| | | | |
|---|---|---|---|
| **Аналитиеская механика.** | | | |
| Положение материальной точки: | $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ | Ускорение: | $\vec{w} = w_1\vec{e_1} + w_2\vec{e_2} + w_3\vec{e_3}$, $\vec{w} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$ |
| Скорость материальной точки: | $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dx}{dt}\vec{k}$ | Производные декартовых координат через произвоные криволинейных: | $\frac{d^2\chi_i}{dt^2} = \sum_{l=1}^{l\leq3}\sum_{m=1}^{m\leq3}\frac{\partial^2\chi_i}{\partial q_l\partial q_m}\dot{q_l}\dot{q_m} + \frac{\partial\chi_i}{\partial q_l}\ddot{q_l}$, $\chi_0 = x, \chi_1 = y, \chi_2 = z.$ |
| Ускорение материальной точки: | $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2x}{dt^2}\vec{k}$ | Углы Эйлера: | Я не очень умею техатб. |
| Вектор $\vec{\tau}$, определение: | $\vec{v} = \frac{d}{dt}r[s\vec{(t)}] = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{\tau}\frac{ds}{dt}$, $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ | Ортогональные отображения: | $\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{R'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{R'} = A\vec{R}$ |
| Ускорение через $\vec{\tau}$: | $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ | Ортогональное преобразование для комплексного вектора: | $A(\vec{P} + i\vec{Q}) = A\vec{P} + iA\vec{Q}$ |
| Вектор кривизны, и его связь с $\vec{n}$: | $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n}$ | «Хорошее» определение нормы комплексного вектора: | $\vec{P} + i\vec{Q} = \sqrt{(\vec{P} + i\vec{Q})(\vec{P} + i\vec{Q})} = \sqrt{\vec{P^T}\vec{P} + \vec{Q^T}\vec{Q}}$ |
| Разложение $\vec{w}$ по $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$: | $\vec{w} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$ | Кватернион: | $\Lambda = \lambda_0 i_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3$ |
| Вектор бинормали $\vec{b}$ : | $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$ | Свойства кватернионов: | $(\Lambda\circ\mathcal{M})\circ\mathcal{N} = \Lambda\circ(\mathcal{M}\circ\mathcal{N})$, $(\Lambda + \mathcal{M})\circ(\mathcal{N} + \mathcal{R}) = \Lambda\circ\mathcal{N} + \mathcal{M}\circ\mathcal{N} + \Lambda\circ\mathcal{R} + \mathcal{M}\circ\mathcal{R}$, $(\lambda\Lambda)\circ(\mu\mathcal{M}) = \lambda\mu\Lambda\circ\mathcal{M}$ |
| Касательные к координатныйм линиям ($\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$): | $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_m} = \frac{\partial x}{\partial q_m}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_m}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_m}\vec{k} = H_1\vec{e_m}, m = 1, 2, 3$ | Умножение кватернионов: | $i_0\circ i_k = i_k\circ i_0 = i_k, k = 0, 1, 2, 3$ <br> $i_k\circ i_k = -i_0, k = 1, 2, 3$ <br> $i_1\circ i_2 = i_3, i_2\circ i_3 = i_1, i_3\circ i_1 = i_2,$ <br> $i_2\circ i_1 = -i_3, i_3\circ i_2 = -i_1,$ <br> $i_1\circ i_3 = -i_2$ |
| Коэффициенты Ляме: | $H_k = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial q_k})^2 + (\frac{\partial y}{\partial q_k})^2 + (\frac{\partial z}{\partial q_k})^2}$ | Ещё свойства умножения кватернионов: | $i_0\circ i_0 = i_0, i_0\circ i_1 = i_1\circ i_0 = i_1, i_1\circ i_1 = -i_0$ |
| Ортогональные криволинейные координаты: | $(\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}) = (\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}) = (\vec{e_3}\cdot\vec{e_1}) = 0$ | Ортогональная матрица: | $\vec{R'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r_1} & \vec{r_2} & \vec{r_3} \end{pmatrix}$, $\lvert\vec{r_i}\rvert = 1, \vec{r_i}\cdot\vec{r_j} = 0, i \neq j$ |
| . Эквивалентные условия ортогональности криволинейных координат: | $\frac{\partial x}{\partial q_l}\frac{\partial x}{\partial q_m} = \frac{\partial y}{\partial q_l}\frac{\partial y}{\partial q_m} = \frac{\partial z}{\partial q_l}\frac{\partial z}{\partial q_m} = 0$ для $l \neq m$ | Матрица поворота относительно оси $X$ на угол $\phi$: | $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ |
| Дифференциал дуги произвольной кривой (метрика пространства): | $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3 g_{ij}dq_i dq_j$ | Числовая интерпритация кватернионов: | $i_0 - 1$, $i_1 - \sqrt{-1}$, то векторное пространство $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1\sqrt{-1}$ подчиняется вышеуказанным правилам |
| Метрика пространства (случай ортогональных координат): | $ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2$ | Матричная интерпритация кватернионов: | $i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \lambda_0 i_0 + \lambda_1 i_1$ |
| Скорость через криволинейные координаты: | $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\dot{q_1} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\dot{q_2} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}\dot{q_3} = H_1\dot{q_1}\vec{e_1} + H_2\dot{q_2}\vec{e_2} + H_2\dot{q_2}\vec{e_2}$ | Геометро-числовая интерпритация кватернионов: | $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1\vec{i_1} + \lambda_2\vec{i_2} + \lambda_2\vec{i_2}$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}, \vec{\lambda} \in \mathbb{E}^3$ |

| Аналитическая механика. | | | |
|---|---|---|---|
| Произведение трехмерных ортов в геометро-числовой интерпритации: | $i_k \circ i_k = -1,$ $i_k \circ i_l = \vec{i_k} \times \vec{i_l} (k \neq l)$ | Кватернионное сложение поворотов (активная точка зрения): | $R' = \Lambda \circ R \circ \overline{\Lambda}, R'' = M \circ R \circ \overline{M},$ $R'' = M \circ \Lambda \circ R \circ \overline{\Lambda} \circ \overline{M} = M \circ \Lambda \circ R \circ \overline{\Lambda \circ M}$ |
| Произведение кватернионов геометро-числовой интерпритации: | $\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda},$ $M = \mu_0 + \vec{\mu},$ $\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - \vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} + \lambda_0 \vec{\mu} + \mu_0 \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}$ | Кватернионное сложение поворотов (пассивная точка зрения) | check |
| Сопряженный кватернион: | $\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}, \overline{\Lambda} = \lambda_0 + \vec{\lambda}$ | | |
| Норма кватерниона: | $\lVert\Lambda\rVert = \Lambda \circ \overline{\Lambda} = \overline{\Lambda} \circ \Lambda = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ | | |
| Свойства (1) и (2) произведения кватернионов: | $\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda,$ $\overline{\Lambda \circ M} = \overline{\Lambda} \circ \overline{M}$ | | |
| Свойство (3) произведения кватернионов: | $\lVert\Lambda \circ M\rVert = (\Lambda \circ M) \circ \overline{(\Lambda \circ M)} = \Lambda \circ M \circ \overline{\Lambda} \circ \overline{M} = \lVert\Lambda\rVert \cdot \lVert M\rVert$ | | |
| Свойство (4) произведения кватернионов: | Инвариантно относительно ортогональных преобразований в векторной части кватернионов. | | |
| Свойство (5) произведения кватернионов (обратный): | $\Lambda^{-1} = \frac{\overline{\Lambda}}{\lVert\Lambda\rVert}$ | | |
| Присоединённое отображение: | $\mathcal{R} \to \mathcal{R}' : \mathcal{R}' = Ad\mathcal{R} = \Lambda \circ \mathcal{R} \circ \Lambda'$ | | |
| Свойства (1) и (2) присоединенного отображения: | Не меняет скалярной части, действует на векторную часть как линейное преобразование. | | |
| Поворот через кватернион: | $\Lambda = \lambda_0 + \lambda \vec{e}, \Lambda = \cos\frac{\phi}{2} + \vec{e} \sin\frac{\phi}{2}$ — поворот на угол $\phi$ вокруг $\vec{e}$. | | |
| Группа $SO(3)$: | $R' = AR, R'' = BR', R'' = (BA)R, C = BA$—матрица, задающая суммарный поворот. | | |
| Активная точка зрения. | Матрицы последовательных поворотов перемножаются в обратном порядке. Все матрицы вычисляются в общем для всех базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. | | |
| Пассивная точка зрения. | Матрицы последовательных поворотов перемножаются в прямом порядке. Каждая матрица рассматривается в поворачиваемом ею базисе. | | |
| Ещё про активную точку зрения (сложение поворотов): | $R^{(\prime)} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ | | |