

Felder

$$\rho(\vec{r}, t), \vec{v}(\vec{r}, t), \dots, T(\vec{r}, t)$$



Kraft pro Volumen,
Kraftdichte $\vec{f}(\vec{r}, t)$ Feld

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \neq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ bei stat. Str.

An einem Ort ist die Geschw. immer gleich, doch für jeden einzelnen Tropfen nicht \rightarrow Kraftfeld

$$\vec{r}(t+dt) = \vec{r}(t) + \vec{v} \cdot dt$$

Geschw. am Ort \vec{r} zur Zeit t ist: $\vec{v}(\vec{r}, t)$

Geschw. desselben Tropfens zur Zeit $t+dt$ am Ort $\vec{r} + \vec{v} \cdot dt$:

$$\vec{v}(\vec{r} + \vec{v} \cdot dt, t+dt)$$

Beschleunigung $\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(\vec{r} + \vec{v} \cdot dt, t+dt) - \vec{v}(\vec{r}, t)}{dt}$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} v_j}_{(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Def.: Vektorgradient

$$(\vec{a} \cdot \text{grad}) \vec{b} := \sum_{j=1}^3 \frac{\partial b}{\partial x_j} a_j$$

Zwischenrech:

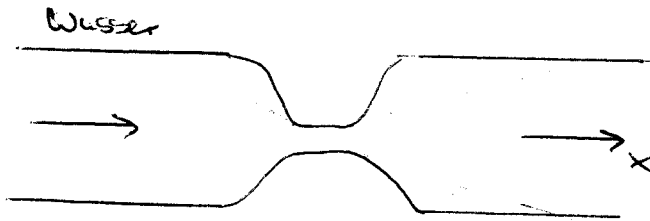
$$f(x+\epsilon, y+\eta) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \epsilon + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \eta \quad (+O(\epsilon^2) + O(\eta^2))$$

$$\Rightarrow \vec{v}(\vec{r} + \vec{v} \cdot dt, t+dt) = \vec{v}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} := \rho \left((\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = \vec{f} \quad \text{"Euler-Gleichung"}$$

Bernoulli

20.10.04



Strömungsfeld

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \{v(x), 0, 0\}$$

Rohrquerschnitt

$$Q = Q(x)$$

Masse, die pro Zeiteinheit durch einen Rohrquerschnitt strömt, ist

$$W = Q(x) \cdot v(x) = \text{const.} \quad \text{laut Massenerhaltung / Volumenerhalt}$$

$$\rho_{\text{Wasser}} = \text{const}$$

$$\text{Massenstrom: } \rho \cdot v \cdot Q$$

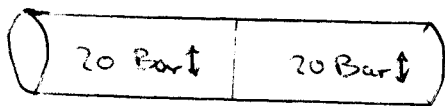
$$\text{Strömungsfeld: } \vec{v} = \left\{ \frac{W}{Q(x)}, 0, 0 \right\}$$

Welche Kräfte sind notwendig \rightarrow Beschleunigungen berechnen

Beschleunigung

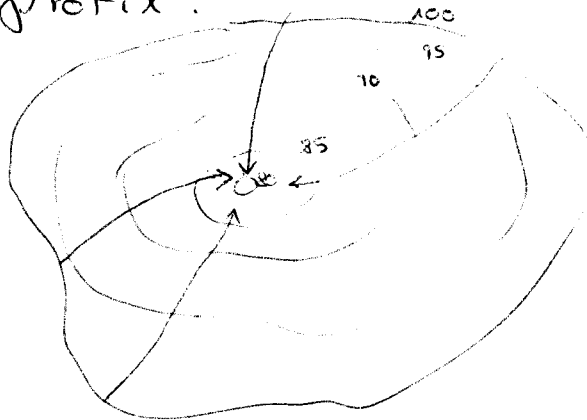
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \left(v \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \{v, 0, 0\} = \{v \cdot v', 0, 0\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} v^2, 0, 0 \right\} \end{aligned}$$

\rightarrow Wenn Rohrquerschnitt konstant, treten keine Kräfte auf.
Änderung des Rohrquerschnitt verursacht Kräfte

Druck und Kraft

Kraft \sim Druckunterschied

Druckprofil:



$$p = p(x)$$

$$\vec{f} = \left\{ -\frac{dp}{dx}, 0, 0 \right\}$$

$$f = \frac{\text{Kraft}}{\text{Volumen}}$$

$$f = \frac{-(p+dp)A + pA}{A \cdot dx} = -\frac{dp}{dx}$$

; A = Querschnittsfläche

$$\frac{1}{2} \epsilon \frac{dv^2}{dx} = -\frac{dp}{dx}$$

; $\epsilon = \text{const}$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\epsilon}{2} v^2 + p \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\epsilon}{2} v^2 + p = \text{const} = p_0$$

$$\Rightarrow p(x) = p_0 - \frac{\epsilon}{2} v^2$$

Bernoulli-Gleichung

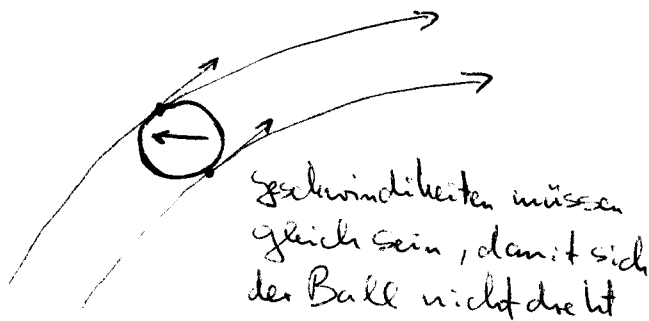
Ball in "rotierender" Flüssigkeit

Der Pfeil auf dem Ball zeige immer in dieselben Richtung.
Wie sieht das Strömungsfeld aus?

Zylinderkoordinaten

$$\vec{v} = (0, v_\varphi(r), 0)$$

Ansatz: auch wenn Pfeil nicht immer in dieselbe Richtung zeigt



$$\vec{v} = v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

rotationstreier
"Badewannenwirbel"

Fliehkkräfte? Warum wird der Ball nicht nach außen gedrückt?

$$\vec{f} = (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{v} \quad \text{in kartesischen Koord.}$$

Umrechnung der Formel in Zylinderkoordin. zu kompliziert,
daher Strömungsfeld in kart. Koord. übertragen

$$\vec{v} = v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \longrightarrow \vec{v} = \frac{v_\varphi}{x^2 + y^2} \{-y, x, 0\}$$

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \left\{ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}, v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}, 0 \right\}$$

$$\dots = - \frac{x, y, 0}{x^2 + y^2} = - \frac{\vec{e}_r}{r}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \{x, y, 0\} \\ \vec{e}_r &= \frac{\{x, y, 0\}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \vec{e}_\varphi &= \frac{\{-y, x, 0\}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Literatur

Paul A. Tipler: "Physik" (Speltrum, NY, 1991)

Edward M. Purcell: "Elektrizität und Magnetismus" (McGraw-Hill,

bis Montag: 2 Bücher vergleichen, Thema elektr. Feld ...)

Ladungserhaltung

Für die Ladung gilt ein Erhaltungssatz

Ladungsabrieb

- Abstoßung
- Anziehung

Elementarladung

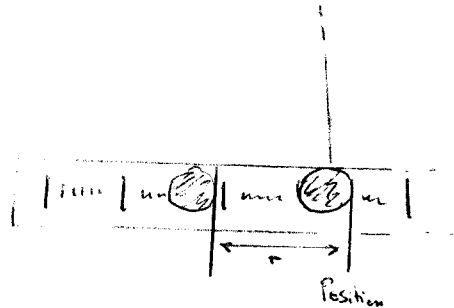
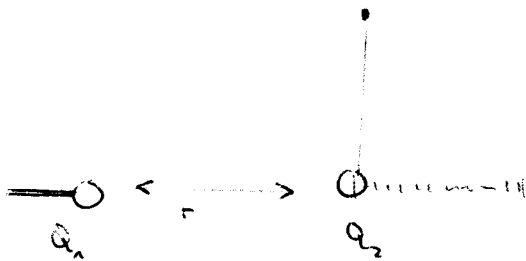
$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Website für Übungen:

physik/~starke/Teaching/ExpPhys2/

Kräfte zwischen Ladungen

Experiment:



Position/ Anschlusses +10	Abstand (r)	r^2	$F \cdot r^2$
18 ± 0.5	14 ± 1	196	1568
23	10	100	1300
29	8	64	1216
24 34	24 6,5	576 42,25	1014

Reihe = 10

Bestimmung der Kraft



$$x = l \cdot \sin \alpha$$

$$F_R = m \cdot g \cdot \sin \alpha \approx m \cdot g \cdot \alpha$$

$$= F_R = m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$$

Fehler:

- Kreisbogen
- Entladung
- Ladungsverdrängung "Influenz"



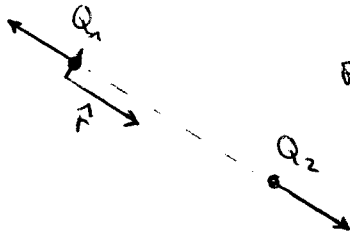
Coulomb-Kraft

$$\vec{F}(r) = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \hat{r}$$

Einheiten $[Q] = C = A \cdot s$
 $[F] = N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$

ϵ_0 : Elektrostatische Konstante
 $= 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{J}$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$



Einheitsvektor $\hat{r} := \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

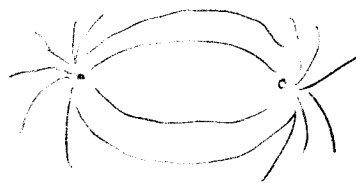
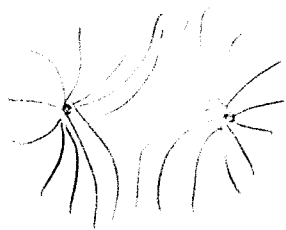
Elektrisches Feld

hypothetische Testladung

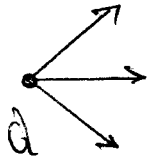
$$\vec{E} := \frac{\vec{F}}{q} \leadsto \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad \text{El. Feld einer Punktladung } Q$$

Abmessungen der Ladung müssen klein sein gegenüber dem Abstand der Ladungen

Elektrisches Feld einer Anordnung von 2 Ldg



Welche Arbeit muss man verrichten, um Ladg q von A nach B zu bringen?

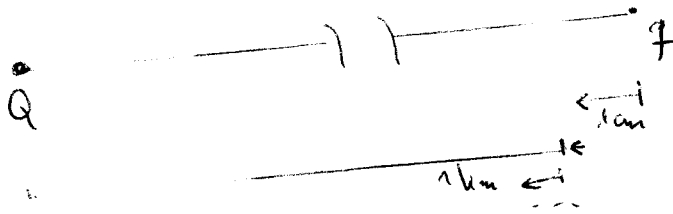


$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) (\dots)$$

Auf einem geschlossenen Weg wird keine Arbeit verrichtet (konservatives Feld)

Konservatives Kraftfeld: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$

$$r = \infty$$



$$\Delta W = F \cdot \Delta s$$

$$F \propto \frac{1}{(\infty)^2} = 0$$

$$\Delta W_{1km} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \cdot 1km$$

$$\Delta W_{1m} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(1m)^2} \cdot 1cm$$

großes Verhältnis zwischen ΔW_{1km} und ΔW_{1m}

Welche Arbeit W muss man aufbringen, um q aus $r = \infty$ nach $r = r_1$ heranzudrücken?

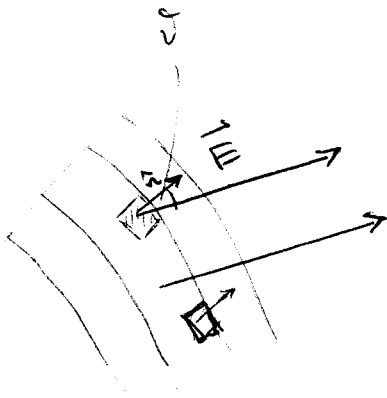
$$W = \int_{r=\infty}^{r=r_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Qq \int_{\infty}^{r_1} \left(-\frac{1}{r^2} \hat{r}\right) (-dr \cdot \hat{r}) = k \cdot \int_{\infty}^{r_1} \frac{dr}{r^2}$$

$$= k \left(-\frac{1}{r_1}\right)$$

$$\text{Potential } \varphi(r) := \frac{W_{\infty \rightarrow r}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

$$\text{Potentialdifferenz} = \varphi(r_2) - \varphi(r_1) = U_{12} \quad \text{vgl. "Spannung"}$$

$$[U] = V = \frac{J}{C}$$

Elektrischer Fluss \hat{n} : Oberflächennormalenvektor

$$\Phi_{el} = \int_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

Gaußscher Satz

mathematisch :

$$\int_{\text{Vol}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3r = \oint_{\text{Ober}} \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

physikalisch

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r \rho_e(\vec{r})$$

 ρ_e - Ladungsdichte

- 2 Anwendungen d. G.-S. :

1. Kugelsymmetrie

Vollkugel

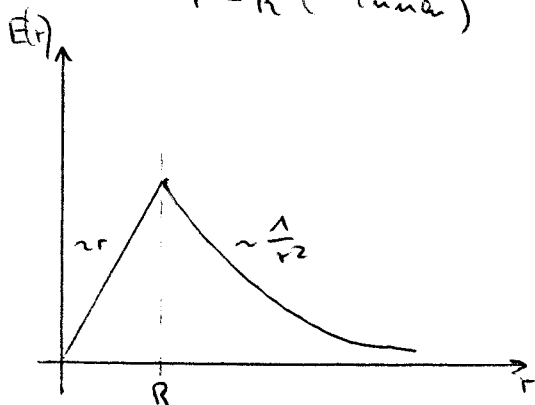
$$\rho_e = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

homog. Ladg.

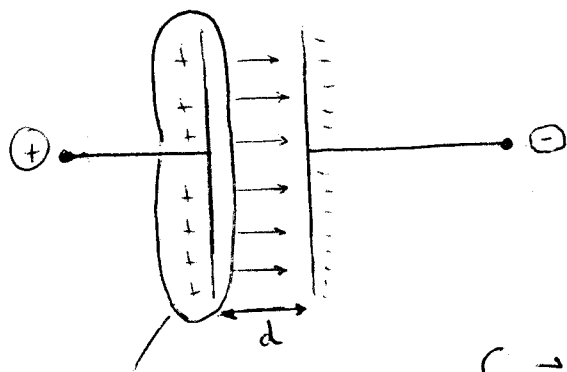
$$r > R \text{ ("außen")} : \frac{1}{\epsilon_0} Q = \vec{E} \cdot \hat{n} 4\pi r^2 ; \vec{E} = \vec{E}(r)$$

$$r < R \text{ ("innen")} : \frac{1}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} Q = E(r) 4\pi r^2$$

$$\Leftrightarrow E(r) = \frac{Q \cdot r}{4\pi \epsilon_0 R^3}$$



Kondensator und Kapazität



$$d \ll \sqrt{A}$$

Randbereich werden vernachlässigt

Gaußsche
Zylinder
(nerechtig)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

$$E \cdot A = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

Arbeit, um die Testladung q von $-$ nach $+$ zu bringen:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \cdot e \cdot d \quad ; \quad U = \frac{W}{q}$$

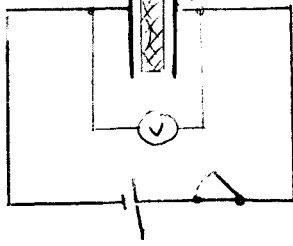
Def.: Kapazität $C = \frac{Q}{U} \quad [C] = F = \frac{C}{V}$

+ typ. Größenordnungen: 10^{-6} (μF)

$$Q = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} U$$

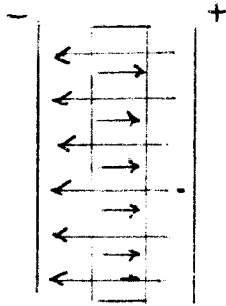
Mit Dielektrizitätskonstante:

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot \frac{A}{d}$$

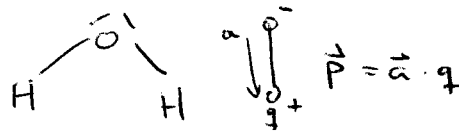
nichtleitendes
Dielektrikum

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \quad Q = C \cdot U$$

Schalter auf: $Q = \text{const}$
 Dielek. "rein": U sinkt



E_0 - Feld ohne Dielek.



E' Feld entgegengesetzt im Dielek.

Gesamtes Feld

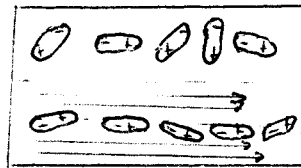
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

Feld wird kleiner \rightarrow Spannung wird kleiner \rightarrow Kapazität wird größer

Polarisierbarkeit

"Polarisation"

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\text{Vol}} \quad [\rho] = \frac{C}{m^2}$$



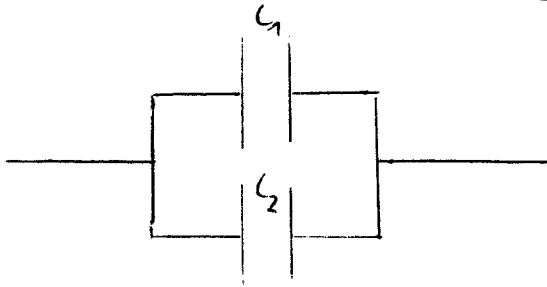
Dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot \vec{E} \quad \text{ges. el. Feld}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

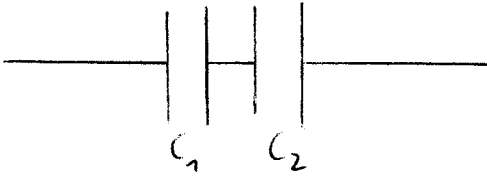
$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{Vol}} \rho_{\text{frei}} d^3r$$

Kondensator-Schaltungen



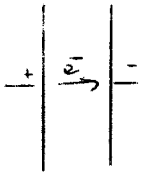
$$C = C_1 + C_2$$

$$\text{da } C \sim \frac{1}{u}$$



$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Gespeicherte Energie



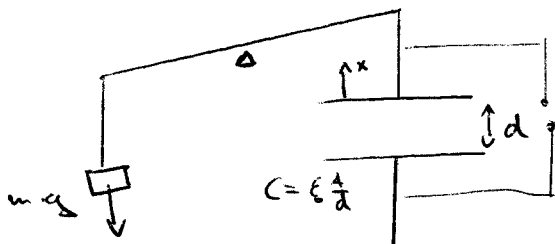
$$dW = U \cdot dQ$$

$$= \frac{1}{C} Q dQ$$

$$W = \int_0^Q \frac{1}{C} Q dQ = \frac{1}{2} C U^2$$

$$\text{Energiedichte} = \frac{W}{Vol} = \cancel{W_{el}} = \frac{1}{2} C U^2 \cdot \frac{1}{Ad} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon \underbrace{\left(\frac{U}{d}\right)^2}_{E^2}$$

Kirchhoffsche Potentialbaugruppe

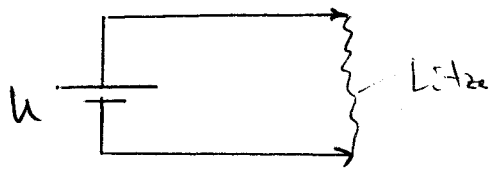


$$U = \frac{1}{2} C U^2 ; C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$F = - \frac{dW}{dx}$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d^2} U^2$$

Stationäre elektr. Ströme



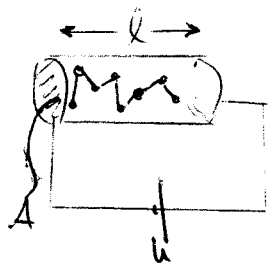
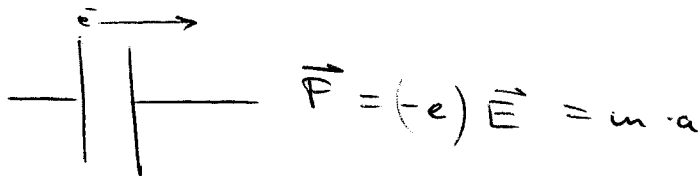
~~Oersted Versuch~~

$$I := \frac{dQ}{dt}$$

Stationäre Ströme ($\frac{dI}{dt} = 0$) : $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$

Strandichte \vec{j} : $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$ $[\vec{j}] = \frac{A}{m^2}$

Was treibt den Strom? (Drude - Theorie d. el. Leitung)



"random walk"

\Rightarrow konstante mittlere Driftgeschwindigkeit

"Drude - Theorie d. el. Leitung"

