Geometrische Aspekte von gemischten Differenzenidealen

Andrés Goens

11. März 2014

Überblick

- Überblick Differenzenalgebra
    - Differenzenalgebra
    - Differenzenpolynomringe
    - Differenzenvarietäten
    - Differenzenalgebraische Ergebnisse
- Motivation
- Mixed Differenzenvarietäten
    - Mixed Differenzenvarietäten
    - Mixed Differenzenideale
    - Weitere Ergebnisse
- Differenzenkerne

Überblick Differenzenalgebra

Differenzenalgebra

Definition

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 (Körper) , und sei $\sigma : R \to R$ ein Ringendomorphismus.

- Dann heißt das Tupel (R, σ) ein *Differenzenring(körper)*, oder *σ-Ring(Körper)*.
- Ein Ideal $I \trianglelefteq R$ der stabil unter σ ist, d.h. $\sigma(I) \subseteq I$, heißt *Differenzenideal* oder *σ-Ideal*. Symbol: $I \trianglelefteq_\sigma R$.

Differenzenpolynomringe

Definition

Sei k ein σ-Körper. Der Polynomring in unendlich vielen Variablen $k[y_1, \sigma(y_1), \sigma^2(y_1), \ldots]$ heißt σ-*Polynomring* in der *Differenzenvariable* y_1. Symbol: $k\{y_1\}$. Es wird ein σ-Ring durch

$$\sigma(\sigma^n(y_1)) := \sigma^{n+1}(y_1).$$

Analog für ein Tupel von Variablen $y = (y_1, \ldots, y_n)$, ist

$$k\{y\} := k\{y_1, \ldots, y_n\} := k[y_1, \ldots, y_n, \sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_n), \sigma^2(y_1), \ldots]$$

Differenzenpolynomringe (Fortsetzung)

Konzepte von Ordnung, Effektive Ordnung:

- $f := y_1\sigma^2(y_2) \ + \ \sigma(y_1)\sigma(y_2)\sigma(y_3) \in k\{y_1, y_2, y_3\}$

$$\mathrm{Ord}(f) = 2, \mathrm{Eord}(f) = 2$$

- $g := \sigma^3(y_1)\sigma^2(y_2) + \sigma(y_1)\sigma(y_2)\sigma(y_3)$

$$\mathrm{Ord}(g) = 3, \mathrm{Eord}(g) = 2$$

Differenzenvarietäten

Definition

Sei k ein σ-Körper, $F \subseteq k\{y_1, \ldots, y_n\}$ ein Menge von Differenzenpolynomen. Für einen σ-Körper K mit $k \subseteq K$ und $\sigma_{|k} = \sigma$ setzen wir:

$$\mathbb{V}_K(F) := \{x \in K^n \mid f(x) = 0 \ \forall\ f \in F\}.$$

Dies ist ein Funktor der Kategorie der σ-Körper wie oben (*σ-Körpererweiterungen*) in die Kategorie der Mengen und heißt *σ-Varietät* oder *Differenzenvarietät*.

Differenzenvarietäten (Fortsetzung)

Definition

Sei k ein σ-Körper, $X = \mathbb{V}(F)$ eine σ-Varietät. Dann ist

$$\mathbb{I}(X) := \{f \in k\{y_1, \ldots, y_n\} \mid f(a) = 0 \;\forall\; a \in \mathbb{V}_K(F)$$
$$\forall K \supseteq k \;\sigma\text{-Körpererweiterung}\}.$$

Definition

Für die Menge F gibt es ein kleinstes σ-Ideal $\{F\} \trianglelefteq_\sigma k\{y_1, \ldots, y_n\}$ das *perfekt* ist $(\sigma^{i_1}(f) \cdots \sigma^{i_n}(f) \in \{F\} \Rightarrow f \in \{F\})$, und F enthält. Dieses heißt der *perfekte Abschluss* von F.

Differenzenvarietäten (Fortsetzung)

Satz

Sei k ein σ-Körper, $F \subseteq k\{y_1, \ldots, y_n\}$. Dann ist $\mathbb{I}(\mathbb{V}(F)) = \{F\}$

Definition

Sei $\mathfrak{p} \trianglelefteq_\sigma R$ ein σ-Ideal. Dann heißt $\mathfrak{p}$ σ-*prim*, falls $\mathfrak{p}$ prim ist und $\sigma^{-1}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}$ gilt.

