Решения задач по курсу «Дискретные структуры»

Георгий Гуминов

29 сентября 2020 г.

Задача 5. Сформулируйте обратное утверждение к утверждению принципа Дирихле (для любой из формулировок принципа). Заметьте, что в любом случае можно сформулировать это обратное утверждение, хотя оно и будет неверным в общем случае для некоторых формулировок принципа Дирихле.

Решение. Выберем формулировку. Пусть наша формулировка: «Если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика.»

Пусть A и B – высказывания. Обратным утверждением к $A \Rightarrow B$ является $B \Rightarrow A$.

Обозначим за A утверждение «Кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток.», за B — «Хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика.»

Тогда обратное к рассматриваемому утверждению будет утверждение $B \Rightarrow A$, или, в ином виде, «Если хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика, то кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток.»

Задача 7. Докажите теорему Дирихле о приближении иррациональных чисел рациональными: для любого иррационального $\alpha \in (0,1)$ и любого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие целые числа $a, b \in [0,n]$, для которых $\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| < \frac{1}{nb}$. В решении используйте принцип Дирихле в следующей формулировке: «если множества A и B таковы, что $|A| > |B|$, то любое отображение из A в B не является инъекцией»; обязательно укажите, как конкретно для Вашей задачи определяются эти A и B.

Решение. Рассмотрим совокупность $n-1$ чисел $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$, делящих интервал $(0,1)$ на n частей: $(0, \frac{1}{n}), [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \ldots, [\frac{n-1}{n}, 1)$.

Также рассмотрим числа $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$. Их $n+1$, и они лежат в полуинтервале $[0,1)$.

Покажем, что никакие два числа из этой последовательности не равны. Предположим, что $\{k\alpha\} = \{m\alpha\}$ для некоторых натуральных k и m. Тогда $k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor = m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor$, и $\alpha = \frac{\lfloor k\alpha \rfloor - \lfloor m\alpha \rfloor}{k-n}$, но α иррациональное, что означает противоречие.

По признаку Дирихле существуют n и t такие, что $|\{m\alpha\} - \{t\alpha\}| < \frac{1}{n}$, откуда $|m\alpha - t\alpha + \lfloor m\alpha \rfloor - \lfloor t\alpha \rfloor| < \frac{1}{n}$. Введём обозначения: $a = \lfloor m\alpha \rfloor - \lfloor t\alpha \rfloor, b = |m-t|$. Это целые числа из отрезка $[0,n]$.

Тогда из последнего неравенства следует: $|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{nb}$. Теорема доказана.

(В решении в роли множества B теоремы Дирихле выступало множество промежутков, а в качестве A – числа $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$).

Задача 10. В некоторой стране из каждого города выходит нечётное число дорог. На центральной площади каждого города поднят чёрный или белый флаг. Каждое утро в одном (ровно в одном) из городов, у которого число соседей с флагами другого цвета строго больше половины, меняют цвет флага. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно? [Необходимо решить задачу непременно методом потенциалов, явно указав, какая функция используется в качестве «потенциала».]

Решение. Пусть G — граф, в котором вершины соответствуют городам из условия задачи, а дороги — ребрам. Вершины в таком графе могут быть двух цветов — черного и белого. Разноцветное ребро — ребро, которое соединяет вершины разных цветов. Одноцветное ребро — ребро, которое соединяет вершины одинаковых цветов.

Введём потенциал Q — количество разноцветных ребер. Заметим, что $Q \in \mathbb{N}$, значит, ограниченно снизу. Q_n — значение потенциала на утро с номером n.

Также рассмотрим утро. Пусть нашелся город, в котором меняют флаг. Пусть также из этого города выходит $N = 2 \cdot n + 1$ дорог. Так как флаг меняется, то число разноцветных рёбер, которым рассматриваемая вершина инцидентна, до смены флага $N_{wb} \leq n+1$, а число одноцветных — $N_{sc} \geq n$. После смены флага аналогичные величины: $N'_{wb} = N_{sc} \geq n$; $N'_{sc} = N_{wb} \leq n$. Тогда потенциал утром изменится на величину $Q_{k+1} - Q_k = N'_{wb} - N_{wb} \leq -2 < 0$. Последовательность $\{Q_n\}$ убывает, пока есть город, в котором утром меняется флаг. Поскольку последовательность $\{Q_n\}$ ограниченна снизу, то процесс смены флагов закончится.

Задача 27. Сколькими способами можно выбрать четыре разномастных карты из колоды в 36 карт, так, чтобы среди вынутых карт оказались хотя бы два валета и ровно один король? Можно дать ответ в виде формулы, не доводя до числа. Способы, отличающиеся только порядком вынимаемых карт, считаются одинаковыми.

Решение. Рассмотрим два случая:

1: Взяли ровно два валета

2: Взяли ровно три валета

Первый случай.

Количество способов выбрать два валета $C_4^2 = 6$.

Далее, из двух оставшихся мастей выберем короля. Количество способов таким образом выбрать ровно два валета и одного короля равно $2 \cdot C_4^2 = 12$.

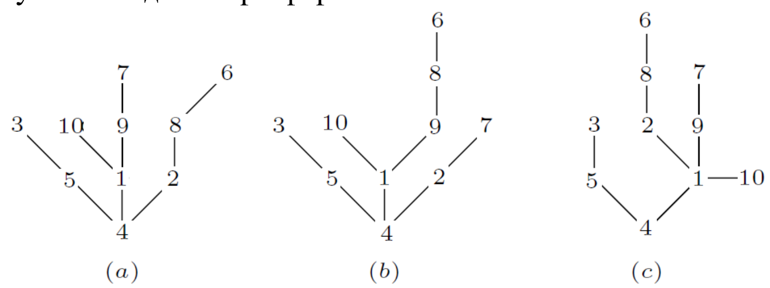
После этого, из карт оставшейся масти остаётся выбрать карту, не являющуюся королём и валетом. Таких карт семь, значит, способов выбрать карты в первом случае: $N_1 = 7 \cdot 2 \cdot C_4^2 = 84$.

Второй случай.

Количество способов выбрать три валета $C_4^3 = 4$. Король после этого однозначно определён. Способов выбрать карты во втором случае: $N_2 = 4$.

Ответ на задачу: $N = N_1 + N_2 = 88$.

Задача 37. Установите соответствие (не обязательно биекцию) между деревьями на рисунке и кодами Прюфера.



1. (5, 4, 8, 9, 2, 1, 4, 1);

2. (5, 4, 8, 9, 2, 1, 1, 4);

3. (5, 4, 8, 9, 2, 4, 1, 1).