8.11.04

v_D : Driftgeschwindigkeit

τ : mittlere Zeit zwischen zwei Stößen
typisch pikosekunden $10^{-12}s$

$$F = \dot{p} \approx \frac{p_0}{\tau} \Rightarrow F \cdot \tau = p_0 = m v_D \Rightarrow v_D = \frac{q \cdot E}{m} \cdot \tau$$

$$\vec{j} = n (-e) \vec{v}_D \quad , \quad \vec{j}: \text{Strandichte} \quad n: \text{Teilchendichte (Ladungen)} \quad [n] = m^{-3}$$

$$\vec{j} = n \cdot (-e) \frac{(-e) E}{m} \tau = \frac{n e^2 \tau}{m} E$$

$$\frac{n e^2 \tau}{m} = \sigma \text{ Leitfähigkeit}$$

$$\frac{1}{\sigma} =: \rho \text{ "Spezifischer Widerstand"}$$

\Rightarrow Ohmsches Gesetz:

$$E = \frac{1}{\sigma} j = \rho \cdot j$$

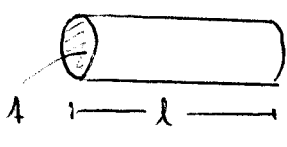
Zylindergeometrie ~~$E \cdot d = \rho \frac{d}{A}$~~

$$\underbrace{E \cdot l}_U = \underbrace{\rho \frac{l}{A}}_R \cdot \underbrace{j A}_I \approx U = R \cdot I$$

Beispielwerte:

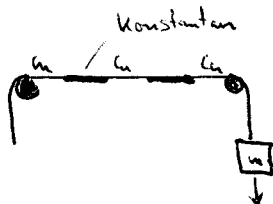
Metalle T/K		$\sigma / (\Omega m)^{-1}$	τ / ps	\bar{d}
Al	273/14	4 / 286	$8 \cdot 10^{-3} / \sim 60$	17 nm / 12 μm
Ag	273/4	$\sim 7 / 2480$	" "	" "
Cu	273/1,3	$\sim 7 / 2 \cdot 10^4$	$27 \cdot 10^3 / 93$	42 nm / 180 μm

Ohmscher Widerstand eines Drahtes (Zyl. Form)

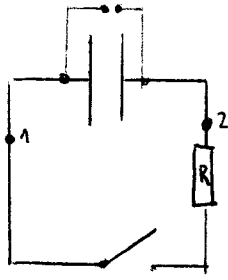


$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Spez. Wid. $[\rho] = \Omega m$, Material- / Temp.-abhängig



RC-Schaltkreis / Kondensatorentladung



$$t=0 \quad U(t=0) = U_0$$

└ Schalter schließen

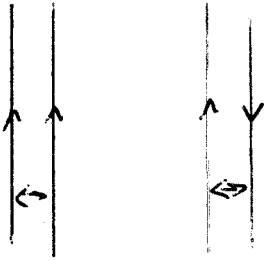
$$\text{Pot. Diff. } \varphi(1) - \varphi(2) = U(t) = \frac{1}{C} \cdot Q(t)$$

$$= U(t) = R \cdot I(t) = R \left(\frac{dQ}{dt} \right)$$

$$\rightarrow - \frac{dQ}{dt} R = \frac{1}{C} Q \quad \Leftrightarrow \dot{Q} + \frac{1}{RC} Q = 0$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0 \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{für } \tau = R \cdot C$$

Magnetfelder um Stromdurchflossene Leiter



B. "Magnetfeld" (Magnetische Induktion)

zum elektrischen Feld war

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\oint \vec{I} \mu_0 = B \cdot \underbrace{2\pi r}_{\text{Umfang}}$$

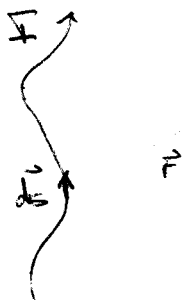
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$ spez. Form des Ampereschen Verhltungssatzes

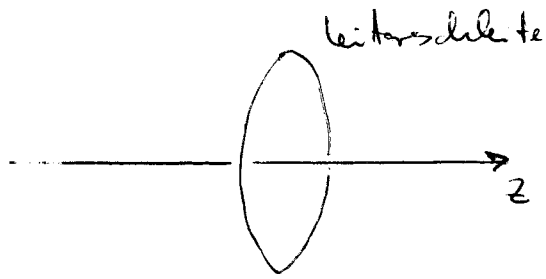
$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \oint \vec{j} \cdot d\vec{A}}$$

Komplizierte Geometrien:

Biot-Savartsches Gesetz



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$



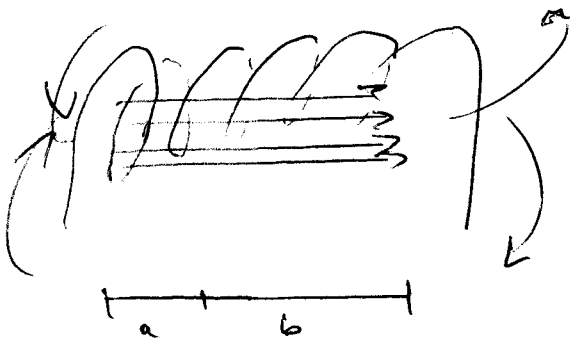
"magnetischer Dipol"

$$z \gg R$$

$$B(z) \big|_{z \gg R} \approx \mu_0 I \frac{1}{2z^3} \propto \frac{1}{z^3} \quad \text{Dipolcharakteristik}$$

$$(\text{aus } \cancel{B = \mu_0 I \frac{1}{2R}}) \quad B(z) = \mu_0 I \frac{R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Spule



$$B = \frac{n}{2l} \mu_0 I$$

$$B = \frac{n}{2l} \mu_0 I \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{b}{\sqrt{R^2 + b^2}} \right)$$

Grenzfall "Lange Spule" $B \approx \mu_0 \cdot I \cdot \frac{n}{l}$

Zur Beschreibung v. Induktionsvorgängen:

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \hat{n}$$

induzierte Spannung

$$U_{\text{ind}} \propto \frac{d\Phi_m}{dt}$$

vorzeichen:

$$U_{\text{ind}} = - \dot{\Phi}_m \quad (\text{Lenz'sches Minus})$$

Selbstinduktion in der Spule

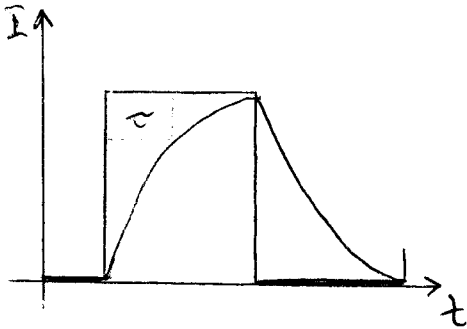
$$U_{\text{ind}} = - \dot{\Phi}_m = - L \cdot \dot{I} \quad , \quad L: \text{Induktivität der Spule}$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} \cdot A \cdot I$$

$$\dot{I}L + IR = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{I} + R/L I = 0}$$

$$\text{Ansatz: } I(t) = I_0 e^{-t/\tau} \Rightarrow \tau = L/R$$



Energie im Magnetfeld

Analog zum Kondensator ($E_{el} = \frac{1}{2} C u^2$)

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L I_0^2$$

$$\text{Bsp: } L = 10 \text{ mH} \quad I_0 = 10 \text{ A} \\ \rightarrow E_{mag} = 0.5 \text{ J}$$

$$\frac{E_{mag}}{\text{Vol}} = \frac{\frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l} A}{A \cdot l} \cdot I_0^2 \quad ; \quad B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

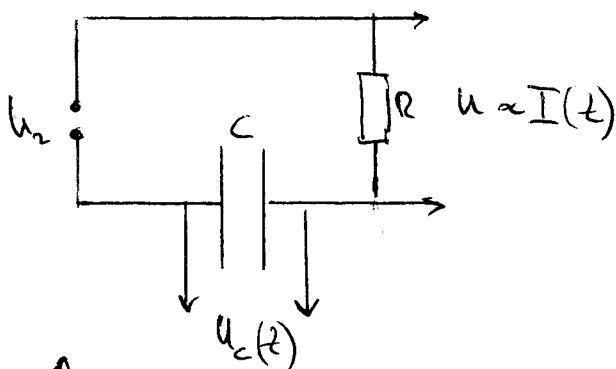
$$= \frac{1}{2\mu_0} B^2 =: \epsilon_{mag} \quad \text{Energiedichte}$$

Energiedichte des Magnetfeldes

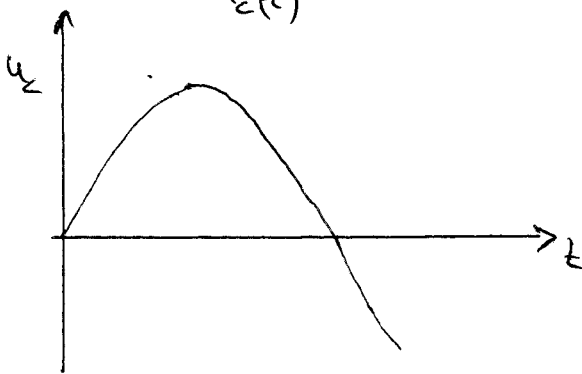
(Spule mit Indukt. L : $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L I^2$)

$$\frac{E_{\text{mag}}}{\text{Vol}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2$$

Vgl.: $\frac{E_{\text{el}}}{\text{Vol}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$



$$U_c(t) = \frac{1}{C} Q(t)$$



$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\dot{Q}(t) = \frac{dQ}{dt} = I$$

Kirchhoff's rule $U_n + \frac{1}{C} \ddot{Q} = R I$

R klein $\ddot{U}_n \approx -\frac{1}{C} \dot{Q}$

$I = -\dot{Q}$ (Entladestrom)

$$|\ddot{U}_n| = \frac{1}{C} |I|$$

$$\ddot{U}_n(t) = -\omega \cdot U_0 \cdot \sin(\omega t)$$

Vergleichen mit Ohm'schen Gesetz

\Rightarrow

... Vergleichen mit Ohmschen Gesetz

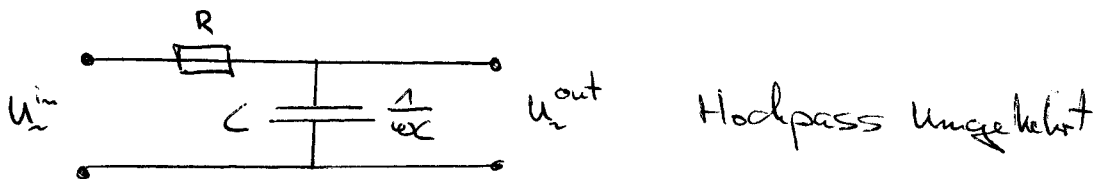
$$(U(t) = R \cdot I(t))$$

Einsetzen: $-\omega U_0 \cdot \sin(\omega t) = \frac{1}{C} I_0 \sin(\omega t)$

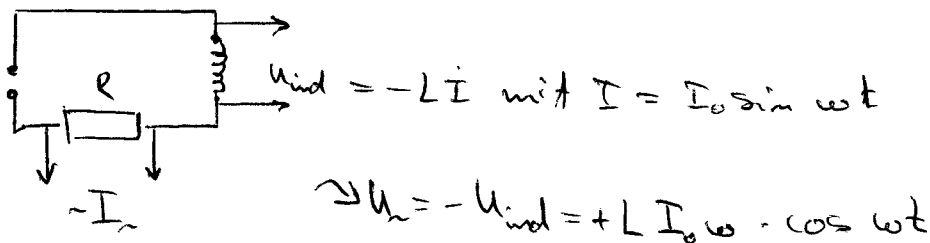
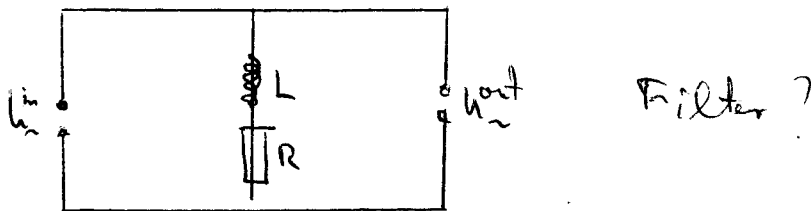
$$U_0 = \underbrace{-\frac{1}{\omega C}}_{=: X_C} I_0$$

kapazitiver Widerstand

Anwendung: Tiefpass



→ "Tietze Schenck" für Einführung i.d. Elektronik
"Horowitz, Hill"



Vgl. mit $U = R \cdot I$

$X_L := \omega L$ "Induktiver Widerstand"

Komplexe Widerstände

$$R = R$$

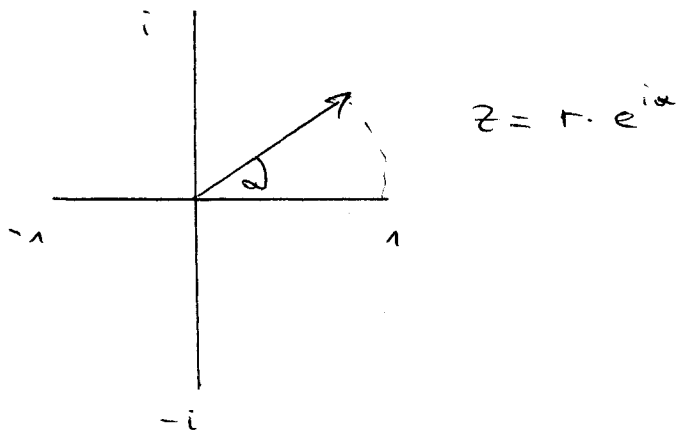
$$|X_C| = \frac{1}{\omega C}$$

$$|X_L| = \omega L$$

Phasenverschiebung mit komplexen Zahlen

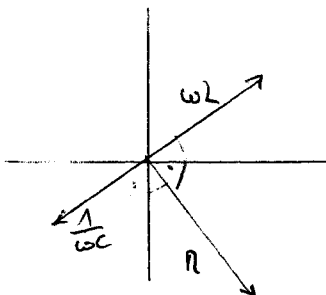
$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$$

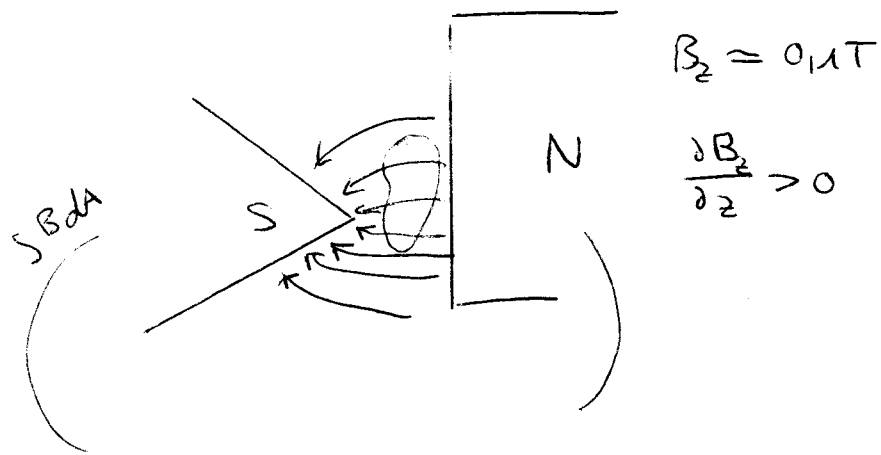
$$\sin \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$



$$X_C = \frac{1}{i\omega C} = -i \cdot \frac{1}{\omega C}$$

$$X_L = i\omega L$$



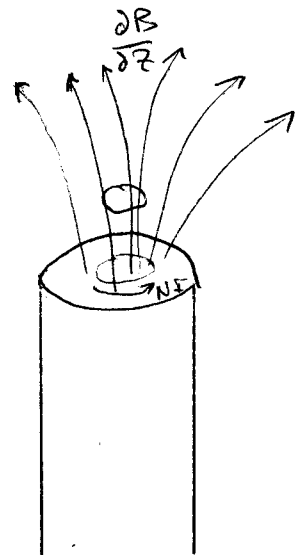


Inhomogenes Magnetfeld mit
einem Gradienten $\frac{\partial B_z}{\partial z} \neq 0$

Materie im Magnetfeld

Materie im Magnetfeld: 2 Klassen

- 1) Diamagnete erfahren $\vec{F} \parallel - \frac{\partial B_z}{\partial z}$
- 2) Paramagnete " $+ \frac{\partial B_z}{\partial z}$



F/N	Pro kg Substanz
-1,1	Graphit
-0,03	Cu
Dia -0,2	H ₂ O
-0,1	L-N ₂
Para +75	L-O ₂
+0,17	Al
vgl Ferro +4000	Fe

⇒ Berkeley PC

Dia-magnet. ist standard
bei einigen Stoffen überlagert
eine Paramag. Eigenschaft.

Magnetisches Dipolmoment

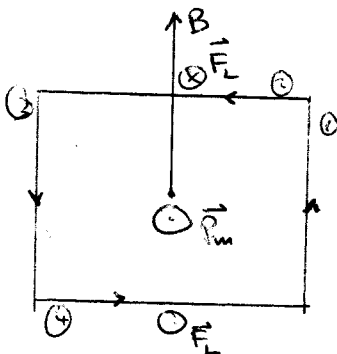
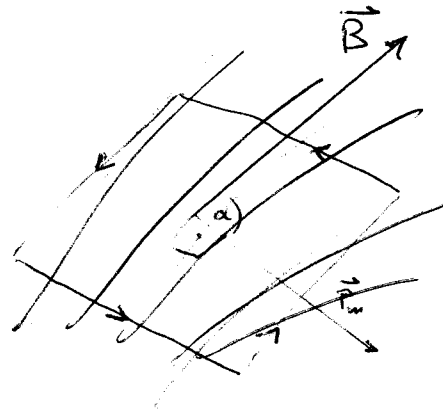
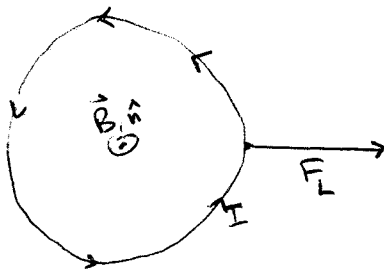
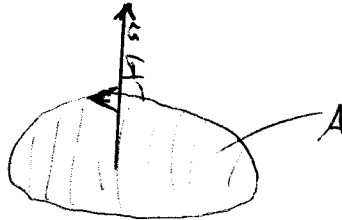
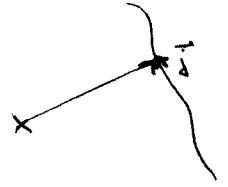
Def.: Mag. Dipolmoment $\vec{P}_m := \frac{1}{2} \int_{\text{Vol}} d^3r \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})$

Speziell: ebene Leiterschleife,
linienhafte Leiter

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \int_{\text{Linie}} \vec{r} \times d\vec{l} \vec{j} A = \frac{1}{2} I \int_L \vec{r} \times d\vec{l}$$

