Bericht zum Versuch Hall-Effekt

Michael Goerz, Anton Haase

20. September 2005

GP II

Tutor: K. Lenz

1 Einführung

Hall-Effekt

Als Hall-Effekt bezeichnet man das Auftreten einer Spannung in einem stromdurchflossenen Leiter quer zur Richtung des Stroms (Steuerstrom), wenn sich der Leiter in einem äußeren Magnetfeld befindet. Ursache hierfür ist die Lorentzkraft.

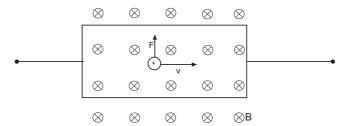


Abb. 1: Der Hall-Effekt

Im einfachsten Modell ist der Leiter ein Quader der Länge l, der Breite b und der Dicke d, der senkrecht von einem homogenen Magnetfeld durchsetzt wird. Auf die fließenden Ladungen wirkt dann die Lorentzkraft

$$F_L = q \cdot v_F \cdot B \tag{1}$$

und lenkt die Ladungen senkrecht zur Richtung des Stroms und des Magnetfelds ab. In dieser Richtung wird daher innerhalb des Leiters ein elektrisches Feld aufgebaut, das der Lorentzkraft entgegenwirkt. Im Endzustand halten sich beide Kräfte im Gleichgewicht:

$$q \cdot v_D \cdot B = q \cdot E \tag{2}$$

$$E = \frac{U_H}{d} \tag{3}$$

$$E = \frac{U_H}{d}$$

$$v_D = \frac{j}{n \cdot q}$$

$$I = (b \cdot d) \cdot j$$

$$(2)$$

$$(3)$$

$$(4)$$

$$(5)$$

$$I = (b \cdot d) \cdot j \tag{5}$$

$$\Rightarrow U_H = \frac{I \cdot B}{n \cdot e \cdot d} = \frac{R_H}{d} \cdot I \cdot B \tag{6}$$

 R_H ist dabei die materialspezifische Hall-Konstante. Die Hall-Spannung ist von der Ladungsdichte n abhängig. Je niedriger die Ladungsdichte, desto höher die Hall-Spannung.

Am Vorzeichen der Spannung kann man erkennen, ob es sich um positive oder um negative Ladungsträger handelt, da beide von der Lorentzkraft in dieselbe Richtung gedrückt werden! Mit dem Vorzeichen der Ladung ändert sich nämlich auch die Richtung des Steuerstroms.

Hall-Effekt in Halbleitern; Bändermodell

Nähert sich eine Anzahl m gleicher Atome stark an (d.h. als Festkörper), so spalten sich deren Energieniveaus in je m Zustände auf, die im Falle des äußersten Energieniveaus nicht mehr den einzelnen Atomen, sondern dem Gesamtsystem zuzuordnen sind, und die sehr dicht beieinanderliegen ("Bänder"). Die Bänder können als fast kontinuierlich aufgefasst werden. Dennoch gehorchen sie dem Pauli-Prinzip, sodass sich nur eine bestimmte Anzahl von Elektronen in einem Band aufhalten kann. Zwischen den Bändern können sich sog. Bandlücken befinden, also Energiebereiche, die keine Zustände erlauben.

Elektrische Leitung kann nur in solchen Bändern stattfinden, die nicht voll besetzt sind. Das oberste Band, das noch Elektronen enthält, wird Valenzband genannt, das nächste darüberliegende ist das Leitungsband. In einem Leiter ist das Valenzband nur zum Teil gefüllt, Valenzband und Leitungsband fallen zusammen.

In einem Halbleiter (genauer: einem Eigenhalbleiter) ist das Valenzband komplett gefüllt, allerdings ist die Bandlücke zwischen Valenzband und dem darüberliegenden leeren Leitungsband relativ klein, sodass schon durch thermische Anregung Elektronen in das Leitungsband gelangen können. Die Ladungsdichte n im Leitungsband ist dabei in Abhängigkeit von der Temperatur und der Breite der Bandlücke ΔE bestimmt durch

$$n(T) \propto T^{3/2} \cdot e^{\frac{\Delta E}{2kT}}$$
 (7)

wobei k die Boltzmankonstante ist.