Решение. Запишем коды Прюфера для деревьев из условия:

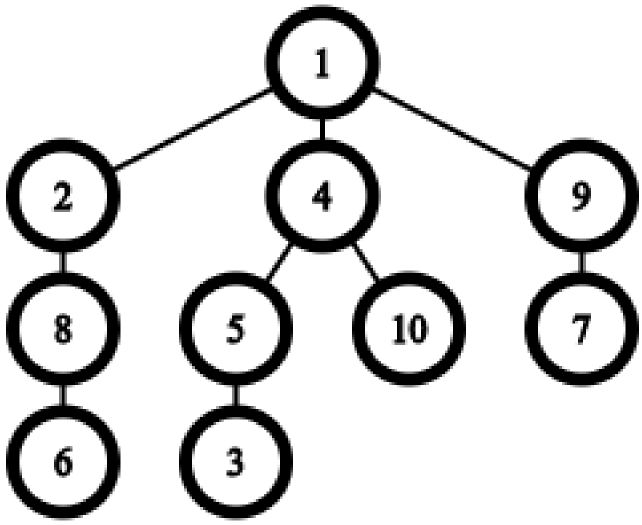
a. (5, 4, 8, 9, 2, 4, 1, 1);

b. (5, 4, 8, 2, 4, 1, 9, 1);

c. (5, 4, 1, 8, 9, 2, 1, 1).

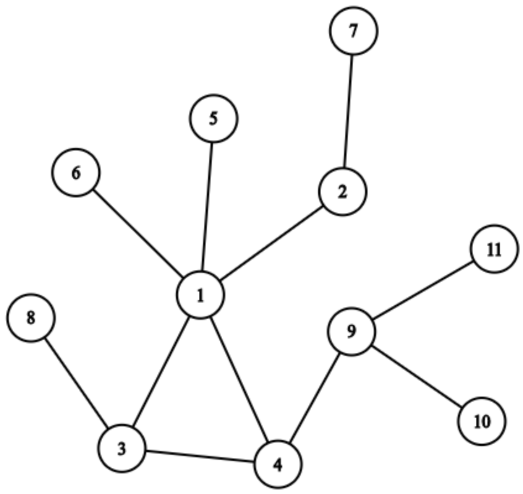
Код Прюфера, записанный под пунктом «3», соответствует дереву (а). Первый и второй коды Прюфера не соответствуют никаким из изображенных на рисунке деревьям.

Приведу картинку дерева, соответствующего коду Прюфера «2» из условия.



Задача 46. Существует ли унициклический граф, последовательность степеней вершин которого будет равна (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 5)? Если да, то постройте такой граф.

Решение. Такой граф существует. В качестве примера приведу граф:



Список смежности графа (По нему просто убедиться в том, что вершин нужных степеней именно столько, сколько должно быть по условию.):

1: 2, 3, 4, 5, 6

2: 1, 7

3: 1, 4, 8

4: 1, 3, 9

5: 1

6: 1

7: 2

8: 3

9: 4, 10, 11

10: 9

11: 9

Степени вершин графа:

1: 5

2: 2

3: 3

4: 3

5: 1

6: 1

7: 1

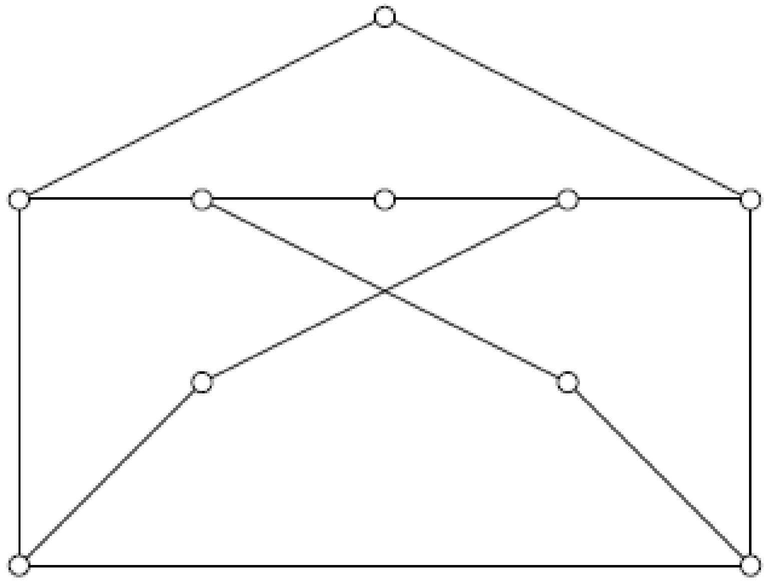
8: 1

9: 3

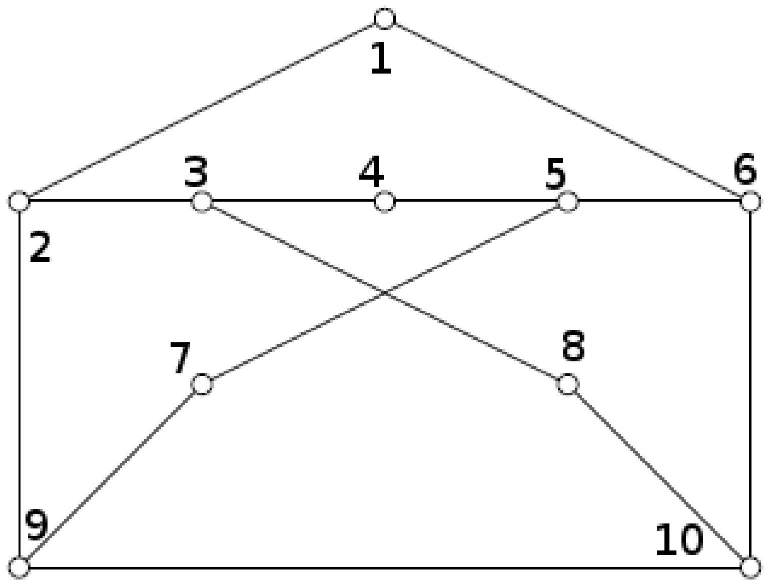
10: 1

11: 1

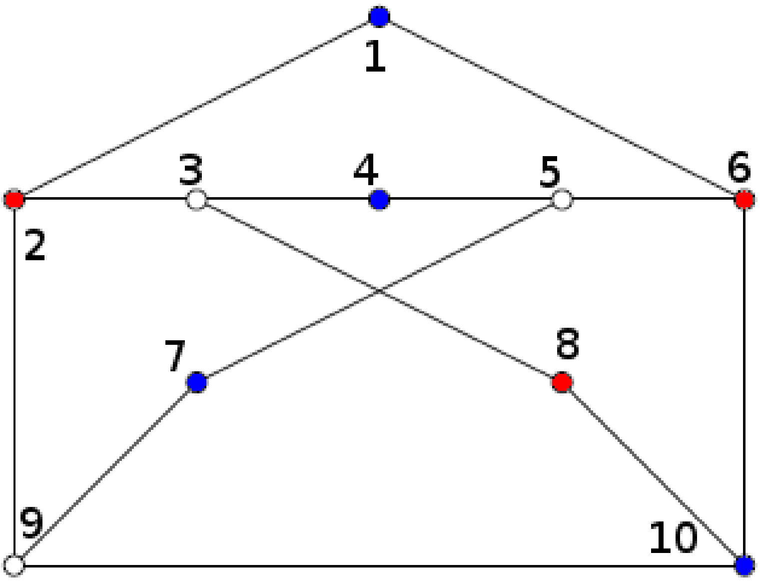
Задача 59. Найдите хроматическое число и хроматический индекс графа на рисунке. Ответ обоснуйте.



Решение. Пронумеруем вершины графа:

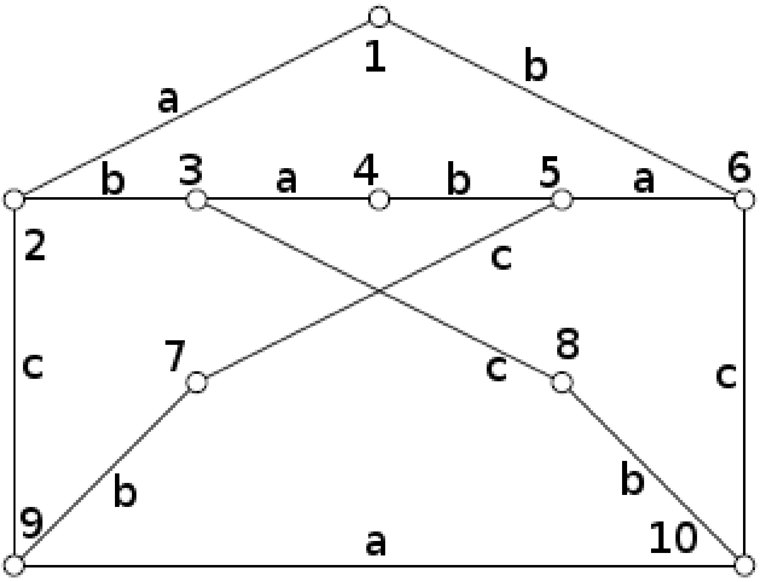


Пусть граф из условия называется G. Рассмотрим цикл в нем на вершинах (5, 6, 10, 7, 9). Пусть этот подграф-цикл графа G называется H. Длина цикла H равна пяти, она нечётная, а значит хроматическое число $\chi(H) = 3$. Так как H — подграф G, то выполняется неравенство $\chi(G) \geq \chi(H)$. Получается, что $\chi(G) \geq 3$. Покажу, что раскрасить в три цвета вершины данного графа правильно можно.



Итак, $\chi(G) = 3$.

Проведя аналогичные рассуждения для графа G и цикла H получим, что $\chi'(G) \geq 3$. Покажу, что раскрасить в три цвета рёбра данного графа правильно можно.

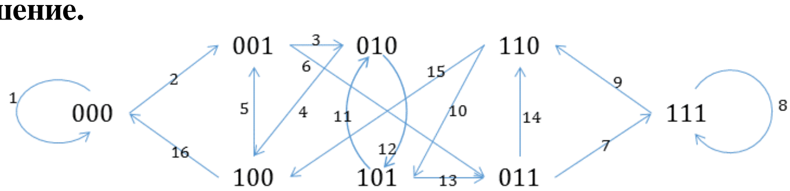


(На рисунке цвета обозначены буквами).

Получается, что $\chi'(G) = 3$.

Задача 87. С помощью графа де Брёйна постройте двоичную последовательность де Брёйна порядка 4, заканчивающуюся последовательностью 101111.

Решение.



Необходимо найти эйлеров обход графа де Брёйна, заканчивающийся последовательностью вершин «101», «011», «111», «111»

Сделаем это и запишем в виде последовательности де Брёйне обход: 1110000110100101111.

В качестве проверки запишу для каждой последовательности длины четыре её позицию в приведённой последовательности.

0000: 4

0001: 5

0010: 12

0011: 6

0100: 10

0101: 11

0110: 7

0111: 15

1000: 3

1001: 11

1010: 9

1011: 14

1100: 2

1101: 8

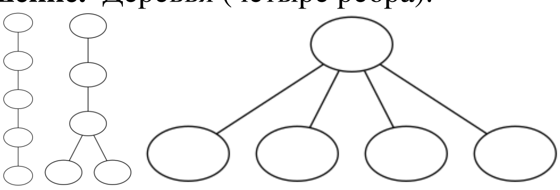
1110: 1

1111: 16

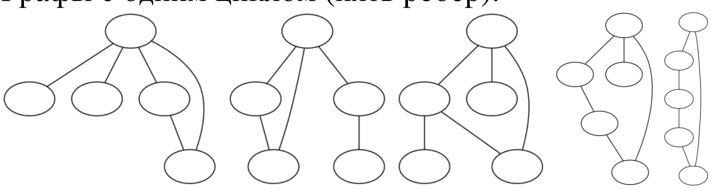
Легко видеть, что каждая последовательность длины четыре встречается в последовательности де Брёйне один раз.

Задача 276. Перечислите все попарно неизоморфные связные неориентированные графы без петель и кратных рёбер с пятью вершинами и не более, чем шестью рёбрами.

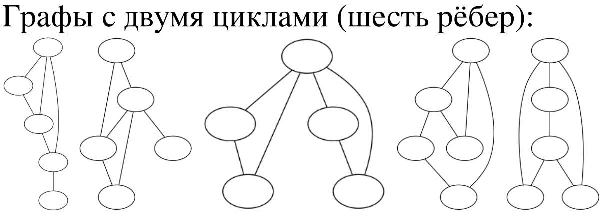
Решение. Деревья (четыре ребра):



Графы с одним циклом (пять рёбер):



Графы с двумя циклами (шесть рёбер):



Задача 359. Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдётся грань, ограниченная не более пятью рёбрами.

Решение. Пункт 1. Выберем точку A внутри многогранника и сферу ω с центром в точке A такую, что многогранник находится полностью внутри этой сферы. Определим проекцию вершины многогранника: пусть C — точка многогранника (поверхности многогранника), тогда точка пересечения луча AC и сферы ω — проекция точки C на сферу ω.

Под действием проекции все вершины многогранников перейдут в различные точки на сфере (Так как многогранник выпуклый), а ребра — в «отрезки кривых», которые в силу выпуклости многогранника пересекаются только в проекциях вершин многогранника.

Скажем, что «отрезки кривых» — проекции рёбер — рёбра графа G, а проекции вершин многогранника — вершины графа G. Обозначим число граней графа как n, число рёбер — как e, а число вершин – e. У этого графа G при укладке вершин на сфере рёбра не пересекаются (по построению). Возьмем произвольную проекцию вершины C, которая называется C'. Расположим плоскость ψ, перпендикулярную отрезку AC' по другую сторону от точки A по отношению к точке C', не пересекающуюся с сферой ω.

Пункт 2. Определим проекцию точки сферы ω на плоскость ψ аналогично первому пункту решения. (Теперь будем проводить лучи через точку C и рассматривать пересечения с плоскостью ψ). Таким образом получим укладку графа G на плоскости ψ без пересечений рёбер. Граф G оказался планарным.

Пункт 3. Предположим противное утверждению из условия задачи: пусть каждая грань ограничена по меньшей мере шестью рёбрами, тогда ребер было $e \geq 3 \cdot n$. Так как в каждой вершине в многогранника сходятся по меньшей мере три ребра, то $2 \cdot e \geq 3 \cdot v$, где v — число вершин графа G. Заметим, что число рёбер многогранника совпадает с числом рёбер графа G, число вершин многогранника — с числом вершин графа, а число рёбер многогранника — с числом рёбер графа и что граф планарен.

Пункт 4. По теореме Эйлера для планарного графа должно выполняться: $v - e + n = 2$, или $3 \cdot v - 3 \cdot e + 3 \cdot n = 6$.

Из предположения пункта «3»: $3 \cdot n \leq e$ и $3 \cdot v \leq 2 \cdot e$.

Тогда $3 \cdot v - 3 \cdot e + 3 \cdot n \leq 2 \cdot e - 3 \cdot e + e = 0$.

То есть, $v - e + n \leq 0$, что противоречит теореме Эйлера.

Значит, в любом выпуклом многограннике найдётся грань, ограниченная не более пятью рёбрами.

Задача 321. Сколько перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ разлагаются в произведение ровно трёх различных транспозиций?

Решение.

Обозначим три различные транспозиции как $(a, b)\,(c, d)\,(e, f)$.

Рассмотрим четыре случая:

1. Транспозиции не пересекаются
2. Две транспозиции пересекаются. $(b = c)$
3. (a) Три транспозиции пересекаются (пересечения вида $b = c, d = e$).
   (b) Три транспозиции пересекаются (пересечение вида $a = c, d = e, f = a$).
   (c) Три транспозиции пересекаются (пересечение вида $a = c = e$).

Случай 1. Способов выбрать три различные транспозиции $N_1 = \frac{n!}{(n-6)!} \cdot (\frac{1}{2!})^3 \cdot \frac{1}{3!} = \frac{n!}{(n-6)! \cdot 48}$ ($\frac{1}{2!}$ и $\frac{1}{3!}$ соответствуют перестановкам порядка транспозиций и элементов в каждой транспозиции соответственно).

Случай 2. Представим перестановки в виде непересекающихся циклов:

$$(kl)(lm)(no) = (klm)(no).$$

Число случаев перестановок такого вида: $N_2 = \frac{A_n^3 \cdot C_{n-3}^2}{3} = \frac{n!}{(n-5)! \cdot 6}$.

Случай 3a.

$$(kl)(lm)(mn) = (klmn).$$

Число перестановок для этого случая — $N_{3a} = \frac{A_n^4}{4} = \frac{n!}{(n-4)! \cdot 4}$.

Случай 3b.

$$(kl)(km)(lm) = (kl).$$

Число перестановок, соответствующих данному случаю — $N_{3b} = C_n^2$.

Случай 3c. Произведение транспозиций сводится к виду $(kl)(km)(kn) = (knml)$ — уже рассмотрено в случае 2.

Общее число перестановок, раскладывающихся на три различные транспозиции:

$$N = N_1 + N_2 + N_{3a} + N_{3b} = \frac{n!}{(n-6)! \cdot 48} + \frac{n!}{(n-5)! \cdot 6} + \frac{n!}{(n-4)! \cdot 4} + C_n^2.$$

Задача 99. Решите сравнение $52x \equiv 48 \pmod{404}$. Решение необходимо записать по модулю 404. Для решения задачи нахождения обратного по умножению элемента продемонстрируйте применение алгоритма Евклида; перебор/угадывание не допускаются.

Решение. В сравнении $52x \equiv 48 \pmod{404}$ все делится на четыре (легко видеть). Сократим.

Получим сравнение:

$$13x \equiv 12 \pmod{101}.$$

Число 13 — простое, значит взаимно просто с простым числом 101, значит больше сократить нельзя.

(13, 101)	$x_5 = y_4 - \lfloor \frac{b}{a} \rfloor = -31$	$y_5 = x_4 = 4$
(10, 13)	$x_4 = y_3 - \lfloor \frac{b}{a} \rfloor = 4$	$y_4 = x_3 = -3$
(3, 10)	$x_3 = y_2 - \lfloor \frac{b}{a} \rfloor = -3$	$y_3 = x_2 = 1$
(1, 3)	$x_2 = y_1 - \lfloor \frac{b}{a} \rfloor = 1$	$y_2 = x_1 = 0$
(0, 1)	$x_1 = 0$	$y_1 = 1$

$$x_0 = 13^{-1} \equiv -31 \equiv 70 \pmod{101},$$
$$13 \cdot x_0 \equiv 1 \pmod{101},$$
$$13 \cdot 12 \cdot x_0 \equiv 12 \pmod{101}.$$

Откуда

$$x \equiv 12x_0 \equiv 32 \pmod{101}.$$

Четыре решения: $32, 133, 234, 335 \pmod{404}$.

Задача 106. Существует ли k, такое, что 11^k оканчивается на $\ldots 0000121$

Решение. Искомое число можно представить в виде $n \cdot 10^7 + 121 = 11^k, n \in \mathbb{N}$. Понятно, что $n = 121 \cdot t, t \in \mathbb{N}$, и $t \cdot 10^7 + 1 = 11^{k-2}$. Переформулирую то, что получил: если существует число, оканчивающееся на $\ldots 0000001$, то существует и число, оканчивающееся на $\ldots 0000121$. Покажу, что существует число, оканчивающееся на $\ldots 0000001$.