Spezieller: Kreis

$$\vec{P}_m = I \cdot A \cdot \hat{n}$$



$$\alpha = 90^\circ : F_L = q \vec{v} \times \vec{B}$$

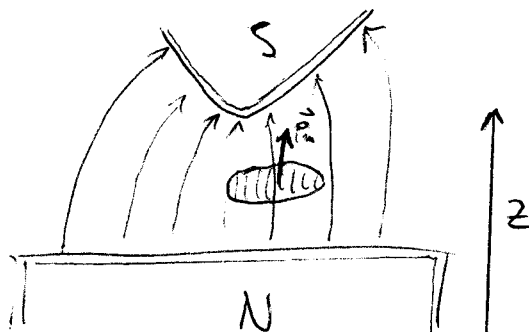
$$①, ③ : F_L = 0$$

$$②, ④ : \vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}_L \quad \text{Drehmoment}$$

besser für Drehmoment: $\vec{D} = \vec{P}_m \times \vec{B}$

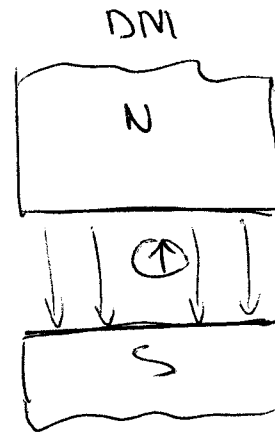
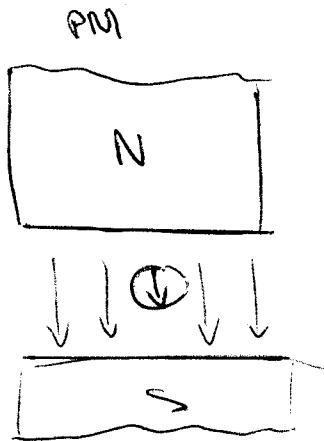
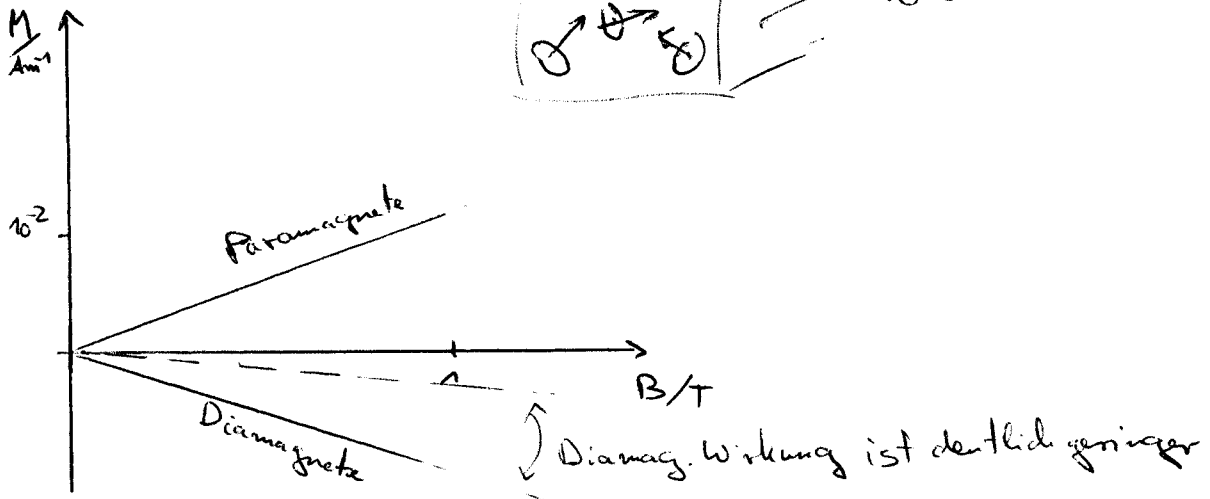
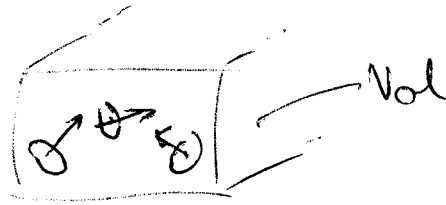
mit inhomogenen Magnetfeld gibt es Nettokräfte auf den Schwerpunkt

$$F_z = P_{m,z} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

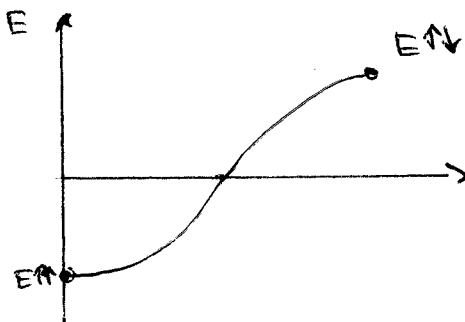


Magnetisierung

$$\vec{M} := \frac{\sum_i \vec{p}_{m,i}}{Vol}$$




Energiedifferenz zwischen



$$E_{pot} = -\vec{\mu}_m \cdot \vec{B}$$

$$\rightarrow E_{\uparrow\downarrow} - E_{\uparrow\uparrow} = 2\mu_m B$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{im Vakuum}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad \text{in Materie}$$


Magnetische Suszeptibilität

$$\chi_m: \vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$(\mu_0 \vec{M} = \chi_m \vec{B})$$

Allg. in Materie

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \quad \text{als abstr. Schreibweise; } \mu = 1 + \chi_m$$

Substanz	$\chi_m / 10^{-9} \text{ mol}^{-1}$	μ
Diam L- N_2	-12	≈ 1
PM L- O_2	3450	$\approx 1 + \epsilon$
PM Al	+16,5	≈ 1

Aussicht: Ferromagnetika

Gyromagnetisches Verhältnis

$$p_m = A \cdot I$$

$$= \pi \cdot r^2 \cdot \frac{q}{T} = \frac{1}{2} q v r$$

$$\vec{p}_m = \underbrace{\frac{q}{2m}}_{\text{gyromagnetisches Verhältnis}} \vec{L} \quad \text{---} \quad L = m v \cdot r$$

gyromagnetisches Verhältnis

$$\text{Elektronen: } \vec{p} = -\frac{e}{2m} \vec{L}$$

$$QH: |\vec{L}| = 0, 1 \cdot \hbar, 2 \cdot \hbar, 3 \cdot \hbar, \dots, n \cdot \hbar, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$\hbar : \frac{h}{2\pi} \quad \swarrow \quad \text{Plancksches Wirkungsquantum}$$

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$\vec{p}_m = -\underbrace{\frac{e\hbar}{2m}}_{\mu_B} \cdot \frac{\vec{L}}{\hbar}$$

μ_B Bohrsche Magneton

$$\frac{p_m}{\mu_B} = -\frac{\vec{L}}{\hbar}$$

$$\mu_B = 0,58 \cdot 10^{-4} \frac{\text{eV}}{\text{T}} \quad (= 9,27 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}})$$

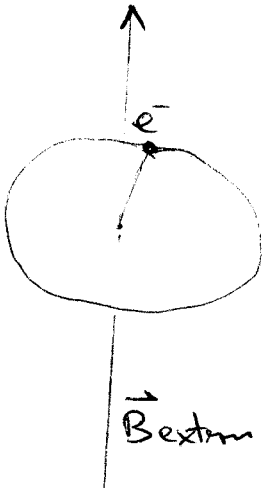
Abschätzung E_{pot} von p_m

$$E_{\text{pot}} = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$$

$$E_{\text{pot}} \approx \mu_B \cdot B, \quad B = 1 \text{ T}$$

$$E_{\text{pot}} \approx 60 \mu \text{ eV} \approx 10^{-23} \text{ J}$$

Abschätzung des durch die Lorentz-Kraft
induzierten Momentes (Diamag.).



$$F_z = m v^2 / r$$

$$F_L = q \cdot v \cdot B \quad \text{Sei klein}^* \Rightarrow \Delta v \ll v$$

* vgl. mit F_z

$$\frac{dF_z}{dv} = 2m v / r$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ Umlauf: } \int_{1 \text{ Umlauf}} dF_z &= 2m v / r \cdot \int_{1 \text{ Umlauf}} dv = F_L = q \cdot v \cdot B \\ &= 2m v / r \cdot \Delta v \end{aligned}$$

$$\Delta v \cdot \frac{2m v}{r} = q \cdot v \cdot B \Rightarrow \Delta v = \frac{r \cdot B \cdot q}{2m}$$

Induziertes Moment

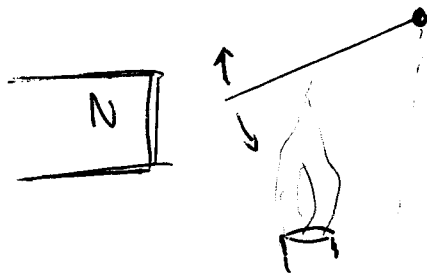
$$p_m^{\text{ind}} = \frac{1}{2} \Delta v \cdot q \cdot r = \frac{1}{2} q^2 \frac{r^2}{2m} B$$

$$\text{Bsp: } r = 1 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad q = e \quad m = m_e \quad B = 1 \text{ T}$$

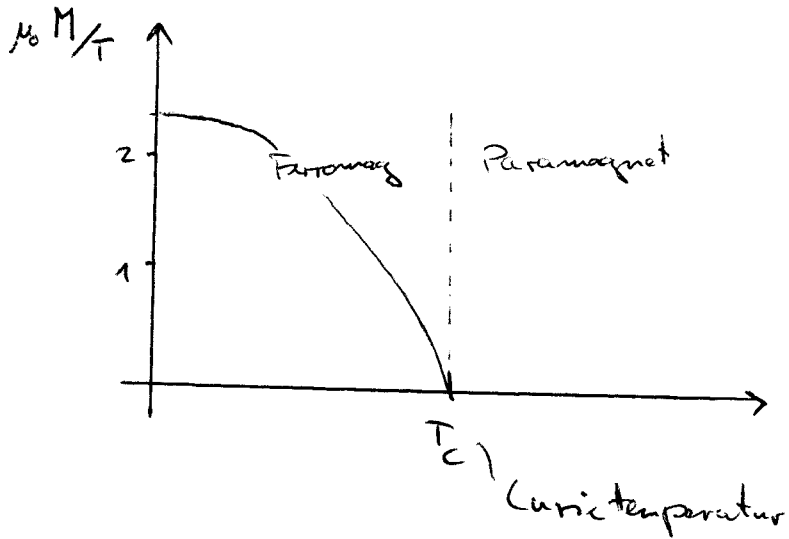
$$p_m^{\text{ind}} \approx 10^{-28} \text{ A m}^2 \quad \text{vgl. } \mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

\Rightarrow Diamagnetische Reaktionen sind deutlich geringer
als die Paramag. Reaktion (5 Größenordnungen)

Ferro-magnete



Ferro-magnete werden angezogen nur unterhalb einer bestimmten Temp.



Magnetisierung in Eisen: (Abschätzung)

$$\begin{aligned} n &= \frac{\sum p_{m_i}}{\text{Vol}} \\ &= \frac{1 \cdot 10^{-23}}{1} \cdot 10^{23} \frac{\text{Am}^2}{10^{-6} \text{m}^3} \end{aligned}$$

$$\boxed{M \approx 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}}}$$

(vgl. $B = \mu_0 H + \mu_0 M$)

entspricht $B = \mu_0 \cdot M \approx 1 \text{ T}$

Magnetische Domänen

Ex 6.12.04



$$\mu = \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

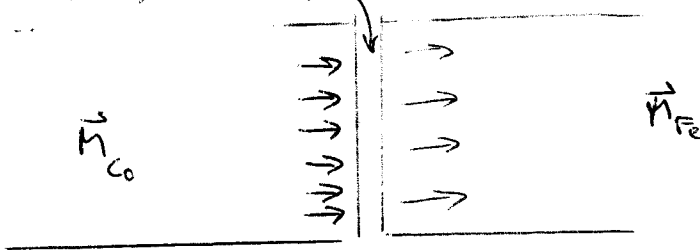
$$E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Typische Größe:

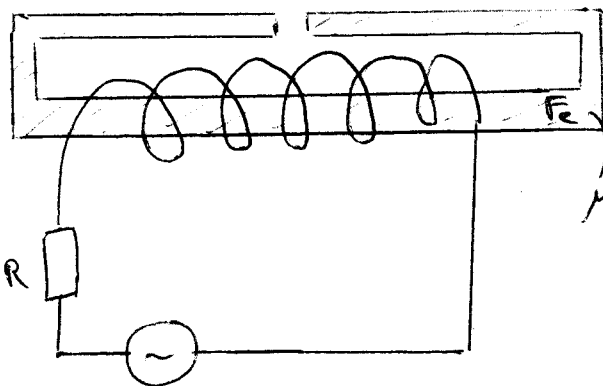
$$\mu_m \approx \mu_B \quad \text{Bohrsches Magneton} \quad \textcircled{!}$$

$$\text{magnetischer Fluss } \Phi_m = \int \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \int (\vec{H} + \vec{M}) d\vec{A} \quad | \quad M = \frac{\sum \mu_i}{\text{Vol}}$$

$\sim 50 \mu\text{m}$ La. A-palte $\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{H}$ wird wichtig



Unmagnetisieren im Wechselfeld



$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

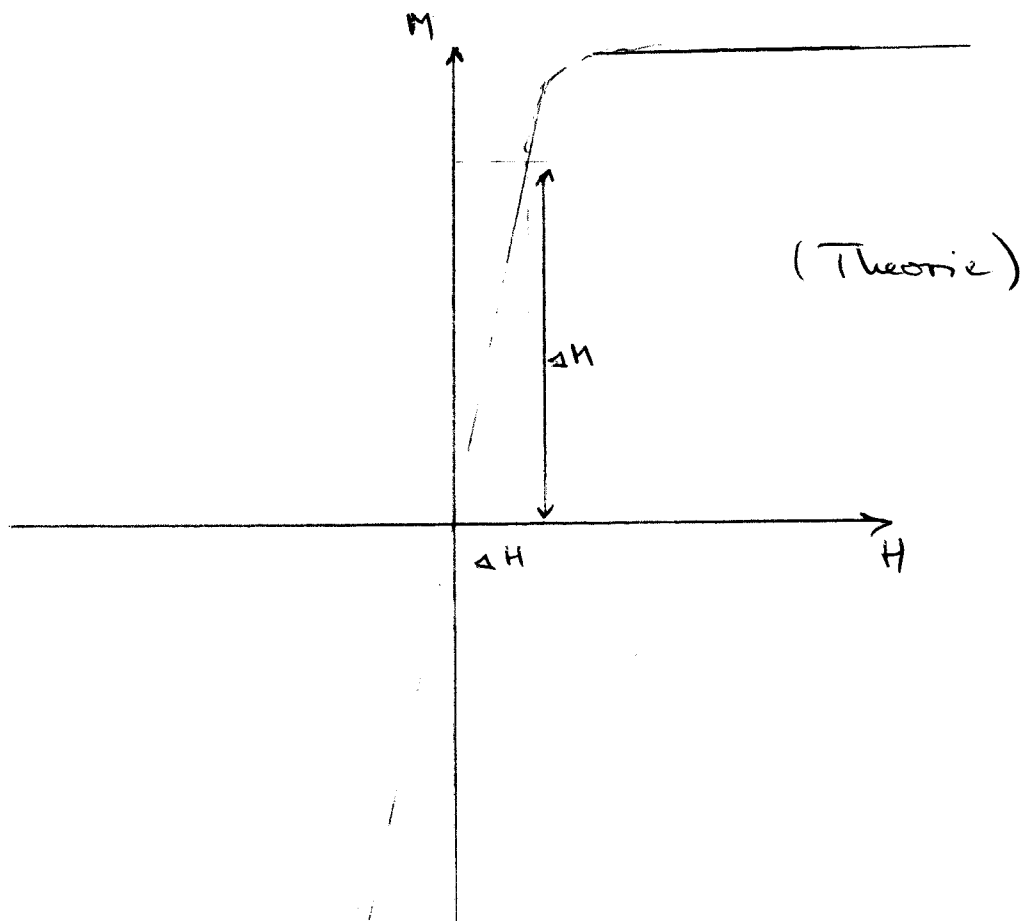
μ (rel. Permeabilität)

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = N \cdot I$$

$$\frac{\Delta H}{\Delta H} = \chi_m (\text{Susz.})$$

$$U_{\sim} = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$I_{\sim} = I_0 \cos(\omega t)$$

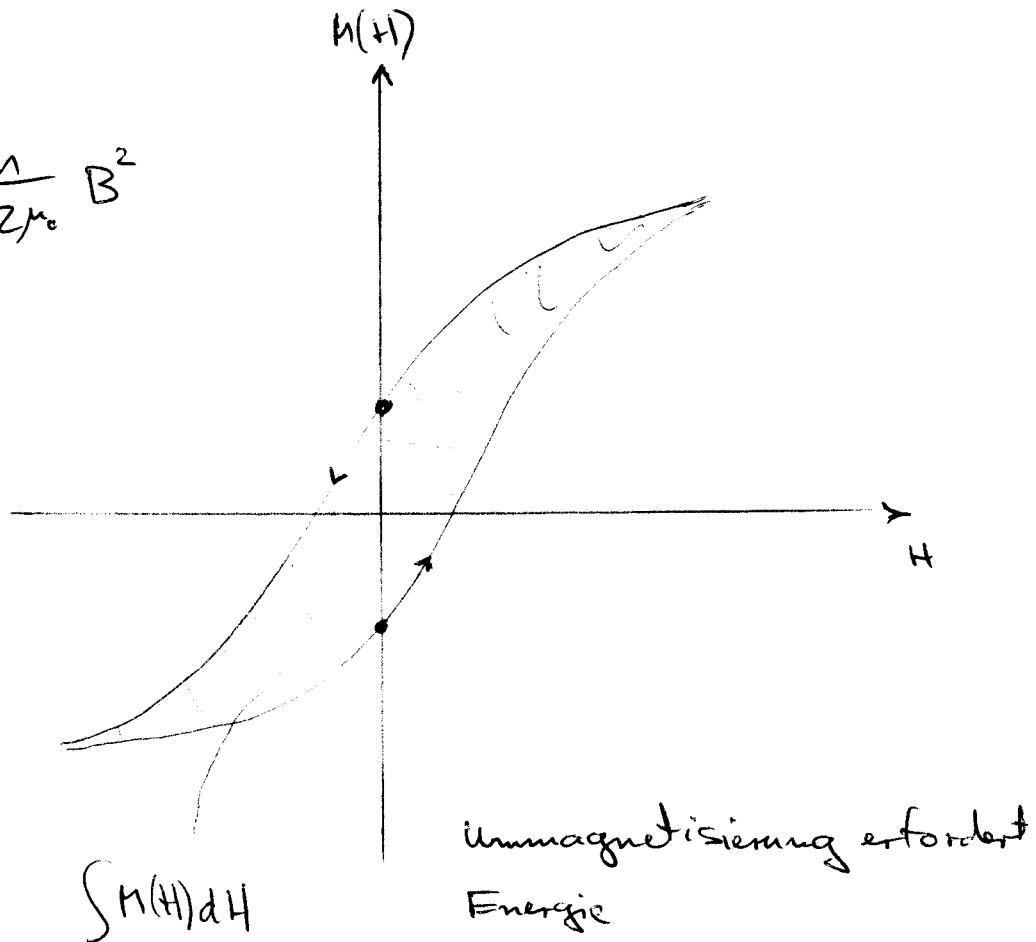


Wand (Blockwand):



Hysteresekurve

$$\epsilon_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$



Fläche beschreibt Energieverlust

$$\epsilon_m = \frac{1}{2} \mu_0 M H$$

Energiedichte eines Magneten M
in H

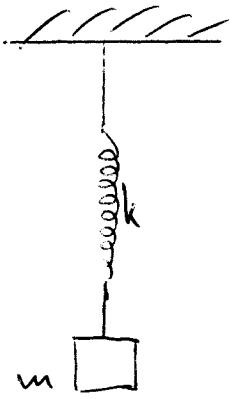
$$B = \mu_0 H + \mu_0 M$$

äußeres Feld mag. Feld

Bei guten Spulenkernen sollte die Fläche der Hysteresekurve klein sein

Mechanisches Federpendel

Bx. 13.12.04



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$m = 50 \text{ g}$$

$$10 \cdot T = 10 \text{ s}$$

$$u = 4\pi^2 \cdot 50 \text{ g} \cdot \frac{1}{\text{s}^2} = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$F = m \cdot a$$

$$-k(x - x_0) = m \ddot{x} \quad \leadsto \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_0) = 0$$

↑
Ruhelage
mit m

$$x_0 := 0 \text{ (Messlatte)}$$

$$\text{Ansatz: } x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

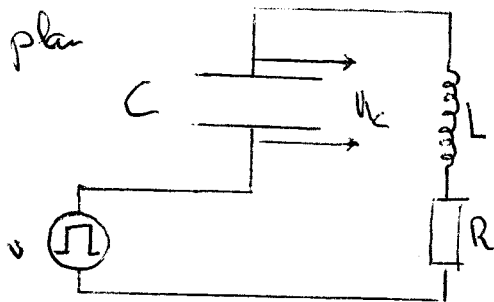
$$\text{Mit Dämpfung: } F_R = -\beta \dot{x}$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} + \beta \dot{x} + kx = 0$$

$$\text{Lösung } x(t) = e^{-t/\tau} \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \tau = \frac{1}{\beta}$$

Parallelschwingkreis

Schaltplan



Bsp.:

$$C = 100 \text{ nF}$$

$$\nu = 160 \text{ Hz}$$

$$\hat{I} = 0,6 \text{ A}$$

$$L_0 = 2,2 \text{ mH}$$

$$L = \mu \cdot L_0$$

↑

μ_0 -Norm

$$U_C = \frac{1}{C} \cdot Q = \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

$$\int_{t_0}^t I(t') dt = \frac{1}{\omega} I_0 \sin(\omega t) + \text{const}$$

Bewegungsgleichung für el.-mag. Oszillator

(Maschenregel)

$$\sum U_i = \sum U_{\text{Enk}}$$

abfallende Sp.

