



Beleg 1

BIW4-05 SIMULATION DYNAMISCHER SYSTEME

Philipp Göbel

Matrikelnummer: 4607083

Immatrikulationsjahr: 2018

21. Mai 2023

Betreuer

Ines Wollny

Jakob Platen

Betreuender Hochschullehrer

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Kaliske

Inhaltsverzeichnis

1	Lösung des Beleges	5
2	Julia-Code	9

1. Beleg	BIW4-05 SIMULATION DYNAMISCHER SYSTEME	SS 2023
Thema	Elastisch gebetteter Balken	
	Bauingenieurwesen	8. Semester

Gegeben ist das als Balken auf elastischer Bettung idealisierte Modell einer Schiene (siehe Abbildung 1) mit den zugehörigen Materialparametern:

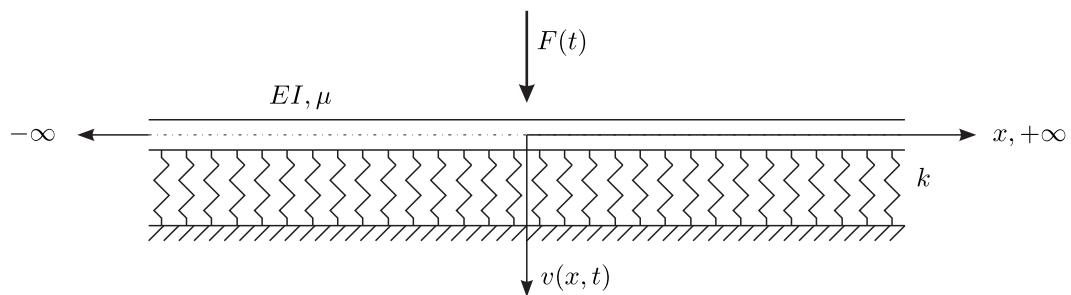


Abbildung 1: Elastisch gebetteter Balken

$$E = 21 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad I = 3055 \text{ cm}^4, \quad \mu = 60 \frac{\text{kg}}{\text{m}}, \quad k = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Die dynamische Steifigkeit $K(\eta)$ des Balkens kann analytisch abgeleitet werden:

$$\hat{F}_0 = \overline{K}(\eta) \hat{v}_0, \quad \overline{K}(\eta) = 8 EI W^3, \quad W = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\frac{k}{EI} (1 - \eta^2)}, \quad \eta^2 = \Omega^2 \frac{\mu}{k}.$$

Für $\eta > 1,0$ gilt $\sqrt[4]{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i)$. Die Koeffizienten einer gebrochenrationalen Approximation der Steifigkeit $\tilde{K}(\omega)$,

$$\overline{K}(\Omega) \approx \tilde{K}(\Omega) = \frac{P_0 + i\Omega P_1 + (i\Omega)^2 P_2 + \dots + (i\Omega)^5 P_5}{1 + i\Omega Q_1 + \dots + (i\Omega)^4 Q_4},$$

wurden mit Hilfe der Fehlerquadratmethode bereits ermittelt:

$$\begin{aligned} P_0 &= 10337706,5 \text{ N m}^{-1} \\ P_1 &= 48744,172 \text{ N m}^{-1} \text{ s}^1 \\ P_2 &= 455,205728 \text{ N m}^{-1} \text{ s}^2 \\ P_3 &= 1,13950676 \text{ N m}^{-1} \text{ s}^3 \\ P_4 &= 0,00483245447 \text{ N m}^{-1} \text{ s}^4 \\ P_5 &= 3,11054119 \cdot 10^{-6} \text{ N m}^{-1} \text{ s}^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 0,00490648418 \text{ s} \\
Q_2 &= 2,71147593 \cdot 10^{-5} \text{ s}^2 \\
Q_3 &= 5,42912842 \cdot 10^{-8} \text{ s}^3 \\
Q_4 &= 6,94958499 \cdot 10^{-12} \text{ s}^4
\end{aligned}$$

Aufgabenstellung:

