TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bauingeniuerwesen Institut für Statik und Dynamik

Beleg 1

BIW4-05 SIMULATION DYNAMISCHER SYSTEME

Philipp Göbel

Matrikelnummer: 4607083
Immatrikulationsjahr: 2018

21. Mai 2023

Betreuer

Ines Wollny
Jakob Platen

Betreuender Hochschullehrer

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Kaliske

Inhaltsverzeichnis

Technische Universität Dresden
Fakultät Bauingenieurwesen

Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke
Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. M. Kaliske

1. Beleg	**BIW4-05 SIMULATION DYNAMISCHER SYSTEME**	**SS 2023**
Thema	Elastisch gebetteter Balken	
	Bauingenieurwesen	8. Semester

Gegeben ist das als Balken auf elastischer Bettung idealisierte Modell einer Schiene (siehe Abbildung 1) mit den zugehörigen Materialparametern:

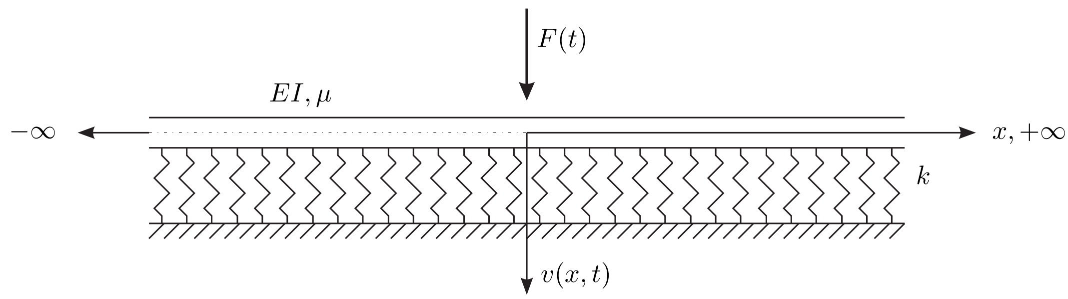

Abbildung 1: Elastisch gebetteter Balken

$$E = 21 \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}, \quad I = 3055\,\mathrm{cm}^4, \quad \mu = 60\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}, \quad k = 3 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\,.$$

Die dynamische Steifigkeit $K(\eta)$ des Balkens kann analytisch abgeleitet werden:

$$\hat{F}_0 = \overline{K}(\eta)\,\hat{v}_0, \quad \overline{K}(\eta) = 8\,EI\,W^3, \quad W = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{\frac{k}{EI}\,(1-\eta^2)}, \quad \eta^2 = \Omega^2\,\frac{\mu}{k}.$$

Für $\eta > 1{,}0$ gilt $\sqrt[4]{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+i)$. Die Koeffizienten einer gebrochenrationalen Approximation der Steifigkeit $\tilde{K}(\omega)$,

$$\overline{K}(\Omega) \approx \tilde{K}(\Omega) = \frac{P_0 + i\Omega\,P_1 + (i\Omega)^2\,P_2 + \ldots + (i\Omega)^5\,P_5}{1 + i\Omega\,Q_1 + \ldots + (i\Omega)^4\,Q_4}\,,$$

wurden mit Hilfe der Fehlerquadratmethode bereits ermittelt:

$$\begin{aligned}
P_0 &= 10337706{,}5\ \mathrm{N\,m^{-1}} \\
P_1 &= 48744{,}172\ \mathrm{N\,m^{-1}\,s^1} \\
P_2 &= 455{,}205728\ \mathrm{N\,m^{-1}\,s^2} \\
P_3 &= 1{,}13950676\ \mathrm{N\,m^{-1}\,s^3} \\
P_4 &= 0{,}00483245447\ \mathrm{N\,m^{-1}\,s^4} \\
P_5 &= 3{,}11054119 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N\,m^{-1}\,s^5}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= 0{,}00490648418 \ \text{s} \\
Q_2 &= 2{,}71147593 \cdot 10^{-5} \ \text{s}^2 \\
Q_3 &= 5{,}42912842 \cdot 10^{-8} \ \text{s}^3 \\
Q_4 &= 6{,}94958499 \cdot 10^{-12} \ \text{s}^4
\end{aligned}
$$

Aufgabenstellung:

1. Überführen Sie die gebrochenrationale Steifigkeitsbeziehung in ein System von linearen Gleichungen in $(i\Omega)$: $\quad i\Omega\,\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\,\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{r}$.

