Arbeitsblatt 4

Fragen zum Stoff

1. Welche Überlegung führt auf den Maxwellschen Verschiebungsstrom?
2. Wie lautet die Wellengleichung und was läßt sich über ihre Lösungen sagen?
3. Wie lautet der Erhaltungssatz für die Energie des elektromagnetischen Feldes?
4. Wie erhält man die Richtung der Felder in einer unbegrenzten laufenden ebenen Welle?

Kurze Aufgaben

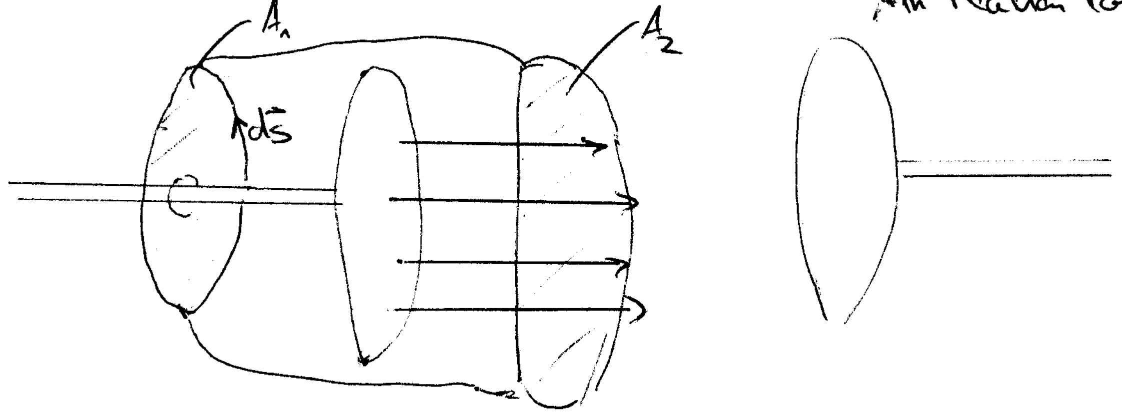
1. Gegeben sei $\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 \cdot e^{-\lambda(x^2+y^2)} \cdot e^{i(kz-\omega t)}$.
   Um welche Art von Welle handelt es sich? Ist es eine Lösung der Maxwell-Gleichungen?
2. Gegeben sei die folgende Überlagerung von Wellen in x-Richtung
   $$f(x-ct) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{-\lambda|k|} \cdot e^{ik(x-ct)}$$
   Wie sieht $f(x)$ explizit aus?
3. Ein Laserstrahl habe eine mittlere Leistung von 1 W und einen Querschnitt von 1 mm². Wie groß ist die Amplitude E_0 der elektrischen Feldstärke?
4. Mit welchem Vektorpotential $\underline{A}$ kann man eine unbegrenzte laufende ebene Welle beschreiben?

Arbeitsblatt 4

Fragen

Am Plattenkondensator:

1)



Amperescher Verkettungssatz:

$$\int \vec H \cdot d\vec s = I = jA = \int \mathrm{rot}\, \vec H \, dA_1$$

Der stokessche Satz muss aber auch für Fläche A_2 gelten. Daher muss ein äquivalenter Term gefunden werden.

Es ist $|\vec D| = \sigma \mathrel{\hat=} \frac{\int I \cdot dt}{A} = \int |j|\, dt$

$$\rightsquigarrow \vec D \mathrel{\hat=} \int \vec j \cdot dt \quad \rightsquigarrow \vec j \mathrel{\hat=} \dot{\vec D}$$

Um beides zu erfüllen muss $\dot{\vec D}$ ergänzt werden

$$\mathrm{rot}\,\vec H = \vec j + \dot{\vec D}$$

2) Die Wellengleichung folgt aus den Rot-Maxwell-gleichungen durch nochmaliges Bilden der Rotation.

z.B. für E:

$$\vec\nabla \times \vec E = -\dot{\vec B}$$

$$\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec E) = \vec\nabla(\underbrace{\vec\nabla\vec E}_{=0}) - \Delta\vec E = \vec\nabla\times(-\dot{\vec B})$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\vec\nabla\times\vec B}_{=\varepsilon_0\mu_0\dot{\vec E}}) = -\varepsilon_0\mu_0\ddot{\vec E}$$