1. Überführen Sie die gebrochenrationale Steifigkeitsbeziehung in ein System von linearen Gleichungen in $(i\Omega)$: $i\Omega \mathbf{A} \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{r}$.
2. Transformieren Sie das System in den Zeitbereich.
3. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System in Ruhe und die Durchbiegung v_0 ist gleich Null. Ermitteln Sie numerisch eine Lösung im Zeitbereich für die Durchbiegung $v_0(t)$ infolge der gegebenen Erregung für $0 \leq t \leq 1 \text{ s}$.

$$v_0(t) = v(x = 0, t)$$

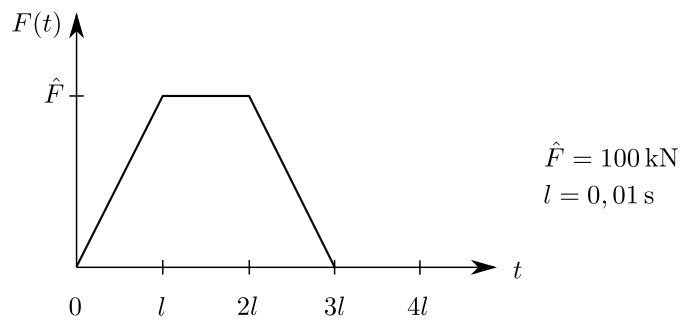


Abbildung 2: Erregung

1 Lösung des Beleges

Mithilfe der bereits gegebenen Koeffizienten einer gebrochenrationalen Approximation der Steifigkeit und des Arbeitsblattes aus Übung 1 kann die Steifigkeitsbeziehung in ein System von linearen Gleichungen $i\Omega\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{r}$ überführt werden.

$$\begin{aligned}\lambda^5 &: s_1^{(0)} Q_4^{(0)} &= p_5^{(0)} \rightarrow s_1^{(0)}, \\ \lambda^4 &: s_0^{(0)} Q_4^{(0)} + s_1^{(0)} Q_3^{(0)} &= p_4^{(0)} \rightarrow s_0^{(0)}, \\ \lambda^3 &: s_0^{(0)} Q_3^{(0)} + s_1^{(0)} Q_2^{(0)} + r_3^{(0)} &= p_3^{(0)} \rightarrow r_3^{(0)}, \\ \lambda^2 &: s_0^{(0)} Q_2^{(0)} + s_1^{(0)} Q_1^{(0)} + r_2^{(0)} &= p_2^{(0)} \rightarrow r_2^{(0)}, \\ \lambda^1 &: s_0^{(0)} Q_1^{(0)} + s_1^{(0)} &= p_1^{(0)} \rightarrow r_1^{(0)}, \\ \lambda^0 &: s_0^{(0)} + r_0^{(0)} &= p_0^{(0)} \rightarrow r_0^{(0)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda^4 &: s_1^{(1)} r_3^{(0)} &= Q_4^{(0)} \rightarrow s_1^{(1)}, \\ \lambda^3 &: s_0^{(1)} r_3^{(0)} + s_1^{(1)} r_2^{(0)} &= Q_3^{(0)} \rightarrow s_0^{(1)}, \\ \lambda^2 &: s_0^{(1)} r_2^{(0)} + s_1^{(1)} r_1^{(0)} + r_2^{(1)} &= Q_2^{(0)} \rightarrow r_2^{(1)}, \\ \lambda^1 &: s_0^{(1)} r_1^{(0)} + s_1^{(1)} r_0^{(0)} + r_1^{(1)} &= Q_1^{(0)} \rightarrow r_1^{(1)}, \\ \lambda^0 &: s_0^{(1)} r_0^{(0)} + r_0^{(1)} &= Q_0^{(0)} \rightarrow r_0^{(1)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda^3 &: s_1^{(2)} r_2^{(1)} &= r_3^{(0)} \rightarrow s_1^{(2)}, \\ \lambda^2 &: s_0^{(2)} r_2^{(1)} + s_1^{(2)} r_1^{(1)} &= r_2^{(0)} \rightarrow s_0^{(2)}, \\ \lambda^1 &: s_0^{(2)} r_1^{(1)} + s_1^{(2)} r_0^{(1)} + r_1^{(2)} &= r_1^{(0)} \rightarrow r_1^{(2)}, \\ \lambda^0 &: s_0^{(2)} r_0^{(1)} + r_0^{(2)} &= r_0^{(0)} \rightarrow r_0^{(2)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda^2 &: s_1^{(3)} r_1^{(2)} &= r_2^{(1)} \rightarrow s_1^{(3)}, \\ \lambda^1 &: s_0^{(3)} r_1^{(2)} + s_1^{(3)} r_0^{(2)} &= r_1^{(1)} \rightarrow s_0^{(3)}, \\ \lambda^0 &: s_0^{(3)} r_0^{(2)} + r_0^{(3)} &= r_0^{(1)} \rightarrow r_0^{(3)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_0^{(4)} &= \frac{r_0^{(2)}}{r_0^{(3)}} \\ s_1^{(4)} &= \frac{r_1^{(2)}}{r_0^{(3)}}\end{aligned}$$

