Theoretische Physik 3 WS 05/06

Arbeitsblatt 5

Fragen zum Stoff

1. Wie lautet die Lorentz-Eichung und was ist ihr Vorteil?
2. Worauf beruhen die Formeln für Reflexion und Brechung elektromagnetischer Wellen an Grenzflächen?
3. Wie geht man vor, um die retardierten Potentiale zu bestimmen?
4. Welche physikalische Situation führt zu den Liénard-Wiechert-Potentialen?

Kurze Aufgaben

1. Skizzieren Sie das Vektorpotential $\underline{A}$ einer langsam bewegten Punktladung.
2. Welche Kräfte üben zwei parallel fliegende Punktladungen aufeinander in ihrem Ruhesystem und in dem System, wo sie sich bewegen, aus?
3. Zeichnen Sie ein Polardiagramm für die Winkelabhängigkeit des Potentials ϕ einer gleichförmig bewegten Punktladung
4. Wie lautet der Zusammenhang zwischen $\underline{B}$ und $\underline{E}$ für eine ebene Welle, die in einem Dielektrikum mit DK ε läuft?

Arbeitsblatt 5

Fragen

1) Die Lorentz-Eichung lautet

$$\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} = 0$$

(vgl Coulombeichung $\vec{\nabla} A = 0$)

Daraus lässt sich die inhomogene Wellengleichung herleiten, die Maxwellgleichungen werden für ϕ und $\vec{A}$ entkoppelt.

a) $\vec{\nabla} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi + \dot{A}$

$$\rightarrow -\Delta\phi + \vec{\nabla}\dot{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

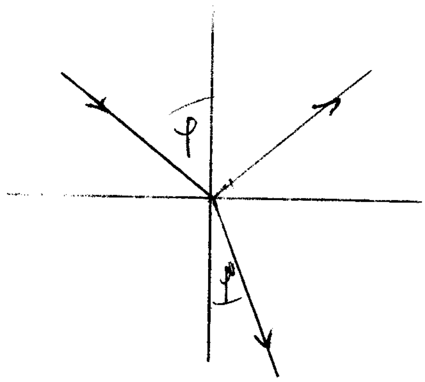
$$\rightarrow \Delta\phi + \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

b) $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 j + \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}}$; $B = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi + \dot{A}$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_0 j + \frac{1}{c^2}\left(-\vec{\nabla}\dot{\phi} + \ddot{A}\right)$$

$$\rightarrow \Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = -\mu_0 j$$

2) Man erhält die Formeln aus den Randbedingungen für die Felder.



Es wird von einer p-polarisierten Welle ausgegangen

Für $\vec{E}$ lauten die Stetigkeitsbedingungen

E_t stetig

E_n unstetig

Es werden die drei Wellen

$E_e = e^{i(\vec{k}_e\cdot\vec{r} - \omega t)}$, $E_r = e^{i(\vec{k}_r\cdot\vec{r} - \omega t)}$, $E_d = e^{i(\vec{k}_d\cdot\vec{r} - \omega t)}$

angesetzt (einheitliche Frequenz)

a) Richtung der Wellen

- Es gilt die Dispersionsbeziehung $k_i^2 = \frac{\omega^2}{c_i^2}$

$\rightarrow$ Da E_e und E_r im selben Medium, ist $k_e^2 = k_r^2$,
d. h. die Beträge sind gleich

- $k_{r,t} = k_{e,t}$, die Tangentialkomponenten sind gleich

$\Rightarrow$ reflektierte Welle mit Reflexionsgesetz

- Dispersionsbeziehung liefert für gebrochene Welle

$$\frac{k_e^2}{n_1^2} = \frac{k_d^2}{n_2^2}$$

- mit Zerlegung in $k_\perp$, $k_\parallel = k_x$ gilt die geometrische Überlegung

$$\sin\alpha_1 = \frac{k_x}{k_e} \qquad \sin\alpha_2 = \frac{k_x}{k_d}$$

$$\rightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{k_d}{k_e} = \frac{n_2}{n_1}$$

b) Amplitude

- $E_{e,t} + E_{r,t} = E_{d,t}$
- $\varepsilon_1(E_{e,n} + E_{r,n}) = \varepsilon_2 E_{d,n}$

$$\rightarrow (E_e + E_r)\cos\alpha_1 = E_d \cdot \cos\alpha_2 \qquad (1)$$

$$\varepsilon_1(E_e + E_r)\sin\alpha_1 = \varepsilon_2 E_d \cdot \sin\alpha_2 \qquad (2)$$

3) Die retardierten Potentiale folgen mit Fouriertransformation

- aus der inhomogenen Wellengleichung

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = -\mu_0 \vec{j}$$

- Für ϕ:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}(\vec{r},\omega)\cdot e^{-i\omega t}\, d\omega \quad ; \quad \rho(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(\vec{r},\omega)\cdot e^{-i\omega t}\, d\omega$$