Die in das Leitungsband gehobenen Elektronen hinterlassen Fehlstellen im Valenzband, die ihrerseits als positive Ladungen wirken können und sich dort frei bewegen.

Bei Halbleitern, anders als bei normalen Leitern, sinkt der spezifische Widerstand mit der Temperatur, da mehr Elektronen ins Leitungsband gehoben werden, was den Effekt der größeren thermischen Schwingung der Ionen im Gitter übersteigt, die normalerweise den Widerstand erhöht.

Bei dotierten Halbleitern werden Fremdatome in das Gitter eingebracht, deren äußere Elektronen sich auf einem Energieniveau in der Bandlücke zwischen Valenz- und Leitungsband befinden. Diese Atome geben dann entweder ein Elektron in das Leitungsband ab (n-Dotierung), oder nehmen eins aus dem Valenzband auf (p-Dotierung). Diese Übergänge finden schon bei Raumtemperatur statt. Beim Hall-Effekt ist die Spannung bei einem p-dotierten Halbleiter entgegengesetzt der Spannung bei einem n-dotierten Halbleiter, allerdings kann dies bei höheren Temperaturen umschwingen, da dann Elektronen auch aus dem Valenzband in das Leitungband gelangen und aufgrund ihrer höheren Beweglichkeit gegenüber den Fehlstellen im Valenzband stärker zum Effekt beitragen.

2 Aufgaben

 Beobachtung des Hall-Effektes an Germanium (n- oder p-Ge) als Funktion von Steuerstrom und Magnetfeld. Berechnung der Hall-Konstante von Germanium. Bestimmung von Art und Konzentration der Ladungsträger

- 2. Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der Hall-Spannung bei Germanium und Berechnung der Bandlücke.
- Aufgabe zur gemeinsamen Durchführung: Beobachtung des Hall-Effektes bei Cu und Zn. Abschätzung der Hall-Konstanten sowie von Art und Konzentration der Ladungsträger.

3 Auswertung

3.1 Hall-Effekt in Abhängigkeit von Steuerstrom und Magnetfeld

Korrektur der Hallspannung

Um auszugleichen, dass die Hallspannung nicht an zwei genau gegenüberliegenden Punkten abgegriffen werden konnte, wurde zunächst eine Messung ohne Magnetfeld durchgeführt. Die dabei gemessenen Werte sind in Abb. 2 aufgetragen.

An dieser Stelle kann man sich nocheinmal anhand der genauen Verdrahtung und mithilfe der rechten-Hand-Regel vergewissern, dass die Hallspannung mit dem korrekten Vorzeichen gemessen wird, ein positiver Wert also Ladungstransport durch negative Teilchen, ein negativer Wert Ladungstransport durch positive Teilchen bedeutet.

Der Fehler ist dabei vernachlässigbar klein (in der 4. Nachkommastelle der Steigung). Durch lineare Regression konnte also der Korrekturterm

$$k(U_H) = -1.221 \cdot U_H \tag{8}$$

bestimmt werden. Er muss von jeder späteren Messung abgezogen werden, um die tatsächliche Hallspannung zu erhalten.

Umrechnung der Magnetfeldspannung ins Magnetfeld

Für die Erzeugung des Magnetfelds lag die in Abb. 3 dargestellte Kalibrierungskurve vor. Der funktionale Zusammenhang kann bestimmt werden als

$$B(I_B) = (136.62 \pm 2.92) \cdot I_B \frac{\text{mT}}{\text{A}}$$
 (9)