Dabei ist $\hat{f}_0 = 0$, weil es keine Anfangsbelastung gibt.

Aus den Beziehungen lassen sich die Matrizen **A**, **B**, **f** wie folgt belegen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s_1^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_1^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_1^{(4)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} s_0^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_0^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_0^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_0^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_0^{(4)} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \hat{f}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 447586.61 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -4.92 \times 10^{-14} & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -7.92 \times 10^8 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -2.25 \times 10^{-13} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 8.68 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2.80 \times 10^9 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & -3.58 \times 10^{-10} & -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.0 & -3.20 \times 10^{11} & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.75 \times 10^{-13} & -1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 1.06 \times 10^{10} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Um die numerische Lösung im Zeitbereich für die Durchbiegung $v_0(t)$ infolge der gegebenen Erregung zu ermitteln, muss die Lösung in Zeitschritten integriert werden. Zunächst muss das System von dem Frequenzbereich in den Zeitbereich transformiert werden. Für den Frequenzbereich gilt:

$$\lambda \mathbf{A} \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{F}} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{z}(t) = \hat{\mathbf{z}} \cdot e^{i\omega t} = \hat{\mathbf{z}} e^{\lambda t} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{F}(t) = \hat{\mathbf{F}} \cdot e^{i\omega t} = \hat{\mathbf{F}} e^{\lambda t} \quad (1.3)$$

$$(1.4)$$

Die Ableitung der Zeit ergibt:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \lambda \hat{\mathbf{z}} e^{\lambda t} \quad (1.5)$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B} \mathbf{z}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1.6)$$

Hierbei sind die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} zeitlich konstante Matrizen.

Nun zur Lösung durch Integration

$$\int [\mathbf{A} \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B} \mathbf{z}(t) = \mathbf{F}(t)] dt = \int \mathbf{F}(t) dt \quad (1.7)$$

Die lineare Ansatzfunktion ergibt sich für den Bereich $t_0 \leq t \leq t_1$ zu:

$$\mathbf{z}(t) \approx \mathbf{z}_0 \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) + \mathbf{z}_1 \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right) \quad (1.8)$$

Jetzt wird die Ableitung gebildet und in (1.7) eingesetzt:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) \approx \mathbf{z}_0(t) \frac{1}{\Delta t} + \mathbf{z}_1(t) \frac{1}{\Delta t} \quad (1.9)$$

$$\int_0^{\Delta t} \left[\mathbf{A} \cdot (-\mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_1) \frac{1}{\Delta t} + \mathbf{B} \left[\mathbf{z}_0 \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) + \mathbf{z}_1 \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right) \right] \right] d\tau = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(t) d\tau \quad (1.10)$$

$$\left(\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} \right) \mathbf{z}_1 + \left(\frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} - \mathbf{A} \right) \mathbf{z}_0 = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(t) d\tau \quad (1.11)$$

nach Umstellen auf \mathbf{z} , gilt für einen Zeitschritt:

$$\mathbf{z}_1 = \left(\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} \right)^{-1} \cdot \left[\int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(t) d\tau - \left(\frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} - \mathbf{A} \right) \mathbf{z}_0 \right] \quad (1.12)$$

Für die Integration von $\mathbf{F}(t)$ gilt:

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(t) d\tau = \frac{\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1}{2} \Delta t \quad (1.13)$$

Dabei ist für die Integration zu beachten, dass $F(t)$ auch als Vektor $\mathbf{F}(t)$ darzustellen ist. Die erste Stelle des Vektors wird mit $\hat{F} = 100 \text{ kN}$ befüllt und der Rest ist null.

