

Geometrische Aspekte von Mixed Differenzenideale

Andrés Goens

5. März 2014

Überblick

- ▶ Überblick Differenzenalgebra
 - ▶ Differenzenalgebra
 - ▶ Differenzenpolynomringe
 - ▶ Differenzenvarietäten
 - ▶ Differenzenalgebraische Ergebnisse
- ▶ Motivation
- ▶ Mixed Differenzenvarietäten
 - ▶ Mixed Differenzenvarietäten
 - ▶ Mixed Differenzenideale
 - ▶ Weitere Ergebnisse
- ▶ Differenzenkerne
- ▶ Referenzen

Überblick Differenzenalgebra

Hauptstudienobjekte:

Definition

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 (Körper), und sei $\sigma : R \rightarrow R$ ein Ringendomorphismus in R .

- ▶ Dann heißt der Tupel (R, σ) ein *Differenzenring(körper)*, oder *σ -Ring(Körper)*.
- ▶ Ein Ideal $I \trianglelefteq R$ der stabil unter σ ist, d.h. $\sigma(I) \subseteq I$, heißt *Differenzenideal* oder *σ -Ideal*. Symbol: $I \trianglelefteq_{\sigma} R$.

Differenzenpolynomringe

Definition

Sei k ein σ -Körper. Der Polynomring in unendlich viele Variablen $k[y_1, \sigma(y_1), \sigma^2(y_1), \dots]$ heißt σ -Polynomring in der Differenzenvariable y_1 . Symbol: $k\{y_1\}$. Es wird ein σ -Ring durch

$$\sigma(\sigma^n(y_1)) := \sigma^{n+1}(y_1).$$

Analog für ein Tupel von Variablen $y = (y_1, \dots, y_n)$, ist

$$k\{y\} := k\{y_1, \dots, y_n\} := k[y_1, \dots, y_n, \sigma(y_1), \dots, \sigma(y_n), \sigma^2(y_1), \dots]$$

Differenzenpolynomringe (Fortsetzung)

Konzepte von Ordnung, Effektive Ordnung:

$$\blacktriangleright f := y_1 \sigma^2(y_2) + \sigma(y_1) \sigma(y_2) \sigma(y_3) \in k\{y_1, y_2, y_3\}$$

$$\text{Ord}(f) = 2, \text{Eord}(f) = 2$$

$$\blacktriangleright g := \sigma^3(y_1) \sigma^2(y_2) + \sigma(y_1) \sigma(y_2) \sigma(y_3)$$

$$\text{Ord}(g) = 3, \text{Eord}(g) = 2$$

Differenzenvarietäten

Definition

Sei k ein σ -Körper, $F \subseteq k\{y_1, \dots, y_n\}$ eine Menge von Differenzenpolynomen. Für ein σ -Körper K mit $k \subseteq K$ und $\sigma|_k = \sigma$ setzen wir:

$$\mathbb{V}_K(F) := \{x \in K^n \mid f(x) = 0 \ \forall f \in F\}.$$

Dies ist ein Funktor der Kategorie der σ -Körper wie oben (σ -Körpererweiterungen) auf der Kategorie der Mengen und heißt σ -Varietät oder *Differenzenvarietät*.

Differenzenvarietäten (Fortsetzung)

Definition

Sei k ein σ -Körper, $X = \mathbb{V}(F)$ eine σ -Varietät. Dann ist

$$\mathbb{I}(X) := \{f \in k\{y_1, \dots, y_n\} \mid f(a) = 0 \ \forall \ a \in \mathbb{V}_K(F) \\ \forall K \supseteq k \ \sigma\text{-Körpererweiterung}\}.$$

Definition

Für die Menge F gibt es ein kleinstes σ -ideal $\{F\} \trianglelefteq_{\sigma} k\{y_1, \dots, y_n\}$ der *perfekt* ist ($\sigma^{i_1}(f) \cdots \sigma^{i_n}(f) \in \{F\} \Rightarrow f \in \{F\}$), und F und k enthält. Dieser heißt der *perfekte Abschluss* von F .

Differenzenvarietäten (Fortsetzung)

Satz

Sei k ein σ -Körper, $F \subseteq k\{y_1, \dots, y_n\}$. Dann ist $\mathbb{I}(\mathbb{V}(F)) = \{F\}$

Differenzenalgebraische Ergebnisse

Es gibt eine spezielle Klasse von prime Differenzenideale die σ -Prim heißt. Sie erfüllt folgendes:

Satz

Sei R ein σ -Ring und $F \subseteq R$ eine Teilmenge. Dann gilt:

$$\{F\} = \bigcap_{\substack{F \subseteq \mathfrak{p} \trianglelefteq_{\sigma} R, \\ \mathfrak{p} \text{ } \sigma\text{-Prim}}} \mathfrak{p}.$$

Differenzenalgebraische Ergebnisse (Fortsetzung)

- ▶ Die Menge aller σ -Prime σ -Ideale eines σ -rings R bezeichnet man durch $\text{Spec}^\sigma(R)$. Sie ist ein topologischer Raum, der noethersch ist wenn R ein so-genanter *Ritt* Differenzenring ist.
- ▶ $\text{Spec}^\sigma(R)$ ist Quasi-Kompakt.
- ▶ Die σ -Prime σ -Ideale von R stehen in bijektion zu den irreduziblen, abgeschlossenen Mengen in $\text{Spec}^\sigma(R)$.

Differenzenalgebraische Ergebnisse (Fortsetzung)

Konzepte von Differenzengrad und Differenzdimension. Ergebnis damit:

Satz

Sei k ein σ -Körper und $f \in k\{y_1, \dots, y_n\}$, $f \notin k$ ein irreduzibler σ -Polynom, so dass $\text{Eord}(f) = \text{Ord}(f)$. Dann hat die σ -Varietät $\mathbb{V}(f)$ eine irreduzible Komponente X , so dass $\sigma\text{-dim}(X) = n - 1$ und $\sigma\text{-deg}(X) = \text{Ord}(f)$.

Motivation

Motivation

Sei k ein Körper. Dann haben die Polynome y, y^2 die gleichen Nullstellen:

$$y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Aber: $y^2 = (y - 0) \cdot (y - 0)$ hat die Nullstelle 0 “doppelt”.
Wie kann man sie unterscheiden?

Suchen der Nullstellen:

Sucht man nicht in einen Körper, sondern zum Beispiel in der k -algebra $k[y]/(y^2)$, dann ist

$$y^2 = 0 \not\Leftrightarrow y = 0$$

Das Polynom y^2 hat die Nullstellen $\bar{0}, \bar{y} \in k[y]/(y^2)$.

Motivation (Fortsetzung)

Unterscheidung durch die k -Algebren (vgl. Koordinatenring):

$$k[y]/(y) \not\cong k[y]/(y^2)$$

Sogar:

$$\dim_k(k[y]/(y)) = 1, \dim_k(k[y]/(y^2)) = 2$$

Motivation (Fortsetzung)

→ Suche Analogie für Differenzenfall

Differenzengleichungen $\sigma(y) = 0, \sigma^2(y) = 0$ haben gleiche Lösungen über Differenzenkörper, verschiedene “Vielfachheit”.
Wie kann man sie unterscheiden?

$$\{\sigma(y)\} = \{\sigma^2(y)\} = (y, \sigma(y), \sigma^2(y), \dots) \trianglelefteq_{\sigma} k\{y\}$$

Gleichungen liefern gleiche Differenzenvarietät. Neuer Konzept:
suche nicht nur in σ -Körper

Mixed Differenzenvarietäten

Mixed Differenzenvarietäten

Definition

Sei k ein σ -Körper und B ein σ -ring, der ein Integritätsbereich ist mit $k \subseteq B$, $\sigma|_k = \sigma$. Weiter sei $F \subseteq k\{y_1, \dots, y_n\}$ eine Menge von σ -Polynome. Setze

$$\mathbb{V}_B(F) := \{b \in B^n \mid f(b) = 0 \forall f \in F\}.$$

Durch $B \mapsto \mathbb{V}_B(F)$ ist ein Funktor der Kategorie solcher Ringe auf der Kategorie der Mengen gegeben. Wir nennen ihn eine *Mixed σ -Varietät über k* , oder *k - σ - m -Varietät*.

Andere Möglichkeiten: Perfekt-reduzierte σ -Ringe,
 σ -Integritätsbereiche \rightarrow Wieder Differenzenvarietäten.

