

Semestrální projekt MI-PAR 2010/2011:

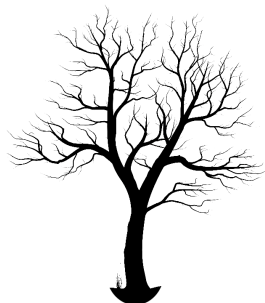
Paralelní algoritmus pro hledání minimálního Steinerova stromu

Libor Vytlačil

Vladimír Mlázovský

magisterské studium, FIT ČVUT, Kolejní 550/2, 160 00 Praha 6

14. prosince 2015



Obsah

1	Definice problému a popis sekvenčního algoritmu	3
1.1	Formulace řešeného problému	3
1.2	Vstupní a výstupní data algoritmu	3
1.3	Princip řešení	4
1.4	Vlastnosti a časová složitost algoritmu	7
2	Popis paralelního algoritmu a jeho implementace v MPI	8
2.1	Princip paralelní implementace	8
2.2	Klíčové části paralelní implementace	10
3	Naměřené výsledky a vyhodnocení	15
3.1	Paralelní čas a paralelní zrychlení	15
3.2	Rozbor naměřených hodnot	15
3.3	Dynamické vyvažování zátěže a granularita implementace . . .	18
4	Závěr	19
	Reference	19
	Přílohy	20

1 Definice problému a popis sekvenčního algoritmu

1.1 Formulace řešeného problému

Nejprve zformulujeme problém, který naše úloha řeší a vysvětlíme potřebné pojmy.

Pro zadaný graf¹ $G = (V, E)$ a množinu $\emptyset \neq A \subseteq V(G)$ nalezněte minimální² Steinerův strom T_A .

Steinerův strom je klíčovým pojmem zadání. Uveďme proto jeho definici.

Definice 1. Buď $G = (V, E)$ graf a $\emptyset \neq A \subseteq V(G)$. Steinerův strom v grafu G pro množinu A je podstrom grafu G , který obsahuje všechny uzly z množiny A . Značíme ho jako T_A^G a nebo jen T_A , pokud je z kontextu jasné, o jakém grafu G se hovoří. Množině A někdy říkáme terminální množina.

Naše řešení pracuje s pojmem podgraf daného grafu indukovaný danou podmnožinou jeho uzlů. Pro jistotu vymezíme i tento pojem.

Definice 2. Buď $G = (V, E)$ graf a $\emptyset \neq B \subseteq V(G)$. Podgraf grafu G indukovaný množinou B je graf $H = (B, F)$, kde $F = \{\{u, v\} \in E; u, v \in B\}$.

1.2 Vstupní a výstupní data algoritmu

Vstupní data

n	Přirozené číslo představující počet uzlů grafu G , $n \geq 5$.
$G(V, E)$	Souvislý neorientovaný neohodnocený konečný graf bez smyček zadaný pomocí matice sousednosti.
m	Přirozené číslo představující počet uzlů v terminální množině A .
A	Posloupnost indexů (celých čísel) do matice sousednosti grafu G představující uzly v terminální množině grafu G .

¹Předpokládá se souvislý neorientovaný neohodnocený konečný graf bez smyček. Tento předpoklad platí pro každý výskyt pojmu graf v této práci, není-li explicitně řečeno jinak.

²z hlediska počtu uzlů

Všechny čtyři vstupní parametry se zadávají v jediném vhodně formátovaném textovém souboru, který se předá programu realizujícímu algoritmus na vstup. Počet hran grafu a jeho průměrný stupeň, což jsou parametry uvedené v oficiálním zadání úlohy, nevstupují do našeho algoritmu přímo, ale jsou již „obsaženy“ v samotném grafu.

Pro generování vstupních grafů G používáme programy, které nám byly dány k dispozici v materiálech kurzu. Právě v nich lze zadat pro daný graf podrobnější požadavky, jako například průměrný stupeň uzlu.

Výstupní data

T_A	Minimální Steinerův strom pro množinu A v podobě matice sousednosti, jehož vrcholy jsou indexovány v souladu s indexováním uzlů původního grafu G , aby bylo patrné, které uzly z G řešení obsahuje.
k	Přirozené číslo představující počet uzlů v T_A .

Minimální Steinerův strom nemusí být určen jednoznačně. Náš program vypisuje právě jedno nalezené řešení.

1.3 Princip řešení

Úloha hledání minimálního Steinerova stromu je NP-úplná, viz např. [2]. Náš program hledá řešení hrubou silou a to tak, že systematicky prochází stavový prostor úlohy a ověřuje jednotlivé stavy (viz dále).

Stavový prostor úlohy je konečný a lze ho vzájemně jednoznačně namapovat na podmnožiny $B \subseteq V(G)$, $A \cap B = \emptyset$. Ověření jednoho stavu pak odpovídá zjištění, zda-li na uzlech množiny $A \cup B$ existuje v grafu strom. Pokud ano, jde o Steinerův strom pro množinu A . Cílem je tento strom, a tedy velikost množiny B minimalizovat. Ve skutečnosti lze ale použít drobnou optimalizaci, kterou také náš program využívá.

Nemusíme totiž testovat, zda-li na $A \cup B$ existuje strom, ale pouze, zda-li je indukovaný graf množinou uzlů $A \cup B$ souvislý, či nikoli. Pokud je souvislý, pak na této množině strom samozřejmě existuje (je to kostra zmíněného indukovaného podgrafu), a pokud souvislý není, tak strom na této množině neexistuje.

