Theoretische Physik 3 WS 05/06

Arbeitsblatt 3

## Fragen zum Stoff

1. Welche Aussage gilt für den Zusammenhang zwischen Polarisation und zugehörigem Feld bei Ellipsoiden?
2. Wie erhält man die Dielektrizitätskonstante aus der atomaren Polarisierbarkeit?
3. Wie lauten die Randbedingungen an der Grenze zweier Dielektrika
4. Wie vergleichen sich skalares Potential und Vektorpotential?

## Kurze Aufgaben

1. Ein Zylinder ist homogen in Achsenrichtung polarisiert. Wo sitzen die Polarisationsladungen und wie groß ist ihre Dichte?
2. Skizzieren Sie das elektrische Feld einer homogen polarisierten Kugel innen und außen.
3. Eine homogen geladene Kugel mit Gesamtladung $q$ und Radius $a$ enthält im Zentrum eine Punktladung $(-q)$. Wie groß ist die rücktreibende Kraft, wenn man die Punktladung verschiebt?
4. Zwei metallische Ringe sind von Strom durchflossen. Bestimmen Sie qualitativ die Kräfte für verschiedene Stellungen.

# Arbeitsblatt 3

## Fragen

1) Wenn die Polarisation in Achsenrichtung verlaufen soll, gilt

$$E_\alpha = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} N_\alpha \cdot P_\alpha \qquad \text{mit } \sum_\alpha N_\alpha = 4\pi$$

Allgemein:

$$\phi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \left(-\vec\nabla' \vec P(r')\right) \cdot \frac{1}{|\vec r - \vec r'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\vec f' \, \frac{\vec P(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\overset{\sigma_P}{\vec P}}{|\vec r - \vec r'|} \cdot d\vec f\right]}_{\text{Obf.}} + \underbrace{\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r \, \frac{\overset{\rho_P}{-\vec\nabla \cdot \vec P(\vec r)}}{|\vec r - \vec r'|}\right]}_{\text{Volumen (inhomogen)}}$$

2) Die Atomare Polarisierbarkeit ist der Zusammenhang zwischen dem lokalen Feld, was ein Elementardipol sieht, und dessen Dipolmoment $\vec p$

$$\vec p = \alpha \cdot \vec E_{lok}$$

Die Polarisation $\vec P$ ist definiert als das gemittelte Dipolmoment

$$\vec P = n \cdot \vec p = n \cdot \alpha \cdot \vec E_{lok}$$

Für Festkörper / Flüssigkeiten / Gase ist zudem bei gegebener Polarisation

$$\boxed{\vec E_{lok} = \vec E + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi}{3} \vec P} \rightarrow \vec P = \underbrace{\left(\frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3}}\right)}_{\chi} \vec E$$

$\chi$ hängt mit $\varepsilon$ wie folgt zusammen:

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{pol} \rightsquigarrow \vec{\nabla}\vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{E}_{ext} + \vec{E}_{pol})$$

$$\rightsquigarrow \vec{\nabla}\underbrace{\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)}_{:=\vec{D}} = \rho$$

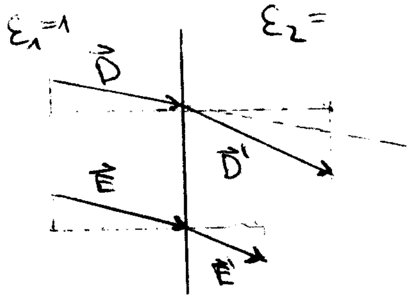
$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \chi\vec{E} = \varepsilon_0 \underbrace{\left(1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0}\right)}_{:=\varepsilon} E$$

$$\boxed{\varepsilon = 1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0}}$$

Damit folgt,

$$\varepsilon = \frac{1 + \frac{2n\alpha}{3\varepsilon_0}}{1 - \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}} \rightsquigarrow \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$$