Mixed Differenzenideale

Definition

- ▶ Ein Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq_{\sigma} k\{y\}$ heißt mixed, wenn $fg \in \mathfrak{a} \Rightarrow f\sigma(g) \in \mathfrak{a}$.
- ▶ Für $F \subseteq k\{y\}$ gibt es ein kleinstes radikales, mixed σ -Ideal. Dieser wird der radikale, mixed Abschluss von F genannt und mit $\{F\}_m$ bezeichnet.

Mixed Differenzenideale (Fortsetzung)

Verbindung:

mixed Differenzenideale \leftrightarrow mixed Differenzenvarietäten.

Mit \mathbb{I}_m analog zu \mathbb{I} für mixed Differenzenvarietäten:

Satz

Sei k ein Körper, $F \subseteq k\{y_1, \dots, y_n\}$, und $X = \mathbb{V}(F)$ eine σ - m -Varietät. Dann:

$$\mathbb{I}_m(\mathbb{V}(F)) = \{F\}_m$$

Weitere Ergebnisse

Satz

Sei R ein σ -Ring und $F \subseteq R$. Dann:

$$\{F\}_m = \bigcap_{\substack{F \subseteq p \trianglelefteq_{\sigma} R \\ p \text{ Prim}}} p.$$

Offen: Endlich viele p ?

Weitere Ergebnisse (Fortsetzung)

Topologischer Raum:

$$\mathrm{Spec}_m^\sigma(R) := \{ \mathfrak{p} \trianglelefteq_\sigma R \mid \mathfrak{p} \text{ prim} \} \supseteq \mathrm{Spec}^\sigma(R)$$

- ▶ $\mathrm{Spec}_m^\sigma(R)$ ist Quasi-Kompakt.
- ▶ Die prime σ -Ideale von R stehen in bijektion zu den irreduziblen, abgeschlossenen Mengen in $\mathrm{Spec}_m^\sigma(R)$.
- ▶ Offen: Noethersch? Äquivalent zu endlich viele \mathfrak{p}

Differenzenkerne

Differenzenkerne

- ▶ Problem: σ -Polynomring hat unendlich viele Variablen, nicht Noethersch.
- ▶ Idee: Untersuche σ -Ideale in Noethersche Unterringe.

Definition

Sei k ein Differenzenkörper. Wir setzen

$$k\{y\}[d] := k[y, \sigma(y), \dots, \sigma^d(y)] \subseteq k\{y\} \text{ und } k\{y\}[-1] := k.$$

Für ein σ -Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq_{\sigma} k\{y\}$ sei

$$\mathfrak{a}[d] := \mathfrak{a} \cap k\{y\}[d].$$

Differenzenkerne (Fortsetzung)

Definition

Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq k\{y\}[d]$, $d \geq 1$. Dann heißt \mathfrak{a} ein *Differenzenkern der Länge d* , wenn $\sigma(\mathfrak{a}[d-1]) \subseteq \mathfrak{a}$. Er heißt ein *primer Differenzenkern*, falls zusätzlich \mathfrak{a} ein *primer Ideal* in $k\{y\}[d]$ ist. Weiterhin wird \mathfrak{a} *reflexiv* genannt, falls $\sigma^{-1}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}[d-1]$.

Beispiel

Sei $\mathfrak{p} \trianglelefteq_{\sigma} k\{y\}$ ein *primer σ -Ideal*, $d \geq 1$. Dann ist $\mathfrak{p}[d] \trianglelefteq k\{y\}[d]$ ein *primer Differenzenkern*. Ist \mathfrak{p} auch σ -Prim, dann ist $\mathfrak{p}[d]$ auch *reflexiv*.

Differenzenkerne (Fortsetzung)

Satz

Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq k\{y\}[d]$ ein reflexiver, primer Differenzenkern. Dann existiert ein σ -primales Ideal $\mathfrak{p} \trianglelefteq_{\sigma} k\{y\}$ mit $\mathfrak{p}[d] = \mathfrak{a}$.

