Projektarbeit

Zur Berechnung der Temperaturverteilung im Grossen Hörsaal am Mathematischen Institut betrachten wir das folgende Modellproblem

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \times (0,T)\,,\\
u(\cdot,0) &= T_{MI} \quad \text{in } \Omega\,,\\
\frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_W \times (0,T)\,,\\
\frac{\partial u}{\partial n} + u &= T_{BS} \quad \text{auf } \Gamma_F \times (0,T)\,,\\
\frac{\partial u}{\partial n} + u &= T_{MI} \quad \text{auf } \Gamma_T \times (0,T)\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

wobei $\Omega = (0,5) \times (0,2) \subset \mathbb{R}^2$ und $\partial\Omega = \Gamma_F \cup \Gamma_T \cup \Gamma_W$. Wir nehmen an, dass die Fenster

$$\Gamma_F = \{(x,2) \ : \ 0.5 \leq x \leq 1.1\,, 1.6 \leq x \leq 2.2\,, 2.7 \leq x \leq 3.3\,, 3.8 \leq x \leq 4.4\}$$

sowie die Türen

$$\Gamma_T = \{(x,0) \ : \ 0.75 \leq x \leq 1.5\,, 3.5 \leq x \leq 4.25\}$$

nicht isoliert sind. Die Wände $\Gamma_W = \partial\Omega \backslash \{\Gamma_F \cup \Gamma_T\}$ betrachten wir als isoliert. Die Quelle

$$f(x,y) = \begin{cases} 1000\sqrt{r^2 - (x-z_x)^2 - (y-z_y)^2} & \text{für } (x-z_x)^2 + (y-z_y)^2 < r^2\,,\\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

modeliert die Heizung, wenn sie eingeschaltet ist. Im Saal befinden sich vier Heizkörper, die mit $r = 0.2$ und $(z_x, z_y) \in \{(0.8,1.7)\,,(1.9,1.7)\,,(3.0,1.7)\,,(4.1,1.7)\}$ gegeben sind.

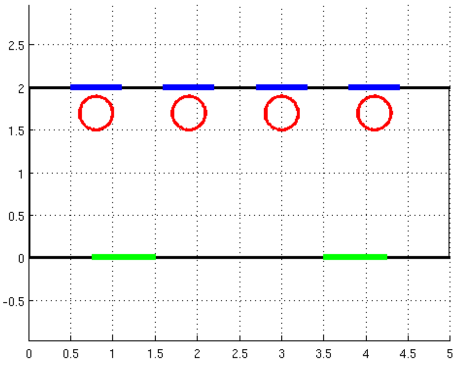

Abbildung 1: Das Gebiet Ω: die Türen (grün), die Fenster (blau), die Heizkörper (rot)

Das Ziel der Projektarbeit liegt in einer `MATLAB`-Implementierung zur Lösung des Modellproblems (1) mittels stückweise linearen Finiten-Elementen (für die Ortsdiskretisierung) und des impliziten Euler-Verfahrens (für die Zeitdiskretisierung). Führen Sie folgenden Schritte durch.

1. Laden Sie die Daten der Triangulierung von Ω aus der Webseite der Vorlesung herunter. Da finden Sie eine grobe sowie eine feine Triangulierung.

   Hinweis: *Die dritte Spalte der Liste der Randknoten* `b` *enthält die Information über den Typ der Randkante. Die Wände sind mit 0 notiert, die Türen mit 1 und die Fenster mit 2.*

2. Zur Visualisierung der groben Triangulierung erzeugen Sie die Funktion:

   ```
   function Plot_Gitter(t, p, b)
   ```

   Alle Randkanten sollen je nach dem Typ mit verschiedener Farbe gedruckt sein.

   Hinweis: *Die* `MATLAB`*-Funktionen* `patch` *und* `line` *sind hilfreich.*

3. Berechnen Sie die Elementssteifigkeitsmatrix, die Elementmassenmatrix und den Elementslastvektor für jedes Element.

   ```
   function [K_el M_el l_el] = Element_Matrix_Vektor(t, p, el)
   ```

   Hinweis: *Bei der Implementierung des Elementslastvektors approximieren Sie die Funktion f durch ihren Wert im Schwerpunkt des Elements.*

4. Assemblieren Sie die globale Steifigkeits- und Massenmatrix, und bauen Sie den globalen Lastvektor auf. Dann berücksichtigen Sie die Randbedingungen.

5. Wählen Sie $T_{MI} = 14^o$ (die Durchschnittstemperatur im Winter im Gang vor dem Grossen Hörsaal), $T_{BS} = 1.3^o$ (die Durchschnittstemperatur im Dezember in Basel) und die Zeitschrittweite $\Delta t = 0.2$. Bestimmen Sie den Zeitpunkt T^*, zu dem die Durchschnittstemperatur im Grossen Hörsaal schon angenehm (d.h. mehr als 24^o) geworden ist. Erzeugen Sie einen MATLAB-Film der numerischen Lösung bis zum Zeitpunkt T^*.

   Hinweis: *Informationen zur Erzeugung von Filmen findet sich in der Matlab-Hilfe unter dem Suchbegriff* `movie`.

6. Welche räumliche Verteilung der vier Heizkörper im Grossen Hörsaal würden Sie vorschlagen, damit die Temperatur schneller angenehm wird?

Bis zum Ende Januar 2011 erwarten wir einen Bericht (5-10 Seiten) von Ihrem Projekt.