3)




$$\int_{Vol}\vec{\nabla}\vec{D}\,dV = \int_{Vol}\rho\,dV = \oint\vec{D}\cdot d\vec{f} = 0$$

$$\int_{Fl}(\vec{\nabla}\times\vec{E})df = \oint_{C}\vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$$

$\Rightarrow$ $D_n$ ist stetig : $D_n' = D_n$

$E_t$ ist stetig : $E_t' = E_t$

Aus $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ folgt:

$$D_t' = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} D_t$$

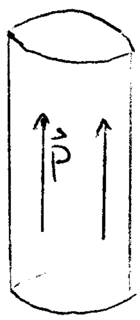
$$E_n' = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_n$$

4)

| Skalares Potential | Vektorpotential |
|---|---|
| $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert} d^3r'$ | $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert} d^3r'$ |
| $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$ | $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$ (Biot-Savart) |
| $E = -\vec{\nabla}\phi$ | $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ |
| $\phi' = \phi + c$ | $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ |
| $-\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ | $-\Delta\vec{A} = \mu_0 \vec{j}$ |
| $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$ | $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$ (Vektorpot. eine Dipols) |
| $\vec{p} = \int d^3r' \left(\vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,')\right)$ | $\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' \left(\vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')\right)$ |

## Aufgaben

1)



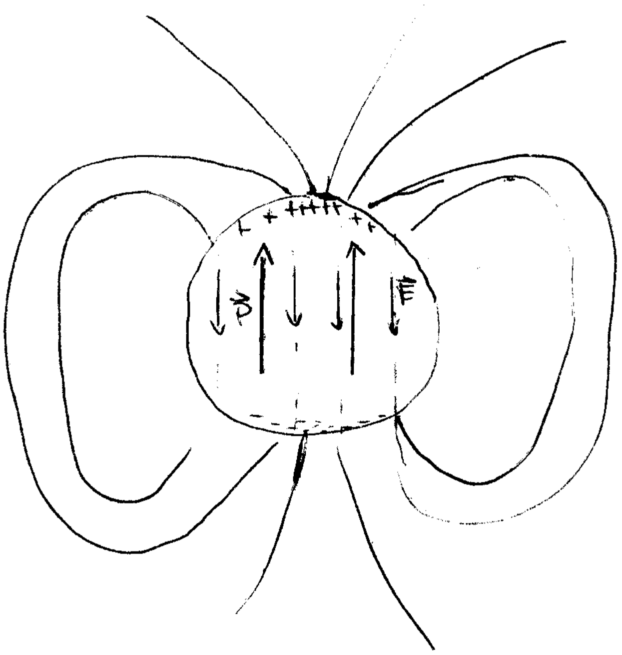

Im ~~E~~homogenen Fall ist $\phi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\vec{P}}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert} df$

$\vec{P} \mathrel{\widehat{=}} \vec{D}$

→ Ladungen befinden sich auf den Zylinder-kreisflächen (oben / unten) mit

$\sigma_P = \lvert\vec{P}\rvert$

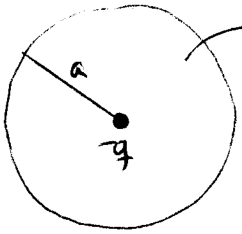
2)



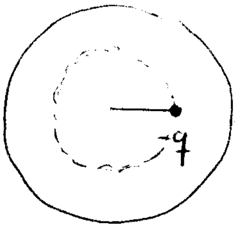
~~P~~ $E_P = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} \vec{P}$

→ Dipolfeld, trifft aber nicht senkrecht ein

3)




$\frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \rho = Q$ ; $\rho = const$




Es wirkt der Anteil der Ladung, der sich "unterhalb" der Probeladung befindet

$$Q' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{r^3}{a^3} Q$$

$$\to \vec{F}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^3}{a^3} \cdot \frac{q^2 \vec{r}}{r^3}$$

$$= -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot a^3} \cdot \vec{r}$$

Die rücktreibende Kraft ist also proportional zur Auslenkung

4)