Spannungsquellen

$$\frac{1}{C} Q + RI = -L \dot{I} \quad \text{mit } \dot{Q} = I$$

$$L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{1}{C} Q = 0$$

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{L \cdot C} Q = 0$$

$$\omega_t = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0 \tau}{2}\right)^2} \quad \text{mit } \tau = R \cdot C$$

Äquivalente Größen

el mag

mech

$Q(t)$

$x(t)$

$\frac{1}{C}$

k

L

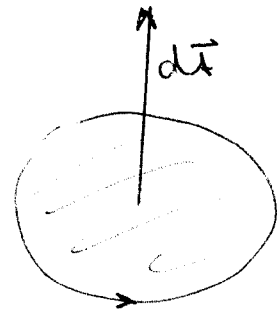
m

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau_D} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\tau_D = L/R$$

Farad. Ind. Gesetz

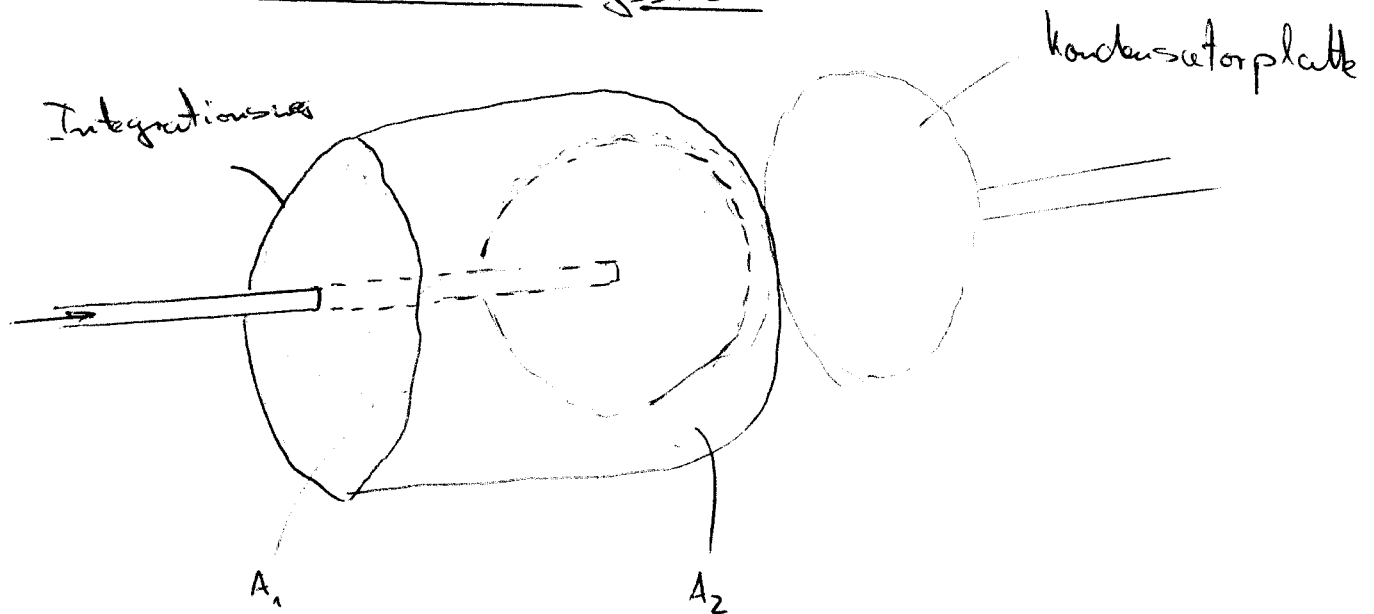
$$\mathcal{U}_{\text{ind}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



Ampèrescher Verkettungssatz

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$$

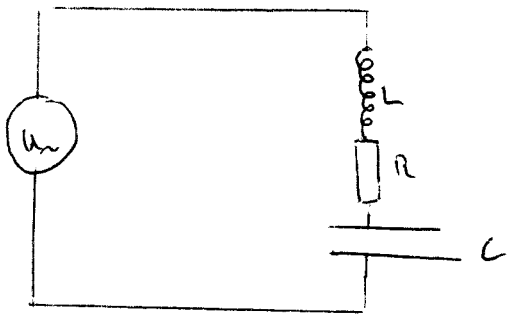
Maxwellscher Verschiebungsstrom



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I + \frac{d}{dt} \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$

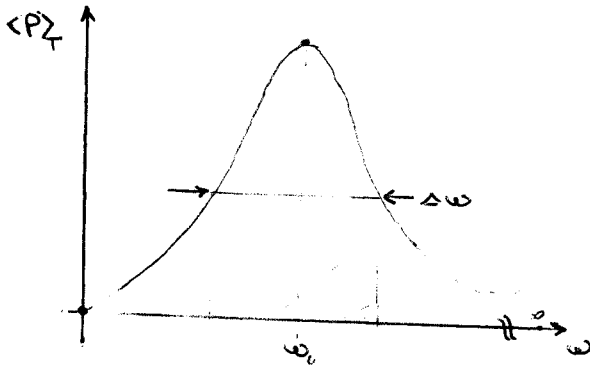
Maxw. Verschiebungsstrom



$$u_n = u_0 \cos(\omega t)$$

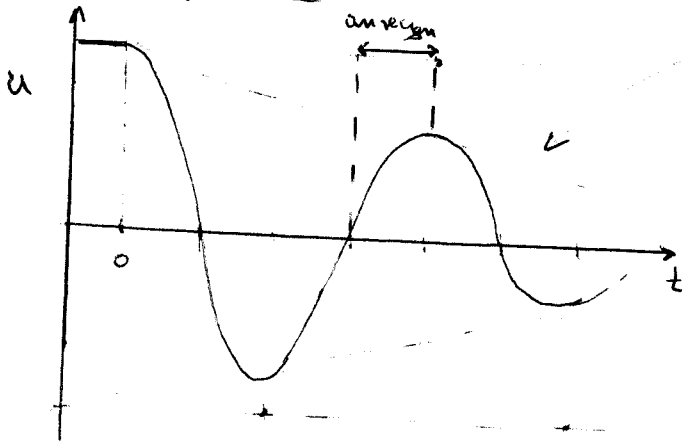
↑
"Energiefrequenz" $\omega \leftrightarrow \omega_0, \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$\langle P \rangle_T = \frac{u_{eff}^2}{R} = \frac{\omega^2}{(\frac{1}{R})^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2}$$

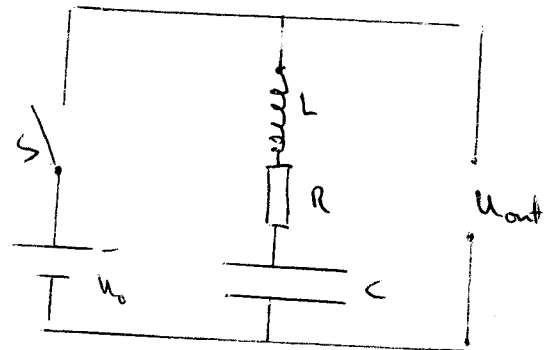


Güte: $Q = \frac{\omega_0}{\Delta \omega}$

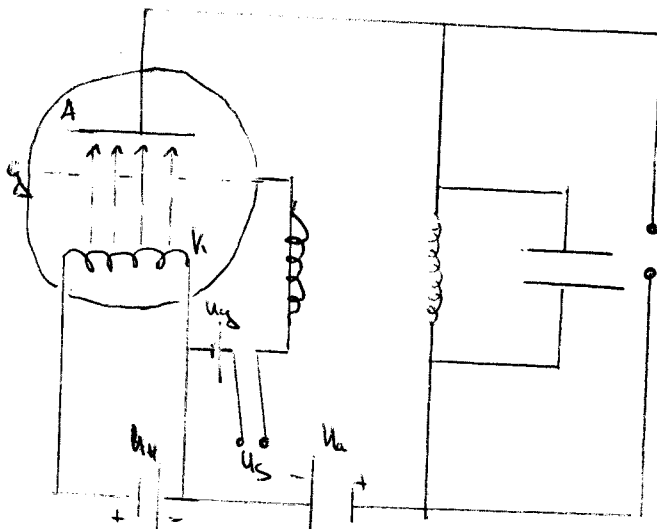
Dämpfung:



$$T_D = \frac{L}{R}$$



Ungeädämpft + Oszillator



$u_s = \text{Sendesignal}$

$$u = u_0 \cos \omega t$$

Wellenausbreitung

$$\phi = A \sin(k_1 x - \omega_1 t) + A \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

$\sin(kx - \omega t)$: nach rechts

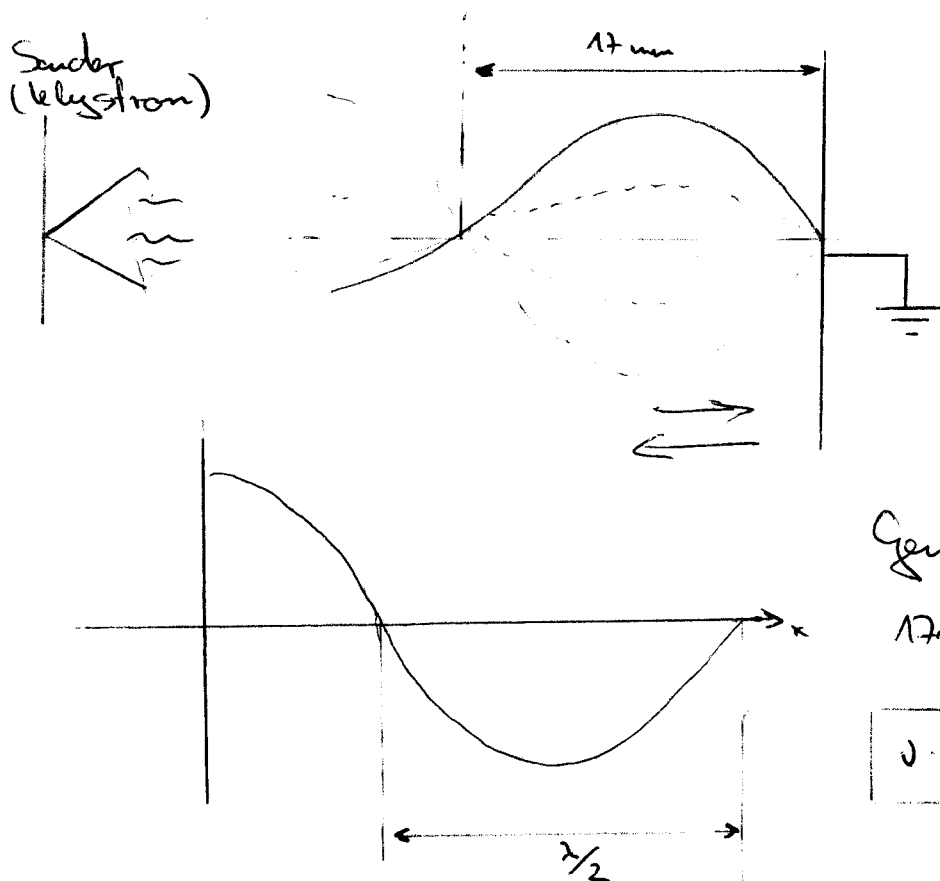
$\sin(-kx - \omega t)$: nach links

mit $k_1 = k$, $k_2 = -k$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$\phi = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(-kx - \omega t)$$

$$\begin{aligned} \phi &= 2 \cos kx \cdot \sin(-\omega t) \\ &= -2 \cos kx \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

→ stehende Wellen



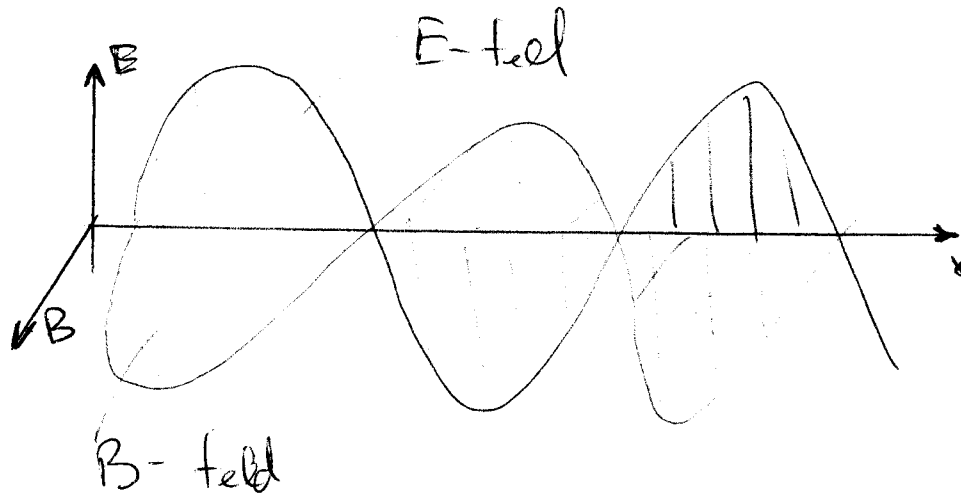
$$f \approx 10^{10} \text{ s}^{-1} \Rightarrow T = 10^{-10} \text{ s}$$

Gemessen. 2x zw. 2 Knoten
 $17 \text{ mm} \hat{=} \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 3,4 \text{ cm}$

$$\boxed{v \cdot \lambda = c}$$

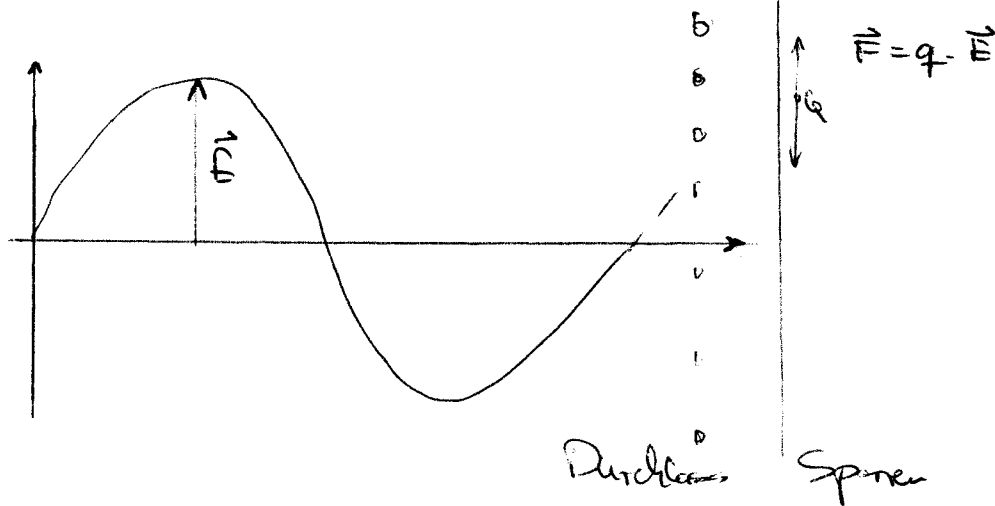
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Elektromagnetische Welle

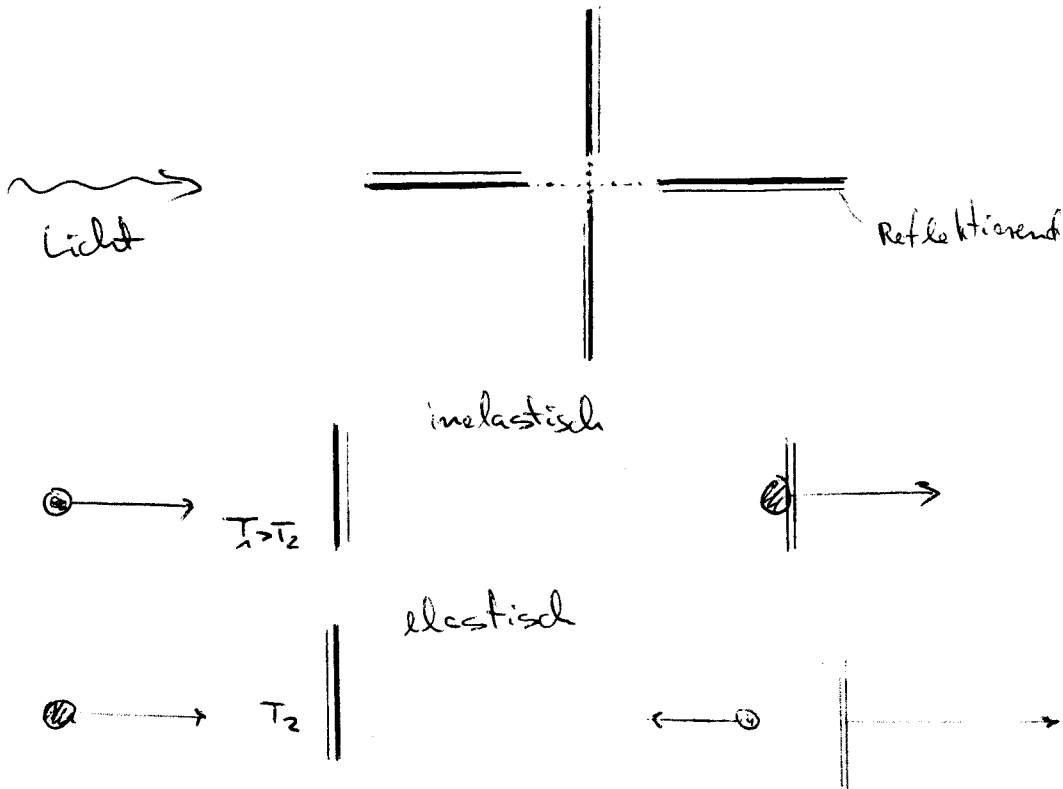


- Im Fernfeld
- ebene Welle
- lin. polarisiert

Polarisationsfilter:

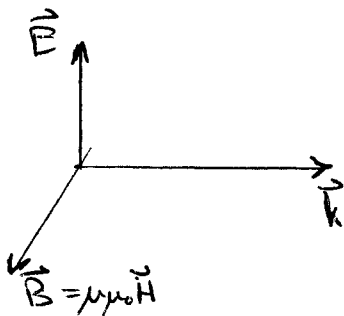


Lichtwindmühle



Vakuum ist nicht perfekt: Temperatureffekt überkompensiert den Impuls
 → Lichtmühle dreht sich in die "falsche" Richtung

Energiedichte und Impuls einer EM Welle



Poyntingvektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

w_{EM} : Energiedichte = Strahlungsdruck ($\frac{N}{m^2}$)

$$w_{EM} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$


$\underbrace{\hspace{10em}}_{E=CB}$

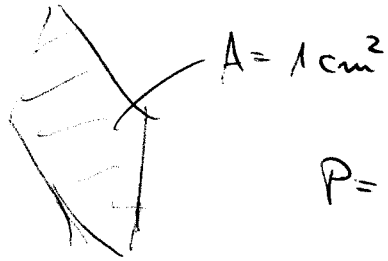
$$[w_{EM}] = \frac{J}{m^3}$$

$|\vec{S}|$: Strahlungsleistung
 pro Fläche

$$= \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{c} \cdot E H$$

$$w_{EM} \cdot \vec{c} = \vec{S}$$

$$P = 100 \text{ W}$$




$$P = \frac{100 \text{ W}}{10^{-4} \text{ cm}^2} = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}, \quad P = 1 \text{ W/m}^2$$

Energiestrandichte

$$W_{EM} \cdot \vec{c} = \vec{S}$$

$$[W_{EM} \cdot \vec{c}] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} ; \vec{S}: \text{Poynting-Vektor}$$

„Ladungsstrandichte“

$$[e \cdot \vec{v}_D] = \vec{j} \quad [e \cdot \vec{v}_D] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

Q.M.: Energieaustausch zwischen EM-Welle u. Umgebung
 nur in Einheiten $h\nu$ möglich ; $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
 „Wirkung“

Bsp.: rotes Photon

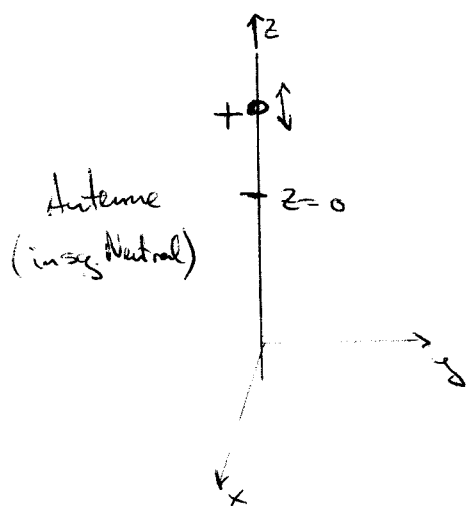
$$\lambda = 633 \text{ nm} \leadsto h\nu = 3,14 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,96 \text{ eV}$$

$$\text{Strahlungsdruck } P_S = \frac{1}{c} \cdot S \quad [P_S] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Strahlungscharakteristik

Jede beschl. Ladung emittiert EM-Wellen

Bsp.: Hertzscher Dipol



$$\vec{d} = \vec{r} \cdot q = \hat{z} d_0 \sin(\omega t) ; \vec{d}: \text{el. Dipol}$$

Ortsvektor von q

Im Fernfeld: $R \gg d_0$

$$\vec{E}(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\ddot{\vec{d}}(t - \frac{R}{c})}{c^2 r} \sin \vartheta$$

Wie schnell verliert der Hertz - Dipol Energie?

$$\langle \vec{S} \rangle_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 d_0^2 \omega^4}{3c^3} = \left\langle -\frac{dE_{\text{em}}}{dt} \right\rangle_T$$

Gesamtenergie d. Hertz. Dip.

$$\langle E_{\text{em}} \rangle_T = \frac{1}{2} m d_0^2 \omega^2$$

Relative Abnahme

$$\frac{\left\langle -\frac{dE_{\text{em}}}{dt} \right\rangle_T}{\langle E_{\text{em}} \rangle_T} = \frac{q^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} = \gamma$$

Ansatz

$$E_{\text{em}}(t) = \langle E_{\text{em}}(0) \rangle \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\text{char. Zeit } \tau = \frac{1}{\gamma} = 6\pi\epsilon_0 \frac{mc^3}{q^2} \cdot \frac{1}{\omega^2}$$

$$\text{Für } q=e \quad \tau = 4 \cdot 10^{-21} \text{ s}^2 \cdot \frac{1}{v^2} \cdot s$$

$$m=m_e \quad \tau = 18 \text{ ns}$$

→ erhebliche Anzahl Schwingungen

$$\text{für rotes Licht } \lambda = 633 \text{ nm} \\ \nu = 4.7 \cdot 10^{14} / \text{s}$$

Eine Welle, die nur eine endliche Zeit emittiert wird, kann nicht monochrom sein.

