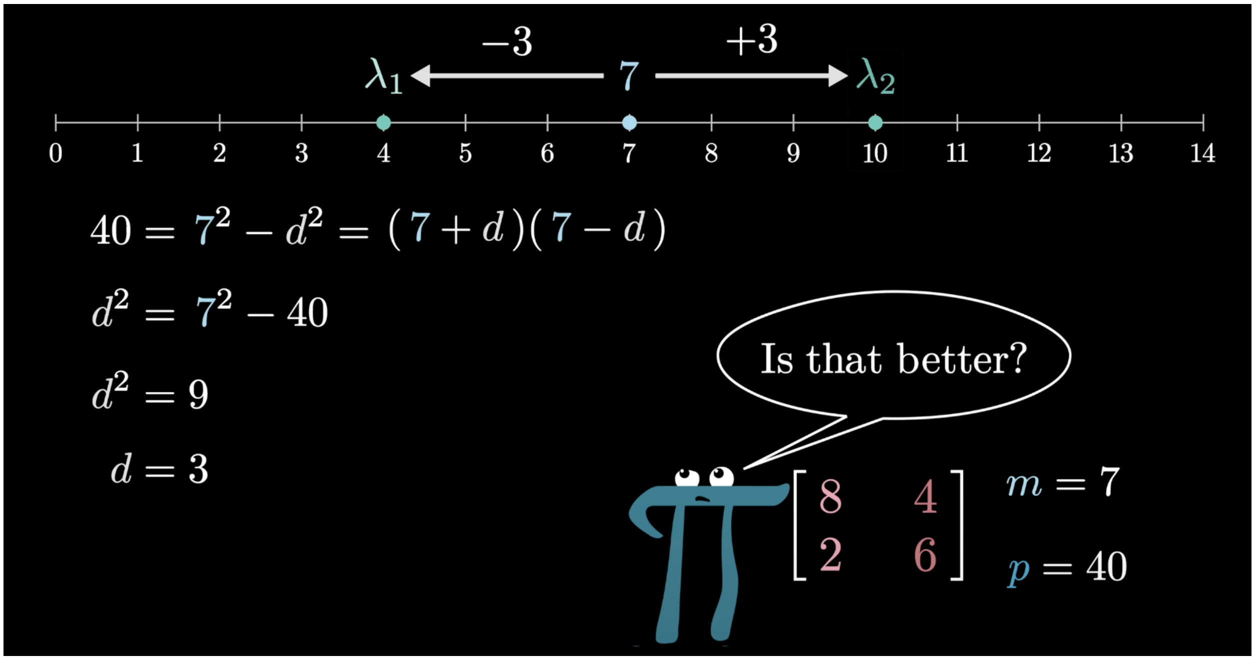
고유값을 구하는 데는 보통 위와 같은 연산이 필요하다.



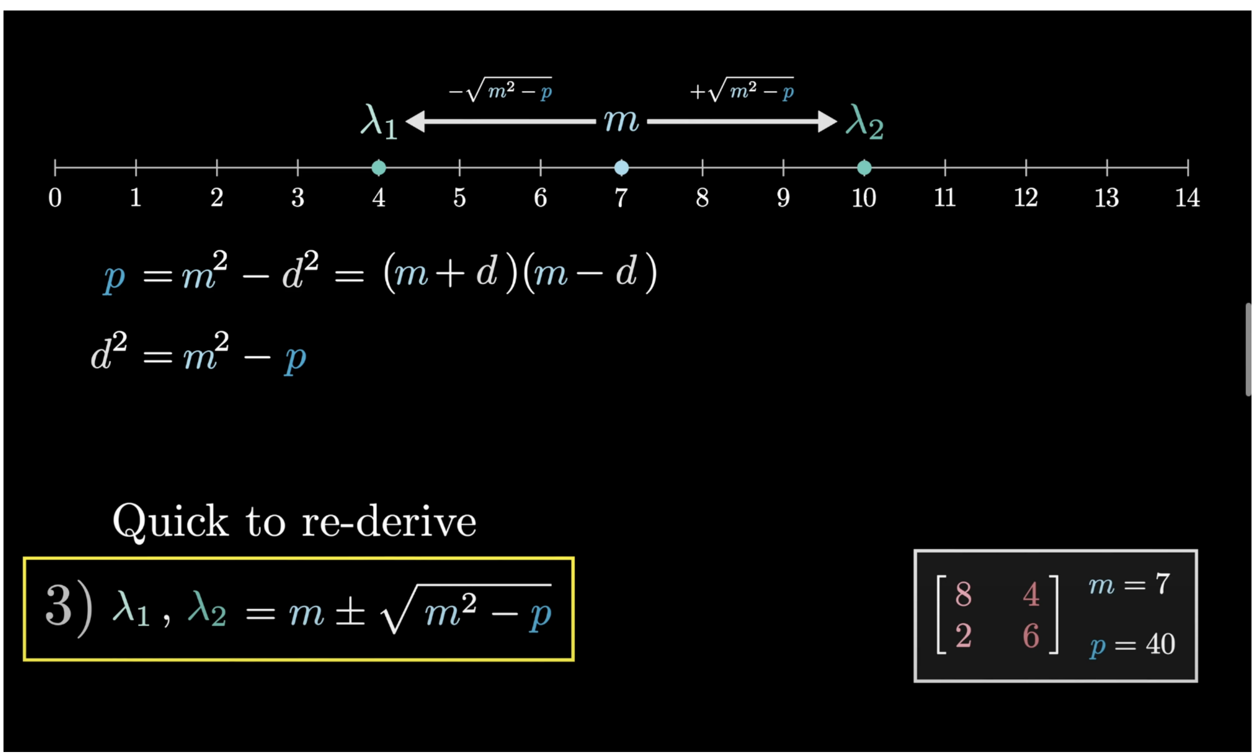
2차원 행렬이 있을 때 고유값에 필요한 람다 값은 위의 성질을 띈다.