2. Transformieren Sie das System in den Zeitbereich.

3. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System in Ruhe und die Durchbiegung v_0 ist gleich Null. Ermitteln Sie numerisch eine Lösung im Zeitbereich für die Durchbiegung $v_0(t)$ infolge der gegebenen Erregung für $0 \leq t \leq 1\,\text{s}$.

   $$v_0(t) = v(x = 0, t)$$

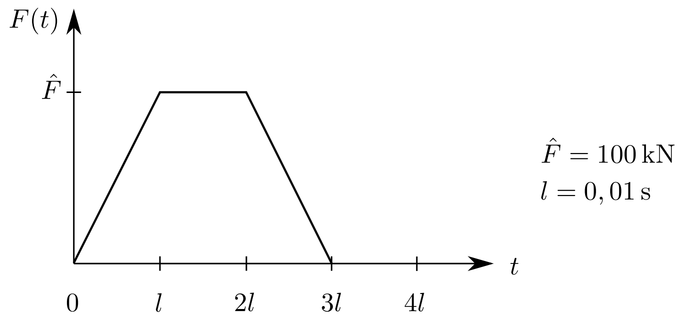

Abbildung 2: Erregung

1 Lösung des Beleges

Mithilfe der bereits gegebenen Koeffizienten einer gebrochenrationalen Approximation der Steifigkeit und des Arbeitsblattes aus Übung 1 kann die Steifigkeitsbeziehung in ein System von linearen Gleichungen $i\Omega \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{r}$ überführt werden.

$$
\begin{aligned}
\lambda^5 &: \quad s_1^{(0)} Q_4^{(0)} && = P_5^{(0)} \rightarrow s_1^{(0)};\\
\lambda^4 &: \quad s_0^{(0)} Q_4^{(0)} + s_1^{(0)} Q_3^{(0)} && = P_4^{(0)} \rightarrow s_0^{(0)};\\
\lambda^3 &: \quad s_0^{(0)} Q_3^{(0)} + s_1^{(0)} Q_2^{(0)} + r_3^{(0)} && = P_3^{(0)} \rightarrow r_3^{(0)};\\
\lambda^2 &: \quad s_0^{(0)} Q_2^{(0)} + s_1^{(0)} Q_1^{(0)} + r_2^{(0)} && = P_2^{(0)} \rightarrow r_2^{(0)};\\
\lambda^1 &: \quad s_0^{(0)} Q_1^{(0)} + s_1^{(0)} && = P_1^{(0)} \rightarrow r_1^{(0)};\\
\lambda^0 &: \quad s_0^{(0)} + r_0^{(0)} && = P_0^{(0)} \rightarrow r_0^{(0)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda^4 &: \quad s_1^{(1)} r_3^{(0)} && = Q_4^{(0)} \rightarrow s_1^{(1)};\\
\lambda^3 &: \quad s_0^{(1)} r_3^{(0)} + s_1^{(1)} r_2^{(0)} && = Q_3^{(0)} \rightarrow s_0^{(1)};\\
\lambda^2 &: \quad s_0^{(1)} r_2^{(0)} + s_1^{(1)} r_1^{(0)} + r_2^{(1)} && = Q_2^{(0)} \rightarrow r_2^{(1)};\\
\lambda^1 &: \quad s_0^{(1)} r_1^{(0)} + s_1^{(1)} r_0^{(0)} + r_1^{(1)} && = Q_1^{(0)} \rightarrow r_1^{(1)};\\
\lambda^0 &: \quad s_0^{(1)} r_0^{(0)} \quad + r_0^{(1)} && = Q_0^{(0)} \rightarrow r_0^{(1)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda^3 &: \quad s_1^{(2)} r_2^{(1)} && = r_3^{(0)} \rightarrow s_1^{(2)};\\
\lambda^2 &: \quad s_0^{(2)} r_2^{(1)} + s_1^{(2)} r_1^{(1)} && = r_2^{(0)} \rightarrow s_0^{(2)};\\
\lambda^1 &: \quad s_0^{(2)} r_1^{(1)} + s_1^{(2)} r_0^{(1)} + r_1^{(2)} && = r_1^{(0)} \rightarrow r_1^{(2)};\\
\lambda^0 &: \quad s_0^{(2)} r_0^{(1)} + r_0^{(2)} && = r_0^{(0)} \rightarrow r_0^{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 &: \quad s_1^{(3)} r_1^{(2)} && = r_2^{(1)} \rightarrow s_1^{(3)};\\
\lambda^1 &: \quad s_0^{(3)} r_1^{(2)} + s_1^{(3)} r_0^{(2)} && = r_1^{(1)} \rightarrow s_0^{(3)};\\
\lambda^0 &: \quad s_0^{(3)} r_0^{(2)} + r_0^{(3)} && = r_0^{(1)} \rightarrow r_0^{(3)};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_0^{(4)} &= \frac{r_0^{(2)}}{r_0^{(3)}}\\
s_1^{(4)} &= \frac{r_1^{(2)}}{r_0^{(3)}}
\end{aligned}
$$

Dabei ist $\hat{f}_0 = 0$, weil es keine Anfangsbelastung gibt.

Aus den Beziehungen lassen sich die Matrizen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{f}$ wie folgt belegen:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} s_1^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_1^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_1^{(4)} \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} s_0^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_0^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_0^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_0^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_0^{(4)} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathsf{f}} = \begin{bmatrix} \hat{f}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 447586.61 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -4.92 \times 10^{-14} & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -7.92 \times 10^{8} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -2.25 \times 10^{-13} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 8.68 \times 10^{7} \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} -2.80 \times 10^{9} & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & -3.58 \times 10^{-10} & -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.0 & -3.20 \times 10^{11} & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.75 \times 10^{-13} & -1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 1.06 \times 10^{10} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathsf{f}} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Um die numerische Lösung im Zeitbereich für die Durchbiegung $v_0(t)$ infolge der gegebenen Erregung zu ermitteln, muss die Lösung in Zeitschritten integriert werden.
Zunächst muss das System von dem Frequenzbereich in den Zeitbereich transformiert werden. Für den Frequenzbereich gilt:

$$\lambda\, \mathbf{A}\, \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\, \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{F}} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{z}(t) = \hat{\mathbf{z}} \cdot e^{i\omega t} = \hat{\mathbf{z}} e^{\lambda t} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{F}(t) = \hat{\mathbf{F}} \cdot e^{i\omega t} = \hat{\mathbf{F}} e^{\lambda t} \tag{1.3}$$

$$\tag{1.4}$$

Die Ableitung der Zeit ergibt:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \lambda \hat{\mathbf{z}} e^{\lambda t} \tag{1.5}$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{A}\, \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B}\, \mathbf{z}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{1.6}$$

Hierbei sind die Matrizen **A** und **B** zeitlich konstante Matrizen.

