BIW 4-01	**TRAGWERKSSICHERHEIT**	**3. Beleg**	**8. FS | SS 2023**

Ausgabe: 28.04.2023
Abgabe: 26.05.2023
Konsulent: F. Niklas Schietzold, VMB/203

Versagenswahrscheinlichkeit spezieller Systeme – Seriensysteme

Name: Philipp Göbel	Matrikel: 4607083

Aufgabe

Das dargestellte Fachwerk (s. Abb. 1) besteht aus quadratischen Stahl-Hohlprofilen der Güte S235 JR. Die Außenmaße der Profile sind bei allen Stäben gleich: $h \times b = 0{,}16 \text{ m} \times 0{,}16 \text{ m}$. Die Wanddicke t der einzelnen Stäbe ist unterschiedlich dimensioniert, um den verschiedenen Beanspruchungen gerecht zu werden.
Bestimmen Sie für das in Abb. 1 dargestellte System unter der angegebenen Belastung mit den in Tabelle 2 gegebenen Stab-Geometrien die folgenden Versagenswahrscheinlichkeiten:

a) Berechnen Sie die Versagenswahrscheinlichkeit P_f für vollständiges Systemversagen unter den Voraussetzungen, dass
   - die Festigkeiten aller Stäbe stochastisch unabhängig sind und
   - das Knicken der Stäbe ausgeschlossen ist.

b) Berechnen Sie die Versagenswahrscheinlichkeit P_f für vollständiges Systemversagen unter den Voraussetzungen, dass
   - die Festigkeiten aller Stäbe gleich groß sind – also mit voller Korrelation – und
   - das Knicken der Stäbe ausgeschlossen ist.

c) Geben Sie eine untere und eine obere Schranke für die Versagenswahrscheinlichkeit P_f für vollständiges Systemversagen für die Fälle a) und b) an, wenn zusätzlich elastisches Knicken der Stäbe möglich ist! Der Elastizitätsmodul soll dabei in allen Stäben gleich groß sein – also voll korreliert.
   - Fall I – System wie dargestellt,
   - Fall II – Die Stäbe 4, 6 und 10 werden zusätzlich in Stabmitte konstruktiv gehalten (Knicklängenhalbierung).

Die Ziffern 1–10 sind als Nummerierung der Stäbe des Fachwerks in Abb. 1 eingeführt. Die von Ihnen berechneten Stabkräfte sollen in die folgende Tabelle eingetragen werden:

Stab	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Stabkraft S_i in [V]	0	1	0	1.25	-0.75	-1.414	-1	0.75	0	-1.175

Tabelle 1: Berechnete Normalkräfte der Fachwerkstäbe

Hinweise

- Bei Bedarf sind Integrale mit Hilfe von numerischer Integration zu lösen. Dokumentieren Sie Ihr Vorgehen in nachvollziehbarer Art und Weise.
- Geben Sie Quellcodes, Worksheets oder Tabellenkalkulationen als Teil des Lösungswegs ab, wenn Sie die numerische Integrationen damit durchführen. Bitte achten Sie darauf, dass diese Lösungswege gut nachvollziehbar und kommentiert sind.
- Bitte geben Sie dieses Deckblatt mit Ihrem Namen und Matrikelnummer ab.