Messung von U_H bei konstantem Steuerstrom

Um eine graphische Auswertung für R_H gemäß der Formel

$$U_H = R_H \cdot \left(\frac{I}{d}B\right) \tag{10}$$

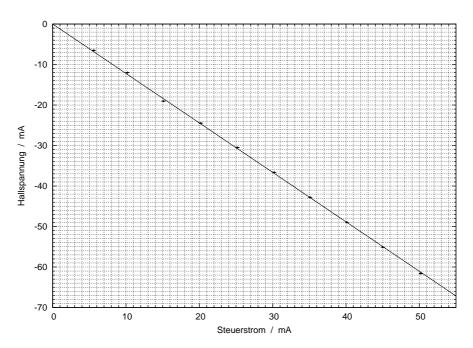


Abb. 2: Messung der Hallspannung ohne Magnetfeld zur Korrektur

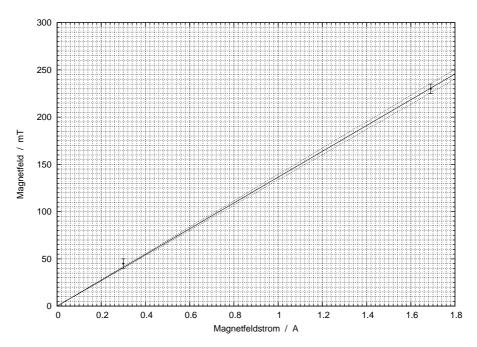


Abb. 3: Kalibrierungskurve von Magnetfeldstrom zu Magnetfeld

vornehmen zu können, muss das Magnetfeld anhand der Kalibrierungsformel Gl. (9) berechnet werden und selbstverständlich die Hallspannung mit Gl. (8) korrigiert werden. Für den Fehler der Hallspannung ist der Gerätefehler bei der Messung des konstanten Steuerstroms maßgeblich (1% + 1 Digit). Die berechneten Werte sind in der Tabelle in Abb. 4 widergegeben. Für die graphische Auswertung war zu berücksichtigen, dass sowohl x- als auch y-Werte signifikante Fehler haben. Um dies sinnvoll auszuwerten, wurde der x-Fehler auf den y-Fehler umgerechnet, indem zu diesem das Produkt aus x-Fehler und Steigung der Ausgleichsgeraden addiert wurde. Der Plot ist in Abb. 5 zu sehen. Die Hall-Konstante für Germanium kann hieraus mittels linearer Regression direkt ermittelt werden, man erhält $R_H = (0.00713 \pm 0.00010) \frac{\rm m^3}{\rm As}$

Aus der Tatsache, dass die gemessene Hallspannung nach Korrektur positiv war, lässt sich schließen, dass der Ladungstransport durch Elektronen erfolgt. Dies ist in Übereinstimmung damit, dass die Probe als n-dotiert gekennzeichnet war.

Weiterhin lässt sich die Konzentration der Ladungsträger in Form der Ladungsdichte n bestimmen. Dies kann gemäß der Formel

$$B = n \cdot \left(\frac{e \cdot d \cdot U_H}{I}\right) \tag{11}$$

graphisch erfolgen. Wiederum wird der Fehler des x-Wertes auf den Fehler des y-Wertes übertragen. Die berechneten Daten sind in Abb. 6 dargestellt, der Plot in Abb. 7. Der daraus ermittelbare Wert ist $n = (8.77 \pm 0.13) \cdot 10^{20}$ m⁻³.

Messung von U_H bei konstantem Magnetfeld

Bei dieser Messung wurde das Magnetfeld konstant gehalten und der Steuerstrom variiert. Der Strom konnte direkt abgelesen werden, die Hallspannung musste wie zuvor korrigiert werden. Für den Fehler des Steuerstroms war der Gerätefehler maßgeblich, für die Hallspannung die geschätzte Schwankung. Der Fehler des x-Wertes wurde wiederum auf den Fehler des y-Wertes übertragen. Die Daten sind in Abb. 8, der Plot in Abb. 9 zu sehen. Der ermittelte Wert für R_H war $R_H = (0.00711 \pm 0.00009) \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{As}}$

Wie zuvor kann auch die Ladungsdichte ermittelt werden, gemäß

$$I = n \cdot \left(\frac{e \cdot d \cdot U_H}{B}\right) \tag{12}$$

Die Daten sind in Abb. 10, der Plot in Abb. 11. Der daraus ermittelter Wert ist $n=(8.78\pm0.12)\cdot10^{20}~\mathrm{m}^{-3}$.

3.2 Hall-Effekt in Abhängigkeit von der Temperatur

In dieser Aufgabe wurden sowohl Steuerstrom als auch Magnetfeld konstant eingestellt. Das Germanium wurde dann mit einer Heizspannung aufgewärmt und während des Abkühlens wurde die Hallspannung in regelmäßigen Abständen gemessen. So konnte der Zusammenhang zwischen Temperatur und Hallspannung gemessen werden.

