Zusammenfassung - Numerik der Differentialgleichungen

Kapitel I.

Einleitung

Verallgemeinerte partielle Integration

Integralsatz von Gauss:

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} \langle F, v\rangle \mathrm{d}s$$

Sei $F(x,y) := v\nabla u = (u_x v, u_y v)$. Dann ist

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = u_{xx}v + u_x v_x + u_{yy}v + u_y v_y = v\Delta u + \langle \nabla u, \nabla v\rangle$$

Einsetzen in den Integralsatz liefert nun:

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = -\int_\Omega v \cdot \nabla u \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} v\langle \nabla u, v\rangle \ \mathrm{d}s$$

Kapitel II.

Finite Differenzenverfahren für die Poisson-Gleichung

Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein **Gebiet**, d.h. eine offene, beschränkte und zusammenhängende Menge mit Rand $\partial\Omega$, eine stückweise C^1-Kurve.
Für $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto u(x, y)$, $u \in C^2(\Omega)$ heisst

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

der **Laplace-Operator**.
Das **Poisson-Problem** mit Dirichlet-Randbedingungen lautet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \ \text{ in } \Omega \\ u &= g, \ \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Falls f und g stetig sind, sucht man $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Bemerkung. 1. Explizite Lösungsformeln existieren nur in einfachen Geometrien.

2. Andere Randbedingungen sind
   - Neumann-Randbedingungen: $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ auf $\partial\Omega$
   - Gemischte oder Robin-Randbedingungen: $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g$ auf $\partial\Omega$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$

1. Finite Differenzen Diskretisierung in $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$

Für $n \geq 1$ führe ein äquidistantes Gitter mit Maschenweite $h = \frac{1}{n+1}$ ein:

$$\begin{aligned} x_j &= j \cdot h, \ j = 0, \ldots, n+1 \\ y_j &= j \cdot h, \ j = 0, \ldots, n+1 \\ \Omega_h &= \{(x_j, y_k) \ : \ 1 \leq j, k \leq n\} \\ \overline{\Omega}_h &= \{(x_j, y_k) \ : \ 0 \leq j, k \leq n+1\} \\ \partial\Omega_h &= \overline{\Omega}_h \setminus \Omega_h \end{aligned}$$

Für $u \in C^4(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) &= \frac{1}{h^2}\left[u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)\right] + \mathcal{O}(h^2) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &= \frac{1}{h^2}\left[u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})\right] + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

Wir ersetzen das Poisson-Problem durch das diskrete Poisson-Problem:
Finde $\{u_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ so, dass

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{h^2}\left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij}\right] &= f_{ij}, \text{ für } (x_i, y_j) \in \Omega_h \\
u_{ij} &= g_{ij}, \text{ für } (x_i, y_j) \in \partial\Omega_h
\end{aligned}$$

Oder anders formuliert, finde $u_h : \overline{\Omega}_h \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\begin{aligned}
-\Delta_h u_h(z) &= f(z), \text{ für } z \in \Omega_h \\
u_h(z) &= g(z), \text{ für } z \in \partial\Omega_h,
\end{aligned}$$

wobei

$$(\Delta_h u_h)(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2}\left[u_h(x_{i+1}, y_j) + u_h(x_{i-1}, y_j) + u_h(x_i, y_{j+1}) + u_h(x_i, y_{j-1}) - 4u_h(x_i, y_j)\right]$$

2. Diskretes Maximumprinzip

Für $n \geq 1$, $h = \frac{1}{n+1}$, betrachte die Differenzengleichung

$$L_h u_h(z) = f(x), \text{ für } z \in \Omega_h,$$

wobei

$$\begin{aligned}
L_h u_h(z) &= \sum_{z_k \in N(z)} \alpha_k(z_k) u_h(z_k), \\
N(z) &= \{z_k \ : \ k = 0, 1, \ldots, 4\}
\end{aligned}$$