Докажу по индукции, что для любого натурального t существует k, что $11^k = x \cdot 10^t + 1$.

База: $t = 1, k = 1, 11 = 10 + 1$.

Переход: пусть $11^{k_0} = x_0 \cdot 10^t + 1$. Покажем, что есть k такое, что $11^k = x \cdot 10^t + 1$.

Возведём в натуральную степень l: $(11^{k_0})^l = (x \cdot 10^t)^l + \dots + l(x \cdot 10^t) + 1$. Если $l = 10$, то $l(x \cdot 10^t) = (x \cdot 10^{t+1})$, а у остальных слагаемых, кроме единицы нулей больше $2t$.

Значит для любого натурального t существует k, что $11^k = x \cdot 10^t + 1$. И требуемое в условии число k существует.

Задача 131. Найдите все целочисленные решения системы сравнений

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 16 \pmod{23} \\ x \equiv 19 \pmod{29} \end{cases}$$

Решите задачи обязательно методом, примененным в доказательстве китайской теоремы об остатках.

Решение.

$$x = \sum_{i=1}^{i \le 3} r_i M_i M_i^{-1}$$

, где $r_i = 4, 16, 19$; $a_i = 7, 23, 29$; $M_i = \frac{a_1 a_2 a_3}{a_i}$. Посчитаем x:

$$x = 4 \cdot 23 \cdot 29 \cdot \underbrace{(23 \cdot 29)^{-1}}_{\pmod{7}} + 16 \cdot 7 \cdot 29 \cdot \underbrace{(7 \cdot 29)^{-1}}_{\pmod{23}} + 19 \cdot 7 \cdot 23 \cdot \underbrace{(7 \cdot 23)^{-1}}_{\pmod{29}} = 1005 \pmod{23 \cdot 29 \cdot 7}$$

Задача 140. Найдите хотя бы один первообразный корень по модулю $2 \cdot 29^{1000}$.

Решение.

Пусть g — искомый первообразный корень. Модуль, $m = 2 \cdot 29^{1000}$. Посчитаем

$$c = \varphi(m) = \varphi(2 \cdot 29^{1000}) = \varphi(2) \cdot \varphi(29^{1000}) = 29^{1000} - 29^{999} = 29^{999} \cdot 28 = 29^{999} \cdot 2^2 \cdot 7$$

.

Пояснение: $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, если $(a, b) = 1$.

Найдем первообразный корень по модулю 29.

$g_1^{\varphi(29)} \equiv 1 \pmod{29}, g_1^{28} \equiv 1 \pmod{29}$.

Должны выполняться условия:

$\begin{cases} g_1^{14} \not\equiv 1 \pmod{29}, \\ g_1^4 \not\equiv 1 \pmod{29}. \end{cases}$

В качестве g_1 подходит 3:

$\begin{cases} 3^{14} \equiv (3^7)^2 \equiv ((3^3)^2 \cdot 3)^2 \equiv (4 \cdot 3)^2 \equiv 144 \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{29}, \\ 3^4 \equiv -6 \not\equiv 1 \pmod{29}. \end{cases}$

Найдем первообразный корень по модулю 2.

$g_2^{\varphi(2)} \equiv 1 \pmod{2}$.

Очевидно, что $g_2 = 3$ подходит.

Найдём первообразный корень по модулю 29^{1000}. Уже известно, что первообразный корень по модулю 29 — $g_1 = 3$.

$$3^{28} = 1 + 29(15 + 29l),$$

$(3 + 29t)^{28} = 1 + 29(15 + 29l - 3^{27}t + 29T) = 1 + 29u$.

Чтобы u не делилось на 29, достаточно взять $t = 0$. Поэтому в качестве первообразного корня по 29^{1000} можно взять число 3.

Теперь осуществим переход от 29^{1000} к $2 \cdot 29^{1000}$. В качестве первообразного корня можно взять нечетное из чисел 3 и $3 + 29^{1000}$. Нечётное здесь 3.

Ответ: 3.

Задача 151. Хирург З. А. Резняк планирует удалить графу $K_{n,n}$ несколько рёбер, так, чтобы у графа не осталось ни одного совершенного паросочетания [наличие последних, видимо, портит графу внешность]. Каким минимально возможным количеством рёбер придётся-таки пожертвовать графу? Ответ обоснуйте, опираясь на теорему Холла.

Решение. Всегда можно обойтись вырезанием n рёбер: убрать все рёбра, инцидентные какой-нибудь одной вершине. Покажу, что меньшим количеством удалённых рёбер обойтись нельзя.

По теореме Холла, в графе без совершенных паросочетаний в одной из долей есть множество вершин L такое, что $|L| > |U(L)|$, где $U(L)$ — окрестность L, то есть множество вершин, соединенных с вершинами из L, не пересекающееся с L. Раз L соединено лишь с $|U(L)|$ ребрами, то было удалено по меньшей мере $n_{del} = (n - |U(L)|) \cdot L$ рёбер. Получается оценка:

$$(n - |U(L)|) \cdot |L| \geq (n + 1 - |L|) \cdot |L| \geq n.$$

Ответ: n.

Задача 157. Пусть в двудольном графе G с равномощными долями X и Y существует совершенное паросочетание, и пусть $\deg v \geq t$ для каждой вершины $v \in X$. Докажите, что в G найдутся не менее $t!$ различных совершенных паросочетаний.

Решение. Будем последовательно выбирать вершины $x_i \in X$, к каждой x_i своё y_j. Для x_1 можно выбрать не менее t вершин y_j.

Рассмотрим граф $G^`$ с удаленным $x_i$ и $y_j$. Скажем, что ребро $(x_i, y_j)$ добавлено в текущее паросочитание. Тогда для графа $G^`$ выполнено: $\deg v \geq t - 1$. То есть, идя по x_i мы сначала имеем не менее t способов выбрать ребро, затем $t - 1$, не трудно догадаться, что на i-ом шаге можно выбрать не менее $t - i$ вершин из доли Y в пару к x_i.

Теперь рассмотрим все возможные в зависимости от выбора пары к каждому x_i построенные паросочетания. Они все различны по построению и их не менее $t \cdot (t-1) \cdot (t-2) \dots 1 = t!$.

Задача 162. Решите сравнение $x^{18} \equiv 4 \pmod{31}$. Можете без доказательства пользоваться тем, что 3 — первообразный корень по модулю 31. Всю таблицу индексов выписывать не обязательно.