Kdykoli pak program narazí na vyhovující stav, tj. stav, pro který je graf indukovaný množinou $A \cup B$ souvislý, zkontroluje velikost množiny B . Pokud

je menší, než doposud nejmenší zaznamenaná hodnota, pak se tato hodnota aktualizuje a program si zapamatuje uzly v této množině.

Při procházení stavovým prostorem s výhodou využíváme možnosti prořezávání. Jakmile jednou najdeme nějakou vyhovující množinu B , už nemusíme testovat stavy, které odpovídají množinám o velikosti $l \geq B$.

Po skončení průchodu stavového stromu našel program takovou množinu $B_{min} \subseteq G(V)$, $A \cap B = \emptyset$, že podgraf indukovaný množinou vrcholů $A \cup B_{min}$ je souvislý, a menší množina B těchto vlastností neexistuje.

Program pak sestrojí kostru zmíněného podgrafu, která je hledaným minimálním Steinerovým stromem.

Úloha má řešení vždy, protože triviálně je sám souvislý graf G Steinerovým stromem pro kteroukoli podmnožinu svých vrcholů. Řešení nemusí být určeno jednoznačně, náš sekvenční algoritmus nalezne a vypíše vždy právě jedno.

Systematický průchod stavovým prostorem

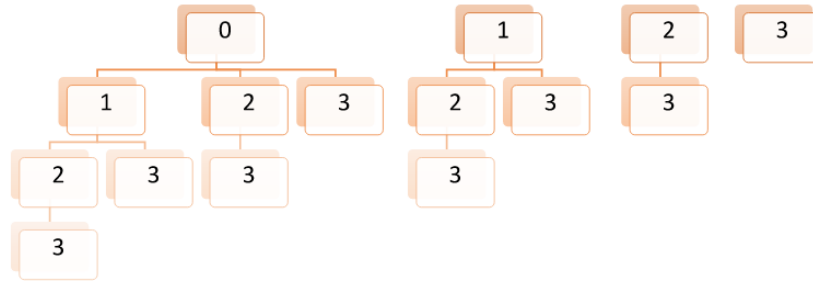
Následuje podrobnější popis systematického průchodu stavovým prostorem úlohy. Stavový prostor je v naší úloze konečný strom. Pro jeho průchod přirozeně používáme zásobník. Každý stav jednoznačně odpovídá nějaké množině $B \subseteq G(V)$, $A \cap B = \emptyset$. Naš algoritmus zaručuje, že se každý stav, tj. každá možná podmnožina B , ověří právě jednou.

1. Vrcholy $V(G) - A$ se interně unikátně očísloují, např. od 0 do $N = |V(G)| - |A| - 1$. Je jedno, které číslo připadne kterému vrcholu. Podstatné je pouze, aby přiřazená čísla byla unikátní.
2. (Kontrola těsné spodní meze) Vyzkouší se, zda-li nevyhovuje stav \emptyset , tj. zda-li náhodou sama množina A neindukuje souvislý podgraf. Pokud ano, položí se $B_{min} = A$, $l = 0$ a přejde se na krok 5.
3. Vytvoří se prázdná množina³ B a prázdný zásobník S . Sestupně se projdou očíslované vrcholy a na S se umístí dvojice $(i, 1)$, kde i je číslo vrcholu a druhé číslo ve dvojici odpovídá hladině rámce ve stavovém stromu. Nastaví se velikost nejmenšího řešení l na $N - 1$.

³Implementačně jde ve skutečnosti o trochu složitější strukturu. Struktura může obsahovat 0 až L celých čísel, kde L je zadáno při inicializaci, která trvá čas $O(L)$. Následně je možné v čase $O(1)$ přidat či odstranit jeden prvek a zároveň v čase $O(k)$ odstranit k naposledy přidaných prvků.

4. Pokud je zásobník prázdný, pokračuje se krokem 5. Jinak se vyjme stav $X = (i, j)$ na vrcholu S a provede se série podkroků.
 - (a) (Prořezávání) Pokud $|B| \geq l - 1$, zahodí se X a nechť (s, t) je současný vrchol S . Z konce B se odstraní $j - t$ vrcholů. Pokračuje se krokem 4.
 - (b) (Testování stavu) Do B se přidá vrchol s číslem i a ověří se souvislost podgrafu indukovaného množinou $A \cup B$. Pokud je souvislý, položí se $B_{min} = B$ a $l = |B|$.
 - (c) (Rozvinutí stavu) Na S se přidají potomci X , což budou stavy $(N - 1, j + 1), (N - 2, j + 1), \dots, (i + 1, j + 1)$.⁴
 - (d) (Návrat z listových stavů) Pokud se v (c) nepřidal na S žádný nový stav, tak se z konce B odstraní $j - t$ vrcholů, kde (s, t) je aktuální vrchol zásobníku.
 - (e) Pokračuje se krokem 4.
5. Konec prohledávání stavového prostoru. Kostra podgrafu indukovaného množinou $B_{min} \cup A$ je hledaný minimální Steinerův strom a jeho velikost je $l + |A|$.

Obrázek 1 ukazuje vizualizaci stavového stromu.