Überraschenderweise folgen die Daten nicht im geringsten der theoretischen Erwartung. Im Bereich hoher Temperaturen, der eigentlich für die Messung als

B/mT	ΔВ	$\frac{I}{d}B$	/ mA T m ⁻¹	$\Delta(\frac{I}{d}B)$	$U_{\!\scriptscriptstyle H}/{ m mV}$	$\Delta U_{\scriptscriptstyle H}$	∆U _H (übertr.)
27,26	0,58		1370.96	54 . 00	8.9	0.7	1.1
43.04	0,92		2164.68	85.25	15.0	0.7	1.3
54.51	1.2		2741.92	108.84	18.8	0.7	1.5
68.72	1.49		3456.61	136.80	24.4	0.7	1.7
81.97	1.77		4123.19	162.94	29.1	0.7	1.9
95.91	2.07		4824.13	190.45	34.3	0.7	2.1
109.43	2.35		5504.46	217.18	39.1	0.7	2.3
123.23	2.65		6198.53	244.46	44.4	0.7	2 . 4
136.62	2.93		6871.99	270.94	50.1	0.7	2.6
150.42	3.23		7566.06	298.24	54.8	0.7	2.8
163.94	3.51		8246.38	325.00	59.2	0.7	3.0
178.15	3.82		8961.07	353.12	64.3	0.7	3.2
191.68	4.11		9641.40	379.89	69.4	0.7	3 . 4
205.48	4.4		10335.47	407.20	74.1	0.7	3.6
218.59	4.68		10995.18	433.17	78.4	0.7	3.8
232.25	4.97		11682.38	460.21	83.0	0.7	4.0
245.92	5.26		12369.57	487.26	87.7	0.7	4.2

Abb. 4: Werte zur Bestimmung der Hall-Konstanten (Aufg. 1a)

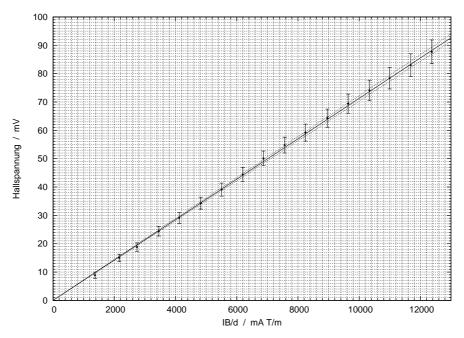


Abb. 5: Bestimmung der Hall-Konstanten (Aufg. 1a)

$ed\frac{U}{I}$	/ C m mV A-1	$\Delta(ed\frac{U}{I})$	B/mT	ΔВ	ΔB (übertr.)
	2.82E-020	2 . 42E - 021	27.26	0.58	2.71
	4.79E-020	2.73E-021	43.04	0.92	3.33
	5.99E-020	2.98E-021	54.51	1.2	3.83
	7.76E-020	3.40E-021	68.72	1.49	4.49
	9.27E-020	3.79E-021	81.97	1.77	5.12
	1.09E-019	4.25E-021	95.91	2.07	5.81
	1.25E-019	4.69E-021	109.43	2.35	6.48
	1.41E-019	5.18E-021	123.23	2.65	7.21
	1.60E-019	5.73E-021	136.62	2.93	7 . 99
	1.74E-019	6.19E-021	150.42	3.23	8.68
	1.88E-019	6.62E-021	163.94	3.51	9.35
	2.05E-019	7.13E-021	178.15	3.82	10.1
	2.21E-019	7.65E-021	191.68	4.11	10.85
	2.36E-019	8.12E-021	205.48	4.4	11.56
	2.50E-019	8.55E-021	218.59	4.68	12.22
	2.64E-019	9 . 02E-021	232,25	4.97	12 . 92
	2.79E - 019	9 . 50E - 021	245.92	5.26	13.64

Abb. 6: Werte zur Bestimmung der Ladungsdichte (Aufg. 1a)