- Einsetzen ergibt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\phi}(\vec{r},\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\tilde{\rho}(\vec{r},\omega)\cdot e^{i\omega t}\right)d\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\Big(\Delta + \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2}}_{=k^2}\Big)\tilde{\phi}(\vec{r},\omega) = -\frac{\tilde{\rho}(\vec{r},\omega)}{\varepsilon_0}}$$ (Inhomogene HH-Gleichung)

- Dies wird gelöst durch

$$\tilde{\phi}(\vec{r},\omega) = \int d^3r' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tilde{\rho}(\vec{r}\,',\omega)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\cdot e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad ||$$

- Durch Rücktransformation erhält man (d.h. einsetzen die die FT)

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\left[\int d^3r' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tilde{\rho}(\vec{r}\,',\omega)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\cdot e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] e^{-i\omega t}\, \cancel{d\omega}$$

- Betrachte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \tilde{\rho}(\vec{r},\omega)\cdot e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\cdot e^{-i\omega t} \quad ; \quad k = \frac{\omega}{c}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \tilde{\rho}(\vec{r}\,',\omega)\, e^{-i\omega\underbrace{\left(t \mp \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|\right)}_{t'}}$$

$$= \rho(\vec{r}\,',t')\cdot\sqrt{2\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,',t')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \text{mit } t' = t \pm \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Völlig analog lässt sich die Rechnung für $\vec{A}$ durchführen

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

4)

Die Liénard-Wiechert-Potentiale treten auf, wenn man die Ladungsverteilung ρ bei den retardierten Potentialen zu einer Punktladung spezifiziert

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}',t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \int dt' \frac{\rho(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\delta(t'-(t-\tfrac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|))$$

$\rho(\vec{r}',t')$ wird als Punktladung spezifiziert als

$$\rho(\vec{r}',t') = q\cdot\delta(\vec{r}'-\vec{R}(t'))$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\int dt' \frac{\cancel{\rho(\vec{r}',t')}\,1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot q\cdot\delta(\vec{r}'-\vec{R}(t'))\cdot\delta(t'-(t-\tfrac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|))$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}\cdot\delta(t'-(t-\tfrac{1}{c}(\vec{r}-\vec{R}(t'))))$$

subst $\tau = t'-(t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{R}(t')|)$

$$\frac{d\tau}{dt'} = 1+\frac{1}{c}\frac{(\vec{r}-\vec{R}(t'))}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}\cdot\dot{\vec{R}}(t') \longrightarrow dt' = \frac{1}{1+\frac{1}{c}\frac{(\vec{r}-R(t'))}{|\vec{r}-R(t')|}u(t')}\,d\tau$$

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\tau \frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}(t)|}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{c}\frac{\vec{r}-R(t')}{|\vec{r}-R(t')|}\cdot\vec{u}(t')}\cdot\delta(\tau)$$

$$\tau = 0 \longrightarrow \tau = t' = t-\tfrac{1}{c}(\vec{r}-\vec{R}(t'))$$

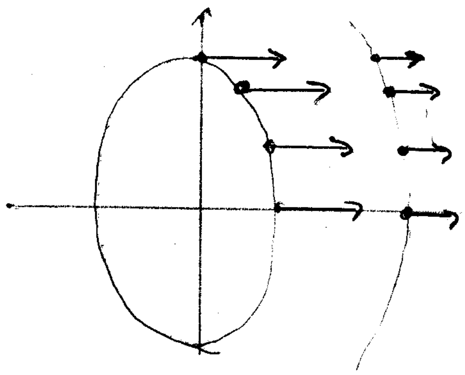
$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|+\frac{\vec{u}(t')}{c}(\vec{r}-\vec{R}(t'))}$$

Analog $\vec{A} = \phi\cdot\vec{u}$

Aufgaben

1) $\phi(\vec{r}_0, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x_0 + \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(y_0^2+z_0^2\right)}}$

$\vec{A}(\vec{r}_0, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\vec{u}}{\sqrt{x_0 + \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(y_0^2+z_0^2\right)}}$



2) Im Ruhesystem

$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ $\qquad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

Normales Potential

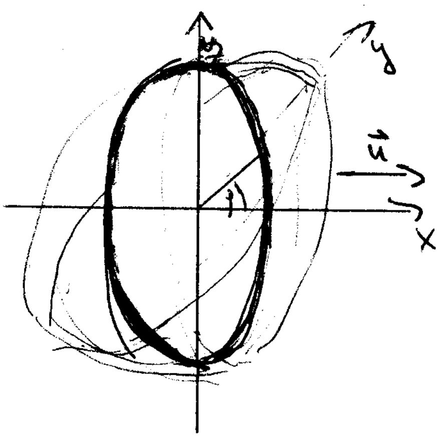
Im Bewegten system:

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

mit $\vec{E} = -\nabla\phi + \dot{A}$

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

3)



Rotationssymmetrisch um die x-Achse

4) $\vec{E} = c_n \vec{B}$; $c_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0}}$