Theoretische Physik 3 WS 05/06

Arbeitsblatt 1

Fragen zum Stoff

1. Welche Grundgleichungen hat man in der Elektrostatik?
2. Welche Randbedingungen für das Potential können auftreten?
3. Welche Überlegung liegt der Bildladungsmethode zugrunde?

Kurze Aufgaben

1. Leiten Sie den Zusammenhang zwischen Feld $\underline{E}$ und Flächenladungsdichte σ an einer Metalloberfläche her.
2. Skizzieren Sie die Äquipotentiallinien von (a) Punktladung und (b) Dipol
3. Berechnen Sie das Potential eines Dipols aus den Ladungen $\pm q$ bei $\pm \underline{a}/2$ am Ort $\underline{r}$, wenn $r \gg a$.
4. Eine Ladung q befindet sich zwischen zwei parallelen metallischen Ebenen mit Potential null. Wie kann man das Problem mit Bildladungen behandeln?
5. Ein Dipol aus den Ladungen $\pm q$ im Abstand a befindet sich in der Entfernung r von einer ebenen Metalloberfläche und steht parallel zu ihr. Wie groß ist die Anziehungskraft?

Arbeitsblatt 1

Fragen:

1) Grundgleichungen der Elektrostatik:

Maxwellgleichungen:

$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (1) $\qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ (2)

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ (3) $\qquad \mathrm{rot}\,\vec{H} = j + \dot{\vec{D}}$ (4)

da keine Ströme ($j \neq 0$) und keine veränderliche Felder ($\dot{B} = \dot{E} = 0$), gilt

$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ bzw $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ im Ladungsfreien Raum

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$

$\mathrm{rot}\,\vec{B} = 0$

2) Dirichlet: $\phi(\vec{r})$ auf dem Rand gegeben

Cauchy: ϕ und $\frac{\partial \phi}{\partial n}$

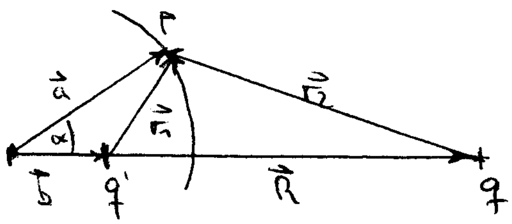
Neumann: $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ gegeben

3) Die Feldlinien müssen senkrecht in die Kugel eintreten.

dass Potential muss konstant sein.

mit $\phi = \phi_1 + \phi_2$ ist $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'}{r_1} + \frac{q}{r_2}\right) \overset{!}{=} 0$

$\rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{q'}{q} = \text{const}$



$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}{a^2 + R^2 - 2aR\cos\alpha} = \frac{b}{R}\,\frac{\frac{a^2R}{b} + bR - 2aR\cos\alpha}{a^2 + R^2 - 2aR\cos\alpha} \overset{!}{=} \text{const}$$

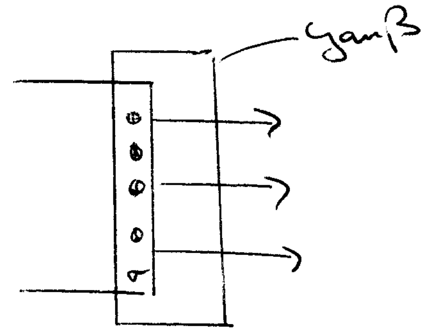
$$\rightarrow \frac{a^2R}{b} + bR = a^2 + R^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + b = \frac{a^2}{R} + R \rightarrow \boxed{b = \frac{R}{a^2}}$$

$$\frac{a^2}{R^2}\left(\frac{a^2+\frac{a^4}{R^2}-2a\frac{a^2}{R}\cos\alpha}{a^2+R^2-2aR\cos\alpha}\cdot\frac{R^2}{a^2}\right)=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{r_1}{r_2}=\frac{a}{R}=\frac{q'}{q} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{q'=\frac{a}{R}\cdot q}$$

<u>Aufgaben:</u>

1)



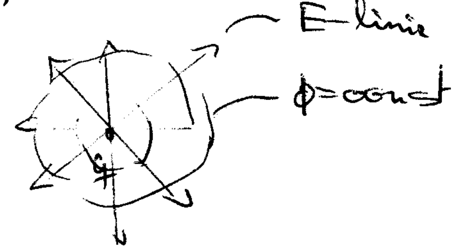
$$\int_{Vol}\vec{\nabla}\vec{E}=\oint_{F}\vec{E}\cdot\vec{df}=\int_{Vol}\frac{\rho}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightsquigarrow \quad E\cdot A=\frac{\sigma\cdot A}{\varepsilon_0}$$