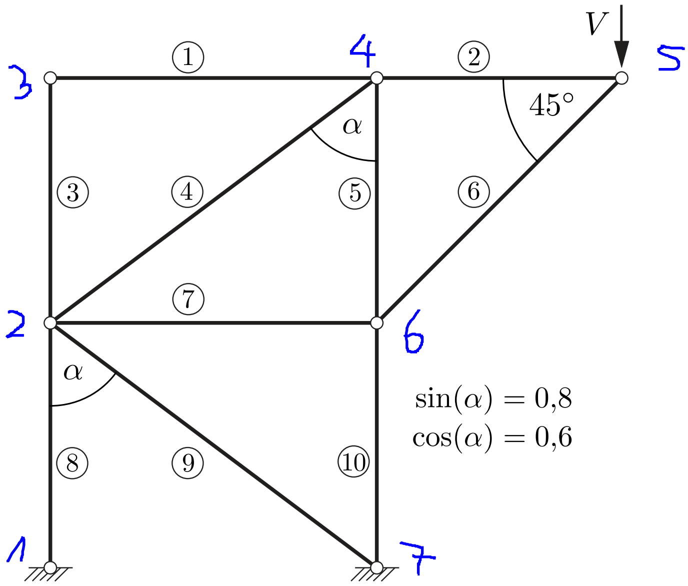


Abbildung 1: System und Belastung

- **Belastung**
  Für die Belastung V wird eine Extremwertverteilung vom Ex-max Typ I (Gumbel) vorausgesetzt. Die Verteilung wird angenommen mit

$$V \sim \text{Gumbel}\left(\mu_{X1} = 410 \text{ kN};\ \sigma_{X1} = 70 \text{ kN}\right).$$

- **Material**
  Die Fließspannung f_y wird als logarithmisch normalverteilt angenommen mit

$$f_y \sim LNV\left(\mu_{X2} = 30{,}20 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2;\ \sigma_{X2} = 2{,}44 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2;\ x_{02} = 19{,}9 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2\right).$$

  Der Elastizitätsmodul E ist als deterministische Größe vorgegeben zu

$$E = 2{,}10 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2.$$

- **Stab-Geometrien**

Stäbe	Wanddicke t [mm]	Querschnittsfläche A [$10^{-3} \cdot \text{m}^2$]	Flächenträgheitsm. I [$10^{-5} \cdot \text{m}^4$]	Länge l [m]
2 3 5 8	6,3	3,77	1,46	4,2
1 7	6,3	3,77	1,46	5,6
4 9	6,3	3,77	1,46	7,0
6	8,0	4,70	1,78	$\sqrt{35{,}28}$
10	10,0	5,74	2,10	4,2

Tabelle 2: Querschnittswerte und Stablängen der Fachwerkstäbe

BIW4-01 Tragwerkssicherheit Beleg 3

Philipp Göbel

4607083

Aufgabe a)

$$\sigma_u = \sqrt{\ln\left[1 + \left(\frac{\sigma_{X2}}{\mu_{X2} - X_{02}}\right)^2\right]} = 0{,}234$$

$$\mu_u = \ln\sqrt{\frac{\mu_{X2} - X_{02}}{1 + \left(\frac{\sigma_{X2}}{\mu_{X2} - X_{02}}\right)^2}} = 5{,}559$$

$$c_j = -\left|\frac{N_j(G_i = 1)}{A}\right|$$

$c_1 = 0$ $\quad c_4 = -331{,}56$ $\quad c_7 = -265{,}25$ $\quad c_{10} = -204{,}7$

$c_2 = -265{,}25$ $\quad c_5 = -198{,}94$ $\quad c_8 = -198{,}94$

$c_3 = 0$ $\quad c_6 = -300{,}85$ $\quad c_9 = 0$

$$f_1(x_1) = a \cdot \exp\left[-a(x_1 - b) - \exp(-a(x_1 - b))\right]$$

$$a = \frac{1}{\sigma_{X1}} \frac{\pi}{\sqrt{6}} = 0{,}018$$

$$b = \mu_{X1} - \frac{0{,}5772}{a} = 378{,}50$$

$$F_{X2}(x_2) = \Phi^{SNV}(y) \quad \text{mit } y = \frac{\ln(x_2 - x_{0,2}) - \mu_u}{\sigma_u}$$

$$P_f = 1 - \int_{x_1 = -\infty}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{n} \left(1 - F_{min,2j}(-c_j \cdot x_1)\right)\right] f_1(x_1)\, dx_1 = 1 - \prod_j \int_{-\frac{x_{02}}{c_j}}^{\infty} F_{min,2j}(-c_j x) f_1(x_1) dx$$

→ numerisch integriert: $P_f = 0.032$

Aufgabe b)

$$P_f = \max_{j=1..n} (P_{fj}) = \max_{j=1,n} \left(\int_{x_1 = -\frac{x_{0,2}}{c_j}}^{x_1=\infty} F_{min,zj}(-c_j \cdot x_1) \cdot f_1(x_1)\, dx_1 \right)$$

num. integriert:

$P_{f1} = 0$ $\quad P_{f5} = 0.0057$ $\quad P_{f9} = 0$

$P_{f2} = 0.0043$ $\quad P_{f6} = 0.0037$ $\quad P_{f10} = 0.0056$

$P_{f3} = 0$ $\quad P_{f7} = 0.0043$

$P_{f4} = 0.0032$ $\quad P_{f8} = 0.0057$

$\max P_{fi} = P_{f5} = P_{f8} = 0.0057$

Aufgabe c)

$c_{j,k} = -|N_j(G=1)|$

$c_{1,k} = 0$ $\quad c_{4,k} = -1.25$ $\quad c_{7,k} = -1.0$ $\quad c_{10} = -1.175$

$c_{2,k} = -1$ $\quad c_{5,k} = -0.75$ $\quad c_{8,k} = -0.75$

$c_{3,k} = 0$ $\quad c_{6,k} = -1.414$ $\quad c_{9,k} = 0$

$$k_j = \frac{E \cdot I \cdot \pi^2}{l_j^2}$$

$k_1 = 964{,}93$ $\quad k_4 = 617{,}56$ $\quad k_7 = 964{,}93$ $\quad k_{10} = 2467{,}40$

$k_2 = 1715{,}43$ $\quad k_5 = 1715{,}43$ $\quad k_8 = 1715{,}43$

$k_3 = 1715{,}43$ $\quad k_6 = 1045{,}71$ $\quad k_9 = 617{,}56$

=> Nur Druckstäbe relevant, d.h. 5, 6, 7, 10.

Fall I

$$P_{fk} = 1 - \Phi^{N_i}\left(-\frac{1}{\sigma_{x1}}\left(-\frac{k_j}{c_{j,k}} - \mu_{x1}\right)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{f5k} = 2{,}69 \cdot 10^{-157} \\ P_{f6k} = 6{,}14 \cdot 10^{-6} \\ P_{f7k} = 8{,}93 \cdot 10^{-14} \\ P_{f10k} = 1{,}10 \cdot 10^{-127} \end{array}\right\} \max P_{fk} = P_{f6} = 6{,}14 \cdot 10^{-6}$$

$\rightarrow$ a) $\max_{j=E_1^*, E_2^*} P_{fj} = 6{,}14 \cdot 10^{-6} \leq P_f \leq 0.032$

$\rightarrow$ b) $\max_{j=E_1^*, E_2^*} P_{fj} = 6{,}14 \cdot 10^{-6} \leq P_f \leq 0.0057$

Fall II

$$P_{f\,ik} = 1 - \exp\left(-\exp\left(\frac{0.0321 \cdot k_j}{c_{ik}} + 10.6\right)\right)$$