Obrázek 1: Vizualizace stavového prostoru pro $|V(G)| - A = 3$. Množina B pro daný stav obsahuje ty vrcholy grafu, jejichž čísla se vyskytují na cestě z tohoto stavu směrem do kořene. (Samotný kořen, který odpovídá prázdné množině, není zobrazen.)

⁴Fakt, že se přidávají pouze potomci s číslem větším, než má aktuální uzel, zabraňuje opakovanému testování stejného stavu.

1.4 Vlastnosti a časová složitost algoritmu

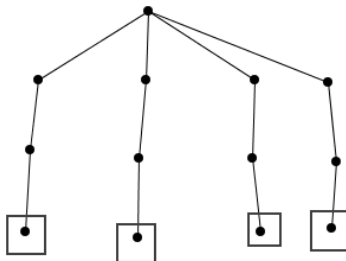
Klasifikace úlohy

Z hlediska klasifikace úloh na procházení stavového prostoru je úloha nalezení minimálního Steinerova stromu úlohou s omezenou velikostí stavového prostoru, která optimalizuje velikost podgrafu (stromu) a obecně musí prohledat celý stavový prostor, jež může však může prořezávat. Vždy je známá těsná spodní mez velikosti řešení, která odpovídá velikosti počtu uzlů v terminální množině.

Odhad časové složitosti algoritmu

V našem řešení lze snadno nahlédnout velikost stavového stromu, tj. počet jeho uzlů. Tato velikost je rovna číslu $2^{|V(G)|-|A|}$, což odpovídá počtu podmnožin množiny o $|V(G)| - |A|$ prvcích. Přímo to vyplývá z popisu průchodu stavovým prostorem a pomoci přiblížit to může obrázek 2.

Skutečný počet testovaných stavů může být nižší díky prořezávání. Přesto je možné snadno nalézt graf $G = (V, E)$ a terminální množinu A tak, aby program skutečně musel projít úplně celý stavový prostor. Jedno takové zadání je na obrázku a obecně jde o případ, kdy je G strom a A obsahuje právě všechny jeho listy.



Obrázek 2: Příklad, kdy je vstupní graf strom a terminální množina obsahuje všechny jeho listy. Při tomto zadání se musí projít celý stavový prostor a vůbec se nemůže uplatnit prořezávání.

Nejsložitější operací v cyklu systematického procházení stavů je testování souvislosti grafu. Protože graf interně reprezentujeme pomocí matice sou-

sednosti, testujeme souvislost algoritmem přirozeným pro tuto reprezentaci, který má časovou složitost $O(|E(G)|^2)$.

Jiné grafové reprezentace by asi umožnili efektivnější testování souvislosti, ale my jsme zůstali u tohoto řešení, neboť to nijak nemění cíl a výsledek práce a zároveň je tato reprezentace interně výhodná pro jednoduché testování souvislosti indukovaných podgrafů.

Složitost sekvenčního řešení v nejhorším případě je tedy asymptoticky rovna $\Theta(2^{|V(G)|-|A|} \cdot |E(G)|^2)$.

2 Popis paralelního algoritmu a jeho implementace v MPI

Samotný princip procházení stavového stromu a jeho vlastnosti prezentované v předchozí sekci platí i pro paralelní implementaci. Bylo pouze potřeba upravit některé použité datové struktury, aby byly pro paralelní výpočet dobře použitelné (zejména zásobník).

Těžiště paralelního řešení leží v implementaci zprávově orientované komunikace mezi jednotlivými procesy, možnosti dynamického rozdělování stavového prostoru do disjunktních podmnožin a jejich přidělování procesům a zajištění správného ukončení výpočtu a zobrazení řešení.

Naše paralelní řešení popíšeme nejprve obecně, poté se podíváme podrobněji na některé důležité podrobnosti.

2.1 Princip paralelní implementace

Veškerou zprávově orientovanou komunikaci nám obstará knihovna MPI, která navíc obsahuje taky další užitečné funkce, jako je zjištění celkového počtu procesů, na nichž úloha běží, nebo měření času výpočtu.

Naše implementace se na každý proces z globálního hlediska dívá jako na jednoduchý stavový automat, který během výpočtu prochází různými stavy. Každý proces má svůj vlastní zásobník a k němu přidružený kontext, pomocí kterých prochází a zpracovává určenou část stavového prostoru. Možné stavy procesů jsou následující.

INIT	Označuje inicializační fázi, před samotným vstupem do cyklu, v němž se prochází stavový prostor.
WORKING	Proces má neprázdný zásobník, rozvíjí a testuje stavy stavového prostoru.
IDLE	Proces má prázdný zásobník. Nemá práci a je mu dovoleno žádat o přidělení práce nové.
IDLE_EXPECTING	Proces nemá práci, ale požádal nějaký jiný proces o přidělení nové práce, a nyní očekává odpověď. Žádat znovu smí teprve až odpověď obdrží.
DONE	Proces je informován o tom, že celý stavový prostor už byl prozkoumán, a může opustit výpočetní cyklus.

Na začátku programu si každý proces sám přečte vstupní textový soubor se vstupními daty úlohy a podle něj si vytvoří příslušné datové struktury. Poté proces číslo 0, provede iniciální rozdělení práce a to tak, že dostatečně rozvine stavový prostor a jeho kusy pošle ostatním procesům, kteří si podle toho aktualizují svůj zásobník a kontext.