Nun zur Lösung durch Integration

$$\int [\mathbf{A}\, \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B}\, \mathbf{z}(t) = \mathbf{F}(t)]\, dt = \int \mathbf{F}(t)\, dt \tag{1.7}$$

Die lineare Ansatzfunktion ergibt sich für den Bereich $t_0 \leq t \leq t_1$ zu:

$$\mathbf{z}(t) \approx \mathbf{z}_0 \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) + \mathbf{z}_1 \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right) \tag{1.8}$$

Jetzt wird die Ableitung gebildet und in (1.7) eingesetzt:

$$\hat{\mathbf{z}}(t) \approx \mathbf{z}_0(t)\, \frac{1}{\Delta t} + \mathbf{z}_1(t)\, \frac{1}{\Delta t} \tag{1.9}$$

$$\int_0^{\Delta t} \left[\mathbf{A} \cdot (-\mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_1)\frac{1}{\Delta t} + \mathbf{B}\left[\mathbf{z}_0(1 - \frac{\tau}{\Delta t}) + \mathbf{z}_1(\frac{\tau}{\Delta t})\right]\right] d\tau = \int_0^{\Delta t} = \mathbf{F}(t) d\tau \tag{1.10}$$

$$\left(\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}\right) \mathbf{z}_1 + \left(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B} - \mathbf{A}\right) \mathbf{z}_0 = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(t) d\tau \tag{1.11}$$

nach Umstellen auf **z**, gilt für einen Zeitschritt:

$$\mathbf{z}_1 = (\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B})^{-1} \cdot \left[\int_0^{\Delta t} F(t) d\tau - \left(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B} - \mathbf{A}\right) \mathbf{z}_0\right] \tag{1.12}$$

Für die Integration von $\mathbf{F}(t)$ gilt:

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(t) d\tau = \frac{\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1}{2} \Delta t \tag{1.13}$$

Dabei ist für die Integration zu beachten, dass $F(t)$ auch als Vektor $\mathbf{F}(t)$ darzustellen ist. Die erste Stelle des Vektors wird mit $\hat{F} = 100kN$ befüllt und der Rest ist null.

Für die Berechnung von z_1 habe ich $\Delta t = 0.0001s$ gewählt.
Als Ergebnis für z_1 komme ich auf folgendes Ergebnis.

$$z_1 = \begin{bmatrix} 0.00013355132996236826 \\ 379196.3504455571 \\ -1.1176877168610927 \cdot 10^{-6} \\ -37584.83957163792 \\ 6.526569539318562 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

Der erste Wert von z_1 stellt die gesuchte Größe v_0 dar.

Somit ist das Endergebnis:

$$v_0(t) = 0.00013355132996236826\ \frac{m}{s} \tag{1.15}$$

Der Verlauf von z_1 ist im folgenden Diagramm über den Zeitraum von $0 \leq t \leq 1$ dargestellt.

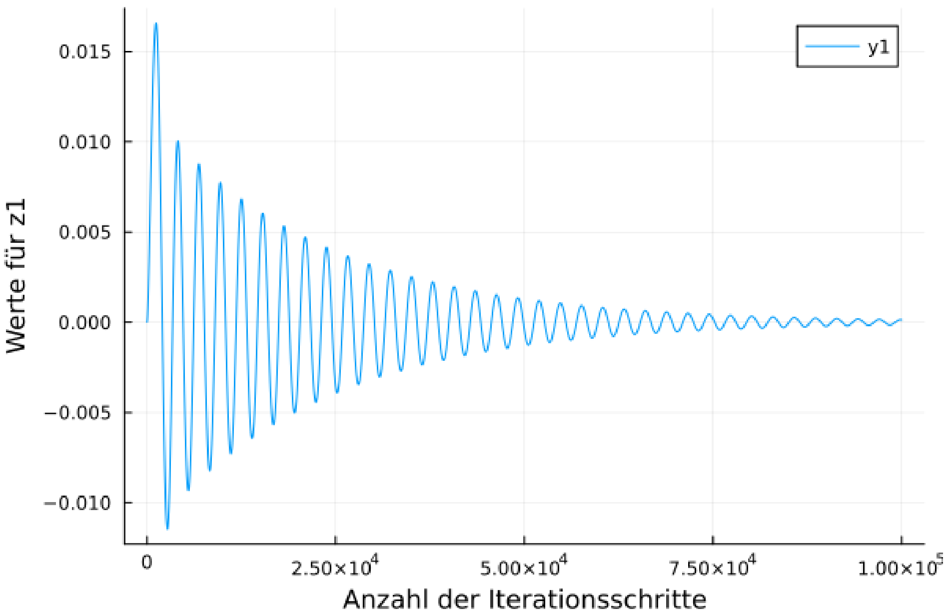

Abbildung 1.1: Verlauf von z_1 über $0 \leq t \leq 1s$

Es ist deutlich die Belastung infolge von $F(t)$ zu sehen, die dann mit der Zeit abklingt.