$P_{f\,5k} = 0$

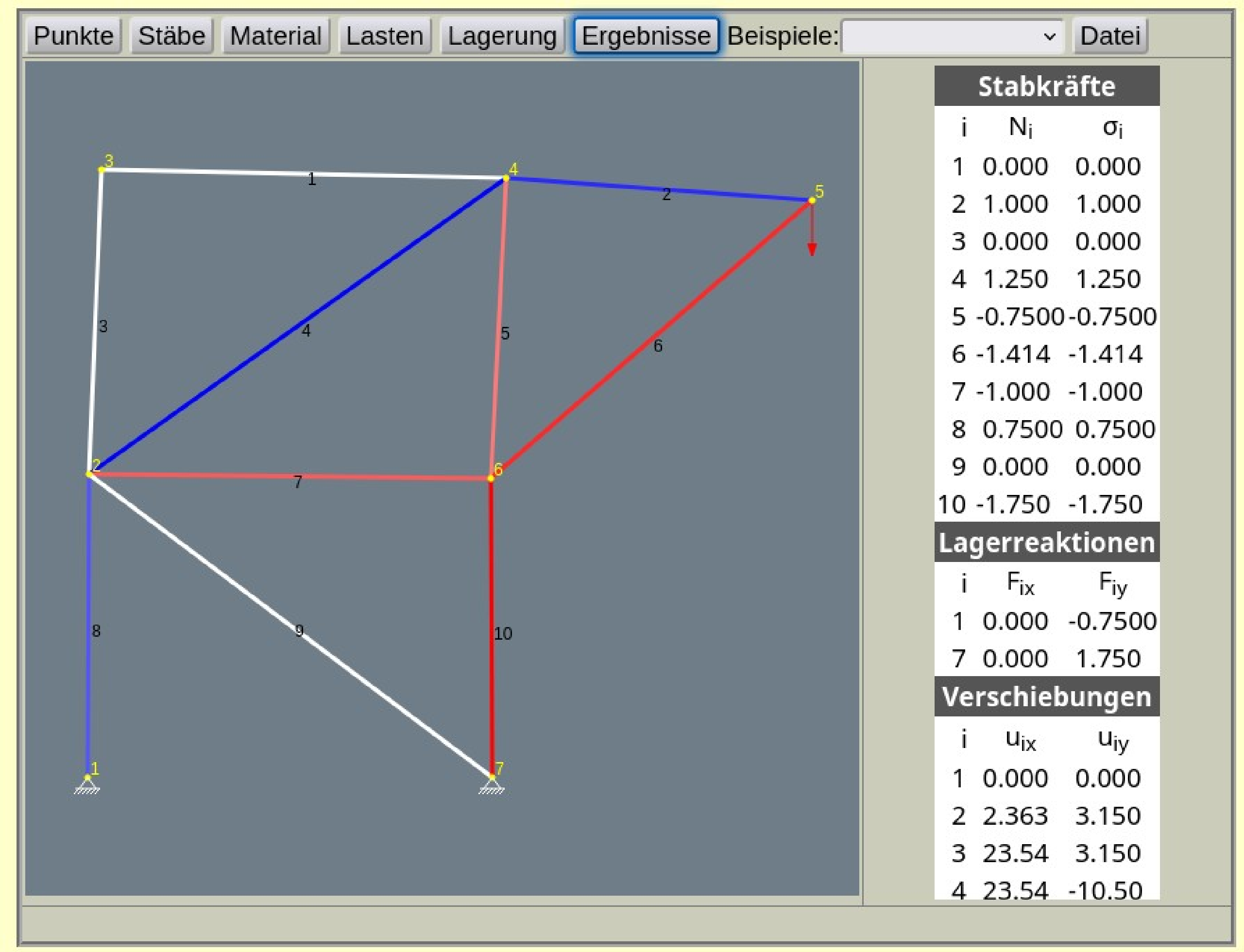
$P_{f\,6k} = 1.97 \cdot 10^{-6}$

$P_{f\,7k} = 1.42 \cdot 10^{-9}$

$P_{f\,10k} = 0$

$\rightarrow$ a) $1.97 \cdot 10^{-6} \leq P_f \leq 0.032$

$\rightarrow$ b) $1.97 \cdot 10^{-6} \leq P_f \leq 0.057$



Punkte
Stäbe
Material
Lasten
Lagerung
Ergebnisse
Beispiele:
Datei
Stabkräfte
i Ni σi
1 0.000 0.000
2 1.000 1.000
3 0.000 0.000
4 1.250 1.250
5 -0.7500 -0.7500
6 -1.414 -1.414
7 -1.000 -1.000
8 0.7500 0.7500
9 0.000 0.000
10 -1.750 -1.750
Lagerreaktionen
i Fix Fiy
1 0.000 -0.7500
7 0.000 1.750
Verschiebungen
i uix uiy
1 0.000 0.000
2 2.363 3.150
3 23.54 3.150
4 23.54 -10.50

```
using Distributions
using QuadGK

#Erstellen Arrays für die Stäbe

#Wanddicke
t = [6.3 6.3 6.3 6.3 6.3 8.0 6.3 6.3 6.3 10.0]
#Querschnittsfläche
A = [3.77 3.77 3.77 3.77 3.77 4.70 3.77 3.77 3.77 5.74] * 10^-3
#Flächenträgheitsmoment
I = [1.46 1.46 1.46 1.46 1.46 1.78 1.46 1.46 1.46 2.10] * 10^-5
#Länge
L = [5.6 4.2 4.2 7.0 4.2 sqrt(35.28) 5.6 4.2 7.0 4.2]

#Stabkräfte (V=1)
N = [0 1 0 1.25 -0.75 -1.414 -1 0.75 0 -1.175]
E = 2.1e8

#Belastung
muh_x1 = 410
sigma_x1 = 70

#Material
muh_x2 = 30.2e4
sigma_x2 = 2.44e4
x02 = 19.9e4

#leere Arrays
cj = zeros(10)
Pfa = zeros(10)
Pfb = zeros(10)
Pfc = zeros(10)
PfcII = zeros(10)
cjk = zeros(10)
kj = zeros(10)
Pfa_ges = 0
Pfb_ges  = 0
Pfc_ges = 0

##################################################


#Koeffizienten cj und cjk/kj (Aufgabe c)
for i = 1:10
    cj[i] = -abs(N[i]/A[i])
    if N[i] < 0
        cjk[i] = -abs(N[i])
        kj[i] = E*I[i]*pi^2/L[i]^2
    end
end


#Werte a und b
a = 1/sigma_x1*pi/sqrt(6)
b = muh_x1 - 0.5772/a

#Berechnung von sigma_u und muh_u
sigma_u = sqrt(log(1+(sigma_x2/(muh_x2-x02))^2))