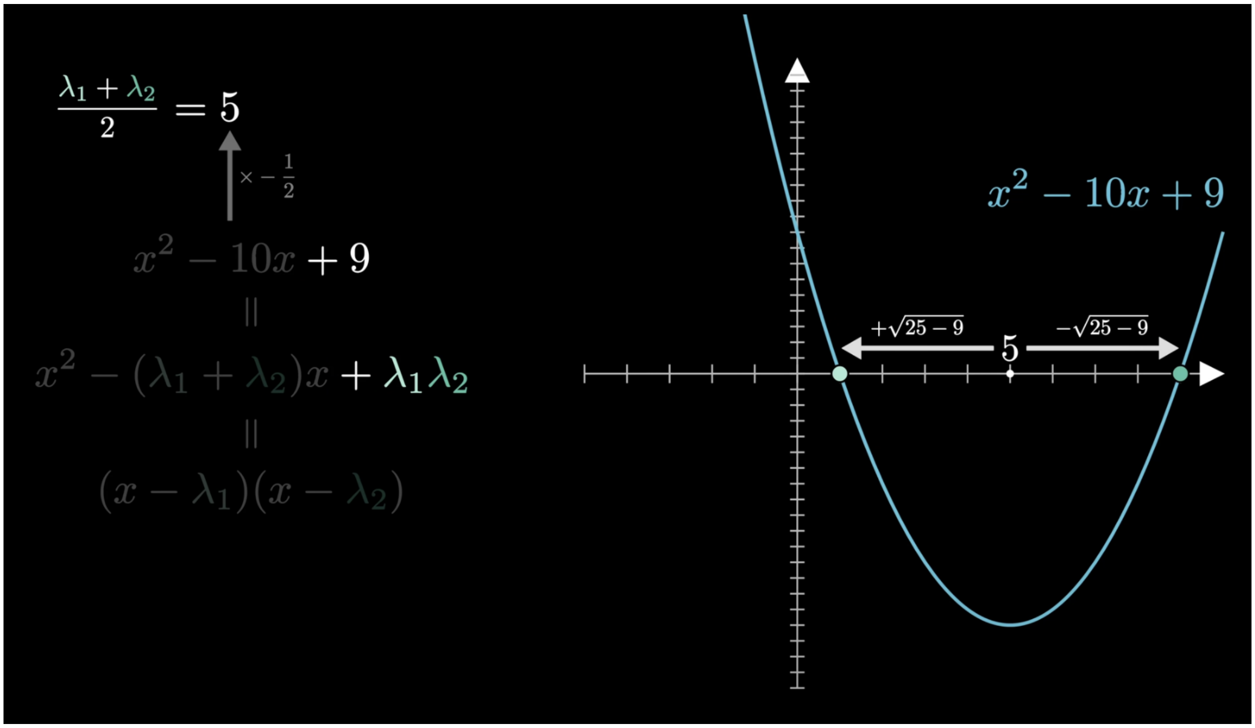
2번의 경우 ad-bc(determinant) 는 람다1,2를 곱한 것 과 같은데, 행렬식과 람다가 모두 공간(영역, 부피)의 확장과 축소를 의미한다고 생각하면 이해가 쉬울 것이다.