Procesy pak vstoupí do hlavního výpočetního cyklu, kde podobně jako v sekvenčním případě, rozvíjí a ověřují stavy v jim přidělené části stavového prostoru. Hlavní rozdíl spočívá ve dvou věcech.

- Procesy pravidelně po jistém počtu kroků průchodu cyklem (viz níže) kontrolují svou frontu zpráv. V případě, že nějaká zpráva dorazila, na to patřičně reagují.
- Pokud se procesu vyprázdní zásobník, nemůže cyklus jen tak opustit. Musí si nalézt dárce, který mu přidělí práci novou. Opustit cyklus je možné až ve chvíli, kdy dorazí odpovídající zpráva, která explicitně oznamuje, že byl zpracován celý stavový prostor a výpočet může končit.

Procesy si mezi sebou vyměňují několik typů zpráv. Význam shrnuje následující tabulka.

MSG_WORK_REQUEST	Žádost příjemce o přidělení práce.
MSG_WORK_SENT	Zpráva obsahující zásobníkový rámec s jeho kontextem – tj. novou práci pro příjemce.
MSG_WORK_EMPTY	Zpráva informující příjemce o tom, že odesílatel nemá práci, kterou by předal.
MSG_TOKEN	Zpráva, v níž příjemce dostává token, který se používá pro indikaci ukončení výpočtu (viz dále).
MSG_TERM	Informace příjemci o tom, že výpočet může skončit, neboť byl prohledán celý stavový prostor.
MSG_ASK_FOR_BEST	Dotaz na délku nejlepšího horního odhadu velikosti řešení známého příjemci.
MSG_RECEIVE_BEST	Informace pro příjemce o délce nejlepšího horního odhadu velikosti řešení známé odesílateli.

Když všechny procesy opustí výpočetní cyklus, je potřeba vypsát nalezené řešení. Obecně nevíme, který proces toto řešení má. Může se dokonce stát, že budou mít dva procesy různá řešení, protože, jak už bylo řečeno, nemusí být minimální Steinerův strom určen jednoznačně.

Provedeme tedy paralelní binární redukci (s využitím příslušné funkce MPI), jejímž výsledkem bude velikost minimálního Steinerova stromu a nejmenší index procesu i takový, že proces i našel strom této velikosti. Tento výsledek paralelní binární redukce bude uložen v procesu 0. Pokud $i = 0$, pak sám tento proces vypíše řešení, jinak pošle zprávu procesu i , který výpis provede. Pak program může skončit.

2.2 Klíčové části paralelní implementace

Formát posílaných zpráv Posílání a příjem zpráv spolu s kontrolou fronty čekajících zpráv provádíme pomocí odpovídajících funkcí knihovny MPI představených během výuky. Každý typ zprávy je opatřen příslušným tagem (viz výše).

Formátem zprávy rozumíme formát jejího bufferu. Ten je až na jednu výjimku vždy jednoduchý a obsahuje jedno nebo dvě celá čísla, jejichž povahu lze snadno vyvodit z výše uvedené tabulky typů zpráv.

Zmíněnou výjimkou je zpráva, v níž dárce posílá žadateli část svého stavového prostoru. Délka bufferu této zprávy je variabilní a obsahuje zásobníkový rámec, reprezentující vrchol stavového podprostoru, který začne příjemce zpracovávat, a dále kontext tohoto rámce. V terminologii podsekcce 1.3 jde o posloupnost vrcholů grafu, které se pro tento rámec nachází v podmnožině $B \subseteq V(G)$, která jednoznačně odpovídá právě jednomu indukovanému podgrafu v G , jehož souvislost se bude testovat.

Taktika hledání dárce

Použili jsme taktiku lokálních cyklických žádostí. V inicializační fázi si každý proces inicializuje svůj soukromý čítač pomocí pseudonáhodného generátoru. Kdykoli pak proces chce žádat o práci, požádá o ni proces s číslem rovným hodnotě svého čítače. Čítač pak inkrementuje o jedničku (modulo počet procesů), přičemž se hlídá, aby proces nikdy nežádal o práci sebe sama.

Sdílení dílčích výsledků Jako výhodné se jeví sdílet informaci o horním odhadu velikosti hledaného minimálního Steinerova stromu, což umožňuje prořezávat části stavového prostoru. Používáme dvojí sdílení této informace.

1. *Taktika piggybacking*. Protože sdílenou informaci lze uložit do jediného celého čísla, posíláme tuto informaci spolu s každou jinou zprávou, kterou si procesy vymění. Stačí pouze zvětšit buffer posílaných zpráv o jedničku.
2. *Taktika distributora*. Ukázalo se, že předchozí taktika sama o sobě nemusí být dostačující. Proto jsme zvolili ještě přístup, kdy se vyhradí jeden z procesů – tzv. distributor – a ostatní mu pravidelně po určitém počtu c iterací výpočetního cyklu posílají jim známý horní odhad velikosti řešení a na oplátku žádají jemu známý horní odhad. Hodnotu c jsme volili experimentálně a řádově je větší, než je počet iterací, po kterém si procesy kontrolují své fronty zpráv. Konkrétně je $c \approx 2^{15}$.

Zůstaňme ještě chvíli u taktiky distributora. Jak rychle se dostane nějaký dobrý odhad, který nalezne jistý proces, ostatním procesům? Hrubou představu o tom si lze učinit následující úvahou

Označme k celkový počet procesů řešících úlohu a necht' P značí proces, který je distributorem horních odhadů velikosti řešení. Označme dále c počet iterací výpočetního cyklu, po kterém ostatní procesy posílají distributorovi

požadavek, a iterace výpočetního cyklu procesu P rozdělme na fáze $F_i = \{0 + ci, 1 + ci, \dots, (c - 1) + ci\}, i \geq 0$. Pak platí.