Решение. Нужно решить сравнение:

$$\begin{aligned} 18 \cdot \mathrm{ind}_3(x) &\equiv \mathrm{ind}_3(4) \pmod{30}, \\ 18 \cdot \mathrm{ind}_3(x) &\equiv 18 \pmod{30}, \\ 3 \cdot \mathrm{ind}_3(x) &\equiv 3 \pmod{5}, \\ \mathrm{ind}_3(x) &\equiv 1 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Получим решения:

1. $x \equiv 3^1 \equiv 3 \pmod{31}$.
2. $x \equiv 3^6 \equiv 16 \pmod{31}$.
3. $x \equiv 3^{11} \equiv 13 \pmod{31}$.
4. $x \equiv 3^{16} \equiv 28 \pmod{31}$.

Задача 192. Дана последовательность a_n, заданная линейным рекуррентным соотношением $a_{n+3}+4a_{n+2}+a_{n+1}-5a_n=0$ и начальными условиями $a_0=2, a_1=-4, a_2=14$. Вычислите значение выражения $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Решение. Производящая функция:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n.$$

Сделаем трюк:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots,\\
4xf(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty} 4a_nx^{n+1}=4a_0x+4a_1x^2+4a_2x^3+\dots,\\
x^2f(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2}=a_0x^2+a_1x^3+\dots,\\
-5x^3f(x)&=-\sum_{n=0}^{+\infty} 5a_nx^{n+3}=-5a_0x^3+\dots.
\end{aligned}$$

Сложим эти четыре равенства:

$$f(x)(1+4x+x^2-5x^3)=a_0+(a_1+4a_0)x+(a_2+4a_1+a_0)x^2.$$

Откуда получим: $f(x)=\dfrac{4x+2}{1+4x+x^2-5x^3}$.
Заметим, что

$$f^{'}(x)=\sum_{n}^{+\infty} na_nx^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n}^{+\infty} na_nx^n.$$

То есть,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^n=xf^{'}(x)=\frac{40x^4+26x^3-4x^2-4x}{(5x^3-x^2-4x-1)^2}.$$

Получим оценку на радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

Покажу, что $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<4$.
От противного:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>=4$$

Случай первый:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 4, a_{n+1}\geq 4a_n,$$

$$a_{n+3}+4a_{n+2}+a_{n+1}-5a_n\geq 8a_{n+2}+a_{n+1}-5a_n\geq 32a_{n+1}-5a_n\geq 123a_n\neq 0$$

Случай второй:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq -4, a_{n+1}\leq -4a_n,$$

$$a_{n+3} + 4a_{n+2} + a_{n+1} - 5a_n \leq a_{n+1} - 5a_n \leq -9a_n \neq 0$$

— противоречие для положительных a_n.

$$\frac{1}{R} < 4,$$

$$R > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$$

Подставив $x = \frac{1}{5}$, принадлежащий области сходимости ряда, получим ответ:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} na_n \left(\frac{1}{5}\right)^n = -\frac{86}{405}.$$

Задача 202. В чемпионате хоккейной лиги расписание регулярного чемпионата составляется по следующему правилу: не обязательно каждый клуб играет со всеми другими, но среди любых трёх клубов хотя бы два из них должны сыграть матч между собой и никакая пара клубов не играет друг с другом больше одного раза. Всего в лиге играют 26 клубов. Верно ли, что, как бы ни было составлено расписание, найдётся семь клубов, каждые два из которых играли матч друг с другом?

Решение. Пусть G — граф на 26 вершинах, в котором каждому хоккейному клубу соответствует вершина v_i, а рёбрам $\{e_j\}$ — факт игры между этими командами. По условию задачи, число независимости $\alpha(G) < 3$. В задаче спрашивается, верно ли, что для кликового число графа выполнено: $\omega(G) \geq G$.

Число Рамсея $r(a, b)$ — наименьшее количество вершин количество вершин графа G_1, что у графа G_1 выполнено условие: $\alpha(G_1) \geq a$ или $\omega(G_1) \geq b$.

Для того, чтобы доказать верность предложенного в условии утверждения, докажем, что $r(3, 7) \leq 26$.

Для чисел Рамсея верно, что $r(s, 1) = r(1, t) = 1, r(s, 2) = s, r(2, t) = t$.

Также, по теореме Рамсея для чисел Рамсея верно, что $r(n, m) \leq r(n, m-1) + r(n-1, m)$ и в случае чётных $r(n, m-1)$ и $r(n-1, m)$ верно, что $r(n, m) \leq r(n, m-1) + r(n-1, m) - 1$.

Посчитаем оценку $(i, j) \leq \alpha(i, j)$, то есть верхнюю оценку, заполняя ими таблицу, в которой клетка (i, j) содержит $\alpha(i, j)$.

	1	**2**	**3**
1	1	1	1
2	1	2	3
3	1	3	6
4	1	4	9
5	1	5	14
6	1	6	19
7	1	7	26

Выходит, что всегда найдётся семь клубов, каждые два из которых играли матч друг с другом.

Задача 206. Определим число $Q(s_1, s_2)$ как наименьшее возможное натуральное число N такое, что для любого натурального числа $n \geq N$ при любой рёберной раскраске полного графа на n вершинах в 2 цвета либо найдётся простая цепь на s_1 вершинах, все рёбра которой закрашены в цвет 1, либо есть простая цепь на s_2 вершинах, все рёбра которой закрашены в цвет 2. Докажите, что $Q(s_1, s_2) \leq Q(s_1 - 1, s_2) + Q(s_1, s_2 - 1)$. Вычислите значение $Q(3, 3)$.

Решение.

Сделаем оценку: $Q(s_1, s_2) \leq Q(s_1 - 1, s_2) + Q(s_1, s_2 - 1)$. Для доказательства этого факта воспользуемся методом математической индукции (математическая индукция по сумме $s = s_1 + s_2$).

База: $Q(1, 1) = 1$, более того, $Q(1, n) = Q(n, 1) = 1$ — всегда найдётся хотя бы одна вершина нужного цвета, если граф раскрашен в два цвета.

Переход: рассмотрим полный граф G на $Q(s_1 - 1, s_2) + Q(s_1, s_2 - 1)$ вершинах. Также возьмём произвольную вершину v этого графа. Обозначим F вершины, соединенные через рёбра первого цвета, S — вершины соединенные рёбрами второго цвета.

Поскольку $|F| + |S| + 1 = Q(s_1 - 1, s_2) + Q(s_1, s_2 - 1)$, то $|F| \geq Q(s_1 - 1, s_2)$, или $|S| \geq Q(s_1, s_2 - 1)$.