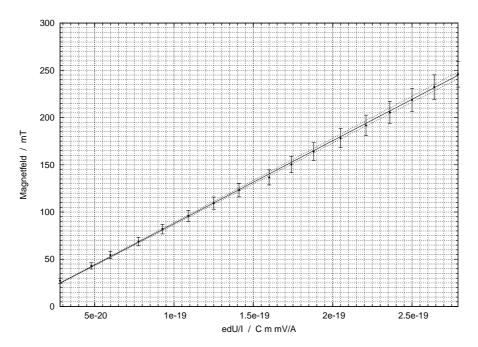


Abb. 7: Bestimmung der Ladungsdichte (Aufg. 1a)

$\frac{I}{d}B$	/ mA T m ⁻¹	$\Delta(\frac{I}{d}B)$	$U_{\!\scriptscriptstyle H}/\mathrm{mV}$	ΔU_{H}	∆U _H (übertr.)
	1427.09	78.20	10.1	0.3	0.9
	2485.11	108 . 67	17 . 6	0.4	1.1
	3666.15	145.39	26.1	0.5	1.5
	4355.09	167 . 41	31.0	0.5	1.7
	5044.03	189.69	36.0	0.6	1.9
	5831.39	215.37	41.6	0.6	2.1
	6348.09	232.30	45.3	0.7	2.3
	6889.40	250.10	49.2	0.7	2.5
	7578 . 34	272.82	54.0	0.7	2.7
	8291.89	296 . 42	59.1	0.8	2.9
	8685.57	309.46	61.8	0.8	3.0
	9251.48	328.22	65.8	0.9	3.2
	10038.84	3 54. 37	71.4	0.9	3.4
	10555.55	371.55	75.0	1.0	3.6
	11096.86	389.56	78 . 6	1.0	3.8
	11662.77	408.40	82.5	1.0	3.9
	12499.34	436.27	88.4	1.1	4.2

Abb. 8: Werte zur Bestimmung der Hall-Konstanten (Aufg. 1b)

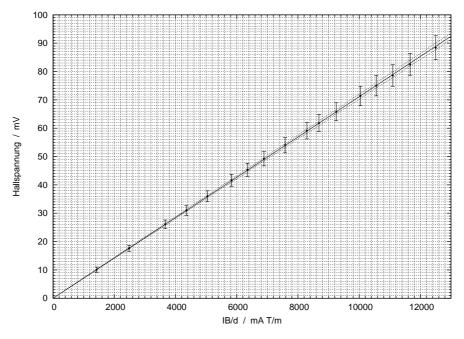


Abb. 9: Bestimmung der Hall-Konstanten (Aufg. 1b)

$ed\frac{U}{B}$	/ C m mV T-1	$\Delta(ed\frac{U}{B})$	I/mA	ΔI	ΔI (übertr.)
	6.55E-021	2.87E-022	5,8	0.26	0.51
	1.15E-020	4.41E-022	10.1	0.3	0 . 69
	1.70E-020	6.21E-022	14.9	0.35	0.89
	2.02E-020	7.26E-022	17.7	0.38	1.01
	2.34E-020	8.33E-022	20.5	0.41	1.14
	2.71E-020	9.56E-022	23.7	0.44	1.28
	2.95E-020	1.04E-021	25.8	0.46	1.37
	3.20E-020	1.12E-021	28	0.48	1.46
	3.52E-020	1.22E-021	30.8	0.51	1.58
	3.85E-020	1.33E-021	33.7	0.54	1.71
	4.03E-020	1.39E-021	35.3	0.55	1.78
	4.29E-020	1.48E-021	37.6	0.58	1.88
	4.65E-020	1.60E-021	40.8	0.61	2.01
	4.88E-020	1.68E-021	42.9	0.63	2.1
	5.12E-020	1.76E-021	45.1	0.65	2.2
	5.37E-020	1.84E-021	47.4	0.67	2.29
	5.75E-020	1.97E-021	50,8	0.71	2 . 44

Abb. 10: Werte zur Bestimmung der Ladungsdichte (Aufg. 1b)