Tvrzení 1. *Pokud předpokládáme, že během každé fáze F_i pošlou všechny ostatní procesy distributorovi po jednom požadavku a distributor stihne každému žadateli odpovědět a že pořadí zpráv v obou směrech je náhodné, pak daný proces $Q \neq P$ získá nejlepší odhad známý distributorovi během fáze F_j nejpozději na konci fáze F_{j+1} a s pravděpodobností přibližně aspoň*

$$\frac{1}{k} + \frac{k-1}{k} \cdot \frac{\frac{(k-1)!}{2}}{(k-1)!} = \frac{1}{k} + \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2k} > \frac{1}{2}$$

jej získá již v samotné fázi F_j .

Důkaz. To, že každý žadatel obdrží zmíněný odhad nejpozději na konci následující fáze, plyne ihned z předpokladů, protože ve chvíli, kdy se bude proces dotazovat distributora v následující fázi, získá v nejhorším případě nejlepší odhad známý distributorovi v minulé fázi.

Pravděpodobnost, že odhad obdrží ve stejné fázi lze odhadnout následující úvahou. Podle předpokladu je pořadí, v němž dorazí žádosti distributorovi, náhodné. Každé jedno takové pořadí lze jednoznačně representovat nějakou permutací množiny $M = \{0, 1, \dots, k-2\}$. Tato čísla lze vzájemně jednoznačně namapovat na procesy-žadatele.

Označme R vlastníka nejlepšího odhadu v dané fázi. Pokud $P = R$, pak každý žadatel dostane řešení ještě v aktuální fázi. V opačném případě plyne z předchozího, že proces $Q \neq P$ se právě v polovině počtu možných pořadí bude nacházet za procesem R . Tedy v polovině případů mu P odpoví ve chvíli, kdy už obdržel zprávu od R .

Pro účely dolního odhadu předpokládejme, že v dané fázi zná nejlepší odhad pouze jediný proces, a že je náhodné, který proces to je. Odtud již plyne vztah uvedený v tvrzení. \square

Způsob dělení zásobníku V paralelní implementaci používáme jako zásobník datovou strukturu v podobě oboustrannou fronty, která umožňuje v čase $O(1)$ přidávat i odebírat rámce ze svého začátku i konce.

Procesor během výpočtu zpracovává stavy z jednoho konce zásobníku (vrcholu) směrem ke druhému (dno). Platí důležitá vlastnost. Předpokládáme-li značení vrcholů z $V(G) - A$ souvisle čísly $0, 1, \dots, N-1 = |V(G)| - |A|$ a

použijeme-li značení rámců ze sekce ..., pak označíme-li $P(i, j)$ celkový počet stavů nacházejících se v podstromu stavového prostoru s kořenem (i, j) , platí

$$P(i, j) = \sum_{k=i+1}^{N-1} P(k, j) - 1$$

Vyplývá to z popisu procházení stavového prostoru v sekci 1.3 a vizuálně to přibližuje obrázek 1.

Tohoto pozorování se využívá při rozdělování zásobníku. Pokud má proces neprázdný zásobník, nachází se na jeho dně vždy rámeček (i, j) , takový, že rámeček s menší hodnotou první složky se už v procesu aktuálně přiděleném stavovém podprostoru nikde neobjeví – je to tedy rámeček, obsahující největší možný počet potomků.

Právě z tohoto rámce proces-dárce přiděluje práci a to následovně.

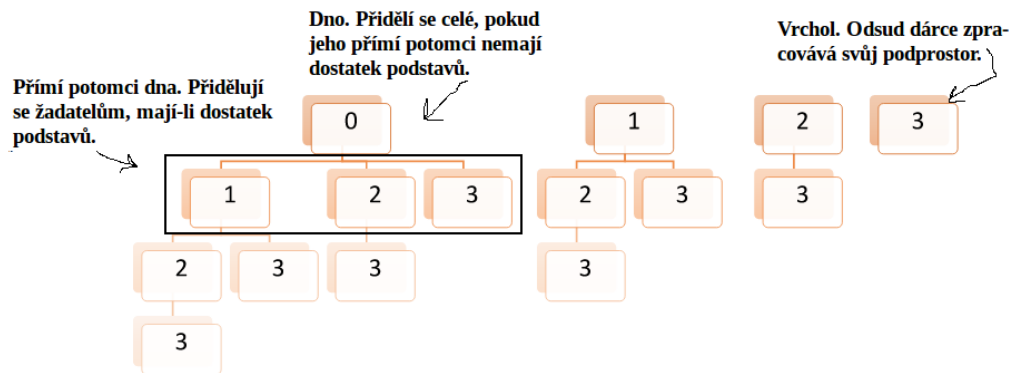
1. Pokud rámeček na dně obsahuje „dostatečný počet“ podstavů (viz dále), přidělí žadateli jeho největšího potomka (spolu s patřičným kontextem) a sám si jej ze svého prostoru odstraní.
2. V opačném případě, kdy rámeček dna už nemá dostatečný počet podstavů, ale zároveň stavový podprostor procesu-dárce obsahuje dostatek ještě neověřených stavů, přenechá dárce žadateli celý rámeček svého dna.
3. Pokud stavový podprostor dárce neobsahuje dostatek ještě neověřených stavů, je žadatel odmítnut.