(Allg.: Fourier-Transformation, Bsp: $t \leftrightarrow \omega$; $x \leftrightarrow k$)

~~$$\text{Funktion } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f_0 \cos(\omega t + \varphi) & \end{cases}$$~~

$$\text{Funktion } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f_0 \cdot e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$F(\omega)$: Fourier-transformierte von $f(t)$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \Leftrightarrow \dots$$

$$F(\omega) = \frac{f_0}{\gamma + i(\omega - \omega_0)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Spektrale Verteilung

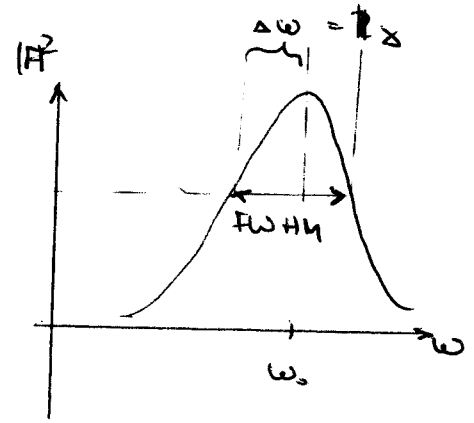
$$|F(\omega)|^2 = \frac{f_0^2}{2\pi} \frac{1}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2}$$

$$\text{F.W.H.N.} = 2\gamma \quad ; \quad \gamma^{-1} = \tau$$

$$2\gamma = \Delta\omega$$

$$\tau \cdot \Delta\omega = 1$$

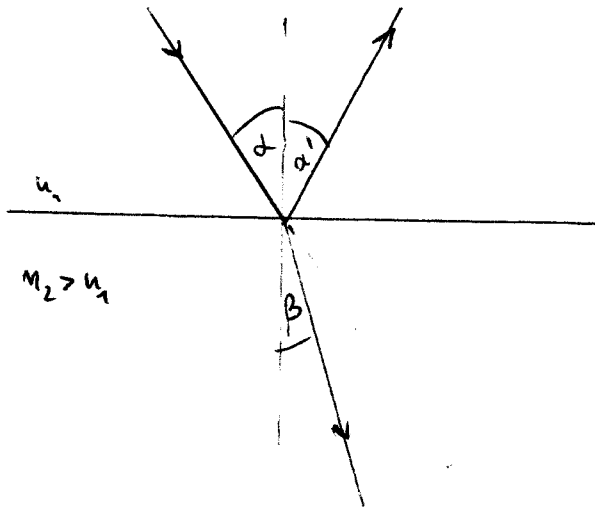
"Transformationsbeschränkt"



Brechung und Reflexion

Ebene Welle

$$\vec{E}_e = \vec{A}_e \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}_e \vec{r})}$$

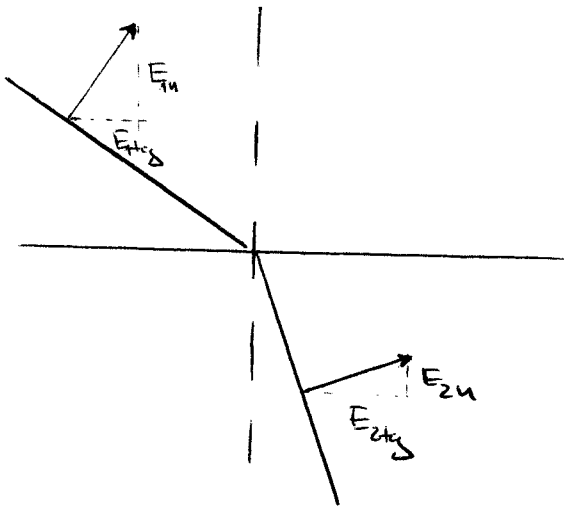


• gebrochene Welle

$$\vec{E}_g = \vec{A}_g \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}_g \vec{r})}$$

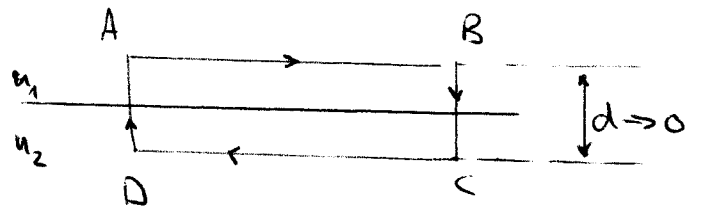
• reflektierte Welle

$$\vec{E}_r = \vec{A}_r \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}_r \vec{r})}$$



(1) E-Feld tangential stetig

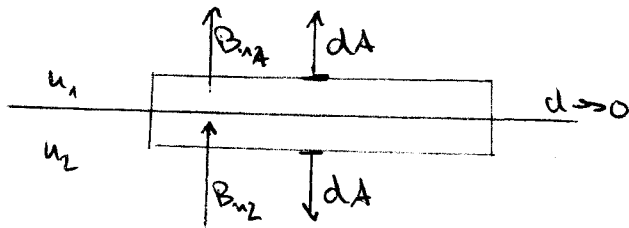
$$\text{Es gilt } \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow & \int_A^B \vec{E}_{t1} \cdot d\vec{s}_1 + \underbrace{\int_B^C \vec{E}_{n2} \cdot d\vec{s}}_{=0} \\ & + \int_C^D \vec{E}_t \cdot d\vec{s}_2 + \underbrace{\int_D^A \vec{E}_{n1} \cdot d\vec{s}}_{=0} = 0 \\ & E_{t1} |\overline{AB}| = E_{t2} |\overline{CD}| \Leftrightarrow E_{t1} = E_{t2} \end{aligned}$$

(2) B-Feld : Normalkomponente geht stetig über

$$\Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



$$\Rightarrow B_{n1} A + (-B_{n2} A) = 0 \Rightarrow B_{n1} = B_{n2}$$

(3) E-Feld : Normalkomponente unstetig

$$D_{n1} = D_{n2} \Rightarrow \epsilon_1 \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 \epsilon_2 E_{n2}$$

$$\Rightarrow \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

(4) B-Feld : tangential $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow H_{t1} = H_{t2} \Rightarrow \frac{1}{\mu_0 \mu_1} B_{t1} = \frac{1}{\mu_0 \mu_2} B_{t2}$$

$$\Rightarrow \frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Für nicht ferromagnetische Materialien $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 1$
dann ist auch die tangentialkomponente stetig
 $n \approx \sqrt{\epsilon}$

Für die tangentialkomponenten gilt

$$E_{et} + E_{rt} = E_{gt}$$

$$\text{bei } \vec{r} = \vec{0} : A_{et} e^{i(\omega t)} + A_{rt} e^{i(\omega t)} = A_{gt} e^{i(\omega t)}$$

$$\text{gültig } \forall t \Rightarrow \omega_e = \omega_r = \omega_g = \omega$$

✓ Punkte der Grenzfläche haben die gleiche Phase

$$\Rightarrow \vec{k}_e \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_g \cdot \vec{r} \quad ; \quad \vec{r} = x \vec{e}_x + z \vec{e}_z, \quad \vec{k}_e = k_{ex} \vec{e}_x + k_{ey} \vec{e}_y$$

$$\vec{k}_r = k_{rx} \vec{e}_x + k_{ry} \vec{e}_y + k_{rz} \vec{e}_z$$

$$\vec{k}_g = \text{---}$$

$$k_{ex} x = k_{rx} x + k_{rz} z = k_{gx} x + k_{gz} z \Rightarrow k_{ex} = k_{rx} = k_{gx} \\ k_{rz} = k_{gz} = 0$$

Es gilt: $k_{ex} = k_e \cdot \sin \alpha$

$$k_{rx} = k_r \cdot \sin \alpha'$$

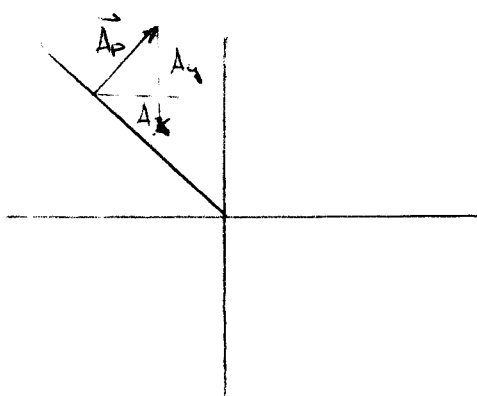
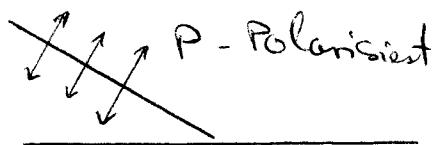
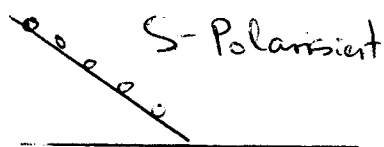
$$k_{gx} = k_g \cdot \sin \beta$$

$$k = \frac{\omega}{c'} = n \cdot \frac{\omega}{c} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{c'_1} = \frac{\sin \alpha'}{c'_1} = \frac{\sin \beta}{c'_2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \alpha'$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c'_1}{c'_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{Snell'sches Brechungsgesetz}$$

Abhängigkeit von der Polarisation



$$\vec{A}_p = (A_x, A_y, 0)$$

$$\vec{A}_s = (0, 0, A_z)$$

Betrachtung von S-polarisiertem Licht

$$\Rightarrow A_{es} + A_{rs} = A_{gs} \quad (*)$$

$$\text{mit } \vec{B} = \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{E}) = \frac{1}{\omega} (\vec{v} \times \vec{E})$$

$$(\vec{v}_e \times \vec{E}_e)_x + (\vec{v}_r \times \vec{E}_r)_x = (\vec{v}_g \times \vec{E}_g)_x$$

$$\text{für } E_s \Rightarrow k_{ey} \cdot A_{es} + k_{ry} \cdot A_{rs} = k_{gy} A_{gs}$$

$$A_{es} - A_{rs} = \frac{k_{gy}}{k_{ry}} A_{gs} \quad (**)$$

Relation der Amplituden durch Zusammennehmen von (*) und (**)

$$A_{gs} = \frac{2}{1+a} A_{es} \quad a := \frac{k_{gy}}{k_{ry}} = \frac{k_g \cos \beta}{k_e \cos \alpha}$$

$$A_{rs} = \frac{1-a}{1+a} A_{es} = \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

Fresnel-Formeln

$$\text{I) } r_s = \frac{A_{rs}}{A_{es}} = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} = - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{Pol.-Koeff.}$$

$$\text{II) } \tau_s = \frac{A_{gs}}{A_{es}} = \frac{2 n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{Transmissions-Koeff.}$$

$$\text{III) } r_p = \frac{A_{rp}}{A_{ep}} = \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}$$

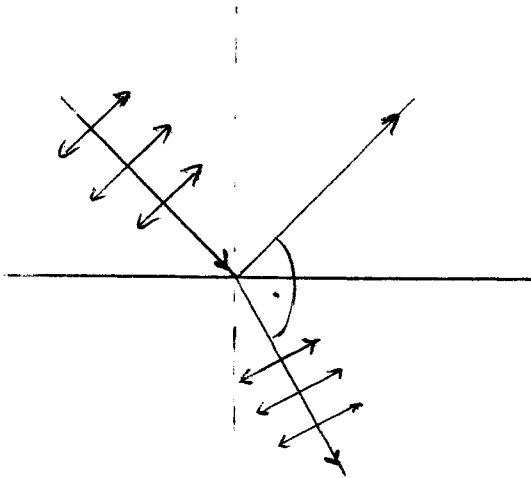
$$\text{IV) } \tau_p = \frac{A_{gp}}{A_{ep}} = \frac{2 n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}$$

\Rightarrow Pantücker 2 Kap. 8.5

Reflexionsvermögen $R = \rho^2$

Transmissionsvermögen $T = \tau^2 \frac{\epsilon_2 \epsilon_2'}{\epsilon_1 \epsilon_1'}$

$$T + R = 1$$

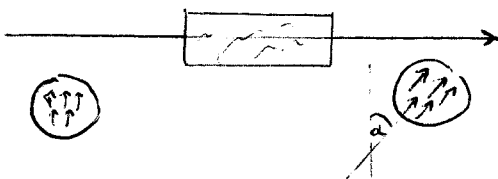


Brewster-Winkel:

reflektierte Strahl senkrecht
zu dipolachse: keine
Abstrahlung möglich
nur für p-Polarisiertes Licht

$$\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}$$

Zirkular polarisiertes Licht



lineare Polarisation als
zwei zirkularpolarisierte Wellen

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0} d (\underbrace{n^-}_{1. \text{ Welle (links)}} - \underbrace{n^+}_{2. \text{ Welle (rechts)}})$$

$\lambda/4$ -Plättchen: erzeugt ~~lineare~~ ^{zirkular} pol. Licht

$$d = \frac{\lambda}{4(n_3 - n_1)}$$

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d (n_3 - n_1)$$

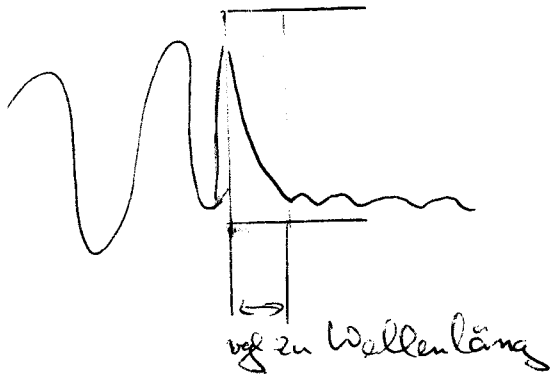
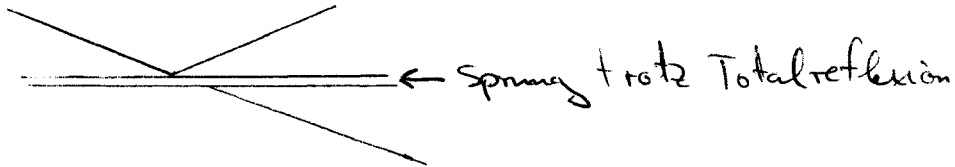
$$\Delta \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow d = \frac{\lambda_0}{4} \frac{1}{(n_3 - n_1)}$$

Quanteneigenschaften des Lichts

$E = h \nu$ Energie eines Lichtquants

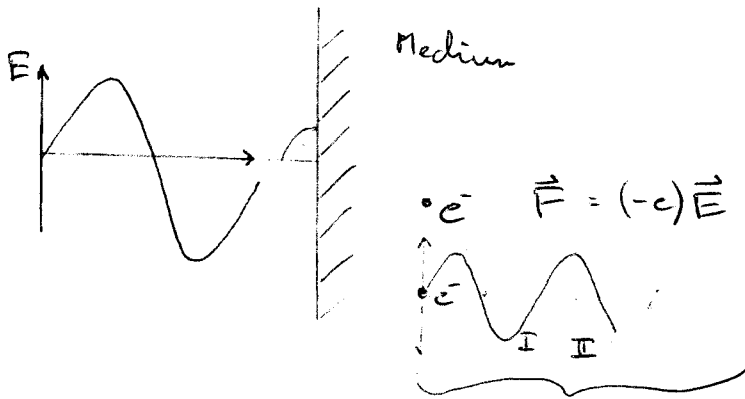
Drehimpuls eines Photons $\pm \hbar$

Tunnel effect $\sin \alpha = \frac{n_2}{n_1}$ Totalrefl. wenn $\alpha \geq 90^\circ$



Warum breitet sich Licht im Medium langsamer aus als im Vakuum?

$$n = \frac{c}{v} ; v: \text{Gsgdw. im Medium}$$

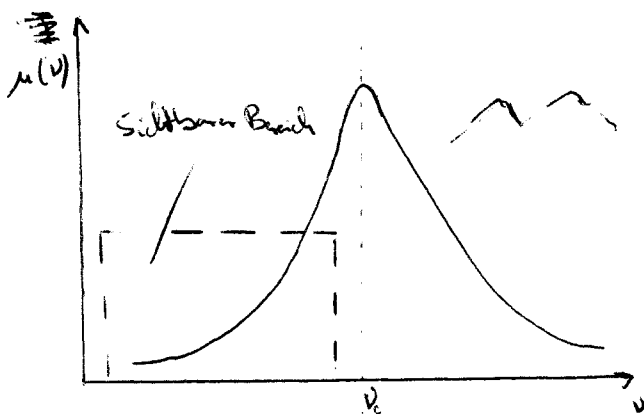
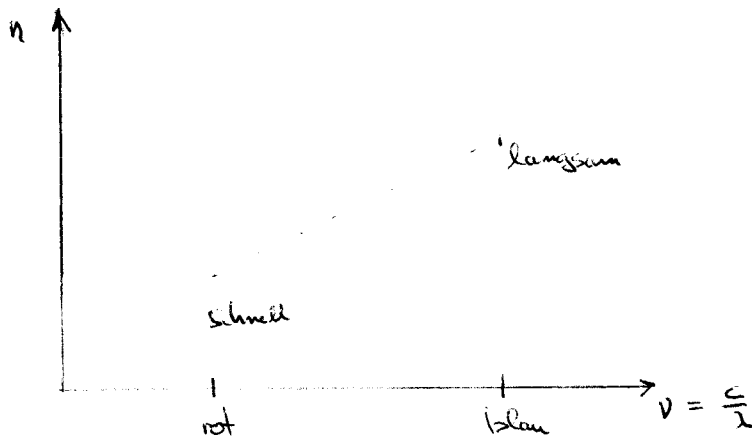


Elektronen schwingen
(aufgrund der Ruhemasse Verzögerung)

Summe: breitet sich langsamer aus

Im Medium gibt es Absorption und Dispersion

Dispersion: $n = n(\nu)$



$$\mu(\nu): [\mu] = \text{m}^{-1}$$

↳ Absorbtivität

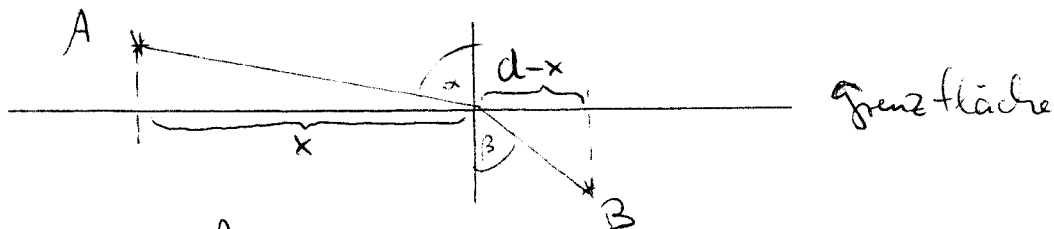
Fata Morgana

Superior (Wüste)

$$\frac{\partial T}{\partial z} \leq 0$$

inferior (Meer)

$$\frac{\partial T}{\partial z} \geq 0$$

mit T ändert sich die GeschwindigkeitFermatsches Prinzip

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

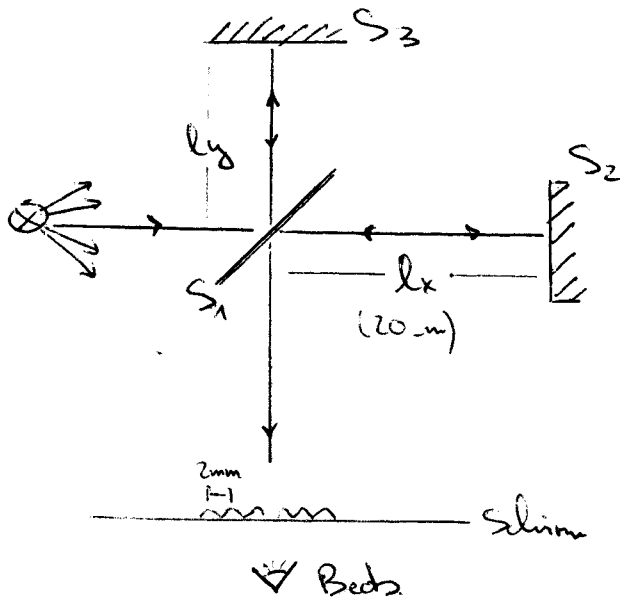
„Ausbreitung von Licht zwischen zwei Punkten, die in verschiedenen Medien liegen, erfolgt so, dass der eingeschlagene Weg gegenüber benachbarten Wegen extremal ist“

D.h.: Auf jedem Strahl $A \leftrightarrow B$ liegt dieselbe Zahl von Wellenlängen; Oder: alle Strahlen sind „in Phase“

Fermat \leftrightarrow Snellius: Gesamtzeit $T(A \rightarrow B) = \frac{\overline{AO}}{c_1} + \frac{\overline{OB}}{c_2}$

$$\text{Fermat } T \stackrel{!}{=} \min \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} \stackrel{!}{=} 0 \right]$$