2 Julia-Code

```julia

using Plots

# Koeffizienten einer gebrochenrationalen Approximation der Steifigkeit
P0 = 10337706.5
P1 = 48744.172
P2 = 455.205728
P3 = 1.13950676
P4 = 0.00483245447
P5 = 3.11054119e-6

Q0 = 1
Q1 = 0.00490648418
Q2 = 2.71147593e-5
Q3 = 5.42912842e-8
Q4 = 6.94958499e-12

# Abspaltung
s1_0 = P5 / Q4
s0_0 = (P4 - s1_0 * Q3) / Q4
r3_0 = P3 - s0_0 * Q3 - s1_0 * Q2
r2_0 = P2 - s0_0 * Q2 - s1_0 * Q1
r1_0 = P1 - s0_0 * Q1 - s1_0
r0_0 = P0 - s0_0

s1_1 = Q4 / r3_0
s0_1 = (Q3 - s1_1 * r2_0) / r3_0
r2_1 = Q2 - s0_1 * r2_0 - s1_1 * r1_0
r1_1 = Q1 - s0_1 * r1_0 - s1_1 * r0_0
r0_1 = Q0 - s0_1 * r0_0

s1_2 = r3_0 / r2_1
s0_2 = (r2_0 - s1_2 * r1_1) / r2_1
r1_2 = r1_0 - s0_2 * r1_1 - s1_2 * r0_1
r0_2 = r0_0 - s0_2 * r0_1

```

```
s1_3 = r2_1 / r1_2
s0_3 = (r1_1 - s1_3 * r0_2) / r1_2
r0_3 = r0_1 - s0_3 * r0_2

s0_4 = r0_2 / r0_3
s1_4 = r1_2 / r0_3

f0 = 0

A = [s1_0 0 0 0 0;
     0 -s1_1 0 0 0;
     0 0 s1_2 0 0;
     0 0 0 -s1_3 0;
     0 0 0 0 s1_4]

B = [s0_0 1 0 0 0;
     1 -s0_1 -1 0 0;
     0 -1 s0_2 1 0;
     0 0 1 -s0_3 -1;
     0 0 0 -1 s0_4]

r = [0; 0; 0; 0; 0]

println(A)
println(B)
println(r)

# Zeitschrittl nge wird hier im Skript mit t anstatt delta t beschrieben
delta_t = 0.00001 # s
t = 0
t_end = 1
k = 1

# Array f r die Darstellung des Plots
z3 = Float64[]
z0 = [0;0;0;0;0]

function Belastung(t)
    if t < 0 && t < 0.01
        return (t-0.01)/0.01 * [100000; 0; 0; 0; 0]
    elseif t <= 0.01 && t < 0.02
        return [100000; 0; 0; 0; 0]
    elseif t <= 0.02 && t < 0.03
        return (0.02-t)/0.01 * [100000; 0; 0; 0; 0]
    else
        return [0;0;0;0;0]
    end
end

while true
    z1 = inv(A + delta_t/2*B) * ((Belastung(t) + Belastung(t+delta_t))/2*delta_t - (c
```

```


    global z0 = z1

    push!(z3, z1[1])
    global k += 1
    global t += delta_t
    if t >= t_end
        break
    end
end

println("L sung f r z1")
println(z0)

plot(z3, xlabel="Anzahl der Iterationsschritte", ylabel="Werte f r z1")
savefig("plot.png")
```