Für die Berechnung von z_1 habe ich $\Delta t = 0.0001\text{s}$ gewählt.
Als Ergebnis für z_1 komme ich auf folgendes Ergebnis.

$$z_1 = \begin{bmatrix} 0.000305824231123104 \\ 835182.7143650816 \\ -8.958575596555298e-7 \\ 23107.04125860822 \\ 6.00216711715513e-6 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Der erste Wert von z_1 stellt die gesuchte Größe v_0 dar.

Somit ist das Endergebnis:

$$v_0(t) = 0.000305824231123104 \frac{m}{s} \quad (1.15)$$

Der Verlauf von z_1 ist im folgenden Diagramm über den Zeitraum von $0 \leq t \leq 1$ dargestellt.

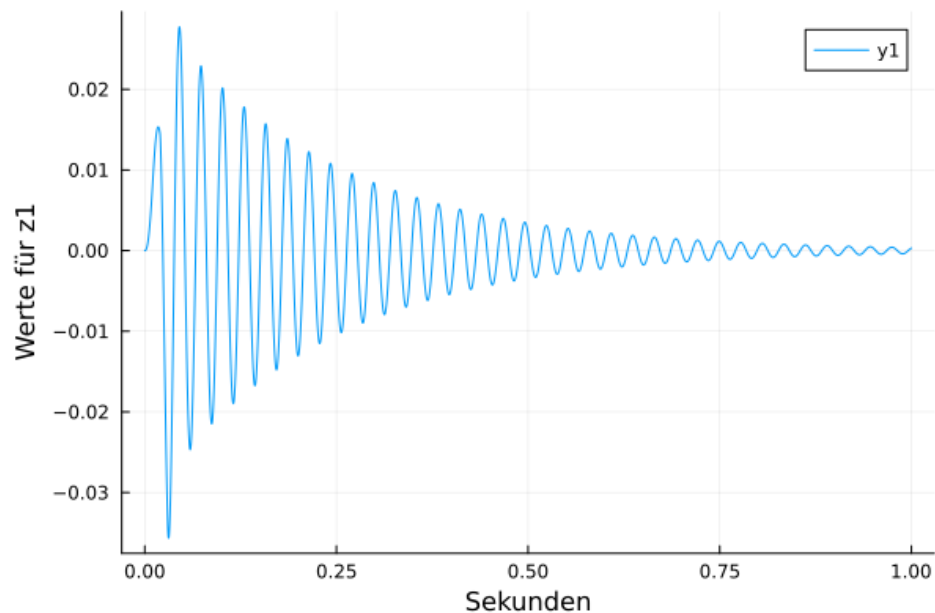


Abbildung 1.1: Verlauf von z_1 über $0 \leq t \leq 1\text{s}$

Es ist deutlich die Belastung infolge von $F(t)$ zu sehen, die dann mit der Zeit abklingt.