Satz 2.1 (Diskretes Maximumsprinzip)**.** Sei $u_h : \overline{\Omega}_h \to \mathbb{R}$ Lösung der Differenzengleichung

$$L_h u_h(z) = f(z), \ z \in \Omega_h$$

mit $f(z) \leq 0$ für $z \in \Omega_h$. Ausserdem gelte für $z \in \Omega_h$:

(i) $\alpha_k(z_k) < 0$ falls $1 \leq k \leq 4$

(ii) $\sum_{z_k \in N(z)} \alpha_k(z_k) = 0$

Dann folgt

$$\max_{z \in \Omega_h} u_h(z) \leq \max_{z \in \partial\Omega_h} u_h(z)$$

Beweis. Angenommen, es gibt ein $\overline{z} \in \Omega_h$ mit $u_h(\overline{z}) = \max_{z\in\overline{\Omega}_h} u_h(z)$ und $u_h(\overline{z}) > \max_{z\in\partial\Omega_h} u_h(z)$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{z_k\in N(\overline{z})\setminus\{\overline{z}\}} \alpha_k(z_k)\left[u_h(z_k) - u_h(\overline{z})\right] \\
&= \sum_{z_k\in N(\overline{z})} \alpha_k(z_k)\left[u_h(z_k) - u_h(\overline{z})\right] \\
&= \sum_{z_k\in N(\overline{z})} \alpha_k(z_k)u_h(z_k) - u_h(\overline{z}) \sum_{z_k\in N(\overline{z})} \alpha_k(z_k) \\
&= L_h u_h(\overline{z}) - 0 = f(\overline{z}) \leq 0
\end{aligned}$$

Also folgt $u_h(z_k) = u_h(\overline{z})$ für $z_k \in N(\overline{z})$. Wiederhole den Beweis mit $\overline{z} \in N(\overline{z})\setminus\{\overline{z}\}$, u.s.w. Nach endlich vielen Schritten kommt man zum Rand und erhält einen Widerspruch. □

Korollar. Seien die beiden Voraussetzungen des Satzes an L_h erfüllt. Dann hat

$$\begin{aligned}
L_h u_h(z) &= f(z), \text{ für } z \in \Omega_h \\
u_h(z) &= g(z), \text{ für } z \in \partial\Omega_h
\end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung.

Beweis. Angenommen es existieren zwei Lösungen u_h und v_h. Dann erfüllt $w_h := u_h - v_h$

$$\begin{aligned}
L_h w_h(z) &= 0, \text{ für } z \in \Omega_h \\
w_h(z) &= 0, \text{ für } z \in \partial\Omega_h
\end{aligned}$$

Nach dem diskreten Maximumsprinzip folgt $w_h(z) \leq 0$ für $z \in \Omega_h$.
Ausserdem gilt:

$$\begin{aligned}
L_h(-w_h(z)) &= 0, \text{ für } z \in \Omega_h \\
-w_h(z) &= 0, \text{ für } z \in \partial\Omega_h
\end{aligned}$$

Also folgt wieder mit dem diskreten Maximumsprinzip $-w_h(z) \leq 0$ für $z \in \Omega_h$. Damit ist aber $w_h = 0$ auf $\overline{\Omega}_h$, also $u_h = v_h$. □

3. Konvergenz der Finiten Differenzen Methode

Wir betrachten das Poisson-Problem

$$\begin{aligned}
-\Delta u &= f \text{ in } \Omega \\
u &= g \text{ auf } \partial\Omega
\end{aligned}$$

und das entsprechende diskrete Problem

$$\begin{aligned}
-\Delta_h u_h &= f \text{ in } \Omega_h \\
u_h &= g \text{ auf } \partial\Omega_h
\end{aligned}$$

und fragen uns, ob das Finite Differenzen Verfahren konvergiert, d.h. ob

$$|u(z) - u_h(z)| \to 0 \text{ für } h \to 0$$

Definition. Ein Finite Differenzen Verfahren L_h heisst **konsistent** mit einem partiellen Differentialoperator (2. Ordnung) L, falls

$$Lu(z) - L_h u_h(z) \to 0 \text{ für } h \to 0 \text{ und für alle } z \in \Omega_h$$

Ein Finite Differenzenverfahren hat die **Konsistenzordnung** m, falls

$$Lu(z) - L_h u_h(z) = \mathcal{O}(h^m) \text{ für } h \to 0$$

und für alle $z \in \Omega_h$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ genügend oft differenzierbar.