Michelson-Interferometer



- kohärente Überlagerung
zweier Strahlen

divergente Strahlen
→ Ringmuster

Michelson-Morley-Experiment (1887)

Geschw. d. Erde auf Umlaufbahn $w = 3 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{w}{c} \approx 10^{-4} = \beta$

$$\text{Lichtzeitdifferenz } \Delta t = \frac{2}{c} \left(\frac{l_x}{1-\beta^2} - \frac{l_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

"M.M.-Trick": (Doppelt-Diff. messen; 90° drehen): $\Delta t'$

$$\Delta t' = \frac{2}{c} \left(\frac{l_y}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{l_x}{1-\beta^2} \right)$$

$$\Delta t - \Delta t' =: \Delta t \approx \frac{1}{c} (l_x + l_y) \cdot \beta^2$$

Bedingungen: $l_x = l_y = 11 \text{ m}$

$$\Delta = \Delta t \cdot c \quad ; \quad \frac{\Delta}{\lambda} \approx 22 \text{ m} \cdot 10^{-8} \frac{1}{6 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \approx 0,37$$

Unterschied konnte nicht bestätigt werden \Rightarrow kein Äther

Absorption u. Dispersion, II

Modell: Getriebener Oszillator

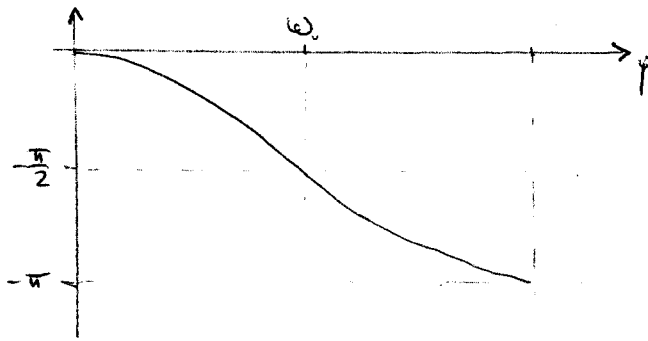
$$m\ddot{y} + m\Gamma\dot{y} + m\omega_0^2 y(t) = F(t)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ F_0 \cdot \cos(\omega t) \end{array}$$

- stat. Lsg. ($t \gg \tau_D$)

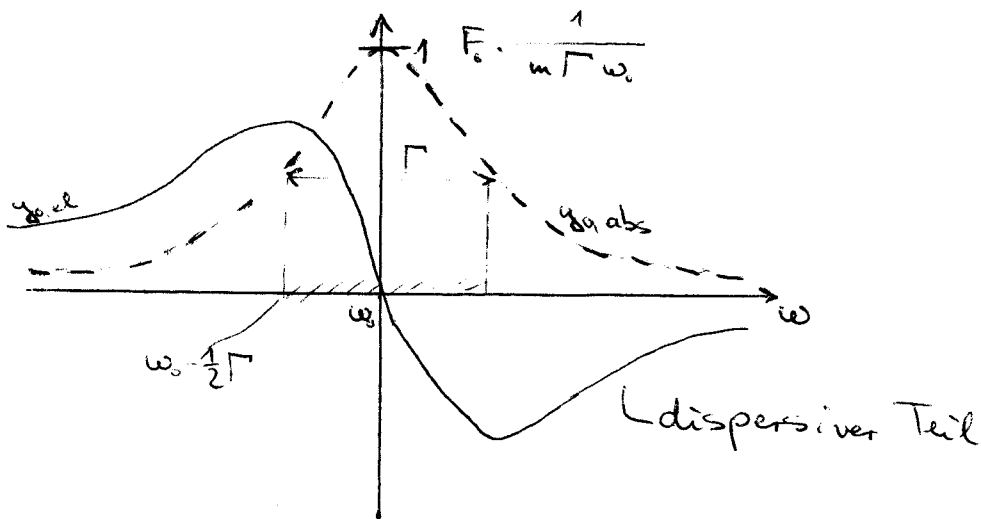
↳ Dämpfungszeit der freien Schwingung

Lsg.: $y(t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi)$



Alternative Lsg.: $y(t) = y_{0,abs} \cdot \sin(\omega t) + y_{0,el} \cdot \cos(\omega t)$

$$y(t) = y_{abs}(t) + y_{el}(t)$$



welcher Teil, $y_{\text{abs}}(t)$ oder $y_{\text{rel}}(t)$ ist für die Leistung (mittlere Leistung $\langle P(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T dt P(t)$) ist für die Leistung relevant?

$$P(t) = F(t) \cdot \dot{y}(t) ; \dot{y}(t) = \omega \cdot y_{0,\text{abs}} \cdot \cos(\omega t) \\ = -\omega y_{0,\text{rel}} \cdot \sin(\omega t)$$

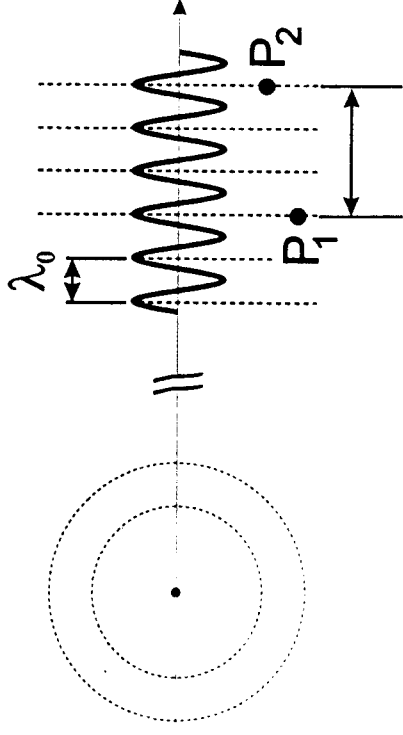
$$y_{0,\text{abs}} = \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma \omega}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma \omega)^2}$$

$$y_{0,\text{rel}} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma \omega)^2}$$

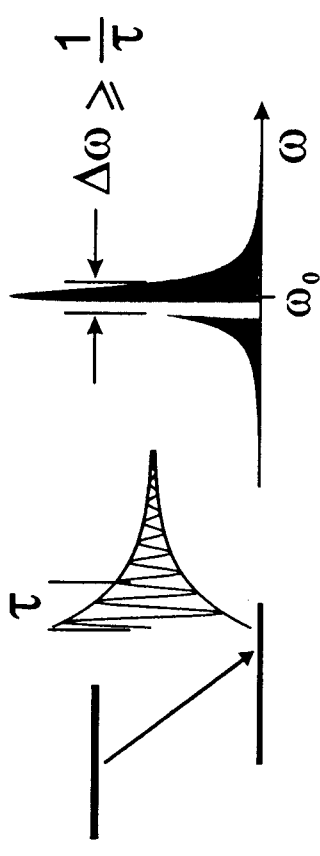
El.-magn. Wellen: Zeitliche und räumliche Kohärenz

“Monochromatische Punktquelle”

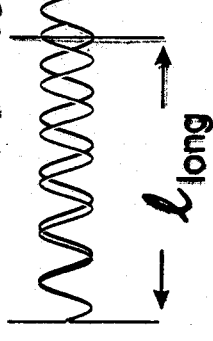
Fernfeld: $\vec{E} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t)}$



Reale Quelle: endliche Abstrahlzeit



Phase $\Psi = 0$ $\Psi = 180^\circ$



Herausforderung: **Röntgenlaser**

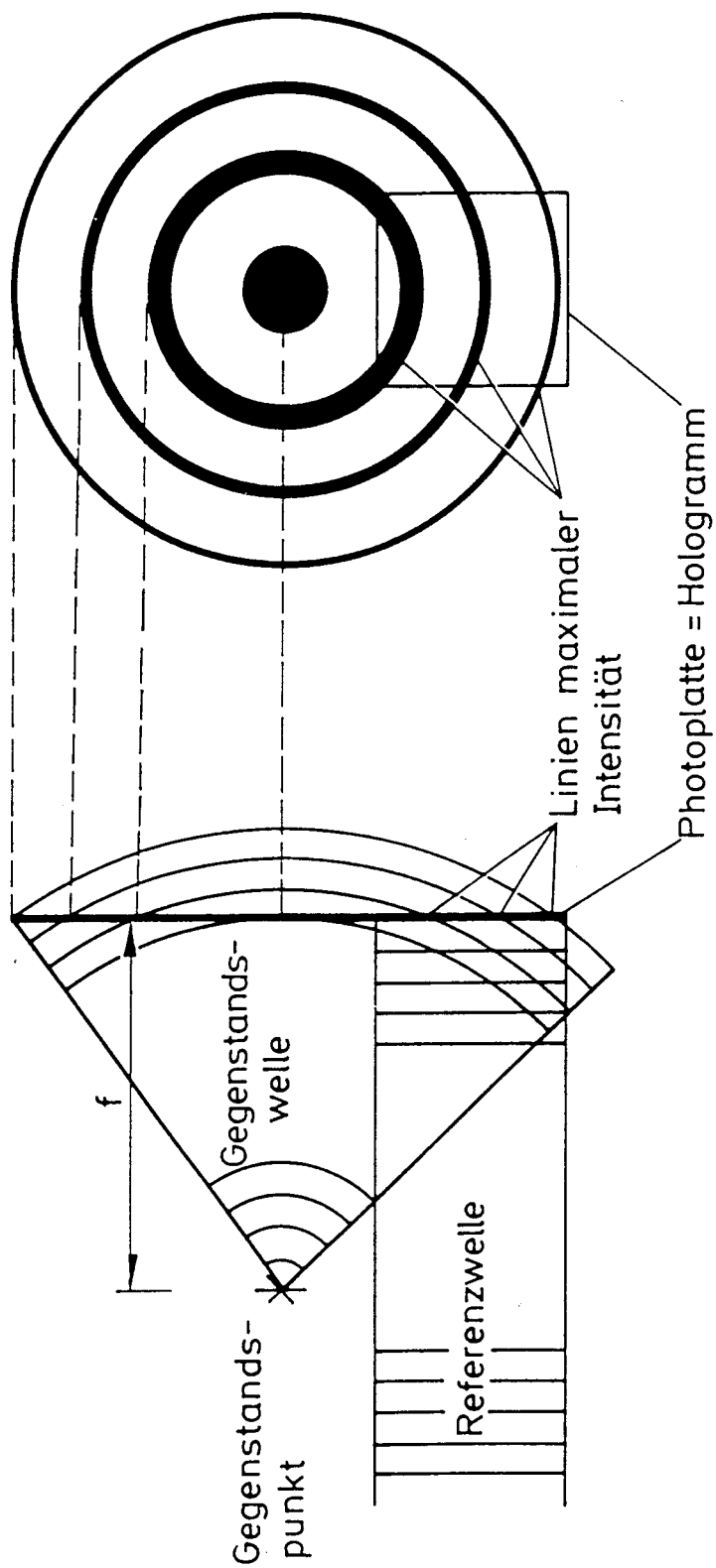
- Besetzungsinversion?
- Resonator?

Bandbreite \Leftrightarrow longitudinale Kohärenzlänge:

$$l_{\text{long}} = \frac{\bar{\lambda}^2}{2 \Delta \lambda}$$

Mit **Laser** im Sichtbaren: $l_{\text{long}} > 0.1 \text{ m}$!

\Leftrightarrow Holographie, ...



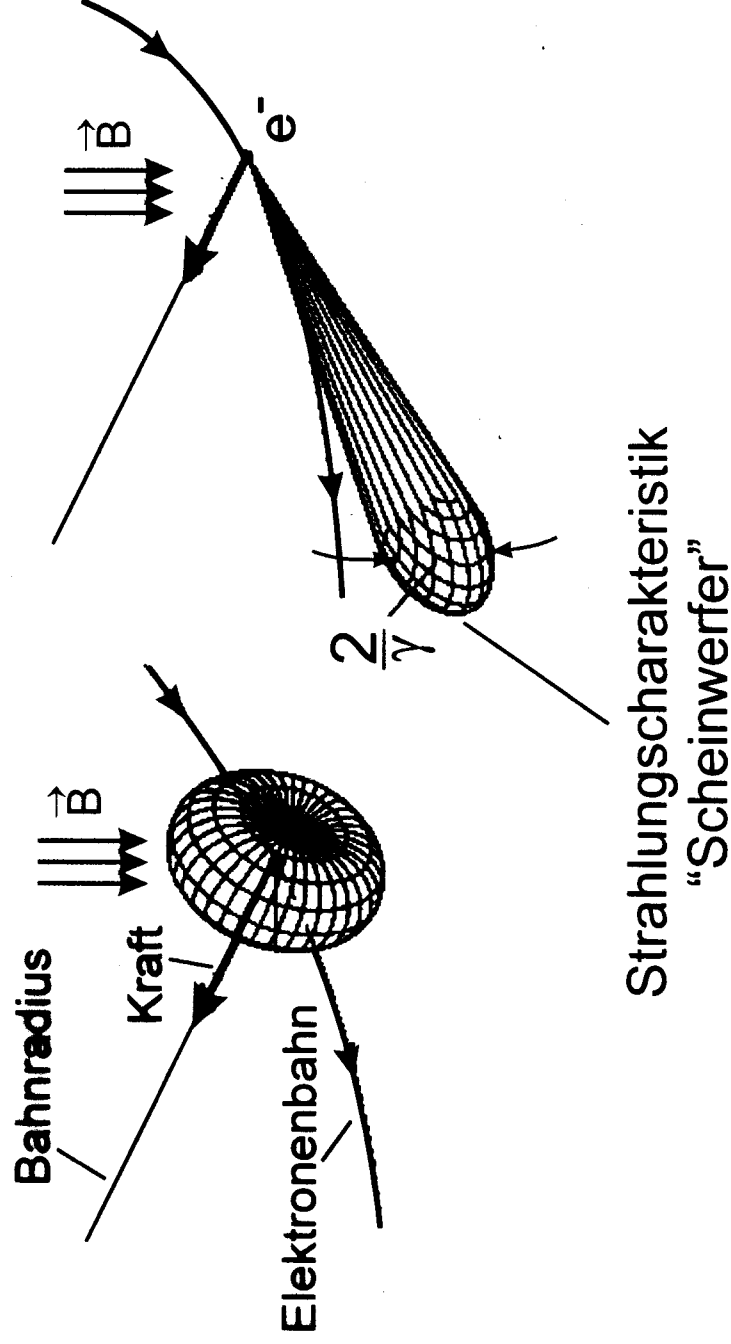
$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} \gg 1$$

$$\beta = \frac{v}{c} \approx 1$$

Beschleunigte Ladung im Ablenk magneten

Schwerpunktsystem

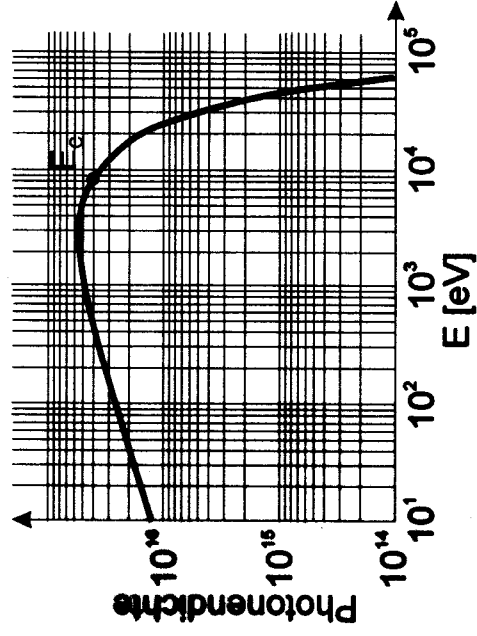
Laborsystem



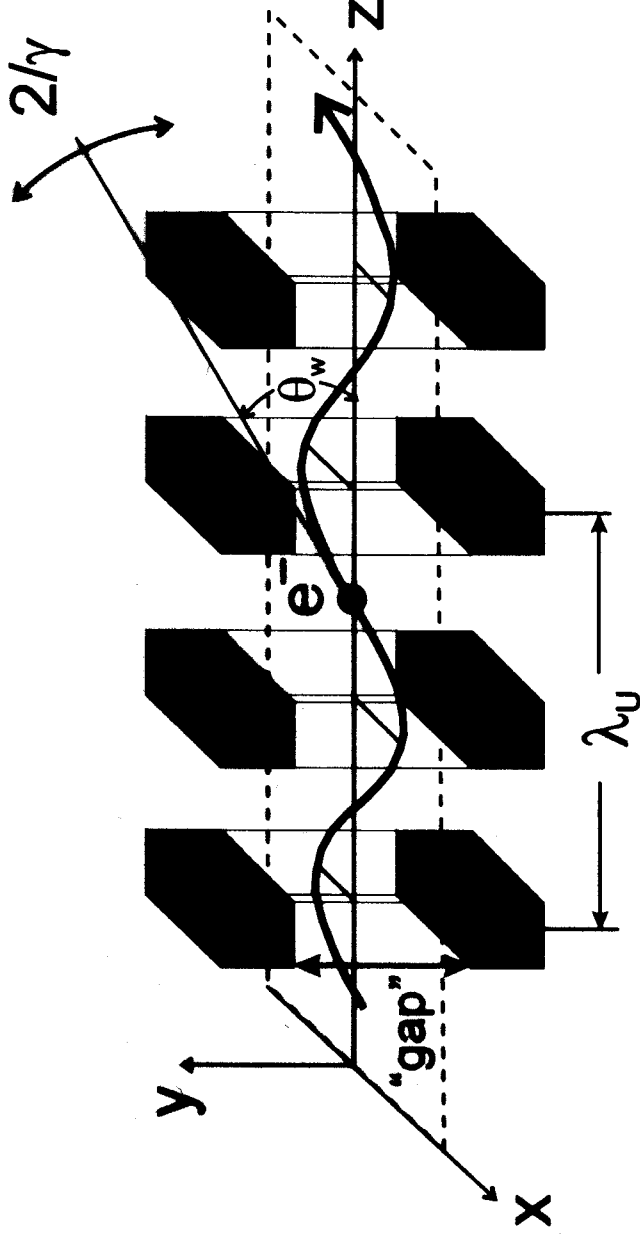
"Mehr Licht" ?