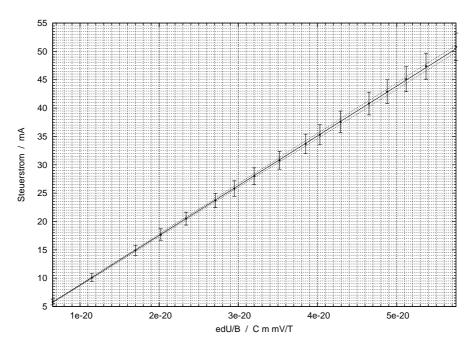


Abb. 11: Bestimmung der Ladungsdichte (Aufg. 1b)

relevant angesehen werden sollte, sank die Hallspannung mit sinkender Temperatur, anstatt zu steigen. Im Bereich der niedrigeren Temperaturen stieg sie wieder, aber auch hier nicht einem exponentiellen Gesetz folgend. Es ist daher nicht möglich, die Bandlücke aus dem Verlauf der Werte zu ermitteln. Auch aus den einzelnen Messwerten ergibt sich kein sinnvoller Wert für die Bandlücke.

Der Verlauf der Hallspannung in Abhängigkeit von der Temperatur ist in Abb. 12 dargestellt.

Es seien hier noch, in Abb. 13, ohne Fehler die zugehörigen Werte aufgelistet, zusammen mit einer Berechnung der Bandlücke gemäß der Formel

$$\Delta E = \ln \left(\frac{I \cdot B}{e \cdot d \cdot U_H \cdot T^{3/2}} \right) \cdot 2kT \tag{13}$$

3.3 Qualitative Betrachtung einer Zn- und einer Cu-Probe

Zur groben qualitativen Abschätzung seien die folgenden Berechnungen ohne Beachtung der Fehler durchgeführt.

Betrachtung der Zn-Probe

Zur Korrektur der Hallspannung kann 0.01mV addiert werden, was der Anzeige des Messgeräts bei ausgeschaltetem Strom entspricht, also einem Mindestwert. Durch Umrechnung auf den Steuerstrom mithilfe des Messwiderstands und mit der Formel für die Ladungskonzentration

$$n = \frac{I \cdot B}{e \cdot d \cdot U_H} \tag{14}$$

erhält man die folgenden grob gerundeten Werte:

I/A	U_H/mV	$R_H/\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{As}}$	n/m^{-3}
3.53	0.0015	$1 \cdot 10^{-11}$	$1.38 \cdot 10^{29}$
4.72	0.0025	$3 \cdot 10^{-11}$	$1.12 \cdot 10^{29}$
9.77	0.0039	$3 \cdot 10^{-11}$	$1.48 \cdot 10^{29}$
14.38	0.0066	$3 \cdot 10^{-11}$	$1.29 \cdot 10^{29}$
18.77	0.0116	$5 \cdot 10^{-11}$	$0.96 \cdot 10^{29}$

Die Hallkonstante befindet sich also in der Größenordnung um $5 \cdot 10^{-11} \, \frac{\text{m}^3}{\text{As}}$. Die Ladungskonzentration liegt in der Größenordnung um $1 \cdot 10^{29} \, \text{m}^{-3}$.

Die positiven Werte für die Hall-Spannung deuten darauf hin, das die Probe elektronenleitend ist (was nicht stimmt, siehe Diskussion).

Betrachtung der Cu-Probe

Die Korrektur der Hallspannung kann hier sinnvoll so gewählt werden, dass der erste Wert bei $U_H=0$ liegt. Man erhält dann analog zum Zn die folgende Tabelle

I/A	U_H/mV	$R_H/\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{As}}$	n/m^{-3}
3.53	0.0000	/	/
4.80	-0.0006	$-1 \cdot 10^{-11}$	$-5 \cdot 10^{29}$
9.77	-0.0025	$-3 \cdot 10^{-11}$	$-2 \cdot 10^{29}$
14.53	-0.0036	$-3 \cdot 10^{-11}$	$-2 \cdot 10^{29}$
19.02	-0.0051	$-3 \cdot 10^{-11}$	$-2 \cdot 10^{29}$

Die Hallkonstante befindet sich also ebenfalls in der Größenordnung um $3 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{As}}$ und die Ladungskonzentration in der Größenordnung um $2 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$. Die Werte für die Hallspannung sind hier negativ, was darauf hindeutet, dass das Kupfer fehlstellenleitend ist (siehe Diskussion).