Bemerkung. Sei $\eta_h(z) := u(z) - u_h(z)$, $z \in \Omega_h$ der Fehler. Dann gilt für $z \in \Omega_h$:

$$\begin{aligned} L_h\eta_h(z) &= L_h(u - u_h)(z) = L_h u(z) - L_h u_h(z) = L_h u(z) - f(z) \\ &= L_h u(z) - Lu(z) = (L_h u - Lu)(z) = r_h(z), \end{aligned}$$

d.h. der Fehler erfüllt die Gleichung

$$\begin{aligned} L_h\eta_h(z) &= r_h \text{ in } \Omega_h \\ \eta_h &= 0 \text{ auf } \partial\Omega_h \end{aligned}$$

In Matrix-Schreibweise:

$$A_h E_h = R_h$$

Es gilt:

$$\|E_h\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \cdot \|R_h\|_\infty$$

Bemerkung. Hat L_h die Konsistenzordnung m, so gilt:

$$\|R_h\|_\infty = \mathcal{O}(h^m), \; h \to 0$$

Damit $\|E_h\|_\infty \to 0$ für $h \to 0$ gilt, brauchen wir:

- **Konsistenz:** $\|R_h\|_\infty \to 0$ für $h \to 0$
- **Stabilität:** $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq C$ für $h \to 0$, wobei die Konstante C unabhängig von h ist.

$$\text{Konsistenz} + \text{Stabilität} \implies \text{Konvergenz}$$

Lemma. Sei $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ und $R > 0$ so, dass $\Omega \subset \mathbb{B}(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Sei $v_h : \overline{\Omega}_h \to \mathbb{R}$ die Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta_h v_h &= 1 \text{ in } \Omega_h \\ v_h &= 0 \text{ auf } \partial\Omega_h \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $z = (x,y) \in \overline{\Omega}_h$:

$$0 \leq v_h(z) \leq \frac{1}{4}\left(R^2 - \|z\|^2\right)$$

Beweis. Seien

$$w(x,y) := \frac{1}{4}\left(R^2 - (x^2+y^2)\right) \text{ für } (x,y) \in \overline{\Omega}$$
$$w_h(x_i,y_j) := w(x_i,y_j) \text{ für } (x_i,y_j) \in \overline{\Omega}_h.$$

Es ist

$$-\Delta w(x,y) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \cdot \frac{1}{4}\left(R^2 - (x^2+y^2)\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}y\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Unter Verwendung des Fünf-Punkte-Sterns, rechnet man nach, dass auch

$$-\Delta_h w_h = 1$$

gilt. Da $w_h|\partial\Omega_h = \frac{1}{4}\left(R^2 - (x^2+y^2)\right) \geq 0$, erhalten wir

$$-\Delta_h(v_h - w_h) = 0 \text{ in } \Omega_h$$
$$v_h - w_h \leq 0 \text{ auf } \partial\Omega_h$$

Das Maximumsprinzip liefert nun

$$v_h(z) - w_h(z) \leq 0 \text{ für } z \in \partial\Omega_h.$$

Ausserdem gilt

$$-\Delta_h(-v_h) = -1 \text{ in } \Omega_h$$
$$-v_h = 0 \text{ auf } \partial\Omega_h$$

Also ist nach dem Maximumsprinzip

$$v_h(z) \leq 0 \text{ für } z \in \Omega_h$$

Insgesamt haben wir also

$$0 \leq v_h(z) \leq w_h(z) \text{ für } z \in \overline{\Omega}_h$$

□

Satz 3.1 (Konvergenz)**.** Seien $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u_h : \Omega_h \to \mathbb{R}$ Lösungen von