Spektrale Verteilung

(Bsp: R=12 m, E=5 GeV)



W.L. Ginsburg (1947)



max. Winkel zur z-Achse

$$\theta_w = K/\gamma$$

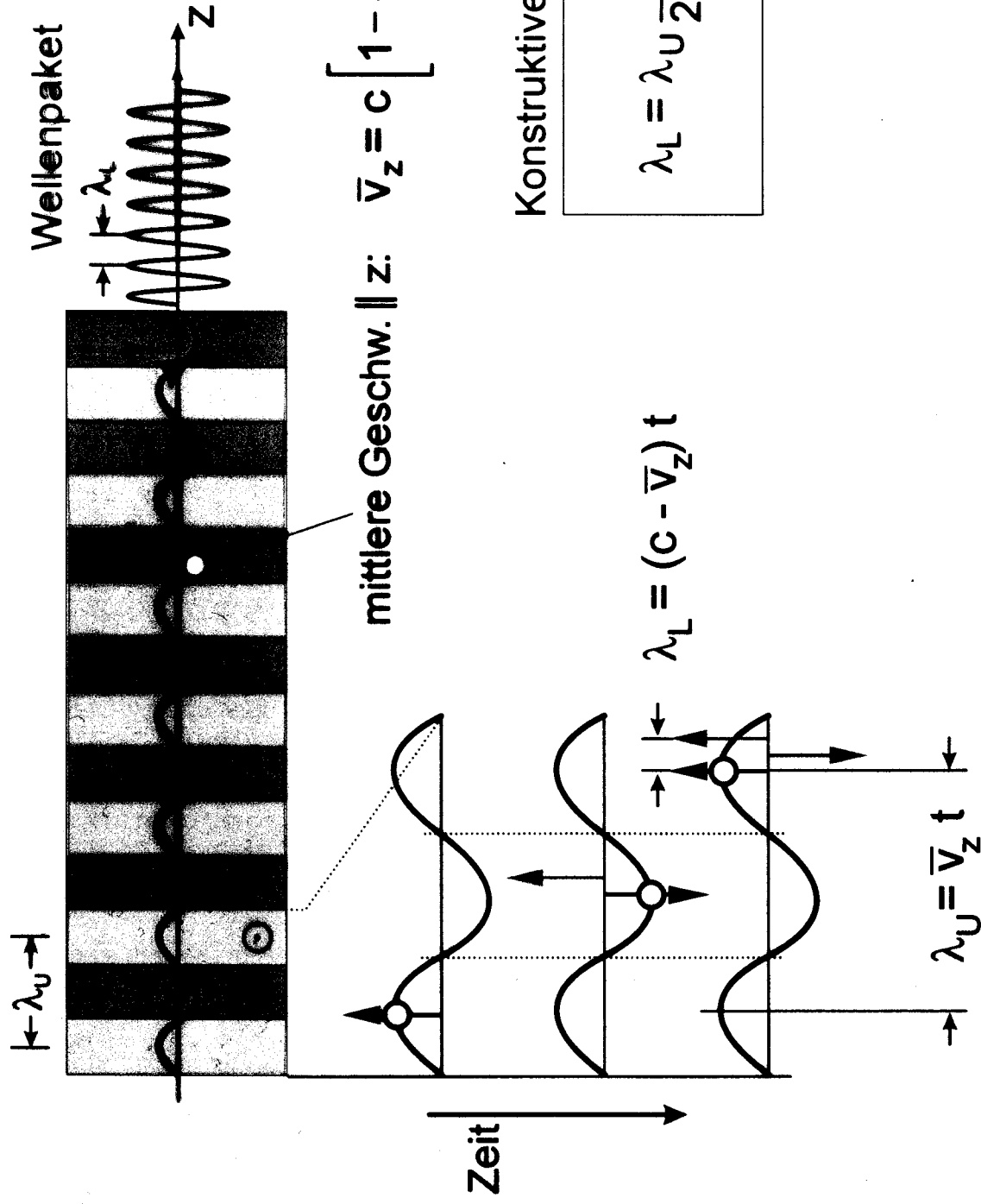
$$\text{mit } K = \frac{\lambda_u e B}{2\pi m_e c}$$

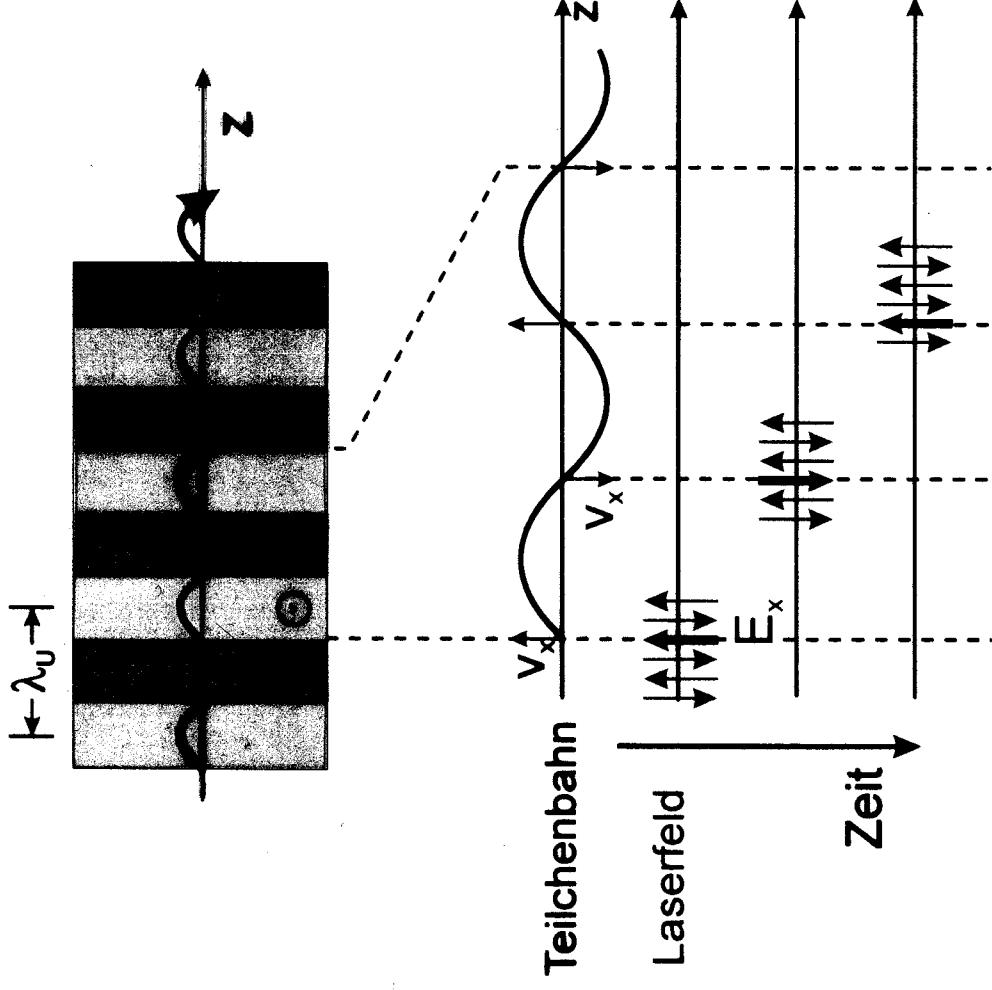
Wiggler ($K > 1$): inkohärente

Undulator ($K \leq 1$): kohärente

Überlagerung des abgestrahlten Lichts

Undulatorstrahlung





$$\Delta W = -\bullet \int \vec{E} \, d\vec{s}$$

$$= -\bullet \int \vec{v} \cdot \vec{E} \, dt$$

Für Netto-Energieübertrag ΔW muss

Phase ψ

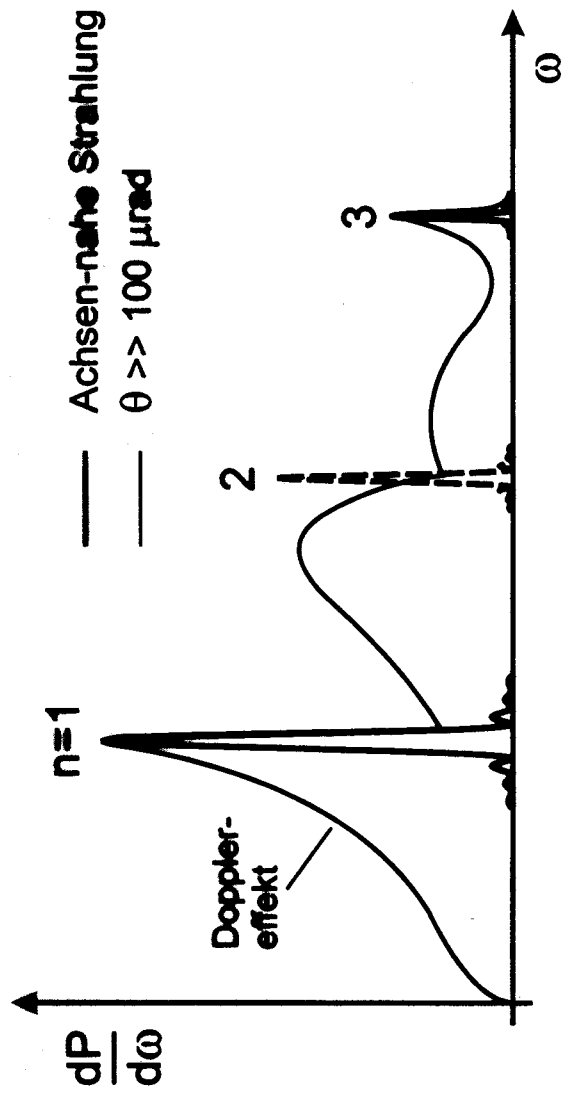
$$\psi = (k_L + k_U) z - \omega_L t + \varphi_0$$

im Undulator **konstant** sein !

... die Resonanzbedingung.

Undulatorspektrum

Bandbreite: $\frac{\lambda_L}{\Delta\lambda} = N_U$ höhere Harmonische: $\lambda_{L,n} = \frac{\lambda_L}{n}$



3-dim. Undulatorgleichung :

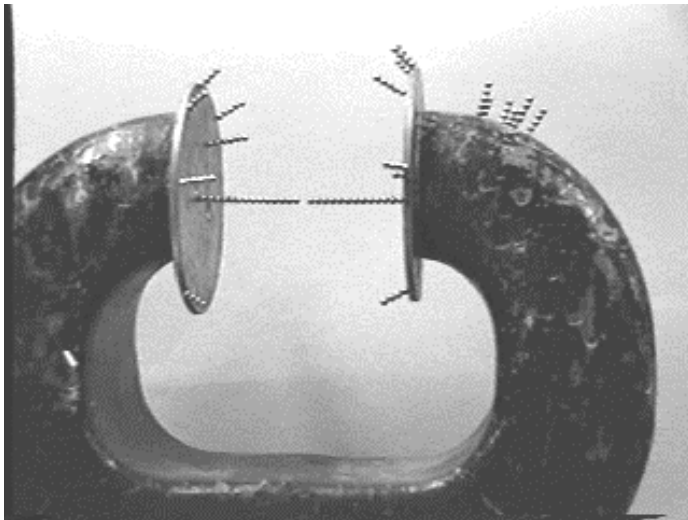
$$\lambda_L = \lambda_U \frac{1}{2\gamma^2} \left[1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right]$$

θ : Winkel zur z-Achse

Strahlungsleistung:

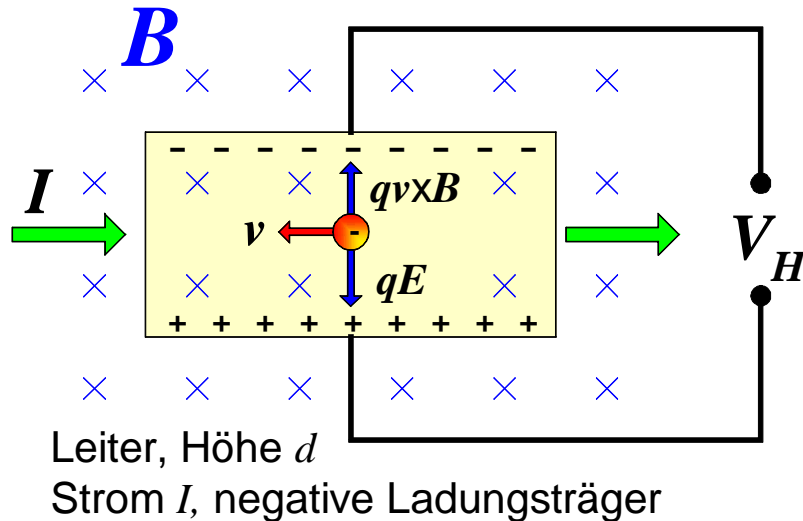
$$P_{\text{coh}} \propto N_U^2$$

Magnetismus



Hall Effekt	49
Hall Effekt (Anwendungen)	50
Drehmoment einer Leiterschleife	51
Beispiel: Drehmoment einer Spule	54
Biot-Savart Gesetz	55
Magnetfeld im Inneren einer Leiterschleife	56
Magnetfeld eines stromführenden Leiters	57
Magnetische Kraft zwischen zwei parallelen Leitern	59
Ampere'sches Gesetz	60
Magnetfeld in einer langen Spule	61
Magnetischer Fluß	62

Hall Effekt (1879)



Ladungsträger bewegen sich mit v
und werden mit $F = qv \times B$ abgelenkt

\Rightarrow Aufladung der oberen und unteren Seite
des Leiters

\Rightarrow Elektrisches Feld E und elektrische
Kraft auf Ladungsträger mit $F = qE$

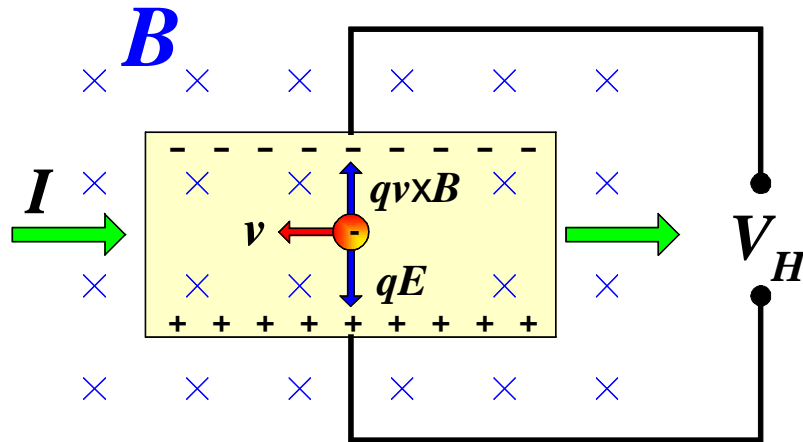
Ladungsträger werden durch die magnetische Lorentz - Kraft $F = qv \times B$ abgelenkt

Es bildet sich ein E - Feld zwischen Ober - und Unterseite des Leiters und eine
zusätzliche elektrische Kraft $F = qE$ wirkt auf die Ladungsträger

Im Gleichgewichtsfall gilt : Summe der Kräfte = 0 $\rightarrow qvB = qE$ bzw. $E = vB$

Hall - Spannung : $V_H = Ed = vBd$

Hall Effekt (Anwendungen)



Anwendungen des Hall-Effektes

- Bestimmung der Ladungsträger-Geschwindigkeit v
- Bestimmung der Ladungsträgerdichte n
- Magnetfeldmessungen

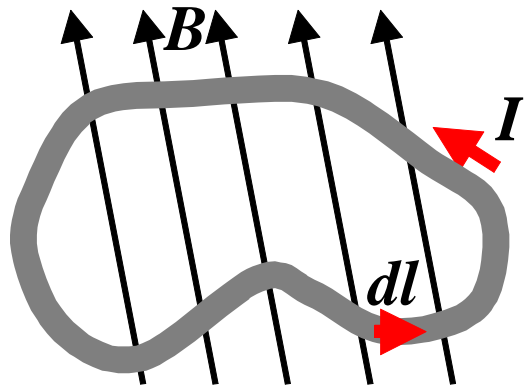
Ladungsträgergeschwindigkeit v : $V_H = v B d$ $v = V_H / B d$

Ladungsträgerdichte n : $\Delta Q = n q v \Delta t A$, $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n q v A$ bzw. $n = \frac{I}{v q A} = \frac{I B d}{V_H q A}$

oder $V_H = \frac{1}{nq} \frac{I B}{t}$ | $t = \text{Dicke des Leiters } (A = d \cdot t)$, $\frac{1}{nq} = \boxed{\text{Hall-Koeffizient } (R_H)}$

Messung des magnetischen Feldes B : $B = \frac{V_H}{I} n q t$ meßbar mit kalibrierten "Hallsonden"

Drehmoment einer Leiterschleife

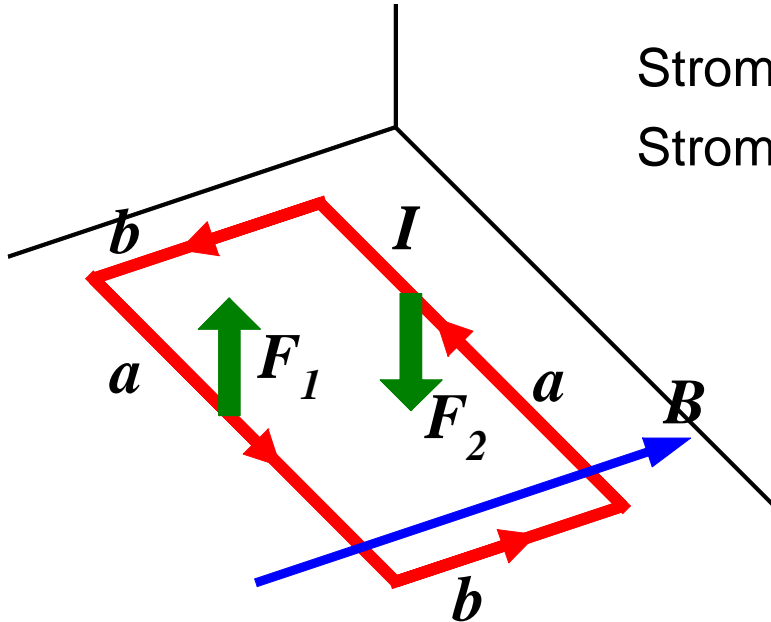


Kraft auf Leiter : $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ $|qv \rightarrow I$

Leiterschleife im homogenen Magnetfeld : $\mathbf{F} = I \oint d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$

Summe der Kräfte, die auf die Schleife wirken = 0

Aber : die Kräfte können ein Drehmoment erzeugen!



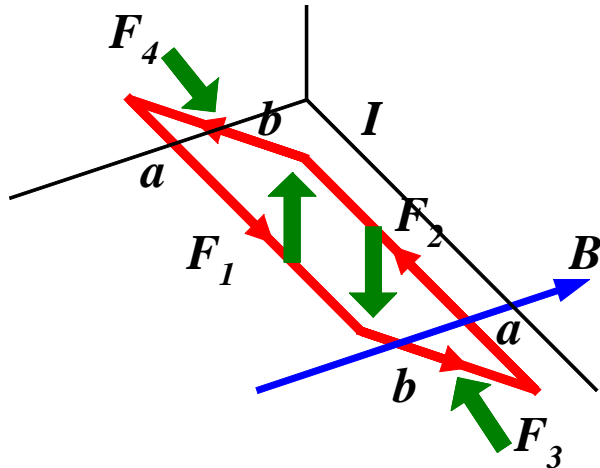
Strom im linken Teilstück a verursacht eine Kraft F_1

Strom im rechten Teilstück a verursacht eine Kraft $F_2 = -F_1$

Keine Kräfte auf Teilstücke b solange $b \parallel \mathbf{B}$

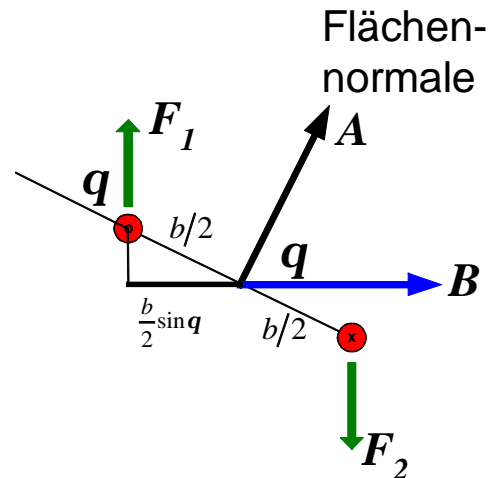
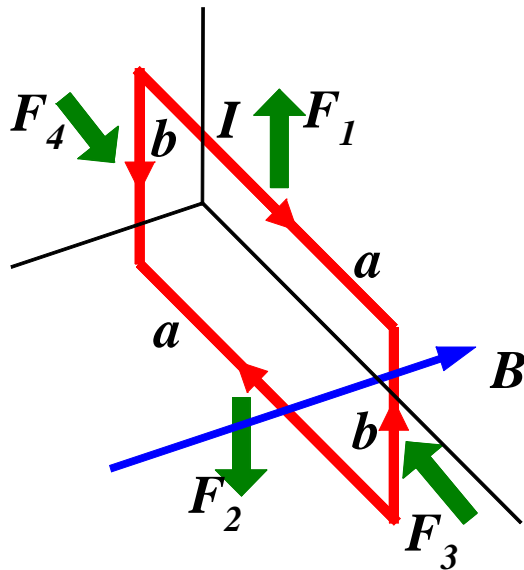
Kräfte F_1 und F_2 verursachen ein Drehmoment auf die Leiterschleife

Drehmoment einer Leiterschleife



Drehmoment dreht die Leiterschleife, zusätzlich zwei Kräfte F_3 und F_4 an den Seiten b $|F_3 = -F_4$

$$\text{Drehmoment } M = F_1 \frac{b}{2} \sin \mathbf{q} + F_2 \frac{b}{2} \sin \mathbf{q}$$



$$F_1 = F_2 = IaB \rightarrow$$

$$M = IaB \frac{b}{2} \sin \mathbf{q} + IaB \frac{b}{2} \sin \mathbf{q}$$

$$M = IaBb \sin \mathbf{q}$$

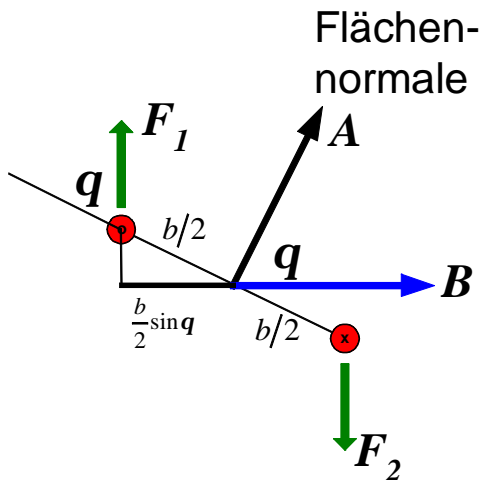
$$M = IAB \sin \mathbf{q}$$

Fläche der Leiterschleife:

$$A = ab$$

Drehmoment = null, wenn alle vier Kräfte parallel zur Fläche der Leiterschleife zeigen $|\sum F = \text{immer Null}$

Drehmoment einer Leiterschleife



Drehmoment $M = IAB \sin q$

Wir wissen:

Drehmoment ist ein Vektor und Strom = skalare Größe

Man kann daher den Ausdruck $M = IAB \sin q$ auch darstellen

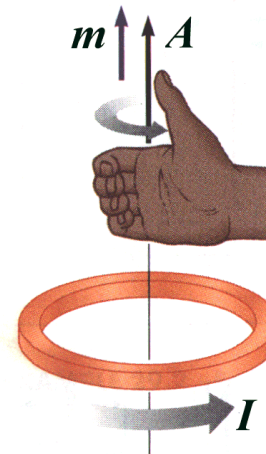
als: $\vec{M} = I\vec{A} \times \vec{B}$ wobei \vec{A} = Vektor der Flächennormale

Rechte Hand Regel zur Bestimmung von \vec{A} :

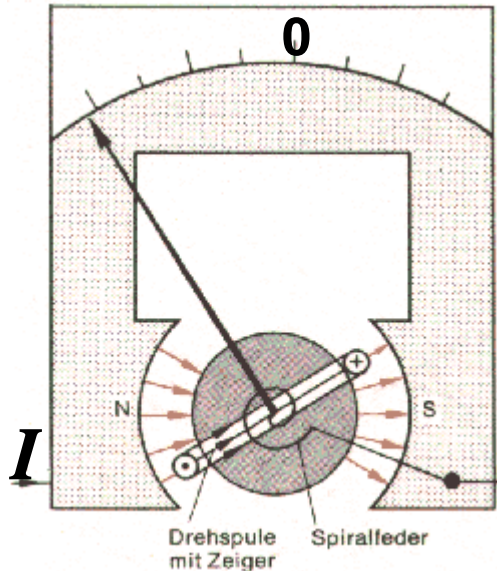
Magnetisches Moment \vec{m} : $\vec{m} = I\vec{A}$ (Vektor \vec{m})

$$\vec{M} = I\vec{A} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Der Ausdruck für das Drehmoment gilt für beliebige Orientierungen von \vec{B} und beliebige Leiterschleifen (z.B. Spule, N Wicklungen $\vec{M} = N \vec{m} \times \vec{B}$)



Beispiel: Drehmoment einer Spule



Im Meßgerät befindet sich eine rechteckige Spule mit

60 Wicklungen und der Abmessung 3 cm x 1.5 cm

Strom durch die Spule : 20 mA

Magnetfeld des Permanentmagneten im Meßgerät : 400 mT

Im Ruhezustand ist das Magnetfeld parallel zur Spulenfläche

Ges.: Welches Drehmoment wirkt auf die Spule?