Frage: Gilt das auch für prime Differenzenkerne? (mit prime Differenzenideale)

Differenzenkerne (Fortsetzung)

Proposition

Sei $\mathfrak{a} \subseteq k[y, \dots, \sigma^d(y)]$ ein primärer Differenzenkern und sei $k[y, \dots, \sigma^d(y)]/\mathfrak{a} =: k[a, \sigma(a), \dots, \sigma^d(a)]$. Betrachte die Abbildung

$$\sigma : k[a, \dots, \sigma^{d-1}(a)] \rightarrow k[a, \dots, \sigma^d(a)].$$

Dann existiert ein primärer Differenzenkern \mathfrak{a}' der Länge $d + 1$ mit $\mathfrak{a}'[d] = \mathfrak{a}$ genau dann, wenn das von $\ker(\sigma)$ erzeugte Ideal, $(\ker(\sigma)) \subseteq k[a, \dots, \sigma^d(a)]$, folgendes erfüllt:

$$(\ker(\sigma)) \cap k[a, \dots, \sigma^{d-1}(a)] = \ker(\sigma).$$

Differenzenkerne (Fortsetzung)

Für reflexive, prime Differenzenkerne ist einmal Fortsetzen
Äquivalent zu beliebig oft Fortsetzen. Ohne reflexiv zu sein nicht.
→ Gegenbeispiel.

Vermutung

Sei k ein Differenzenkörper und $\mathfrak{a} \subseteq k\{y\}[d]$ ein primes
Differenzenkern. Weiter sei $a_1 = y_1 + \mathfrak{a}, \dots, a_n = y_n + \mathfrak{a}$. Für $r \geq 1$
betrachte die Abbildung

$$\sigma^r : k[a, \sigma(a), \dots, \sigma^{d-r}(a)] \rightarrow k[a, \dots, \sigma^d(a)], f \mapsto \sigma^r(f).$$

Dann existiert ein primes σ -ideal \mathfrak{p} mit $\mathfrak{p}[d] = \mathfrak{a}$, genau dann wenn

$$(\ker(\sigma), \dots, \ker(\sigma^r)) \cap k[a, \dots, \sigma^{d-r}(a)] = \ker(\sigma^r).$$

“ \Rightarrow ” klar.

Differenzenkerne (Fortsetzung)

Satz

Sei k ein σ -Körper und $f \in k\{y_1, \dots, y_n\}$, $f \notin k$ ein irreduzibles σ -Polynom. Dann hat die σ -m-Varietät $\mathbb{V}(f)$ eine irreduzible, geschlossene Teilmenge X so dass $\sigma\text{-dim}(X) = n - 1$ und $\sigma\text{-deg}(X) = \text{Ord}(f)$.








Differenzenkerne (Fortsetzung)

Beispiel





Betrachte das σ -Polynomring $\mathbb{Q}\{y_1\}$, und das irreduzible σ -Polynom $f := \sigma(y_1) - 1 \in \mathbb{Q}\{y_1\}$. Weiter seinen $X := \mathbb{V}(f)$ als σ -Varietät, und $Y := \mathbb{V}(f)$ als σ -m-Varietät. Beide haben nur eine Primkomponente:

$$[y_1 - 1] = \{\sigma(y_1) - 1\}, [\sigma(y_1) - 1] = \{\sigma(y_1) - 1\}_m$$

Referenzen I

-  Wibmer, Michael *Algebraic Difference Equations (Lecture Notes)*, Available online:
<http://www.algebra.rwth-aachen.de/de/Mitarbeiter/Wibmer/Algebraic%20difference%20equations.pdf>
-  Lang, Serge, *Algebra*, Revised Third Edition, Springer, 2005
-  Eisenbud, David *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer, 1995
-  Hartshorne, Robin *Algebraic Geometry*, Springer, 1977
-  Cohn, Richard *Difference Algebra*, Interscience Publishers, 1965
-  Levin, Alexander *Difference Algebra*, Springer, 2008
-  Hrushovski, Ehud *The Elementary Theory of the Frobenius Automorphism*, arXiv:math/0406514

Referenzen II

-  Bourbaki, Nicolas *Commutative Algebra*, Hermann, 1972
-  Grayson, Daniel R. and Stillman, Michael E., Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry, Available at <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>
-  Levin, Alexander, *On the ascending chain condition for mixed difference ideals*, arXiv:1207.4721
-  Cox, Little and O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Second Edition, Springer, 1997

Vielen dank für ihre Aufmerksamkeit!