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega$$
$$u = g \text{ auf } \partial\Omega$$

und

$$
\begin{aligned}
-\Delta_h u_h &= f \text{ in } \Omega_h \\
u_h &= g \text{ auf } \partial\Omega_h
\end{aligned}
$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\|u - u_h\|_\infty &\leq Ch^2,\ h \to 0,\ u \in C^4(\overline{\Omega}) \\
\|u - u_h\|_\infty &\leq Ch,\ h \to 0,\ u \in C^3(\overline{\Omega}) \\
\|u - u_h\|_\infty &\to 0,\ h \to 0,\ u \in C^2(\overline{\Omega})
\end{aligned}
$$

Beweis. Sei $\eta_h(z) := u(z) - u_h(z),\ z \in \overline{\Omega}_h$ der Fehler.
Wir wissen:

$$
\begin{aligned}
-\Delta_h \eta_h &= r_h := \Delta u - \Delta_h u \text{ in } \Omega_h \\
\eta_h &= 0 \text{ auf } \partial\Omega_h
\end{aligned}
$$

Weiter gilt (siehe Serie 3):

$$
\begin{aligned}
\|r_h\|_\infty &\leq Ch^2,\ h \to 0,\ u \in C^4(\overline{\Omega}) \\
\|r_h\|_\infty &\leq Ch,\ h \to 0,\ u \in C^3(\overline{\Omega}) \\
\|r_h\|_\infty &\to 0,\ h \to 0,\ u \in C^2(\overline{\Omega})
\end{aligned}
$$

Wir müssen die Stabilität beweisen, d.h. $\|\eta_h\|_\infty \leq C\|r_h\|_\infty$. Dazu betrachten wir

$$
\begin{aligned}
-\Delta_h v_h &= 1 \text{ in } \Omega_h \\
v_h &= 0 \text{ auf } \partial\Omega_h
\end{aligned}
$$

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
-\Delta_h \left(\pm\eta_h - \|r_h\|_\infty v_h\right) &= \left(\pm r_h - \|r_h\|_\infty\right) \leq 0 \text{ in } \Omega_h \\
\pm\eta_h - \|r_h\|_\infty v_h &= 0 \text{ auf } \partial\Omega_h
\end{aligned}
$$

Das Maximumsprinzip impliziert nun

$$\pm\eta_h - \|r_h\|_\infty v_h \leq 0 \text{ in } \overline{\Omega}_h.$$

Also ist auch

$$|\eta_h(z)| \leq \|r_h\|_\infty |v_h(z)|$$

für $z \in \overline{\Omega}_h$.
Nun folgt mit dem Lemma:

$$\|\eta_h\|_\infty \leq \|r_h\|_\infty \|v_h\|_\infty \leq \|r_h\|_\infty \cdot \frac{1}{4}R^2$$

□

Bemerkung. 1. Der obige Beweis gilt auch für allgemeine Gebiete, die diskret zusammenhängend sind. Der Beweis des Maximumsprinzip und des Lemmas sind identisch.

2. Finite Differenzen Verfahren sind extrem effizient auf regelmässigen Gittern und einfachen Geometrien. Sie lassen sich allerdings nur schwer anwenden bei

   - Krummen Rändern
   - Unstrukturierten Gittern
   - Lokalen Verfeinerungen

3. Verahren höherer Ordnung benutzen mehr Punkte, z.B. der Neun-Punkte-Stern. Dies wiederum führt zu Problemen bei Randbedingungen.

Kapitel III.