2 Julia-Code

```
1 using Plots
2
3 # Koeffizienten einer gebrochenrationalen Approximation der Steifigkeit
4 P0 = 10337706.5
5 P1 = 48744.172
6 P2 = 455.205728
7 P3 = 1.13950676
8 P4 = 0.00483245447
9 P5 = 3.11054119e-6
10
11 Q0 = 1
12 Q1 = 0.00490648418
13 Q2 = 2.71147593e-5
14 Q3 = 5.42912842e-8
15 Q4 = 6.94958499e-12
16
17 #####
18
19
20
21 #Abspaltung
22
23 s1_0 = P5/Q4
24 s0_0 = (P4-s1_0*Q3)/Q4
25 r3_0 = P3-s0_0*Q3-s1_0*Q2
26 r2_0 = P2-s0_0*Q2-s1_0*Q1
27 r1_0 = P1-s0_0*Q1-s1_0
28 r0_0 = P0-s0_0
29
30
31 s1_1 = Q4/r3_0
32 s0_1 = (Q3-s1_1*r2_0)/r3_0
33 r2_1 = Q2-s0_1*r2_0-s1_1*r1_0
34 r1_1 = Q1-s0_1*r1_0-s1_1*r0_0
35 r0_1 = Q0-s0_1*r0_0
36
```

```

37
38 s1_2 = r3_0/r2_1
39 s0_2 = (r2_0-s1_2*r1_1)/r2_1
40 r1_2 = r1_0-s0_2*r1_1-s1_2*r0_1
41 r0_2 = r0_0-s0_2*r0_1
42
43
44 s1_3 = r2_1/r1_2
45 s0_3 = (r1_1-s1_3*r0_2)/r1_2
46 r0_3 = r0_1-s0_3*r0_2
47
48
49 s0_4 = r0_2/r0_3
50 s1_4 = r1_2/r0_3
51
52
53 f0 = 0
54
55
56 A = [s1_0 0 0 0 0;
57       0 -s1_1 0 0 0;
58       0 0 s1_2 0 0;
59       0 0 0 -s1_3 0;
60       0 0 0 0 s1_4]
61
62 B = [s0_0 1 0 0 0;
63       1 -s0_1 -1 0 0;
64       0 -1 s0_2 1 0;
65       0 0 1 -s0_3 -1;
66       0 0 0 -1 s0_4]
67
68
69
70 r = [0;0;0;0;0]
71
72 println(A)
73 println(B)
74 println(r)
75
76
77
78 #####
79
80
81 #Zeitschrittlnge wird hier im Skript mit t anstatt delta t beschrieben
82 t = 0.0001 #s
83
84 #Anzahl der Iterationsschritte
85 # Die Anzahl der Iterationsschritte ergeben sich aus der Größe von t
86
87

```

```

88 j_ges = Int(1/t+1)
89 j_Schritt = Int(1/t)
90 println("Anzahl der Zeitschritte: ", j_Schritt)
91
92 #Befüllen der Anfangsarrays
93 z0 = [0;0;0;0;0]
94
95 #Array für die Darstellung des Plots
96 z3 = zeros(j_ges)
97
98 # Erstellen eines Arrays über die Zeitschritte, für in die Integration
99 j = zeros(j_ges, 1)
100 for i in 1:j_ges
101     j[i, 1] = (i - 1) * t
102 end
103
104
105
106 # Funktionen von F(t)
107 # Diese sind in 3 Teilen unterteilt, wie aus der Grafik in der Aufgabenstellung
108 # zu entnehmen ist
109 function F1(k)
110     return [1;0;0;0;0]*100000/0.01*k
111 end
112
113 F2 = [1;0;0;0;0]*100000
114
115 function F3(k)
116     return [1;0;0;0;0]*(100000 - 100000/0.01*k)
117 end
118
119
120 # Integration über den gesamten Zeitbereich von 1 Sekunden
121 # Dabei wird mit der if Anweisung geschaut, in welchem Bereichen des Graphen
122 # man sich befindet
123 for i = 1:j_ges
124
125     if i == 1
126         z1 = (A+0.001/2*B)^-1 * (F1(j[i])+F1(j[i+1]))/2*t
127         global z0 = z1
128     end
129
130     if i>1 && i<=0.01*j_Schritt
131         z1 = inv((A+t/2*B)) * ((F1(j[i])+F1(j[i+1]))/2*t-(t/2*B-A)*z0)
132         global z0 = z1
133     end
134
135     if i>0.01*j_Schritt && i<=0.02*j_Schritt
136         z1 = inv((A+t/2*B)) * (F2*t-(t/2*B-A)*z0)
137         global z0 = z1
138     end

```

```

139
140     if i>0.02*j_Schritt && i<=0.03*j_Schritt
141         z1 = inv((A+t/2*B)) * ((F3(j[i])+F3(j[i+1]))/2*t-(t/2*B-A)*z0)
142         global z0 = z1
143     end
144
145     if i>0.03*j_Schritt
146         z1 = inv(A+t/2*B) * -(t/2*B-A)*z0
147         global z0 = z1
148     end
149
150     z3[i] = z1[1]
151
152 end
153
154 #Ausgabe der Ergebnisse
155 println("L sung f r z1")
156 println(z0)
157
158 plot(j, z3, xlabel = "Sekunden", ylabel = "Werte f r z1")
159 savefig("plot.png")

```