Theoretische Physik 3 WS 05/06

Arbeitsblatt 2

Fragen zum Stoff

1. Welche allgemeine Eigenschaft haben die Kugelfunktionen $Y_{\ell m}$?
2. Bei welchen Problemen treten die Legendre-Polynome auf?
3. Durch welche Überlegung wird man auf die Multipolmomente geführt?
4. Wie sind Dipolmoment und Quadrupolmoment einer Ladungsverteilung definiert?

Kurze Aufgaben

1. Wie ändert sich das Dipolmoment einer Ladungsverteilung, wenn man den Bezugspunkt um $\underline{a}$ verschiebt?
2. Zeigen Sie, daß die Legendre-Polynome $P_1(x) = x$ und $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ orthogonal sind.
3. Zeigen Sie explizit, daß $P_2(x)$ die Legendre-Diff.glg. $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\ell}{dx}\right] + \ell(\ell+1)P_\ell = 0$ erfüllt.
4. Berechnen Sie die Kraft, die ein Dipol mit Moment $\underline{p}$ in einem äußeren Feld $\underline{E}(\underline{r})$ spürt. Was ergibt sich, wenn $\underline{E} = \underline{E}(x)$?

Arbeitsblatt 2

Fragen:

1) Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen Y_{lm}:

$$Y_{lm} = \underbrace{\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}}_{\text{Vorfaktor}} \underbrace{P_l^m(\cos\vartheta)}_{P_{lm} = \text{associated Legendre}} \cdot \underbrace{e^{im\varphi}}_{\varphi\text{-Anteil}}$$

Die Kugelflächenfunktionen stehen orthonormal aufeinander:

$$\int Y^*_{l'm'} \cdot Y_{l,m} \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

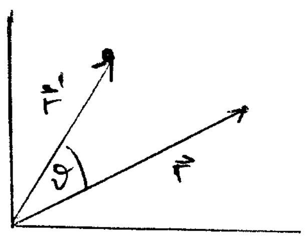
Für $m=0$ gehen sie proportional zu den Legendre-Polynomen

2) Die Legendre-Polynome treten für $m=0$ auf, d.h. für Probleme ohne φ-Abhängigkeit

3) Man kommt auf die Multipolmomente, indem man im Potential einer Ladungsverteilung

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\varrho(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$ den Faktor $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ entwickelt:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{\vec{r}^2 + \vec{r}'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'}}$$



Für eine Punktladung vereinfacht sich das Problem, wenn $\vec{r}'$ als z-Achse gewählt wird und außerdem $\vartheta = 0$ (auf der Achse) gesetzt wird.

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r-r'} = \frac{1}{r}\frac{1}{1-\frac{r'}{r}} = \frac{1}{r}\sum\left(\frac{r'}{r}\right)^l \quad , r>r'$$

vgl. $\phi = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\vartheta)$ ($\cos\vartheta \to 1$)

$\rightarrow B_l = (r')^l$

Die Koeffizienten sind dadurch eindeutig bestimmt, allgemein ist

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r}\sum_{l}\left(\frac{r'}{r}\right)^{l} P_l(\cos\vartheta)$$

Eingesetzt in

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3r'$$ erhält man

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\, \rho(\vec{r}')\frac{1}{r}\sum_{l}\left(\frac{r'}{r}\right)^{l} P_l(\cos\alpha)$$

mit $P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{+l} Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi')\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l}\sum_{m=-l}^{+l}\frac{1}{r^{l+1}}\cdot\frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\underbrace{\int d^3r'\, \rho(\vec{r}')\,(r')^{l}\, Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi')}_{:=q_{lm}}$$

$$q_{lm} = \int d^3r'\, \rho(\vec{r}')\,(r')^{l}\, Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi')$$

$$\rightarrow \boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{l}\sum_{m=-l}^{+l}\frac{q_{lm}}{r^{l+1}}\cdot\frac{Y_{lm}(\vartheta,\varphi)}{2l+1}}$$

Anschaulich: je näher man an die Ladungsverteilung kommt, desto mehr fallen die höheren Terme für l ins Gewicht.

4) Dipol:

$$p = q_{10} = \int d^3r'\, \rho(\vec{r}')\, \vec{r}'$$

Quadrupol

$$q_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\int d^3r'\, \rho(\vec{r}')\,(3z'^2 - r'^2) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\, \cancel{\int d^3r'\, \rho(\vec{r}')}\, Q_{zz}$$

mit $\boxed{Q_{\alpha\beta} = \int d^3r'\, \rho(\vec{r}')\,(3r'_\alpha r'_\beta - r'^2\delta_{\alpha\beta})}$

Dies führt dann auf das Potential

$$\phi(\vec r) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}_{\text{Monopol}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3}}_{\text{Dipol}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}\frac{r_\alpha r_\beta}{r^5}}_{\text{Quadrupol}} + \dots$$

Aufgaben

1)
$$q'_{10} = \int d^3r'\, \rho(\vec r\,'+\vec a)\,(\vec r\,'+\vec a)$$

$$= \int d^3r' \left(\rho(\vec r\,'+\vec a)\vec r\,'\right) + \rho(\vec r\,'+\vec a)\vec a \Big)$$

$$= Q\vec a + \int d^3r' \left(\rho(\vec r\,'+\vec a)\vec r\,'\right)$$

Das Dipolmoment ändert sich genau um $Q\vec a$

2)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{2}(5x^3-3x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{+1}\frac{1}{2}(5x^4)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}3x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^3\right]_{-1}^{+1} = 0$$

3)
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad \frac{d}{dx}P_2(x) = \frac{1}{2}\cdot 6x = 3x$$

Eingesetzt:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)3x\right] + \ell(\ell+1)\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$= 3-9x^2 + \ell(\ell+1)\frac{1}{2}(3x^2-1) = 0 \quad \text{für } \ell=2$$

4)

$$\vec{F}(\vec{r}) = -q\,\vec{E}(\vec{r}) + q\,\vec{E}(\vec{r}+\vec{a})$$

$$\vec{E}(\vec{r}+\vec{a}) = \vec{E}(\vec{r}) + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^2\vec{E}(\vec{r})$$

$\lim\limits_{\substack{a\to 0\\ q\to\infty}}$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r})$$

Wenn das Feld nur eine x-Abhängigkeit hat, gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) = p_x \frac{\partial}{\partial x}\vec{E}(x)$$