Finite Elemente Verfahren für die Poisson-Gleichung

1. Variationsformulierung in 1D

Betrachte

$$\begin{aligned} -u'' &= f \text{ in } \Omega = (0,1) \\ u(0) &= 0 \\ u'(1) &= 0 \end{aligned}$$

Durch Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned} u'(\xi) &= -\int_0^\xi f(t)\ \mathrm{d}t + u'(0) \\ u(x) &= -\int_0^x \int_0^\xi f(t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\xi + xu'(0) + \underbrace{u(0)}_{=0} \\ 0 = u'(1) &= -\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = u'(0) \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Lösungsformel

$$u(x) = x\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^x \int_0^\xi f(t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\xi$$

Bemerkung. Wir sehen: Falls $f \in C^k(\overline{\Omega})$, dann ist $u \in C^{k+2}(\overline{\Omega})$.

Definition. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst **stückweise** C^k, wenn es endlich viele offene Teilgebiete $\Omega_i \subset \Omega$ gibt mit $f_{|\Omega_i} \in C^k(\overline{\Omega}_i)$. Wir schreiben $f \in C^k_{stw}(\Omega)$.

Satz 1.1. Sei u gegeben durch (1) mit $f \in C^0_{stw}(\Omega)$. Dann ist $u \in C^2_{stw} \cap C^1(\Omega)$.

Beweis. Klar. $\square$

Bemerkung. Die Lösungsformel (1) hat eine Sinn auf $\overline{\Omega}$, auch wenn die Differentialgleichung bei $x = s_i$ nicht gilt.

Idee. Verlange (1) nicht punktweise sondern im Mittel. Dazu multipliziere f mit einer Testfunktion $v \in C^1(\Omega)$, $v(0) = 0$ und integriere partiell:

$$\int_0^1 f(x)v(x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^1 v(x)u''(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 u'(x)v'(x)\ \mathrm{d}x - \underbrace{\big[v(x)u'(x)\big]_0^1}_{=0}$$

Seien

$$a(u,v) := \int_0^1 u'(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$

und

$$\ell(v) := \int_0^1 f(x)v(x)\ \mathrm{d}x\ .$$

Variationsformulierung: Finde $u \in V$ (V ist noch nicht näher definiert), so dass

$$a(u,v) = \ell(v),\ v \in V \tag{V}$$

Für $u, v, w \in C^1(\overline{\Omega})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\begin{aligned} a(u+v,w) &= a(u,w) + a(v,w) \\ a(u,v+w) &= a(u,v) + a(u,w) \\ a(\lambda u, v) &= \lambda a(u,v) = a(u,\lambda v) \end{aligned}$$

Also ist w eine Bilinearform.

$$\ell(v + \lambda w) = \ell(v) + \lambda l(w)$$

Also ist ℓ ein lineares Funktional.
Offen ist noch die Wahl von V.

1.1. Sobolevräume in 1D

Idee. Lineare Funktionalräume mit *endlicher Energie.*

$$H^k(\Omega) \supsetneq C^k(\overline{\Omega})$$

Definition. Sei $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Dann heisst $v : \Omega \to \mathbb{R}$ **schwache Ableitung** von u, falls

$$\int_\Omega v\varphi\ \mathrm{d}x = -\int_\Omega u\varphi'\ \mathrm{d}x,\ \varphi \in C_0^1(\overline{\Omega})\ .$$

Analog heisst v k-te schwache Ableitung von u, falls

$$\int_\Omega v\varphi\ \mathrm{d}x = (-1)^k \int_\Omega u\varphi^{(k)}\ \mathrm{d}x,\ \varphi \in C_0^k(\overline{\Omega})\ ,$$

wobei

$$C_0^k(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in C^k(\overline{\Omega})\ :\ \varphi^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(1) = 0,\ 0 \le j \le k-1\}$$

Beispiele. 1. Sei $u(x) := |x|$, $\Omega = (-1, 1)$, dann ist

$$v(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ \text{nicht definiert}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

die schwache Ableitung von u. Denn für $\varphi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ ist

$$\int_{-1}^{1} v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

und

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} x\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-1}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + [x\varphi(x)]_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - [x\varphi(x)]_{0}^{1}\ . \end{aligned}$$

2. Sei $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1_{stw}(\Omega)$. Dann hat u eine schwache Ableitung u' gegeben durch

$$u'(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x), & x_{i-1} < x < s_i \\ \text{nicht definiert}, & x = s_i \end{cases}$$

3. Falls $u \in C^1(\overline{\Omega})$, d.h. u ist differenzierbar im üblichen Sinn, dann ist die schwache Ableitung gleich der klassischen Ableitung.