Wie groß ist das magnetische Moment der Spule?

Magnetische Moment einer Wicklung der Spule :

$$m = IA = (0.02 \text{ A}) \cdot (0.03 \cdot 0.015 \text{ m}^2) = 9 \cdot 10^{-6} \text{ Am}^2$$

magnetisches Moment der gesamten Spule : $m_{\text{Spule}} = NIA = 5.4 \cdot 10^{-4} \text{ Am}^2$

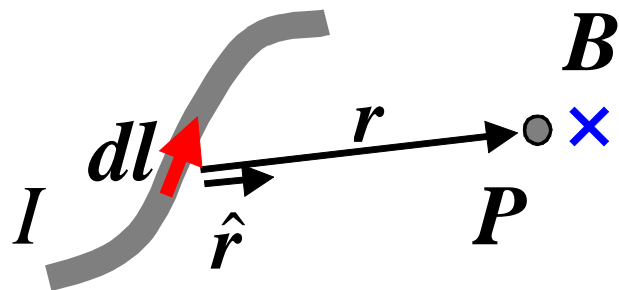
$$\text{Drehmoment: } M = m_{\text{Spule}} \times B = m_{\text{Spule}} \cdot B = (5.4 \cdot 10^{-4} \text{ Am}^2) \cdot (400 \text{ mT}) = 2.16 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$$

Biot-Savart Gesetz

Oersted: „ein stromführender Leiter beeinflusst eine Kompaßnadel“

Biot und Savart berechneten das B-Feld, das von einem stromführenden Leiterelement an einer beliebiger Stelle im Raum hervorgerufen wird

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$



Die Stärke des Magnetfeldes

- nimmt mit $1/r^2$ mit der Entfernung vom Leiterelement ab.
- ist proportional zum Strom I im Leiter.
- ist proportional zum Sinus des Winkels zwischen $d\vec{l}$ und \vec{r} .

Die Richtung des Magnetfeldes

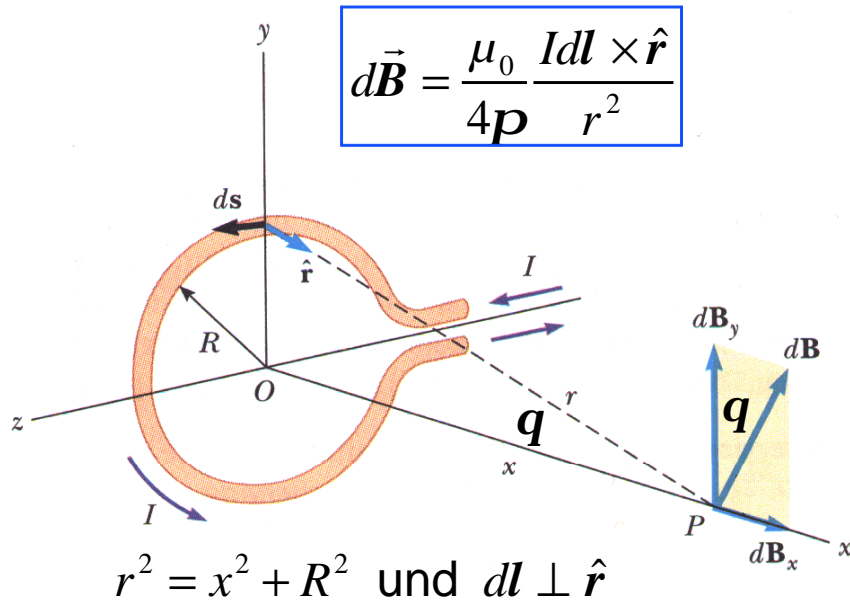
- ist senkrecht zur Richtung des Leiterelementes und senkrecht zum Verbindungsvektor zwischen Leiterelement und Meßpunkt P .

$\frac{\mu_0}{4\pi}$ = Proportionalitätsfaktor im SI-Einheitensystem

μ_0 = "magnetische Feldkonstante" oder "Permeabilität des Vakuums"

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \quad \left(\text{oder } \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \right)$$

Magnetfeld im Inneren einer Leiterschleife



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \hat{r}}{r^2}$$

Feld am Koordinatenursprung O ($r = R$):

$$B = \oint dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad \left| \oint dl = 2\pi R \right.$$

Feld im Punkt P (auf der x - Achse):

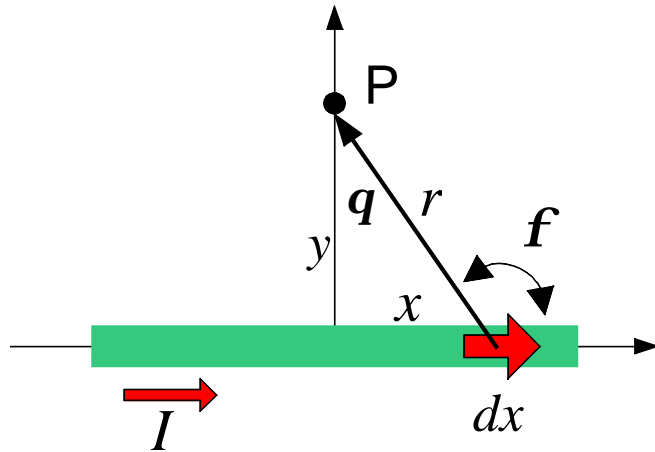
nur B_x Anteile bleiben übrig, alle B_y Anteile heben sich nach dem Aufsummieren über die gesamte Schleife auf

$$dB_x = dB \sin q = dB \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{R^2 + x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \quad \left| \sin q = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right.$$

$$B_x = \oint dB_x = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(R^2 + x^2)^{3/2}} dl = \frac{\mu_0 IR}{4\pi (R^2 + x^2)^{3/2}} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad \left| \oint dl = 2\pi R \right.$$

$$\text{für große } x \text{ gilt: } (R^2 + x^2)^{3/2} \approx (x^2)^{3/2} = x^3 \rightarrow B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{x^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{x^3} \quad \left| m = IR^2 \right.$$

Magnetfeld eines stromführenden Leiters



Gesucht : Magnetfeld B am Punkt P

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idx}{r^2} \sin \mathbf{f} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idx}{r^2} \cos \mathbf{q}$$

$B(P)$ durch Integration nach dx über die Leiterlänge

Es gilt : $x = y \tan \mathbf{q}$ und $y = r \cos \mathbf{q}$ bzw. $\cos \mathbf{q} = y/r$

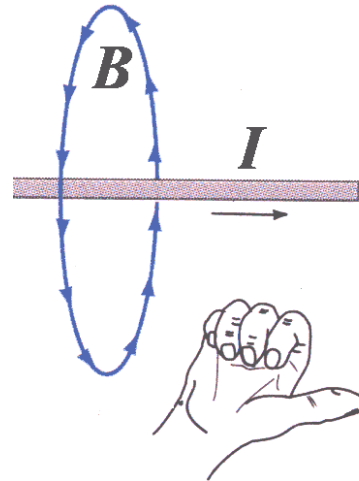
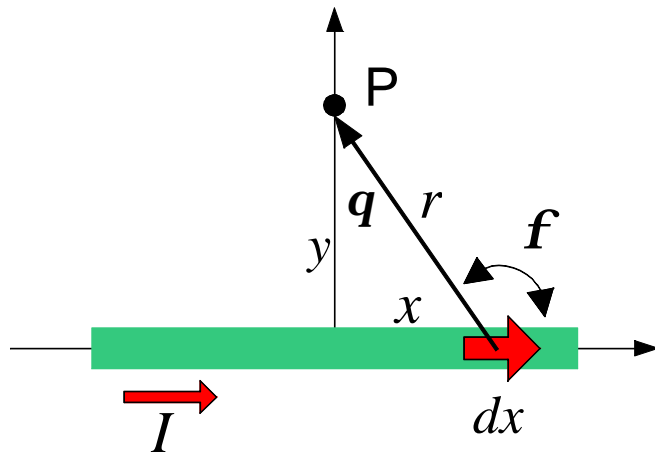
$$x = y \tan \mathbf{q} \rightarrow dx = y \frac{1}{\cos^2 \mathbf{q}} d\mathbf{q} = y \frac{r^2}{y^2} d\mathbf{q} = \frac{r^2}{y} d\mathbf{q}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \frac{r^2}{y} \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} \quad \left| \text{Integration für linke und rechte Hälfte des Leiters} \right.$$

$$B_{rechts} = \int_0^{q_R} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} \sin \mathbf{q}_R \quad \left| \mathbf{q}_R = \text{maximaler Winkel } \mathbf{q} \text{ am rechten Leiterende} \right.$$

$$B_{links} = \int_0^{q_L} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} \sin \mathbf{q}_L \rightarrow B = B_R + B_L = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} (\sin \mathbf{q}_R + \sin \mathbf{q}_L)$$

Magnetfeld eines stromführenden Leiters

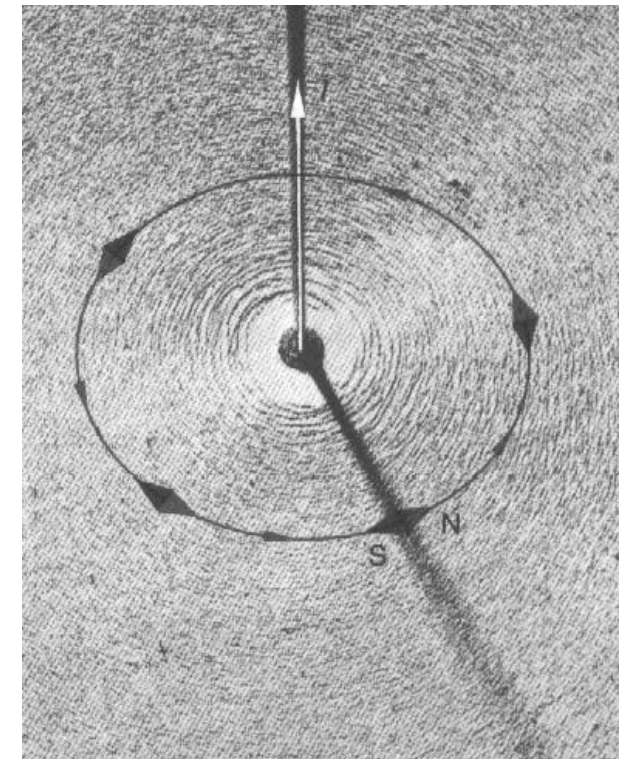


Rechte Hand Regel definiert die Richtung der magnetischen Feldlinien

Leiterabschnitt: $B = B_R + B_L = \frac{\mu_0}{4p} \frac{I}{y} (\sin \mathbf{q}_R + \sin \mathbf{q}_L)$

Sehr langer Leiter: $\mathbf{q}_R = \mathbf{q}_L \approx 90^\circ \rightarrow \sin \mathbf{q}_R + \sin \mathbf{q}_L \approx 2$

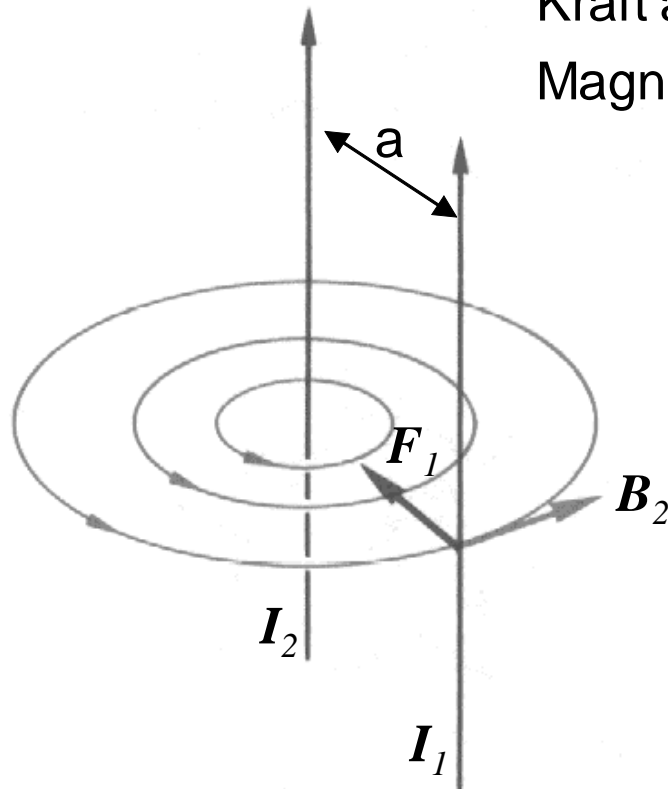
$$B = B_R + B_L = \frac{\mu_0}{4p} \frac{I}{y} (\sin \mathbf{q}_R + \sin \mathbf{q}_L) \rightarrow \frac{\mu_0}{4p} \frac{I}{y} \cdot 2 = \frac{\mu_0 I}{2p y}$$



Magnetische Kraft zwischen zwei parallelen Leitern

Kraft auf Leiter : $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$

Magnetfeld von Leiter 2 verursacht eine Kraft auf Leiter 1



$$\mathbf{F}_1 = I_1 \mathbf{l} \times \mathbf{B}_2 = I_1 l B_2 = I_1 l \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} l$$

Kraft auf Leiter 1 weist Richtung Leiter 2

Kraft/Längeneinheit :

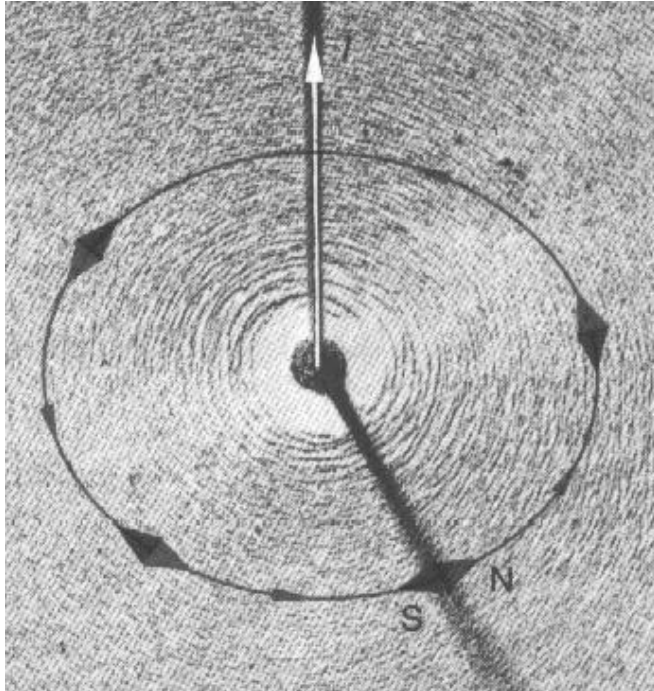
$$\frac{F_1}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{I_1 I_2}{2\pi a} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I_1 I_2}{a}$$

\Rightarrow SI-Definition des Amperes

Parallele Leiter mit Strom

- in dieselbe Richtung ziehen einander an
- in entgegengesetzte Richtung stoßen einander ab

Ampere'sches Gesetz



$$\oint_C B dl = \mu_0 I_C \quad \text{Ampere'sches Gesetz}$$

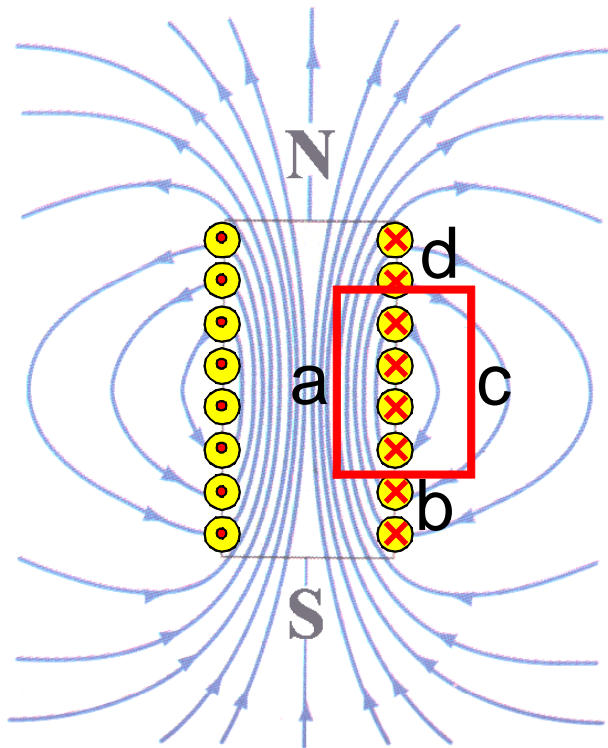
Das Integral von B über eine beliebig geschlossene Kurve C ist proportional zu dem Strom I_C , der durch diese Fläche hindurchtritt.

B läßt sich damit für symmetrische Anordnungen berechnen

Beispiel: langer Leiter, Kurve C = Kreis um den Leiter mit Radius r
 B = konstant, da B überall am Kreis gleich groß ist

$$\oint_C B dl = \mu_0 I_C \rightarrow B \oint_C dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \quad \text{oder} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Magnetfeld in einer langen Spule



Anwendung des Ampere'schen Gesetzes
Integration entlang des rot eingezeichneten
Rechteckes (Länge l in Spulenrichtung)

$$\oint_C B dl = \int_a B dl + \int_b B dl + \int_c B dl + \int_d B dl = Bl$$

$$\int_a B dl = Bl \quad \int_b B dl = \int_d B dl = 0$$

$$\int_d B dl \approx 0 \quad \text{für eine lange Spule}$$

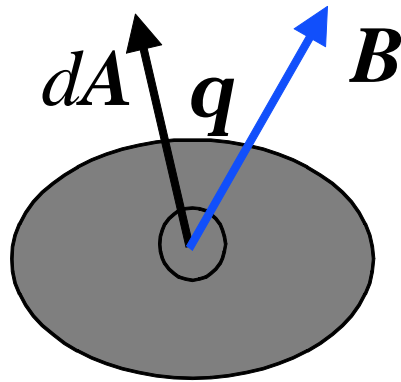
N Windungen entlang der Länge l

→ Gesamtstrom durch die rot umrandete Fläche = NI

$$\oint_C B dl = Bl = \mu_0 NI \rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I$$

n = Windungen / Längeneinheit

Magnetischer Fluß



Eine Fläche kann man sich aus kleinen Flächen-Elementen zusammengesetzt denken

Zu jedem Flächenelement gehört ein Vektor $d\mathbf{A}$: $d\mathbf{A}$ steht normal auf das Flächenelement und die Länge von $d\mathbf{A}$ entspricht der Fläche des Elementes

$$\text{Magnetischer Fluß: } F_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int B \cdot dA \cdot \cos q$$

Der magnetische Fluß ist maximal, wenn \mathbf{B} parallel zur Flächennormalen ($\cos q = 1$)

Wenn keine magnetischen Feldlinien durch die Fläche passieren ($\mathbf{B} \parallel \text{Oberfläche}$), dann ist der magnetische Fluß = Null

SI-Einheit des magnetischen Flusses: Weber (Wb), $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T m}^2$