muh_u = log(sqrt((muh_x2-x02)/(1+sigma_x2/(muh_x2-x02))^2))

##################################################
```

```
# Funktionen f_x1 und F_min und fk
#Aufgabe a) und b)
function f_x1(x)
    return f_x1 = a*exp(-a*(x-b)*exp(-a*(x-b)))
end

function F_min_x1(x)
    z = (log(x-x02)-muh_u)/sigma_u #NN verteilt
    return pdf(Normal(), z)
end

#Aufgabe c) Fall I
function fk(k)
   z = (-1/sigma_x1*(-k-muh_x1)) #NV verteilt
   return pdf(Normal(),z)
end

#Aufgabe c) Fall II
function fkII(k)
   return exp(-exp(0.0321*k+10.6))
end

##################################################


#Aufgabe a)


for i = 1:10
    if cj[i] == -0.0
        Pfa[i] = 0
    else
        Pfa[i], error = quadgk(x -> F_min_x1(-cj[i]*x)*f_x1(x),-x02/cj[i],1234)
        global Pfa_ges = Pfa_ges + Pfa[i]
    end
end



#Aufgabe b)

for i = 1:10
   if cj[i] == -0.0

   else
       Pfb[i], error = quadgk(x -> f_x1(x) * F_min_x1(-cj[i]*x), -x02/cj[i] ,
10000)
       global Pfb_ges = Pfb_ges + Pfb[i]
   end
end

#Aufgabe c)

for i = 1:10
   if cjk[i] == 0
       Pfc[i] = 0.0
   else
       k = kj[i]/cjk[i]
       Pfc[i] = fk(k)
       PfcII[i] = 1 - fkII(k)
       global Pfc_ges = Pfc_ges + Pfc[i]
   end
end
```

```
##################################################
#Ausgabe
println("cj: ",cj)
println("cjk: ",cjk)
println("kj: ", kj)
println()
println("a: ",a,"  b: ", b)
println("sigma_u :",sigma_u,"   muh_u: ",muh_u)
println()
println("Aufgabe a)")
println("Pfa: ", Pfa)
println("Pfa_ges: ",Pfa_ges)
println()
println("Aufgabe b)")
println("Pfb: ", Pfb)
println("Pfb_ges: ", Pfb_ges)
println()
println("Aufgabe c)")
println("Fall I")
println("Pfc :", Pfc)
println("Pfc_ges: ", Pfc_ges)
println("Fall II")
println("PfcII :",PfcII)
```