Projektarbeit

Anhand von Messdaten $\widetilde{U}$ einer akustischen Welle im Fernfeld soll die unbekannte Position $\mathbf{z}^*$ einer Quelle f bestimmt werden. Dazu betrachten wir die Helmholtzgleichung mit Sommerfeld-Randbedingung:

$$\begin{aligned} -\Delta u - k^2 u &= f \qquad \text{in } \ \Omega\,, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= iku \ \ \text{auf } \ \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\Omega = (0,1)^2$ und $k = 13$ ist. Die Quelle entspricht einem um $\mathbf{z}^*$ zentrierten Gausspuls

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{z}^*) = 10 \, \exp\left(- \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}^*\|^2}{r^2} \right), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)\,, \quad \mathbf{z}^* = (z_1^*, z_2^*)\,, \quad r = 0.05\,.$$

Die Messwerte $\widetilde{U}$ der numerischen Lösung von (1) sind zwar am Rand bekannt, die Position $\mathbf{z}^*$ der Quelle f ist jedoch unbekannt.

Das Ziel der Projektarbeit liegt in einer `MATLAB`*-Implementation zur Berechnung der Koordinaten vom Punkt* $\mathbf{z}^*$ *anhand der gegebenen Daten* $\widetilde{U}$.

Numerische Vorgehensweise

1. Verwenden Sie stückweise lineare Finite-Elemente zur Diskretisierung von (1). Somit erhalten Sie das lineare Gleichungssystem $AU = F(\mathbf{z}^*)$, wobei $A = K - k^2 M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ und $F \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ von der Position $\mathbf{z}^*$ der Quelle abhängt. Hierbei bezeichnet K die Steifigkeitsmatrix, M die Massenmatrix und n die Anzahl Gitterpunkte.

2. Zur Bestimmung von $\mathbf{z}^*$ betrachten Sie die Optimierungsaufgabe

$$\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^2} J(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \|CU(\mathbf{z}) - \widetilde{U}\|^2_{\mathbb{R}^m} \tag{2}$$

unter der Gleichheitsnebenbedingung

$$A\,U(\mathbf{z}) = F(\mathbf{z}). \tag{3}$$

Hier bezeichnet m die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand und $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die punktweise Restriktion auf $\partial\Omega$. Leiten Sie die Optimalitätsbedingung $\nabla_{\mathbf{z}} J(\mathbf{z}^*) = 0$ her.

3. Verwenden Sie das Verfahren des steilsten Abstiegs zur Lösung der Optimierungsaufgabe (2). Dazu berechnen Sie in einem Punkt $\mathbf{z}^\ell$ den Gradienten $\nabla_{\mathbf{z}} J(\mathbf{z}^\ell)$ und benutzen die entgegengesetzte Suchrichtung $\mathbf{d}^\ell := -\nabla_{\mathbf{z}} J(\mathbf{z}^\ell)$. Mit gegebener Schrittweite α iterieren Sie $\mathbf{z}^{\ell+1} = \mathbf{z}^\ell + \alpha\, \mathbf{d}^\ell$. Das iterative Verfahren wird abgebrochen, sobald $\|\nabla_{\mathbf{z}} J(\mathbf{z}^\ell)\| \leq tol$.

Führen Sie folgenden Schritte bei der Implementation durch.

1. Laden Sie die Daten der Triangulierung von Ω und der numerischen Lösung auf $\partial\Omega$ von der Webseite der Vorlesung herunter.

   Hinweis: *Jede Zeile der Liste* `uh_b` *enthält die Nummer eines Randknotens und den entsprechenden Wert der numerischen Lösung.*

2. Berechnen Sie die Elementssteifigkeitsmatrix und die Elementmassenmatrix für jedes Element. Assemblieren Sie die globale Steifigkeits- und Massenmatrix, wobei Sie die Randbedingung berücksichtigen.

3. Um den Elementlastvektor F und die Jacobi-Matrix $\nabla_{\mathbf{z}} F \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ für ein Element und einen gegebenen Punkt $\mathbf{z}$ zu berechnen, implementieren Sie die Funktion:

   ```
   function [b_el, b_el_dz1, b_el_dz2] = Element_Vektor(t, p, el, z1, z2)
   ```

4. Um den globalen Lastvektor und die globale Jacobi-Matrix für einen gegebenen Punkt $\mathbf{z}$ aufzubauen, implementieren Sie die Funktion:

   ```
   function [rhs, grad_rhs] = Assemb_RHS(t, p, z1, z2)
   ```

5. Wählen Sie $\alpha = 2$, $tol = 10^{-6}$ und $\mathbf{z}^0 = (0.5, 0.5)$ im Verfahren des steilsten Abstiegs. Nach jeder Iteration zeichnen Sie die Funktion $f(\mathbf{z}^\ell)$. Dadurch ensteht ein `Matlab`-Film, der es erlaubt, den Fortschritt des iterativen Verfahrens zu verfolgen. Erzeugen Sie eine Tabelle, die die Koordinaten vom Punkt $\mathbf{z}^\ell$ sowie die Norm $\|\nabla_{\mathbf{z}} J(\mathbf{z}^\ell)\|$ für jede Iteration ℓ enthält.

Bis zum Ende Juni 2011 erwarten wir einen Bericht (5-10 Seiten inkl. Bilder) zu Ihrem Projekt.