Konvention. Alle Ableitungen werden als schwache Ableitungen verstanden.

Definition. Sei $\Omega = (0, 1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &:= \{u \in L^2(\Omega)\ :\ u' \in L^2(\Omega)\} \\ H^k(\Omega) &:= \{u \in L^2(\Omega)\ :\ u^{(j)} \in L^2(\Omega),\ 0 \le j \le k\} \\ H^0(\Omega) &:= L^2(\Omega) := \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ messbar } :\ \int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x < \infty\right\} \\ \|u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Bemerkung. Es gilt:

$$L^2(\Omega) \supset H^1(\Omega) \supset H^2(\Omega) \supset \ldots \supset H^k(\Omega) \supset \ldots$$

Satz 1.2. $L^2(\Omega)$ ist ein Hilbertraum für das Skalarprodukt

$$(u, v) := \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

d.h. ein vollständiger linearer normierter Vektorraum (Banachraum) bezüglich der Norm

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} := \sqrt{(u,u)}\ .$$

Es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|(u,v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Beweis. Siehe Funktionalanalysis, Übungen. □

Bemerkung.

1. Man identifiziert $u, v \in L^2(\Omega)$ falls $u(x) = v(x)$ fast überall in Ω, d.h. $\|u - v\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Falls $u \in L^2(\Omega)$, macht es im Allgemeinen keinen Sinn von Punktwerten von $u(x)$ zu sprechen. Insbesondere sind $u(0)$ oder $u(1)$ nicht wohldefiniert.

2. Sei $u \in L^2(\Omega)$.

$$\int_\Omega u\varphi = 0,\ \forall \varphi \in C^\infty(\Omega) \qquad \Longrightarrow \qquad u = 0 \text{ (im } L^2\text{-Sinn)}$$

Satz 1.3. Für $k \geq 0$ ist $H^k(\Omega)$ ein Hilbertraum für das Skalarprodukt

$$(u,v) := \sum_{j=0}^{k} (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(\Omega)}$$

Die induzierte Norm ist gegeben durch

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} := (u,u)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Weiter ist die $H^k(\Omega)$-Seminorm gegeben durch

$$|u|_{H^k(\Omega)} := \|u^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}$$

Beispiele.

1. Wenn $u \in H^1(\Omega)$, dann ist

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_1 = \sqrt{\|u\|^2_{L^2} + \|u'\|^2_{L^2}}$$
$$|u|_{H^1(\Omega)} = |u|_1 = \|u'\|_{L^2(\Omega)}$$

Wenn $\Omega = (0,1)$ und $u = 1$ auf Ω, dann ist $|u|_1 = 0$ aber $\|u\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

2. $u(x) = |x - \frac{1}{2}|^{-\frac{1}{4}} \in L^2(\Omega)$, aber $u(\frac{1}{2}) = \infty$.

Satz 1.4. Sei $u \in H^1(\Omega)$, $\Omega = (0,1)$. Dann existiert ein $\tilde{u} \in C(\overline{\Omega})$ mit $u(x) = \tilde{u}(x)$ fast überall.

Bemerkung. 1. Falls $u \in H^1(\Omega)$, macht es Sinn von Punkt- und Randwerten von u zu sprechen. Damit sind immer die Werte von $\tilde{u}$ gemeint ($u = \tilde{u}$ in L^2).