Vizuálně to demonstruje obrázek 3. Jaké hodnotě odpovídá „dostatečný počet“ podstavů? Je to hodnota určená na základě řezné výšky, což je koncept představený na přednášce. Konkrétně: stavy, které obsahují méně než $h = 15$ podúrovní (a tedy méně než 2^{15} podstavů), již nerozdělujeme.

Způsob ukončení výpočtu Detekci ukončení výpočtu provádíme pomocí Dijkstrova algoritmu pro paralelní výpočet s dynamickým vyvažováním zátěže. Implementujeme ho přesně tak, jak byl prezentován během výuky. Viz např. [1, str. 490-491].

Shrnutí důležitých výpočetních konstant

V této sekci bylo zmíněno v odpovídajících kontextech několik konstant,



Obrázek 3: Zásobník a princip jeho dělení. Dárce zpracovává stavy směrem od vrcholu, kde jsou stavy s menším počtem potomků, a rozdává naopak potomky dna a nebo dno samotné.

které ovlivňují škálování algoritmu. Byly stanoveny experimentálně a částečně podle doporučení z výuky. Jejich hodnoty je možné dle potřeby snadno změnit, neboť jsou v programu definovány jako symbolické konstanty. Shrnutí obsahuje tabulka 1.

Konstanta [typ]	Hodnota	Popis
m [celé číslo]	200	Počet cyklů výpočetního cyklu, po kterém procesy kontrolují své fronty zpráv.
c [celé číslo]	32000	Počet cyklů výpočetního cyklu, po kterém si procesy vyměňují s distributorem aktuálně známé odhady řešení.
h [celé číslo]	15	Řezná výška. Stavy s hloubkou menší než h se už nerozdělují.

Tabulka 1: Shrnutí klíčových výpočetních konstant paralelní implementace. Jsou definovány jako symbolické konstanty a lze je snadno měnit a tím experimentovat s různými hodnotami.

3 Naměřené výsledky a vyhodnocení

Instance zvolené pro měření

Pro účely měření a vyhodnocování výsledků jsme zvolili následující trojici instancí.

1. Graf G_1 o 32 uzlech, který je strom, a terminální množina A obsahuje právě všechny jeho listy (pro ilustraci viz obrázek 2). Minimální Steinerův strom pro A je v tomto případě samotný graf G_1 , takže algoritmus musí projít úplně celý stavový prostor a vůbec se neuplatní prořezávání.

Tuto instanci jsme zvolili záměrně, neboť z principu zde nedochází k žádnému superlineárnímu zrychlení.

2. Graf G_2 s 40 uzly s průměrným stupněm uzlu 4. Terminální množina má velikost 9 a byla volena náhodně.
3. Graf G_3 s 42 uzly a s průměrným stupněm uzlu 5. Terminální množina má velikost 14 uzlů a byla volena náhodně.

3.1 Paralelní čas a paralelní zrychlení

Naším cílem bylo změřit paralelní čas pro všechny tři instance v situacích, kdy algoritmus běžel po řadě na 1, 2, 4, 8, 16 a 24 procesorech. U grafů G_2, G_3 jsme čas měřili i pro další počty procesorů, vzhledem k charakteru získaných výsledků. Tabulka 2 ukazuje naměřené hodnoty paralelních časů. V příloze jsou pak zobrazeny grafy paralelních časů a zrychlení.

3.2 Rozbor naměřených hodnot

Rozebereme zvlášť výsledky pro instanci G_1 a pro dvojici instancí G_2, G_3 .

Rozbor instance G_1

Jak bylo uvedeno výše, je nutné v případě instance G_1 vždy projít celý stavový prostor – vůbec se neuplatní prořezávání stavového prostoru. Z principu zde tedy nemůže dojít k superlineárnímu zrychlení a v ideálním případě očekáváme zrychlení lineární.

Jak plyne z tabulky 2, do 8 procesorů se to tak skutečně jeví, naměřený čas je vždy poloviční oproti času při polovičním počtu procesorů. Při běhu

#CPU	Čas pro G_1 [s]	Čas pro G_2 [s]	Čas pro G_3 [s]
1	243	247,9	793
2	124,8	248,8	172,8
4	62,7	248,7	173,6
5	-	248,4	7,206
6	-	249,1	7,203
7	-	14,4	7,361
8	31,17	0,0159	7,185
12	-	-	7,229
16	19,84	0,081	8,98
24	17,52	0,2868	0,4711

Tabulka 2: Naměřené paralelní časy pro zvolené instance problému. Prázdné políčko znamená, že pro odpovídající instanci a počet procesorů nebyl čas změřen.

na 16 a 24 procesorech to však vypadá, že zrychlení začíná mít sublineární charakter. Čím to může být způsobeno?

Abychom si učinili představu, provedli jsme pro instanci G_1 speciální měření. Pro počty procesorů po řadě 1, 2, 4, 8 a 16 jsme změřili, kolik z celkového počtu cyklů výpočetního cyklu tráví jednotlivé procesory v aktivním stavu, tj. ve stavu, kdy mají neprázdný zásobník a aktivně rozvíjejí a testují stavový prostor. Tabulka 3 shrnuje naměřené hodnoty.