Satz

Sei R ein σ-Ring und $F \subseteq R$ eine Teilmenge. Dann gilt:

$$\{F\} = \bigcap_{\substack{F \subseteq \mathfrak{p} \trianglelefteq_\sigma R, \\ \mathfrak{p}\ \sigma\text{-Prim}}} \mathfrak{p}.$$

Differenzenalgebraische Ergebnisse (Fortsetzung)

- Die Menge aller σ-primen σ-Ideale eines σ-Rings R bezeichnet man mit $\mathrm{Spec}^\sigma(R)$. Sie ist ein topologischer Raum, der noethersch ist für $R = k\{y\}$.
- $\mathrm{Spec}^\sigma(R)$ ist quasi-kompakt.
- Die σ-primen σ-Ideale von R stehen in Bijektion zu den irreduziblen, abgeschlossenen Mengen in $\mathrm{Spec}^\sigma(R)$.

Motivation

Motivation

Sei k ein Körper. Dann haben die Polynome y, y^2 die Gleichen Nullstellen:

$$y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Aber: y^2 hat die Nullstelle 0 “doppelt”.
Wie kann man sie unterscheiden?

Suchen der Nullstellen:
Sucht man nicht in einen Körper, sondern zum Beispiel in der k-Algebra $k[y]/(y^2)$, dann ist

$$y^2 = 0 \not\Leftrightarrow y = 0$$

Dimension:

$$\dim_k(k[y]/(y)) = 1, \dim_k(k[y]/(y^2)) = 2$$

Motivation (Fortsetzung)

$\rightarrow$ Suche Analogie für Differenzenfall

Differenzengleichungen $\sigma(y) = 0, \sigma^2(y) = 0$ haben die gleichen Lösungen über Differenzenkörper, verschiedene "Vielfachheit". Wie kann man sie unterscheiden?

$$\{\sigma(y)\} = \{\sigma^2(y)\} = (y, \sigma(y), \sigma^2(y), \dots) \trianglelefteq_\sigma k\{y\}$$

Gleichungen liefern gleiche Differenzenvarietät. Neuer Konzept: suche nicht nur in σ-Körper

Mixed Differenzenvarietäten

Mixed Differenzenvarietäten

Definition

Sei k ein σ-Körper und B ein σ-Ring, der ein Integritätsbereich ist mit $k \subseteq B$, $\sigma_{|k} = \sigma$. Weiter sei $F \subseteq k\{y_1, \ldots, y_n\}$ eine Menge von σ-Polynomen. Setze

$$\mathbb{V}_B(F) := \{b \in B^n \mid f(b) = 0 \ \forall \ f \in F\}.$$

Durch $B \mapsto \mathbb{V}_B(F)$ ist ein Funktor der Kategorie solcher Ringe in die Kategorie der Mengen gegeben. Wir nennen ihn eine *Mixed σ-Varietät über k*, oder *k-σ-m-Varietät*.

Andere Möglichkeiten: Perfekt-reduzierte σ-Ringe, σ-Integritätsberreiche $\rightarrow$ Wieder Differenzenvarietäten.

Mixed Differenzenideale

Definition

- Ein Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq_\sigma k\{y\}$ heißt mixed, wenn $fg \in \mathfrak{a} \Rightarrow f\sigma(g) \in \mathfrak{a}$.
- Für $F \subseteq k\{y\}$ gibt es ein kleinstes radikales, mixed σ-Ideal, das F enthält. Bez: $\{F\}_m$.

Mixed Differenzenideale (Fortsetzung)

Verbindung:
mixed Differenzenideale $\leftrightarrow$ mixed Differenzenvarietäten.

Mit $\mathbb{I}_m$ analog zu $\mathbb{I}$ für mixed Differenzenvarietäten:

Satz

Sei k ein σ-Körper, $F \subseteq k\{y_1, \ldots, y_n\}$, und $X = \mathbb{V}(F)$ eine σ-m-Varietät. Dann:

$$\mathbb{I}_m(\mathbb{V}(F)) = \{F\}_m$$

Weitere Ergebnisse

Satz

Sei R ein σ-Ring und $F \subseteq R$. Dann:

$$\{F\}_m = \bigcap_{\substack{F \subseteq \mathfrak{p} \trianglelefteq_\sigma R \\ \mathfrak{p} \text{ Prim}}} \mathfrak{p}.$$

Offen: Endlich viele $\mathfrak{p}$ für $R = k\{y\}$?