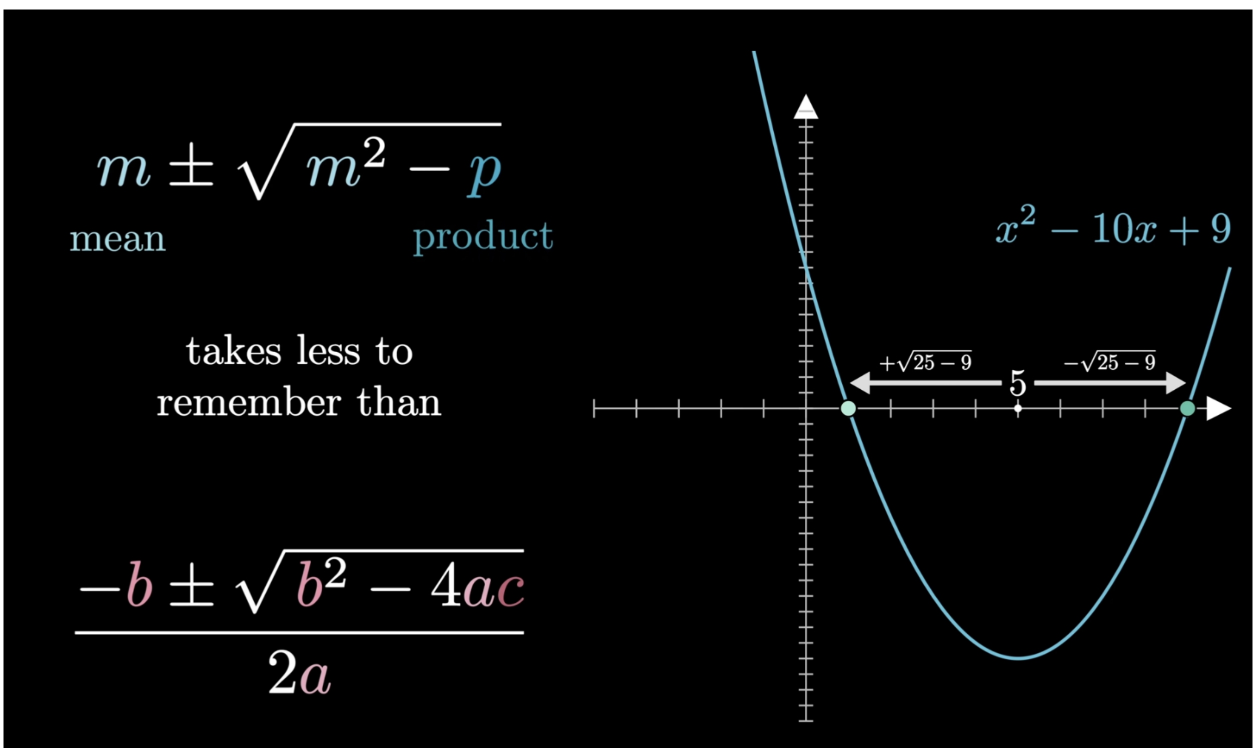


3번도 살펴보자. 평균 m이 7로 1번 공식에 의해 도출, 곱 p는 40으로 2번 공식으로 도출 되었을 경우 3번 공식을 생각해보자. 두 람다 1,2는 평균 7에 +-a된 값일 것이다. 7+a, 7-a 가 각각의 람다일 텐데 이 두 람다를 곱하면 40인 걸 알고 있으므로 d=3이 되고, 두 람다는 10,4 인걸 알 수 있다.

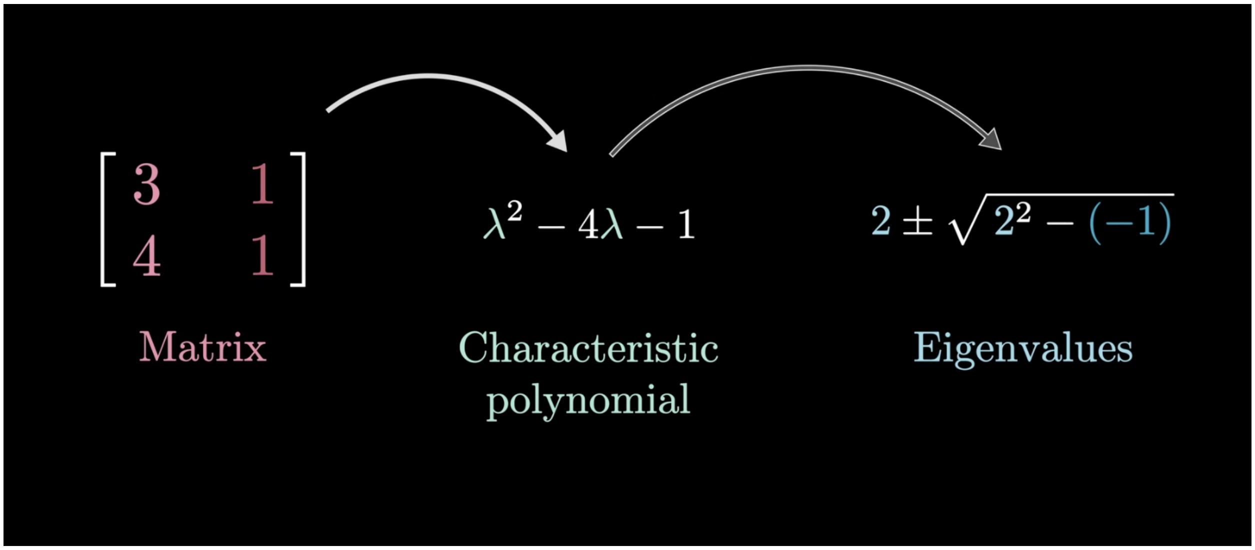


이를 일반적인 변수를 써서 공식화 하면 위의 3번 공식이 된다.





위 공식을 구하는 방법은 2차 함수에서 근의 공식으로 근을 구하는 것과 같다. (이 경우 근이 람다)



이 트릭의 요점은 행렬을 보면서 다항식을 설정하는 중간 과정을 생략할 수 있다는 점이다.