#CPU	Čas [s]	Průměrné % aktivních cyklů na procesor
1	243	100
2	124,8	99,38
4	62,7	96,25
8	31,17	89,16
16	19,84	79,38

Tabulka 3: Průměrné procento aktivních cyklů na procesor během řešení instance G_1 pro různé počty procesorů.

Položili jsme si otázku, čím může být způsobem pokles procenta aktivních cyklů s rostoucím počtem procesorů. Usuzovali jsme na možnou dvojí příčinu.

1. Doba mezi odesláním žádosti o práci a vyzvednutím odpovědi z fronty

zpráva může být dlouhá, tzn. výpočet je nezanedbatelně zpomalen komunikační režii.

2. Příliš mnoho žádostí o práci může být odmítnuto.

Abychom blíže zjistili, co se vlastně děje. Provedli jsme pro instanci G_1 ještě jedno měření. Tentokrát jsme měřili na 16 a 24 procesorech a zjišťovali jsme počet úspěšných žádostí o práci, počet neúspěšných žádostí o práci a dále počty cyklů hlavního výpočetního cyklu, které v průměru uplynou mezi odesláním žádosti a vyzvednutím odpovědi s odmítnutím z fronty zpráv (tj. žádostí, jejichž výsledkem není pro příjemce nová práce.). Výsledek ukazuje tabulka 4.

#CPU	# úsp. žád.	# neúsp. žád.	poměr úsp. / neúsp.
16	391	1370	0,285
24	568	2056	0,276

Tabulka 4: Průměrné celkové počty úspěšných a neúspěšných žádostí o přidělení práce všech procesorů při řešení instance G_1 pro 16 a 24 procesorů. Doba, mezi odesláním žádosti a vyzvednutím odpovědi s odmítnutím trvá procesoru v průměru asi $w = 20202$ cyklů v hlavním výpočetním cyklu.

Vidíme, že problém je nejspíše relativně velké procento odmítnutých žádostí o práci. Tento závěr poukazuje na možnosti vylepšení taktiky hledání dárce a taktiky rozdělení zásobníku.

Rozbor instancí G_2 a G_3

Zbylé dvě instance ukazují typičtější chování naší implementace v případě, že je na vstupu zadán nějaký pseudonáhodně vygenerovaný graf.

Typicky se v takovém případě stane, že vstup má tak „šťastnou“ podobu, že při sekvenčním řešení rychle narazí na nějaký dobrý horní odhad velikosti řešení, a je tudíž schopen prořezat velkou část stavového prostoru.

Necháme-li pak tutéž instanci řešit o několik procesorů více, není tím tato výhoda překonána. Podoba vstupu umožňuje relativně brzy proříznout tak velkou část stavového prostoru, že se na jeho zbytku vůbec neprojeví fakt, že úlohu řeší větší počet procesorů. Přesně tohle ukazují naměřené hodnoty pro instanci G_2 .

Druhým typickým jevem pak je superlineární zrychlení, které „náhle“ nastane při jistém počtu procesorů. Vidět je to u obou instancí G_2, G_3 . To je způsobeno tím, že do jistého počtu n řešících procesorů zůstává nějaký dobrý horní odhad velikosti řešení ukryt hluboko ve stavovém prostoru jistého procesoru a trvá dlouho, než na něj tento procesor narazí a nebo jej daruje nějakému žadateli.

Jakmile však řeší úlohu o jeden procesor víc, dojde k tomu, že nyní již existuje dostatečný počet žadatelů na to, aby byl podprostor obsahující tento odhad relativně rychle předán nějakému žadateli, který tento odhad nalezne, následně jeho velikost sdílí s ostatními a opět dojde k relativně velkému prořezání, které dramaticky urychlí výpočet.

Instance G_2, G_3 demonstrují, že se tyto jevy mohou projevit i opakovaně pro větší počty procesorů. Výsledkem je pak typicky „schodovitý“ graf paralelního času.

3.3 Dynamické vyvažování zátěže a granularita implementace

Hledání dárce a dělení zásobníku

Dynamické vyvažování zátěže přímo souvisí s taktikou hledání dárce a dělením zásobníku. Ty jsou popsány v části 2.2.

Naše implementace dynamického vyvažování zátěže má své výhody a nevýhody. Samotná operace rozdělení zásobníku proběhne vždy v čase $O(1)$, dárce tedy není při dělení nijak zbytečně časově zatížen, což je výhoda. Celková časová složitost komunikace mezi žadatelem a dárce je tak v podstatě dána čistě časem potřebným k přenosu zpráv s žádostmi a odpověďmi.

Na druhou stranu je tato efektivnost vykoupena tím, že rozdělení zátěže není plně rovnoměrné. Pokud požádají dva procesy nějakého stejného dárce o práci, není oběma přidělena stejně velká část stavového prostoru, viz část 2.2. Naše implementace dělení je založena na tom, že dárce se snaží žadatele obdarovat relativně štedře, ovšem tak, aby ho to nestálo zbytečné výpočty.

Při rozboru měřené instance G_1 jsme viděli, při větším počtu procesorů řešících úlohu, není kombinace naší implementace dělení zásobníku a taktiky lokálních cyklických žádostí úplně ideální, neboť způsobuje, že nezanedbatelně velké procento žádostí o přidělení nové práce skončí neúspěchem.