Weitere Ergebnisse (Fortsetzung)

Topologischer Raum:

$$\mathrm{Spec}^{\sigma}_{m}(R) := \{\mathfrak{p} \trianglelefteq_{\sigma} R \mid \mathfrak{p} \text{ prim } \} \supseteq \mathrm{Spec}^{\sigma}(R)$$

- $\mathrm{Spec}^{\sigma}_{m}(R)$ ist Quasi-Kompakt.
- Die primen σ-Ideale von R stehen in Bijektion zu den irreduziblen, abgeschlossenen Mengen in $\mathrm{Spec}^{\sigma}_{m}(R)$.
- Offen: noethersch für $R = k\{y\}$?

Differenzenkerne

Differenzenkerne

- Problem: σ-Polynomring hat unendlich viele Variablen, nicht noethersch.
- Idee: Untersuche σ-Ideale in noethersche Unterringe.

Definition

Sei k ein Differenzenkörper. Wir setzen

$$k\{y\}[d] := k[y, \sigma(y), \ldots, \sigma^d(y)] \subseteq k\{y\} \text{ und } k\{y\}[-1] := k.$$

Für ein σ-Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq_\sigma k\{y\}$ sei

$$\mathfrak{a}[d] := \mathfrak{a} \cap k\{y\}[d].$$

Differenzenkerne (Fortsetzung)

Definition

Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq k\{y\}[d], d \geq 1$. Dann heißt $\mathfrak{a}$ ein *Differenzenkern der Länge d*, wenn $\sigma(\mathfrak{a}[d-1]) \subseteq \mathfrak{a}$. Er heißt ein primer Differenzenkern, falls zusätzlich $\mathfrak{a}$ ein primes σ-Ideal in $k\{y\}[d]$ ist. Weiterhin wird $\mathfrak{a}$ reflexiv genannt, falls $\sigma^{-1}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}[d-1]$.

Beispiel

Sei $\mathfrak{p} \trianglelefteq_\sigma k\{y\}$ ein primes σ-Ideal, $d \geq 1$. Dann ist $\mathfrak{p}[d] \trianglelefteq k\{y\}[d]$ ein primer Differenzenkern. Ist $\mathfrak{p}$ auch σ-prim, dann ist $\mathfrak{p}[d]$ auch reflexiv.

Differenzenkerne (Fortsetzung)

Satz

Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq k\{y\}[d]$ ein reflexiver, primer Differenzenkern. Dann existiert ein σ-primes Ideal $\mathfrak{p} \trianglelefteq_\sigma k\{y\}$ mit $\mathfrak{p}[d] = \mathfrak{a}$.

Frage: Gilt das auch für prime Differenzenkerne? (mit primen Differenzenidealen)

Differenzenkerne (Fortsetzung)

Proposition

Sei $\mathfrak{a} \subseteq k[y, \ldots, \sigma^d(y)]$ ein primer Differenzenkern und sei $k[y, \ldots, \sigma^d(y)]/\mathfrak{a} =: k[a, \sigma(a), \ldots, \sigma^d(a)]$. Betrachte die Abbildung

$$\sigma : k[a, \ldots, \sigma^{d-1}(a)] \to k[a, \ldots, \sigma^d(a)].$$

Dann existiert ein primer Differenzenkern $\mathfrak{a}'$ der Länge $d+1$ mit $\mathfrak{a}'[d] = \mathfrak{a}$ genau dann, wenn das von $\ker(\sigma)$ erzeugte Ideal, $(\ker(\sigma)) \subseteq k[a, \ldots, \sigma^d(a)]$, Folgendes erfüllt:

$$(\ker(\sigma)) \cap k[a, \ldots, \sigma^{d-1}(a)] = \ker(\sigma).$$

Differenzenkerne (Fortsetzung)

Für reflexive, prime Differenzenkerne ist einmal Fortsetzen äquivalent zu beliebig oft Fortsetzen. Ohne Reflexivität ist das i.A. nicht der Fall.
$\rightarrow$ Gegenbeispiel.