Zusätzlich wurde noch eine Messung mit der beheizten Kupfer-Probe gemacht. Dabei ergab sich, dass der Betrag der Hallspannung bei maximaler Beheizung um mehr als eine Größenordnung größer war als bei der unbeheizten Probe und mit dem Abkühlen aber weiter stieg.

4 Zusammenfassung und Diskussion

Die Messung der Hall-Spannung in Abhängigkeit von Steuerstrom und Magnetfeld ließ sich mit relativ großer Genauigkeit durchführen. Schon die Messung des Korrekturwerts für U_H war sehr genau möglich. Die Fehlerbehandlung im weiteren Verlauf wäre in vollster Genauigkeit äußerst komplex, da immer xund y-Werte fehlerbehaftet waren. Es musste hier teilweise mit einer Schätzmethode gearbeitet werden. Mit die größte Fehlerquelle war der Gerätefehler der Multimeter. Leider standen für die ermittelten Werte keine Vergleichswerte zur Verfügung, allerdings kann angesichts der hohen Konsistenz beider Messungen von einem guten und genauen Ergebnis ausgegangen werden, vorausgesetzt, es sind keine schwerwiegenden systematischen Fehler unterlaufen. Die Messung für Aufgabe 1 dürfte insgesamt also als erfolgreich angesehen werden.

Im Gegensatz dazu konnte bei der Messung der Temperaturabhängigkeit keinerlei Übereinstimmung mit der Theorie ermittelt werden. Die Ursache hierfür ist unklar. Möglicherweise gab es Fehler im Versuchsaufbau oder in den Geräten. Der ermittelte Wert für die Bandlücke erscheint zu groß und kann nicht für sinnvoll erachtet werden.

Bei der Betrachtung von Zn- und Cu-Proben konnten qualitative Aussagen in Bezug auf die Größenordnung von Hallkonstante und Ladungsdichte sowie die Dotierung erreicht werden. Eine Fehleranalyse war hier nicht sinnvoll, die genauen Zahlenwerte dürften kaum als aussagekräftig gelten. Etwas schwierig war eine sinnvolle Korrektur der Werte für die Hallspannung. Die Messung der beheizten Probe überraschte wieder mit unerwarteten Ergebnissen. Ausserdem war das Vorzeichen genau entgegengesetzt der Erwartung. Kupfer ist ein Elektronenleiter, Zink ein Fehlstellenleiter! Möglicherweise wurden bei der Messung unbeabsichtigt die Anschlüsse vertauscht. Alles in allem dürfte jedoch auch dieser Versuchsteil als erfolgreich angesehen werden.

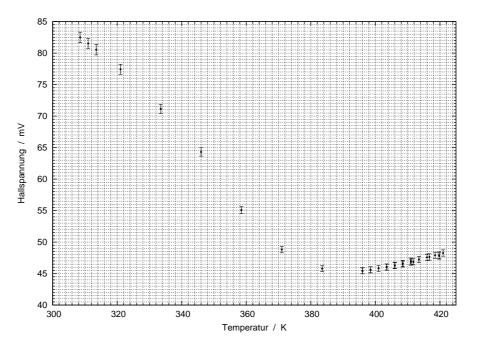


Abb. 12: Hallspannung in Abhängigkeit von der Temperatur (Aufg. 2)

T/K	$U_{_{\! H}}$ / mV	∆E / eV
308.5	82.49	2.11
311	81.52	2.13
313.5	80.54	2.14
321	77.43	2.2
333.5	71.15	2.28
346	64.31	2.37
358.5	55.09	2.46
371	48.81	2.55
383.5	45.79	2.64
396	45.44	2.72
396	45.43	2.72
398.5	45.6	2.74
398.5	45.58	2.74
401	45.82	2.76
403.5	46.05	2.77
403.5	46.01	2.77
406	46.33	2.79
406	46.27	2.79
408.5	46.61	2.8
408.5	46.5	2.8
411	46.99	2.82
411	46.82	2.82
411.75	46.87	2.83
413.5	47.25	2.84
416	47.59	2.85
416.75	47.64	2.86
418.5	47.9	2.87
419.75	47.79	2.88
419.75	47.94	2.88
421	48.26	2.88

Abb. 13: Zusammenhang zwischen Hallspannung und Temperatur, Bandlücke (Aufg. 2)