2. $H^1(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$

Beispiel. Sei $\Omega = (-1, 1)$ und

$$u(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

Dann ist $u \notin H^1(\Omega)$.
Es gilt $u \in L^2(\Omega)$. Angenommen $u' \in L^2(\Omega)$, wobei u' die schwache Ableitung von u bezeichne. Dann gilt per Definition der schwachen Ableigung für jedes $\varphi \in C_0^1(\Omega)$:

$$\int_{-1}^{1} u'\varphi \, \mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} u\varphi' \, \mathrm{d}x = -\int_{0}^{1} \varphi' \, \mathrm{d}x = \varphi(0)$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt:

$$|\varphi(0)| = |(u', \varphi)| \leq \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

Für jedes $C > 0$ gibt es aber ein $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ mit

$$|\varphi(0)| \geq C\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \ ,$$

was ein Widerspruch darstellt.

Satz 1.5. Für $m \geq 0$ gilt: $C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ liegt dicht in $H^m(\Omega)$.

Bemerkung. Funktionen in $H^m(\Omega)$ lassen sich beliebig genau durch glatte Funktionen approximieren (bzgl. der $\|\cdot\|_{H^m}$-Norm).

Definition. Die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. der $\|\cdot\|_{H^m}$-Norm heisst $H_0^m(\Omega)$.

$$C_0^\infty(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) \ : \ \mathrm{supp}\{u\} \subset\subset \Omega\}$$

Beispiel. Sei $\Omega = (0, 1)$, $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \ : \ v(0) = v(1) = 0\}$. Sei $u(x) = x$ auf Ω.
Dann ist $u \in H^1(\Omega)$, aber $u \notin H_0^1(\Omega)$.
Angenommen, $u \in H_0^1(\Omega)$. Definiere $L : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \int_0^1 v'(x) \, \mathrm{d}x$.
Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt:

$$|L(v)| = \left| \int_\Omega 1 \cdot v'(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \|v'\|_{L^2(\Omega)} \|1\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_H^1(\Omega)$$

Also ist L stetig.
Sei $\{\varphi_n\}_{n\geq 1} \subset C_0^\infty$ so, dass $\|\varphi_n - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0$ für $n \to \infty$.
Es folgt

$$|L(u) - L(\varphi_n)| = |L(u - \varphi_n)| \leq \|u - \varphi_n\|_{H^1(\Omega)} \to 0 \ ,$$

d.h. $L(\varphi_n) \to L(u)$ für $n \to \infty$. Aber es gilt

$$L(\varphi_n) = \int_0^1 \varphi_n'(x) \, \mathrm{d}x = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad L(u) = \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x = 1 \ ,$$

also haben wir einen Widerspruch gefunden und damit ist $u \notin H_0^1(\Omega)$.

Wir können nun den Raum V für (V) festlegen:
Finde $u \in V := \{u \in H^1(\Omega)\ :\ u(0) = 0\}$ so, dass

$$a(u, v) = \int_\Omega u'v' = \ell(v) = \int_\Omega fv \quad \forall v \in V$$

Satz 1.6 ((V) $\implies$ (P))**.** Sei $f \in C(\overline{\Omega})$ und $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Falls u eine Lösung von (V) ist, so ist u auch eine Lösung der starken From, d.h.

$$\begin{aligned} -u'' &= f \text{ in } \Omega \\ u(0) &= 0 \\ u'(1) &= 0 \end{aligned}$$

Beweis. Wir wissen:

$$\int_\Omega u'v' = \int_\Omega fv \quad \forall v \in V$$

Sei $v \in V \cap C(\overline{\Omega})$.

$$\int_\Omega fv \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u'v' \, \mathrm{d}x = -\int_0^1 u''v \, \mathrm{d}x + u'(1)v(1) - \underbrace{u'(0)v(0)}_{=0} ,$$

d.h. für $v \in V \cap C(\overline{\Omega})$ mit $v(1) = 0$ gilt:

$$\int_0^1 \big(f(x) + u''(x)\big)\, v(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

Da $w(x) := f(x) + u''(x)$ auf $[0, 1]$ stetig ist, folgt $w = 0$.
Da $u \in V$, ist $u(0) = 0$ und für $v(x) := x \in V$ haben wir

$$0 = \int_0^1 \big(f(x) + u''(x)\big)\, v(x) \, \mathrm{d}x = u'(1)v(1) = u'(1) .$$