Пусть $|F| \geq Q(s_1 - 1, s_2)$. Тогда в S найдется цепь первого цвета, либо цепь второго цвета, включающая v по предположению индукции.

Посчитаем $Q(3, 3)$. $Q(3, 3) \leq 2Q(2, 3) \leq 2(Q(1, 3) + Q(2, 2)) = 6$. Однако, по принципу Дирихле, в графе на трех вершинах найдутся хотя бы два ребра одинакового цвета. Осталось показать, что $Q(3, 3) > 2$, но это очевидно, потому что при $n \leq 2$ просто не зватит вершин ни на какую цепь. То есть $Q(3, 3) = 3$.

Задача 222. Для многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + 1$ над полем $\mathbb{Z}_3$ определите, является ли он неприводимым.

Решение. Проверим, делится ли многочлен на три, то есть, сравнимо ли значение многочлена с числом три при каком-нибудь x:

$p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1,$

$$p(0) \equiv 1 \pmod 3,$$
$$p(1) \equiv 1 \pmod 3,$$
$$p(2) \equiv 2 \pmod 3.$$

Попытаюсь решить $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \equiv x^4 + x^3 + x^2 + 1 \pmod 3$ для $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$.

$$\begin{cases} x^4 : 1 \equiv 1 \pmod 3 \\ x^3 : a + c \equiv 1 \pmod 3 \\ x^2 : b + ac + d \equiv 1 \pmod 3 \\ x^1 : bc + ad \equiv 0 \pmod 3 \\ x^0 : bd \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

Из последнего соотношения: $b = 1, d = 1$ или $b = 2, d = 2$.

Рассмотрим первый случай:

$$\begin{cases} x^3 : a + c \equiv 1 \pmod 3, \\ x^1 : a + c \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Противоречие.

Рассмотрим второй случай:

$$\begin{cases} x^3 : a + c \equiv 1 \pmod 3, \\ x^2 : ac \equiv 0 \pmod 3, \\ x^1 : 2a + 2c \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Противоречие.

Получается, что решений нет, то есть многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + 1$ над полем $\mathbb{Z}_3$ является неприводимым.

Задача 238. На курсе 100 студентов. Известно, что среди них можно выделить 149 различных пар студентов, которые во время семестра давали друг другу списывать на контрольных. Деканат принял решение отчислить после сессии минимально возможное число студентов, но таким образом, чтобы среди оставшихся студентов не осталось ни одной пары списывающих друг у друга. Докажите, что к следующему семестру на курсе останется не менее 26 студентов.

Решение. Граф G — граф на вершинах V (студенты) и ребрах E (факты списывания). Их количество $|V| = 100$ и $|E| = 149$. В задача требуется показать, что в графе G обязательно найдется независимое множество мощности 26.
Докажу от противного: пусть независимого множества мощности 26 нет. Рассмотрим дополнения графа G – граф $G^{'}$. В нем множество вершин V такое же (те же лица). Но рёбра — $E^{'}, |E^{'}| = 4801$. По предположению в этом графе нет клики мощности 26, но есть клика мощности 25, то есть $\omega(G^{'}) = 25$. При таких условиях максимальное число ребер в графе $G^{'}$ — 4800. Тогда, по теореме Турана, граф $G^{'}$ — полный k-дольный граф и ещё одно ребро. То есть, $\omega(G^{'}) = 24$ — противоречие.

Задача 239. Докажите, что максимальное количество рёбер в n-вершинном графе, не содержащем циклов (никакой) чётной длины, в точности равняется $\lfloor\frac{3(n-1)}{2}\rfloor$.

Решение. Заметим, что если в графе нет циклов, то он является лесом (несколько деревьев на заданных вершинах), и $|E| \le n - 1$.
Тогда пусть в графе есть циклы (но только нечётные). Пусть цикл — соединенные ребрами вершины $\{a_i\}_{i=0}^{i<2n-1}$. Тогда между двумя вершинами цикла a_i и a_j имеется только два различных пути, которые проходят по циклу (в противном случае имелся бы цикл чётной длины). Любые два цикла графа G пересекаются не более чем по одной вершине.
Это означает, что число циклов в графе G не больше, чем $\frac{|E|}{3}$. Удалим из каждого цикла по одному ребру останется не менее чем $\frac{2|E|}{3}$ рёбер. Но новый граф $G^{'}$ является лесом, в нем не более чем $n - 1$ ребро. $\frac{2|E|}{3} \le n - 1$, откуда $|E| \le \frac{3(n-1)}{2}$

Задача 252. Пусть $n - k + 1 < s \le n$ и пусть $\mathcal{F}$— семейство всевозможных s-элементных подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$. Докажите, что в $\mathcal{F}$ нет подсолнухов с k лепестками.

Решение. Предположим, что есть. $S_1, \ldots, S_k$ — рёбра гиперграфа и $S_i \cap S_j = Y$ для некоторого Y. Пусть $t = |Y|, t_i = |S_i \backslash Y|$. Можно посчитать, что $t + \sum_i t_i \le n$. С другой стороны, $t_i + t = s$. Откуда $t_i = s - t$, и $t + \sum_i t_i = t + ks - kt = ks - (k-1)t$.

$$k(n-k+1) - (k-1)t < ks - (k-1)t \le n,$$
$$kn - k^2 + k - kt + t < ks - (k-1)t \le n,$$
$$n < kn + k + t < ks - (k-1)t \le n.$$

Противоречие.

Задача 254. В группе переводчиков-полиглотов 27 человек. Часть из них нужно отправить на крупный международный саммит, в котором участвуют представители 108 стран, говорящие на разных языках. По каждому из 108 языков в исходной группе из 27 переводчиков выделили семерых, лучше остальных владеющих этим языком. Требуется отправить на саммит как можно меньше переводчиков, но при этом так, чтобы для каждого из 108 языков нашелся среди отправленных переводчик, попадающий в семерку лучших. Докажите, что при некотором раскладе заведомо нужно взять в команду девятерых.

Решение. Приведём пример в виде матрицы M размера 27×108, в которой на позиции (i, j) находится единица, если полиглот №i знает язык №j хорошо. Более того, пусть эта матрица имеет вид.

$$M = \begin{bmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & M_0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 \end{bmatrix}$$

Матрица M_0 имеет размер 9×36, каждый столбец этой матрицы M_0 состоит из 7 единиц и двух нулей, кроме того все эти 36 столбцов различны (такое может быть, поскольку $C_9^7 = 36$).

Из каждой группы, соответствующей одной клетке-матрице M_0 необходимо взять по меньшей мере $S_0 = 3$ переводчиков.

Покажу, что двух может не хватить. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_9$ — количества хорошо изученных девятью переводчиками языков и без ограничения общности $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \cdots \leq n_9$. Понятно, что по построению $\sum_{i=1}^{9} n_i = 7 * 36$. Но тогда переводчики с третьего по девятый могут знать все языки, а первый и второй — никаких. Получается, что для количества переводчиков S_0, которое можно взять из одной группы, соответствующей подматрице M_0 выполняется: $S_0 \geq 3$.

Также покажу, что всегда можно выбрать каких-нибудь трёх из подгруппы. Предположим противное. Рассмотрим все возможные тройки. В каждой тройке хотя бы один язык не известен никому. Тогда какой-то язык знают не более, чем шесть переводчиков, что противоречит условию.

Итак, $S = 3 \cdot S_0 = 3 \cdot 3 = 9$.

Задача 322. Пусть n — произвольное натуральное число. Пусть $S_1, \ldots, S_{n^{2017}}$ — произвольные n-элементные множества. Докажите, что при всех достаточно больших значениях n можно покрасить элементы в красный и синий цвета, так, чтобы в каждом из множеств S_i нашёлся хотя бы один красный и хотя бы один синий элемент.

Решение. Пусть $m = | \cup_i S_i|$, то есть количество различных элементов. Оценим сверху количество раскрасок, при которых одно множество покрашено в один цвет. Выбрать одноцветное множество S_i можно n^{2017} способами. Цвет, в который можно покрасить это множество можно выбрать из двух. Оставшиеся $m - n$ элементов можно покрасить в любой цвет, то есть 2^{m-n} способами. Количество плохих раскрасок в точности $n^{2017} \cdot 2^{m-n+1}$.

Всего раскрасок, в то же время 2^m. Заметим, что для существования правильной раскраски должно выполняться:

$n^{2017} \cdot 2^{m-n+1} < 2^m$,

$n^{2017} \cdot 2 < 2^n$.

Поскольку показательная функция растет быстрее, чем степенная, начиная с достаточно большого n это неравенство будет выполнено, а значит правильная раскраска найдется.

Задача 330. Отметьте все истинные высказывания.

1. Общий случай леммы Ловаса доказывается с помощью неравенства Маркова.

2. Лемма Ловаса позволяет балансировать между независимостью и маловероятностью событий, которых мы хотели бы избежать.

3. Симметричный случай леммы Ловаса выводится из общего случая при помощи математической индукции.

4. Применение леммы Ловаса (в общем случае) требует подбора набора констант.

5. Лемма Ловаса применима только к наборам событий, независимых в совокупности.

6. Оценка чисел Рамсея, получаемая при помощи леммы Ловаса, лучше по порядку, чем оценка, полученная «обычным» вероятностным методом.

Попробуйте исправить каждое неверное высказывание так, чтобы получилось верное.

Решение. Верными высказываниями являются предложения с номерами «2» и «4».

Попробуем исправить неверные высказывания.

Общий случай леммы Ловаса доказывается с помощью **математической индукции и теоремы Байеса**.

Симметричный случай леммы Ловаса выводится из общего случая, поскольку является его частным случаем.

Лемма Ловаса применима **не** только к наборам событий, независимых в совокупности.

Оценка чисел Рамсея, получаемая при помощи леммы Ловаса, **асимптотически больше** оценки, полученной «обычным» вероятностным методом.

Задача 332. Зачеркнув лишнее, укажите верную идею доказательства теоремы Фишера: «Для доказательства того, что объектов в некоторой совокупности «немного»/«достаточно много», строим биекцию/инъекцию/сюръекцию множества этих объектов в линейное пространство, так, чтобы векторы, сопоставленные объектам, оказывались линейно зависимыми/независимыми.»

Решение. Для доказательства того, что объектов в некоторой совокупности «немного»/~~«достаточно много»~~, строим ~~биекцию~~/инъекцию/~~сюръекцию~~ множества этих объектов в линейное пространство, так, чтобы векторы, сопоставленные объектам, оказывались линейно ~~зависимыми~~/независимыми.

Задача 337.

1. Какое наибольшее количество рёбер, согласно теореме Турана, может быть в графе на 2018 вершинах, не содержащем четырёхвершинных клик? Можно дать ответ в виде формулы.

2. Найдите точное значение числа Заранкевича $Z_{1,b}(m, bm)$ для произвольных натуральных b и m.

3. Что можно сказать про почти все двудольные графы с равномощными долями: доля таких графов, не содержащих $K_{2,2}$, константная || почти все такие двудольные графы не содержат $K_{2,2}$ в качестве подграфа || почти все такие двудольные графы содержат $K_{2,2}$ в качестве подграфа.

Решение.

1. $673 \cdot 672 \cdot 2 + 673 \cdot 673 = 1357441$.

2. Пусть граф G двудольный, а его доли — V_1 и V_2 (множества вершин), размеров $|V_1| = m, |V_2| = bm$. Тогда $Z_{1,b}(m, bm) \le m \cdot (b-1)$. Это следует из того, что каждая вершина из V_1 смежна не более чем с $b-1$ вершиной из V_2.
   Приведём пример графа G такого, что ребер в нем $m \cdot (b-1)$ и в нем нет $K_{1,b}$.
   Пусть $V_1 = \{a_i\}_1^m, V_2 = \{b_i\}_1^{bm}$.
   Соединим a_1 с $\{b_i\}_1^{b-1}$, a_2 с $\{b_i\}_b^{2b-2} \dots a_m$ с $\{b_j\}_{(b-1)(m-1)+1}^{m(b-1)}$.
   Значит, $Z_{1,b}(m, bm) = m \cdot (b-1)$.

3. $Z_2(n) \lesssim n^{1,5}$ (верхняя оценка чисел Заранкевича для $K_{2,2}$ подграфов).
   Ответ: почти все такие двудольные графы содержат $K_{2,2}$ в качестве подграфа.

Задача 375. Вычислите в $\mathbb{Z}_7$ значение выражения

$$(2017^{-1} + 2020^{-1})^{2018} \cdot 2020.$$

Ответ должен принадлежать множеству $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Решение.

$$(2017^{-1}+2020^{-1})^{2018}\cdot 2020 \equiv (1^{-1}+4^{-1})^{2018}\cdot 4 \equiv (1+2)^{2018}\cdot 4 \equiv 3^{2018}\cdot 4 \equiv 3^2\cdot 4 \equiv 36 \equiv 1 \pmod 7,$$

Пояснение: $3^{2018} \equiv 3^2 \pmod 7$, поскольку $3^6 \equiv 1 \pmod 7$ по малой теореме Ферма.