Lucas Fiévet 18/09/2009

Sudoku

Dans ce qui suit on va développer un formalisme pour aborder de façon mathématique un sudoku.

A chaque chiffre dans un sudoku on peut associer une matrice de permutation qui remplit les conditions suivantes :

$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} & p_{17} & p_{18} & p_{19} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} & p_{27} & p_{28} & p_{29} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} & p_{37} & p_{38} & p_{39} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} & p_{47} & p_{48} & p_{49} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} & p_{57} & p_{58} & p_{59} \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} & p_{67} & p_{68} & p_{69} \\ p_{71} & p_{72} & p_{73} & p_{74} & p_{75} & p_{76} & p_{77} & p_{78} & p_{79} \\ p_{81} & p_{82} & p_{83} & p_{84} & p_{85} & p_{86} & p_{87} & p_{88} & p_{89} \\ p_{91} & p_{92} & p_{93} & p_{94} & p_{95} & p_{96} & p_{97} & p_{98} & p_{99} \end{pmatrix}$	$\sum_{i\|j} p_{ij}=1$ $\sum_{carre\,3x3} p_{ij}=1$

En appellant S^k la matrice associé au chiffre k on peut écrire la matrice correspondant à un sudoku sous la forme :

$$S=\sum_i i\cdot S^i \qquad \sum_k (S^k)_{ij}=1$$

Ce qui nécessite un total de $9^2\cdot 9=729$ variables pour représenter toutes les possibilitées d'un sudoku. Mais en réalité, dû la strucutre en bloc d'un sudoku, on peut faire avec moins en utilisant une matrice de permutation S_I et des matrices de permutation par bloc :

$$S_I = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11}&b_{12}&b_{13}&0&0&0&0&0&0 \\ b_{21}&b_{22}&b_{23}&0&0&0&0&0&0 \\ b_{31}&b_{32}&b_{33}&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&b_{44}&b_{45}&b_{46}&0&0&0 \\ 0&0&0&b_{54}&b_{55}&b_{56}&0&0&0 \\ 0&0&0&b_{64}&b_{65}&b_{66}&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&b_{77}&b_{78}&b_{79} \\ 0&0&0&0&0&0&b_{87}&b_{88}&b_{89} \\ 0&0&0&0&0&0&b_{97}&b_{98}&b_{99} \end{pmatrix}$$

$$S=\sum_k k\cdot B^k S_I B'^k \quad \text{où} \quad \sum_k (B^k S_I B'^k)_{ij}=1$$

Ainsi il nous faut un total de $2\cdot 9\cdot 3\cdot 9=486$ variables pour représenter toutes les possibilitées d'un sudoku.