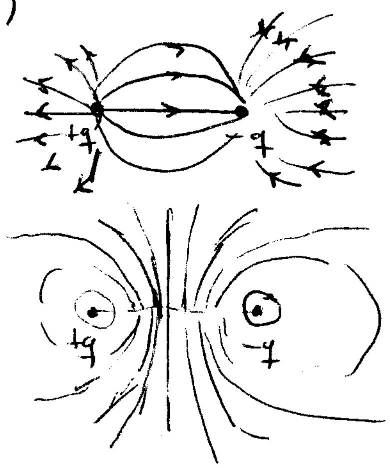
$$\boxed{E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

2)

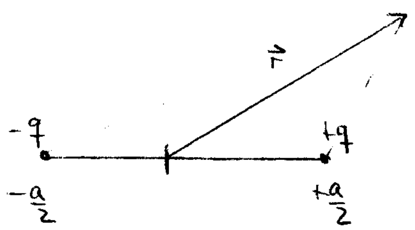
(a)



(b)



3)



Entwicklung: $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}$

Betrag: $|\vec{r}|=\sqrt{r^2}$

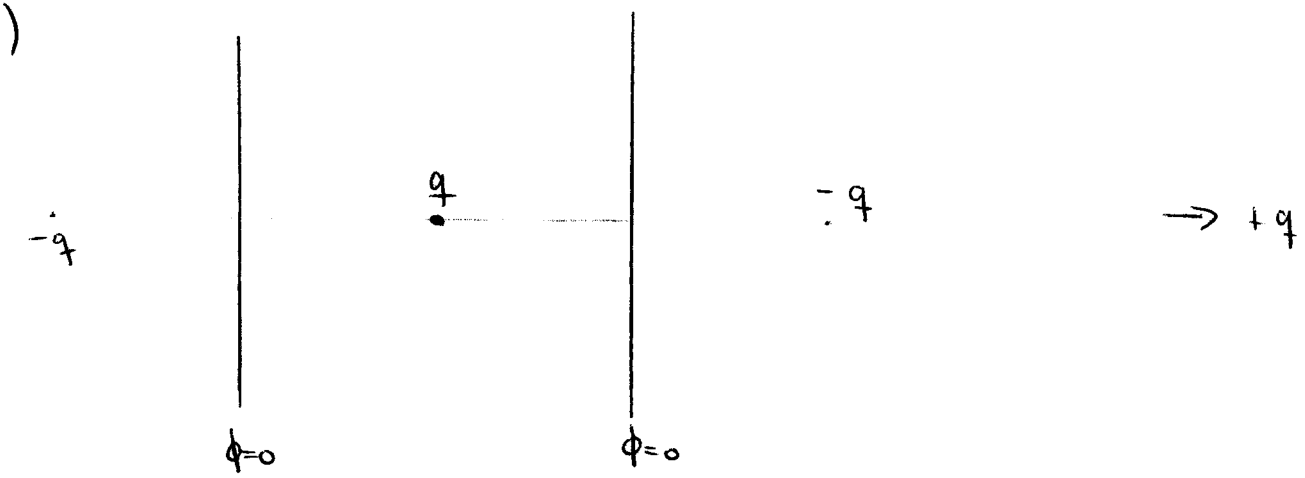
$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r}-\frac{\vec{a}}{2}|}-\frac{q}{|\vec{r}+\frac{\vec{a}}{2}|}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(\vec{r}-\frac{\vec{a}}{2})^2}}-\frac{1}{\sqrt{(\vec{r}+\frac{\vec{a}}{2})^2}}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4r^2}-\frac{\vec{r}\vec{a}}{2r^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4r^2}+\frac{\vec{r}\vec{a}}{2\vec{r}^2}}}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\left(\cancel{1}-\cancel{\frac{a^2}{4r^2}}+\frac{\vec{r}\vec{a}}{2r^2}-\cancel{1}+\cancel{\frac{a^2}{4r^2}}+\frac{\vec{r}\vec{a}}{2r^2}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^3}$$

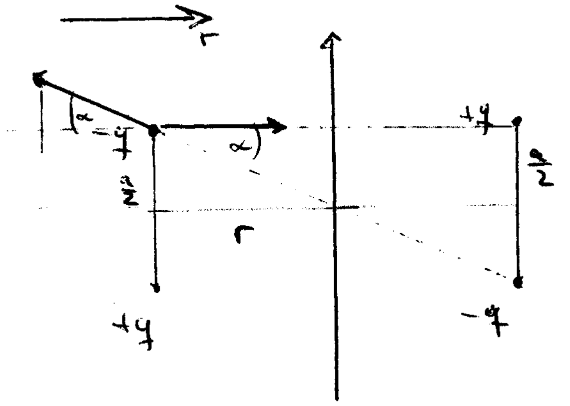
4)



⇒ Unendliche Reihe von Spiegelladungen

$$\phi = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i$$

5)



Es kann ein Spiegeldipol angenommen werden.
Das Potential auf der Ebene ist dann wie gefordert Null.

In +r - Richtung wirkt auf (-q) die Kraft

$$F_{(-q)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qq}{4r^2} - \frac{qq \cdot 2r}{(a^2+4r^2)^{3/2}}\right)$$

$$F = 2 \cdot F(-q)$$