Vermutung

Sei k ein σ-Körper und $\mathfrak{a} \subseteq k\{y\}[d]$ ein primes Differenzenkern. Weiter sei $a_1 = y_1 + \mathfrak{a}, \dots, a_n = y_n + \mathfrak{a}$. Für $r \geq 1$ betrachte die Abbildung

$$\sigma^r : k[a, \sigma(a), \dots, \sigma^{d-r}(a)] \rightarrow k[a, \dots, \sigma^d(a)], f \mapsto \sigma^r(f).$$

Dann existiert ein primes σ-ideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}[d] = \mathfrak{a}$ genau dann, wenn

$$(\ker(\sigma), \dots, \ker(\sigma^r)) \cap k[a, \dots, \sigma^{d-r}(a)] = \ker(\sigma^r).$$

"$\Rightarrow$" klar.

Theorem

Sei k ein σ-Körper und sei $\mathfrak{p} \trianglelefteq_\sigma k\{y\} = k\{y_1, \ldots, y_n\}$ ein primes σ-Ideal. Setze

$$d_i := \dim(k\{y\}[i]/\mathfrak{p}[i]).$$

Dann existieren ganze Zahlen $d, e \in \mathbb{N}$, so dass $d_i = d(i+1) + e$ für $i \gg 0$.

Definition

- Die Zahl d heißt die *σ-Dimension* von $\mathfrak{p}$ (Bez.: σ-dim$(\mathfrak{p})$).
- Die Zahl e heißt *σ-Grad* von $\mathfrak{p}$ (Bez.: σ-deg$(\mathfrak{p})$).

Differenzenkerne (Fortsetzung)

Satz

Sei k ein σ-Körper und $f \in k\{y_1, \ldots, y_n\}, f \notin k$ ein irreduzibles σ-Polynom, so dass $\mathrm{Eord}(f) = \mathrm{Ord}(f)$. Dann hat die σ-Varietät $\mathbb{V}(f)$ eine irreduzible Komponente X, so dass $\sigma\text{-}\dim(X) = n - 1$ und $\sigma\text{-}\deg(X) = \mathrm{Ord}(f)$.

Satz

Sei k ein σ-Körper und $f \in k\{y_1, \ldots, y_n\}, f \notin k$ ein irreduzibles σ-Polynom. Dann hat die σ-m-Varietät $\mathbb{V}(f)$ eine irreduzible, abgeschlossene Teilmenge X so, dass $\sigma\text{-}\dim(X) = n - 1$ und $\sigma\text{-}\deg(X) = \mathrm{Ord}(f)$.

Differenzenkerne (Fortsetzung)

Beispiel

Betrachte den σ-Polynomring $\mathbb{Q}\{y_1\}$, und das irreduzible σ-Polynom $f := \sigma(y_1) - 1 \in \mathbb{Q}\{y_1\}$. Weiter seinen $X := \mathbb{V}(f)$ als σ-Varietät, und $Y := \mathbb{V}(f)$ als σ-m-Varietät. Beide haben nur eine Primkomponente:

$$[y_1 - 1] = \{\sigma(y_1) - 1\}, \ [\sigma(y_1) - 1] = \{\sigma(y_1) - 1\}_m$$

Vielen dank für ihre Aufmerksamkeit!

Referenzen I

- Wibmer, Michael *Algebraic Difference Equations (Lecture Notes)*, Available online: http://www.algebra.rwth-aachen.de/de/Mitarbeiter/Wibmer/Algebraic%20difference%20equations.pdf
- Lang, Serge, *Algebra*, Revised Third Edition, Springer, 2005
- Eisenbud, David *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer, 1995
- Hartshorne, Robin *Algebraic Geometry*, Springer, 1977
- Cohn, Richard *Difference Algebra*, Interscience Publishers, 1965
- Levin, Alexander *Difference Algebra*, Springer, 2008
- Hrushovski, Ehud *The Elementary Theory of the Frobenius Automorphism*, arXiv:math/0406514

Referenzen II

Bourbaki, Nicolas *Commutative Algebra*, Hermann, 1972

Grayson, Daniel R. and Stillman, Michael E., Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry, Available at http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/

Levin, Alexander, *On the ascending chain condition for mixed difference ideals*, arXiv:1207.4721

Cox, Little and O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Second Edition, Springer, 1997