Meze pro rozklad výpočtu Empiricky jsme stanovili, že nemá význam posílat procesům žádajícím o práci stavové podprostory obsahující méně než 2^{15} stavů.

Pro všechna měření v tabulce 2 jsme pro zajímavost také změřili, kolik průměrně cyklů v hlavním výpočetním cyklu stráví proces mezi odesláním žádosti o práci a vyzvednutím přímo následující odpovědi ze své fronty zpráv za předpokladu, že tato odpověď je kladná, tj. obsahuje rozdělený zásobník. Průměrně je tento počet $f \approx 42000$. Na tom jsme založili volbu řezné výšky.

4 Závěr

Sestavili jsme sekvenční algoritmus pro řešení problému nalezení minimálního Steinerova stromu pomocí systematického prohledávání stavového prostoru.

Následně jsme řešení paralelizovali za pomoci knihovny MPI, která nám umožnila zajistit zprávově orientovanou komunikaci mezi procesy, implementací jednoduchého stavového automatu, který sleduje činnost každého procesu účastnícího se výpočtu, a realizací možnosti dynamicky vyvažovat výpočetní zátěž.

Na třech ukázkových instancích jsme naměřili paralelní časy a diskutovali jsme nad výsledky. Co se týká návrhu na zlepšení, stálo by za to zamyslet se nad lepší taktikou dělení zásobníku a hledáním dárce, které by dohromady zvýšili procento aktivních cyklů v hlavním výpočetním cyklu procesů.

Osobní poznatky a zkušenosti

Libor Vytlačil: Seznámil jsem se s mně doposud neznámou knihovnou MPI a získal jsem základní zkušenost a poznatky při implementaci paralelní aplikace pomocí této knihovny.

Vladimír Mlázovský: Oživil jsem si programování v C++ a zamyslel jsem se hlouběji nad paralelizací problému. Nenapadlo by mě, že je až takový rozdíl mezi programováním vícevláknové aplikace a aplikací pro paralelní stroj.

Reference

- [1] GRAMA, Ananth. *Introduction to parallel computing*. 2nd ed. Harlow: Addison-Wesley, 2003, xx, 636 s. ISBN 0201648652.
- [2] SANTUARI, Alessandro. *Steiner Tree NP-completeness Proof* [online]. 2003 [cit. 2015-12-12]. Dostupné z: <http://profs.sci.univr.it/~rrizzi/classes/Complexity/provette/Santuari/steiner.pdf>

Přílohy

Zde jsou zobrazeny grafy naměřených hodnot.



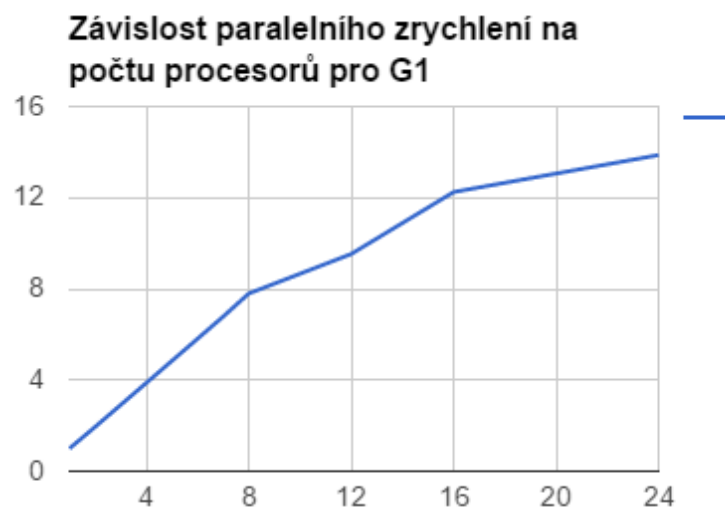
Obrázek 4: Paralelní čas pro instanci G_1 .



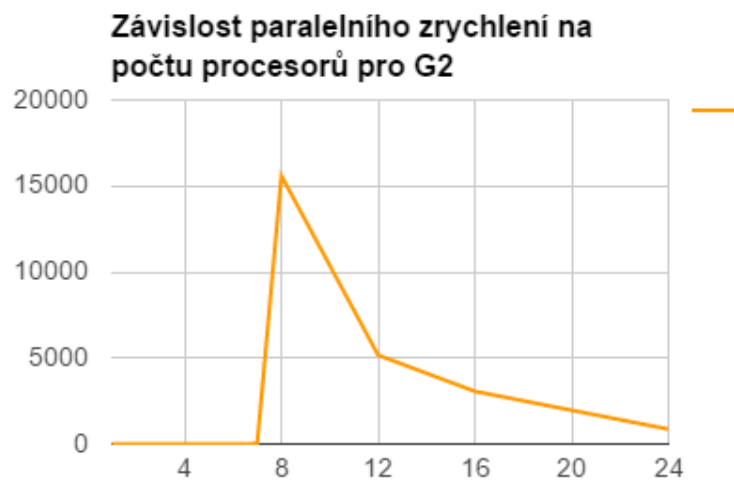
Obrázek 5: Paralelní čas pro instanci G_2 .



Obrázek 6: Paralelní čas pro instanci G_3 .



Obrázek 7: Paralelní zrychlení pro instanci G_1 .



Obrázek 8: Paralelní zrychlení pro instanci G_2 .



Obrázek 9: Paralelní zrychlení pro instanci G_3 .