Also $\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{E}} = 0}$

Sie kann auch geschrieben werden als

$$\Box \vec{E} = 0$$

In einer Dimension hat sie die Lösung

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

In mehreren Dimensionen kann die Lösung als Linearkombination von ebenen Wellen geschrieben werden

$$E(\vec{x},t) = \vec{A}\, e^{i(\vec{k}\vec{x} \pm \omega t)}$$

3) Der Energiesatz für EM-Wellen lautet

$$\frac{\partial}{\partial t}(w+u) + \vec{\nabla}\vec{S} = 0$$

mit $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ (Poyntingvektor)

$$w = n \cdot \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = n \cdot \int \vec{E} \cdot q \, d\vec{s}$$

$$\dot{w} = \vec{j}\,\vec{E}$$

$$u = u_{mag} + u_{el}$$

$$u_{mag} = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H} = \frac{1}{2}\mu_0 \vec{B}^2$$

$$u_{el} = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}$$

Energiedichten

Zur Erinnerung:

Impulserhaltungssatz $\frac{\partial}{\partial t}(g_{mech} + g_{feld}) - \vec{\nabla}\overleftrightarrow{T} = 0$

$$\dot{g}_{mech} = \rho \cdot \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\dot{g}_{feld} = \frac{1}{c^2}\vec{S}$$

$$\overleftrightarrow{T}_{\alpha\beta} = \varepsilon_0\left(E_\alpha E_\beta \;\; \frac{1}{2}E^2\delta_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_\alpha B_\beta + \frac{1}{2}B^2\delta_{\alpha\beta}\right)$$

4) Eine ebene Welle ist beschrieben als

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

• Richtung von $\vec{E}_0$: aus Maxwell-Gleichung $\nabla\vec{E} = 0$ in Vakuum

$$\nabla\vec{E} = (E_{0x} \cdot ik_x + E_{0y} \cdot ik_y + E_{0z} \cdot ik_z) \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = 0$$

$$\rightarrow \vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E}_0 \perp \vec{k}$$

• Richtung von $\vec{B}_0$:

$$\dot{\vec{B}} = -(\nabla \times \vec{E}) = -i(\vec{k} \times \vec{E})\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\rightarrow \vec{B} = \underbrace{\frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E}_0)}_{\vec{B}_0} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\rightarrow \vec{B}_0 \perp \vec{k}, \vec{E}_0$$

$$B_0 = \frac{1}{c} E_0$$

Aufgaben

1) Ebene Welle, die von einem umgebenden Zylinder gedämpft wird

$\nabla\vec{E} = 0$?

$$\nabla\vec{E} = E_{0x}(-\lambda \cdot 2x) + E_{0y}(-\lambda \cdot 2y) + E_{0z}(ik_z) \cdot e^{-\lambda(x^2+y^2)} \cdot e^{i(kz - \omega t)} \stackrel{!}{=} 0$$

nicht erfüllbar!

$\Rightarrow$ Nicht jede Welle erfüllt die Maxwellgleichungen

2) $$f(x-ct) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \; e^{-\lambda|k|} \cdot e^{ik(x-ct)}$$

$$\overset{t=0}{=} \int_{-\infty}^{0} dk \; e^{\lambda k} \cdot e^{ikx} + \int_{0}^{\infty} dk \; e^{-\lambda k} \cdot e^{ikx}$$

$$= \left[\frac{1}{\lambda+ix} e^{(ix+\lambda)k}\right]_{-\infty}^{+0} + \left[\frac{1}{ix-\lambda} e^{-(\lambda-ix)}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\lambda+ix} - \frac{1}{ix-\lambda} = -\frac{2\lambda}{\lambda^2+x^2}$$

3) Die Energiedichte einer Welle ist

$$u(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 = \varepsilon_0 \vec{E}_0^2 \cos^2(\vec{k}\vec{r}-\omega t)$$

gemittelt: $\bar{u} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}_0^2$

In einer Sekunde befindet sich im Abschnitt des Lasers

1 J in einem Volumen von $(A \cdot c) = 300\,m^3$

$$\bar{u} = 300\,m^3 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}_0^2$$

$$\longrightarrow |\vec{E}_0| = \sqrt{\frac{2 \cdot 300\,m^3}{\varepsilon_0}}$$

4),