Also erfüllt u automatisch die homogene Neumann-Randbedingung bei $x = 1$. Deshalb heissen Neumann-Randbedingungen auch natürliche Randbedingungen. □

2. Die Finite Elemente Methode in 1D

Betrachte das Modellproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \text{ in } \Omega = (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned} \tag{P}$$

und die Variationsformulierung:
Finde $u \in V = H_0^1(\Omega)$ so, dass

$$a(u, v) = \ell(v) \tag{V}$$

für alle $v \in V$ mit

$$a(u,v) := \int_\Omega u'(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$
$$\ell(v) := \int_\Omega f(x)v(x)\ \mathrm{d}x$$

Galerkin Verfahren

Wähle $V_h \subset V$ Teilraum von V mit $\dim V_h < \infty$. Ersetze V durch V_h in (V). Finde $u_h \in V_h$ so, dass

$$a(u_h, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V_h$$

Wahl von V_h: Sei $K = (a,b) \subset \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}^\ell := \{p(x) \text{ Polynom } : \ p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_\ell x^\ell\}\ .$$

Wir wählen

$$V_h := \{v \in V \ : \ v_{|(x_i,x_{i+1})} \in \mathcal{P}^1((x_i,x_{i+1})),\ i = 0,\ldots N\}\ ,$$

d.h. wenn $v \in V_h$, dann ist $v(0) = v(1) = 0$, $v \in C^0(\Omega)$ $(H_0^1(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega}))$ und v ist stückweise linear.
Sei $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ eine Basis von V_h:

$$\varphi_j = \begin{cases} 1 - \frac{|x-x_j|}{h}, & x_j \le x \le x_{j+1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $\varphi_j(x_k) = \delta_{jk}$ und jedes $v \in V_h$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$v(x) = \sum_{j=1}^N v_j \varphi_j(x)\ , \quad v_j \in \mathbb{R}$$

Insbesondere ist

$$v(x_k) = \sum_{j=1}^N v_j \varphi_j(x_k) = v_k$$

Galerkin Approximation $u_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} a(u_h, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V_h \quad &\Leftrightarrow \quad a(u_h, \varphi_i) = \ell(\varphi_i) \quad \forall i = 1,\ldots,N \\ &\Leftrightarrow \quad a\left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j, \varphi_i\right) = \ell(\varphi_i) \quad \forall i = 1,\ldots,N \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^N a(\varphi_j,\varphi_i) u_j = \ell(\varphi_i) \quad \forall i = 1,\ldots,N \\ &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\ell}\ , \end{aligned}$$

wobei

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N} = (a(\varphi_i,\varphi_j))_{i,j=1,\dots,N}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\ell} = \begin{bmatrix} \ell(\varphi_1) \\ \vdots \\ \ell(\varphi_N) \end{bmatrix}$$

Die $(N \times N)$-Matrix $\boldsymbol{A}$ heisst **Steifigkeitsmatrix** und der Vektor $\boldsymbol{\ell}$ heisst **Lastvektor**.

Bestimme $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$:

$$\begin{aligned}
a_{ii} &= a(\varphi_i,\varphi_i) = \int_\Omega \varphi_i'\varphi_i' \,\mathrm{d}x = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'(x)^2 \,\mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x)^2 \,\mathrm{d}x = h\left(-\frac{1}{h}\right)^2 + h\left(\frac{1}{h}\right)^2 = \frac{2}{h} \\
a_{ij} &= 0 \text{ falls } |i-j| \geq 2 \\
a_{i,i+1} &= a(\varphi_i,\varphi_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x)\varphi_{i+1}'(x) \,\mathrm{d}x = h\frac{1}{h}\left(-\frac{1}{h}\right) = -\frac{1}{h} \\
a_{i+1,i} &= a_{i,i+1}
\end{aligned}$$